

**MINISTÉRIO DA DEFESA
EXÉRCITO BRASILEIRO
DEPARTAMENTO DE CIÊNCIA E TECNOLOGIA
INSTITUTO MILITAR DE ENGENHARIA
CURSO DE GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA ELETRÔNICA**

**IGOR LUCINDO CARDOSO
MATEUS DANTAS LINS DE OLIVEIRA**

**UMA INVESTIGAÇÃO PRELIMINAR DE RASTREAMENTO DE ALVOS EM
RADARES DE CONTRABATERIA**

**RIO DE JANEIRO
2024**

IGOR LUCINDO CARDOSO
MATEUS DANTAS LINS DE OLIVEIRA

UMA INVESTIGAÇÃO PRELIMINAR DE RASTREAMENTO DE ALVOS EM
RADARES DE CONTRABATERIA

Projeto de Final de Curso apresentado ao Curso de Graduação em Engenharia Eletrônica do Instituto Militar de Engenharia, como requisito parcial para a obtenção do título de Bacharel em Engenharia Eletrônica.

Orientador(es): José Antonio Apolinário Júnior,
Felipe Aurelio Caetano de Bastos,
João Abdalla Ney da Silva,

Rio de Janeiro
2024

©2024

INSTITUTO MILITAR DE ENGENHARIA

Praça General Tibúrcio, 80 – Praia Vermelha

Rio de Janeiro – RJ CEP: 22290-270

Este exemplar é de propriedade do Instituto Militar de Engenharia, que poderá incluí-lo em base de dados, armazenar em computador, microfilmар ou adotar qualquer forma de arquivamento.

É permitida a menção, reprodução parcial ou integral e a transmissão entre bibliotecas deste trabalho, sem modificação de seu texto, em qualquer meio que esteja ou venha a ser fixado, para pesquisa acadêmica, comentários e citações, desde que sem finalidade comercial e que seja feita a referência bibliográfica completa.

Os conceitos expressos neste trabalho são de responsabilidade do(s) autor(es) e do(s) orientador(es).

Lucindo Cardoso, Igor; Dantas Lins de Oliveira, Mateus.

Uma investigação Preliminar de Rastreamento de Alvos em Radares de Contrabateria / Igor Lucindo Cardoso e Mateus Dantas Lins de Oliveira. – Rio de Janeiro, 2024.

52 f.

Orientador(es): José Antonio Apolinário Júnior, Felipe Aurelio Caetano de Bastos e João Abdalla Ney da Silva.

Projeto de Final de Curso (graduação) – Instituto Militar de Engenharia, Engenharia Eletrônica, 2024.

1. Filtro de Kalman. 2. Rastreamento de Alvos. 3. Radar de Contrabateria. 4. Trajetória Balística. 5. Força de Arrasto. 6. Processamento de Sinais. 7. Predição do Ponto de Impacto. 8. Predição do Ponto de Disparo. i. Antonio Apolinário Júnior, José (orient.) ii. Aurelio Caetano de Bastos, Felipe (orient.) iii. Abdalla Ney da Silva, João (orient.) iv. Título

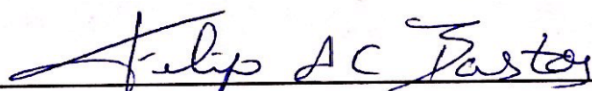
**IGOR LUCINDO CARDOSO
MATEUS DANTAS LINS DE OLIVEIRA**

**Uma investigação Preliminar de Rastreamento de Alvos
em Radares de Contrabateria**

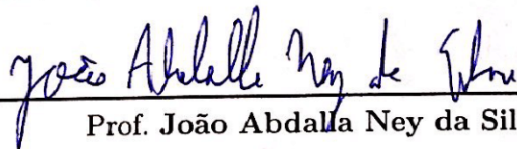
Projeto de Final de Curso apresentado ao Curso de Graduação em Engenharia Eletrônica do Instituto Militar de Engenharia, como requisito parcial para a obtenção do título de Bacharel em Engenharia Eletrônica.

Orientador(es): José Antonio Apolinário Júnior, Felipe Aurelio Caetano de Bastos e João Abdalla Ney da Silva.

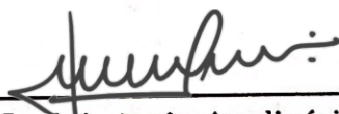
Aprovada em 10 de outubro de 2024, pela seguinte banca examinadora:



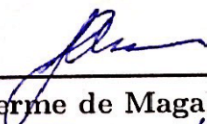
Prof. Felipe Aurelio Caetano de Bastos - D.Sc. do IME - Presidente



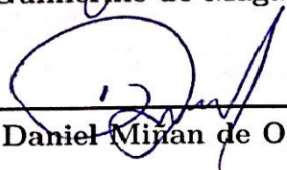
Prof. João Abdalla Ney da Silva - D.Sc. do CTEEx



Prof. José Antonio Apolinário Júnior - D.Sc. do IME



Prof. Guilherme de Magalhães Ottoni da Silva - M.Sc. do IME



CT Daniel Miran de Oliveira Crús - Engenheiro Eletricista

Rio de Janeiro
2024

Dedicamos este trabalho às nossas famílias, que nos apoiaram incondicionalmente em cada etapa dessa jornada. Aos nossos amigos e colegas, pelo incentivo e pela parceria ao longo do processo. E, em especial, ao Centro Tecnológico do Exército (CTEx), pela oportunidade e confiança em desenvolvermos uma pesquisa de grande relevância estratégica para a defesa nacional.

AGRADECIMENTOS

Agradecemos, primeiramente, ao Centro Tecnológico do Exército (CTEx) pela confiança e pela oportunidade de realizar uma pesquisa de grande relevância para a defesa nacional.

Aos nossos orientadores, pela paciência, orientação e por compartilharem seu vasto conhecimento. Suas sugestões foram cruciais para o desenvolvimento e aprimoramento deste projeto, nos guiando pelos desafios técnicos e metodológicos com grande dedicação.

Por fim, agradecemos às nossas famílias e amigos, pelo apoio emocional e motivacional ao longo desta jornada. Sem sua constante presença e incentivo, superar as dificuldades encontradas seria muito mais desafiador. A todos, nosso sincero agradecimento!

RESUMO

Este projeto apresenta uma investigação preliminar sobre o uso de técnicas de processamento de sinais para o rastreamento de alvos em radares de contrabateria. O objetivo principal deste tipo de radar é determinar a origem e o ponto de impacto de projéteis inimigos. O estudo aborda a modelagem da trajetória balística e a incorporação da força de arrasto, permitindo previsões mais precisas e a minimização de incertezas, utilizando o Filtro de Kalman Estendido (EKF). Esta abordagem tem como objetivo contribuir para o aprimoramento das técnicas de defesa e proteção de forças militares, tornando-se uma ferramenta de grande valor estratégico no campo da balística.

Palavras-chave: Filtro de Kalman. Rastreamento de Alvos. Radar de Contrabateria. Trajetória Balística. Força de Arrasto. Processamento de Sinais. Predição do Ponto de Impacto. Predição do Ponto de Disparo.

ABSTRACT

This project presents a preliminary investigation into the use of signal processing techniques for target tracking in counter-battery radars. The main objective of this type of radar is to determine the origin and impact point of enemy projectiles. The study addresses the modeling of ballistic trajectories and the incorporation of drag force, enabling more accurate predictions and minimizing uncertainties using the Extended Kalman Filter (EKF). This approach aims to contribute to the improvement of defense and protection techniques for military forces, becoming a highly valuable strategic tool in the field of ballistics.

Keywords: Kalman Filter. Target Tracking. Counter-Battery Radar. Ballistic Trajectory. Drag Force. Signal Processing. Impact Point Prediction. Launch Point Prediction.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

Figura 1 – Visão geral do modelo.	12
Figura 2 – Modelo de espaço de estados.	12
Figura 3 – Saída medida.	13
Figura 4 – Filtro de Kalman.	14
Figura 5 – Diagrama de forças.	17
Figura 6 – Representação da modelagem.	19
Figura 7 – Trajetória real e filtrada do projétil, com medições próximas ao ponto de disparo.	32
Figura 8 – Erro do ponto de disparo na comparação da matriz covariância inicial.	33
Figura 9 – Erro do ponto de impacto na comparação da matriz covariância inicial.	34
Figura 10 – Erro do ponto de disparo na comparação do período de amostragem	35
Figura 11 – Erro do ponto de impacto na comparação do período de amostragem	35
Figura 12 – Trajetória real e filtrada do projétil com medições próximas ao ponto de impacto.	36
Figura 13 – Erro do ponto de disparo com medições próximas ao ponto de impacto.	37
Figura 14 – Erro do ponto de impacto com medições próximas ao ponto de impacto.	37
Figura 15 – Interpolação quadrática no eixo z.	38
Figura 16 – Erro do ponto de disparo na comparação da interpolação	39
Figura 17 – Erro do ponto de impacto na comparação da interpolação	39
Figura 18 – Comparação entre trajetórias simuladas com e sem a força de arrasto.	40
Figura 19 – Comparação dos modelos com $\gamma = 0$	41
Figura 20 – Comparação dos modelos com $\gamma = 10^{-4}$	42
Figura 21 – Comparação dos modelos com $\gamma = 2 \times 10^{-4}$	42
Figura 22 – Erro do ponto de disparo com erro do γ inicial de -50%	43
Figura 23 – Erro do ponto de impacto com erro do γ inicial de -50%	44
Figura 24 – Erro do ponto de disparo com erro do γ inicial de $+50\%$	45
Figura 25 – Erro do ponto de impacto com erro do γ inicial de $+50\%$	45
Figura 26 – Erro do ponto de disparo com erro do γ inicial de $+100\%$	46
Figura 27 – Erro do ponto de impacto com erro do γ inicial de $+100\%$	46
Figura 28 – Erro do ponto de disparo com erro do γ inicial de $+200\%$	47
Figura 29 – Erro do ponto de impacto com erro do γ inicial de $+200\%$	47

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	11
2	REVISÃO SOBRE FILTRAGEM DE KALMAN	12
2.1	MODELAGEM DE SISTEMAS DE ESPAÇO DE ESTADOS E FILTRAGEM DE KALMAN	12
2.2	MODELAGEM NO ESPAÇO DE ESTADOS	12
2.3	O PROCESSO DE MEDIÇÃO	13
2.4	FILTRO DE KALMAN	13
2.4.1	ALGORITMO DO FILTRO DE KALMAN	14
2.4.2	OBSERVAÇÕES	15
2.5	INTERPOLAÇÃO DOS PONTOS	16
2.5.1	INTRODUÇÃO	16
2.5.2	PROCESSO DE INTERPOLAÇÃO PARABÓLICA	16
2.5.3	VANTAGENS DO MÉTODO	16
2.6	RESISTÊNCIA DO AR	16
2.7	SISTEMA NÃO LINEAR	17
2.8	FILTRO DE KALMAN ESTENDIDO (EKF)	20
3	METODOLOGIA	21
3.1	MODELAGEM DO ESPAÇO DE ESTADOS	21
3.1.1	EQUACIONAMENTO 2D	21
3.1.2	M.R.U. E PARÁBOLA	22
3.1.3	EQUACIONAMENTO 3D	22
3.2	FILTRAGEM DA POSIÇÃO DO OBJETO	23
3.2.1	MÉTODO 1	23
3.2.2	MÉTODO 2	23
3.2.3	MÉTODO 3	23
3.3	PREDIÇÃO DO PONTO DE IMPACTO E DISPARO	24
3.3.1	PONTO DE IMPACTO	24
3.3.2	FILTRAGEM INVERSA	24
3.3.3	EQUACIONAMENTO DIRETO	24
3.4	MODELAGEM DO SISTEMA COM O PARÂMETRO DE ARRASTO	25
3.4.1	SISTEMA NÃO LINEAR DISCRETIZADO	29
3.5	CÁLCULO DOS ERROS DOS PONTOS DE IMPACTO E DISPARO	30
4	RESULTADOS E DISCUSSÕES	32

4.1	ANÁLISE DAS SIMULAÇÕES UTILIZANDO FILTRO DE KALMAN	32
4.1.1	OBTENÇÃO DA MATRIZ COVARIÂNCIA INICIAL	33
4.1.2	OBTENÇÃO DO PERÍODO DE AMOSTRAGEM	34
4.1.3	COMPARAÇÃO DAS LOCALIDADES DA MEDIDA	36
4.2	INTERPOLAÇÃO	38
4.3	ANÁLISE UTILIZANDO EKF	40
4.3.1	COMPARAÇÃO DOS MODELOS	41
4.3.2	ESCOLHA DA VARIÂNCIA DO PARÂMETRO DE ARRASTO	43
5	CONCLUSÃO	49
	REFERÊNCIAS	51

1 INTRODUÇÃO

O rastreamento de alvos em ambientes de guerra é uma das aplicações mais críticas de sistemas de radar, especialmente em cenários onde a detecção e localização de projéteis inimigos são fundamentais para a defesa eficaz (1). Os radares de contrabateria, desenvolvidos para identificar e rastrear a trajetória de disparos de artilharia, mísseis e foguetes, têm se mostrado essenciais para a proteção de forças terrestres em combate (2). Este trabalho explora, em uma investigação preliminar, o uso de técnicas avançadas de processamento de sinais, com destaque para o Filtro de Kalman (3), para determinar com precisão a origem dos disparos e prever os pontos de impacto com maior acurácia (4). Este tema, requisitado pelo Centro Tecnológico do Exército (CTEx), visa oferecer uma contribuição estratégica ao aprimoramento da tecnologia de defesa nacional.

O uso de técnicas de filtragem, como o Filtro de Kalman (5), em radares de contrabateria é especialmente vantajoso devido à sua capacidade de lidar com incertezas e ruídos no ambiente de monitoramento. Ao modelar a trajetória do projétil em tempo real, é possível não só prever o ponto de origem do disparo, mas também o local de impacto, permitindo uma resposta rápida e precisa (6). Este sistema de rastreamento tem como objetivo não apenas a defesa reativa, mas também a antecipação de ameaças, fornecendo às forças militares uma vantagem tática significativa (7). A precisão e a velocidade das previsões contribuem para minimizar os danos em zonas de combate, ao permitir contra-ataques eficazes ou evacuações estratégicas (8).

Com base nessa tecnologia, o presente trabalho explora os desafios e limitações do rastreamento de alvos em condições de combate, sob a influência de fatores como precisão das medições, variações atmosféricas e dispersão de projéteis (9). Além disso, propõe-se uma análise detalhada das potencialidades do Filtro de Kalman Estendido (EKF) em contextos não lineares (10), como o movimento balístico, onde a influência de forças externas, e a força de arrasto, exige uma abordagem mais sofisticada (11). Assim, este estudo visa contribuir não apenas para a defesa de posições estratégicas, mas também para o avanço tecnológico nas áreas de processamento de sinais e rastreamento de alvos.

Este trabalho está organizado da seguinte forma: O Capítulo 2 apresenta uma revisão sobre a filtragem, destacando os principais desafios nas abordagens tradicionais e a importância de métodos avançados como o EKF em sistemas não lineares. O Capítulo 3 descreve os métodos e procedimentos utilizados, incluindo os modelos matemáticos, parâmetros de simulação e a integração da força de arrasto no sistema balístico. O Capítulo 4 traz os resultados experimentais, analisando a performance do EKF em diferentes condições de simulação para prever pontos de disparo e impacto. No Capítulo 5, discutimos as implicações dos resultados e sugerimos direções para futuras pesquisas.

2 REVISÃO SOBRE FILTRAGEM DE KALMAN

2.1 Modelagem de sistemas de espaço de estados e filtragem de Kalman

O modelo geral do sistema, incluindo filtro de Kalman, o espaço de estados e o processo de medição, adotado neste projeto é mostrado na Figura 1.

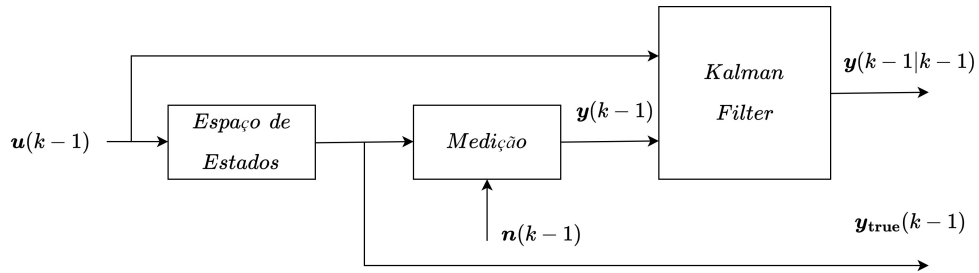


Figura 1 – Visão geral do modelo.

A seguir, será feita uma análise particular para cada bloco presente no modelo.

2.2 Modelagem no espaço de estados

Dada a modelagem do sistema de espaço de estados (12), temos a seguir as equações resultantes do diagrama de blocos proposto, tal como indicado na Figura 2. Note que o estado $\mathbf{x}(k)$ e a saída $\mathbf{y}_{\text{true}}(k-1)$ dependem de seu estado anterior e do vetor de entradas \mathbf{u} .

$$\mathbf{x}(k) = \mathbf{A}\mathbf{x}(k-1) + \mathbf{B}\mathbf{u}(k-1) \quad (2.1)$$

$$\mathbf{y}_{\text{true}}(k-1) = \mathbf{C}\mathbf{x}(k-1) + \mathbf{D}\mathbf{u}(k-1) \quad (2.2)$$

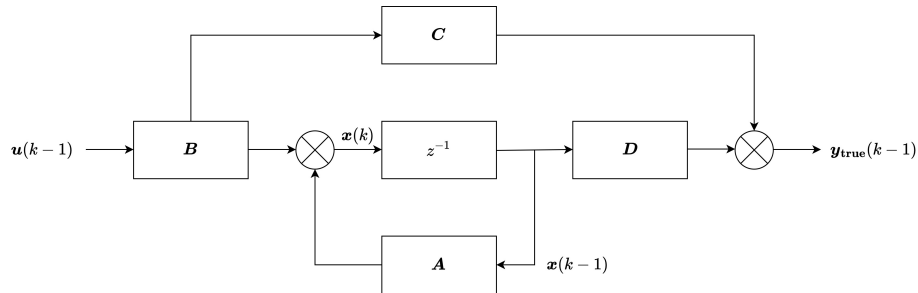


Figura 2 – Modelo de espaço de estados.

As matrizes \mathbf{A} , \mathbf{B} , \mathbf{C} e \mathbf{D} são as matrizes de espaço de estados que serão abordadas posteriormente.

2.3 O processo de medição

A saída medida referente à Figura 3 é dada pela posição real do projétil somada ao ruído de medição, que neste caso é atribuído ao erro de medição do próprio radar $\mathbf{n}(k-1)$ que será empregado.

$$\mathbf{y}(k-1) = \mathbf{y}_{\text{true}}(k-1) + \mathbf{n}(k-1) \quad (2.3)$$

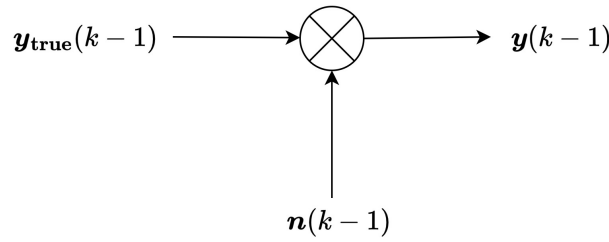


Figura 3 – Saída medida.

2.4 Filtro de Kalman

O filtro de Kalman calcula as predições e estimativas para os estados e medidas por meio das equações principais (3) a seguir:

$$\hat{\mathbf{x}}(k|k-1) = \mathbf{A}\hat{\mathbf{x}}(k-1|k-1) + \mathbf{B}\mathbf{u}(k-1) \quad (2.4)$$

$$\hat{\mathbf{x}}(k|k) = \hat{\mathbf{x}}(k|k-1) + \mathbf{K}(k)[\mathbf{y}(k-1) - \mathbf{C}\hat{\mathbf{x}}(k-1|k-1) - \mathbf{D}\mathbf{u}(k-1)] \quad (2.5)$$

$$\hat{\mathbf{y}}(k-1|k-1) = \mathbf{C}\hat{\mathbf{x}}(k|k-1) + \mathbf{D}\mathbf{u}(k-1) \quad (2.6)$$

$$\mathbf{K}(k) = \mathbf{P}(k|k-1)\mathbf{C}^T[\mathbf{C}\mathbf{P}(k|k-1)\mathbf{C}^T + \mathbf{R}]^{-1}, \quad (2.7)$$

onde:

- $\hat{\mathbf{x}}(k|k-1)$ é a predição do estado
- $\hat{\mathbf{x}}(k|k)$ é a estimativa do estado
- $\mathbf{P}(k|k)$ é a matriz de covariância do erro na estimativa do estado
- \mathbf{Q} é a matriz de covariância de ruído de processo
- $\mathbf{K}(k)$ é a matriz de ganho de Kalman
- \mathbf{R} é a matriz de covariância do ruído na medida
- $\mathbf{y}(k)$ é a saída medida

- $\mathbf{y}(k-1|k-1)$ é a saída estimada

A Figura 4 representa o diagrama de blocos do filtro de Kalman.

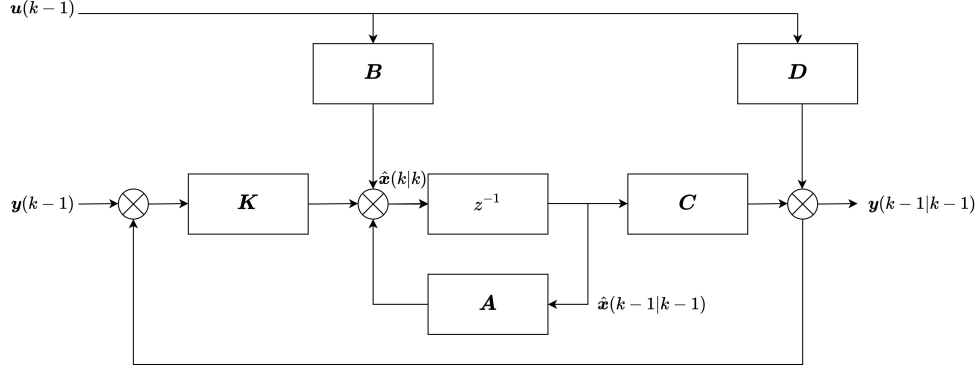


Figura 4 – Filtro de Kalman.

2.4.1 Algoritmo do Filtro de Kalman

A previsão dos pontos de disparo e de impacto será realizada pelo algoritmo abaixo. O equacionamento completo da filtragem de Kalman (5) é dado a seguir.

Equações de previsão:

$$\hat{\mathbf{x}}(k|k-1) = \mathbf{A}\hat{\mathbf{x}}(k-1|k-1) + \mathbf{B}\mathbf{u}(k-1) \quad (2.8)$$

$$\mathbf{P}(k|k-1) = \mathbf{A}\mathbf{P}(k-1|k-1)\mathbf{A}^T + \mathbf{Q} \quad (2.9)$$

Equações de atualização:

$$\mathbf{K}(k) = \mathbf{P}(k|k-1)\mathbf{C}^T[\mathbf{C}\mathbf{P}(k|k-1)\mathbf{C}^T + \mathbf{R}]^{-1} \quad (2.10)$$

$$\hat{\mathbf{x}}(k|k) = \hat{\mathbf{x}}(k|k-1) + \mathbf{K}(k)[\mathbf{y}(k-1) - \mathbf{C}\hat{\mathbf{x}}(k-1|k-1) - \mathbf{D}\mathbf{u}(k-1)] \quad (2.11)$$

$$\mathbf{P}(k|k) = [\mathbf{I} - \mathbf{K}(k)\mathbf{C}]\mathbf{P}(k|k-1) \quad (2.12)$$

Equação da saída estimada:

$$\mathbf{y}(k-1|k-1) = \mathbf{C}\hat{\mathbf{x}}(k-1|k-1) + \mathbf{D}\mathbf{u}(k-1) \quad (2.13)$$

2.4.2 Observações

Observando-se as Equações 2.9, 2.10 e 2.11, percebe-se que as estimativas de estado levam em conta tanto as previsões de estado, baseadas no modelo do processo, quanto as últimas medidas recebidas.

As matrizes \mathbf{Q} , \mathbf{P} (nas formas $\mathbf{P}(k-1|k-1)$, $\mathbf{P}(k|k-1)$ ou $\mathbf{P}(k|k)$) e \mathbf{R} desempenham papéis fundamentais no desempenho do filtro de Kalman. A matriz de covariância de previsão $\mathbf{P}(k|k-1)$ é influenciada tanto pela incerteza do modelo, refletida por \mathbf{Q} , quanto pela incerteza das medições, refletida por \mathbf{R} .

A matriz de ganho de Kalman $\mathbf{K}(k)$ depende diretamente de $\mathbf{P}(k|k-1)$ e de \mathbf{R} . Quanto maior for $\mathbf{K}(k)$, maior será a contribuição das medidas na estimativa de estado, conforme observado na Equação 2.11.

Dessa forma, pode-se pontuar que:

- Tornar os elementos de \mathbf{Q} maiores faz com que o modelo se baseie mais na medição, enquanto aumentar os elementos de \mathbf{P} faz com que o modelo se baseie mais na previsão.
- Escolhendo o estado estimado inicial preciso, $\hat{\mathbf{x}}(0|0) = \mathbf{x}(0)$, podemos inicializar $\mathbf{P}(0|0) = \mathbf{x}(0)\mathbf{x}(0)^T$, mas quando não sabemos o estado estimado inicial, é comum escolher $\mathbf{P}(0|0) = \sigma^2 \mathbf{I}$ onde σ^2 é grande.
- Um método prático para determinar \mathbf{Q} e \mathbf{R} é a técnica de mínimos quadrados de autocovariância (13) (ALS, na sigla em inglês), que utiliza as autocovariâncias defasadas no tempo dos dados operacionais de rotina para estimar as covariâncias.

2.5 Interpolação dos Pontos

2.5.1 Introdução

A interpolação é uma técnica matemática usada para estimar valores entre pontos conhecidos de um conjunto de dados (14). Na presente simulação de radar de contrabateria, utilizando o período de amostragem de 20 *ms*, a interpolação parabólica foi aplicada para obter valores intermediários a cada 5 *ms*. Essa abordagem permitiu comparar os resultados da amostragem interpolada (20 *ms* para 5 *ms*) com aqueles obtidos diretamente com o período de amostragem de 5 *ms*. Com base nos resultados, é possível avaliar a viabilidade de incorporar esse método ao projeto, conforme apresentado no Capítulo 4.

2.5.2 Processo de Interpolação Parabólica

A cada três pontos das amostras consecutivos, são encontrados os coeficientes do polinômio de segundo grau desejado. A partir do polinômio de segundo grau encontrado, são calculados os pontos interpolados nos intervalos de tempo desejados, e o processo é repetido para todo o conjunto de dados disponíveis.

Sendo dois dos pontos utilizados medidos e o terceiro ponto o estimado do próximo estado obtido pelo filtro de kalman, não sendo necessário uma próxima iteração para obter os pontos intermediários. Na próxima iteração o ponto estimado é substituído pelo ponto medido para fazer a interpolação.

2.5.3 Vantagens do Método

A interpolação tem por vantagens uma melhor definição da curva obtida pelas amostras, capturando melhor as mudanças na velocidade e na trajetória, além de tornar a curva mais suave na transição entre os pontos amostrados, resultando em uma representação mais realista do movimento dos projéteis. Outra vantagem é o custo computacional moderado. Embora a interpolação quadrática seja mais complexa que a linear, ela oferece maior precisão devido à natureza do movimento estudado.

2.6 Resistência do Ar

Para tornar o modelo mais próximo da realidade, será introduzida a força de arrasto (15), resultante da resistência do ar, ao equacionamento do modelo balístico. A força de arrasto tem como característica estar sempre em oposição à direção do movimento da trajetória, como mostra a Figura 5:

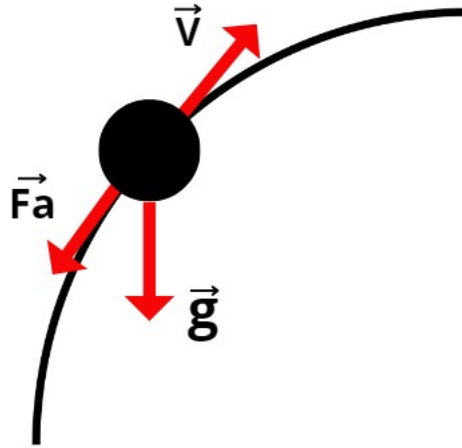


Figura 5 – Diagrama de forças.

A equação da força de arrasto pode ser escrita da seguinte maneira:

$$\vec{F}_a = -\frac{1}{2}\rho C_a A v^2 \hat{v}, \quad (2.14)$$

onde:

- ρ : Densidade do ar atmosférico
- C_a : Coeficiente de arrasto
- A : Maior área de seção transversal do corpo

2.7 Sistema não Linear

Um sistema não linear é aquele em que as relações entre as variáveis não seguem uma proporção direta, ou seja, a resposta do sistema não é uma combinação linear das entradas. Isso significa que os efeitos das entradas não se somam de maneira simples e podem envolver termos como produtos, quadrados ou outras funções mais complexas das variáveis. Dessa forma, não é possível descrever completamente esses sistemas utilizando a representação em espaço de estados de forma simples, pois essa abordagem supõe linearidade nas equações que regem o sistema.

Entretanto, é possível descrever esses sistemas através das funções de transição de estado discreta \mathbf{f} e de observação discreta \mathbf{h} , utilizando a aproximação de funções não lineares por meio de expansões lineares locais (expansões de Taylor) em torno de um estado (16).

Primeiramente, ao analisarmos as expansões de Taylor para uma função $\mathbf{x}(t)$ em torno de $t = a$, tem-se a seguinte descrição:

$$\mathbf{x}(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\mathbf{x}^{(n)}(a)}{n!} (t - a)^n, \quad (2.15)$$

agora, para um sistema descrito por uma função de transição de estado contínua no tempo, \mathbf{g} , tem-se a equação do estado $\dot{\mathbf{x}}$ seguida de sua expansão de Taylor para $a = t - T$, onde são definidas as funções $\mathbf{g}_1 = \dot{\mathbf{x}}(t)$ e $\mathbf{g}_2 = \ddot{\mathbf{x}}(t)$. Além disto, $O(x)$ representa as demais potências da série de expansões.

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}(t - T) + \dot{\mathbf{x}}(t - T)T + \frac{\ddot{\mathbf{x}}(t - T)}{2}T^2 + O(x) \quad (2.16)$$

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}(t - T) + \mathbf{g}_1(t - T)T + \mathbf{g}_2(t - T)\frac{T^2}{2} + O(x) \quad (2.17)$$

Logo, de modo a definir a função de transição de estado discreta como a função $\mathbf{f}(\mathbf{x}(k - 1), \mathbf{u}(k - 1)) = \mathbf{x}(k)$, discretiza-se a Equação 2.17 acima, desconsiderando os termos representados por $O(x)$:

$$\mathbf{x}(k) = \mathbf{x}(k - 1) + \mathbf{g}_1(k - 1)T + \mathbf{g}_2(k - 1)\frac{T^2}{2} \quad (2.18)$$

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}(k - 1), \mathbf{u}(k - 1)) = \mathbf{x}(k - 1) + \mathbf{g}_1(k - 1)T + \mathbf{g}_2(k - 1)\frac{T^2}{2} \quad (2.19)$$

Por fim, para a função de observação discreta \mathbf{h} segue-se que:

$$\mathbf{y}(k) = \mathbf{h}(\mathbf{x}(k), \mathbf{u}(k)); \quad (2.20)$$

Agora, a fim de viabilizar a obtenção o ponto de disparo (PD), será feita uma investigação na Equação 2.18, realizando um deslocamento no tempo discreto de k por $k + 1$ e a reescrevendo:

$$\mathbf{x}(k) = \mathbf{x}(k + 1) - \mathbf{g}_1(k)T - \mathbf{g}_2(k)\frac{T^2}{2} \quad (2.21)$$

A partir do resultado observado acima, é possível verificar a impossibilidade de obter o estado com base no próximo estado, pois não é possível calcular os valores de \mathbf{g}_1 e \mathbf{g}_2 do próprio estado desejado na mesma iteração.

Outra abordagem que será utilizada consiste no estudo da expansão da série de Taylor substituindo o valor do parâmetro $a = t - T$ para $a = t + T$. O efeito desta mudança

permite analisar agora a vizinhança de t caminhando no sentido do PD. Seguindo os mesmos passos a partir da equação (2.15), obtemos para o tempo contínuo:

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}(t+T) + \mathbf{g}_1(t+T)(-T) + \mathbf{g}_2(t+T)\frac{(-T)^2}{2} + O(x), \quad (2.22)$$

De modo semelhante, transformando a equação para o domínio de tempo discreto e desconsiderando os termos além do termo quadrático, obtemos a equação que permite a obtenção do PD do nosso modelo não linear:

$$\mathbf{x}(k) = \mathbf{x}(k+1) + \mathbf{g}_1(k+1)(-T) + \mathbf{g}_2(k+1)\frac{(-T)^2}{2} \quad (2.23)$$

A Figura 6 ilustra as direções a serem descritas pelo modelo não linear, tanto para a aquisição do ponto de impacto, em azul, e o ponto de disparo, em vermelho.

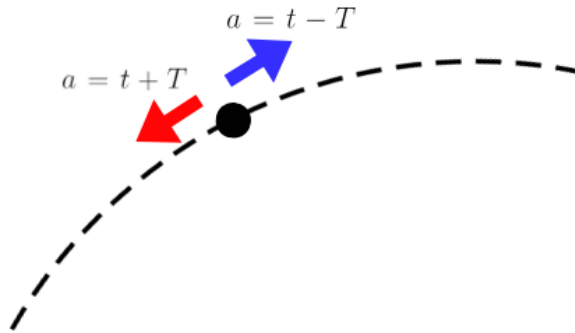


Figura 6 – Representação da modelagem.

2.8 Filtro de Kalman Estendido (EKF)

Para realizar a filtragem e estimativa de um sistema não linear, utiliza-se a versão estendida do Filtro de Kalman, conhecida como EKF (*Extended Kalman Filter*) (17). O EKF é uma generalização do Filtro de Kalman tradicional, adaptada para lidar com as não-linearidades presentes nos modelos de sistemas reais. Portanto, a partir da determinação da função de transição de estado discreta \mathbf{f} e da função de observação discreta \mathbf{h} de um sistema não linear, provém-se as seguintes equações que definem o EKF:

Equações de previsão:

$$\hat{\mathbf{x}}(k|k-1) = \mathbf{f}(\hat{\mathbf{x}}(k-1|k-1), \mathbf{u}(k-1)) \quad (2.24)$$

$$\mathbf{P}(k|k-1) = \mathbf{F}\mathbf{P}(k-1|k-1)\mathbf{F}^T + \mathbf{Q} \quad (2.25)$$

Equações de atualização:

$$\mathbf{K}(k) = \mathbf{P}(k|k-1)\mathbf{H}^T[\mathbf{H}\mathbf{P}(k|k-1)\mathbf{H}^T + \mathbf{R}]^{-1} \quad (2.26)$$

$$\hat{\mathbf{x}}(k|k) = \hat{\mathbf{x}}(k|k-1) + \mathbf{K}(k)[\mathbf{y}(k) - \mathbf{h}(\hat{\mathbf{x}}(k|k-1), \mathbf{u}(k))] \quad (2.27)$$

$$\mathbf{P}(k|k) = [\mathbf{I} - \mathbf{K}(k)\mathbf{H}]\mathbf{P}(k|k-1) \quad (2.28)$$

Equação da saída estimada:

$$\mathbf{y}(k|k-1) = \mathbf{h}(\hat{\mathbf{x}}(k|k-1), \mathbf{u}(k)) \quad (2.29)$$

Onde \mathbf{F} e \mathbf{H} são as seguintes matrizes Jacobianas:

- $\mathbf{F} = \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}}|_{\hat{\mathbf{x}}(k-1|k-1), \mathbf{u}(k-1)}$
- $\mathbf{H} = \frac{\partial \mathbf{h}}{\partial \mathbf{x}}|_{\hat{\mathbf{x}}(k|k-1)}$

Após o estudo teórico dos problemas apresentados e das soluções propostas, os conhecimentos adquiridos ao longo deste capítulo serão aplicados para ajustar o projeto e torná-lo mais adequado aos requisitos.

3 METODOLOGIA

3.1 Modelagem do Espaço de Estados

Para dar início ao desenvolvimento do projeto, serão feitos três exemplos simples da implementação do filtro de Kalman, e são estes o movimento retilíneo uniforme, movimento retilíneo uniformemente variado e um movimento parabólico. Será utilizado o exemplo geral que terá como vetor de estados a posição e a velocidade em duas dimensões.

3.1.1 Equacionamento 2D

Supondo o movimento retilíneo uniformemente variado, temos a equação em duas dimensões dada pelo vetor $\mathbf{p}(t) = \mathbf{p}_0 + \mathbf{v}_0 t + \frac{t^2}{2} \mathbf{a}$. E a equação da velocidade é dada por $\mathbf{v}(t) = \mathbf{v}_0 + \mathbf{a}t$. Agora mudando a equação para o tempo discreto, onde $t = kT$, T sendo o período de amostragem, teremos:

$$\mathbf{p}(k) = \mathbf{p}_0 + \mathbf{v}_0 kT + \frac{\mathbf{a}T^2 k^2}{2} \quad (3.1)$$

$$\mathbf{v}(k) = \mathbf{v}_0 + \mathbf{a}kT \quad (3.2)$$

Deslocando a equação da posição e velocidade, temos:

$$\mathbf{p}(k-1) = \mathbf{p}_0 + \mathbf{v}_0 [k-1]T + \frac{\mathbf{a}T^2 [k-1]^2}{2} \quad (3.3)$$

$$\mathbf{v}(k-1) = \mathbf{v}_0 + \mathbf{a}[k-1]T \quad (3.4)$$

Fazendo a diferença entre as Equações (3.1) e (3.3), temos:

$$\mathbf{p}(k) = \mathbf{p}(k-1) + T[\mathbf{v}_0 + \mathbf{a}[k-1]T] + \frac{\mathbf{a}T^2}{2} \quad (3.5)$$

Substituindo o segundo termo pela velocidade dada pela Equação (3.4), podemos encontrar:

$$\mathbf{p}(k) = \mathbf{p}(k-1) + \mathbf{v}(k)T + \frac{\mathbf{a}T^2}{2} \quad (3.6)$$

Fazendo a diferença entre as Equações (3.2) e (3.4), temos:

$$\mathbf{v}(k) = \mathbf{v}(k-1) + \mathbf{a}T, \quad (3.7)$$

finalmente modelando a equação de espaço de estados, obtemos o seguinte resultado:

$$\mathbf{x}(k) = \begin{bmatrix} p \\ v \end{bmatrix}_k = \begin{bmatrix} p_x \\ p_y \\ v_x \\ v_y \end{bmatrix}_k = \begin{bmatrix} 1 & 0 & T & 0 \\ 0 & 1 & 0 & T \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_x \\ p_y \\ v_x \\ v_y \end{bmatrix}_{k-1} + \begin{bmatrix} \frac{T^2}{2} & 0 \\ 0 & \frac{T^2}{2} \\ T & 0 \\ 0 & T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_x \\ a_y \end{bmatrix} \quad (3.8)$$

$$\mathbf{y}_{\text{true}}(k) = \begin{bmatrix} out_x \\ out_y \end{bmatrix}_k = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_x \\ p_y \\ v_x \\ v_y \end{bmatrix}_k + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_x \\ a_y \end{bmatrix} \quad (3.9)$$

Onde as matrizes de espaço de estado são:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & T & 0 \\ 0 & 1 & 0 & T \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} \frac{T^2}{2} & 0 \\ 0 & \frac{T^2}{2} \\ T & 0 \\ 0 & T \end{bmatrix}; \quad \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{D} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.10)$$

3.1.2 M.R.U. e Parábola

Tanto o movimento retilíneo uniforme quanto o movimento parabólico são casos específicos do modelo geral obtido, diferindo apenas no vetor aceleração.

Para o M.R.U. teremos que o vetor aceleração será dado por $\mathbf{a} = [0 \ 0]^T$, e para a parábola, teremos $\mathbf{a} = [0 \ -g]^T$, onde g é o módulo da aceleração da gravidade.

3.1.3 Equacionamento 3D

Análogo ao equacionamento do modelo de espaço de estados para duas dimensões, partindo das Equações (3.6) e (3.7), temos o novo sistema seguido de suas matrizes, com a entrada $\mathbf{u}(k-1) = [a_x \ a_y \ a_z]^T = [0 \ 0 \ -g]^T$.

$$\mathbf{x}(k) = \begin{bmatrix} p_x \\ p_y \\ p_z \\ v_x \\ v_y \\ v_z \end{bmatrix}_k = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & T & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & T & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & T \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_x \\ p_y \\ p_z \\ v_x \\ v_y \\ v_z \end{bmatrix}_{k-1} + \begin{bmatrix} \frac{T^2}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{T^2}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{T^2}{2} \\ T & 0 & 0 \\ 0 & T & 0 \\ 0 & 0 & T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{bmatrix} \quad (3.11)$$

$$\mathbf{y}_{\text{true}}(k-1) = \begin{bmatrix} p_x \\ p_y \\ p_z \end{bmatrix}_{k-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_x \\ p_y \\ p_z \\ v_x \\ v_y \\ v_z \end{bmatrix}_{k-1} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{bmatrix} \quad (3.12)$$

As matrizes de espaço de estado são:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & T & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & T & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & T \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} \frac{T^2}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{T^2}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{T^2}{2} \\ T & 0 & 0 \\ 0 & T & 0 \\ 0 & 0 & T \end{bmatrix}; \quad \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix};$$

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

3.2 Filtragem da Posição do Objeto

Para a filtragem da posição de um objeto no espaço utilizando o Filtro de Kalman, propomos três métodos que se baseiam na aplicação da filtragem tanto na direção direta quanto na reversa (18). Os métodos são detalhados a seguir:

3.2.1 Método 1

A filtragem da posição medida é realizada conforme as novas medidas vão sendo disponibilizadas. Assim, a filtragem ocorre apenas em uma etapa, percorrendo o trecho da trajetória observando desde a primeira até a última medida.

3.2.2 Método 2

A filtragem da trajetória medida é realizada inicialmente percorrendo a sequência de dados na direção direta e, em seguida, na reversa. Dessa forma, garantimos que a primeira e a última posições filtradas correspondam à primeira amostra.

3.2.3 Método 3

Neste método, a filtragem da trajetória medida é realizada seguindo o mesmo princípio do Método 2, mas repetindo o processo 5 vezes. Isso assegura que as estimativas das primeiras e últimas posições filtradas correspondam à primeira amostra, incorporando informações de múltiplas iterações.

3.3 Predição do Ponto de Impacto e Disparo

A fim de se prever os pontos de impacto e de disparo do projétil, deve-se calcular as saídas p_i e p_d para a amostragem atual k , onde $k + j_i$ e $k - j_d$ representam a predição da amostragem no momento de impacto e de disparo, respectivamente. As saídas acima são obtidas por meio das equações de espaço de estados e a partir do estado estimado atual $\hat{\mathbf{x}}(k|k)$.

3.3.1 Ponto de Impacto

Os pontos da trajetória de impacto $\mathbf{y}(k + j|k)$ são dados por:

$$\hat{\mathbf{x}}(k + j|k) = \mathbf{A}\hat{\mathbf{x}}(k + j - 1|k) + \mathbf{B}\mathbf{u}(k + j - 1) \quad (3.13)$$

$$\mathbf{y}(k + j|k) = \mathbf{C}\hat{\mathbf{x}}(k + j|k) \quad (3.14)$$

Portanto, quando a saída atingir o solo, para $j = j_i$, obtemos o ponto de impacto $\mathbf{p}_i = \mathbf{y}(k + j_i|k)$.

3.3.2 Filtragem Inversa

Para prever os pontos da trajetória de disparo, isola-se o termo $\mathbf{x}(k - 1)$ na descrição de espaço de estados dada pela Equação (2.1) abaixo:

$$\mathbf{x}(k - 1) = \mathbf{A}^{-1}[\mathbf{x}(k) - \mathbf{B}\mathbf{u}(k - 1)] \quad (3.15)$$

Logo, os pontos da trajetória de disparo $\mathbf{y}(k - j|k)$ são dados por:

$$\hat{\mathbf{x}}(k - j|k) = \mathbf{A}^{-1}[\hat{\mathbf{x}}(k - j + 1|k) - \mathbf{B}\mathbf{u}(k - j)] \quad (3.16)$$

$$\mathbf{y}(k - j|k) = \mathbf{C}\hat{\mathbf{x}}(k - j|k) \quad (3.17)$$

Portanto, quando a saída atingir o solo, para $j = j_d$, obtemos o ponto de disparo $\mathbf{p}_d = \mathbf{y}(k - j_d|k)$.

3.3.3 Equacionamento direto

Alternativamente, é possível obter os pontos de impacto e disparo através das mesmas equações utilizadas para determinar o sistema de espaço de estados. Primeiramente, obtêm-se posição e velocidade iniciais a partir do estado estimado atual:

$$\hat{\mathbf{x}}(k|k) = \begin{bmatrix} \mathbf{p}_k^T & \mathbf{v}_k^T \end{bmatrix}^T \quad (3.18)$$

Agora, pela equações da parábola:

$$p_{solo} = p_{0z} + v_{0z}t - \frac{gt^2}{2} \iff \quad (3.19)$$

$$t_i = \frac{v_{0z} + \sqrt{v_{0z}^2 + 2g(p_{0z} - p_{solo})}}{g} \quad (3.20)$$

$$t_d = \frac{v_{0z} - \sqrt{v_{0z}^2 + 2g(p_{0z} - p_{solo})}}{g} \quad (3.21)$$

Dessa forma, determina-se ponto de impacto:

$$p_{ix} = p_{0x} + v_{0x}t_i \quad (3.22)$$

$$p_{iy} = p_{0y} + v_{0y}t_i \quad (3.23)$$

$$\mathbf{p}_i = \begin{bmatrix} p_{ix} & p_{iy} & p_{solo} \end{bmatrix}^T \quad (3.24)$$

De forma análoga, determina-se o ponto de disparo:

$$p_{dx} = p_{0x} + v_{0x}t_d \quad (3.25)$$

$$p_{dy} = p_{0y} + v_{0y}t_d \quad (3.26)$$

$$\mathbf{p}_d = \begin{bmatrix} p_{dx} & p_{dy} & p_{solo} \end{bmatrix}^T \quad (3.27)$$

3.4 Modelagem do Sistema com o Parâmetro de Arrasto

Para encontrar a função de transferência de tempo contínuo $\mathbf{g}(t)$, é necessário conhecer o modelo físico da força de arrasto que atua contra o movimento do projétil.

A partir da segunda Lei de Newton e do conhecimento das equações das forças atuantes sobre o projétil, chegamos no seguinte equacionamento:

$$\sum \mathbf{F} = m\mathbf{a} \quad (3.28)$$

$$m\mathbf{g} + \mathbf{F}_a = m\mathbf{a} \quad (3.29)$$

Substituindo a força de arrasto da Equação (2.14), podemos obter:

$$m\mathbf{a} = -\frac{1}{2}\rho C_a A v^2 \hat{\mathbf{v}} + m\mathbf{g} \quad (3.30)$$

Agora reescrevendo a equação, isolando a aceleração de forma matricial:

$$\mathbf{a} = \begin{bmatrix} \dot{v}_x \\ \dot{v}_y \\ \dot{v}_z \end{bmatrix} = -\frac{1}{2m}\rho C_a A v \begin{bmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -g \end{bmatrix}, \quad (3.31)$$

onde $v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}$ é o módulo da velocidade do projétil e $\mathbf{u} = [0 \ 0 \ -g]^T$ é o vetor de entradas do sistema. Vamos considerar também a densidade do ar uma função variável e dependente da altura z do projétil, sendo a equação $\rho(z) = \rho_0 e^{-z/h}$. Onde ρ_0 é a densidade do ar no nível do mar e h é escala de altura, dependendo da altura e da gravidade.

Como forma de simplificar a visão de equacionamento, define-se como γ o parâmetro de arrasto, seguido de sua derivada, descritos nas equações abaixo:

$$\gamma = \frac{C_a A \rho(z)}{m} \quad (3.32)$$

A equação da aceleração então se torna:

$$\begin{bmatrix} \dot{v}_x \\ \dot{v}_y \\ \dot{v}_z \end{bmatrix} = -\frac{1}{2}\gamma v \begin{bmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -g \end{bmatrix}, \quad (3.33)$$

sendo $\mathbf{x}(t) = [\mathbf{p}^T \ \mathbf{v}^T \ \gamma]^T$ o vetor de espaço de estados do tempo contínuo, a função de transição de tempo contínuo $\mathbf{g}_1(t)$ se torna $\mathbf{g}_1(t) = \dot{\mathbf{x}}(t) = [\dot{\mathbf{p}}^T \ \dot{\mathbf{v}}^T \ \dot{\gamma}]^T$, onde $\dot{\gamma} = -\gamma \dot{p}_z h = -\gamma v_z h$. Dessa forma, temos:

$$\mathbf{g}_1(t) = \begin{bmatrix} \dot{p}_x \\ \dot{p}_y \\ \dot{p}_z \\ \dot{v}_x \\ \dot{v}_y \\ \dot{v}_z \\ \dot{\gamma} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \\ -\frac{1}{2}\gamma v v_x \\ -\frac{1}{2}\gamma v v_y \\ -\frac{1}{2}\gamma v v_z - g \\ -\gamma v_z h \end{bmatrix} \quad (3.34)$$

Agora, deseja-se obter o valor de $\mathbf{g}_2(t)$. Assim, obtemos:

$$\mathbf{g}_2(t) = \mathbf{g}_1(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t)) = \frac{\partial \mathbf{g}_1}{\partial \mathbf{x}} \dot{\mathbf{x}} + \frac{\partial \mathbf{g}_1}{\partial \mathbf{u}} \dot{\mathbf{u}} = \frac{\partial \mathbf{g}_1}{\partial \mathbf{x}} \mathbf{g}_1(t) \quad (3.35)$$

Para prosseguir com o modelo não linear do EKF, será agora realizado o cálculo da matriz Jacobiana $\frac{\partial \mathbf{g}_1}{\partial \mathbf{x}}$.

$$\frac{\partial \mathbf{g}_1}{\partial \mathbf{x}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial v_x}{\partial p_x} & \frac{\partial v_x}{\partial p_y} & \frac{\partial v_x}{\partial p_z} & \frac{\partial v_x}{\partial v_x} & \frac{\partial v_x}{\partial v_y} & \frac{\partial v_x}{\partial v_z} & \frac{\partial v_x}{\partial \gamma} \\ \frac{\partial v_y}{\partial p_x} & \frac{\partial v_y}{\partial p_y} & \frac{\partial v_y}{\partial p_z} & \frac{\partial v_y}{\partial v_x} & \frac{\partial v_y}{\partial v_y} & \frac{\partial v_y}{\partial v_z} & \frac{\partial v_y}{\partial \gamma} \\ \frac{\partial v_z}{\partial p_x} & \frac{\partial v_z}{\partial p_y} & \frac{\partial v_z}{\partial p_z} & \frac{\partial v_z}{\partial v_x} & \frac{\partial v_z}{\partial v_y} & \frac{\partial v_z}{\partial v_z} & \frac{\partial v_z}{\partial \gamma} \\ \frac{\partial \dot{v}_x}{\partial p_x} & \frac{\partial \dot{v}_x}{\partial p_y} & \frac{\partial \dot{v}_x}{\partial p_z} & \frac{\partial \dot{v}_x}{\partial v_x} & \frac{\partial \dot{v}_x}{\partial v_y} & \frac{\partial \dot{v}_x}{\partial v_z} & \frac{\partial \dot{v}_x}{\partial \gamma} \\ \frac{\partial \dot{v}_y}{\partial p_x} & \frac{\partial \dot{v}_y}{\partial p_y} & \frac{\partial \dot{v}_y}{\partial p_z} & \frac{\partial \dot{v}_y}{\partial v_x} & \frac{\partial \dot{v}_y}{\partial v_y} & \frac{\partial \dot{v}_y}{\partial v_z} & \frac{\partial \dot{v}_y}{\partial \gamma} \\ \frac{\partial \dot{v}_z}{\partial p_x} & \frac{\partial \dot{v}_z}{\partial p_y} & \frac{\partial \dot{v}_z}{\partial p_z} & \frac{\partial \dot{v}_z}{\partial v_x} & \frac{\partial \dot{v}_z}{\partial v_y} & \frac{\partial \dot{v}_z}{\partial v_z} & \frac{\partial \dot{v}_z}{\partial \gamma} \\ \frac{\partial \dot{\gamma}}{\partial p_x} & \frac{\partial \dot{\gamma}}{\partial p_y} & \frac{\partial \dot{\gamma}}{\partial p_z} & \frac{\partial \dot{\gamma}}{\partial v_x} & \frac{\partial \dot{\gamma}}{\partial v_y} & \frac{\partial \dot{\gamma}}{\partial v_z} & \frac{\partial \dot{\gamma}}{\partial \gamma} \end{bmatrix} \quad (3.36)$$

Nota-se que as três primeiras linhas da matriz são nulas, com exceção dos termos $\frac{\partial v_x}{\partial v_x}$, $\frac{\partial v_y}{\partial v_y}$ e $\frac{\partial v_z}{\partial v_z}$, que são iguais a 1. Agora seguiremos para os cálculos das próximas linhas da matriz baseado na Equação (3.33) e na equação de γ .

Na quarta linha da matriz, onde $\dot{v}_x = -\frac{1}{2}\gamma v v_x$, teremos:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \dot{v}_x}{\partial p_x} &= \frac{\partial \dot{v}_x}{\partial p_y} = 0 \\ \frac{\partial \dot{v}_x}{\partial p_z} &= \frac{\partial}{\partial p_z} \left(-\frac{1}{2}\gamma v v_x \right) = \frac{1}{2} h \gamma v v_x \\ \frac{\partial \dot{v}_x}{\partial v_x} &= \frac{\partial}{\partial v_x} \left(-\frac{1}{2}\gamma v v_x \right) = -\frac{1}{2}\gamma \left(\frac{\partial v}{\partial v_x} v_x + \frac{\partial v_x}{\partial v_x} v \right) = -\frac{1}{2}\gamma \left(\frac{v_x^2}{v} + v \right) \\ \frac{\partial \dot{v}_x}{\partial v_y} &= \frac{\partial}{\partial v_y} \left(-\frac{1}{2}\gamma v v_x \right) = -\frac{1}{2}\gamma \frac{v_x v_y}{v} \\ \frac{\partial \dot{v}_x}{\partial v_z} &= \frac{\partial}{\partial v_z} \left(-\frac{1}{2}\gamma v v_x \right) = -\frac{1}{2}\gamma \frac{v_z v_x}{v} \\ \frac{\partial \dot{v}_x}{\partial \gamma} &= \frac{\partial}{\partial \gamma} \left(-\frac{1}{2}\gamma v v_x \right) = -\frac{1}{2} v v_x \end{aligned}$$

Na quinta linha, onde $\dot{v}_y = -\frac{1}{2}\gamma v v_y$, teremos:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \dot{v}_y}{\partial p_x} &= \frac{\partial \dot{v}_y}{\partial p_y} = 0 \\ \frac{\partial \dot{v}_y}{\partial p_z} &= \frac{\partial}{\partial p_z} \left(-\frac{1}{2}\gamma v v_y \right) = \frac{1}{2} h \gamma v v_y \\ \frac{\partial \dot{v}_y}{\partial v_x} &= \frac{\partial}{\partial v_x} \left(-\frac{1}{2}\gamma v v_y \right) = -\frac{1}{2}\gamma \frac{v_x v_y}{v} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \dot{v}_y}{\partial v_y} &= \frac{\partial}{\partial v_y} \left(-\frac{1}{2} \gamma v v_y \right) = -\frac{1}{2} \gamma \left(\frac{\partial v}{\partial v_y} v_y + \frac{\partial v_y}{\partial v_y} v \right) = -\frac{1}{2} \gamma \left(\frac{v_y^2}{v} + v \right) \\
\frac{\partial \dot{v}_y}{\partial v_z} &= \frac{\partial}{\partial v_z} \left(-\frac{1}{2} \gamma v v_y \right) = -\frac{1}{2} \gamma \frac{v_y v_z}{v} \\
\frac{\partial \dot{v}_y}{\partial \gamma} &= \frac{\partial}{\partial \gamma} \left(-\frac{1}{2} \gamma v v_y \right) = -\frac{1}{2} v v_y
\end{aligned}$$

Na sexta linha, onde $\dot{v}_z = -\frac{1}{2} \gamma v v_z - g$, teremos:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \dot{v}_z}{\partial p_x} &= \frac{\partial \dot{v}_z}{\partial p_y} = 0 \\
\frac{\partial \dot{v}_z}{\partial p_z} &= \frac{\partial}{\partial p_z} \left(-\frac{1}{2} \gamma v v_z \right) = \frac{1}{2} h \gamma v v_z \\
\frac{\partial \dot{v}_z}{\partial v_x} &= \frac{\partial}{\partial v_x} \left(-\frac{1}{2} \gamma v v_z \right) = -\frac{1}{2} \gamma \frac{v_z v_x}{v} \\
\frac{\partial \dot{v}_z}{\partial v_y} &= \frac{\partial}{\partial v_y} \left(-\frac{1}{2} \gamma v v_z \right) = -\frac{1}{2} \gamma \frac{v_y v_z}{v} \\
\frac{\partial \dot{v}_z}{\partial v_z} &= \frac{\partial}{\partial v_z} \left(-\frac{1}{2} \gamma v v_z \right) = -\frac{1}{2} \gamma \left(\frac{v_z^2}{v} + v \right) \\
\frac{\partial \dot{v}_z}{\partial \gamma} &= \frac{\partial}{\partial \gamma} \left(-\frac{1}{2} \gamma v v_z \right) = -\frac{1}{2} v v_z
\end{aligned}$$

Na sétima linha, onde $\dot{\gamma} = -\gamma v_z h$, teremos:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \dot{\gamma}}{\partial p_x} &= \frac{\partial \dot{\gamma}}{\partial p_y} = 0 \\
\frac{\partial \dot{\gamma}}{\partial p_z} &= \frac{\partial}{\partial p_z} (-\gamma v_z h) = \gamma v_z h^2 \\
\frac{\partial \dot{\gamma}}{\partial v_x} &= \frac{\partial \dot{\gamma}}{\partial v_y} = 0 \\
\frac{\partial \dot{\gamma}}{\partial v_z} &= \frac{\partial}{\partial v_z} (-\gamma v_z h) = -\gamma h \\
\frac{\partial \dot{\gamma}}{\partial \gamma} &= \frac{\partial}{\partial \gamma} (-\gamma v_z h) = -v_z h
\end{aligned}$$

Por fim, após realizados todos os cálculos, a matriz Jacobiana fica da seguinte forma:

$$\frac{\partial \mathbf{g}_1}{\partial \mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} h \gamma v v_x & -\frac{1}{2} \gamma \left(\frac{v_x^2}{v} + v \right) & -\frac{1}{2} \gamma \frac{v_x v_y}{v} & -\frac{1}{2} \gamma \frac{v_z v_x}{v} & -\frac{1}{2} v v_x \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} h \gamma v v_y & -\frac{1}{2} \gamma \frac{v_x v_y}{v} & -\frac{1}{2} \gamma \left(\frac{v_y^2}{v} + v \right) & -\frac{1}{2} \gamma \frac{v_y v_z}{v} & -\frac{1}{2} v v_y \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} h \gamma v v_z & -\frac{1}{2} \gamma \frac{v_z v_x}{v} & -\frac{1}{2} \gamma \frac{v_y v_z}{v} & -\frac{1}{2} \gamma \left(\frac{v_z^2}{v} + v \right) & -\frac{1}{2} v v_z \\ 0 & 0 & \gamma v_z h^2 & 0 & 0 & -\gamma h & -v_z h \end{bmatrix} \quad (3.37)$$

Encontrada tal matriz, temos finalmente o cálculo de $\frac{\partial \mathbf{g}_1}{\partial \mathbf{x}} \mathbf{g}_1(t)$ a seguir.

$$\frac{\partial \mathbf{g}_1}{\partial \mathbf{x}} \mathbf{g}_1(t) = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2}\gamma v v_x \\ -\frac{1}{2}\gamma v v_y \\ -\frac{1}{2}\gamma v v_z - g \\ \gamma v v_z v_x h + \frac{1}{2}v_x \gamma^2 v^2 + \frac{1}{2}\frac{v_z v_x}{v} \gamma g \\ \gamma v v_z v_y h + \frac{1}{2}v_y \gamma^2 v^2 + \frac{1}{2}\frac{v_y v_z}{v} \gamma g \\ \gamma v v_z^2 h + \frac{1}{2}v_z \gamma^2 v^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{v_z^2}{v} + v\right) \gamma g \\ 2v_z^2 \gamma h + \frac{1}{2}\gamma^2 v v_z h^2 + g \gamma h \end{bmatrix} \quad (3.38)$$

3.4.1 Sistema Não Linear Discretizado

Dado que foram encontrados todos os elementos para poder escrever a Equação (2.18) em sua forma matricial, esta fica da seguinte forma:

$$\mathbf{x}(k) = \begin{bmatrix} p_x \\ p_y \\ p_z \\ v_x \\ v_y \\ v_z \\ \gamma \end{bmatrix}_k = \begin{bmatrix} p_x \\ p_y \\ p_z \\ v_x \\ v_y \\ v_z \\ \gamma \end{bmatrix}_{k-1} + T \begin{bmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \\ -\frac{1}{2}\gamma v v_x \\ -\frac{1}{2}\gamma v v_y \\ -\frac{1}{2}\gamma v v_z - g \\ -\gamma v_z h \end{bmatrix}_{k-1} + \frac{T^2}{2} \begin{bmatrix} -\frac{1}{2}\gamma v v_x \\ -\frac{1}{2}\gamma v v_y \\ -\frac{1}{2}\gamma v v_z - g \\ \gamma v v_z v_x h + \frac{1}{2}v_x \gamma^2 v^2 + \frac{1}{2}\frac{v_z v_x}{v} \gamma g \\ \gamma v v_z v_y h + \frac{1}{2}v_y \gamma^2 v^2 + \frac{1}{2}\frac{v_y v_z}{v} \gamma g \\ \gamma v v_z^2 h + \frac{1}{2}v_z \gamma^2 v^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{v_z^2}{v} + v\right) \gamma g \\ 2v_z^2 \gamma h + \frac{1}{2}\gamma^2 v v_z h^2 + g \gamma h \end{bmatrix}_{k-1} \quad (3.39)$$

Como $\dot{v}_z = -\frac{1}{2}\gamma v v_z - g$, podemos reescrever e separar as matrizes de maneira a explicitar a matriz de entradas do sistema:

$$\mathbf{x}(k) = \begin{bmatrix} p_x \\ p_y \\ p_z \\ v_x \\ v_y \\ v_z \\ \gamma \end{bmatrix}_k = \begin{bmatrix} p_x \\ p_y \\ p_z \\ v_x \\ v_y \\ v_z \\ \gamma \end{bmatrix}_{k-1} + T \begin{bmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \\ -\frac{1}{2}\gamma v v_x \\ -\frac{1}{2}\gamma v v_y \\ -\frac{1}{2}\gamma v v_z \\ -h \gamma v_z \end{bmatrix}_{k-1} + \frac{T^2}{2} \begin{bmatrix} -\frac{1}{2}\gamma v v_x \\ -\frac{1}{2}\gamma v v_y \\ -\frac{1}{2}\gamma v v_z \\ \gamma v v_z v_x h + \frac{1}{2}v_x \gamma^2 v^2 + \frac{1}{2}\frac{v_z v_x}{v} \gamma g \\ \gamma v v_z v_y h + \frac{1}{2}v_y \gamma^2 v^2 + \frac{1}{2}\frac{v_y v_z}{v} \gamma g \\ \gamma v v_z^2 h + \frac{1}{2}v_z \gamma^2 v^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{v_z^2}{v} + v\right) \gamma g \\ 2v_z^2 \gamma h + \frac{1}{2}\gamma^2 v v_z h^2 + g \gamma h \end{bmatrix}_{k-1} +$$

$$\begin{bmatrix} \frac{T^2}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{T^2}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{T^2}{2} \\ T & 0 & 0 \\ 0 & T & 0 \\ 0 & 0 & T \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -g \end{bmatrix} \quad (3.40)$$

$$\mathbf{y}(k-1) = \begin{bmatrix} p_x \\ p_y \\ p_z \end{bmatrix}_{k-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_x \\ p_y \\ p_z \\ v_x \\ v_y \\ v_z \\ \gamma \end{bmatrix}_{k-1} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -g \end{bmatrix} \quad (3.41)$$

Este capítulo apresentou a modelagem do sistema em espaço de estados discreto para o modelo não linear, derivado a partir da linearização do sistema. Essa abordagem foi fundamental para prosseguir com o desenvolvimento do projeto, cujo objetivo é a determinação do ponto de impacto e disparo, utilizando também o Filtro de Kalman Estendido (EKF). A modelagem forneceu uma base sólida para a implementação dos algoritmos de estimativa e controle. No próximo capítulo, serão discutidos os resultados obtidos com as técnicas implementadas, avaliando seu desempenho e precisão no contexto do sistema proposto.

3.5 Cálculo dos Erros dos Pontos de Impacto e Disparo

Para calcular o erro nos pontos de impacto e disparo do projétil, seguimos uma abordagem que utiliza o último estado estimado do sistema. A partir desse estado, o modelo do sistema é utilizado para prever tanto o ponto de impacto quanto o ponto de disparo.

Primeiramente, com base no último estado estimado para uma amostragem k , o modelo do sistema é projetado até que o ponto atinja a posição escolhida para o solo, que, neste caso, é o nível zero de altura. A partir desse processo, são obtidos dois pontos previstos:

- Ponto de Impacto Previsto (\mathbf{PI}_{prev}^k): Calculado ao seguir o caminho direto da trajetória prevista até o ponto de impacto no solo, para uma amostragem k .
- Ponto de Disparo Previsto (\mathbf{PD}_{prev}^k): Determinado ao seguir o caminho reverso da trajetória prevista até o ponto de disparo, para uma amostragem k .

Com os pontos de impacto e disparo previstos obtidos, o erro, para uma amostragem k , é calculado comparando-os com os pontos reais de impacto e disparo, \mathbf{PI}_{real} e \mathbf{PD}_{real} , respectivamente. O erro é definido como o módulo da diferença entre os pontos previstos e reais, utilizando a seguinte equação:

$$Erro\ de\ Impacto(k) = |\mathbf{PI}_{prev}^k - \mathbf{PI}_{real}| \quad (3.42)$$

$$Erro\ de\ Disparo(k) = |\mathbf{PD}_{prev}^k - \mathbf{PD}_{real}| \quad (3.43)$$

Esses erros representam a diferença euclidiana entre as posições previstas e as reais, permitindo avaliar a precisão do modelo ao estimar os pontos de impacto e disparo do projétil.

4 RESULTADOS E DISCUSSÕES

Neste capítulo, serão apresentados e discutidos os resultados obtidos a partir da implementação do modelo linearizado em espaço de estados discreto, juntamente com a aplicação do Filtro de Kalman Estendido (EKF). A análise será focada na precisão das estimativas do ponto de impacto e disparo, comparando os resultados teóricos com as simulações realizadas. Além disso, serão avaliadas as principais limitações e vantagens do modelo proposto, destacando os aspectos mais relevantes para o desempenho geral do sistema.

4.1 Análise das Simulações Utilizando Filtro de Kalman

Para uma primeira análise neste projeto, foi utilizado o modelo mais simples inicialmente proposto, utilizando o modelo 3D e o filtro de Kalman comum, sem levar em conta a força de arrasto nem o parâmetro de arrasto na matriz de estados, considerando apenas a influência da gravidade sobre o projétil.

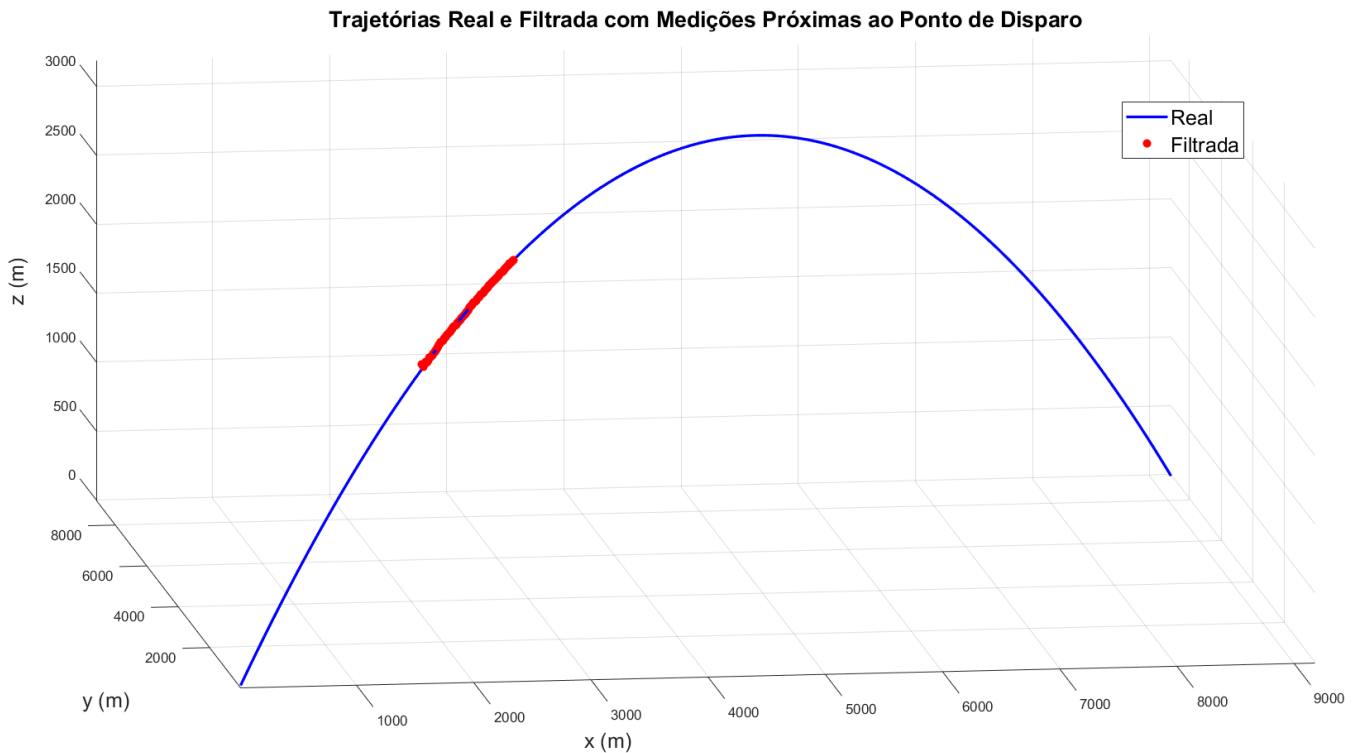


Figura 7 – Trajetória real e filtrada do projétil, com medições próximas ao ponto de disparo.

As análises iniciais tiveram como objetivo principal realizar as escolhas da matriz de covariância inicial e do período de amostragem. De modo a inicialmente escolher um período de amostragem fixo e analisar para alguns valores da matriz, e posteriormente dada a matriz mais adequada escolhida. Foi feita a análise para determinar o melhor período de amostragem a se utilizar. A Figura 7 ilustra a trajetória do projétil e o trecho medido e utilizado na simulação.

As figuras que apresentam os gráficos dos erros nos pontos de impacto e disparo do projétil mostram o erro como o módulo da distância euclidiana entre o ponto estimado e o ponto real, como citado na Seção 3.5. Os gráficos consideram os primeiros 5 segundos após o início da detecção pelo radar, já tendo decorrido 10 segundos desde o disparo. Todos os gráficos foram obtidos com base na média aritmética dos erros dos pontos de impacto e disparo de 100 simulações independentes, aplicando os métodos 1, 2 e 3 descritos na Seção 3.2.

4.1.1 Obtenção Da Matriz Covariância Inicial

Pela análise do gráfico da Figura 8, pode-se inferir de modo geral, com a exceção do método 1 para o primeiro valor de \mathbf{P} ($\mathbf{P} = 10\mathbf{I}$), que independente do método, o resultado é praticamente idêntico a ponto de não ser perceptível visualmente.

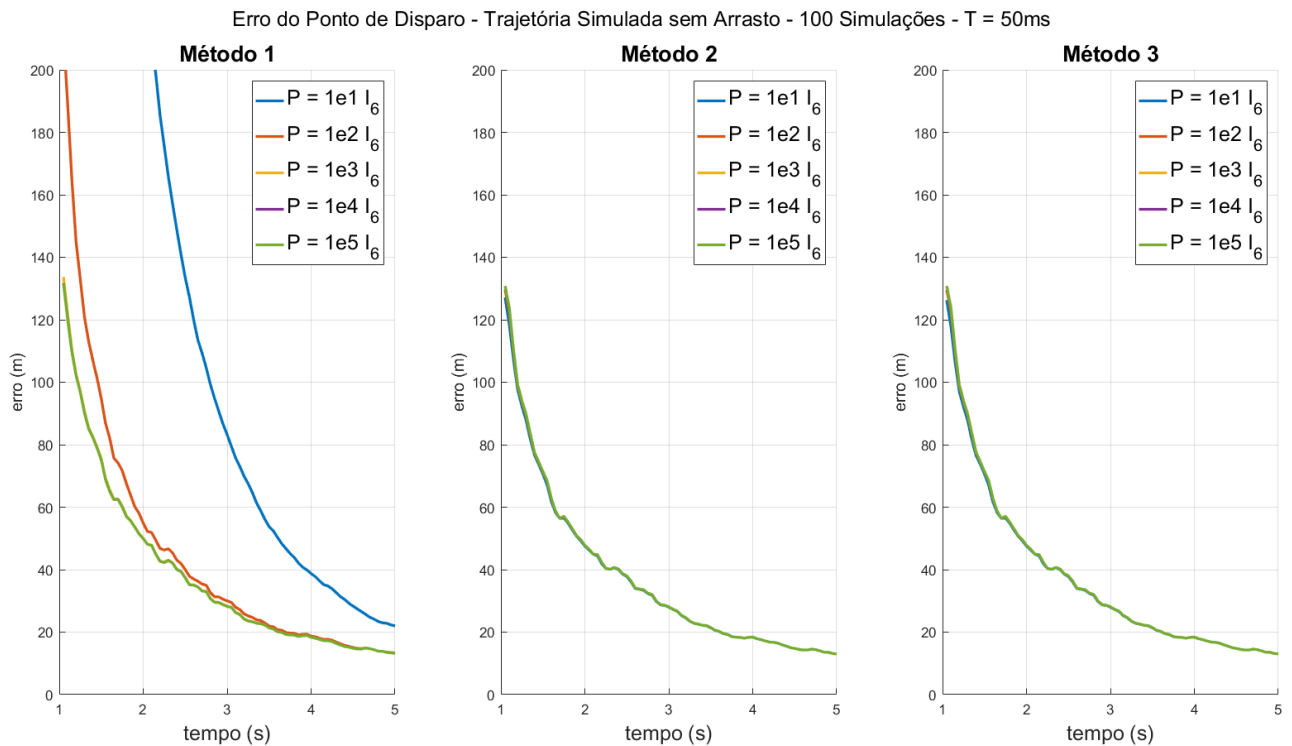


Figura 8 – Erro do ponto de disparo na comparação da matriz covariância inicial.

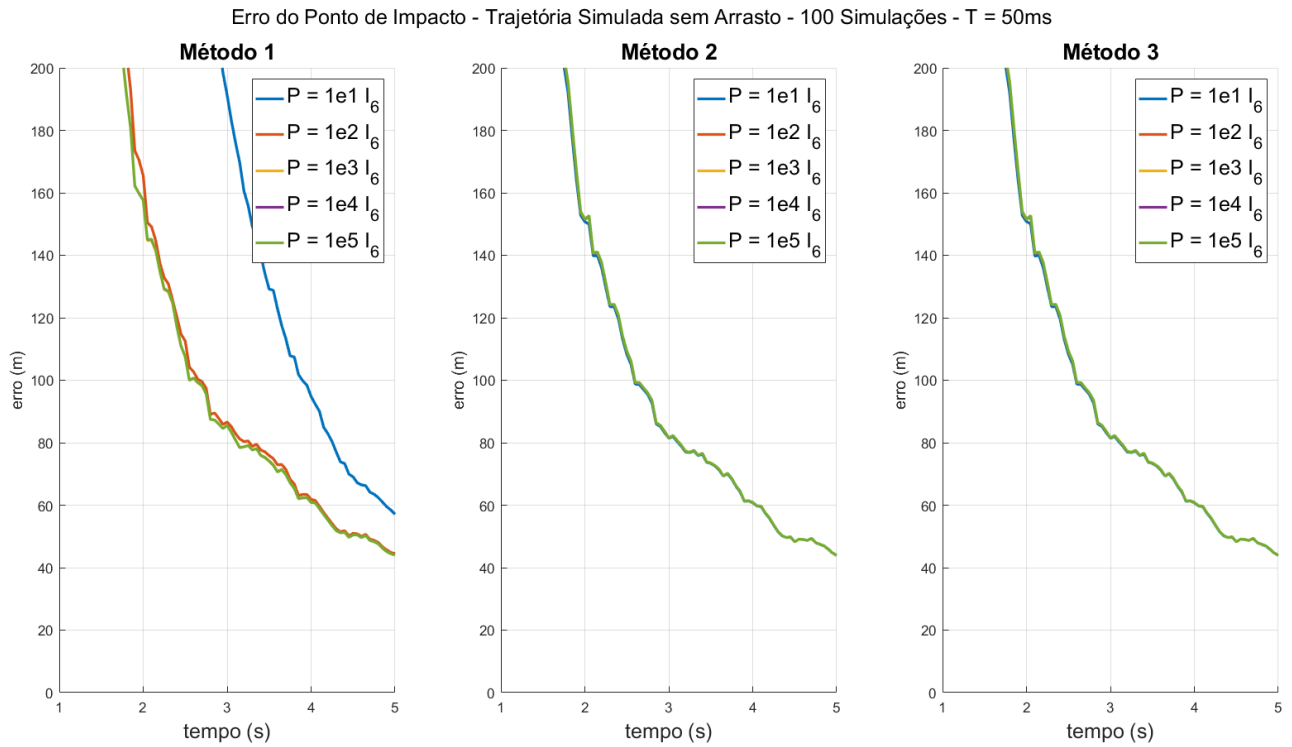


Figura 9 – Erro do ponto de impacto na comparação da matriz covariância inicial.

Semelhante a análise do erro do ponto de disparo, na Figura 9 se destaca apenas para o método 1 e para o primeiro valor escolhido para \mathbf{P} , portanto foi escolhido para o valor ideal de covariância inicial a matriz $\mathbf{P} = 10^7 \mathbf{I}$ por se tratar de um valor suficientemente grande para assegurar um bom desempenho.

É notória também a diferença média entre os erros dos pontos de disparo e impacto em todos os métodos. Tal fato se deve por conta da distância do projétil ser maior até o ponto de impacto do que a distância até o ponto de disparo, considerando que a detecção do projétil teve início na primeira metade da trajetória após decorridos 10 s do disparo.

4.1.2 Obtenção do Período de Amostragem

Já escolhido o valor da matriz de covariância inicial \mathbf{P} , partiremos para a análise do período de amostragem ideal para o projeto. Observa-se para este trabalho que não conhecemos o período de amostragem do radar a ser utilizado em uma situação real de campo.

A fins comparativos, foram utilizados períodos de amostragem de 5 ms, 10 ms, 15 ms e 20 ms. É possível observar na Figura 10 um desempenho ótimo para o período de amostragem de 5 ms para todos os três métodos apresentados.

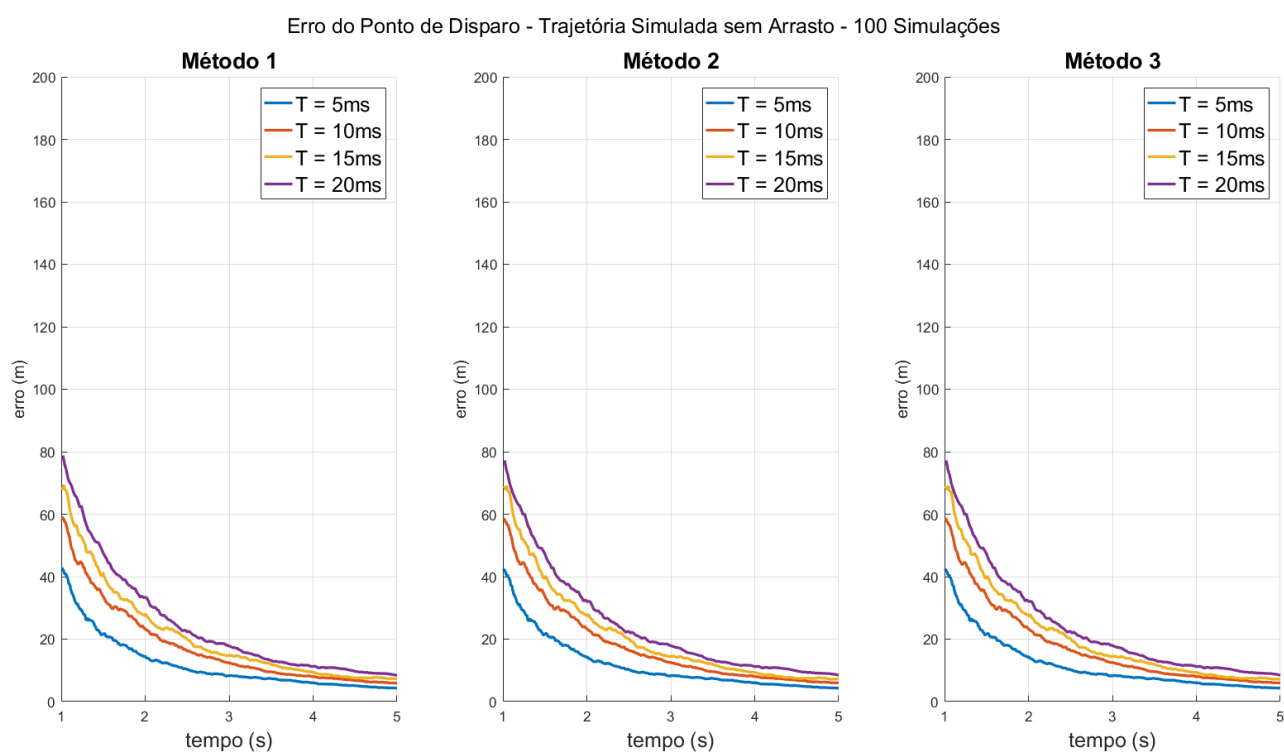


Figura 10 – Erro do ponto de disparo na comparação do período de amostragem

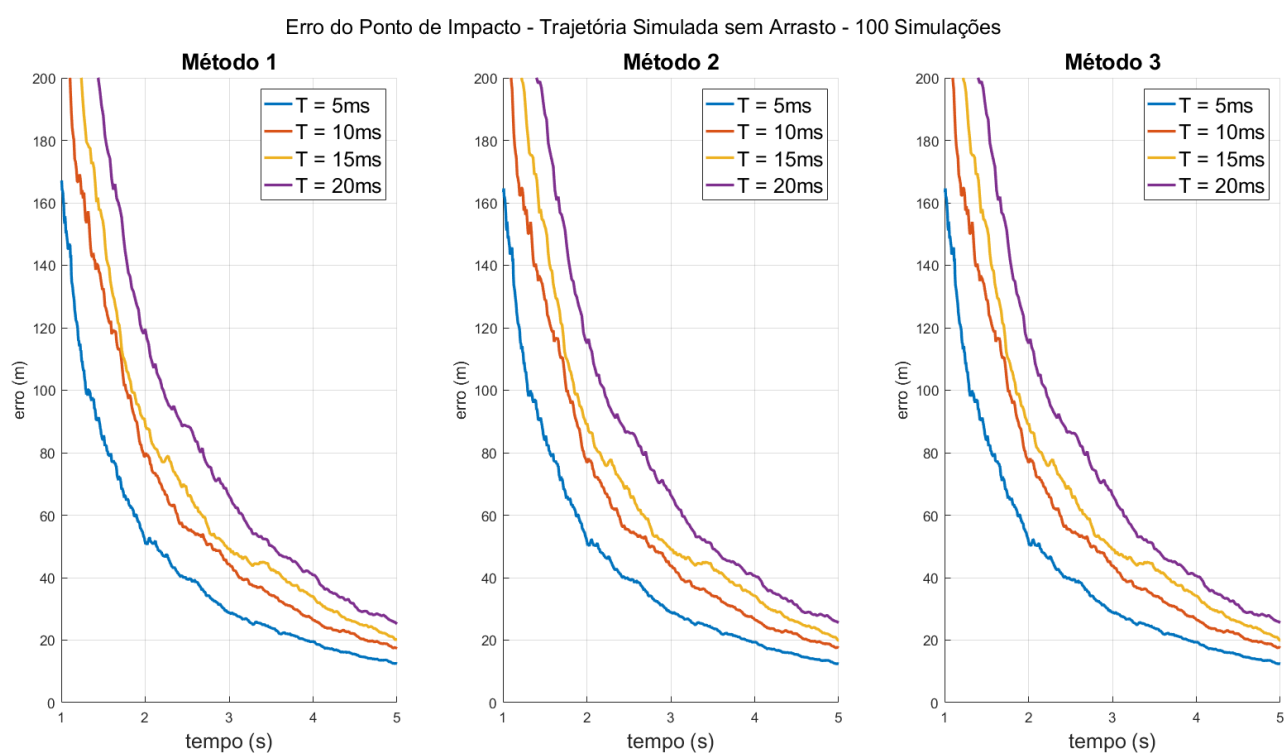


Figura 11 – Erro do ponto de impacto na comparação do período de amostragem

Semelhante a diferença observada entre as ordens de grandeza dos erros dos pontos de impacto e disparo nas Figuras 8 e 9, o mesmo comportamento se propaga para a análise do período de amostragem nas Figuras 10 e 11, pois são levadas em conta as mesmas considerações do ponto da trajetória a qual foi utilizada para a análise. Dado os resultados apresentados, o período de amostragem ótimo para prosseguir com as análises do filtro de Kalman sem levar em conta o arrasto é $T = 5 \text{ ms}$.

4.1.3 Comparação das Localidades da Medida

Nas análises prévias foi levado em conta que a medição foi iniciada na primeira metade do movimento; logo, o erro para o ponto de impacto é sempre maior do que o erro do ponto de disparo, pela maior proximidade da medição. Para confirmar a veracidade de tal observação foram feitos testes na segunda metade da trajetória após decorridos 40 s do início do disparo. A Figura 12 representa o trecho medido.

Os gráficos das Figuras 13 e 14 a seguir representam a medição na segunda parte de sua trajetória, simulando, por exemplo, um projétil que surge por detrás de uma montanha, não sendo possível fazer uma detecção prévia do mesmo.

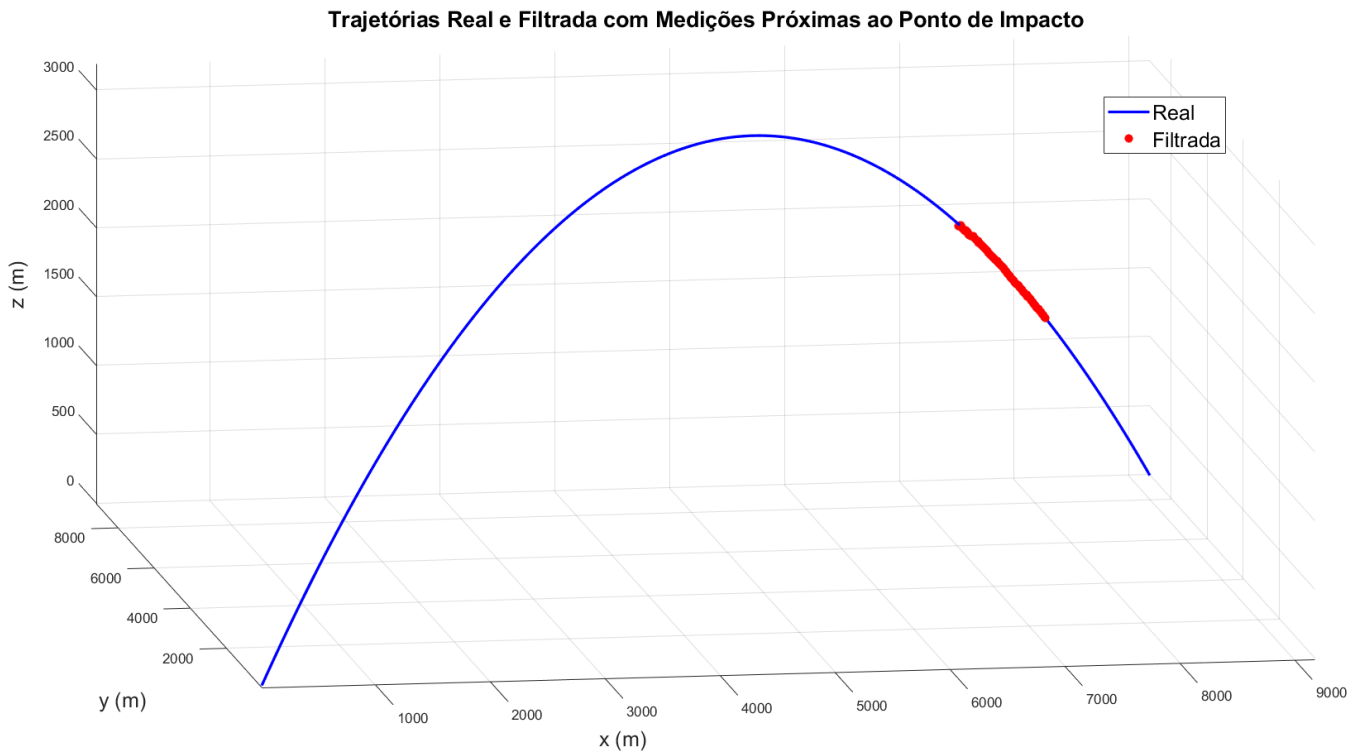


Figura 12 – Trajetória real e filtrada do projétil com medições próximas ao ponto de impacto.

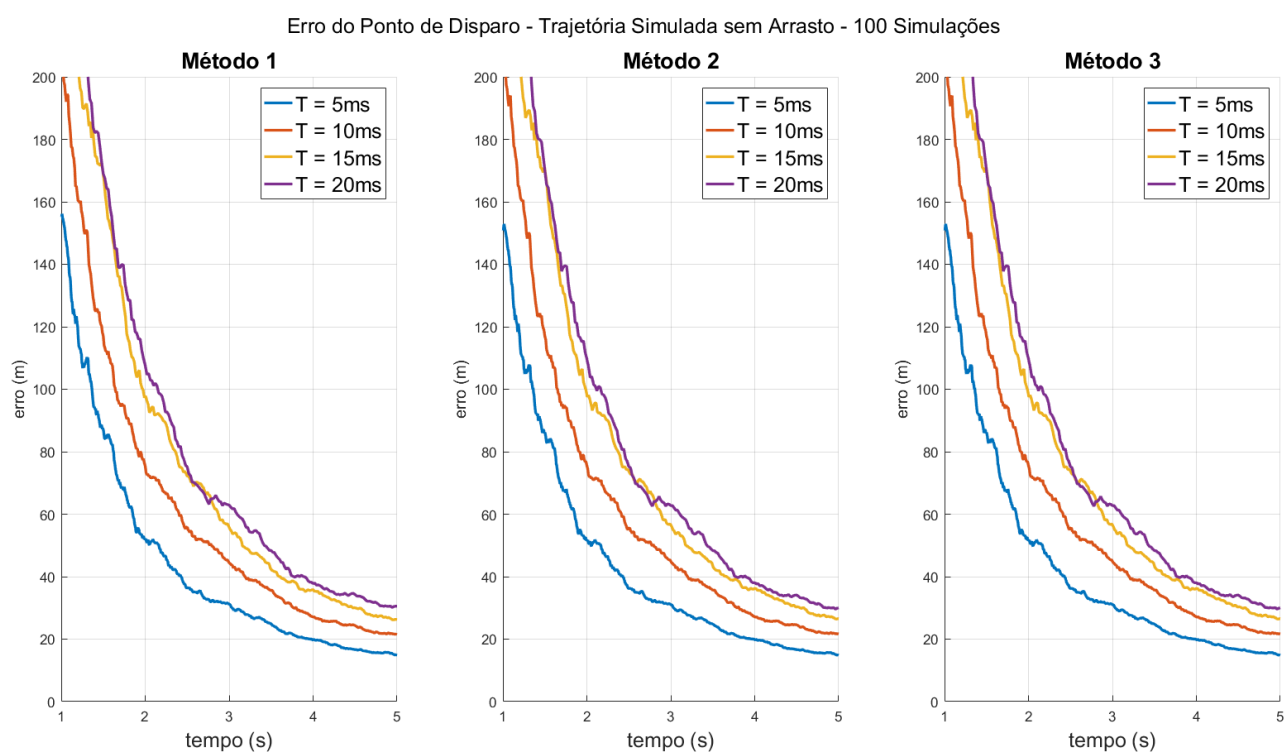


Figura 13 – Erro do ponto de disparo com medições próximas ao ponto de impacto.

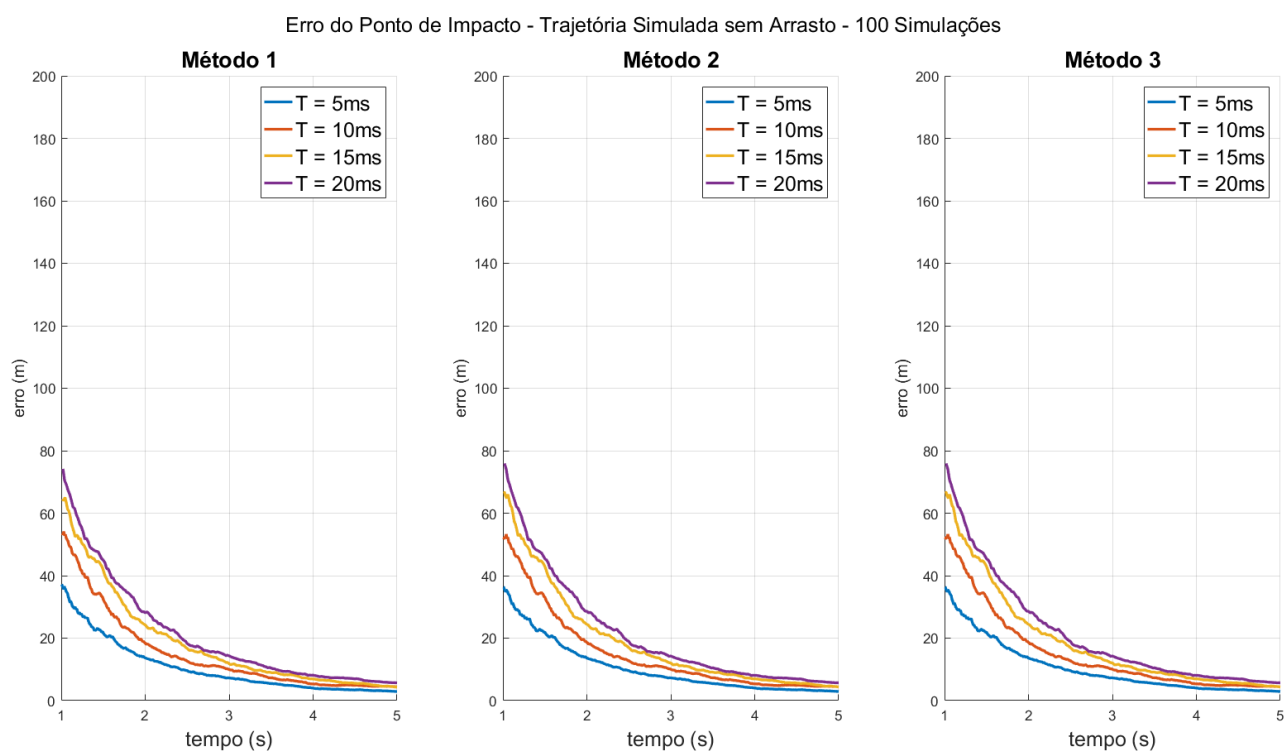


Figura 14 – Erro do ponto de impacto com medições próximas ao ponto de impacto.

Observa-se, como comportamento esperado, uma inversão entre os gráficos dos erros dos pontos de impacto e de disparo. O gráfico do erro do ponto de impacto se comporta como o gráfico anterior visto para o erro do ponto de disparo e o gráfico do erro do ponto de disparo se comporta de maneira semelhante ao erro do ponto de impacto anteriormente observado para outra parte da trajetória.

4.2 Interpolação

Para uma última análise aplicando o filtro de Kalman linear, foi feita a interpolação dos pontos para atestar a necessidade de uma redução no período de amostragem. A Figura 15 representa como é feita a interpolação para o eixo z, sendo que a cada dois pontos verdes (pontos medidos) e um ponto vermelho (ponto estimado na mesma iteração), é feita a interpolação parabólica. Para os eixos x e y, é feita a interpolação de forma linear.

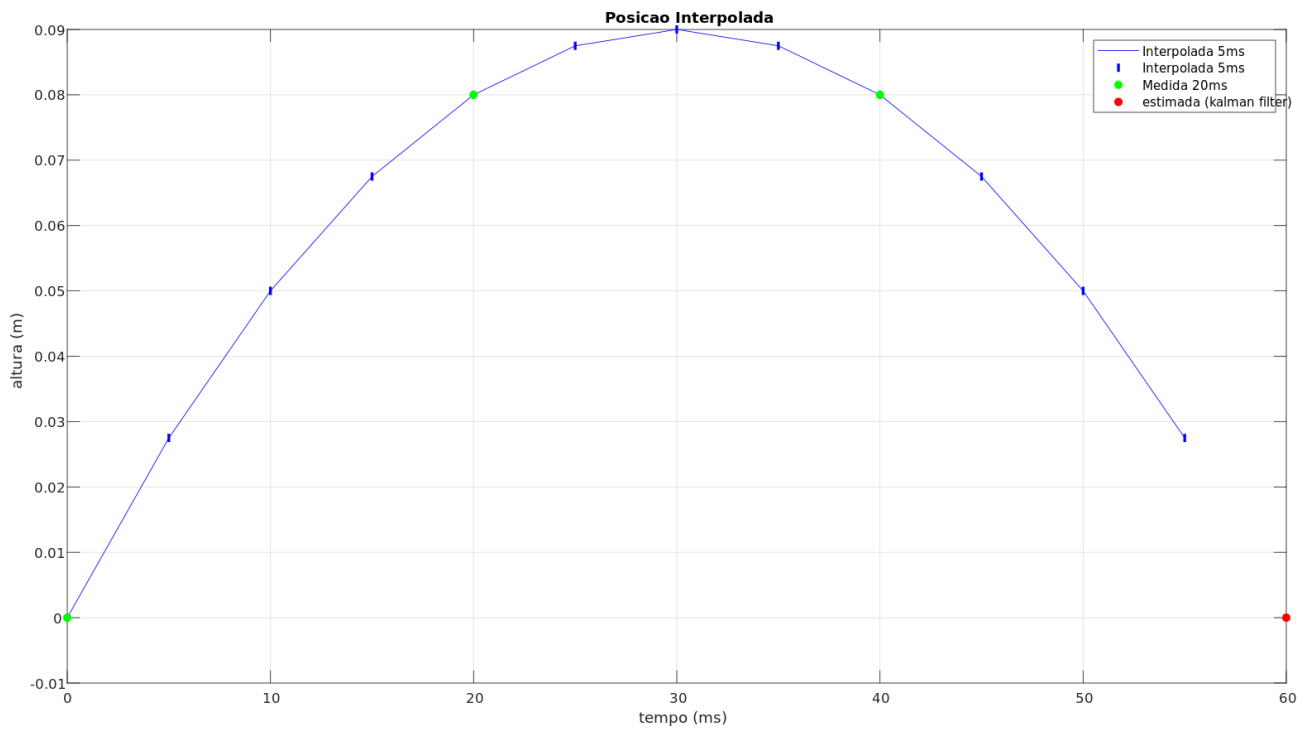


Figura 15 – Interpolação quadrática no eixo z.

As Figuras 16 e 17 a seguir se referem a uma análise inicial realizada utilizando a curva amostrada com períodos de amostragem de 5 ms, 10 ms e 15 ms e a mesma curva interpolada com a redução do período de amostragem para 5 ms utilizando o método 1.

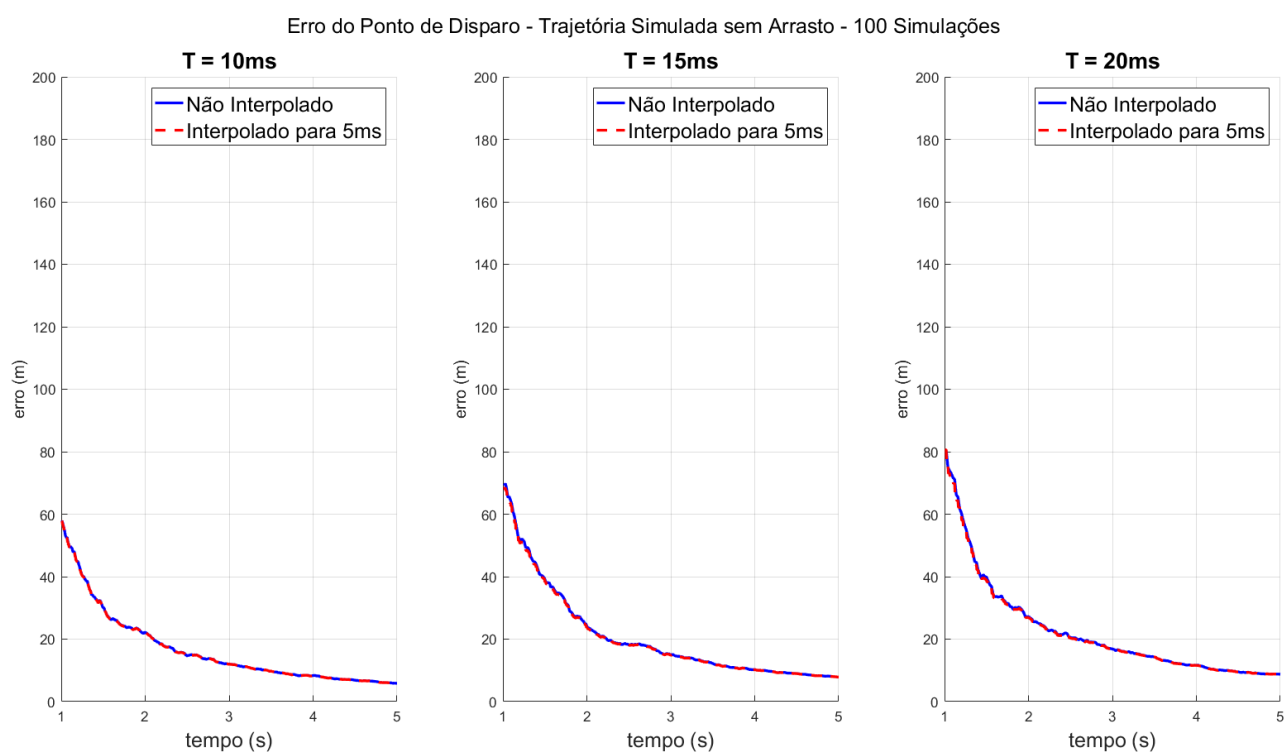


Figura 16 – Erro do ponto de disparo na comparação da interpolação

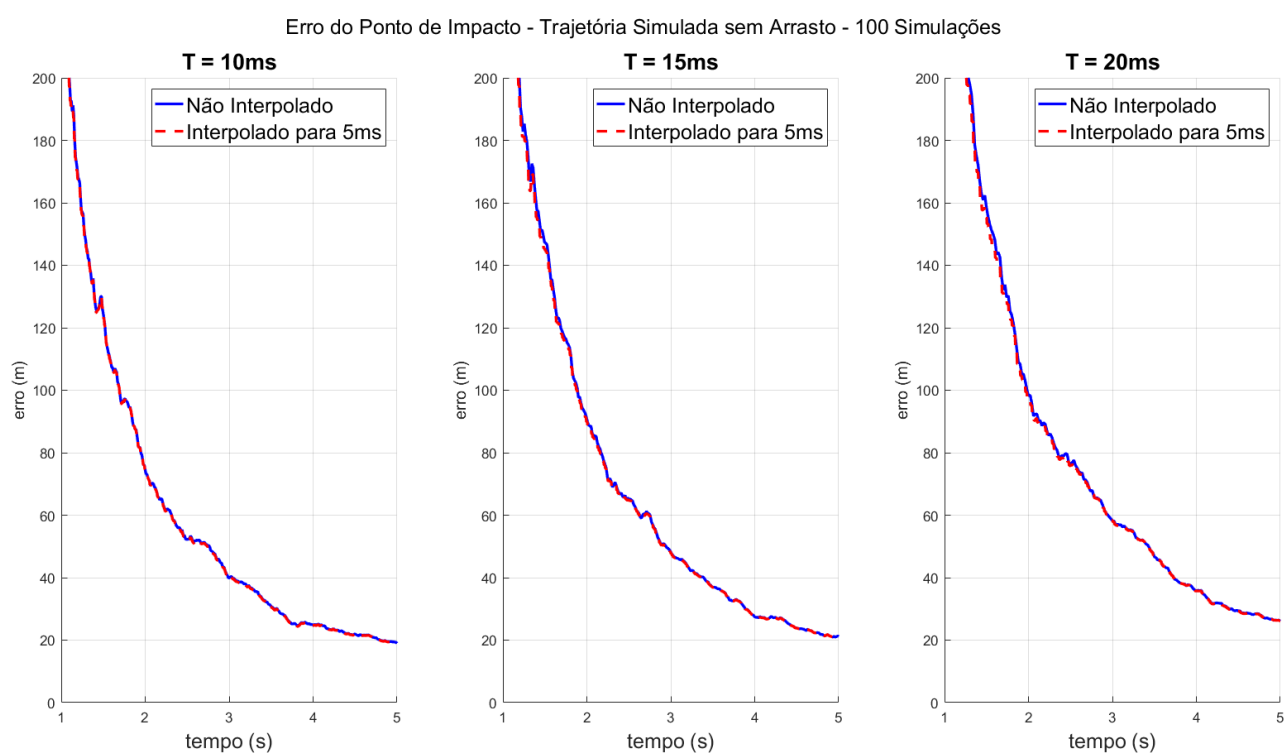


Figura 17 – Erro do ponto de impacto na comparação da interpolação

As curvas se mostraram próximas umas das outras, principalmente para o próprio caso de 5 ms , o que já era esperado. Para as outras duas curvas, o erro interpolado apresenta melhora em relação a curva original, porém o ganho não é considerado relevante frente ao maior gasto computacional.

Observando tanto para o erro do ponto de impacto quanto para o erro do ponto de disparo, nota-se que as curvas interpoladas com períodos de amostragem maiores apresentam melhorias em relação a própria curva não interpolada de 5 ms , ou seja, não é um método eficiente para dar continuidade no projeto.

Como conclusões parciais para esta análise em condições ideais, pode-se observar a grande semelhança entre os métodos. Sendo assim recomenda-se a utilização do método 1 por apresentar menor custo computacional. Além disso, independente do método, o desempenho melhora quanto menor o período de amostragem.

4.3 Análise Utilizando EKF

Como último objeto de estudo do projeto, será feita a análise da aplicação do filtro de Kalman estendido decorrente da necessidade da modelagem não linear do sistema balístico. A diferença entre os modelos se deve à consideração do parâmetro de arrasto como o sétimo estado da matriz de espaço de estados discreta. A Figura 18 representa comparativamente uma trajetória ideal sem arrasto e outra considerando a força de arrasto.

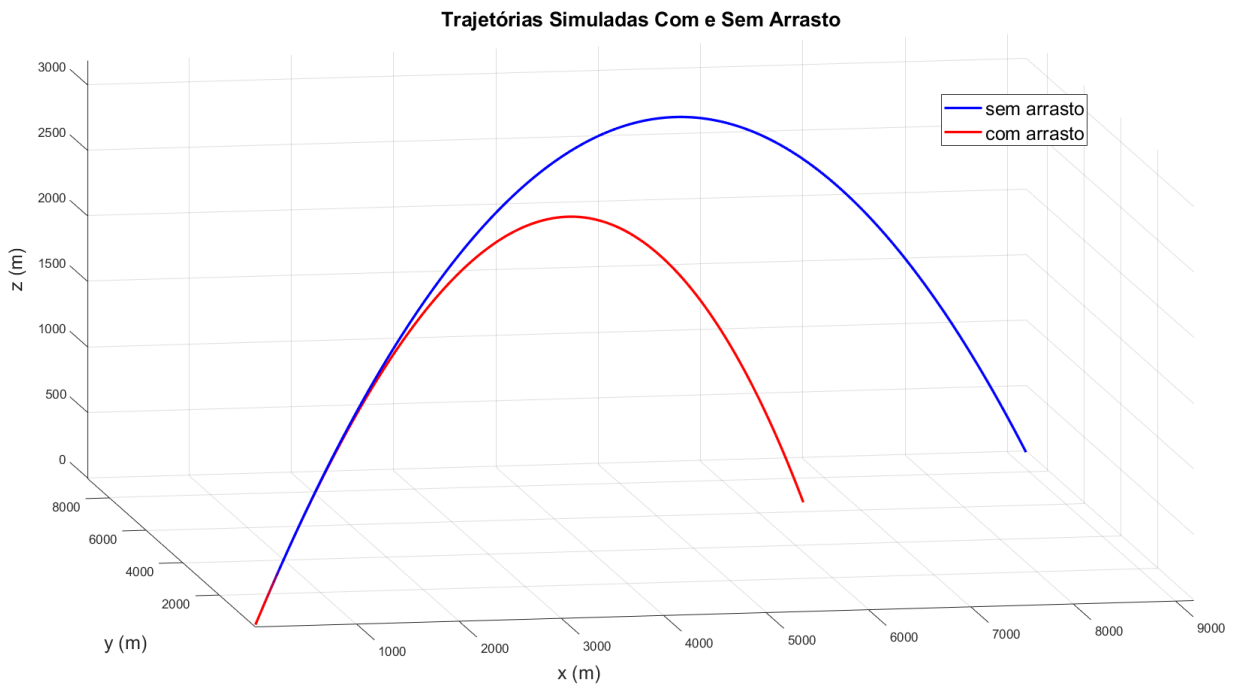


Figura 18 – Comparação entre trajetórias simuladas com e sem a força de arrasto.

4.3.1 Comparação dos Modelos

Para uma análise inicial, será feita a comparação do novo modelo utilizando o parâmetro γ com valor zero para se aproximar do caso ideal antes discutido com o filtro de Kalman. Esta comparação presente na Figura 19 tem como propósito atestar a validade do modelo matemático aproximado decorrente da linearização do modelo de arrasto. É importante ressaltar que o período de amostragem utilizado para estas análises foi de 50 ms , pois foi observado que para sistemas reais o período de amostragem é um fator limitante e se assemelha mais com o agora escolhido (19).

Se utilizando apenas do método 1 e para um período de amostragem de 50 ms , observa-se grande semelhança entre as curvas obtidas, com inclusive uma melhora utilizando o EKF. Portanto considera-se válida tanto a teoria quanto a implementação do novo modelo. Para prosseguir, será feita uma comparação nas Figuras 20 e 21 considerando o parâmetro de arrasto $\gamma \neq 0$ acertando o da curva, para os dois modelos de filtro de Kalman estudados, utilizando a variância inicial do parâmetro de arrasto como zero ($\mathbf{P}(7, 7)$).

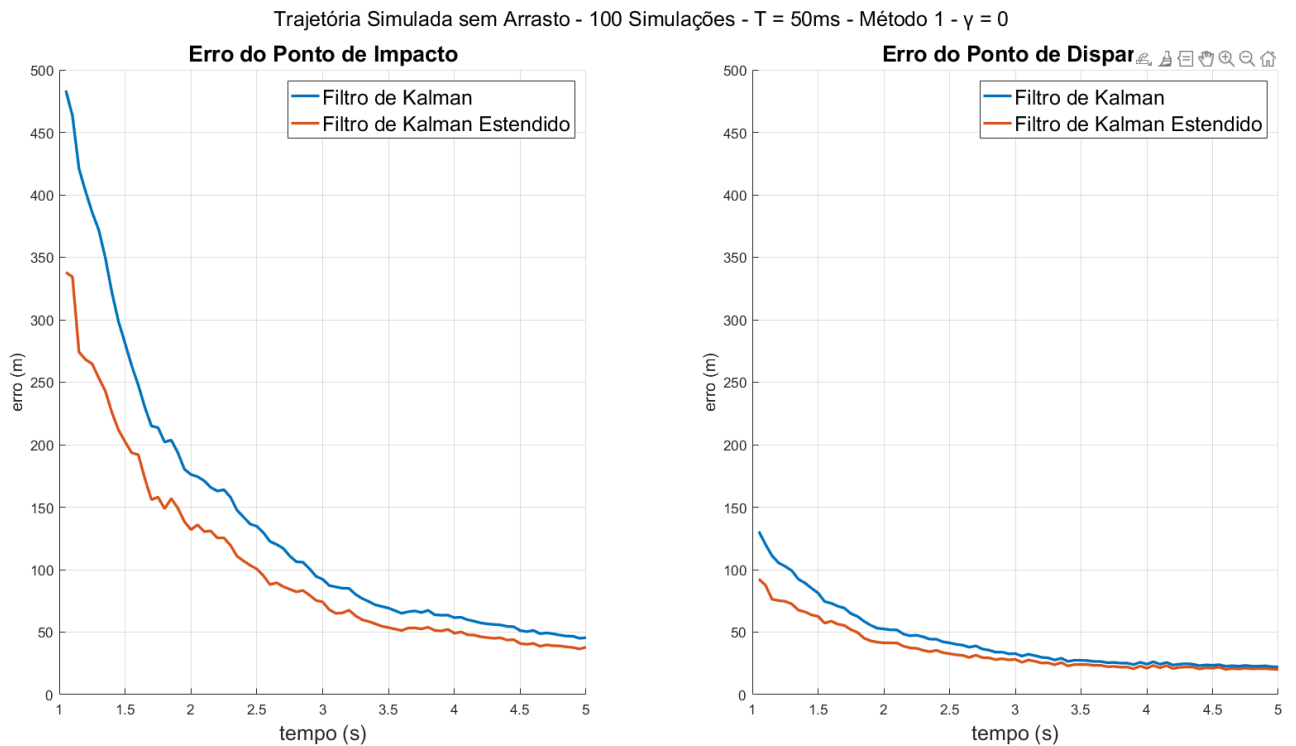


Figura 19 – Comparação dos modelos com $\gamma = 0$

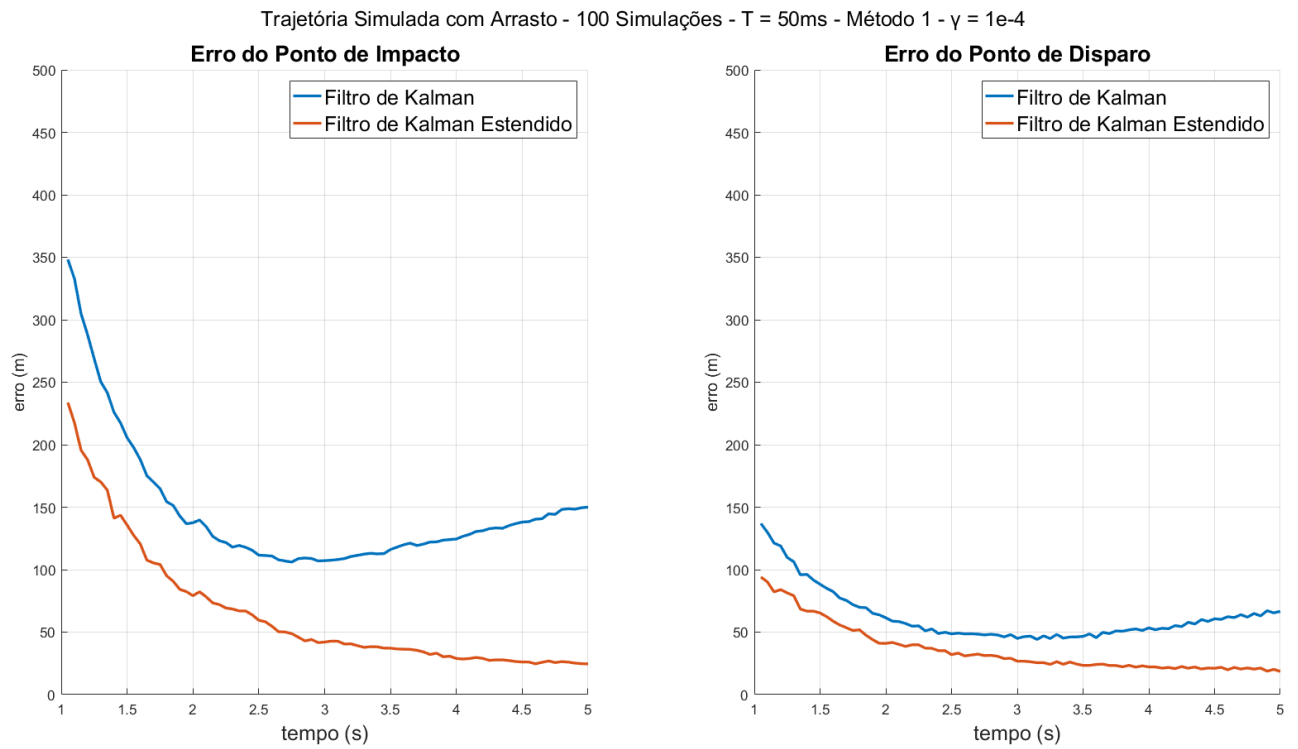


Figura 20 – Comparação dos modelos com $\gamma = 10^{-4}$

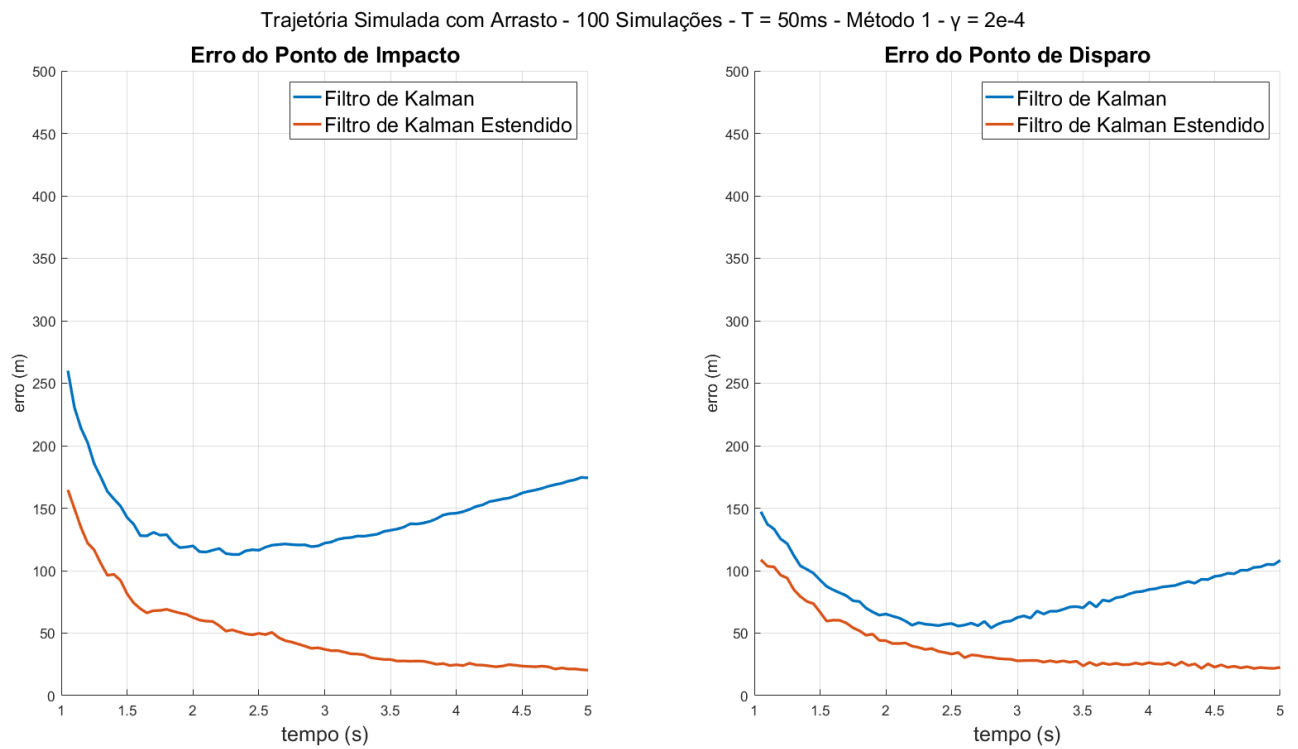


Figura 21 – Comparação dos modelos com $\gamma = 2 \times 10^{-4}$

Observa-se que, ao utilizar um valor não nulo para o parâmetro de arrasto, inicializado igual ao da curva simulada, o modelo do KF simples apresenta divergência em relação à curva que considera a força de arrasto. Isso comprova a necessidade fundamental de utilizar o EKF no projeto.

4.3.2 Escolha da Variância do Parâmetro de Arrasto

Os valores escolhidos anteriormente para o valor do parâmetro de arrasto foram escolhidos como idênticos ao valor trajetória real, porém foi feita uma análise considerando uma tolerância relativa ao valor de γ da própria curva simulada, para poder realizar uma escolha mais adequada de sua variância. As Figuras 22 e 23 a seguir representam um erro de 50% relativo ao valor real do parâmetro de arrasto da curva. Considerando que os métodos 2 e 3 acontecem após um certo tempo após iniciados como método 1, nota-se também que nos gráficos, $P(7, 7)$ representa o último termo da matriz de covariância inicial P que se refere a variância do parâmetro de arrasto.

Quanto maior a variância do parâmetro de arrasto, mais se depende das medições, portanto inicialmente pode-se descartar o valor de 10^{-8} . Comparando os outros valores se referindo ao erro do ponto de disparo, observa-se uma semelhança para os outros valores estudados, com exceção da leve diferença de resultado negativo para 10^{-9} . Já para o erro do ponto de impacto, para o método 1, o valor ótimo se mostra como 10^{-10} , pois neste

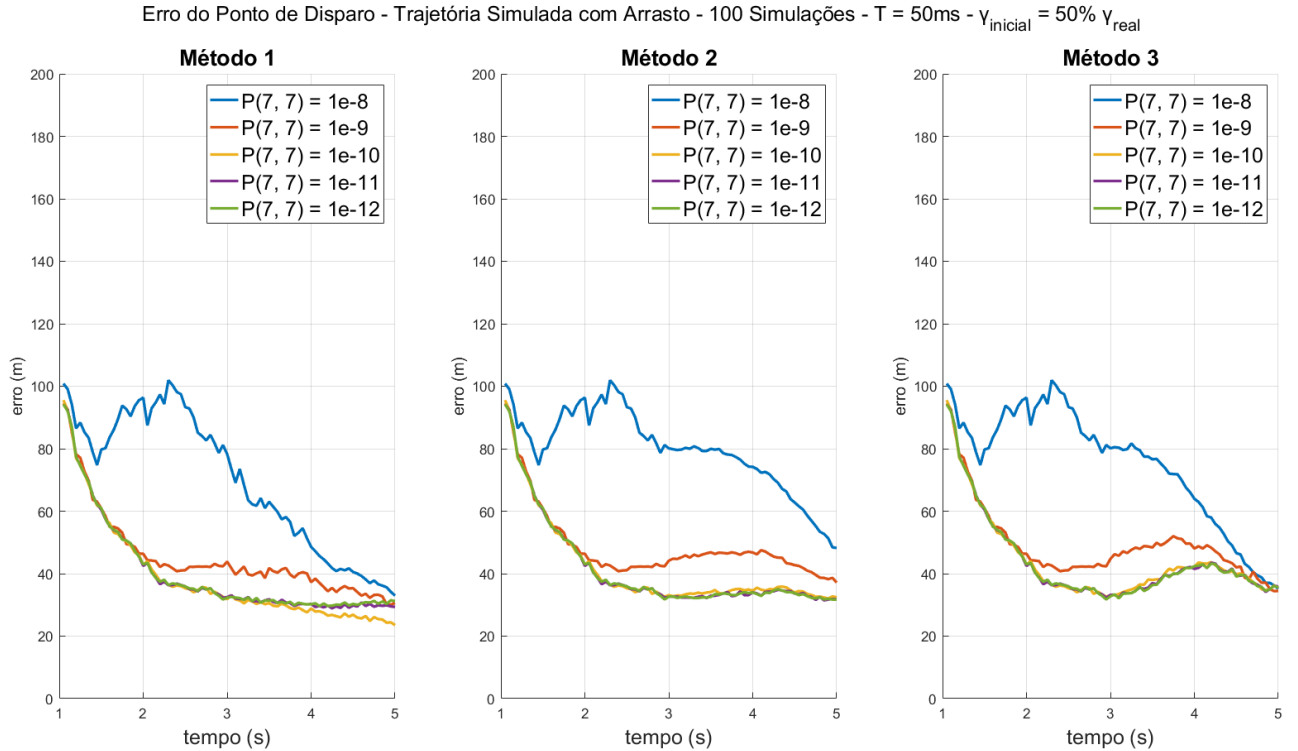


Figura 22 – Erro do ponto de disparo com erro do γ inicial de -50%

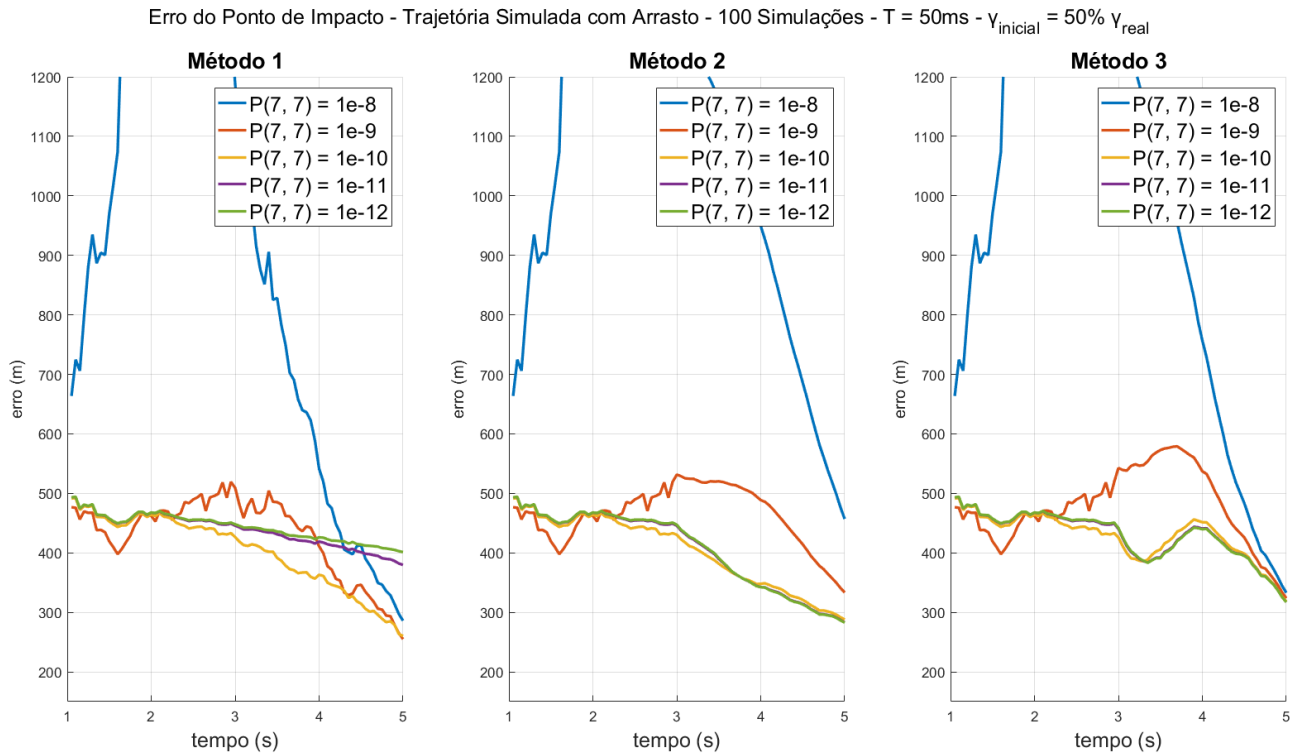
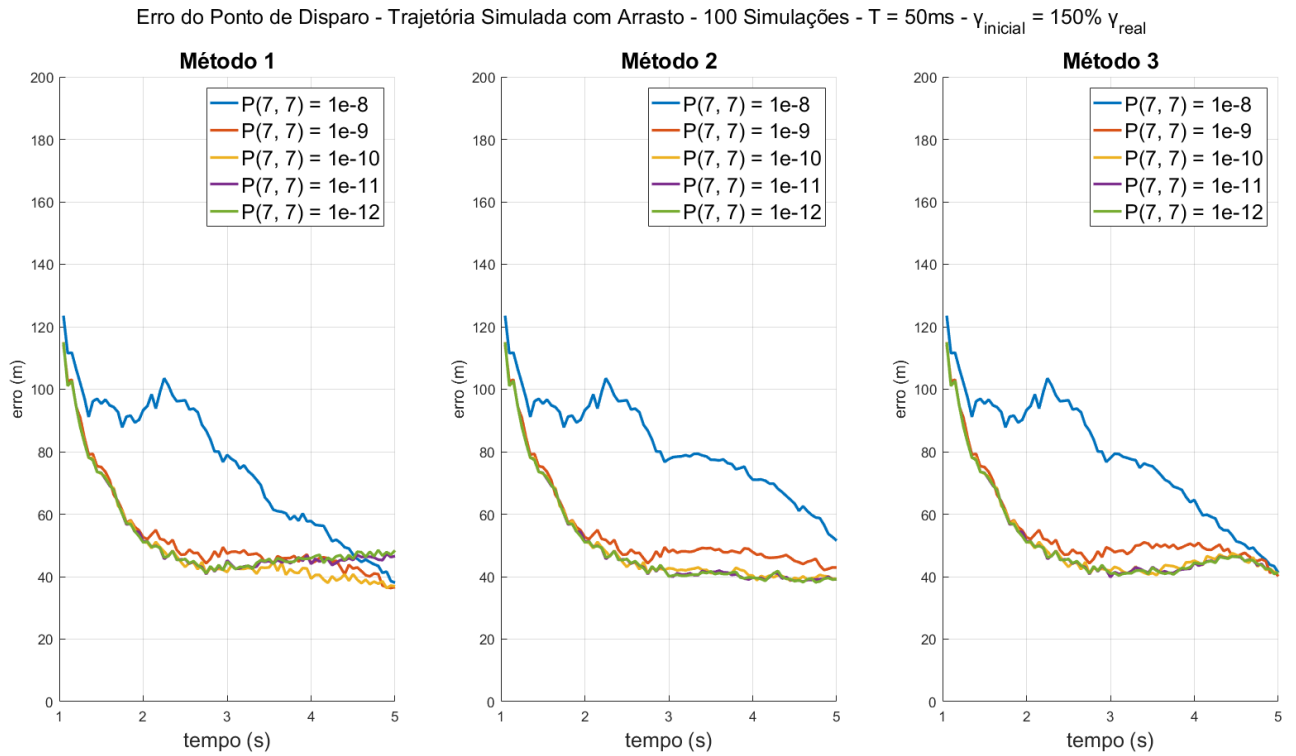
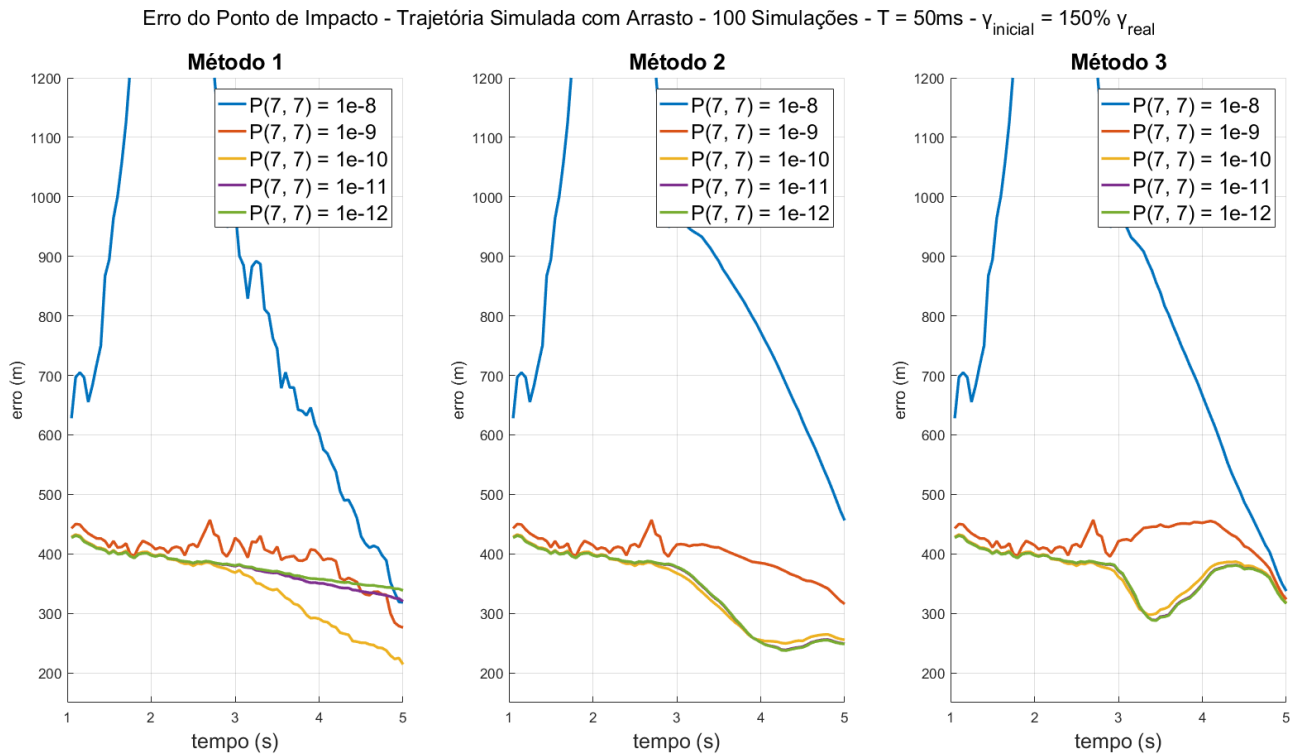


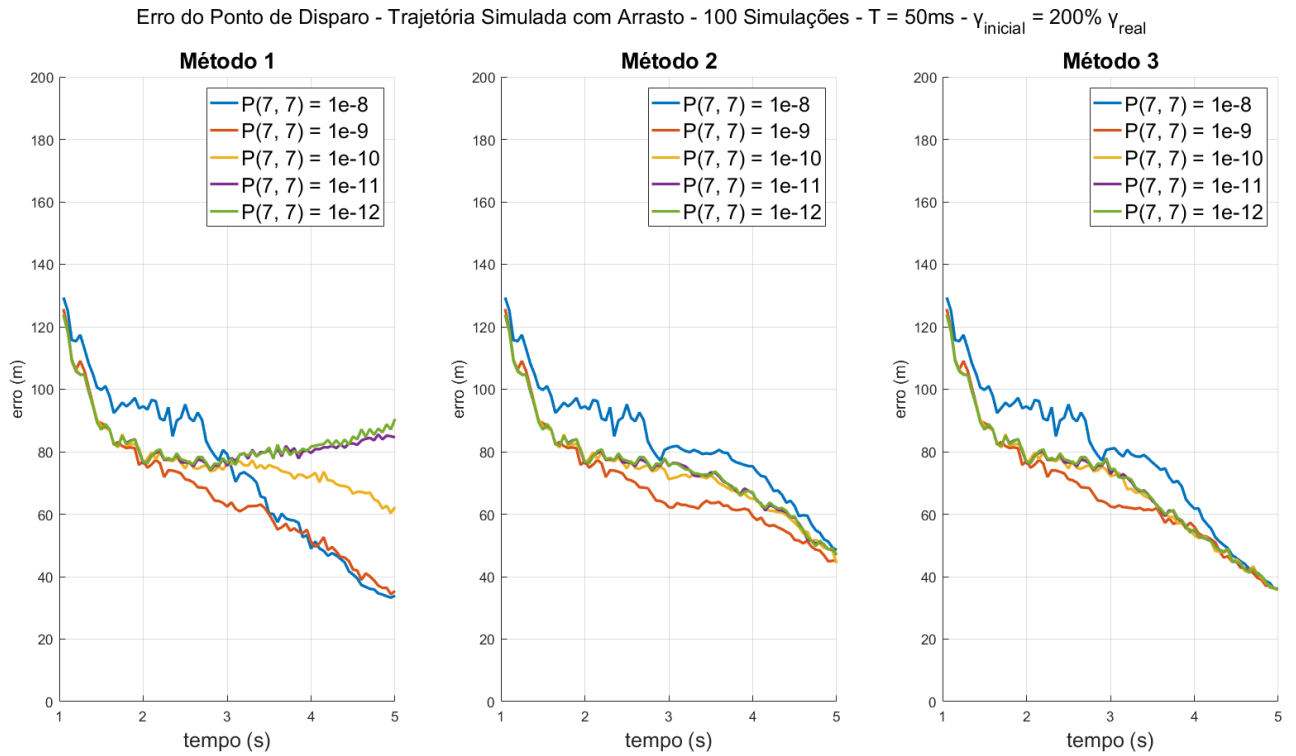
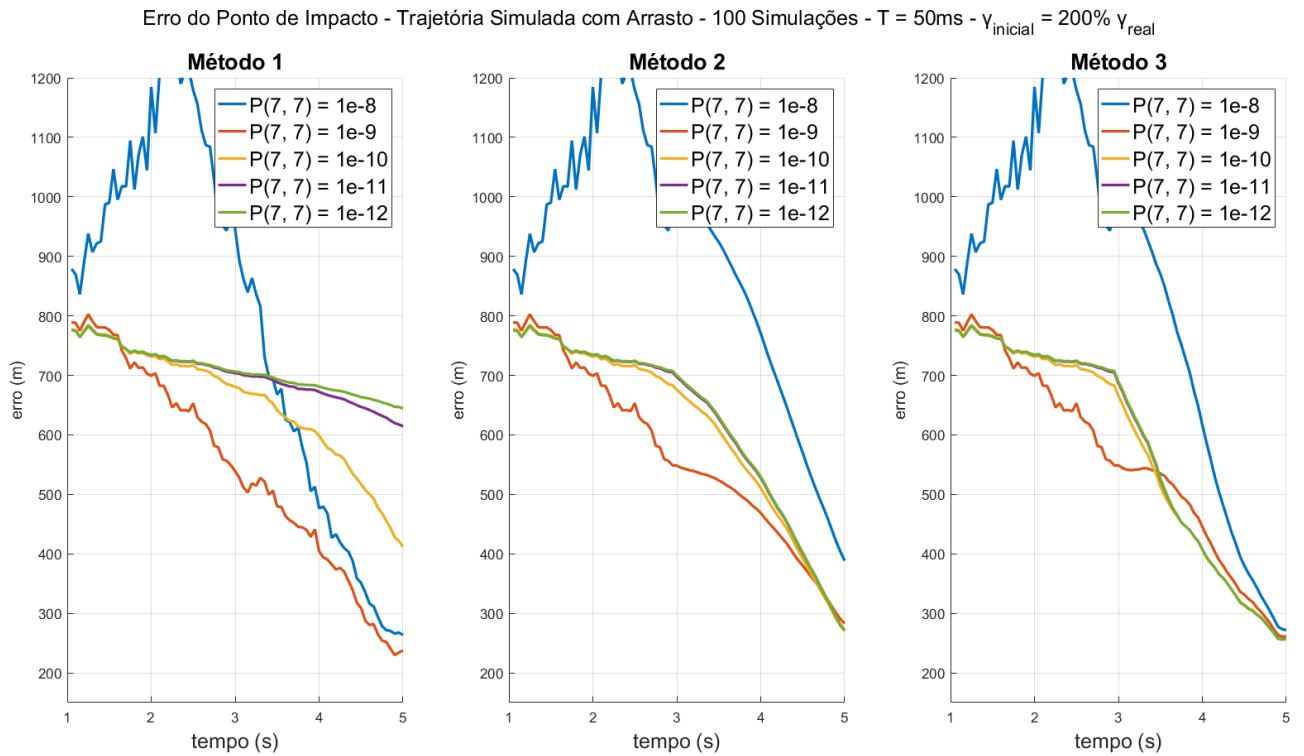
Figura 23 – Erro do ponto de impacto com erro do γ inicial de -50%

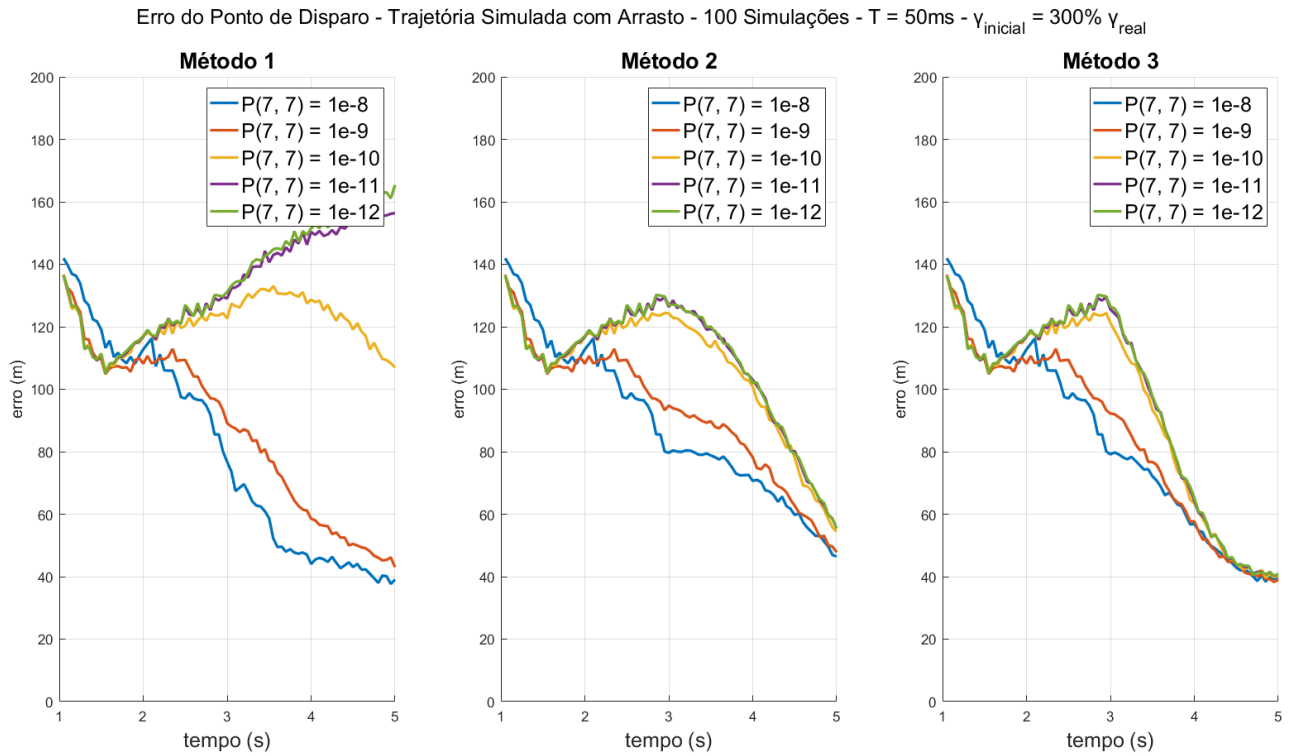
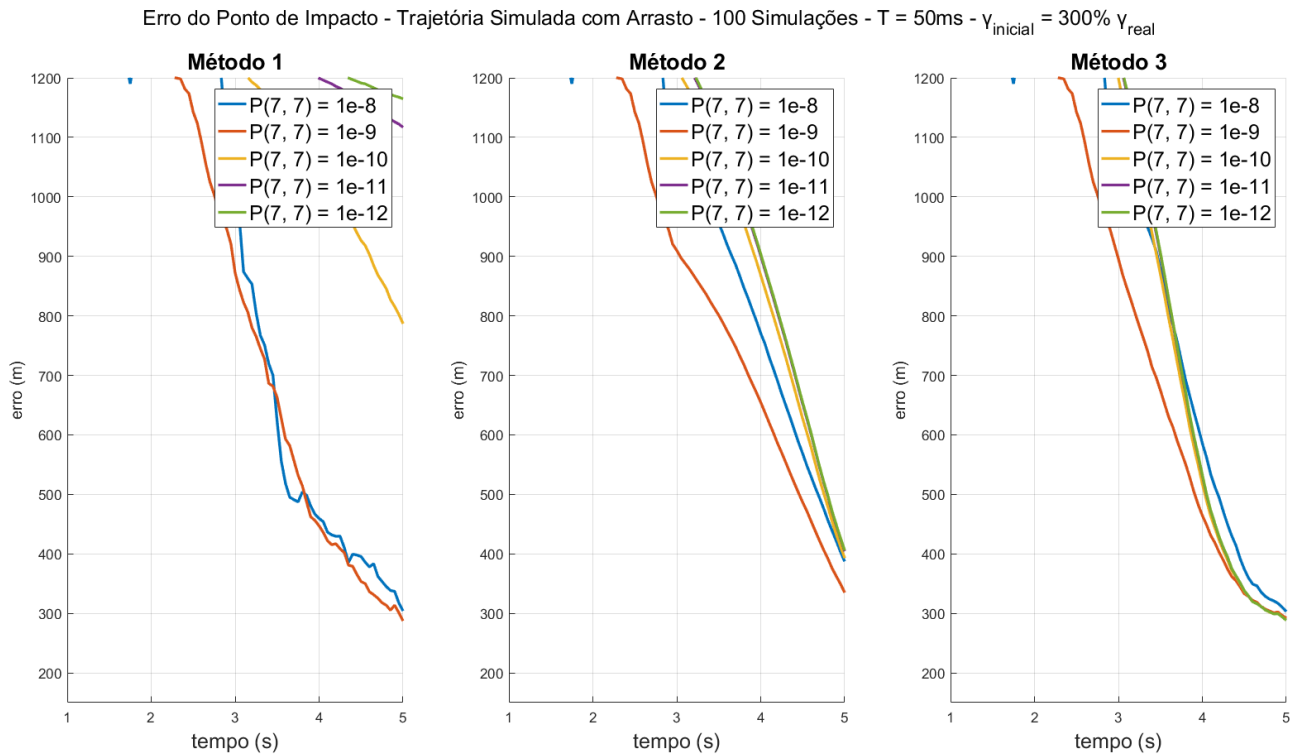
caso as medidas mostraram um desempenho positivo no resultado. Para os demais casos o comportamento se mostra semelhante exceto para a curva em laranja (10^{-10}) semelhante ao erro do ponto de disparo.

Como um todo, os comportamentos ilustrados pelas Figuras 24 e 25 se apresentam de modo semelhante em relação as Figuras 22 e 23, exceto para os valores de 10^{-11} e 10^{-12} , pois se afastam demais das medidas apenas para o método 1, considerando os erros dos pontos de disparo e impacto.

Analisando um erro de 100% nas Figuras 26 e 27 para o método 1, o erro do ponto de disparo, os valores mais adequados são de 10^{-8} e 10^{-9} , revelando uma maior dependência das medidas para este caso. Para os métodos 2 e 3 as curvas se assemelham porém se destacam positivamente os valores já mencionados. Já para o erro do ponto de impacto, apesar do erro diminuir mais rapidamente em 5 s para os valores já mencionados, observa-se uma semelhança para o valor de 10^{-9} em relação a todas as outras curvas para todos os métodos.

Figura 24 – Erro do ponto de disparo com erro do γ inicial de +50%Figura 25 – Erro do ponto de impacto com erro do γ inicial de +50%

Figura 26 – Erro do ponto de disparo com erro do γ inicial de +100%Figura 27 – Erro do ponto de impacto com erro do γ inicial de +100%

Figura 28 – Erro do ponto de disparo com erro do γ inicial de +200%Figura 29 – Erro do ponto de impacto com erro do γ inicial de +200%

Por fim, foi feita a comparação nas Figuras 28 e 29 para um erro de 200% para o valor da variância do parâmetro de arrasto. A conclusão deste caso para ambos os métodos, tanto para o impacto quanto para o disparo, é que quanto maior o erro relativo do valor real de γ , mais o modelo apresenta dependência das medidas para fazer uma estimação considerada aceitável, portanto ao escolher valores mais elevados da variância inicial do parâmetro de arrasto, mais adequado se torna para o projeto.

Portanto, esta análise final do projeto para o emprego do EKF revela uma grande sensibilidade do modelo relativa ao parâmetro de arrasto, que uma vez se aproximando inicialmente do valor real, não depende essencialmente das medidas, e quanto mais discrepante do valor real, mais dependente se torna das medidas, para obter um valor aceitável de erro esperado para o projeto.

5 CONCLUSÃO

A implementação do Filtro de Kalman Estendido (EKF) para prever o ponto de disparo e impacto de uma trajetória balística, considerando a força de arrasto, se mostrou uma solução eficaz e robusta. O uso do EKF permitiu lidar com a natureza não linear da trajetória balística, ajustando as estimativas e previsões, mesmo em condições adversas. A capacidade de incorporar a força de arrasto como uma variável indispensável nos cálculos, junto à capacidade do EKF em lidar com incertezas e ruídos do sistema, foi essencial para aprimorar a precisão das previsões.

Durante o projeto, o desafio principal consistiu na modelagem precisa das dinâmicas do projétil sob a influência do arrasto aerodinâmico. O EKF foi fundamental para refinar os modelos de espaço de estados, usando séries de Taylor para aproximar as não linearidades envolvidas. A integração desses fatores contribuiu para que o filtro ajustasse de maneira eficiente as previsões de trajetória, permitindo a correta estimativa tanto do ponto de disparo quanto do ponto de impacto em diversas situações ou com dados ruidosos.

Como conclusão, também se pode destacar a importância da escolha do tempo de amostragem no desempenho do rastreamento de alvos. Menores tempos de amostragem reduzem os erros de predição de ponto de impacto e estimação do ponto de lançamento da trajetória, pois intervalos de observação menores permitem uma captura mais precisa das variações da trajetória. Entretanto, o uso de interpolação para aumentar artificialmente a taxa de amostragem não traz os mesmos benefícios, sendo incapaz de mitigar os erros de predição de maneira eficiente. Além disso, observou-se que o valor inicial atribuído à variância dos estados de posição e velocidade pode ser significativamente maior do que o esperado, pois o modelo corrige rapidamente essas discrepâncias. O mesmo não se aplica à variância inicial associada ao parâmetro γ , que afeta diretamente a rapidez e a precisão com que a estimativa de γ é atualizada ao longo do processo de filtragem.

Recomenda-se o método 2 para a maioria das situações, pois apresenta um desempenho superior em termos de precisão e custo computacional, em comparação com o método 3, que, apesar de mais preciso, é significativamente mais oneroso. Para trabalhos futuros, uma área promissora seria a investigação de técnicas que possam melhorar a estimativa de γ ao longo do processo de filtragem, possivelmente incluindo a integração de cartas de terreno e parâmetros ambientais, como a velocidade do vento, para aumentar ainda mais a acurácia do sistema de rastreamento.

Para pesquisas futuras, sugere-se a inclusão da velocidade do vento no modelo para capturar melhor os fatores externos que influenciam a trajetória. Além disso, a implementação de uma carta de terreno permitiria considerar as características geográficas do ambiente, tornando o modelo mais realista. Outro ponto relevante seria a investigação da relação entre o valor inicial de γ e sua variância inicial, para verificar se há uma combinação que otimize o desempenho do EKF e, caso exista, determinar qual seria essa relação ideal.

Por fim, este trabalho visa atender às expectativas do Centro Tecnológico do Exército (CTEx), oferecendo uma ferramenta avançada e eficaz para prever trajetórias balísticas. A aplicação prática do EKF, com a inclusão de variáveis críticas como a força de arrasto, abre caminho para futuros aprimoramentos no campo de sistemas de defesa e balística. A solução proposta demonstra o potencial da combinação de métodos avançados de filtragem com modelagem física para resolver problemas de grande complexidade.

REFERÊNCIAS

- 1 BAR-SHALOM, Y.; LI, X. R.; KIRUBARAJAN, T. *Estimation with applications to tracking and navigation: theory algorithms and software*. [S.l.]: John Wiley & Sons, 2004.
- 2 CAMP, W. W.; MAYHAN, J. T.; O'DONNELL, R. M. Wideband radar for ballistic missile defense and range-doppler imaging of satellites. *Lincoln Laboratory Journal*, v. 12, n. 2, p. 267–280, 2000.
- 3 KALMAN, R. E. *A New Approach to Linear Filtering and Prediction Problems*. [S.l.]: Transaction of the ASME – Journal of Basic Engineering, 1960. v. 82. 35–45 p.
- 4 MARCIANO, P. C. R. Estimação de trajetória balística em radares de contrabateria baseada em filtro de Kalman e máxima verossimilhança. *Dissertação (mestrado em engenharia de defesa) – Instituto Militar de Engenharia*, p. 134, 2024.
- 5 WELCH, G.; BISHOP, G. et al. *An introduction to the Kalman filter*. Chapel Hill, NC, USA, 1995.
- 6 MAHAFZA, B. R. *Introduction to radar analysis*. [S.l.]: Chapman and Hall/CRC, 2017.
- 7 United States Department of the Army. *ATP 3-09.12 Field Artillery Counterfire and Weapons Locating*. [S.l.], 2015. Disponível em: <https://rdl.train.army.mil/catalog-ws/view/100.ATSC/51B8A46D-420A-4B3E-B985-755AFCAC8BCF-1437768868846/atp3_09x12.pdf>.
- 8 SKOLNIK, M. I. *Radar Handbook, Third Edition*. [S.l.: s.n.], 2008. 1328 p.
- 9 MCCOY, R. *Modern exterior ballistics: The launch and flight dynamics of symmetric projectiles*. [S.l.]: Schiffer Pub., 1999.
- 10 BAR-SHALOM, Y.; FORTMANN, T. E.; CABLE, P. G. *Tracking and data association*. [S.l.]: Acoustical Society of America, 1990.
- 11 FARINA, A.; RISTIC, B.; BENVENUTI, D. Tracking a ballistic target: comparison of several nonlinear filters. *IEEE Transactions on aerospace and electronic systems*, IEEE, v. 38, n. 3, p. 854–867, 2002.
- 12 OGATA, K. *Discrete-Time Control Systems*. 2nd. ed. [S.l.]: Prentice Hall, 1995. 150–155 p.
- 13 ÅKESSON, B. M.; JØRGENSEN, J. B.; POULSEN, N. K.; JØRGENSEN, S. B. A generalized autocovariance least-squares method for Kalman filter tuning. *Journal of Process control*, Elsevier, v. 18, n. 7-8, p. 769–779, 2008.
- 14 DAVIS, P. J. *Interpolation and approximation*. [S.l.]: Courier Corporation, 1975.
- 15 BATCHELOR, G. K. *An Introduction to Fluid Dynamics*. 2nd. ed. [S.l.]: Cambridge University Press, 2000. 253–260 p.
- 16 APOSTOL, T. M. *Calculus, Volume 1: One-Variable Calculus, with an Introduction to Linear Algebra*. 2nd. ed. [S.l.]: Wiley, 1967. 345–349 p.

- 17 FUJII, K. Extended Kalman filter. *Reference Manual*, v. 14, p. 41, 2013.
- 18 BRIERS, M.; DOUCET, A.; MASKELL, S. Smoothing algorithms for state-space models. *Annals of the Institute of Statistical Mathematics*, Springer, v. 62, p. 61–89, 2010.
- 19 OPPENHEIM, A. V. *Discrete-time signal processing*. [S.l.]: Pearson Education India, 1999.