



## HOMEWORK 1 - PROJECT WORK (TASK 1)

### CONTENTS

INSTRUÇÕES E PRAZOS	1
HOMEWORK - EXERCISES	3
EXERCISE 1 . . . . .	3
EXERCISE 2 . . . . .	3
EXERCISE 4 . . . . .	4
EXERCISE 3 . . . . .	4
PROJECT WORK	5
TASK 1 - SYSTEM MODELLING . . . . .	5

### INSTRUÇÕES E PRAZOS

O objetivo do HW1 e da primeira tarefa do trabalho de projeto (PW) é revisar e se familiarizar com os conceitos de modelagem e representá-los na linguagem de programação de sua escolha. Você pode se referir aos slides das aulas (de L1 a L7) e os capítulos 2 e 3 de Nise para o embasamento teórico [The objective of HW1 and of the first task of the project work (PW) is to revise and familiarise with the modelling concepts and to represent them in the programming language of your choice. You might refer to the lecture slides (from L1 to L7) and Nise's chapter 2 and 3 for the theoretical background].

GUIDELINES: Resolver cada exercício usando cálculos teóricos e relatando as principais etapas de sua resolução. Compare, em seguida, os resultados no ambiente de programação de sua preferência. O máximo de cada questão é de 25 pontos. O resolução tem que ser enviada em um único documento e tem que deve incluir [You must solve each exercise using theoretical calculations and reporting the main steps of your resolution. Then, you compare the results on the programming environment of your choice. Each exercise pays max 25 points. The resolution must be sent in a single document and it must include]:

- o REPORT: O relatório tem que conter (i) uma breve explicação da base teórica associada a cada exercício; (ii) os passos relevantes dos cálculos, os resultados, os gráficos (quando necessário) e, principalmente, seus comentários sobre os resultados e/ou gráficos [The report must include (i) a brief explanation of the theoretical background associated to each exercise; (ii) the relevant steps of your calculations, the results, the graphs (when required) and especially, your comments on the results and/or graphs].

- o **CODE LISTING:** O código que você usou para resolver os exercícios. Independentemente da linguagem escolhida, seu código deve ser executável/funcionante. O código (e as funções relevantes, quando necessário) pode ser colado na parte final do relatório (por exemplo, como um apêndice) ou arquivado junto com o relatório em uma pasta .zip. [The code you used to solve the exercises. Regardless of your programming choice, your code must be executable/functioning. The code (and the relevant functions, when needed) can be either pasted at the end of the report (for instance as an appendix) or packaged together with the report as a zip file].

Observe que os recursos encontrados na internet devem ser referenciados adequadamente e que o uso de ferramentas de IA generativa, como o ChatGPT, apenas para copiar as respostas da tarefa não é permitido. Em vez disso, você pode usá-lo como fonte de informação, avaliando criticamente as saídas e o conteúdo que ele produz. Você deve reconhecê-lo citando-o corretamente e, por exemplo, pode considerar incluir a saída da IA generativa em um apêndice do relatório da tarefa<sup>2</sup> [You can base your resolution on the resources you might find on the web but you must adequately reference to them. Note that the use of generative AI tools, as such as ChatGPT, merely for copying the answers of the assignment is not permitted. Instead, you might like use it as a source of information, critically evaluating the outputs and contents that it produces. You must acknowledge it by citing it correctly and, for instance, you may like to consider including the generative AI output in an appendix of the HW report].

**TEAM WORK:** Os trabalhos podem ser feitos individualmente ou em dupla [The works can be done individually or in pairs].

**DEADLINES:** Os prazos de entrega são definidos no SIGAA e podem ser diferentes para o “homework” e o projeto de trabalho [The deadlines for submissions are set in SIGAA and they can differ for the homework and project work].

- o **HOMEWORK :** A resolução do trabalho de casa deve ser enviada através do SIGAA até o dia especificado no SIGAA. Note que os atrasos serão penalizados (<24h: 20% de penalização; <48h: 40% de penalização; etc.) [The solution of the homework must be sent through SIGAA by the deadline provided in SIGAA. Note that delays will be penalised (<24h: 20% penalty; <48h: 40% penalty; etc.)].
- o **PROJECT WORK:** O trabalho de projeto está dividido em três exercícios fornecidos juntamente com os “homework” passados durante o semestre. Podem optar por entregar a resolução dos exercícios no mesmo momento do relativo HW ou no prazo fixado para o último no final do semestre. Em ambos os casos, você deve seguir as instruções fornecidas acima. O relatório final deverá incluir a solução de cada exercício [The project work is divided into three exercises provided along with the “homework” assigned during the semester. They can choose to submit the resolution of the exercises at the same time of the relative HW or within the deadline set for the latter one at the end of the semester. In both cases, you must follow the instructions provided above. The final report must include the solution for each exercise].

## HOMEWORK - EXERCISES

### EXERCISE 1

Encontre a transformada inversa de Laplace por cálculos manuais e verifique seus resultados usando o “Symbolic toolbox” para as seguintes funções [\[Find the inverse Laplace transform by hand calculations and verify your results using the Symbolic toolbox for the following functions\]](#):

a.  $F_1(s) = \frac{3s^2 + 5s}{s^3 + 6s^2 + 11s + 6}$

b.  $F_2(s) = \frac{s^2 + 2s + 1}{(s + 2)^3}$

c.  $F_3(s) = \frac{2s + 3}{s^3 + 6s^2 + 21s + 26}$

d.  $F_4(s) = \frac{1 + 2e^{-s}}{s^2 + 3s + 2}$

### EXERCISE 2

Ao fim de estudar o efeito dos zeros na resposta de um sistema, considere a função de transferência dada na equação (1) [\[In order to study the effect of zeros in response of a system, consider the transfer function given in equation \(1\)\]](#).

$$G(s) = \frac{\alpha s + 1}{2s^2 + 3s + 1} \quad (1)$$

Faça o seguinte [\[Do the following\]](#):

1. Para  $\alpha = 1$ , encontre e plote as respostas ao degrau unitário e ao impulso [\[For  \$\alpha = 3\$ , find and plot the unit step and impulse responses\]](#).
2. Para  $\alpha = [-1, 0, 1, 2]$ , plote e compare a resposta ao degrau unitário [\[For  \$\alpha = \[-1, 0, 1, 2\]\$ , plot and compare the unit step response\]](#).
3. Discuta como o sistema varia sua resposta para os diferentes valores de  $\alpha$  [\[Discuss how the system varies its response for the different values of  \$\alpha\$ \]](#).

---

<sup>2</sup> Texto traduzido por meio do OpenAI ChatGPT (comunicação pessoal, 27 de março de 2023) [\[Text translated by means of OpenAI ChatGPT \(personal communication, March 27, 2023\)\]](#).

### EXERCISE 3

Considere o modelo de entrada-saída na equação [Consider the input-output model in equation] (2):

$$\frac{d^2y(t)}{dt^2} + 2\frac{dy(t)}{dt} + y(t) = 4\frac{d^2u(t)}{dt^2} + 15\frac{du(t)}{dt} + 19u(t) \quad (2)$$

1. Defina o polinômio característico e represente graficamente os modos do sistema [Define the characteristic polynomial and plot the system modes].
2. Dadas as condições iniciais na equação (3), encontre a evolução livre do sistema na equação [Given the initial conditions in equation (3), find the free evolution of the system in equation] (2):

$$y(t)\Big|_{t=0} = 1, \quad \frac{dy(t)}{dt}\Big|_{t=0} = 1 \quad (3)$$

3. Encontre a resposta forçada do sistema sujeito a uma entrada em degrau unitário [Find the forced response of the system subject to a unit step input].
4. Por meio da linguagem de programação de sua escolha, plote a resposta  $y(t)$  e comente seus resultados [By means of the programming language of your choice, plot the response  $y(t)$  and comment on your results].

### EXERCISE 4

Dado o modelo de espaço de estados em [Given the state-space model in] (4):

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -5 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix} u(t) \\ y(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + u(t) \end{cases} \quad (4)$$

1. Encontre a função de transferência correspondente [Find a the corresponding transfer function]  $G(s) = Y(s)/U(s)$ .
2. Encontre um modelo de entrada-saída equivalente ao modelo de espaço de estado [Find an input-output model equivalent to the state-space model].
3. Encontre a evolução forçada de estado e saída como resposta da entrada [Find the state and output forced evolution as response of the input]  $u(t) = e^{-3t}\delta_{-1}(t)$ .

## PROJECT WORK

### TASK 1 - SYSTEM MODELLING

Considere o sistema de dois tanques dispostos como mostrado na Figura [Consider the two tanks system arranged as shown in Figure] 1.

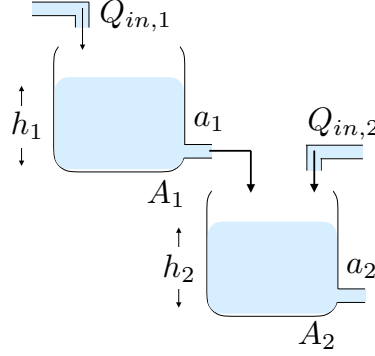


Figure 1: Sistema de dois tanques para o Exercício [Two-tank system for Exercise 1].

As vazões volumétricas  $Q_{in,1}$  e  $Q_{in,2}$  representam as entradas do sistema, enquanto a variável medida (saída) é o nível de fluido  $h_2$  no segundo tanque. As áreas dos dois tanques são  $A_1$  e  $A_2$ , enquanto  $a_1$  e  $a_2$  são as áreas dos orifícios indicadas na Figura 1. A vazão  $Q_{in,2}$  é uma segunda entrada ao sistema que pode representar uma possível perturbação para o segundo tanque. O fluido é perfeito (sem tensões de cisalhamento, sem viscosidade, sem condução de calor) e sujeito apenas à gravidade<sup>3</sup>. Os tanques estão cheios de água (fluido incompressível) e a pressão externa é constante (pressão atmosférica) [The volumetric flow rates  $Q_{in,1}$  and  $Q_{in,2}$  represent the inputs to the system, while the measured variable (output) is the fluid level  $h_2$  in the second tank. The areas of the two tanks are  $A_1$  and  $A_2$ , while  $a_1$  and  $a_2$  are the areas of the orifices indicated in Figure 1. The fluid is perfect (no shear stresses, no viscosity, no heat conduction), and subject only to gravity<sup>3</sup>. The tanks are filled with water (incompressible fluid), and the external pressure is constant (atmospheric pressure)].

1. Obtenha um modelo de espaço de estados do sistema, onde  $x_1(t) = h_1(t)$  e  $x_2(t) = h_2(t)$  são variáveis de estado,  $u(t) = [Q_{in,1}(t), Q_{in,2}(t)]$  é o vetor das entradas e  $y(t) = h_2(t)$  é a saída [Obtain a state-space model of the system, where  $x_1(t) = h_1(t)$  and  $x_2(t) = h_2(t)$  are state variables,  $u(t) = [Q_{in,1}(t), Q_{in,2}(t)]$  is the input vector and  $y(t) = h_2(t)$  is the output].
2. Dado  $a_{12} = a_{23} = a_{13} = 0.1 \text{ m}^2$ ,  $A_1 = 20 \text{ m}^2$ ,  $A_2 = 20 \text{ m}^2$ , encontre o equilíbrio estado  $(\bar{x}_1, \bar{x}_2)$  obtido com uma entrada constante  $\bar{u} = [1, 0] \text{ m}^3/\text{s}$ , aproximando a aceleração da gravidade como  $g \approx 10 \text{ m/s}^2$  [Given  $a_{12} = a_{23} = a_{13} = 0.1 \text{ m}^2$ ,  $A_1 = 20$

<sup>3</sup> A vazão é dada pela lei de Torricelli [The flow rate is given by the Torricelli law]:  $q_i(t) = a_{i,j} \sqrt{2gh_i(t)}$

$\text{m}^2$ ,  $A_2 = 20 \text{ m}^2$ , find the equilibrium state  $(\bar{x}_1, \bar{x}_2)$  obtained with a constant input  $\bar{u} = [1, 0] \text{ m}^3/\text{s}$ , approximating gravity acceleration as  $g \approx 10 \text{ m/s}^2$ ].

3. Determine o sistema linearizado  $(\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}, \mathbf{D})$  em torno do estado de equilíbrio [Determine the linearised system  $(\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}, \mathbf{D})$  around the equilibrium state]  $(\bar{x}_1, \bar{x}_2)$ .
4. Na linguagem de programação de sua escolha, simule<sup>4</sup> a resposta de dois sistemas a entrada ao degrau de amplitude  $A$  de sua escolha<sup>5</sup> e discuta seus resultados [In the programming language of your choice, simulate<sup>4</sup> the two systems response to a input step of amplitude  $A$  of your choice<sup>5</sup> and discuss your results].

---

<sup>4</sup> No Matlab/Octave o comando `lsim` pode ser usado para simular o sistema linear e `ode45` para simular o sistema não linear. Da mesma forma, em Python você pode usar, respectivamente, `control.matlab.lsim` e `integrate.ode` especificando o método de integração [In Matlab/Octave you can use the command `lsim` to simulate the linear system and `ode45` to simulate the non-linear system. Similarly, in Python you might use, respectively, `control.matlab.lsim` and `integrate.ode` specifying the integration method].

<sup>5</sup> Em Matlab/Octave você pode usar o comando `step` e `control.matlab.step` em Python [In Matlab/Octave you might use the `step` command and `control.matlab.step` in Python].