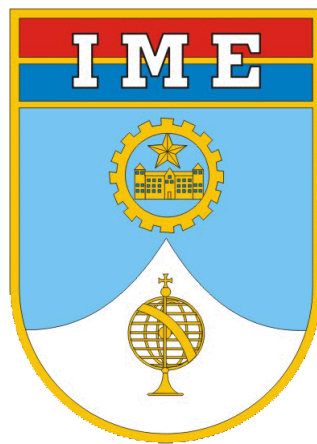


MINISTÉRIO DA DEFESA
EXÉRCITO BRASILEIRO
DEPARTAMENTO DE CIÊNCIA E TECNOLOGIA
INSTITUTO MILITAR DE ENGENHARIA
(REAL ACADEMIA DE ARTILHARIA, FORTIFICAÇÃO E DESENHO, 1792)



INSTITUTO MILITAR DE ENGENHARIA

Uma Investigação Preliminar De Rastreamento De Alvos Em Radars De
Contrabateria - PFC

MATEUS **DANTAS** LINS DE OLIVEIRA
IGOR LUCINDO CARDOSO

Sumário

1	Introdução	1
2	Literatura	1
2.1	Visão geral modelo do sistema de espaço de estados mais Kalman filter . .	1
2.2	Espaço de estados	1
2.2.1	Medição	2
2.3	Kalman Filter	2
2.3.1	Algoritmo de Kalman filter	3
2.3.2	Observações	3
2.4	Interpolação dos Pontos	4
2.4.1	Introdução	4
2.4.2	Processo de Interpolação Parabólica	4
2.4.3	Vantagens do Método	4
2.5	Resistência Do Ar	5
2.6	Sistema não Linear	6
2.7	Kalman Filter Extendido (EKF)	8
3	Metodologia	9
3.1	Modelagem do Espaço de Estados	9
3.1.1	Equacionamento 2D	9
3.1.2	M.R.U. e Parábola	10
3.1.3	Equacionamento 3D	10
3.2	Filtragem Da Posição do Objeto	11
3.2.1	Método 1	11
3.2.2	Método 2	11
3.2.3	Método 3	11
3.3	Predição do Ponto de Impacto e Disparo	11
3.3.1	Ponto de Impacto	11
3.3.2	Filtragem Inversa	11
3.3.3	Equacionamento direto	12
3.4	Modelagem Do Sistema Com o Parâmetro De Arrasto	12
3.4.1	Sistema Não linear Discretizado	16
4	Resultados e Discussões	18
4.1	Análise Das Simulações Utilizando Kalman Filter	18
4.1.1	Obtenção Da Matriz Covariância Inicial	19
4.1.2	Obtenção Do Período De Amostragem	20
4.1.3	Comparação Das Localidades Da Medida	21
4.1.4	Interpolação	23

1 Introdução

O filtro de Kalman é um algoritmo de estimativa que visa obter o melhor estimador possível para o estado de um sistema dinâmico a partir de uma série de medidas imprecisas e sujeitas a ruído. Ele é amplamente utilizado em sistemas de controle, navegação, processamento de sinais e em muitas outras aplicações.

Para o projeto em questão, ele será utilizado para prever trajetórias balísticas e determinar tanto o ponto de impacto (PI) e o ponto de disparo (PD). E serão estimados a partir de um trecho de trajetória obtido pelo radar de contrabateria.

2 Literatura

2.1 Visão geral modelo do sistema de espaço de estados mais Kalman filter

Após tomar conhecimento todos os blocos necessários para o projeto, é feita a conexão entre as partes, resultando no modelo geral do projeto.

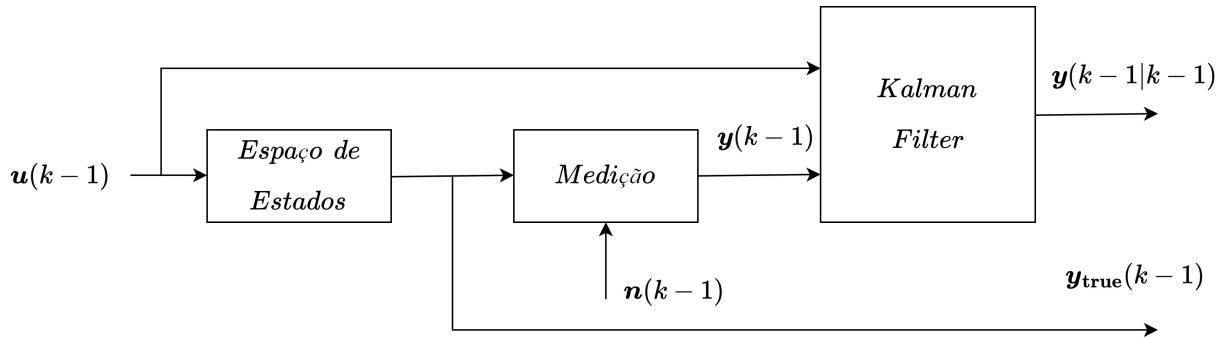


Figura 1: Visão geral do modelo

A seguir, será feita uma análise particular para cada bloco presente no modelo.

2.2 Espaço de estados

Dado a modelagem do sistema de espaço de estados, temos as equações resultantes do diagrama de blocos proposto.

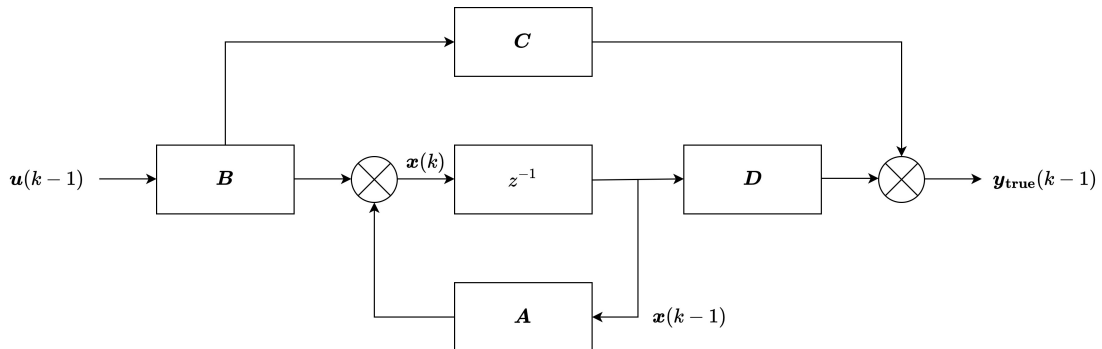


Figura 2: Modelo de espaço de estados

As equações abaixo representam o modelo proposto na figura, onde o estado $\mathbf{x}(k)$ e a saída \mathbf{y}_{true} dependem de seu estado anterior e do vetor de entradas \mathbf{u} .

$$\mathbf{x}(k) = \mathbf{A}\mathbf{x}(k-1) + \mathbf{B}\mathbf{u}(k-1) \quad (1)$$

$$\mathbf{y}_{\text{true}}(k-1) = \mathbf{C}\mathbf{x}(k-1) + \mathbf{D}\mathbf{u}(k-1) \quad (2)$$

2.2.1 Medição

A saída medida é dada pela posição real do projétil somada ao ruído de medição, que neste caso é atribuído ao erro de medição do próprio radar que será empregado.

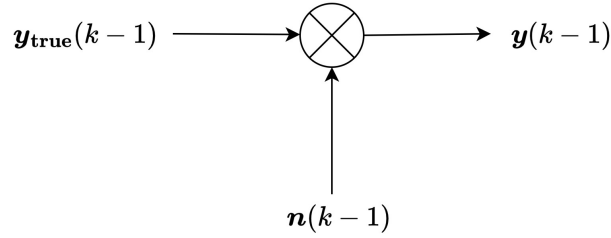


Figura 3: Caption

$$\mathbf{y}(k-1) = \mathbf{y}_{\text{true}}(k-1) + \mathbf{n}(k-1) \quad (3)$$

2.3 Kalman Filter

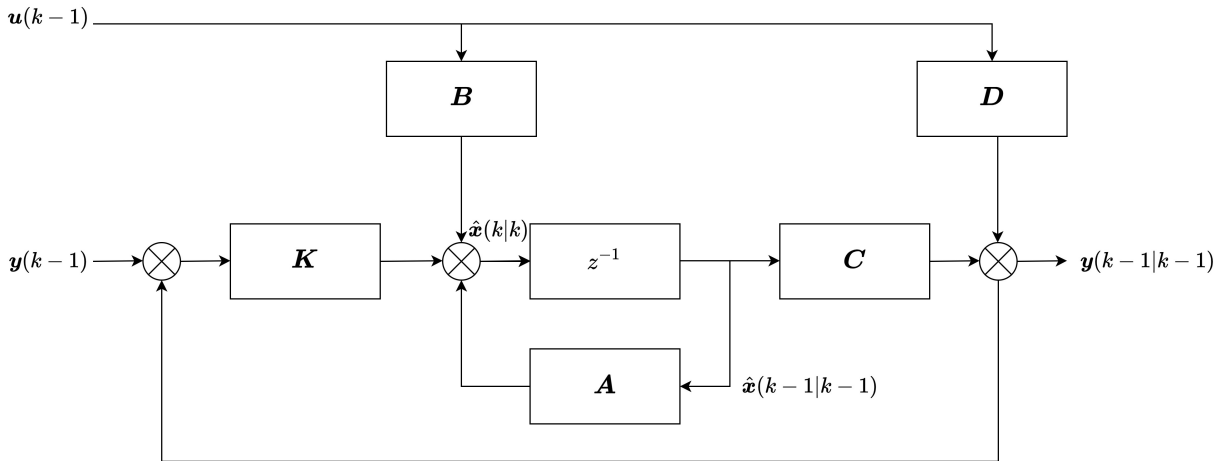


Figura 4: Caption

$$\hat{\mathbf{x}}(k|k-1) = \mathbf{A}\hat{\mathbf{x}}(k-1|k-1) + \mathbf{B}\mathbf{u}(k-1) \quad (4)$$

$$\hat{\mathbf{x}}(k|k) = \hat{\mathbf{x}}(k|k-1) + \mathbf{K}(k)[\mathbf{y}(k-1) - \mathbf{C}\hat{\mathbf{x}}(k-1|k-1) - \mathbf{D}\mathbf{u}(k-1)] \quad (5)$$

$$\hat{\mathbf{y}}(k-1|k-1) = \mathbf{C}\hat{\mathbf{x}}(k|k-1) + \mathbf{D}\mathbf{u}(k-1) \quad (6)$$

Onde:

$$\mathbf{K}(k) = \mathbf{P}(k|k-1)\mathbf{C}^T[\mathbf{C}\mathbf{P}(k|k-1)\mathbf{C}^T + \mathbf{R}]^{-1} \quad (7)$$

2.3.1 Algoritmo de Kalman filter

Será realizada através do algoritmo tanto a previsão do ponto de impacto quanto o ponto de onde partiu o disparo do projétil.

Equacionamento do Modelo [4]

Equações de previsão:

$$\hat{\mathbf{x}}(k|k-1) = \mathbf{A}\hat{\mathbf{x}}(k-1|k-1) + \mathbf{B}\mathbf{u}(k-1) \quad (8)$$

$$\mathbf{P}(k|k-1) = \mathbf{A}\mathbf{P}(k-1|k-1)\mathbf{A}^T + \mathbf{Q} \quad (9)$$

Equações de atualização:

$$\mathbf{K}(k) = \mathbf{P}(k|k-1)\mathbf{C}^T[\mathbf{C}\mathbf{P}(k|k-1)\mathbf{C}^T + \mathbf{R}]^{-1} \quad (10)$$

$$\hat{\mathbf{x}}(k|k) = \hat{\mathbf{x}}(k|k-1) + \mathbf{K}(k)[\mathbf{y}(k-1) - \mathbf{C}\hat{\mathbf{x}}(k-1|k-1) - \mathbf{D}\mathbf{u}(k-1)] \quad (11)$$

$$\mathbf{P}(k|k) = [\mathbf{I} - \mathbf{K}(k)\mathbf{C}]\mathbf{P}(k|k-1) \quad (12)$$

Equação da saída estimada:

$$\mathbf{y}(k-1|k-1) = \mathbf{C}\hat{\mathbf{x}}(k-1|k-1) + \mathbf{D}\mathbf{u}(k-1) \quad (13)$$

Onde:

- $\hat{\mathbf{x}}(k|k-1)$ é a predição do estado
- $\hat{\mathbf{x}}(k|k)$ é a estimativa do estado
- $\mathbf{P}(k|k)$ é a matriz de covariância do erro na estimativa do estado
- \mathbf{Q} é a covariância do processo de ruído do estado
- $\mathbf{K}(k)$ é o ganho de Kalman
- \mathbf{R} é a covariância do ruído na medida
- $\mathbf{y}(k)$ é a saída medida
- $\mathbf{y}(k|k)$ é a saída estimada

2.3.2 Observações

- Tornar \mathbf{Q} maior fará o modelo confiar mais nos dados medidos, enquanto tornar \mathbf{P} maior fará o modelo confiar mais na predição.
- Escolhendo o estado estimado inicial preciso, $\hat{\mathbf{x}}(0|0) = \mathbf{x}(0)$, temos que $\mathbf{P}(0|0) = \mathbf{x}(0)\mathbf{x}(0)^T$, mas quando não sabemos o estado estimado inicial, é comum escolher $\mathbf{P}(0|0) = \sigma^2\mathbf{I}$ onde σ^2 é grande.
- Um método prático para determinar \mathbf{Q} e \mathbf{R} é a técnica de mínimos quadrados de autocovariância (ALS, na sigla em inglês), que utiliza as autocovariâncias defasadas no tempo dos dados operacionais de rotina para estimar as covariâncias.

2.4 Interpolação dos Pontos

2.4.1 Introdução

A interpolação é uma técnica matemática usada para estimar valores entre pontos conhecidos de um conjunto de dados. Na presente simulação de radar de contrabateria, utilizando o período de amostragem original de 20 ms, a interpolação parabólica vai ser utilizada para obter valores intermediários a cada 5 ms. Esta técnica será utilizada a fim de atestar a eficiência do resultado da comparação do método de um período de amostragem maior de 20ms porém interpolado para um período de 5ms com o período de amostragem de 5ms propriamente dito. Caso os resultados obtidos forem satisfatórios, este método se mostrará o mais indicado para seguir com o projeto.

2.4.2 Processo de Interpolação Parabólica

A cada três pontos das amostras consecutivos serem selecionados, são encontrados os coeficientes do polinômio de segundo grau desejado. A partir do polinômio de segundo grau encontrado, são calculados os pontos interpolados nos intervalos de tempo desejados, e o processo é repedito para todo o conjunto de dados disponíveis.

Sendo dois dos pontos utilizados medidos e o terceiro ponto o estimado do próximo estado obtido pelo filtro de kalman, não sendo necessário uma próxima iteração para obter os pontos intermediários. Na próxima iteração o ponto estimado é substituído pelo ponto medido para fazer a interpolação utiliza-se o próximo ponto estimado.

2.4.3 Vantagens do Método

A interpolação tem por vantagens uma melhor precisão da curva obtida pelas amostras, capturando melhor as mudancas na velocidade e na trajetória, além de tornar a curva mais suave na transição entre os pontos amostrados, resultando em uma representação mais realista do movimento dos projéteis. Outra vantagem é o custo computacional médio, apesar da interpolação quadrática ser mais complexa do que a linear, é mais precisa dado a natureza do movimento estudado.

2.5 Resistência Do Ar

Para tornar o modelo mais próximo da realidade, será introduzida a força de arrasto [2], resultante da resistência do ar, ao equacionamento do modelo balístico. A força de arrasto tem como característica estar sempre em oposição à direção do movimento da trajetória, como mostra a figura abaixo:

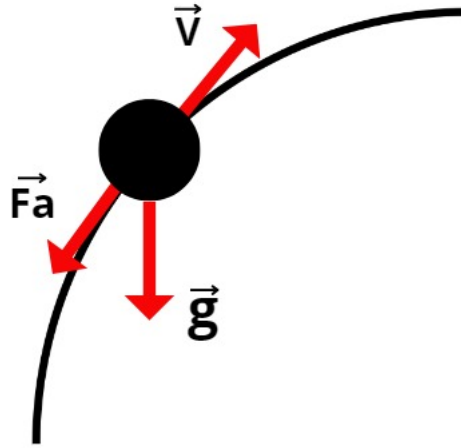


Figura 5

A equação da força de arrasto pode ser escrita da seguinte maneira:

$$\vec{F}_a = -\frac{1}{2}\rho C_a A v^2 \hat{v} \quad (14)$$

Onde:

- ρ : Densidade do ar atmosférico.
- C_a : Coeficiente de arrasto.
- A : Maior área de seção transversal do corpo.

2.6 Sistema não Linear

Um sistema não linear é aquele em que as relações entre as variáveis não seguem uma proporção direta, ou seja, a resposta do sistema não é uma combinação linear das entradas. Isso significa que os efeitos das entradas não se somam de maneira simples e podem envolver termos como produtos, quadrados ou outras funções complexas das variáveis. Dessa forma, não é possível descrever completamente esses sistemas utilizando a representação em espaço de estados de forma simples, pois essa abordagem assume linearidade nas equações que regem o sistema.

Entretanto, é possível descrever esses sistemas através das funções de transição de estado discreta \mathbf{f} e de observação discreta \mathbf{h} utilizando a aproximação de funções não lineares por meio de expansões lineares locais (expansões de Taylor) [1] em torno de um estado.

Primeiramente, ao analisarmos as expansões de Taylor para uma função $\mathbf{x}(t)$, tem-se sua seguinte descrição:

$$\mathbf{x}(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\mathbf{x}^{(n)}(a)}{n!} (t-a)^n \quad (15)$$

Agora, para um sistema descrito por uma função de transição de estado contínua no tempo \mathbf{g} tem-se a equação do estado $\dot{\mathbf{x}}$ seguida de sua expansão de Taylor para $a = t - T$:

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}(t-T) + \dot{\mathbf{x}}(t-T)T + \frac{\ddot{\mathbf{x}}(t-T)}{2}T^2 + O \quad (16)$$

$$\implies$$

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}(t-T) + \mathbf{g}_1(t-T)T + \mathbf{g}_2(t-T)\frac{T^2}{2} + O, \quad (17)$$

onde são definidas as funções $\mathbf{g}_1 = \dot{\mathbf{x}}(t)$ e $\mathbf{g}_2 = \ddot{\mathbf{x}}(t)$. Além disto O representa as demais potências de T da série de expansões.

Logo, de modo a definir a função de transição de estado discreta como a função $\mathbf{f}(\mathbf{x}(k-1), \mathbf{u}(k-1)) = \mathbf{x}(k)$ discretiza-se a equação 23 a cima, desconsiderando os termos representados por O :

$$\mathbf{x}(k) = \mathbf{x}(k-1) + \mathbf{g}_1(k-1)T + \mathbf{g}_2(k-1)\frac{T^2}{2} \quad (18)$$

$$\implies$$

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}(k-1), \mathbf{u}(k-1)) = \mathbf{x}(k-1) + \mathbf{g}_1(k-1)T + \mathbf{g}_2(k-1)\frac{T^2}{2} \quad (19)$$

Por fim, para a função de observação discreta \mathbf{h} segue-se que:

$$\mathbf{y}(k) = \mathbf{h}(\mathbf{x}(k), \mathbf{u}(k)); \quad (20)$$

Para obter o ponto de disparo do projétil agora trabalhando com a modelagem não linear, primeiramente observando o modo no qual foi feita a filtragem inversa para o modelo linear de acordo com a equação 44. Porém para este equacionamento é notória a obtenção do estado atual com base no estado futuro, o que não se pode enxergar com facilidade analisando a equação abaixo substituindo k por $k+1$:

$$\mathbf{x}(k) = \mathbf{x}(k+1) - \mathbf{g}_1(k)T - \mathbf{g}_2(k)\frac{T^2}{2}, \quad (21)$$

pois é observado que não é possível calcular os valores de \mathbf{g}_1 e \mathbf{g}_2 do próprio estado desejado na mesma iteração.

Outra abordagem que será utilizada consiste no estudo da expansão da série de Taylor substituindo o valor do parâmetro $a = t - T$ para $a = t + T$. O efeito desta mudança permite analisar agora a vizinhança de t caminhando no sentido do PD. Seguindo os mesmos passos, obtemos para o tempo contínuo:

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}(t+T) + \mathbf{g}_1(t+T)(-T) + \mathbf{g}_2(t+T)\frac{(-T)^2}{2} + O, \quad (22)$$

De modo semelhante, transformando a equação para o domínio de tempo discreto e desconsiderando os termos além do termo quadrático, obtemos a equação que permite a obtenção do PD do nosso modelo não linear:

$$\mathbf{x}(k) = \mathbf{x}(k+1) + \mathbf{g}_1(k+1)(-T) + \mathbf{g}_2(k+1)\frac{(-T)^2}{2} \quad (23)$$

A figura ilustra mostra as direções a serem descritas pelo modelo não linear, tanto para a aquisição do ponto de impacto e ponto de disparo.

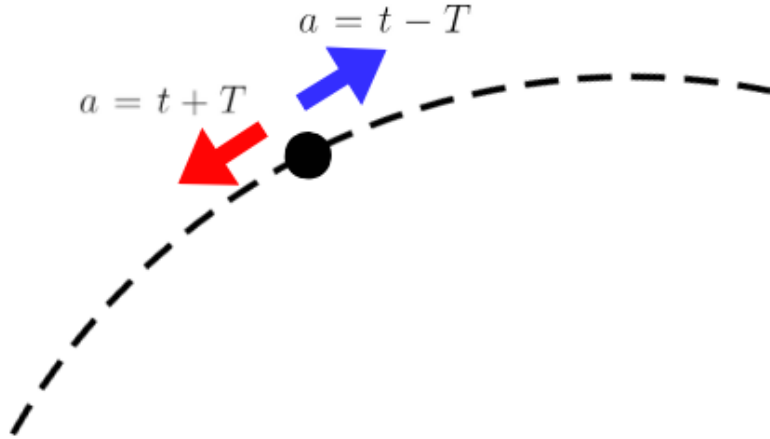


Figura 6: Representação da modelagem

2.7 Kalman Filter Extendido (EKF)

Para realizar a filtragem e estimativa de um sistema não linear, utiliza-se a versão estendida do Filtro de Kalman, conhecida como EKF (Extended Kalman Filter) [3]. O EKF é uma generalização do Filtro de Kalman tradicional, adaptada para lidar com as não linearidades presentes nos modelos de sistemas reais. Portanto, a partir da determinação da função de transição de estado discreta \mathbf{f} e da função de observação discreta \mathbf{h} de um sistema não linear, provém-se as seguintes equações que definem o EKF:

Equações de previsão:

$$\hat{\mathbf{x}}(k|k-1) = \mathbf{f}(\hat{\mathbf{x}}(k-1|k-1), \mathbf{u}(k-1)) \quad (24)$$

$$\mathbf{P}(k|k-1) = \mathbf{F}\mathbf{P}(k-1|k-1)\mathbf{F}^T + \mathbf{Q} \quad (25)$$

Equações de atualização:

$$\mathbf{K}(k) = \mathbf{P}(k|k-1)\mathbf{H}^T[\mathbf{H}\mathbf{P}(k|k-1)\mathbf{H}^T + \mathbf{R}]^{-1} \quad (26)$$

$$\hat{\mathbf{x}}(k|k) = \hat{\mathbf{x}}(k|k-1) + \mathbf{K}(k)[\mathbf{y}(k) - \mathbf{h}(\hat{\mathbf{x}}(k|k-1), \mathbf{u}(k))] \quad (27)$$

$$\mathbf{P}(k|k) = [\mathbf{I} - \mathbf{K}(k)\mathbf{H}]\mathbf{P}(k|k-1) \quad (28)$$

Equação da saída estimada:

$$\mathbf{y}(k|k-1) = \mathbf{h}(\hat{\mathbf{x}}(k|k-1), \mathbf{u}(k)) \quad (29)$$

Onde F e H são as seguintes jacobianas:

- $\mathbf{F} = \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}}|_{\hat{\mathbf{x}}(k-1|k-1), \mathbf{u}(k-1)}$
- $\mathbf{H} = \frac{\partial \mathbf{h}}{\partial \mathbf{x}}|_{\hat{\mathbf{x}}(k|k-1)}$

3 Metodologia

3.1 Modelagem do Espaço de Estados

Para dar início ao projeto, serão feitos três exemplos simples da implementação do filtro de Kalman, que são estes movimento retilíneo uniforme, movimento retilíneo uniformemente variado e uma parábola. Será utilizado o exemplo geral que terá como vetor de estados a posição e a velocidade em duas dimensões. Como posteriormente a única aceleração neste projeto será a gravidade no eixo z, não serão entradas do modelo as acelerações.

3.1.1 Equacionamento 2D

Supondo a equação do movimento retilíneo uniformemente variado em duas dimensões dada pelo vetor $\mathbf{p}(t) = \mathbf{p}_0 + \mathbf{v}_0 t + \frac{\mathbf{a}t^2}{2}$. E a equação da velocidade é dada por $\mathbf{v}(t) = \mathbf{v}_0 + \mathbf{a}t$. Agora mudando a equação para o tempo discreto, onde $t = kT$, onde T é o período de amostragem. Deste modo, teremos:

$$\mathbf{p}(k) = \mathbf{p}_0 + \mathbf{v}_0 kT + \frac{\mathbf{a}T^2 k^2}{2} \quad (30)$$

$$\mathbf{v}(k) = \mathbf{v}_0 + \mathbf{a}kT \quad (31)$$

Deslocando a equação da posição e velocidade, temos:

$$\mathbf{p}(k-1) = \mathbf{p}_0 + \mathbf{v}_0[k-1]T + \frac{\mathbf{a}T^2[k-1]^2}{2} \quad (32)$$

$$\mathbf{v}(k-1) = \mathbf{v}_0 + \mathbf{a}[k-1]T \quad (33)$$

Fazendo a diferença entre as equações 30 e 32, temos:

$$\mathbf{p}(k) = \mathbf{p}(k-1) + T[\mathbf{v}_0 + \mathbf{a}[k-1]T] + \frac{\mathbf{a}T^2}{2} \quad (34)$$

Substituindo o segundo termo pela velocidade dado pela equação 33, podemos encontrar:

$$\mathbf{p}(k) = \mathbf{p}(k-1) + \mathbf{v}(k)T + \frac{\mathbf{a}T^2}{2} \quad (35)$$

Fazendo a diferença entre as equações 31 e 33, temos:

$$\mathbf{v}(k) = \mathbf{v}(k-1) + \mathbf{a}T \quad (36)$$

Finalmente modelando a equação de espaço de estados, obtemos o seguinte resultado:

$$\mathbf{x}(k) = \begin{bmatrix} p \\ v \end{bmatrix}_k = \begin{bmatrix} p_x \\ p_y \\ v_x \\ v_y \end{bmatrix}_k = \begin{bmatrix} 1 & 0 & T & 0 \\ 0 & 1 & 0 & T \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_x \\ p_y \\ v_x \\ v_y \end{bmatrix}_{k-1} + \begin{bmatrix} \frac{T^2}{2} & 0 \\ 0 & \frac{T^2}{2} \\ T & 0 \\ 0 & T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_x \\ a_y \end{bmatrix} \quad (37)$$

$$\mathbf{y}_{\text{true}}(k) = \begin{bmatrix} out_x \\ out_y \end{bmatrix}_k = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_x \\ p_y \\ v_x \\ v_y \end{bmatrix}_k + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_x \\ a_y \end{bmatrix} \quad (38)$$

Onde as matrizes de espaço de estado são:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & T & 0 \\ 0 & 1 & 0 & T \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} \frac{T^2}{2} & 0 \\ 0 & \frac{T^2}{2} \\ T & 0 \\ 0 & T \end{bmatrix}; \quad \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{D} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (39)$$

3.1.2 M.R.U. e Parábola

Tanto o movimento retilíneo uniforme quanto o movimento parabólico são casos específicos do modelo geral obtido, diferindo apenas no vetor aceleração.

Para o m.r.u. teremos que o vetor aceleração será dado por $\mathbf{a} = [0 \ 0]^T$, e para a parábola, teremos $\mathbf{a} = [0 \ -g]^T$, onde g é o módulo da aceleração da gravidade.

3.1.3 Equacionamento 3D

Análogo ao equacionamento do modelo de espaço de estados para duas dimensões, partindo das equações 35 e 36, temos o novo sistema seguido de suas matrizes, com a entrada $\mathbf{u}(k-1) = [0 \ 0 \ -g]^T$.

$$\mathbf{x}(k) = \begin{bmatrix} p_x \\ p_y \\ p_z \\ v_x \\ v_y \\ v_z \end{bmatrix}_k = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & T & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & T & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & T \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_x \\ p_y \\ p_z \\ v_x \\ v_y \\ v_z \end{bmatrix}_{k-1} + \begin{bmatrix} \frac{T^2}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{T^2}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{T^2}{2} \\ T & 0 & 0 \\ 0 & T & 0 \\ 0 & 0 & T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{bmatrix} \quad (40)$$

$$\mathbf{y}_{\text{true}}(k-1) = \begin{bmatrix} p_x \\ p_y \\ p_z \end{bmatrix}_{k-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_x \\ p_y \\ p_z \\ v_x \\ v_y \\ v_z \end{bmatrix}_{k-1} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{bmatrix} \quad (41)$$

Onde as matrizes de espaço de estado são:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & T & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & T & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & T \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} \frac{T^2}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{T^2}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{T^2}{2} \\ T & 0 & 0 \\ 0 & T & 0 \\ 0 & 0 & T \end{bmatrix}; \quad \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix};$$

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix};$$

3.2 Filtragem Da Posição do Objeto

Conforme abordado na teoria do filtro de Kalman, foram empregados três métodos para realizar a filtragem da posição medida do objeto ao longo das amostras.

3.2.1 Método 1

A filtragem da posição medida é realizada a cada iteração.

3.2.2 Método 2

A filtragem da trajetória medida é realizada percorrendo diretamente e depois reversamente a cada iteração, de modo que a primeira e a última posição filtrada correspondam à primeira amostra.

3.2.3 Método 3

A filtragem da trajetória medida é realizada percorrendo diretamente e depois reversamente várias vezes a cada iteração, garantindo que a primeira e a última posição filtrada correspondam à primeira amostra.

3.3 Predição do Ponto de Impacto e Disparo

A fim de se prever os pontos de impacto e de disparo do projétil, determinado pelas saídas p_i e p_d para a amostragem atual k , onde $k + j_i$ e $k - j_d$ representam a predição da amostragem no momento de impacto e de disparo, respectivamente. Dessa forma, calcula-se as saídas a cima através das equações de espaço de estados e a partir do estado estimado atual $\hat{\mathbf{x}}(k|k)$.

3.3.1 Ponto de Impacto

Os pontos da trajetória de impacto $\mathbf{y}(k + j|k)$ são dados por:

$$\hat{\mathbf{x}}(k + j|k) = \mathbf{A}\hat{\mathbf{x}}(k + j - 1|k) + \mathbf{B}\mathbf{u}(k + j - 1) \quad (42)$$

$$\mathbf{y}(k + j|k) = \mathbf{C}\hat{\mathbf{x}}(k + j|k) \quad (43)$$

Portanto, quando a saída atingir o solo, para $j = j_i$, obtemos o ponto de impacto $p_i = \mathbf{y}(k + j_i|k)$.

3.3.2 Filtragem Inversa

Para prever os pontos da trajetória de disparo, isola-se o termo $\mathbf{x}(k - 1)$ na equação de espaço de estados 1, obtendo a equação abaixo:

$$\mathbf{x}(k - 1) = \mathbf{A}^{-1}[\mathbf{x}(k) - \mathbf{B}\mathbf{u}(k - 1)] \quad (44)$$

Logo, os pontos da trajetória de disparo $\mathbf{y}(k - j|k)$ são dados por:

$$\hat{\mathbf{x}}(k-j|k) = \mathbf{A}^{-1}[\hat{\mathbf{x}}(k-j+1|k) - \mathbf{B}\mathbf{u}(k-j)] \quad (45)$$

$$\mathbf{y}(k-j|k) = \mathbf{C}\hat{\mathbf{x}}(k-j|k) \quad (46)$$

Portanto, quando a saída atingir o solo, para $j = j_d$, obtemos o ponto de disparo $p_d = \mathbf{y}(k-j_d|k)$.

3.3.3 Equacionamento direto

Alternativamente, é possível obter os pontos de impacto e disparo através das mesmas equações utilizadas para determinar o sistema de espaço de estados. Primeiramente, obtêm-se posição e velocidade iniciais a partir do estado estimado atual:

$$\hat{\mathbf{x}}(k|k) = [\mathbf{p}_0 \quad \mathbf{v}_0]^T \quad (47)$$

Agora, pelas equações da parábola:

$$p_{solo} = p_{0z} + v_{0z}t - \frac{gt^2}{2} \iff \quad (48)$$

$$t_i = \frac{v_{0z} + \sqrt{v_{0z}^2 + 2g(p_{0z} - p_{solo})}}{g} \quad (49)$$

$$t_d = \frac{v_{0z} - \sqrt{v_{0z}^2 + 2g(p_{0z} - p_{solo})}}{g} \quad (50)$$

Dessa forma, determina-se ponto de impacto:

$$p_{ix} = p_{0x} + v_{0x}t_i \quad (51)$$

$$p_{iy} = p_{0y} + v_{0y}t_i \quad (52)$$

$$\mathbf{p}_i = [p_{ix} \quad p_{iy} \quad p_{solo}]^T \quad (53)$$

De forma análoga, determina-se o ponto de disparo:

$$p_{dx} = p_{0x} + v_{0x}t_d \quad (54)$$

$$p_{dy} = p_{0y} + v_{0y}t_d \quad (55)$$

$$\mathbf{p}_d = [p_{dx} \quad p_{dy} \quad p_{solo}]^T \quad (56)$$

3.4 Modelagem Do Sistema Com o Parâmetro De Arrasto

Para encontrar a função de transferência de tempo contínuo $\mathbf{g}(t)$, é necessário conhecer o modelo físico da força de arrasto que atua contra o movimento do projétil.

A partir da segunda Lei de Newton e do conhecimento das equações das forças atuantes sobre o projétil, chegamos no seguinte equacionamento:

$$\sum \vec{F} = m\vec{a} \quad (57)$$

$$m\vec{g} + \vec{F}_a = m\vec{a} \quad (58)$$

Substituindo a força de arrasto da equação 14, podemos obter:

$$m\vec{a} = -\frac{1}{2}\rho C_a A v^2 \hat{\mathbf{v}} + m\vec{g} \quad (59)$$

Agora reescrevendo a equação, isolando a aceleração de forma matricial:

$$\vec{a} = \begin{bmatrix} \dot{v}_x \\ \dot{v}_y \\ \dot{v}_z \end{bmatrix} = -\frac{1}{2m}\rho C_a A v \begin{bmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -g \end{bmatrix}, \quad (60)$$

onde $v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}$ é o módulo da velocidade do projétil e $\mathbf{u} = [0 \ 0 \ -g]^T$ é o vetor de entradas do sistema. Vamos considerar também a densidade do ar uma função variável e dependente da altura z do projétil, sendo a equação $\rho(z) = \rho_0 e^{-z/h}$. Onde ρ_0 é a densidade do ar no nível do mar e H é escala de altura, dependendo da altura e da gravidade.

Como forma de simplificar a visão de equacionamento, define-se como gama o parâmetro de arrasto, seguido de sua derivada, descritos nas equações abaixo:

$$\gamma = \frac{C_a A \rho(z)}{m} \quad (61)$$

A equação da aceleração então se torna:

$$\begin{bmatrix} \dot{v}_x \\ \dot{v}_y \\ \dot{v}_z \end{bmatrix} = -\frac{1}{2}\gamma v \begin{bmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -g \end{bmatrix}, \quad (62)$$

sendo $\mathbf{x}(t) = [\mathbf{p} \ \mathbf{v} \ \gamma]^T$ o vetor de espaço de estados do tempo contínuo, a função de transição de tempo contínuo $\mathbf{g}_1(t)$ se torna $\mathbf{g}_1(t) = \dot{\mathbf{x}}(t) = [\dot{\mathbf{p}} \ \dot{\mathbf{v}} \ \dot{\gamma}]^T$, onde $\dot{\gamma} = -\gamma \dot{p}_z h = -\gamma v_z h$. Dessa forma:

$$\mathbf{g}_1(t) = \begin{bmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \\ \dot{v}_x \\ \dot{v}_y \\ \dot{v}_z \\ \dot{\gamma} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \\ -\frac{1}{2}\gamma v v_x \\ -\frac{1}{2}\gamma v v_y \\ -\frac{1}{2}\gamma v v_z - g \\ -\gamma v_z h \end{bmatrix} \quad (63)$$

Agora, deseja-se obter o valor de $\mathbf{g}_2(t)$. Dessa forma:

$$\mathbf{g}_2(t) = \frac{d\mathbf{g}_1(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t))}{dt} = \frac{\partial \mathbf{g}_1}{\partial \mathbf{x}} \dot{\mathbf{x}} + \frac{\partial \mathbf{g}_1}{\partial \mathbf{u}} \dot{\mathbf{u}} = \frac{\partial \mathbf{g}_1}{\partial \mathbf{x}} \mathbf{g}_1(t) \quad (64)$$

Para prosseguir com o modelo não linear do EKF, será agora realizado o cálculo da matriz jacobiana $\frac{\partial \mathbf{g}_1}{\partial \mathbf{x}}$.

$$\frac{\partial \mathbf{g}_1}{\partial \mathbf{x}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial v_x}{\partial p_x} & \frac{\partial v_x}{\partial p_y} & \frac{\partial v_x}{\partial p_z} & \frac{\partial v_x}{\partial v_x} & \frac{\partial v_x}{\partial v_y} & \frac{\partial v_x}{\partial v_z} & \frac{\partial v_x}{\partial \gamma} \\ \frac{\partial v_y}{\partial p_x} & \frac{\partial v_y}{\partial p_y} & \frac{\partial v_y}{\partial p_z} & \frac{\partial v_y}{\partial v_x} & \frac{\partial v_y}{\partial v_y} & \frac{\partial v_y}{\partial v_z} & \frac{\partial v_y}{\partial \gamma} \\ \frac{\partial v_z}{\partial p_x} & \frac{\partial v_z}{\partial p_y} & \frac{\partial v_z}{\partial p_z} & \frac{\partial v_z}{\partial v_x} & \frac{\partial v_z}{\partial v_y} & \frac{\partial v_z}{\partial v_z} & \frac{\partial v_z}{\partial \gamma} \\ \frac{\partial \dot{v}_x}{\partial p_x} & \frac{\partial \dot{v}_x}{\partial p_y} & \frac{\partial \dot{v}_x}{\partial p_z} & \frac{\partial \dot{v}_x}{\partial v_x} & \frac{\partial \dot{v}_x}{\partial v_y} & \frac{\partial \dot{v}_x}{\partial v_z} & \frac{\partial \dot{v}_x}{\partial \gamma} \\ \frac{\partial \dot{v}_y}{\partial p_x} & \frac{\partial \dot{v}_y}{\partial p_y} & \frac{\partial \dot{v}_y}{\partial p_z} & \frac{\partial \dot{v}_y}{\partial v_x} & \frac{\partial \dot{v}_y}{\partial v_y} & \frac{\partial \dot{v}_y}{\partial v_z} & \frac{\partial \dot{v}_y}{\partial \gamma} \\ \frac{\partial \dot{v}_z}{\partial p_x} & \frac{\partial \dot{v}_z}{\partial p_y} & \frac{\partial \dot{v}_z}{\partial p_z} & \frac{\partial \dot{v}_z}{\partial v_x} & \frac{\partial \dot{v}_z}{\partial v_y} & \frac{\partial \dot{v}_z}{\partial v_z} & \frac{\partial \dot{v}_z}{\partial \gamma} \\ \frac{\partial \dot{\gamma}}{\partial p_x} & \frac{\partial \dot{\gamma}}{\partial p_y} & \frac{\partial \dot{\gamma}}{\partial p_z} & \frac{\partial \dot{\gamma}}{\partial v_x} & \frac{\partial \dot{\gamma}}{\partial v_y} & \frac{\partial \dot{\gamma}}{\partial v_z} & \frac{\partial \dot{\gamma}}{\partial \gamma} \end{bmatrix} \quad (65)$$

Nota-se que as três primeiras linhas da matriz são nulas, com excessão dos termos $\frac{\partial v_x}{\partial v_x}$, $\frac{\partial v_y}{\partial v_y}$ e $\frac{\partial v_z}{\partial v_z}$, que são iguais a 1. Agora seguiremos para os cálculos das próximas linhas da matriz baseado na equação 62 e na equação de γ .

Na quarta linha da matriz, onde $\dot{v}_x = -\frac{1}{2}\gamma v v_x$, teremos:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \dot{v}_x}{\partial p_x} &= \frac{\partial \dot{v}_x}{\partial p_y} = 0 \\ \frac{\partial \dot{v}_x}{\partial p_z} &= \frac{\partial}{\partial p_z} \left(-\frac{1}{2}\gamma v v_x \right) = \frac{1}{2} h \gamma v v_x \\ \frac{\partial \dot{v}_x}{\partial v_x} &= \frac{\partial}{\partial v_x} \left(-\frac{1}{2}\gamma v v_x \right) = -\frac{1}{2}\gamma \left(\frac{\partial v}{\partial v_x} v_x + \frac{\partial v_x}{\partial v_x} v \right) = -\frac{1}{2}\gamma \left(\frac{v_x^2}{v} + v \right) \\ \frac{\partial \dot{v}_x}{\partial v_y} &= \frac{\partial}{\partial v_y} \left(-\frac{1}{2}\gamma v v_x \right) = -\frac{1}{2}\gamma \frac{v_x v_y}{v} \\ \frac{\partial \dot{v}_x}{\partial v_z} &= \frac{\partial}{\partial v_z} \left(-\frac{1}{2}\gamma v v_x \right) = -\frac{1}{2}\gamma \frac{v_z v_x}{v} \\ \frac{\partial \dot{v}_x}{\partial \gamma} &= \frac{\partial}{\partial \gamma} \left(-\frac{1}{2}\gamma v v_x \right) = -\frac{1}{2} v v_x \end{aligned}$$

Na quinta linha, onde $\dot{v}_y = -\frac{1}{2}\gamma v v_y$, teremos:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \dot{v}_y}{\partial p_x} &= \frac{\partial \dot{v}_y}{\partial p_y} = 0 \\ \frac{\partial \dot{v}_y}{\partial p_z} &= \frac{\partial}{\partial p_z} \left(-\frac{1}{2}\gamma v v_y \right) = \frac{1}{2} h \gamma v v_y \\ \frac{\partial \dot{v}_y}{\partial v_x} &= \frac{\partial}{\partial v_x} \left(-\frac{1}{2}\gamma v v_y \right) = -\frac{1}{2}\gamma \frac{v_x v_y}{v} \\ \frac{\partial \dot{v}_y}{\partial v_y} &= \frac{\partial}{\partial v_y} \left(-\frac{1}{2}\gamma v v_y \right) = -\frac{1}{2}\gamma \left(\frac{\partial v}{\partial v_y} v_y + \frac{\partial v_y}{\partial v_y} v \right) = -\frac{1}{2}\gamma \left(\frac{v_y^2}{v} + v \right) \end{aligned}$$

$$\frac{\partial \dot{v}_y}{\partial v_z} = \frac{\partial}{\partial v_z} \left(-\frac{1}{2} \gamma v v_y \right) = -\frac{1}{2} \gamma \frac{v_y v_z}{v}$$

$$\frac{\partial \dot{v}_y}{\partial \gamma} = \frac{\partial}{\partial \gamma} \left(-\frac{1}{2} \gamma v v_y \right) = -\frac{1}{2} v v_y$$

Na sexta linha, onde $\dot{v}_z = -\frac{1}{2} \gamma v v_z - g$, teremos:

$$\frac{\partial \dot{v}_z}{\partial p_x} = \frac{\partial \dot{v}_z}{\partial p_y} = 0$$

$$\frac{\partial \dot{v}_z}{\partial p_z} = \frac{\partial}{\partial p_z} \left(-\frac{1}{2} \gamma v v_z \right) = \frac{1}{2} h \gamma v v_z$$

$$\frac{\partial \dot{v}_z}{\partial v_x} = \frac{\partial}{\partial v_x} \left(-\frac{1}{2} \gamma v v_z \right) = -\frac{1}{2} \gamma \frac{v_z v_x}{v}$$

$$\frac{\partial \dot{v}_z}{\partial v_y} = \frac{\partial}{\partial v_y} \left(-\frac{1}{2} \gamma v v_z \right) = -\frac{1}{2} \gamma \frac{v_y v_z}{v}$$

$$\frac{\partial \dot{v}_z}{\partial v_z} = \frac{\partial}{\partial v_z} \left(-\frac{1}{2} \gamma v v_z \right) = -\frac{1}{2} \gamma \left(\frac{\partial v}{\partial v_z} v_z + \frac{\partial v_z}{\partial v_z} v \right) = -\frac{1}{2} \gamma \left(\frac{v_z^2}{v} + v \right)$$

$$\frac{\partial \dot{v}_z}{\partial \gamma} = \frac{\partial}{\partial \gamma} \left(-\frac{1}{2} \gamma v v_z \right) = -\frac{1}{2} v v_z$$

Na sétima linha, onde $\dot{\gamma} = -\gamma v_z h$, teremos:

$$\frac{\partial \dot{\gamma}}{\partial p_x} = \frac{\partial \dot{\gamma}}{\partial p_y} = 0$$

$$\frac{\partial \dot{\gamma}}{\partial p_z} = \frac{\partial}{\partial p_z} (-\gamma v_z h) = \gamma v_z h^2$$

$$\frac{\partial \dot{\gamma}}{\partial v_x} = \frac{\partial \dot{\gamma}}{\partial v_y} = 0$$

$$\frac{\partial \dot{\gamma}}{\partial v_z} = \frac{\partial}{\partial v_z} (-\gamma v_z h) = -\gamma h$$

$$\frac{\partial \dot{\gamma}}{\partial \gamma} = \frac{\partial}{\partial \gamma} (-\gamma v_z h) = -v_z h$$

Por fim, após realizados todos os cálculos, a matriz jacobiana fica da seguinte forma:

$$\frac{\partial \mathbf{g}_1}{\partial \mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} h \gamma v v_x & -\frac{1}{2} \gamma \left(\frac{v_x^2}{v} + v \right) & -\frac{1}{2} \gamma \frac{v_x v_y}{v} & -\frac{1}{2} \gamma \frac{v_z v_x}{v} & -\frac{1}{2} v v_x \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} h \gamma v v_y & -\frac{1}{2} \gamma \frac{v_x v_y}{v} & -\frac{1}{2} \gamma \left(\frac{v_y^2}{v} + v \right) & -\frac{1}{2} \gamma \frac{v_y v_z}{v} & -\frac{1}{2} v v_y \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} h \gamma v v_z & -\frac{1}{2} \gamma \frac{v_z v_x}{v} & -\frac{1}{2} \gamma \frac{v_y v_z}{v} & -\frac{1}{2} \gamma \left(\frac{v_z^2}{v} + v \right) & -\frac{1}{2} v v_z \\ 0 & 0 & \gamma v_z h^2 & 0 & 0 & -\gamma h & -v_z h \end{bmatrix} \quad (66)$$

Encontrada a matriz , temos finalmente o cálculo de $\frac{\partial \mathbf{g}_1}{\partial \mathbf{x}} \mathbf{g}_1(t)$ a seguir.

$$\frac{\partial \mathbf{g}_1}{\partial \mathbf{x}} \mathbf{g}(t) = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2}\gamma v v_x \\ -\frac{1}{2}\gamma v v_y \\ -\frac{1}{2}\gamma v v_z - g \\ \gamma v v_z v_x h + \frac{1}{2}v_x \gamma^2 v^2 + \frac{1}{2}\frac{v_z v_x}{v} \gamma g \\ \gamma v v_z v_y h + \frac{1}{2}v_y \gamma^2 v^2 + \frac{1}{2}\frac{v_y v_z}{v} \gamma g \\ \gamma v v_z^2 h + \frac{1}{2}v_z \gamma^2 v^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{v_z^2}{v} + v\right) \gamma g \\ 2v_z^2 \gamma h + \frac{1}{2}\gamma^2 v v_z h^2 + g \gamma h \end{bmatrix} \quad (67)$$

3.4.1 Sistema Não linear Discretizado

Dado que foram encontrados todos os elementos para poder escrever a equação 18 em sua forma matricial, esta fica da seguinte forma:

$$\mathbf{x}(k) = \begin{bmatrix} p_x \\ p_y \\ p_z \\ v_x \\ v_y \\ v_z \\ \gamma \end{bmatrix}_k = \begin{bmatrix} p_x \\ p_y \\ p_z \\ v_x \\ v_y \\ v_z \\ \gamma \end{bmatrix}_{k-1} + T \begin{bmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \\ -\frac{1}{2}\gamma v v_x \\ -\frac{1}{2}\gamma v v_y \\ -\frac{1}{2}\gamma v v_z - g \\ -\gamma v_z h \end{bmatrix}_{k-1} + \frac{T^2}{2} \begin{bmatrix} -\frac{1}{2}\gamma v v_x \\ -\frac{1}{2}\gamma v v_y \\ -\frac{1}{2}\gamma v v_z - g \\ \gamma v v_z v_x h + \frac{1}{2}v_x \gamma^2 v^2 + \frac{1}{2}\frac{v_z v_x}{v} \gamma g \\ \gamma v v_z v_y h + \frac{1}{2}v_y \gamma^2 v^2 + \frac{1}{2}\frac{v_y v_z}{v} \gamma g \\ \gamma v v_z^2 h + \frac{1}{2}v_z \gamma^2 v^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{v_z^2}{v} + v\right) \gamma g \\ 2v_z^2 \gamma h + \frac{1}{2}\gamma^2 v v_z h^2 + g \gamma h \end{bmatrix}_{k-1} \quad (68)$$

Como $\dot{v}_z = -\frac{1}{2}\gamma v v_z - g$, podemos reescrever e separar as matrizes de maneira a explicitar a matriz de entradas do sistema:

$$\mathbf{x}(k) = \begin{bmatrix} p_x \\ p_y \\ p_z \\ v_x \\ v_y \\ v_z \\ \gamma \end{bmatrix}_k = \begin{bmatrix} p_x \\ p_y \\ p_z \\ v_x \\ v_y \\ v_z \\ \gamma \end{bmatrix}_{k-1} + T \begin{bmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \\ -\frac{1}{2}\gamma v v_x \\ -\frac{1}{2}\gamma v v_y \\ -\frac{1}{2}\gamma v v_z \\ -h \gamma v_z \end{bmatrix}_{k-1} + \frac{T^2}{2} \begin{bmatrix} -\frac{1}{2}\gamma v v_x \\ -\frac{1}{2}\gamma v v_y \\ -\frac{1}{2}\gamma v v_z \\ \gamma v v_z v_x h + \frac{1}{2}v_x \gamma^2 v^2 + \frac{1}{2}\frac{v_z v_x}{v} \gamma g \\ \gamma v v_z v_y h + \frac{1}{2}v_y \gamma^2 v^2 + \frac{1}{2}\frac{v_y v_z}{v} \gamma g \\ \gamma v v_z^2 h + \frac{1}{2}v_z \gamma^2 v^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{v_z^2}{v} + v\right) \gamma g \\ 2v_z^2 \gamma h + \frac{1}{2}\gamma^2 v v_z h^2 + g \gamma h \end{bmatrix}_{k-1} +$$

$$\begin{bmatrix} \frac{T^2}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{T^2}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{T^2}{2} \\ T & 0 & 0 \\ 0 & T & 0 \\ 0 & 0 & T \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -g \end{bmatrix} \quad (69)$$

$$\mathbf{y}(k-1) = \begin{bmatrix} p_x \\ p_y \\ p_z \end{bmatrix}_{k-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_x \\ p_y \\ p_z \\ v_x \\ v_y \\ v_z \\ \gamma \end{bmatrix}_{k-1} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -g \end{bmatrix} \quad (70)$$

4 Resultados e Discussões

4.1 Análise Das Simulações Utilizando Kalman Filter

Para uma primeira análise neste projeto, foi utilizado o modelo mais simples inicialmente proposto, utilizando o modelo 3D e o filtro de kalman comum, sem levar em conta a força de arrasto nem o parâmetro de arrasto na matriz de estados, considerando apenas o peso do projétil.

As análises iniciais tiveram como objetivo principal realizar as escolhas da matriz de covariância inicial e do período de amostragem. De modo a inicialmente escolher um período de amostragem fixo qualquer e analisar para alguns valores da matriz, e posteriormente dada a matriz mais adequada escolhida, foi feita a análise para determinar o melhor período de amostragem a se utilizar. A imagem abaixo ilustra a trajetória do projétil e o trecho medido e utilizado na simulação.

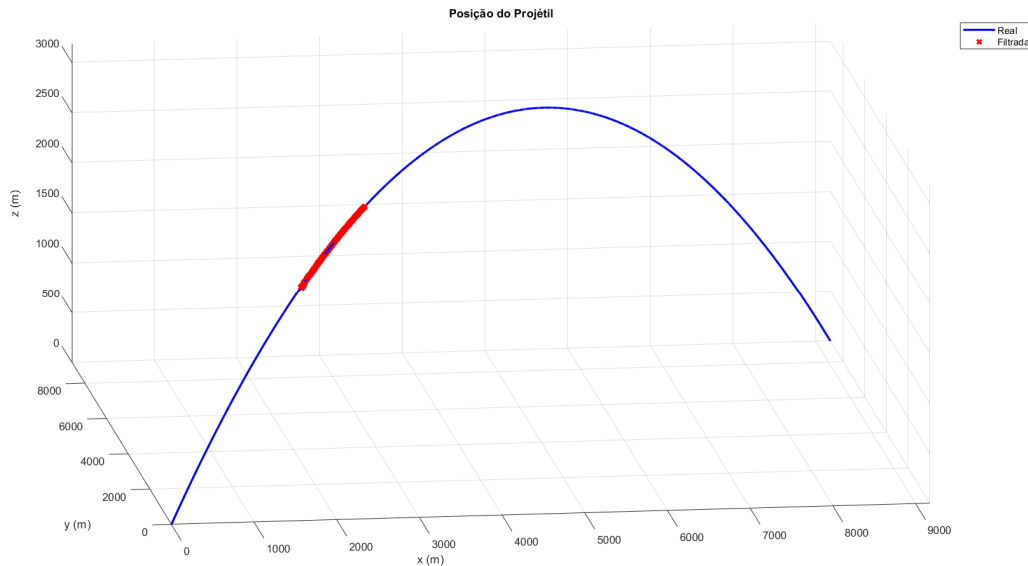


Figura 7: Trejetória Real do Projétil

Os gráficos a seguir se referem aos erros de impacto e disparo do projétil, sendo este erro o módulo da distância euclidiana entre o ponto estimado e o real, considerando os 5 primeiros segundos após o início da detecção do radar, além disso, todos os gráficos foram obtidos a partir da média aritmética simples de 100 simulações.

4.1.1 Obtenção Da Matriz Covariância Inicial

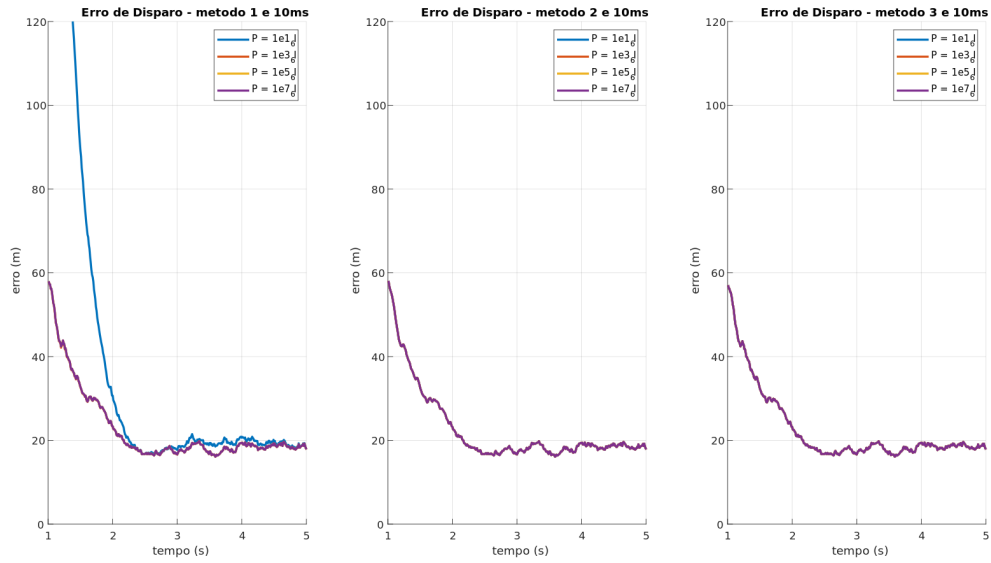


Figura 8: Erro de Disparo

Pela análise do gráfico acima, pode-se inferir de modo geral com a exceção do método 1 para o primeiro valor de P que independente do método, o resultado é praticamente idêntico a ponto de não ser perceptível visualmente.

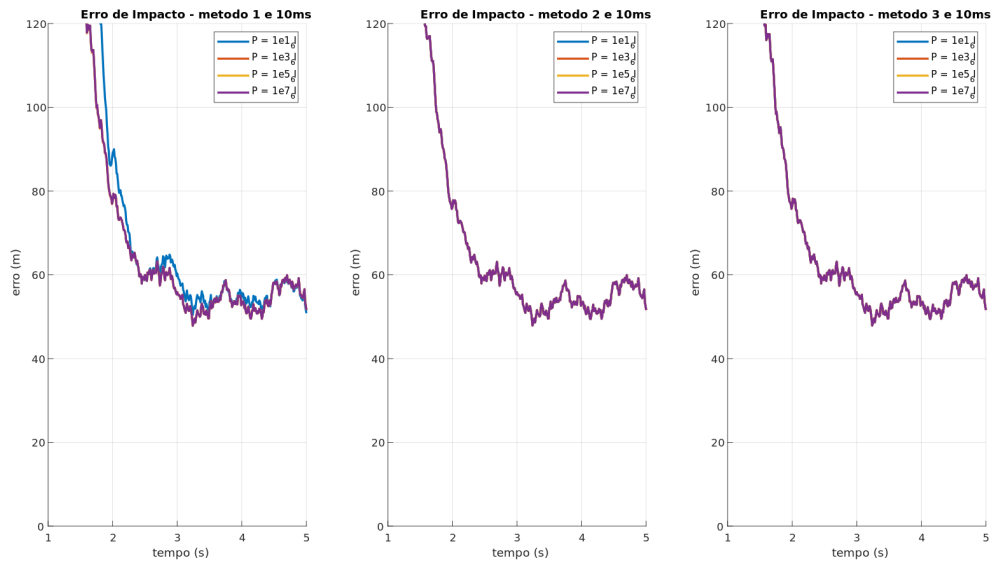


Figura 9: Erro de impacto

Semelhante a análise do erro de disparo, se destaca apenas para o primeiro método e para o primeiro valor escolhido para P , portanto foi escolhido para o valor ideal de covariância inicial a matriz $P = 10^7 I$.

É notório também a diferença média entre os erros de disparo para com os erros de impacto em todos os métodos, tal fato se deve por conta da distância do projétil ser maior até o ponto de impacto do que a distância até o ponto de disparo, considerando que a detecção do projétil teve início na primeira metade da trajetória.

4.1.2 Obtenção Do Período De Amostragem

Já escolhido o valor da matriz de covariância inicial P previamente, partiremos agora para análise do período de amostragem ideal para o projeto, dado que não se conhece o período de amostragem do radar a ser utilizado em uma situação real de campo.

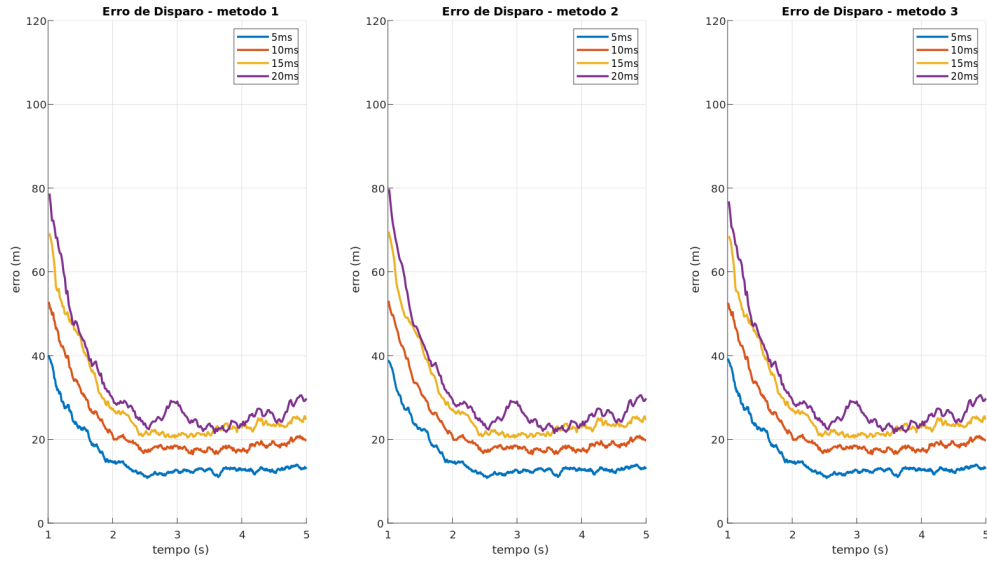


Figura 10: Erro de disparo

A fins comparativos, foram utilizados períodos de amostragem de $5ms$, $10ms$, $15ms$ e $20ms$. É possível observar um desempenho ótimo para o período de amostragem de $5ms$ para ambos os três métodos apresentados. E semelhante a análise anterior, o erro se estabiliza a partir do tempo de $2s$ decorridos do início.

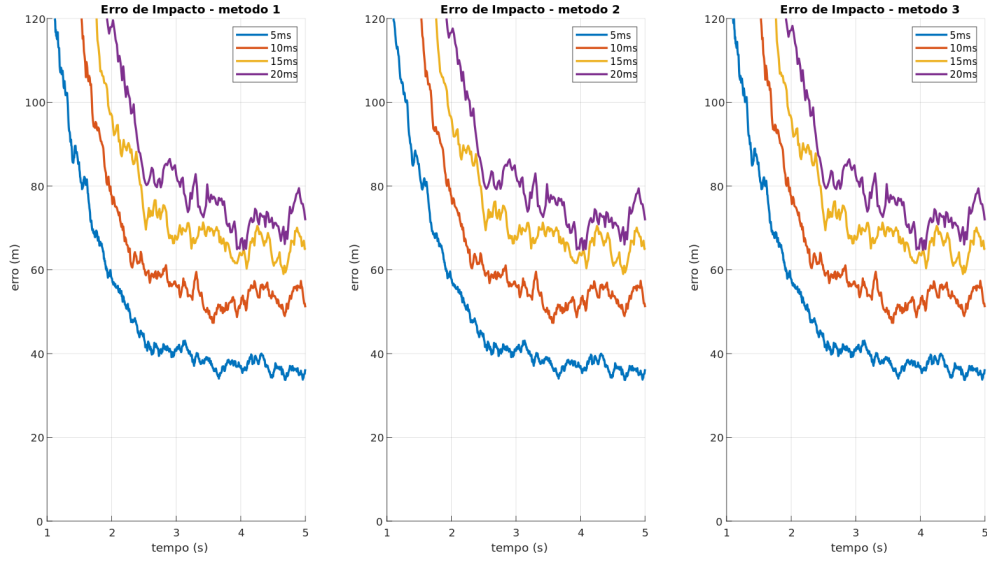


Figura 11: Erro de Impacto

Semelhante a diferença observada entre as ordens de grandeza dos erros de impacto e disparo, o mesmo comportamento se propaga para a análise do período de amostragem, pois são levadas em conta as mesmas considerações do ponto da trajetória a qual foi utilizada para a análise. Dado os resultados apresentados, o período de amostragem ótimo para prosseguir com o projeto é o $T = 5ms$.

4.1.3 Comparação Das Localidades Da Medida

Nas análises préveias foi levado em conta que a medição foi iniciada na primeira metade do movimento, logo o erro para o ponto de impacto é sempre maior do que o erro do ponto de disparo, pela maior proximidade da medição. Para confirmar a veracidade foram feitos testes na segunda metade da trajetória.

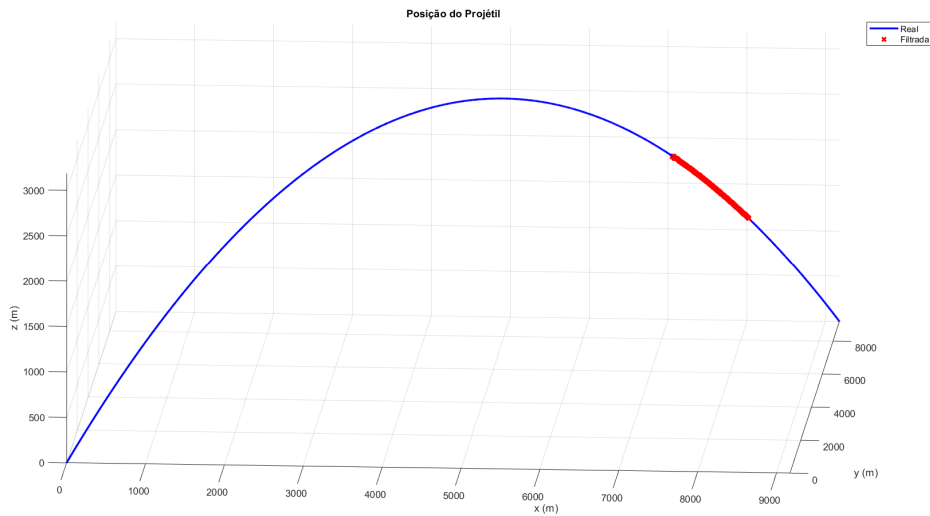


Figura 12: Trejetória

Os gráficos a seguir representam a medição na segunda parte de sua trajetória, simulando por exemplo um projétil que surge por detrás de uma montanha, não sendo possível fazer uma detecção prévia do mesmo.

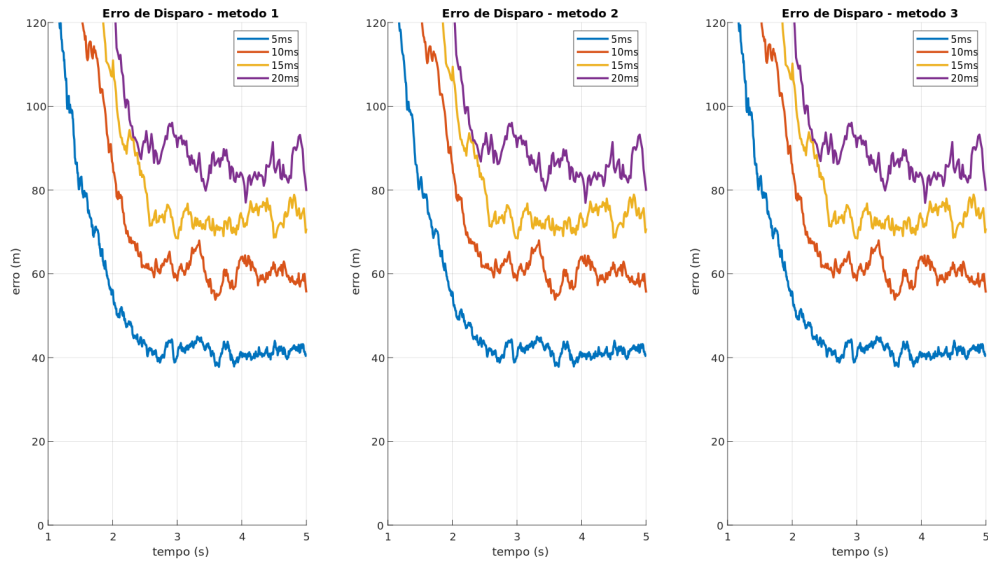


Figura 13: Erro de Disparo

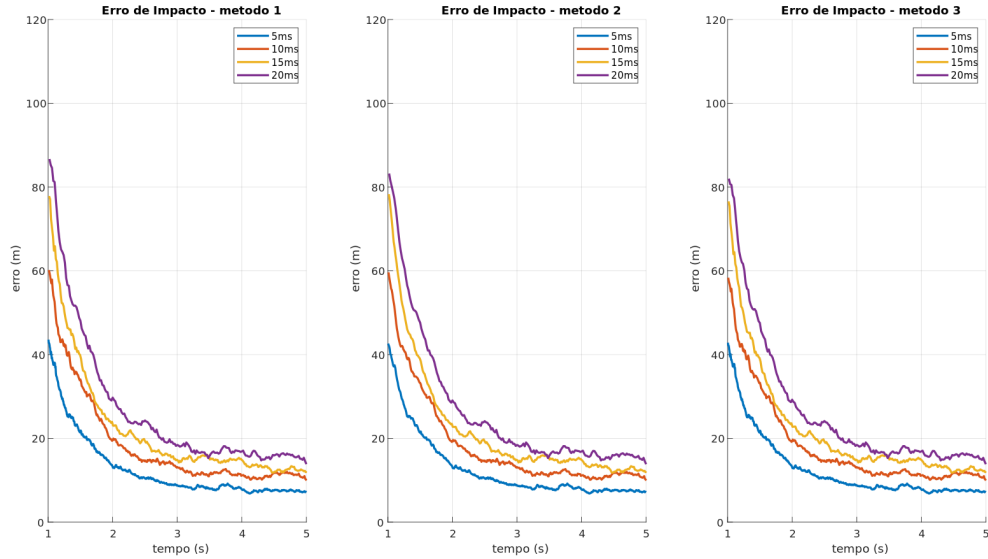


Figura 14: Erro de Impacto

4.1.4 Interpolação

Para uma última análise aplicando o Kalman Filter linear, foi feita uma interpolação dos pontos a fim de estabelecer caso houver a necessidade de uma mudança no período de amostragem, se é um método eficiente para o projeto. A imagem abaixo representa como é feita a interpolação para o eixo z, sendo que a cada dois pontos verdes (pontos medidos) e um ponto vermelho (ponto estimado na mesma iteração), é feita a interpolação parabólica. Para os eixos x e y, é feita a interpolação de forma linear.

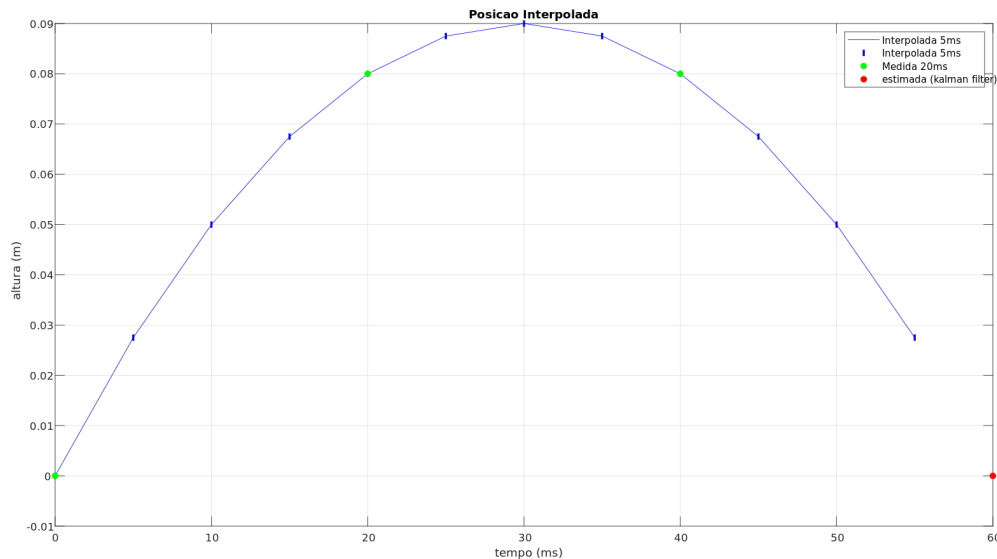


Figura 15: Interpolação

As imagens a seguir se referem a uma primeira análise realizada utilizando a curva amostrada com períodos de amostragem de $5ms$, $10ms$ e $15ms$ e a mesma curva interpolada com a redução do período de amostragem para $5ms$ utilizando sempre o método 1.

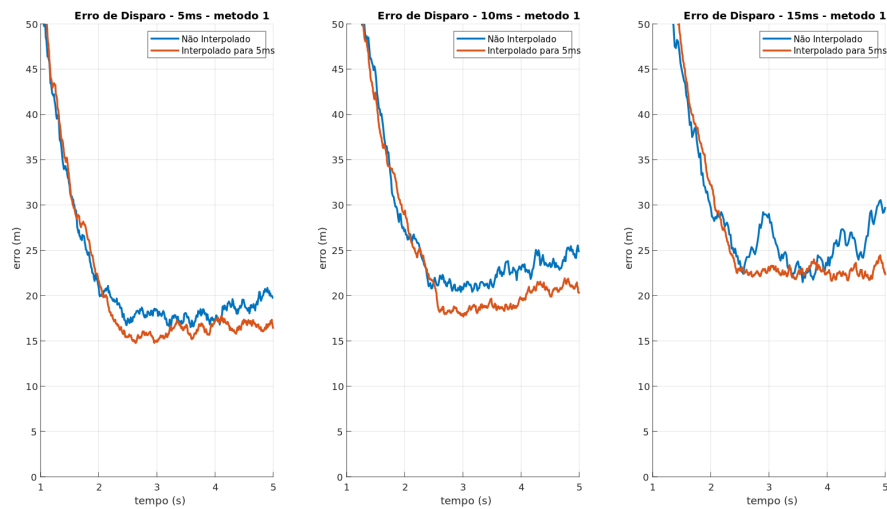


Figura 16: Erro de Disparo

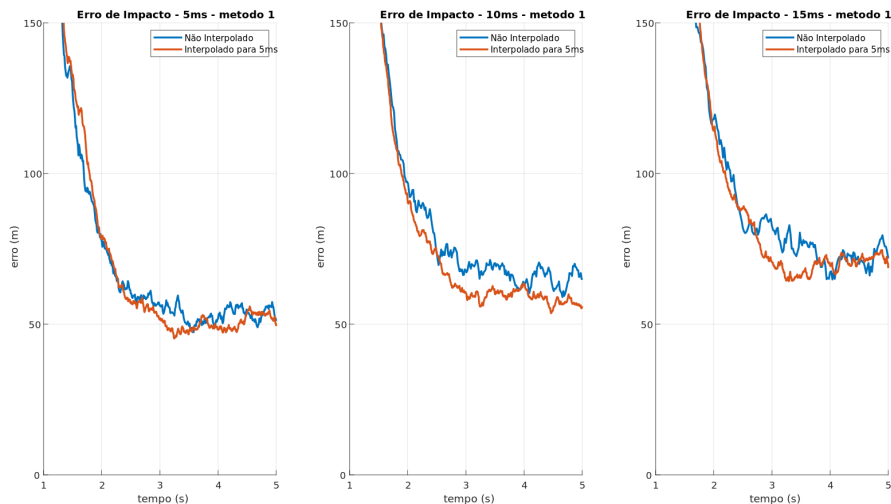


Figura 17: Erro de Impacto

As curvas se mostraram próximas umas das outras, principalmente para o próprio caso de $5ms$, o que já era esperado. Para as outras duas curvas, o erro interpolado apresenta melhora em relação a curva original, porém o ganho não é considerado relevante frente ao maior gasto computacional.

As próximas imagens tem como alvo de comparação como referência uma curva de erro sem interpolação em $5ms$ e outras 3 curvas de erro com períodos de amostragem maiores indicados no gráfico, porém reduzidos para $5ms$ para os 3 métodos.

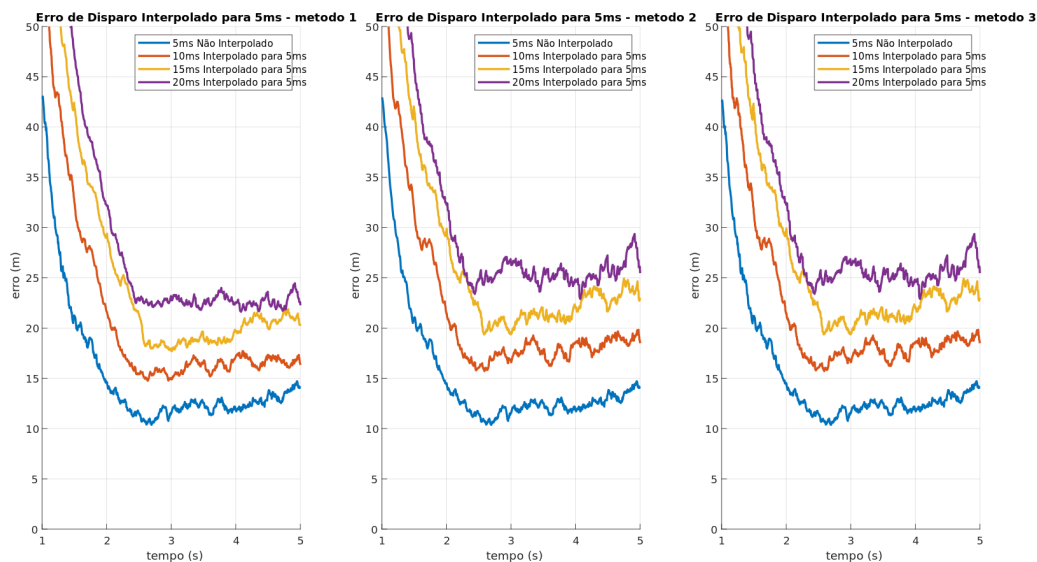


Figura 18: Caption

Referências

- [1] T. M. Apostol. *Calculus, Volume 1: One-Variable Calculus, with an Introduction to Linear Algebra*. Wiley, 2nd edition, 1967.
- [2] G. K. Batchelor. *An Introduction to Fluid Dynamics*. Cambridge University Press, 2nd edition, 2000.
- [3] Keisuke Fujii. Extended kalman filter. *Refernce Manual*, 14:41, 2013.
- [4] Greg Welch, Gary Bishop, et al. An introduction to the kalman filter. 1995.