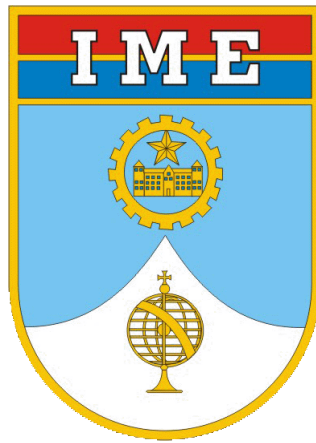


MINISTÉRIO DA DEFESA
EXÉRCITO BRASILEIRO
DEPARTAMENTO DE CIÊNCIA E TECNOLOGIA
INSTITUTO MILITAR DE ENGENHARIA
(REAL ACADEMIA DE ARTILHARIA, FORTIFICAÇÃO E DESENHO, 1792)



INSTITUTO MILITAR DE ENGENHARIA

Uma Investigação Preliminar De Rastreamento De Alvos Em Radars De
Contrabateria - PFC

MATEUS **DANTAS** LINS DE OLIVEIRA
IGOR LUCINDO CARDOSO

Sumário

1	Introdução	1
2	Literatura	1
2.1	Espaço de estados	1
2.1.1	Medição	1
2.2	Kalman Filter	2
2.2.1	Algoritmo de Kalman filter	2
2.2.2	Observações	3
2.3	Visão geral modelo do sistema de espaço de estados mais Kalman filter . .	3
2.4	Sistema não Linear	4
2.5	Kalman Filter Extendido (EKF)	5
2.6	Resistência Do Ar	5
3	Metodologia	6
3.1	Modelagem do Espaço de Estados	6
3.1.1	Equacionamento 2D	6
3.1.2	M.R.U. e Parábola	7
3.1.3	Equacionamento 3D	7
3.2	Filtragem Da Posição do Objeto	8
3.2.1	Método 1	8
3.2.2	Método 2	8
3.2.3	Método 3	8
3.3	Predição do Ponto de Impacto e Disparo	8
3.3.1	Ponto de Impacto	9
3.3.2	Ponto de Disparo	9
3.3.3	Equacionamento direto	9
3.4	Modelagem Do Sistema Com o Parâmetro De Arrasto	10
3.4.1	Sistema Não linear Discretizado	13
3.5	Interpolação dos Pontos	14
3.5.1	Introdução	14
3.5.2	Processo de Interpolação Parabólica	14
3.5.3	Vantagens do Método	15

1 Introdução

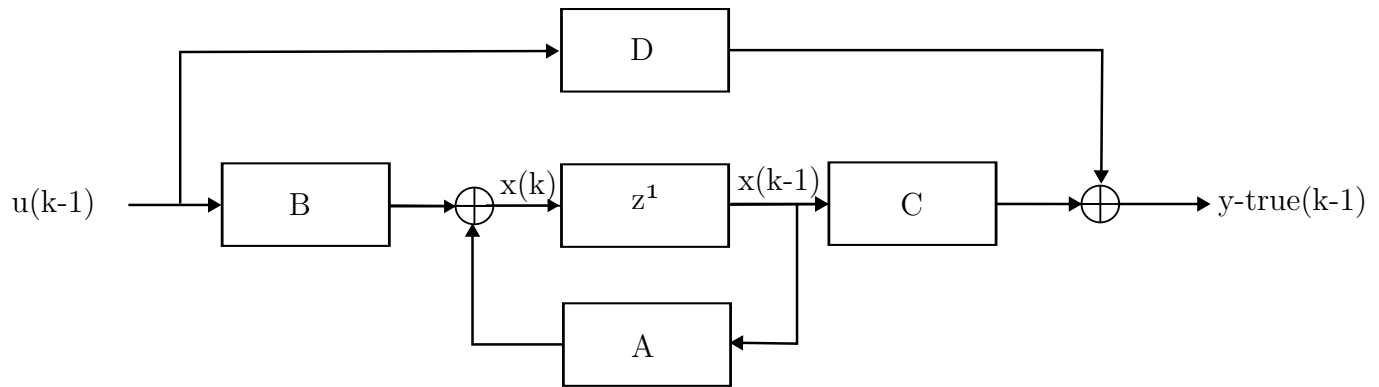
O filtro de Kalman é um algoritmo de estimativa que visa obter o melhor estimador possível para o estado de um sistema dinâmico a partir de uma série de medidas imprecisas e sujeitas a ruído. Ele é amplamente utilizado em sistemas de controle, navegação, processamento de sinais e em muitas outras aplicações.

Para o projeto em questão, ele será utilizado para prever trajetórias balísticas e determinar tanto o ponto de impacto (PI) e o ponto de disparo (PD). E serão estimados a partir de um trecho de trajetória obtido pelo radar de contrabateria.

2 Literatura

2.1 Espaço de estados

Dado a modelagem do sistema de espaço de estados, temos as equações resultantes do diagrama de blocos proposto.

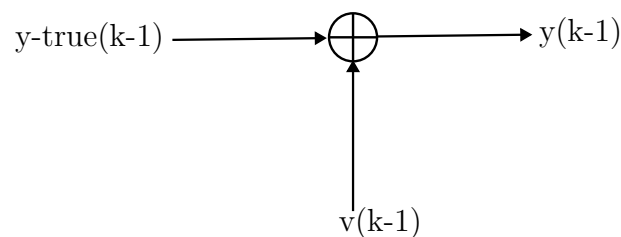


$$\mathbf{x}(k) = \mathbf{A}\mathbf{x}(k-1) + \mathbf{B}\mathbf{u}(k-1) \quad (1)$$

$$\mathbf{y}_{\text{true}}(k-1) = \mathbf{C}\mathbf{x}(k-1) + \mathbf{D}\mathbf{u}(k-1) \quad (2)$$

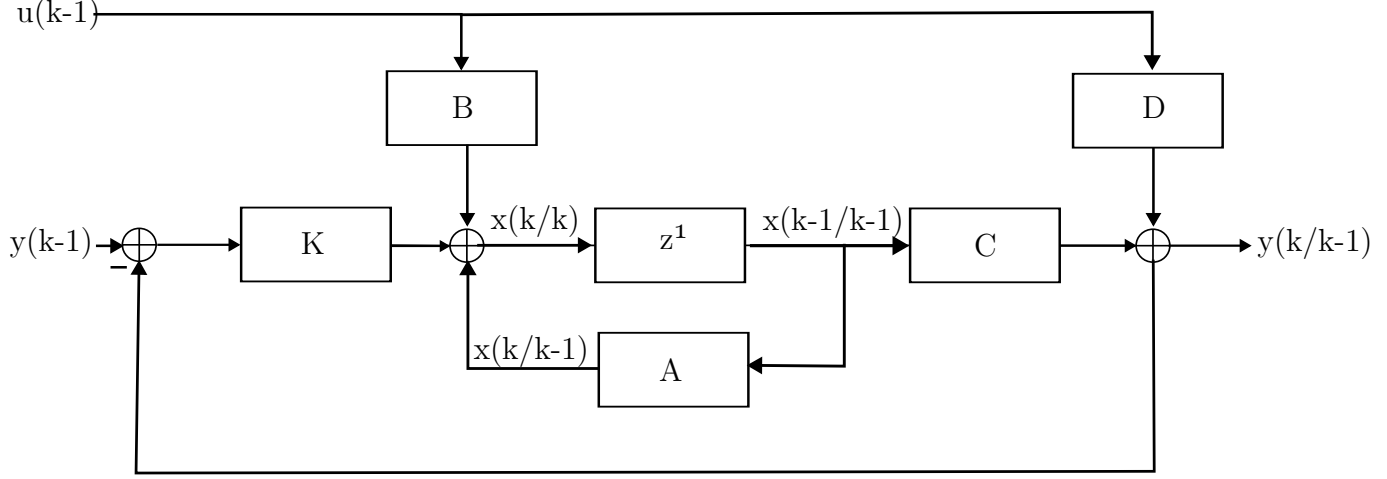
2.1.1 Medição

A saída medida é dada pela posição real do projétil somada ao ruído de medição, que neste caso é atribuído ao erro de medição do próprio radar que será empregado.



$$\mathbf{y}(k-1) = \mathbf{y}_{\text{true}}(k-1) + \mathbf{n}(k-1) \quad (3)$$

2.2 Kalman Filter



$$\hat{\mathbf{x}}(k|k-1) = \mathbf{A}\hat{\mathbf{x}}(k-1|k-1) + \mathbf{B}\mathbf{u}(k-1) \quad (4)$$

$$\hat{\mathbf{x}}(k|k) = \hat{\mathbf{x}}(k|k-1) + \mathbf{K}(k)[\mathbf{y}(k-1) - \mathbf{C}\hat{\mathbf{x}}(k-1|k-1) - \mathbf{D}\mathbf{u}(k-1)] \quad (5)$$

$$\hat{\mathbf{y}}(k-1|k-1) = \mathbf{C}\hat{\mathbf{x}}(k|k-1) + \mathbf{D}\mathbf{u}(k-1) \quad (6)$$

Onde:

$$\mathbf{K}(k) = \mathbf{P}(k|k-1)\mathbf{C}^T[\mathbf{C}\mathbf{P}(k|k-1)\mathbf{C}^T + \mathbf{R}]^{-1} \quad (7)$$

2.2.1 Algoritmo de Kalman filter

Será realizada através do algoritmo tanto a previsão do ponto de impacto quanto o ponto de onde partiu o disparo do projétil.

Equacionamento do Modelo [1]

Equações de previsão:

$$\hat{\mathbf{x}}(k|k-1) = \mathbf{A}\hat{\mathbf{x}}(k-1|k-1) + \mathbf{B}\mathbf{u}(k-1) \quad (8)$$

$$\mathbf{P}(k|k-1) = \mathbf{A}\mathbf{P}(k-1|k-1)\mathbf{A}^T + \mathbf{B}\mathbf{Q}\mathbf{B}^T \quad (9)$$

Equações de atualização:

$$\mathbf{K}(k) = \mathbf{P}(k|k-1)\mathbf{C}^T[\mathbf{C}\mathbf{P}(k|k-1)\mathbf{C}^T + \mathbf{R}]^{-1} \quad (10)$$

$$\hat{\mathbf{x}}(k|k) = \hat{\mathbf{x}}(k|k-1) + \mathbf{K}(k)[\mathbf{y}(k-1) - \mathbf{C}\hat{\mathbf{x}}(k-1|k-1) - \mathbf{D}\mathbf{u}(k-1)] \quad (11)$$

$$\mathbf{P}(k|k) = [\mathbf{I} - \mathbf{K}(k)\mathbf{C}]\mathbf{P}(k|k-1) \quad (12)$$

Equação da saída estimada:

$$\mathbf{y}(k-1|k-1) = \mathbf{C}\hat{\mathbf{x}}(k-1|k-1) + \mathbf{D}\mathbf{u}(k-1) \quad (13)$$

Onde:

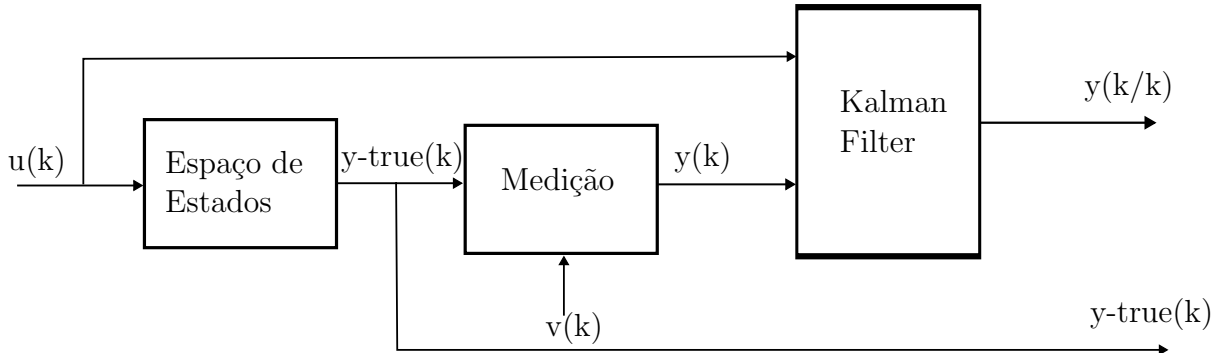
- $\hat{\mathbf{x}}(k|k-1)$ é a predição do estado
- $\hat{\mathbf{x}}(k|k)$ é a estimativa do estado
- $\mathbf{P}(k|k)$ é a matriz de covariância do erro na estimativa do estado
- \mathbf{Q} é a covariância do processo de ruído do estado
- $\mathbf{K}(k)$ é o ganho de Kalman
- \mathbf{R} é a covariância do ruído na medida
- $\mathbf{y}(k)$ é a saída medida
- $\mathbf{y}(k|k)$ é a saída estimada

2.2.2 Observações

- Tornar \mathbf{Q} maior fará o modelo confiar mais nos dados medidos, enquanto tornar \mathbf{P} maior fará o modelo confiar mais na predição.
- Escolhendo o estado estimado inicial preciso, $\hat{\mathbf{x}}(0|0) = \mathbf{x}(0)$, temos que $\mathbf{P}(0|0) = \mathbf{x}(0)\mathbf{x}(0)^T$, mas quando não sabemos o estado estimado inicial, é comum escolher $\mathbf{P}(0|0) = \sigma^2 \mathbf{I}$ onde σ^2 é grande.
- Um método prático para determinar \mathbf{Q} e \mathbf{R} é a técnica de mínimos quadrados de autocovariância (ALS, na sigla em inglês), que utiliza as autocovariâncias defasadas no tempo dos dados operacionais de rotina para estimar as covariâncias.

2.3 Visão geral modelo do sistema de espaço de estados mais Kalman filter

Após obter todos os blocos necessários, é feita a conexão entre as partes, resultando no modelo geral do projeto.



2.4 Sistema não Linear

Um sistema não linear é aquele em que as relações entre as variáveis não seguem uma proporção direta, ou seja, a resposta do sistema não é uma combinação linear das entradas. Isso significa que os efeitos das entradas não se somam de maneira simples e podem envolver termos como produtos, quadrados ou outras funções complexas das variáveis. Dessa forma, não é possível descrever completamente esses sistemas utilizando a representação em espaço de estados de forma simples, pois essa abordagem assume linearidade nas equações que regem o sistema.

Entretanto, é possível descrever esses sistemas através das funções de transição de estado discreta \mathbf{f} e de observação discreta \mathbf{h} utilizando a aproximação de funções não lineares por meio de expansões lineares locais (expansões de Taylor) em torno de um estado.

Primeiramente, ao analisarmos as expansões de Taylor para uma função $\mathbf{x}(t)$, tem-se sua seguinte descrição:

$$\mathbf{x}(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\mathbf{x}^{(n)}(a)}{n!} (t-a)^n \quad (14)$$

Agora, para um sistema descrito por uma função de transição de estado contínua no tempo \mathbf{g} tem-se a equação do estado $\dot{\mathbf{x}}$ seguida de sua expansão de Taylor para $a = Ts$:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{g}(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t)) = \mathbf{g}(t); \quad (15)$$

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}(t-Ts) + \dot{\mathbf{x}}(t-Ts)Ts + \frac{\ddot{\mathbf{x}}(t-Ts)}{2}Ts^2 + O \quad (16)$$

\implies

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}(t-Ts) + \mathbf{g}(t-Ts)Ts + \dot{\mathbf{g}}(t-Ts)\frac{Ts^2}{2} + O \quad (17)$$

onde O são as demais potências de Ts .

Logo, com a intenção de definir a função de transição de estado discreta como $\mathbf{x}(k) = \mathbf{f}(\mathbf{x}(k-1), \mathbf{u}(k-1))$ discretiza-se a equação 17 a cima, desprezando o termo O :

$$\mathbf{x}(k) = \mathbf{x}(k-1) + \mathbf{g}(k-1)Ts + \dot{\mathbf{g}}(k-1)\frac{Ts^2}{2} \quad (18)$$

\implies

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}(k-1), \mathbf{u}(k-1)) = \mathbf{x}(k-1) + \mathbf{g}(k-1)Ts + \dot{\mathbf{g}}(k-1)\frac{Ts^2}{2} \quad (19)$$

onde $\mathbf{g}(k) = \mathbf{g}(\mathbf{x}(k), \mathbf{u}(k))$

Por fim, para a função de observação discreta \mathbf{h} segue-se que:

$$\mathbf{y}(k) = \mathbf{h}(\mathbf{x}(k), \mathbf{u}(k)); \quad (20)$$

2.5 Kalman Filter Extendido (EKF)

Para realizar a filtragem e estimativa de um sistema não linear, utiliza-se a versão estendida do Filtro de Kalman, conhecida como EKF (Extended Kalman Filter). O EKF é uma generalização do Filtro de Kalman tradicional, adaptada para lidar com as não linearidades presentes nos modelos de sistemas reais. Portanto, a partir da determinação da função de transição de estado discreta \mathbf{f} e da função de observação discreta \mathbf{h} de um sistema não linear, provém-se as seguintes equações que definem o EKF:

Equações de previsão:

$$\hat{\mathbf{x}}(k|k-1) = \mathbf{f}(\hat{\mathbf{x}}(k-1|k-1), \mathbf{u}(k-1)) \quad (21)$$

$$\mathbf{P}(k|k-1) = \mathbf{F}\mathbf{P}(k-1|k-1)\mathbf{F}^T + \mathbf{B}\mathbf{Q}\mathbf{B}^T \quad (22)$$

Equações de atualização:

$$\mathbf{K}(k) = \mathbf{P}(k|k-1)\mathbf{H}^T[\mathbf{H}\mathbf{P}(k|k-1)\mathbf{H}^T + \mathbf{R}]^{-1} \quad (23)$$

$$\hat{\mathbf{x}}(k|k) = \hat{\mathbf{x}}(k|k-1) + \mathbf{K}(k)[\mathbf{y}(k) - \mathbf{h}(\hat{\mathbf{x}}(k|k-1))] \quad (24)$$

$$\mathbf{P}(k|k) = [\mathbf{I} - \mathbf{K}(k)\mathbf{H}]\mathbf{P}(k|k-1) \quad (25)$$

Equação da saída estimada:

$$\mathbf{y}(k|k-1) = \mathbf{h}(\hat{\mathbf{x}}(k|k-1)) \quad (26)$$

Onde F e H são as seguintes jacobianas:

- $\mathbf{F} = \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}}|_{\hat{\mathbf{x}}(k-1|k-1), \mathbf{u}(k-1)}$
- $\mathbf{H} = \frac{\partial \mathbf{h}}{\partial \mathbf{x}}|_{\hat{\mathbf{x}}(k|k-1)}$

2.6 Resistência Do Ar

Para tornar o modelo mais próximo da realidade, será introduzida a força de arrasto, resultante da resistência do ar, ao equacionamento do modelo balístico. A força de arrasto tem como característica estar sempre em oposição à direção do movimento da trajetória, como mostra a figura abaixo:

A equação da força de arrasto pode ser escrita da seguinte maneira:

$$\vec{\mathbf{F}}_a = -\frac{1}{2}\rho C_a A v^2 \hat{\mathbf{v}} \quad (27)$$

Onde:

- ρ : Densidade do ar atmosférico.
- C_a : Coeficiente de arrasto.
- A: Maior área de seção transversal do corpo.

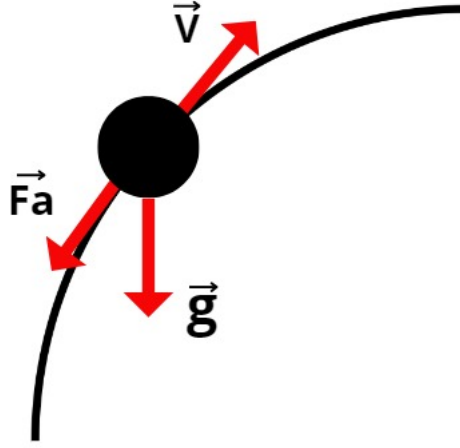


Figura 1

3 Metodologia

3.1 Modelagem do Espaço de Estados

Para dar início ao projeto, serão feitos três exemplos simples da implementação do filtro de Kalman, que são estes movimento retilíneo uniforme, movimento retilíneo uniformemente variado e uma parábola. Será utilizado o exemplo geral que terá como vetor de estados a posição e a velocidade em duas dimensões. Como posteriormente a única aceleração neste projeto será a gravidade no eixo z, não serão entradas do modelo as acelerações.

3.1.1 Equacionamento 2D

Supondo a equação do movimento retilíneo uniformemente variado em duas dimensões dada pelo vetor $\mathbf{p}(t) = \mathbf{p}_0 + \mathbf{v}_0 t + \frac{\mathbf{a}t^2}{2}$. E a equação da velocidade é dada por $\mathbf{v}(t) = \mathbf{v}_0 + \mathbf{a}t$. Agora mudando a equação para o tempo discreto, onde $t = kTs$, onde Ts é o período de amostragem. Deste modo, teremos:

$$\mathbf{p}(k) = \mathbf{p}_0 + \mathbf{v}_0 kTs + \frac{\mathbf{a}Ts^2 k^2}{2} \quad (28)$$

$$\mathbf{v}(k) = \mathbf{v}_0 + \mathbf{a}kTs \quad (29)$$

Deslocando a equação da posição e velocidade, temos:

$$\mathbf{p}(k-1) = \mathbf{p}_0 + \mathbf{v}_0 [k-1]Ts + \frac{\mathbf{a}Ts^2 [k-1]^2}{2} \quad (30)$$

$$\mathbf{v}(k-1) = \mathbf{v}_0 + \mathbf{a}[k-1]Ts \quad (31)$$

Fazendo a diferença entre as equações 28 e 30, temos:

$$\mathbf{p}(k) = \mathbf{p}(k-1) + Ts[\mathbf{v}_0 + \mathbf{a}[k-1]Ts] + \frac{\mathbf{a}Ts^2}{2} \quad (32)$$

Substituindo o segundo termo pela velocidade dado pela equação 31, podemos encontrar:

$$\mathbf{p}(k) = \mathbf{p}(k-1) + \mathbf{v}(k)Ts + \frac{\mathbf{a}Ts^2}{2} \quad (33)$$

Fazendo a diferença entre as equações 29 e 31, temos:

$$\mathbf{v}(k) = \mathbf{v}(k-1) + \mathbf{a}Ts \quad (34)$$

Finalmente modelando a equao de espaço de estamos, obtemos o seguinte resultado:

$$\mathbf{x}(k) = \begin{bmatrix} p \\ v \end{bmatrix}_k = \begin{bmatrix} p_x \\ p_y \\ v_x \\ v_y \end{bmatrix}_k = \begin{bmatrix} 1 & 0 & Ts & 0 \\ 0 & 1 & 0 & Ts \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_x \\ p_y \\ v_x \\ v_y \end{bmatrix}_{k-1} + \begin{bmatrix} \frac{Ts^2}{2} & 0 \\ 0 & \frac{Ts^2}{2} \\ Ts & 0 \\ 0 & Ts \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_x \\ a_y \end{bmatrix} \quad (35)$$

$$\mathbf{y}_{\text{true}}(k) = \begin{bmatrix} out_x \\ out_y \end{bmatrix}_k = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_x \\ p_y \\ v_x \\ v_y \end{bmatrix}_k + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_x \\ a_y \end{bmatrix} \quad (36)$$

Onde as matrizes de espaço de estado so:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & Ts & 0 \\ 0 & 1 & 0 & Ts \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} \frac{Ts^2}{2} & 0 \\ 0 & \frac{Ts^2}{2} \\ Ts & 0 \\ 0 & Ts \end{bmatrix}; \quad \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{D} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (37)$$

3.1.2 M.R.U. e Parábola

Tanto o movimento retilnio uniforme quanto o movimento parabólico são casos específicos do modelo geral obtido, diferindo apenas no vetor acelerao.

Para o m.r.u. teremos que o vetor acelerao será dado por $\mathbf{a} = [0 \ 0]^T$, e para a parábola, teremos $\mathbf{a} = [0 \ -g]^T$, onde g  o módulo da acelerao da gravidade.

3.1.3 Equacionamento 3D

Análogo ao equacionamento do modelo de espaço de estados para duas dimensões, partindo das equações 33 e 34, temos o novo sistema seguido de suas matrizes, com a entrada $\mathbf{u}(k-1) = [0 \ 0 \ -g]^T$.

$$\mathbf{x}(k) = \begin{bmatrix} p_x \\ p_y \\ p_z \\ v_x \\ v_y \\ v_z \end{bmatrix}_k = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & Ts & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & Ts & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & Ts \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_x \\ p_y \\ p_z \\ v_x \\ v_y \\ v_z \end{bmatrix}_{k-1} + \begin{bmatrix} \frac{Ts^2}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{Ts^2}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{Ts^2}{2} \\ Ts & 0 & 0 \\ 0 & Ts & 0 \\ 0 & 0 & Ts \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{bmatrix} \quad (38)$$

$$\mathbf{y}_{\text{true}}(k-1) = \begin{bmatrix} p_x \\ p_y \\ p_z \\ v_x \\ v_y \\ v_z \end{bmatrix}_{k-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_x \\ p_y \\ p_z \\ v_x \\ v_y \\ v_z \end{bmatrix}_{k-1} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{bmatrix} \quad (39)$$

Onde as matrizes de espaço de estado são:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & Ts & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & Ts & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & Ts \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} \frac{Ts^2}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{Ts^2}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{Ts^2}{2} \\ Ts & 0 & 0 \\ 0 & Ts & 0 \\ 0 & 0 & Ts \end{bmatrix}; \quad \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix};$$

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix};$$

3.2 Filtragem Da Posição do Objeto

Conforme abordado na teoria do filtro de Kalman, foram empregados três métodos para realizar a filtragem da posição medida do objeto ao longo das amostras.

3.2.1 Método 1

A filtragem da posição medida é realizada a cada iteração.

3.2.2 Método 2

A filtragem da trajetória medida é realizada percorrendo diretamente e depois reversamente a cada iteração, de modo que a primeira e a última posição filtrada correspondam à primeira amostra.

3.2.3 Método 3

A filtragem da trajetória medida é realizada percorrendo diretamente e depois reversamente várias vezes a cada iteração, garantindo que a primeira e a última posição filtrada correspondam à primeira amostra.

3.3 Predição do Ponto de Impacto e Disparo

A fim de se prever os pontos de impacto e de disparo do projétil, determinado pelas saídas p_i e p_d para a amostragem atual k , onde $k + j_i$ e $k - j_d$ representam a predição da amostragem no momento de impacto e de disparo, respectivamente. Dessa forma, calcula-se as saídas a cima através das equações de espaço de estados e a partir do estado estimado atual $\hat{\mathbf{x}}(k|k)$.

3.3.1 Ponto de Impacto

Os pontos da trajetória de impacto $\mathbf{y}(k+j|k)$ são dados por:

$$\hat{\mathbf{x}}(k+j|k) = \mathbf{A}\hat{\mathbf{x}}(k+j-1|k) + \mathbf{B}\mathbf{u}(k+j-1) \quad (40)$$

$$\mathbf{y}(k+j|k) = \mathbf{C}\hat{\mathbf{x}}(k+j|k) \quad (41)$$

Portanto, quando a saída atingir o solo, para $j = j_i$, obtemos o ponto de impacto $p_i = \mathbf{y}(k+j_i|k)$.

3.3.2 Ponto de Disparo

Para prever os pontos da trajetória de disparo, isola-se o termo $x(k-1)$ na equação de espaço de estados 1, obtendo a equação abaixo:

$$\mathbf{x}(k-1) = \mathbf{A}^{-1}[\mathbf{x}(k) - \mathbf{B}\mathbf{u}(k-1)] \quad (42)$$

Logo, os pontos da trajetória de disparo $\mathbf{y}(k-j|k)$ são dados por:

$$\hat{\mathbf{x}}(k-j|k) = \mathbf{A}^{-1}[\hat{\mathbf{x}}(k-j+1|k) - \mathbf{B}\mathbf{u}(k-j)] \quad (43)$$

$$\mathbf{y}(k-j|k) = \mathbf{C}\hat{\mathbf{x}}(k-j|k) \quad (44)$$

Portanto, quando a saída atingir o solo, para $j = j_d$, obtemos o ponto de disparo $p_d = \mathbf{y}(k-j_d|k)$.

3.3.3 Equacionamento direto

Alternativamente, é possível obter os pontos de impacto e disparo através das mesmas equações utilizadas para determinar o sistema de espaço de estados. Primeiramente, obtêm-se posição e velocidade iniciais a partir do estado estimado atual:

$$\hat{\mathbf{x}}(k|k) = [\mathbf{p}_0 \quad \mathbf{v}_0]^T \quad (45)$$

Agora, pela equações da parábola:

$$p_{solo} = p_{0z} + v_{0z}t - \frac{gt^2}{2} \iff \quad (46)$$

$$t_i = \frac{v_{0z} + \sqrt{v_{0z}^2 + 2g(p_{0z} - p_{solo})}}{g} \quad (47)$$

$$t_d = \frac{v_{0z} - \sqrt{v_{0z}^2 + 2g(p_{0z} - p_{solo})}}{g} \quad (48)$$

Dessa forma, determina-se ponto de impacto:

$$p_{ix} = p_{0x} + v_{0x}t_i \quad (49)$$

$$p_{iy} = p_{0y} + v_{0y}t_i \quad (50)$$

$$\mathbf{p}_i = [p_{ix} \quad p_{iy} \quad p_{solo}]^T \quad (51)$$

De forma análoga, determina-se o ponto de disparo:

$$p_{dx} = p_{0x} + v_{0x}t_d \quad (52)$$

$$p_{dy} = p_{0y} + v_{0y}t_d \quad (53)$$

$$p_d = \begin{bmatrix} p_{dx} & p_{dy} & p_{solo} \end{bmatrix}^T \quad (54)$$

3.4 Modelagem Do Sistema Com o Parâmetro De Arrasto

Para encontrar a função de transferência de tempo contínuo $\mathbf{g}(t)$, é necessário conhecer o modelo físico da força de arrasto que atua contra o movimento do projétil.

A partir da segunda Lei de Newton e do conhecimento das equações das forças atuantes sobre o projétil, chegamos no seguinte equacionamento:

$$\sum \vec{F} = m\vec{a} \quad (55)$$

$$m\vec{g} + \vec{F}_a = m\vec{a} \quad (56)$$

Substituindo a força de arrasto da equação 27, podemos obter:

$$m\vec{a} = -\frac{1}{2}\rho C_a A v^2 \hat{v} + m\vec{g} \quad (57)$$

Agora reescrevendo a equação, isolando a aceleração de forma matricial:

$$\vec{a} = \begin{bmatrix} \dot{v}_x \\ \dot{v}_y \\ \dot{v}_z \end{bmatrix} = -\frac{1}{2m}\rho C_a A v \begin{bmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -g \end{bmatrix} \quad (58)$$

Onde $v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}$ é o módulo da velocidade do projétil e $\vec{u} = [0 \ 0 \ -g]^T$ é o vetor de entradas do sistema. Vamos considerar também a densidade do ar uma função variável e dependente da altura z do projétil, sendo a equação $\rho(z) = \rho_0 e^{-kz}$. Onde ρ_0 é a densidade do ar no nível do mar e k é o fator de decaimento da densidade do ar.

Como forma de simplificar a visão de equacionamento, define-se como gama o parâmetro de arrasto descrito na equação abaixo:

$$\gamma = \frac{C_a A \rho(z)}{m} \quad (59)$$

A equação da aceleração então se torna:

$$\begin{bmatrix} \dot{v}_x \\ \dot{v}_y \\ \dot{v}_z \end{bmatrix} = -\frac{1}{2}\gamma v \begin{bmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -g \end{bmatrix} \quad (60)$$

Sendo $x(t) = [p \ v \ \gamma]^T$ o vetor de espaço de estados do tempo contínuo, a função de transição de tempo contínuo $\mathbf{g}(t)$ se torna $\mathbf{g}(t) = \dot{\mathbf{x}}(t) = [\dot{p} \ \dot{v} \ \dot{\gamma}]^T$. Onde $\dot{\gamma} = -k\gamma\dot{z}$, logo:

$$\mathbf{g}(t) = \begin{bmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \\ \dot{v}_x \\ \dot{v}_y \\ \dot{v}_z \\ -k\gamma v_z \end{bmatrix} \quad (61)$$

Agora, deseja-se obter o valor de $\dot{\mathbf{g}}(t)$. Dessa forma:

$$\dot{\mathbf{g}}(t) = \frac{d\mathbf{g}(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t))}{dt} = \frac{\partial \mathbf{g}}{\partial \mathbf{x}} \dot{\mathbf{x}} + \frac{\partial \mathbf{g}}{\partial \mathbf{u}} \dot{\mathbf{u}} = \frac{\partial \mathbf{g}}{\partial \mathbf{x}} \mathbf{g}(t) \quad (62)$$

Para prosseguir com o modelo não linear do EKF, será agora realizado o cálculo da matriz jacobiana $\frac{\partial \mathbf{g}}{\partial \mathbf{x}}$

$$\frac{\partial \mathbf{g}}{\partial \mathbf{x}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial v_x}{\partial x} & \frac{\partial v_x}{\partial y} & \frac{\partial v_x}{\partial z} & \frac{\partial v_x}{\partial v_x} & \frac{\partial v_x}{\partial v_y} & \frac{\partial v_x}{\partial v_z} & \frac{\partial v_x}{\partial \gamma} \\ \frac{\partial v_y}{\partial x} & \frac{\partial v_y}{\partial y} & \frac{\partial v_y}{\partial z} & \frac{\partial v_y}{\partial v_x} & \frac{\partial v_y}{\partial v_y} & \frac{\partial v_y}{\partial v_z} & \frac{\partial v_y}{\partial \gamma} \\ \frac{\partial v_z}{\partial x} & \frac{\partial v_z}{\partial y} & \frac{\partial v_z}{\partial z} & \frac{\partial v_z}{\partial v_x} & \frac{\partial v_z}{\partial v_y} & \frac{\partial v_z}{\partial v_z} & \frac{\partial v_z}{\partial \gamma} \\ \frac{\partial \dot{v}_x}{\partial x} & \frac{\partial \dot{v}_x}{\partial y} & \frac{\partial \dot{v}_x}{\partial z} & \frac{\partial \dot{v}_x}{\partial v_x} & \frac{\partial \dot{v}_x}{\partial v_y} & \frac{\partial \dot{v}_x}{\partial v_z} & \frac{\partial \dot{v}_x}{\partial \gamma} \\ \frac{\partial \dot{v}_y}{\partial x} & \frac{\partial \dot{v}_y}{\partial y} & \frac{\partial \dot{v}_y}{\partial z} & \frac{\partial \dot{v}_y}{\partial v_x} & \frac{\partial \dot{v}_y}{\partial v_y} & \frac{\partial \dot{v}_y}{\partial v_z} & \frac{\partial \dot{v}_y}{\partial \gamma} \\ \frac{\partial \dot{v}_z}{\partial x} & \frac{\partial \dot{v}_z}{\partial y} & \frac{\partial \dot{v}_z}{\partial z} & \frac{\partial \dot{v}_z}{\partial v_x} & \frac{\partial \dot{v}_z}{\partial v_y} & \frac{\partial \dot{v}_z}{\partial v_z} & \frac{\partial \dot{v}_z}{\partial \gamma} \\ \frac{\partial \dot{\gamma}}{\partial x} & \frac{\partial \dot{\gamma}}{\partial y} & \frac{\partial \dot{\gamma}}{\partial z} & \frac{\partial \dot{\gamma}}{\partial v_x} & \frac{\partial \dot{\gamma}}{\partial v_y} & \frac{\partial \dot{\gamma}}{\partial v_z} & \frac{\partial \dot{\gamma}}{\partial \gamma} \end{bmatrix} \quad (63)$$

Nota-se que as três primeiras linhas da matriz são nulas, com exceção dos termos $\frac{\partial v_x}{\partial v_x}$, $\frac{\partial v_y}{\partial v_y}$ e $\frac{\partial v_z}{\partial v_z}$, que são iguais a 1. Agora seguiremos para os cálculos das próximas linhas da matriz baseado na equação 60 e na equação de γ .

Na quarta linha da matriz, onde $\dot{v}_x = -\frac{1}{2}\gamma v v_x$, teremos:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \dot{v}_x}{\partial x} &= \frac{\partial \dot{v}_x}{\partial y} = 0 \\ \frac{\partial \dot{v}_x}{\partial z} &= \frac{\partial}{\partial z} \left(-\frac{1}{2}\gamma v v_x \right) = \frac{1}{2} k \gamma v v_x \\ \frac{\partial \dot{v}_x}{\partial v_x} &= \frac{\partial}{\partial v_x} \left(-\frac{1}{2}\gamma v v_x \right) = -\frac{1}{2}\gamma \left(\frac{\partial v}{\partial v_x} v_x + \frac{\partial v_x}{\partial v_x} v \right) = -\frac{1}{2}\gamma \left(\frac{v_x^2}{v} + v \right) \\ \frac{\partial \dot{v}_x}{\partial v_y} &= \frac{\partial}{\partial v_y} \left(-\frac{1}{2}\gamma v v_x \right) = -\frac{1}{2}\gamma \frac{v_x v_y}{v} \\ \frac{\partial \dot{v}_x}{\partial v_z} &= \frac{\partial}{\partial v_z} \left(-\frac{1}{2}\gamma v v_x \right) = -\frac{1}{2}\gamma \frac{v_z v_x}{v} \\ \frac{\partial \dot{v}_x}{\partial \gamma} &= \frac{\partial}{\partial \gamma} \left(-\frac{1}{2}\gamma v v_x \right) = -\frac{1}{2} v v_x \end{aligned}$$

Na quinta linha, onde $\dot{v}_y = -\frac{1}{2}\gamma v v_y$, teremos:

$$\frac{\partial \dot{v}_y}{\partial x} = \frac{\partial \dot{v}_y}{\partial y} = 0$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \dot{v}_y}{\partial z} &= \frac{\partial}{\partial z} \left(-\frac{1}{2} \gamma v v_y \right) = \frac{1}{2} k \gamma v v_y \\
\frac{\partial \dot{v}_y}{\partial v_x} &= \frac{\partial}{\partial v_x} \left(-\frac{1}{2} \gamma v v_y \right) = -\frac{1}{2} \gamma \frac{v_x v_y}{v} \\
\frac{\partial \dot{v}_y}{\partial v_y} &= \frac{\partial}{\partial v_y} \left(-\frac{1}{2} \gamma v v_y \right) = -\frac{1}{2} \gamma \left(\frac{\partial v}{\partial v_y} v_y + \frac{\partial v_y}{\partial v_y} v \right) = -\frac{1}{2} \gamma \left(\frac{v_y^2}{v} + v \right) \\
\frac{\partial \dot{v}_y}{\partial v_z} &= \frac{\partial}{\partial v_z} \left(-\frac{1}{2} \gamma v v_y \right) = -\frac{1}{2} \gamma \frac{v_y v_z}{v} \\
\frac{\partial \dot{v}_y}{\partial \gamma} &= \frac{\partial}{\partial \gamma} \left(-\frac{1}{2} \gamma v v_y \right) = -\frac{1}{2} v v_y
\end{aligned}$$

Na sexta linha, onde $\dot{v}_z = -\frac{1}{2} \gamma v v_z - g$, teremos:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \dot{v}_z}{\partial x} &= \frac{\partial \dot{v}_z}{\partial y} = 0 \\
\frac{\partial \dot{v}_z}{\partial z} &= \frac{\partial}{\partial z} \left(-\frac{1}{2} \gamma v v_z \right) = \frac{1}{2} k \gamma v v_z \\
\frac{\partial \dot{v}_z}{\partial v_x} &= \frac{\partial}{\partial v_x} \left(-\frac{1}{2} \gamma v v_z \right) = -\frac{1}{2} \gamma \frac{v_z v_x}{v} \\
\frac{\partial \dot{v}_z}{\partial v_y} &= \frac{\partial}{\partial v_y} \left(-\frac{1}{2} \gamma v v_z \right) = -\frac{1}{2} \gamma \frac{v_y v_z}{v} \\
\frac{\partial \dot{v}_z}{\partial v_z} &= \frac{\partial}{\partial v_z} \left(-\frac{1}{2} \gamma v v_z \right) = -\frac{1}{2} \gamma \left(\frac{\partial v}{\partial v_z} v_z + \frac{\partial v_z}{\partial v_z} v \right) = -\frac{1}{2} \gamma \left(\frac{v_z^2}{v} + v \right) \\
\frac{\partial \dot{v}_z}{\partial \gamma} &= \frac{\partial}{\partial \gamma} \left(-\frac{1}{2} \gamma v v_z \right) = -\frac{1}{2} v v_z
\end{aligned}$$

Na sétima linha, onde $\dot{\gamma} = -k \gamma v_z$, teremos:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \dot{\gamma}}{\partial x} &= \frac{\partial \dot{\gamma}}{\partial y} = 0 \\
\frac{\partial \dot{\gamma}}{\partial z} &= \frac{\partial}{\partial z} (-k \gamma v_z) = k^2 \gamma v_z \\
\frac{\partial \dot{\gamma}}{\partial v_x} &= \frac{\partial \dot{\gamma}}{\partial v_y} = 0 \\
\frac{\partial \dot{\gamma}}{\partial v_z} &= \frac{\partial}{\partial v_z} (-k \gamma v_z) = -k \gamma \\
\frac{\partial \dot{\gamma}}{\partial \gamma} &= \frac{\partial}{\partial \gamma} (-k \gamma v_z) = -k v_z
\end{aligned}$$

Por fim, após realizados todos os cálculos, a matriz jacobiana fica da seguinte forma:

$$\frac{\partial \mathbf{g}}{\partial \mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2}k\gamma vv_x & -\frac{1}{2}\gamma(\frac{v_x^2}{v} + v) & -\frac{1}{2}\gamma\frac{v_x v_y}{v} & -\frac{1}{2}\gamma\frac{v_z v_x}{v} & -\frac{1}{2}vv_x \\ 0 & 0 & \frac{1}{2}k\gamma vv_y & -\frac{1}{2}\gamma\frac{v_x v_y}{v} & -\frac{1}{2}\gamma(\frac{v_y^2}{v} + v) & -\frac{1}{2}\gamma\frac{v_y v_z}{v} & -\frac{1}{2}vv_y \\ 0 & 0 & \frac{1}{2}k\gamma vv_z & -\frac{1}{2}\gamma\frac{v_z v_x}{v} & -\frac{1}{2}\gamma\frac{v_y v_z}{v} & -\frac{1}{2}\gamma(\frac{v_z^2}{v} + v) & -\frac{1}{2}vv_z \\ 0 & 0 & k^2\gamma v_z & 0 & 0 & -k\gamma & -kv_z \end{bmatrix} \quad (64)$$

Encontrada a matriz, temos finalmente o cálculo de $\frac{\partial \mathbf{g}}{\partial \mathbf{x}} \mathbf{g}(t)$ a seguir.

$$\frac{\partial \mathbf{g}}{\partial \mathbf{x}} \mathbf{g}(t) = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2}\gamma vv_x \\ -\frac{1}{2}\gamma vv_y \\ -\frac{1}{2}\gamma vv_z - g \\ k\gamma vv_z v_x + \frac{1}{2}v_x \gamma^2 v^2 + \frac{1}{2}\frac{v_z v_x}{v} \gamma g \\ k\gamma vv_z v_y + \frac{1}{2}v_y \gamma^2 v^2 + \frac{1}{2}\frac{v_y v_z}{v} \gamma g \\ k\gamma vv_z^2 + \frac{1}{2}v_z \gamma^2 v^2 + \frac{1}{2}(\frac{v_z^2}{v} + v) \gamma g \\ 2v_z^2 k\gamma + \frac{1}{2}k^2 \gamma^2 vv_z + kg\gamma \end{bmatrix} \quad (65)$$

3.4.1 Sistema Não linear Discretizado

Dado que foram encontrados todos os elementos para poder escrever a equação 18 em sua forma matricial, esta fica da seguinte forma:

$$\mathbf{x}(k) = \begin{bmatrix} p_x \\ p_y \\ p_z \\ v_x \\ v_y \\ v_z \\ \gamma \end{bmatrix}_k = \begin{bmatrix} p_x \\ p_y \\ p_z \\ v_x \\ v_y \\ v_z \\ \gamma \end{bmatrix}_{k-1} + Ts \begin{bmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \\ \dot{v}_x \\ \dot{v}_y \\ \dot{v}_z \\ -k\gamma v_z \end{bmatrix}_{k-1} + \frac{Ts^2}{2} \begin{bmatrix} -\frac{1}{2}\gamma vv_x \\ -\frac{1}{2}\gamma vv_y \\ -\frac{1}{2}\gamma vv_z - g \\ k\gamma vv_z v_x + \frac{1}{2}v_x \gamma^2 v^2 + \frac{1}{2}\frac{v_z v_x}{v} \gamma g \\ k\gamma vv_z v_y + \frac{1}{2}v_y \gamma^2 v^2 + \frac{1}{2}\frac{v_y v_z}{v} \gamma g \\ k\gamma vv_z^2 + \frac{1}{2}v_z \gamma^2 v^2 + \frac{1}{2}(\frac{v_z^2}{v} + v) \gamma g \\ 2v_z^2 k\gamma + \frac{1}{2}k^2 \gamma^2 vv_z + kg\gamma \end{bmatrix}_{k-1} \quad (66)$$

Como $\dot{v}_z = -\frac{1}{2}\gamma vv_z - g$, podemos reescrever e separar as matrizes de maneira a explicitar a matriz de entradas do sistema:

$$\begin{aligned}
\mathbf{x}(k) = \begin{bmatrix} p_x \\ p_y \\ p_z \\ v_x \\ v_y \\ v_z \\ \gamma \end{bmatrix}_k &= \begin{bmatrix} p_x \\ p_y \\ p_z \\ v_x \\ v_y \\ v_z \\ \gamma \end{bmatrix} + Ts \begin{bmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \\ -\frac{1}{2}\gamma v v_x \\ -\frac{1}{2}\gamma v v_y \\ -\frac{1}{2}\gamma v v_z \\ -k\gamma v_z \end{bmatrix} + \frac{Ts^2}{2} \begin{bmatrix} -\frac{1}{2}\gamma v v_x \\ -\frac{1}{2}\gamma v v_y \\ -\frac{1}{2}\gamma v v_z \\ k\gamma v v_z v_x + \frac{1}{2}v_x \gamma^2 v^2 + \frac{1}{2}\frac{v_z v_x}{v} \gamma g \\ k\gamma v v_z v_y + \frac{1}{2}v_y \gamma^2 v^2 + \frac{1}{2}\frac{v_y v_z}{v} \gamma g \\ k\gamma v v_z^2 + \frac{1}{2}v_z \gamma^2 v^2 + \frac{1}{2}(\frac{v_z^2}{v} + v) \gamma g \\ 2v_z^2 k\gamma + \frac{1}{2}k^2 \gamma^2 v v_z + kg\gamma \end{bmatrix}_{k-1} + \\
&\begin{bmatrix} \frac{Ts^2}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{Ts^2}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{Ts^2}{2} \\ T & 0 & 0 \\ 0 & T & 0 \\ 0 & 0 & T \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -g \end{bmatrix} \quad (67)
\end{aligned}$$

$$\mathbf{y}_{\text{true}}(k-1) = \begin{bmatrix} p_x \\ p_y \\ p_z \end{bmatrix}_{k-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_x \\ p_y \\ p_z \\ v_x \\ v_y \\ v_z \\ \gamma \end{bmatrix}_{k-1} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -g \end{bmatrix} \quad (68)$$

3.5 Interpolação dos Pontos

3.5.1 Introdução

A interpolação é uma técnica matemática usada para estimar valores entre pontos conhecidos de um conjunto de dados. Na presente simulação de radar de contrabateria, utilizando o período de amostragem original de 20 ms, a interpolação parabólica vai ser utilizada para obter valores intermediários a cada 5 ms. Esta técnica será utilizada a fim de atestar a eficiência do resultado da comparação do método de um período de amostragem maior de 20ms porém interpolado para um período de 5ms com o período de amostragem de 5ms propriamente dito. Caso os resultados obtidos forem satisfatórios, este método se mostrará o mais indicado para seguir com o projeto.

3.5.2 Processo de Interpolação Parabólica

A cada três pontos das amostras consecutivos serem selecionados, são encontrados os coeficientes do polinômio de segundo grau desejado. A partir do polinômio de segundo grau encontrado, são calculados os pontos interpolados nos intervalos de tempo desejados, e o processo é repedito para todo o conjunto de dados disponíveis.

Sendo dois dos pontos utilizados medidos e o terceiro ponto o estimado do próximo estado obtido pelo filtro de kalman, não sendo necessário uma próxima iteração para obter os pontos intermediários. Na próxima iteração o ponto estimado é substituído pelo ponto medido para fazer a interpolação utiliza-se o próximo ponto estimado.

3.5.3 Vantagens do Método

A interpolação tem por vantagens uma melhor precisão da curva obtida pelas amostras, capturando melhor as mudanças na velocidade e na trajetória, além de tornar a curva mais suave na transição entre os pontos amostrados, resultando em uma representação mais realista do movimento dos projéteis. Outra vantagem é o custo computacional médio, apesar da interpolação quadrática ser mais complexa do que a linear, é mais precisa dado a natureza do movimento estudado.

Referências

- [1] Greg Welch, Gary Bishop, et al. An introduction to the kalman filter. 1995.