

# Teorema Fundamental das Curvas Espaciais

Cristhian Grundmann

Igor Patrício Michels

12 de abril de 2021

## 1 Introdução

No decorrer da primeira parte do semestre foram dadas diversas definições, além de terem sido provadas inúmeras relações, proposições, lemas e teoremas. Tendo em vista isso, nos propomos a provar um teorema não visto em sala, mas que é de extrema importância para o assunto abordado, o Teorema Fundamental das Curvas Espaciais. Tal teorema diz que, dado um intervalo  $I = (a, b) \in \mathbb{R}$  e as funções  $\kappa : I \rightarrow \mathbb{R}_+^*$  e  $\tau : I \rightarrow \mathbb{R}$ , as quais chamaremos de curvatura e torção, respectivamente, definem, a menos de movimentos rígidos, uma curva no espaço.

Esse enunciado, embora simples, é de enorme curiosidade, uma vez que o mesmo não parece nada imediato. Dessa forma, como motivação desse trabalho, vamos buscar entender como uma curva pode ser definida, e construída, a partir de sua curvatura e torção. Algumas demonstrações podem ser vistas em [1]-[4]. Nossa abordagem se dará de forma similar a utilizada por [5].

## 2 Preliminares

Primeiramente, é interessante trazer algumas definições de análise que irão nos auxiliar

**Definição 1.** (*Função Lipschitz-contínua.*) Seja  $M$  um espaço métrico qualquer com a métrica  $d$ . Uma função  $F : M \rightarrow M$  é Lipschitz-contínua para todo  $x$  e  $y$  de  $M$  se existe alguma constante  $L$  de modo que

$$d(F(x), F(y)) \leq L \cdot d(x, y).$$

O ínfimo das constantes  $L$  para os quais vale a desigualdade é chamado de constante de Lipschitz.

**Proposição 1.** Se  $F$  é uma função Lipschitz-contínua em um intervalo  $I$ , então  $F$  é uma função contínua nesse intervalo.

*Demonstração.* Seja  $L$  a constante de Lipschitz de  $F$  em  $I$ . Como  $F$  é uma função Lipschitz-contínua, segue da definição que vale

$$|F(x) - F(y)| \leq L \cdot |x - y|, \forall x, y \in I.$$

Dado  $\varepsilon > 0$ , considere  $\delta = \frac{\varepsilon}{L}$ . Dessa forma,  $\forall x, y \in I$ , de modo que  $|x - y| < \delta$ , vale que

$$\begin{aligned} |F(x) - F(y)| &\leq L|x - y| \\ &< L\delta \\ &= L \cdot \frac{\varepsilon}{L} \\ &= \varepsilon. \end{aligned}$$

Logo,  $F$  é contínua em  $I$ . □

**Lema 1.** Se  $A$  é uma função continuamente diferenciável e sua derivada é limitada em um intervalo, então  $A$  é Lipschitz-contínua no intervalo.

*Demonstração.* Se  $A$  possui derivada limitada no intervalo  $I$ , existe algum  $L$  de forma que  $|A'(x)| \leq L, \forall x \in I$ . Dessa forma, segue pelo Teorema Fundamental do Cálculo, que

$$\begin{aligned} |A(x) - A(y)| &\leq \left| \int_x^y A'(t) dt \right| \\ &\leq \int_x^y |A'(t)| dt \\ &\leq L |x - y|. \end{aligned}$$

Com resultado seguindo pela definição de Lipschitz-continuidade.  $\square$

Feito isso, podemos relembrar o Teorema de Existência e Unicidade de EDO's. Para tanto iremos usar o enunciado de [1].

**Teorema 1.** (*Existência e Unicidade de Soluções de EDO's.*) Considere o problema de valor inicial

$$\begin{aligned} x(0) &= x_0 \\ x'(t) &= F(x(t)). \end{aligned}$$

Se  $F$  é Lipschitz-contínua em  $[0, T]$  então existe uma solução única,  $x(t)$  em  $C^1(-\infty, \infty)$  com  $x(0) = x_0$ .

*Demonstração.* Veja o Teorema 5.2 de [1].  $\square$

**Definição 2.** (*Movimento Rígido Positivo.*) Um movimento rígido positivo é um movimento rígido que preserva a orientação.

As demais definições e proposições que serão utilizadas já foram trabalhadas em aula, dessa forma optamos por omitir as mesmas. Entretanto, vale lembrar que, assim como [6], aqui uma aplicação será dita diferenciável se a mesma for de classe  $C^\infty$ .

### 3 Teorema Fundamental das Curvas Espaciais

Tendo como base o ferramental apresentado na Seção 2, podemos enunciar, e provar, o Teorema Fundamental das Curvas Espaciais.

**Teorema 2.** (*Teorema Fundamental das Curvas Espaciais.*) Sejam  $\kappa_0, \tau_0 : I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  funções diferenciáveis, com  $\kappa_0(t) > 0$ . Então existe uma curva  $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ , parametrizada por comprimento de arco, de modo que  $\kappa_\alpha(t) = \kappa_0(t)$  e  $\tau_\alpha(t) = \tau_0(t)$ .

Além disso, se existe uma outra curva  $\beta : I \rightarrow \mathbb{R}^3$  de modo que, para todo  $t \in I$ , seja válido que  $\kappa_\beta(t) = \kappa_0(t)$  e  $\tau_\beta(t) = \tau_0(t)$ , então existe um movimento rígido positivo,  $M : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ , tal que  $\alpha(t) = M(\beta(t))$ .

*Demonstração.* Sejam  $T$ ,  $N$  e  $B$  os vetores tangente, normal e binormal, respectivamente. Sabemos que os mesmos estão em  $\mathbb{R}^3$  e formam o triedro de Frenet, dessa forma, temos que eles respeitam as equações de Frenet-Serret:

$$\begin{aligned} T'(t) &= \kappa_0(t)N(t), \\ N'(t) &= -\kappa_0(t)T(t) + \tau_0(t)B(t), \\ B'(t) &= -\tau_0(t)N(t). \end{aligned} \tag{1}$$

Note que os vetores  $T'(t)$ ,  $N'(t)$  e  $B'(t)$  também pertencem ao  $\mathbb{R}^3$ . Tomando  $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$  uma curva de modo que

$$\gamma(t) = (T(t), N(t), B(t))$$

e  $F : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$  de tal que

$$F(\gamma(t)) = (\kappa_0(t)N(t), -\kappa_0(t)T(t) + \tau_0(t)B(t), -\tau_0(t)N(t)),$$

temos que  $F$  é continuamente diferenciável, logo, pelo Lema 1, é Lipschitz-contínua. Agora podemos fixar  $t_0 \in I$  e considerar a condição inicial de modo que  $\gamma(t_0) = (e_1, e_2, e_3)$ , onde  $e_i$  são vetores da base canônica. Dessa forma, o Teorema 1 nos garante que existe uma única solução para  $\gamma(t)$  de modo que  $\gamma'(t) = F(\gamma(t))$ .

De fato, podemos definir

$$\alpha(t) = \int_{t_0}^t T(u) du \in \mathbb{R}^3,$$

de onde sai que  $\alpha'(t) = T(t)$  e que  $\alpha(t_0) = (0, 0, 0)$ .

Isso nos garante a existência da curva, resta mostrar que a mesma está parametrizada por comprimento de arco e que qualquer outra curva que possua as mesmas funções curvatura e torção podem ser obtidas por meio de um movimento rígido. Para tanto, precisamos mostrar que os vetores  $T(t)$ ,  $N(t)$  e  $B(t)$  formam uma base ortonormal positiva, isto é, que as seguintes propriedades valem

$$\begin{aligned} \langle T(t), T(t) \rangle &= 1 \\ \langle T(t), N(t) \rangle &= 0 \\ \langle T(t), B(t) \rangle &= 0 \\ \langle N(t), N(t) \rangle &= 1 \\ \langle N(t), B(t) \rangle &= 0 \\ \langle B(t), B(t) \rangle &= 1 \end{aligned} \tag{2}$$

de onde surge o seguinte sistema de EDO's:

$$\begin{cases} \langle T(t), T(t) \rangle' &= 2\kappa(t)\langle T(t), N(t) \rangle \\ \langle T(t), N(t) \rangle' &= \kappa(t)\langle N(t), N(t) \rangle - \kappa(t)\langle T(t), T(t) \rangle + \tau(t)\langle T(t), B(t) \rangle \\ \langle T(t), B(t) \rangle' &= \kappa(t)\langle N(t), B(t) \rangle - \tau(t)\langle T(t), N(t) \rangle \\ \langle N(t), N(t) \rangle' &= -2\kappa(t)\langle T(t), N(t) \rangle + 2\tau(t)\langle N(t), B(t) \rangle \\ \langle N(t), B(t) \rangle' &= \tau(t)\langle B(t), B(t) \rangle - \kappa(t)\langle T(t), B(t) \rangle - \tau(t)\langle N(t), N(t) \rangle \\ \langle B(t), B(t) \rangle' &= -2\tau(t)\langle N(t), B(t) \rangle \end{cases} \tag{3}$$

Note que o vetor  $\lambda(\langle T(t), T(t) \rangle, \langle T(t), N(t) \rangle, \langle T(t), B(t) \rangle, \langle N(t), N(t) \rangle, \langle N(t), B(t) \rangle, \langle B(t), B(t) \rangle)$  é uma solução para 3. Além disso, o vetor  $\tilde{\lambda} = (1, 0, 0, 1, 0, 1)$  também é. Entretanto, a mesma condição inicial que utilizamos no sistema  $\gamma'(t) = F(\gamma(t))$  nos diz que  $T(t_0) = e_1$ ,  $N(t_0) = e_2$  e  $B(t_0) = e_3$ , ou seja,  $\lambda(t_0) = \tilde{\lambda}(t_0)$ . Mas, pelo teorema de unicidade da solução de uma EDO, isso implica que as duas soluções precisam ser iguais, logo, as equações em 2 são válidas, o que implica que  $\{T(t), N(t), B(t)\}$  formam uma base ortonormada em cada  $t$ . Por continuidade vale que a base será positiva também, uma vez que o determinante dessa base só pode assumir os valores de 1 e  $-1$ , mas, como em  $t_0$  ele é igual a 1, ele não poderá assumir o valor de  $-1$ .

Agora, perceba que  $\alpha'(t) = T(t)$ , logo  $\alpha$  está parametrizada por comprimento de arco. Assim, podemos escrever

$$\kappa_\alpha(t) = \|\alpha''(t)\| = \|T'(t)\| = \|\kappa_0(t)N(t)\| = \kappa_0(t).$$

Já para a torção, podemos escrever

$$\begin{aligned} \tau_\alpha(t) &= \frac{\langle \alpha'(t) \times \alpha''(t), \alpha'''(t) \rangle}{\|\alpha'(t) \times \alpha''(t)\|^2} \\ &= \frac{\langle T(t) \times T'(t), T''(t) \rangle}{\|T(t) \times T'(t)\|^2} \\ &= \frac{\langle T(t) \times \kappa_0(t)N(t), \kappa_0(t)N'(t) \rangle}{\|T(t) \times \kappa_0(t)N(t)\|^2} \\ &= \frac{\langle \kappa_0(t)B(t), -(\kappa_0(t))^2 T(t) + \kappa_0(t)\tau_0(t)B(t) \rangle}{\|\kappa_0(t)B(t)\|^2} \\ &= \frac{\langle \kappa_0(t)B(t), -(\kappa_0(t))^2 T(t) \rangle + \langle \kappa_0(t)B(t), \kappa_0(t)\tau_0(t)B(t) \rangle}{(\kappa_0(t))^2} \\ &= \frac{(\kappa_0(t))^2 \tau_0(t)}{(\kappa_0(t))^2} \\ &= \tau_0(t). \end{aligned}$$

O que demonstra que  $\kappa_\alpha(t) = \kappa_0(t)$  e que  $\tau_\alpha(t) = \tau_0(t)$ .

Por fim, suponha que exista uma outra curva  $\beta : I \rightarrow \mathbb{R}^3$  de modo que  $\kappa_\beta(t) = \kappa_0(t)$  e  $\tau_\beta(t) = \tau_0(t)$ . Sabemos que  $\alpha(t_0) = (0, 0, 0)$  e que o Triedro de Frenet nesse ponto são os vetores canônicos. Dessa forma, defina o movimento rígido positivo  $M : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ , de modo que  $M(v) = R(v) + P(v)$ , com  $R : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  sendo definida como uma rotação de modo que

$$T_\beta(t_0) = e_1 = T_\alpha(t_0)N_\beta(t_0) = e_1 = N_\alpha(t_0)B_\beta(t_0) = e_1 = B_\alpha(t_0),$$

e  $P : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ , sendo definida como  $P(v) = v - \beta(t_0)$ , ou seja,  $P$  será dada de modo que  $P(\beta(t_0)) = \beta(t_0) - \beta(t_0) = (0, 0, 0)$ , o que faz com que a curva  $\beta$  respeite as condições iniciais dos nossos sistemas de EDO's, logo, novamente pela unicidade das soluções, vale que  $\alpha = M(\beta)$ .  $\square$

## 4 Alguns exemplos de curvas

Podemos exemplificar o teorema através de alguns exemplos, isto é, iremos tomar uma função curvatura e uma função torção e encontrar a curva correspondente. Por simplicidade, e pela segunda parte do teorema, iremos considerar todos os sistemas com as mesmas condições iniciais da curva  $\alpha$  no Teorema 2, isto é,  $T(t) = e_1$ ,  $N(t) = e_2$  e  $B(t) = e_3$ . Além disso, também iremos considerar  $t_0 = 0$ .

**Exemplo 1.** *Seja  $I = [0, 2\pi]$ . Encontre a curva  $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$  de forma que  $\kappa_\alpha(t) = \tau_\alpha(t) = 1, \forall t \in I$ .*

**Solução:** voltando a Equação 1 podemos ver um sistema de EDO's com 9 equações, disfarçadas em 3 equações. Entretanto, podemos ver que as 9 equações formam, três a três, três sistemas de equações iguais a 1, mas referente a apenas uma coordenada de cada vetor. Tendo isso em vista, resolveremos o sistema para a primeira coordenada, as demais coordenadas terão soluções idênticas. Dessa forma temos o seguinte sistema de equações:

$$\begin{cases} T_1'(t) &= N_1(t) \\ N_1'(t) &= -T_1(t) + B_1(t) \\ B_1'(t) &= -N_1(t) \end{cases}$$

Resolvendo o mesmo por meio do método da substituição, temos

$$T_1'(t) = N_1(t) \implies T_1''(t) = N_1'(t) = -T_1(t) + B_1(t) \implies T_1'''(t) = -T_1'(t) + B_1'(t) = -T_1'(t) - N_1(t) = -2T_1'(t),$$

logo, podemos resolver a EDO  $T_1'''(t) = -2T_1'(t)$  e, por meio dela, encontrar as demais funções. Dessa forma, temos que, ao assumir que  $T(t) = e^{\lambda t}$ , podemos escrever

$$\begin{aligned} T_1'''(t) &= -2T_1'(t) \\ \lambda^3 e^{\lambda t} &= -2\lambda e^{\lambda t} \\ \lambda^3 &= -2\lambda, \end{aligned}$$

de onde sai que  $\lambda = 0 \vee \lambda = i\sqrt{2} \vee \lambda = -i\sqrt{2}$ . Com isso, temos que a solução geral para  $T_1(t)$  é

$$T_1(t) = \frac{c_1 \sin \sqrt{2}t}{\sqrt{2}} + \frac{c_2 \cos \sqrt{2}t}{\sqrt{2}} + c_3.$$

Sabemos que  $N_1(t) = T_1'(t)$ , dessa forma, vale que

$$N_1(t) = c_1 \cos \sqrt{2}t - c_2 \sin \sqrt{2}t.$$

Por fim, vale que  $N_1'(t) = -T_1(t) + B_1(t) \implies B_1(t) = N_1'(t) + T_1(t)$ , dessa forma, podemos ver que

$$B_1(t) = c_1 \sin \sqrt{2}t \left( \frac{1}{\sqrt{2}} - \sqrt{2} \right) + c_2 \cos \sqrt{2}t \left( \frac{1}{\sqrt{2}} - \sqrt{2} \right) + c_3.$$

Como dito anteriormente, podemos ver que até o momento não utilizamos que esse sistema está representando a primeira coordenada de cada um dos vetores. Ou seja, a expressão das demais coordenadas de cada vetor são dessa mesma forma, variando apenas pelas constantes  $c_1$ ,  $c_2$  e  $c_3$ , as quais são obtidas pelo valor inicial em  $t_0$ . Dessa forma, precisamos encontrar apenas os valores dessas constantes para cada uma das coordenadas.

- Em  $t_0$ , para a 1ª coordenada de cada vetor, temos:

$$\begin{cases} \frac{c_2}{\sqrt{2}} + c_3 = 1 \\ c_1 = 0 \\ c_2 \left( \frac{1}{\sqrt{2}} - \sqrt{2} \right) + c_3 = 0 \end{cases}$$

cuja solução é  $c_1 = 0$ ,  $c_2 = \frac{\sqrt{2}}{2}$  e  $c_3 = \frac{1}{2}$ , que nos dá as seguintes funções para a primeira coordenada:

$$T_1(t) = \frac{\cos \sqrt{2}t}{2} + \frac{1}{2},$$

$$N_1(t) = -\frac{\sqrt{2} \sin \sqrt{2}t}{2},$$

$$B_1(t) = -\frac{\cos \sqrt{2}t}{2} + \frac{1}{2}.$$

- Em  $t_0$ , para a 2ª coordenada de cada vetor, temos:

$$\begin{cases} \frac{c_2}{\sqrt{2}} + c_3 = 0 \\ c_1 = 1 \\ c_2 \left( \frac{1}{\sqrt{2}} - \sqrt{2} \right) + c_3 = 0 \end{cases}$$

cuja solução é  $c_1 = 1$ ,  $c_2 = 0$  e  $c_3 = 0$ , que nos dá as seguintes funções para a primeira coordenada:

$$T_2(t) = \frac{\sin \sqrt{2}t}{\sqrt{2}},$$

$$N_2(t) = \cos \sqrt{2}t,$$

$$B_2(t) = -\frac{\sin \sqrt{2}t}{\sqrt{2}}.$$

- Em  $t_0$ , para a 3ª coordenada de cada vetor, temos:

$$\begin{cases} \frac{c_2}{\sqrt{2}} + c_3 = 0 \\ c_1 = 0 \\ c_2 \left( \frac{1}{\sqrt{2}} - \sqrt{2} \right) + c_3 = 1 \end{cases}$$

cuja solução é  $c_1 = 0$ ,  $c_2 = -\frac{\sqrt{2}}{2}$  e  $c_3 = \frac{1}{2}$ , que nos dá as seguintes funções para a primeira coordenada:

$$T_3(t) = -\frac{\cos \sqrt{2}t}{2} + \frac{1}{2},$$

$$N_3(t) = \frac{\sqrt{2} \sin \sqrt{2}t}{2},$$

$$B_3(t) = \frac{\cos \sqrt{2}t}{2} + \frac{1}{2}.$$

De onde obtemos os vetores

$$\begin{aligned} T(t) &= \left( \frac{\cos \sqrt{2}t}{2} + \frac{1}{2}, \frac{\sin \sqrt{2}t}{\sqrt{2}}, -\frac{\cos \sqrt{2}t}{2} + \frac{1}{2} \right), \\ N(t) &= \left( -\frac{\sqrt{2} \sin \sqrt{2}t}{2}, \cos \sqrt{2}t, \frac{\sqrt{2} \sin \sqrt{2}t}{2} \right), \\ B(t) &= \left( -\frac{\cos \sqrt{2}t}{2} + \frac{1}{2}, -\frac{\sin \sqrt{2}t}{\sqrt{2}}, \frac{\cos \sqrt{2}t}{2} + \frac{1}{2} \right). \end{aligned}$$

Agora, nossa curva  $\alpha$  será definida por

$$\alpha(t) = \int_{t_0}^t T(u) \, du.$$

Fazendo a integração, coordenada a coordenada, temos, enfim, a curva procurada:

$$\alpha(t) = \left( \frac{\sin \sqrt{2}t}{2\sqrt{2}} + \frac{t}{2}, -\frac{\cos \sqrt{2}t}{2} + \frac{1}{2}, -\frac{\sin \sqrt{2}t}{2\sqrt{2}} + \frac{t}{2} \right).$$

Note que, conforme o esperado, essa curva representa uma hélice circular (possui curvatura constante e torção não nula):

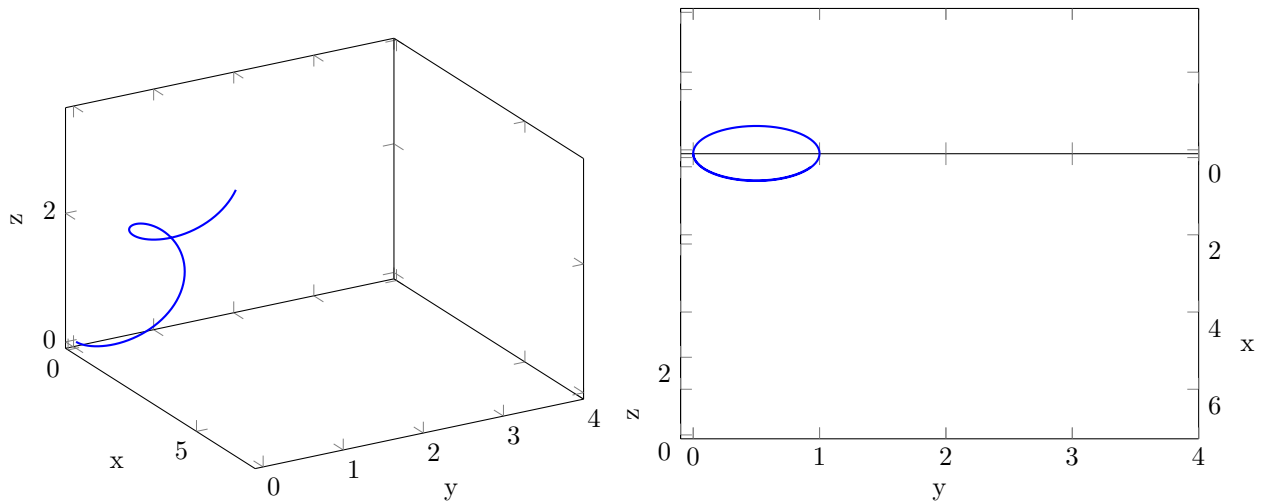


Figura 1: Curva  $\alpha$  com curvatura  $\kappa_\alpha(t) = 1$  e torção  $\tau_\alpha(t) = 1$ , à esquerda com visualização geral e à direita ilustrando o círculo, caracterizado pela curvatura constante.

Um outro exemplo, um pouco mais divertido, traz uma curva cuja curvatura e torção não são constantes.

**Exemplo 2.** Encontrar a curva definida em  $I = [0, 10]$  cuja curvatura é igual a  $\kappa_\alpha(t) = t + 1$  e a torção é identicamente nula.

**Solução:** De modo análogo ao Exemplo 1, precisaremos resolver um sistema de EDO's para encontrar a curva. Para essa curva, o sistema correspondente é o que pode ser visto em 4.

$$\begin{cases} T'(t) &= (t+1)N(t) \\ N'(t) &= -(t+1)T(t) + 0 \cdot B(t) \\ B'(t) &= -0 \cdot N(t) \end{cases} \quad (4)$$

A resolução do sistema em si é um processo mecânico. Como já desenvolvemos as contas para o Exemplo 1, optamos por omitir nesse segundo exemplo. No fim, teremos os seguintes vetores:

$$\begin{aligned} T(t) &= \left( \cos \frac{1}{2}t(t+2), \sin \frac{1}{2}t(t+2), 0 \right), \\ N(t) &= \left( -\sin \frac{1}{2}t(t+2), \cos \frac{1}{2}t(t+2), 0 \right), \\ B(t) &= (0, 0, 1). \end{aligned}$$

Consequentemente, nossa curva será dada por

$$\alpha(t) = \left( \int_0^t \cos \frac{1}{2}u(u+2) du, \int_0^t \sin \frac{1}{2}u(u+2) du, 0 \right).$$

Note que essa é uma curva plana, resultado totalmente esperado pois, conforme visto em aula, uma curva com torção nula será plana.

## 5 Soluções numéricas e Animações

Dadas as funções  $\kappa(t)$  e  $\tau(t)$  para a curvatura e a torção de uma curva, respectivamente, queremos construí-la. Para isso, montamos o sistema de equações diferenciais

$$\begin{aligned} T'(t) &= \kappa(t)N(t) \\ N'(t) &= -\kappa(t)T(t) + \tau(t)B(t) \\ B'(t) &= -\tau(t)N(t) \\ P'(t) &= T(t) \end{aligned} \tag{5}$$

e a resolvemos considerando os valores iniciais  $(T_0, N_0, B_0)$  e  $P_0$ , representando o triedro de Frenet inicial, incluindo o ponto inicial.

Tal sistema pode ser muito complicado de resolver dependendo das funções  $\kappa$  e  $\tau$ , e frequentemente é possível apenas construir aproximações.

### 5.1 O método de Euler

Decidimos usar o método mais simples para isso, o método de Euler. Esse método consiste em usar uma aproximação linear de uma função para estimar um valor próximo do centro do aproximação.

Por exemplo, considere o sistema  $f'(t) = g(t)$ , onde  $g$  é conhecido. Sabendo que  $f(t_0) = f_0$ , então podemos estimar

$$f(t_0 + h_0) \approx f(t_0) + h_0 f'(t_0)$$

Quanto mais próximo  $h_0$  for de zero, mais próxima a estimativa vai estar do valor real. Podemos fazer uma série de estimativas iterando esse método, obtendo estimativas para  $f(t_0 + kh_0)$ . Poderíamos escolher valores diferentes para  $h$ . Por exemplo, escolher intervalos menores para derivadas maiores, em módulo. Decidimos manter os intervalos com tamanhos iguais  $h_0$ .

Agora podemos aplicar esse método em 5. Primeiramente, notamos que a derivada do vetor  $T$  não é exatamente conhecida, pois apenas conhecemos a função  $\kappa$ , mas não  $N$ . O vetor normal também vai ser estimado. De qualquer maneira, podemos aplicar a iteração

$$\begin{aligned} T_{k+1} &= T_k + h\kappa_k N_k \\ N_{k+1} &= N_k + h(-\kappa_k T_k + \tau_k B_k) \\ B_{k+1} &= B_k - h\tau_k N_k \\ P_{k+1} &= P_k + hT_k \end{aligned} \tag{6}$$

onde qualquer subscrito  $x_k$  indica  $x(t_k)$ .

## 5.2 Ortogonalidade do triedro

Podemos analisar o comportamento do triedro  $(T, N, B)$  depois de uma iteração do método de Euler descrito em 6. Para isso, basta aplicar o produto interno nos seguintes pares, supondo que o triedro anterior é ortonormal:

$$\begin{aligned}\langle T_{k+1}, T_{k+1} \rangle &= 1 + h^2 \kappa_k^2 \\ \langle T_{k+1}, N_{k+1} \rangle &= -h\kappa_k + h\kappa_k = 0 \\ \langle T_{k+1}, B_{k+1} \rangle &= -h^2 \kappa_k \tau_k \\ \langle N_{k+1}, N_{k+1} \rangle &= 1 + h^2 (\kappa_k^2 + \tau_k^2)\end{aligned}\tag{7}$$

Podemos ver que os vetores  $T_{k+1}$  e  $N_{k+1}$  são próximos mas não exatamente unitários. Podemos corrigir isso normalizando-os. Note que os vetores  $T$  e  $N$  permanecem ortogonais, e obviamente continuam depois da normalização. Entretanto, os vetores  $T$  e  $B$  não permanecem ortogonais. Já sabemos que  $B(t) = T(t) \times N(t)$ , então podemos fazer

$$B_{k+1} = T_{k+1} \times N_{k+1}$$

O vetor binormal continua unitário pois os vetores tangente e normal no produto vetorial também são. Portanto, a nossa iteração é

$$\begin{aligned}T_{k+1} &= \frac{T_k + h\kappa_k N_k}{\sqrt{1 + h^2 \kappa_k^2}} \\ N_{k+1} &= \frac{N_k + h(-\kappa_k T_k + \tau_k B_k)}{\sqrt{1 + h^2 (\kappa_k^2 + \tau_k^2)}} \\ B_{k+1} &= T_{k+1} \times N_{k+1} \\ P_{k+1} &= P_k + hT_k\end{aligned}\tag{8}$$

Essa é a iteração usada na nossa aplicação.

Vale notar que esse método permite curvatura não positiva, pois não há ambiguidades sobre a curva gerada. Por exemplo, uma reta unit-speed pode ser representada dessa forma, mas não de forma única.

## 5.3 Aplicação

A nossa aplicação é construída na linguagem *C++* e usa a API *OpenGL* para desenhar os gráficos. A aplicação é capaz de gerar uma curva aproximada por segmentos, usando o método em 8. Cada pedaço da curva possui os atributos:

- os vetores tangente, normal e binormal
- o ponto associado
- o parâmetro associado

Esses atributos facilitam a manipulação do triedro.

Os valores iniciais dessa curva podem ser a base canônica na origem, ou a posição e orientação da câmera.

Há uma paleta de curvas pré-determinadas que podem ser colocadas no espaço, porém uma de cada vez. As funções de curvatura e de torção podem ser facilmente alteradas no código-fonte, bastando apenas a recompilação do código.

A curva é desenhada segmento por segmento, onde a cor do segmento é determinada pelo vetor tangente. Mais precisamente, a cor é  $(R, G, B) = (T + (1, 1, 1))/2$ , onde os componentes devem estar no intervalo  $[0, 1]$ .

O triedro pode ser desenhado também, onde os vetores são desenhados a partir do ponto associado. Os vetores tangente, normal e binormal são verde, vermelho e azul, respectivamente. É possível alterar o parâmetro da curva associado ao triedro, para fazê-lo andar sobre a curva. Também é possível fazer a câmera ficar travada sobre esse triedro, para visualizar a curva localmente.



A aplicação também pode desenhar uma grade limitada sobre o eixo xy, e um segmento sobre o eixo z, para termos noção de posição absoluta.

Além de poder visualizar a curva localmente, há um modo de visualização onde a câmera é controlada livremente, tanto a posição quanto a direção.

## 5.4 Resultado

Fizemos algumas imagens de algumas curvas.

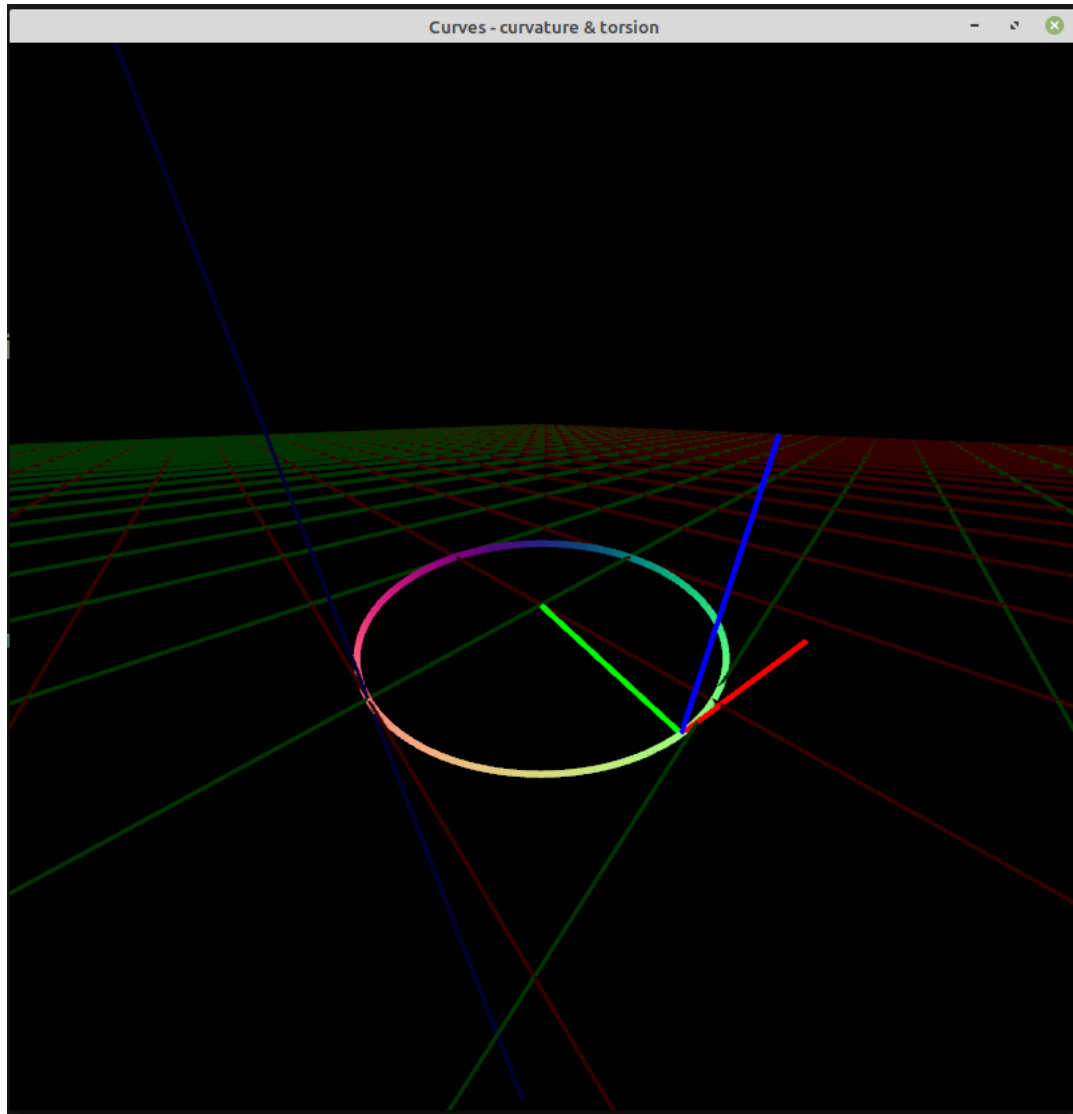


Figura 2: Círculo  $\kappa = 1$ ,  $\tau = 0$

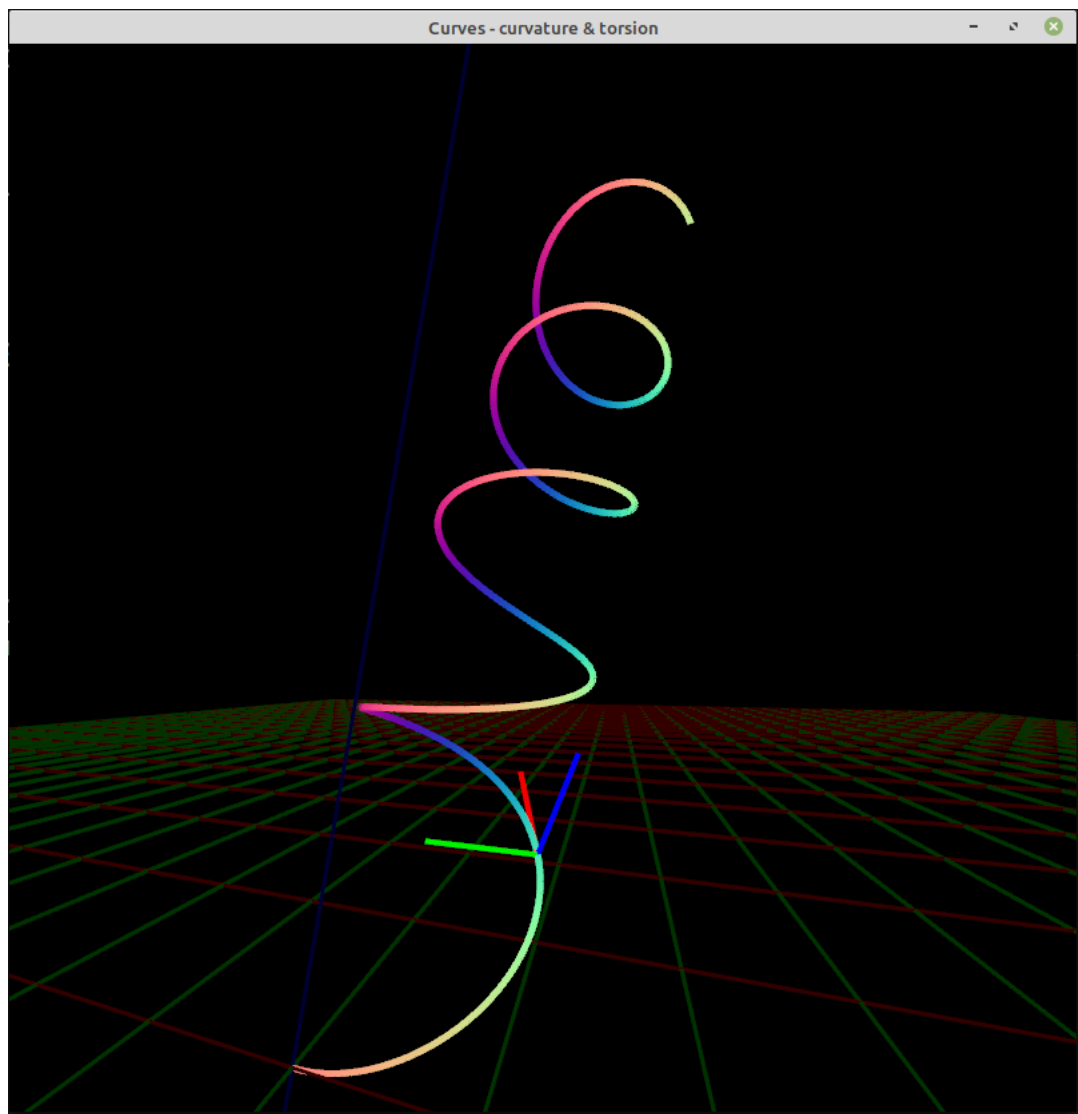


Figura 3: Hélice  $\kappa = 1, \tau = 0.3$

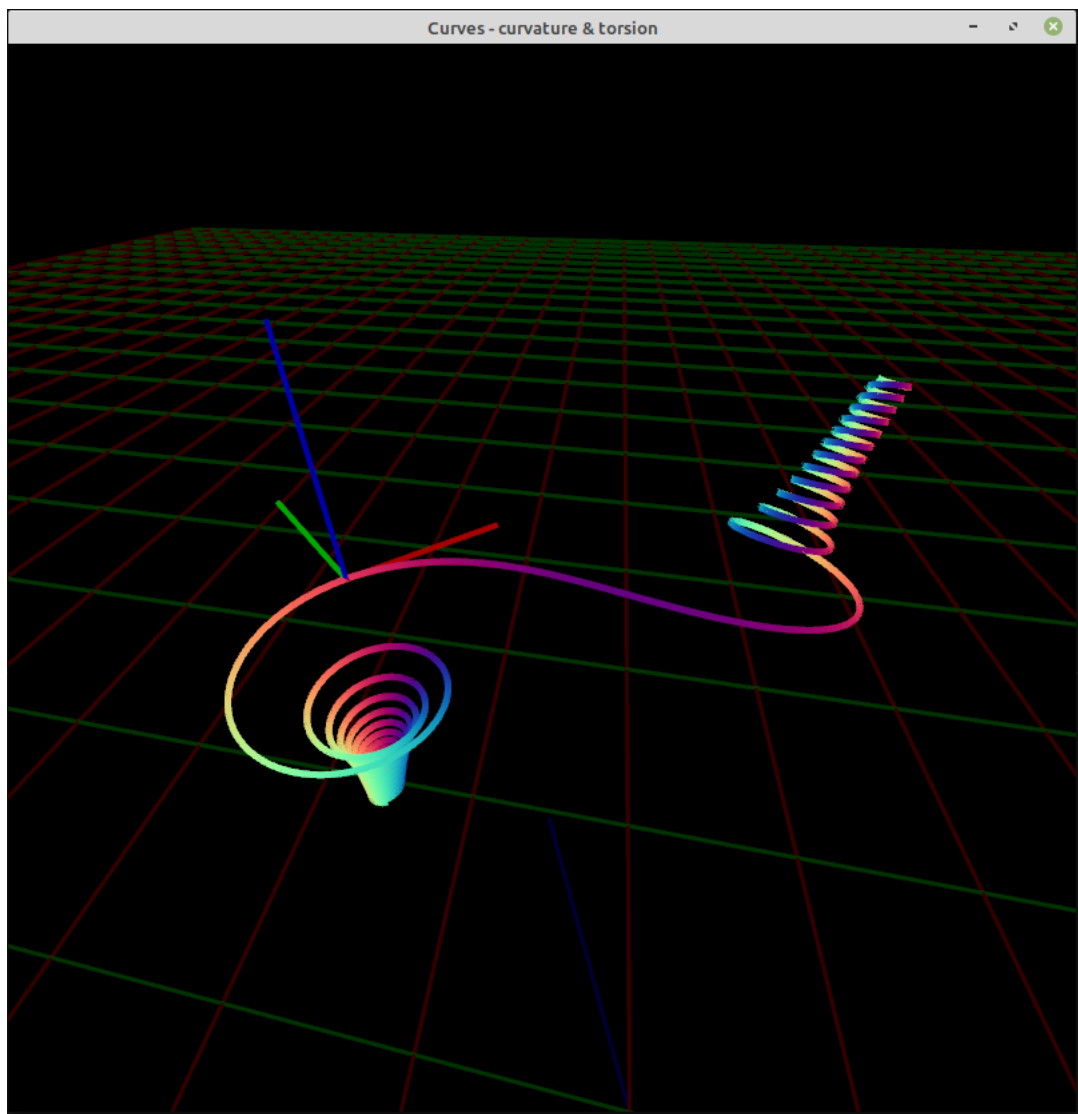


Figura 4: Curva (visão global)  $\kappa = t$ ,  $\tau = t/10$

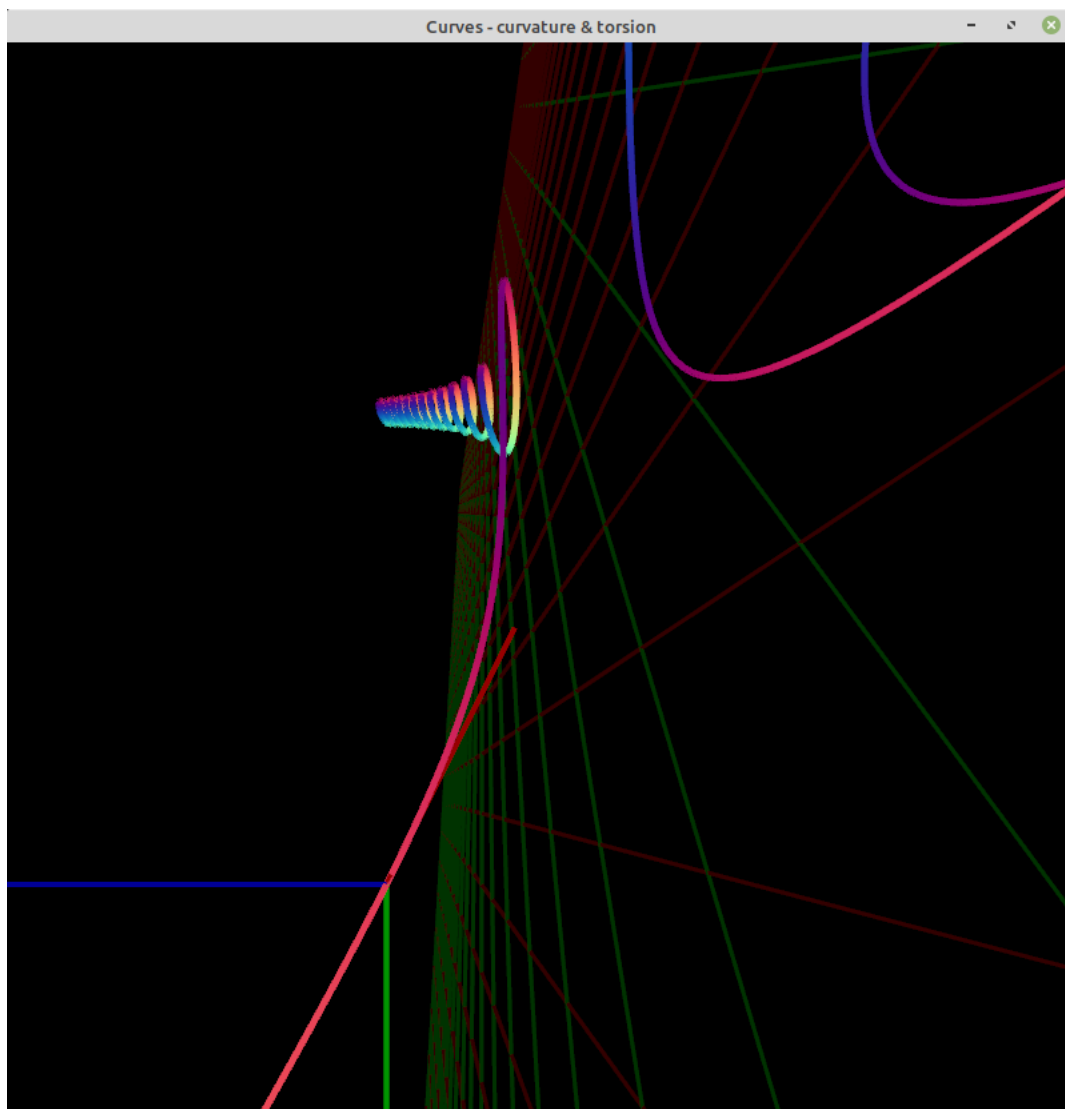


Figura 5: Curva (visão local)  $\kappa = t$ ,  $\tau = t/10$

Tal aplicação pode ser encontrada em [7].

## 6 Conclusão

Nesse trabalho vimos o Teorema Fundamental das Curvas Espaciais, o qual nos diz que uma curva no espaço é definida por uma função curvatura positiva e por uma função torção. Além disso, vimos como podemos obter uma curva possuindo tais funções, com o intuito de ilustrar o teorema.

Nota-se que nem sempre o sistema de EDO's gerado é de fácil resolução, dessa forma apresentamos um programa que calcula, iterativamente, tais curvas.

## Referências

- [1] Cruz, J. (2017). The Fundamental Theorem of Space Curves. doi: <http://math.uchicago.edu/~may/REU2017/REUPapers/Cruz.pdf>.
- [2] Brockveld, L. de L. (2018). Um estudo sobre curvas no plano e no espaço. UFSC. doi: [https://repositorio.ufsc.br/bitstream/handle/123456789/188642/tcc\\_Leonardo.pdf](https://repositorio.ufsc.br/bitstream/handle/123456789/188642/tcc_Leonardo.pdf).
- [3] Terng, CL. (2005). Math 162A Lecture notes on Curves and Surfaces, Part I. doi: [https://www.math.uci.edu/~cterng/162A\\_Lecture\\_Notes.pdf](https://www.math.uci.edu/~cterng/162A_Lecture_Notes.pdf).
- [4] Picado, J. (2006). Notas de aula de Geometria Diferencial.
- [5] Codá, F. (2015). Geometria Diferencial. IMPA. <https://www.youtube.com/watch?v=bZiAkM6ab08>.
- [6] Lima, R. F. de. (2016). Introdução à Geometria Diferencial. SBM.
- [7] Grundmann, C.; Michels, I. P. (2021). [https://github.com/IgorMichels/Curves\\_A1](https://github.com/IgorMichels/Curves_A1).