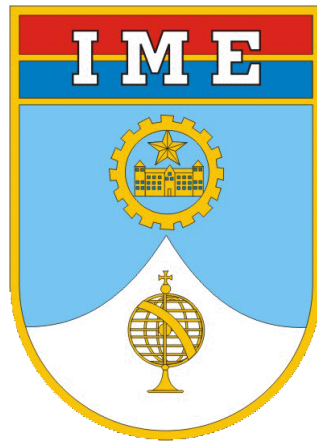


MINISTÉRIO DA DEFESA  
EXÉRCITO BRASILEIRO  
DEPARTAMENTO DE CIÊNCIA E TECNOLOGIA  
INSTITUTO MILITAR DE ENGENHARIA  
(REAL ACADEMIA DE ARTILHARIA, FORTIFICAÇÃO E DESENHO, 1792)



## INSTITUTO MILITAR DE ENGENHARIA

Uma Investigação Preliminar De Rastreamento De Alvos Em Radars De  
Contrabateria - PFC

MATEUS **DANTAS** LINS DE OLIVEIRA  
**IGOR** LUCINDO CARDOSO

# Sumário

<b>1</b>	<b>Introdução</b>	<b>1</b>
<b>2</b>	<b>Literatura</b>	<b>1</b>
2.1	Espaço de estados . . . . .	1
2.1.1	Medição . . . . .	1
2.2	Kalman Filter . . . . .	2
2.2.1	Algoritmo de Kalman filter . . . . .	2
2.2.2	Observações . . . . .	3
2.3	Visão geral modelo do sistema de espaço de estados mais Kalman filter . .	3
2.4	Sistema não Linear . . . . .	4
2.5	Kalman Filter Extendido (EKF) . . . . .	5
2.6	Resistência Do Ar . . . . .	5
<b>3</b>	<b>Metodologia</b>	<b>6</b>
3.1	Modelagem do Espaço de Estados . . . . .	6
3.1.1	Equacionamento 2D . . . . .	6
3.1.2	M.R.U. e Parábola . . . . .	7
3.1.3	Equacionamento 3D . . . . .	7
3.2	Filtragem Da Posição do Objeto . . . . .	8
3.2.1	Método 1 . . . . .	8
3.2.2	Método 2 . . . . .	8
3.2.3	Método 3 . . . . .	8
3.3	Predição do Ponto de Impacto e Disparo . . . . .	8
3.3.1	Ponto de Impacto . . . . .	9
3.3.2	Ponto de Disparo . . . . .	9
3.3.3	Equacionamento direto . . . . .	9
3.4	Modelagem Do Sistema Com o Parâmetro De Arrasto . . . . .	10

# 1 Introdução

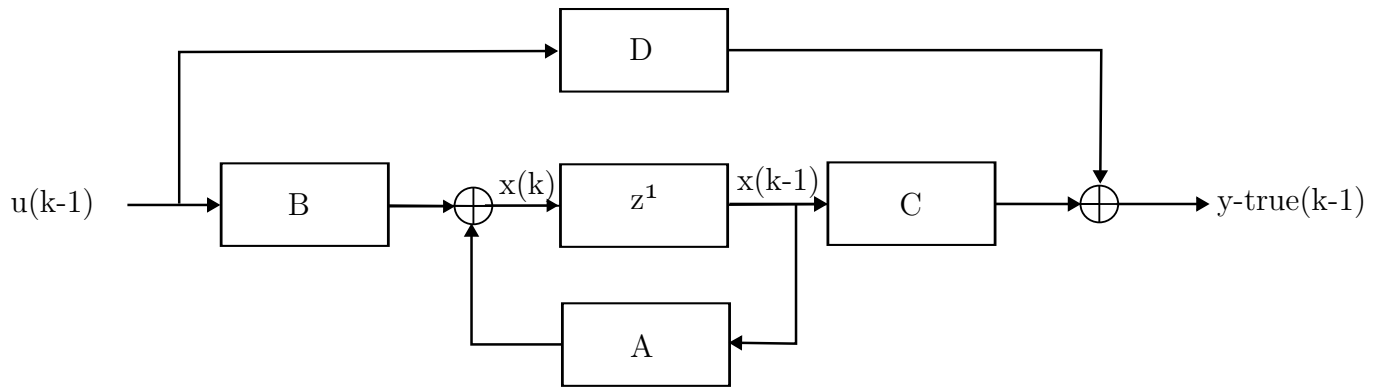
O filtro de Kalman é um algoritmo de estimativa que visa obter o melhor estimador possível para o estado de um sistema dinâmico a partir de uma série de medidas imprecisas e sujeitas a ruído. Ele é amplamente utilizado em sistemas de controle, navegação, processamento de sinais e em muitas outras aplicações.

Para o projeto em questão, ele será utilizado para prever trajetórias balísticas e determinar tanto o ponto de impacto (PI) e o ponto de disparo (PD). E serão estimados a partir de um trecho de trajetória obtido pelo radar de contrabateria.

## 2 Literatura

### 2.1 Espaço de estados

Dado a modelagem do sistema de espaço de estados, temos as equações resultantes do diagrama de blocos proposto.

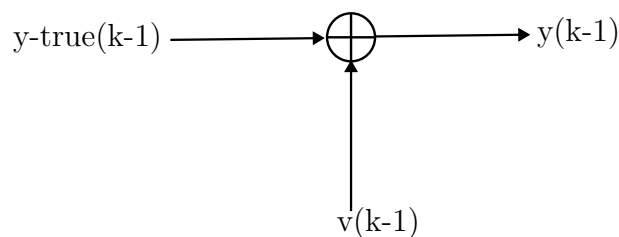


$$\mathbf{x}(k) = \mathbf{A}\mathbf{x}(k-1) + \mathbf{B}\mathbf{u}(k-1) \quad (1)$$

$$\mathbf{y}_{\text{true}}(k-1) = \mathbf{C}\mathbf{x}(k-1) + \mathbf{D}\mathbf{u}(k-1) \quad (2)$$

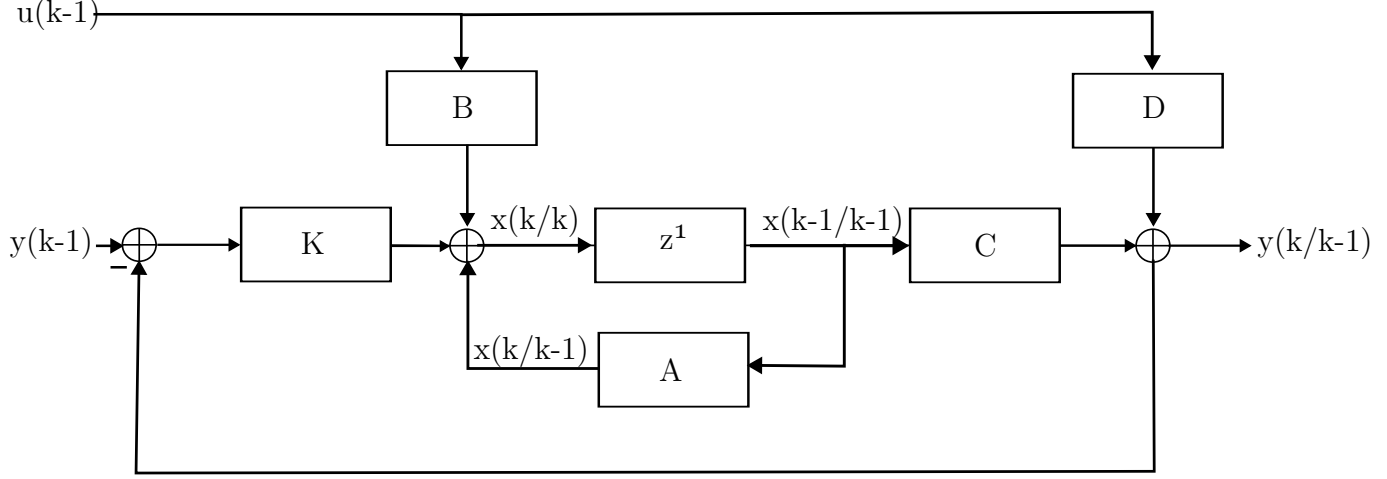
#### 2.1.1 Medição

A saída medida é dada pela posição real do projétil somada ao ruído de medição, que neste caso é atribuído ao erro de medição do próprio radar que será empregado.



$$\mathbf{y}(k-1) = \mathbf{y}_{\text{true}}(k-1) + \mathbf{n}(k-1) \quad (3)$$

## 2.2 Kalman Filter



$$\hat{\mathbf{x}}(k|k-1) = \mathbf{A}\hat{\mathbf{x}}(k-1|k-1) + \mathbf{B}\mathbf{u}(k-1) \quad (4)$$

$$\hat{\mathbf{x}}(k|k) = \hat{\mathbf{x}}(k|k-1) + \mathbf{K}(k)[\mathbf{y}(k-1) - \mathbf{C}\hat{\mathbf{x}}(k-1|k-1) - \mathbf{D}\mathbf{u}(k-1)] \quad (5)$$

$$\hat{\mathbf{y}}(k-1|k-1) = \mathbf{C}\hat{\mathbf{x}}(k|k-1) + \mathbf{D}\mathbf{u}(k-1) \quad (6)$$

Onde:

$$\mathbf{K}(k) = \mathbf{P}(k|k-1)\mathbf{C}^T[\mathbf{C}\mathbf{P}(k|k-1)\mathbf{C}^T + \mathbf{R}]^{-1} \quad (7)$$

### 2.2.1 Algoritmo de Kalman filter

Será realizada através do algoritmo tanto a previsão do ponto de impacto quanto o ponto de onde partiu o disparo do projétil.

Equacionamento do Modelo [1]

Equações de previsão:

$$\hat{\mathbf{x}}(k|k-1) = \mathbf{A}\hat{\mathbf{x}}(k-1|k-1) + \mathbf{B}\mathbf{u}(k-1) \quad (8)$$

$$\mathbf{P}(k|k-1) = \mathbf{A}\mathbf{P}(k-1|k-1)\mathbf{A}^T + \mathbf{B}\mathbf{Q}\mathbf{B}^T \quad (9)$$

Equações de atualização:

$$\mathbf{K}(k) = \mathbf{P}(k|k-1)\mathbf{C}^T[\mathbf{C}\mathbf{P}(k|k-1)\mathbf{C}^T + \mathbf{R}]^{-1} \quad (10)$$

$$\hat{\mathbf{x}}(k|k) = \hat{\mathbf{x}}(k|k-1) + \mathbf{K}(k)[\mathbf{y}(k-1) - \mathbf{C}\hat{\mathbf{x}}(k-1|k-1) - \mathbf{D}\mathbf{u}(k-1)] \quad (11)$$

$$\mathbf{P}(k|k) = [\mathbf{I} - \mathbf{K}(k)\mathbf{C}]\mathbf{P}(k|k-1) \quad (12)$$

Equação da saída estimada:

$$\mathbf{y}(k-1|k-1) = \mathbf{C}\hat{\mathbf{x}}(k-1|k-1) + \mathbf{D}\mathbf{u}(k-1) \quad (13)$$

Onde:

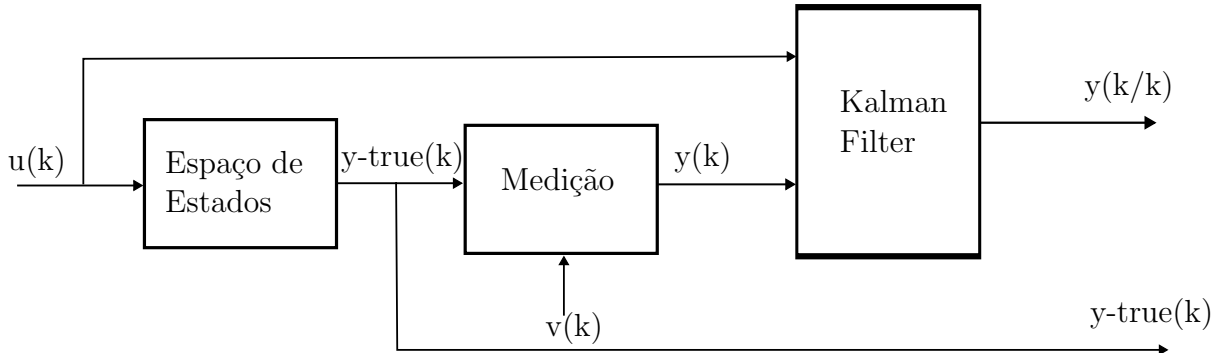
- $\hat{\mathbf{x}}(k|k-1)$  é a predição do estado
- $\hat{\mathbf{x}}(k|k)$  é a estimativa do estado
- $\mathbf{P}(k|k)$  é a matriz de covariância do erro na estimativa do estado
- $\mathbf{Q}$  é a covariância do processo de ruído do estado
- $\mathbf{K}(k)$  é o ganho de Kalman
- $\mathbf{R}$  é a covariância do ruído na medida
- $\mathbf{y}(k)$  é a saída medida
- $\mathbf{y}(k|k)$  é a saída estimada

### 2.2.2 Observações

- Tornar  $\mathbf{Q}$  maior fará o modelo confiar mais nos dados medidos, enquanto tornar  $\mathbf{P}$  maior fará o modelo confiar mais na predição.
- Escolhendo o estado estimado inicial preciso,  $\hat{\mathbf{x}}(0|0) = \mathbf{x}(0)$ , temos que  $\mathbf{P}(0|0) = \mathbf{x}(0)\mathbf{x}(0)^T$ , mas quando não sabemos o estado estimado inicial, é comum escolher  $\mathbf{P}(0|0) = \sigma^2 \mathbf{I}$  onde  $\sigma^2$  é grande.
- Um método prático para determinar  $\mathbf{Q}$  e  $\mathbf{R}$  é a técnica de mínimos quadrados de autocovariância (ALS, na sigla em inglês), que utiliza as autocovariâncias defasadas no tempo dos dados operacionais de rotina para estimar as covariâncias.

## 2.3 Visão geral modelo do sistema de espaço de estados mais Kalman filter

Após obter todos os blocos necessários, é feita a conexão entre as partes, resultando no modelo geral do projeto.



## 2.4 Sistema não Linear

Um sistema não linear é aquele em que as relações entre as variáveis não seguem uma proporção direta, ou seja, a resposta do sistema não é uma combinação linear das entradas. Isso significa que os efeitos das entradas não se somam de maneira simples e podem envolver termos como produtos, quadrados ou outras funções complexas das variáveis. Dessa forma, não é possível descrever completamente esses sistemas utilizando a representação em espaço de estados de forma simples, pois essa abordagem assume linearidade nas equações que regem o sistema.

Entretanto, é possível descrever esses sistemas através das funções de transição de estado discreta  $\mathbf{f}$  e de observação discreta  $\mathbf{h}$  utilizando a aproximação de funções não lineares por meio de expansões lineares locais (expansões de Taylor) em torno de um estado.

Primeiramente, ao analisarmos as expansões de Taylor para uma função  $\mathbf{x}(t)$ , tem-se sua seguinte descrição:

$$\mathbf{x}(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\mathbf{x}^{(n)}(a)}{n!} (t-a)^n \quad (14)$$

Agora, para um sistema descrito por uma função de transição de estado contínua no tempo  $\mathbf{g}$  tem-se a equação do estado  $\dot{\mathbf{x}}$  seguida de sua expansão de Taylor para  $a = Ts$ :

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{g}(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t)) = \mathbf{g}(t); \quad (15)$$

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}(t-Ts) + \dot{\mathbf{x}}(t-Ts)Ts + \frac{\ddot{\mathbf{x}}(t-Ts)}{2}Ts^2 + O \quad (16)$$

$\implies$

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}(t-Ts) + \mathbf{g}(t-Ts)Ts + \left. \frac{d\mathbf{g}(t)}{dt} \right|_{t-Ts} \frac{Ts^2}{2} + O \quad (17)$$

onde,  $O$  são as demais potências de  $Ts$ .

Logo, com a intenção de definir a função de transição de estado discreta  $\mathbf{f}$  discretiza-se a equação a cima 17:

$$\mathbf{x}(k) = \mathbf{x}(k-1) + \mathbf{g}(k-1)Ts + \left. \frac{d\mathbf{g}(k)}{dk} \right|_{k-1} \frac{Ts^2}{2} + O \quad (18)$$

$\implies$

$$\mathbf{x}(k) \approx \mathbf{f}(\mathbf{x}(k-1), \mathbf{u}(k-1)) \quad (19)$$

onde,

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}(k-1), \mathbf{u}(k-1)) = \mathbf{x}(k-1) + \mathbf{g}(k-1)Ts + \left. \frac{d\mathbf{g}(k)}{dk} \right|_{k-1} \frac{Ts^2}{2} \quad (20)$$

$$\mathbf{g}(k) = \mathbf{g}(\mathbf{x}(k), \mathbf{u}(k)) \quad (21)$$

Por fim, para a função de observação discreta  $\mathbf{h}$  segue-se que:

$$\mathbf{y}(k) = \mathbf{h}(\mathbf{x}(k), \mathbf{u}(k)); \quad (22)$$

## 2.5 Kalman Filter Extendido (EKF)

Para realizar a filtragem e estimativa de um sistema não linear, utiliza-se a versão estendida do Filtro de Kalman, conhecida como EKF (Extended Kalman Filter). O EKF é uma generalização do Filtro de Kalman tradicional, adaptada para lidar com as não linearidades presentes nos modelos de sistemas reais. Portanto, a partir da determinação da função de transição de estado discreta  $\mathbf{f}$  e da função de observação discreta  $\mathbf{h}$  de um sistema não linear, provém-se as seguintes equações que definem o EKF:

Equações de previsão:

$$\hat{\mathbf{x}}(k|k-1) = \mathbf{f}(\hat{\mathbf{x}}(k-1|k-1), \mathbf{u}(k-1)) \quad (23)$$

$$\mathbf{P}(k|k-1) = \mathbf{F}\mathbf{P}(k-1|k-1)\mathbf{F}^T + \mathbf{B}\mathbf{Q}\mathbf{B}^T \quad (24)$$

Equações de atualização:

$$\mathbf{K}(k) = \mathbf{P}(k|k-1)\mathbf{H}^T[\mathbf{H}\mathbf{P}(k|k-1)\mathbf{H}^T + \mathbf{R}]^{-1} \quad (25)$$

$$\hat{\mathbf{x}}(k|k) = \hat{\mathbf{x}}(k|k-1) + \mathbf{K}(k)[\mathbf{y}(k) - \mathbf{h}(\hat{\mathbf{x}}(k|k-1))] \quad (26)$$

$$\mathbf{P}(k|k) = [\mathbf{I} - \mathbf{K}(k)\mathbf{H}]\mathbf{P}(k|k-1) \quad (27)$$

Equação da saída estimada:

$$\mathbf{y}(k|k-1) = \mathbf{h}(\hat{\mathbf{x}}(k|k-1)) \quad (28)$$

Onde F e H são as seguintes jacobianas:

- $\mathbf{F} = \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}}|_{\hat{\mathbf{x}}(k-1|k-1), \mathbf{u}(k-1)}$
- $\mathbf{H} = \frac{\partial \mathbf{h}}{\partial \mathbf{x}}|_{\hat{\mathbf{x}}(k|k-1)}$

## 2.6 Resistência Do Ar

Para tornar o modelo mais próximo da realidade, será introduzida a força de arrasto, resultante da resistência do ar, ao equacionamento do modelo balístico. A força de arrasto tem como característica estar sempre em oposição à direção do movimento da trajetória, como mostra a figura abaixo:

A equação da força de arrasto pode ser escrita da seguinte maneira:

$$\vec{\mathbf{F}}_a = -\frac{1}{2}\rho C_a A v^2 \hat{\mathbf{v}} \quad (29)$$

Onde:

- $\rho$ : Densidade do ar atmosférico.
- $C_a$ : Coeficiente de arrasto.
- A: Maior área de seção transversal do corpo.

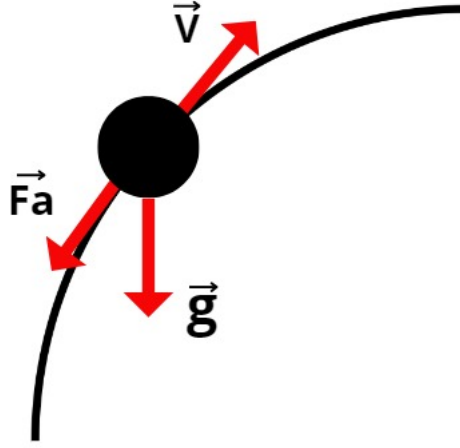


Figura 1

### 3 Metodologia

#### 3.1 Modelagem do Espaço de Estados

Para dar início ao projeto, serão feitos três exemplos simples da implementação do filtro de Kalman, que são estes movimento retilíneo uniforme, movimento retilíneo uniformemente variado e uma parábola. Será utilizado o exemplo geral que terá como vetor de estados a posição e a velocidade em duas dimensões. Como posteriormente a única aceleração neste projeto será a gravidade no eixo z, não serão entradas do modelo as acelerações.

##### 3.1.1 Equacionamento 2D

Supondo a equação do movimento retilíneo uniformemente variado em duas dimensões dada pelo vetor  $p(t) = p_0 + v_0.t + \frac{a.t^2}{2}$ . E a equação da velocidade é dada por  $v = v_0 + a.t$ . Agora mudando a equação para o tempo discreto, onde  $t = k.Ts$ , onde  $Ts$  é o período de amostragem. Deste modo, teremos:

$$p(k) = p_0 + v_0.k.Ts + \frac{a.Ts^2.k^2}{2} \quad (30)$$

$$v(k) = v_0 + a.k.Ts \quad (31)$$

Deslocando a equação da posição e velocidade, temos:

$$p(k-1) = p_0 + v_0.[k-1].Ts + \frac{a.Ts^2.[k-1]^2}{2} \quad (32)$$

$$v(k-1) = v_0 + a.[k-1].Ts \quad (33)$$

Fazendo a diferença entre as equações 30 e 32, temos:

$$p(k) = p(k-1) + Ts.[v_0 + a.[k-1].Ts] + \frac{a.Ts^2}{2} \quad (34)$$



Substituindo o segundo termo pela velocidade dado pela equação 33, podemos encontrar:

$$p(k) = p(k-1) + v(k-1).Ts + \frac{a.Ts^2}{2} \quad (35)$$

Fazendo a diferença entre as equações 31 e 33, temos:

$$v(k) = v(k-1) + a.Ts \quad (36)$$

Finalmente modelando a equação de espaço de estamos, obtemos o seguinte resultado:

$$\mathbf{x}(k) = \begin{bmatrix} p \\ v \end{bmatrix}_k = \begin{bmatrix} p_x \\ p_y \\ v_x \\ v_y \end{bmatrix}_k = \begin{bmatrix} 1 & 0 & Ts & 0 \\ 0 & 1 & 0 & Ts \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_x \\ p_y \\ v_x \\ v_y \end{bmatrix}_{k-1} + \begin{bmatrix} \frac{Ts^2}{2} & 0 \\ 0 & \frac{Ts^2}{2} \\ Ts & 0 \\ 0 & Ts \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_x \\ a_y \end{bmatrix} \quad (37)$$

$$\mathbf{y\_true}(k) = \begin{bmatrix} out_x \\ out_y \end{bmatrix}_k = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_x \\ p_y \\ v_x \\ v_y \end{bmatrix}_k + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_x \\ a_y \end{bmatrix} \quad (38)$$

Onde as matrizes de espaço de estado são:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & Ts & 0 \\ 0 & 1 & 0 & Ts \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} \frac{Ts^2}{2} & 0 \\ 0 & \frac{Ts^2}{2} \\ Ts & 0 \\ 0 & Ts \end{bmatrix}; \quad \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{D} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (39)$$

### 3.1.2 M.R.U. e Parábola

Tanto o movimento retilnio uniforme quanto o movimento parabólico são casos específicos do modelo geral obtido, diferindo apenas no vetor aceleração.

Para o m.r.u. teremos que o vetor aceleração será dado por  $a = [0 \ 0]^T$ , e para a parábola, teremos  $a = [0 \ -g]^T$ , onde  $g$  é a aceleração da gravidade.

### 3.1.3 Equacionamento 3D

Análogo ao equacionamento do modelo de espaço de estados para duas dimensões, partindo das equações 35 e 36, temos o novo sistema seguido de suas matrizes, com a entrada  $\mathbf{u}(k-1) = [0 \ 0 \ -g]^T$ .

$$z^{-1}\mathbf{x}(k) = \begin{bmatrix} p_x \\ p_y \\ p_z \\ v_x \\ v_y \\ v_z \end{bmatrix}_k = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & Ts & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & Ts & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & Ts \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_x \\ p_y \\ p_z \\ v_x \\ v_y \\ v_z \end{bmatrix}_{k-1} + \begin{bmatrix} \frac{Ts^2}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{Ts^2}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{Ts^2}{2} \\ Ts & 0 & 0 \\ 0 & Ts & 0 \\ 0 & 0 & Ts \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{bmatrix} \quad (40)$$

$$\mathbf{y}_{\text{true}}(k-1) = [p_x \ p_y \ p_z]^T \begin{bmatrix} p_x \\ p_y \\ p_z \end{bmatrix}_k = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_x \\ p_y \\ p_z \\ v_x \\ v_y \\ v_z \end{bmatrix}_k + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{bmatrix} \quad (41)$$

Onde as matrizes de espaço de estado são:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & T_s & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & T_s & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & T_s \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} \frac{T_s^2}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{T_s^2}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{T_s^2}{2} \\ T_s & 0 & 0 \\ 0 & T_s & 0 \\ 0 & 0 & T_s \end{bmatrix}; \quad \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix};$$

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix};$$

## 3.2 Filtragem Da Posição do Objeto

Conforme abordado na teoria do filtro de Kalman, foram empregados três métodos para realizar a filtragem da posição medida do objeto ao longo das amostras.

### 3.2.1 Método 1

A filtragem da posição medida é realizada a cada iteração.

### 3.2.2 Método 2

A filtragem da trajetória medida é realizada percorrendo diretamente e depois reversamente a cada iteração, de modo que a primeira e a última posição filtrada correspondam à primeira amostra.

### 3.2.3 Método 3

A filtragem da trajetória medida é realizada percorrendo diretamente e depois reversamente várias vezes a cada iteração, garantindo que a primeira e a última posição filtrada correspondam à primeira amostra.

## 3.3 Predição do Ponto de Impacto e Disparo

A fim de se prever os pontos de impacto e de disparo do projétil, determinado pelas saídas  $p_i$  e  $p_d$  para a amostragem atual  $k$ , onde  $k + j_i$  e  $k - j_d$  representam a predição da amostragem no momento de impacto e de disparo, respectivamente. Dessa forma, calcula-se as saídas a cima através das equações de espaço de estados e a partir do estado estimado atual  $\hat{\mathbf{x}}(k|k)$ .

### 3.3.1 Ponto de Impacto

Os pontos da trajetória de impacto  $\mathbf{y}(k+j|k)$  são dados por:

$$\hat{\mathbf{x}}(k+j|k) = \mathbf{A}\hat{\mathbf{x}}(k+j-1|k) + \mathbf{B}\mathbf{u}(k+j-1) \quad (42)$$

$$\mathbf{y}(k+j|k) = \mathbf{C}\hat{\mathbf{x}}(k+j|k) \quad (43)$$

Portanto, quando a saída atingir o solo, para  $j = j_i$ , obtemos o ponto de impacto  $p_i = \mathbf{y}(k+j_i|k)$ .

### 3.3.2 Ponto de Disparo

Para prever os pontos da trajetória de disparo, isola-se o termo  $x(k-1)$  na equação de espaço de estados 1, obtendo a equação abaixo:

$$\mathbf{x}(k-1) = \mathbf{A}^{-1}[\mathbf{x}(k) - \mathbf{B}\mathbf{u}(k-1)] \quad (44)$$

Logo, os pontos da trajetória de disparo  $\mathbf{y}(k-j|k)$  são dados por:

$$\hat{\mathbf{x}}(k-j|k) = \mathbf{A}^{-1}[\hat{\mathbf{x}}(k-j+1|k) - \mathbf{B}\mathbf{u}(k-j)] \quad (45)$$

$$\mathbf{y}(k-j|k) = \mathbf{C}\hat{\mathbf{x}}(k-j|k) \quad (46)$$

Portanto, quando a saída atingir o solo, para  $j = j_d$ , obtemos o ponto de disparo  $p_d = \mathbf{y}(k-j_d|k)$ .

### 3.3.3 Equacionamento direto

Alternativamente, é possível obter os pontos de impacto e disparo através das mesmas equações utilizadas para determinar o sistema de espaço de estados. Primeiramente, obtêm-se posição e velocidade iniciais a partir do estado estimado atual:

$$\hat{\mathbf{x}}(k|k) = [p_0 \quad v_0]^T \quad (47)$$

Agora, pela equações da parábola:

$$p_{solo} = p_{0z} + v_{0z}t - \frac{gt^2}{2} \iff \quad (48)$$

$$t_i = \frac{v_{0z} + \sqrt{v_{0z}^2 + 2g(p_{0z} - p_{solo})}}{g} \quad (49)$$

$$t_d = \frac{v_{0z} - \sqrt{v_{0z}^2 + 2g(p_{0z} - p_{solo})}}{g} \quad (50)$$

Dessa forma, determina-se ponto de impacto:

$$p_{ix} = p_{0x} + v_{0x}t_i \quad (51)$$

$$p_{iy} = p_{0y} + v_{0y}t_i \quad (52)$$

$$p_i = [p_{ix} \quad p_{iy} \quad p_{solo}]^T \quad (53)$$

De forma análoga, determina-se o ponto de disparo:

$$p_{dx} = p_{0x} + v_{0x}t_d \quad (54)$$

$$p_{dy} = p_{0y} + v_{0y}t_d \quad (55)$$

$$p_d = [p_{dx} \ p_{dy} \ p_{solo}]^T \quad (56)$$

### 3.4 Modelagem Do Sistema Com o Parâmetro De Arrasto

Para encontrar a função de transferência de tempo contínuo  $g(t)$ , é necessário conhecer o modelo físico da força de arrasto que atua contra o movimento do projétil.

A partir da segunda Lei de Newton e do conhecimento das equações das forças atuantes sobre o projétil, chegamos no seguinte equacionamento:

$$\sum \vec{F} = m\vec{a} \quad (57)$$

$$m\vec{g} + \vec{F}_a = m\vec{a} \quad (58)$$

Substituindo a força de arrasto da equação 29, podemos obter:

$$m\vec{a} = -\frac{1}{2}\rho C_a A v^2 \hat{v} + m\vec{g} \quad (59)$$

Agora reescrevendo a equação, isolando a aceleração de forma matricial:

$$\vec{a} = \begin{bmatrix} \dot{v}_x \\ \dot{v}_y \\ \dot{v}_z \end{bmatrix} = -\frac{1}{2m}\rho C_a A v \begin{bmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ g \end{bmatrix} \quad (60)$$

Onde  $v = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2}$  é o módulo da velocidade do projétil. Vamos considerar também a densidade do ar uma função variável e dependente da altura  $z$  do projétil, sendo a equação  $\rho(z) = \rho_0 e^{-kz}$ . Onde  $\rho_0$  é a densidade do ar no nível do mar e  $k$  é o fator de decaimento da densidade do ar.

Como forma de simplificar a visão de equacionamento, define-se como  $\alpha$  o parâmetro de arrasto e  $D$  como uma função arbitrária que depende da densidade do ar e da velocidade do projétil, descritas abaixo:

$$\alpha = \frac{C_a A}{m} \quad (61)$$

$$D = -\frac{\rho(z)v}{2} \quad (62)$$

A equação da aceleração então se torna:

$$\begin{bmatrix} \dot{v}_x \\ \dot{v}_y \\ \dot{v}_z \end{bmatrix} = \alpha D \begin{bmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ g \end{bmatrix} \quad (63)$$

Sendo  $x(t) = [p \ v \ \alpha]^T$  o vetor de espaço de estados do tempo contínuo, a função de transição de tempo contínuo  $g(t)$  se torna  $g(t) = x(t) = [\dot{p} \ \dot{v} \ \dot{\alpha}]^T$ . Dada a relação encontrada no tópico anterior, podemos escrever  $\dot{v}$  como função de  $v$  e  $\alpha$ .

$$g(t) = \begin{bmatrix} \dot{p} \\ \dot{v} \\ \dot{\alpha} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \\ \alpha Dv_x \\ \alpha Dv_y \\ \alpha Dv_z - g \\ 0 \end{bmatrix} \quad (64)$$

## Referências

- [1] Greg Welch, Gary Bishop, et al. An introduction to the kalman filter. 1995.