

Geodésicas

Cristhian Grundmann

Igor Patrício Michels

14 de junho de 2021

1 Introdução

Em diversas situações cotidianas a gente pode se perguntar “qual o menor caminho de ir daqui até o supermercado?”, por exemplo. Note que a resposta nem sempre é trivial, muitas vezes ela depende de como você vai se locomover, se irá caminhando ou dirigindo, por exemplo. Nesse sentido, diversos algoritmos surgem para encontrar o menor caminho, seja em distância ou em relação ao tempo, encontrando o caminho mais rápido. Problemas similares acabam aparecendo na Teoria Local das Superfícies, buscando qual o caminho mais curto entre determinados dois pontos.

Desde a época de Euclides sabe-se que, dentro da geometria euclidiana clássica, um segmento de reta é o caminho mais curto entre dois pontos do plano. De modo simples, pode-se generalizar essa afirmação para o \mathbb{R}^n . Entretanto, quando estamos sobre uma superfície que não é plana, a própria noção de distância acaba sendo alterada, de forma similar a quando mudamos a geometria no plano.

Pode-se exemplificar esse fato tomando dois pontos A e B , ambos em uma superfície $S \subset \mathbb{R}^n$. Quando definimos o segmento de reta do \mathbb{R}^n que liga A a B , não se pode afirmar que esse segmento está de fato em S . Ou seja, em uma superfície qualquer do \mathbb{R}^n , encontrar o caminho de menor distância entre dois pontos pode ser um pouco trabalhoso e, muitas vezes, contra intuitivo. Pensando nisso, o presente trabalho busca apresentar a curva de menor de distância entre dois pontos em uma determinada superfície $S \subset \mathbb{R}^n$.

2 Motivação

Uma das motivações para esse estudo dá pelo próprio planeta Terra. Podemos considerar a superfície terrestre como se fosse uma esfera do \mathbb{R}^3 . Podemos ver que um segmento de reta que liga as cidades de Nova Iorque a Londres, por exemplo, não está na superfície da esfera. Além disso, ao tomarmos o caminho em “linha reta” entre as duas cidades, seguindo sempre à leste, por exemplo, não estaríamos minimizando a distância entre as mesmas. Pode-se ter uma melhor compreensão observando visualmente esse fato na Figura 1.

Note que isso tem aplicações práticas, uma das quais pode ser facilmente citada: a aviação. Em 2017 a Latam inaugurou um voo direto de Santiago, no Chile, a Melbourne, na Austrália. Visualmente, em um

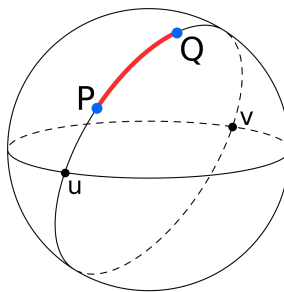


Figura 1: Caminho de menor distância entre os pontos P e Q .



Figura 2: Seria um caminho paralelo ao Equador a melhor rota de ir do Chile para a Austrália?

globo terrestre, pode-se imaginar que a melhor rota para tal viagem seria seguindo um paralelo, conforme pode-se observar na Figura 2. Entretanto, como o próprio piloto do voo inaugural dessa rota comentou, a rota com a menor distância se dá seguindo a direção Sul, se aproximando do Polo Sul, e então ir em rumo à Austrália, ao chegar próximo do Círculo Polar Antártico [3].

3 Geodésicas

Essa seção será voltada ao desenvolvimento das definições e demonstrações relacionadas as geodésicas.

3.1 Definições e Propriedades Iniciais

Definição 1. Dada uma superfície $S \subset \mathbb{R}^3$, uma geodésica é uma curva $\alpha : I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow S$ que representa o análogo a uma reta em um plano, isso é, uma curva que tem aceleração nula em relação à S .

Note que ao definirmos a Aplicação Normal de Gauss em uma superfície S , isso é, ao definir a aplicação $N : S \rightarrow \mathbb{R}^3$, podemos reescrever a Definição 1 como segue:

Definição 2. Dada uma superfície regular orientada por $N : S \rightarrow \mathbb{R}^3$, uma curva regular $\alpha : I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow S$ é uma geodésica se $\alpha''(t)$ é perpendicular a S em $\alpha(t)$ para todo ponto $t \in I$.

Dessa forma, podemos interpretar as geodésicas como curvas com aceleração nula ou, equivalentemente, vetor tangente com norma constante, como visto na Proposição 1.

Proposição 1. Se $\alpha : I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow S$ é uma geodésica, então $\|\alpha'(t)\|$ é constante.

Demonstração. Se α é uma geodésica em S , então $\alpha''(t)$ é perpendicular a S em $\alpha(t)$. Dessa forma, temos $\alpha'(t) \perp \alpha''(t) \implies \langle \alpha'(t), \alpha''(t) \rangle = 0$. Agora considere a função $\|\alpha'(t)\|^2 = \langle \alpha'(t), \alpha'(t) \rangle$. Note que

$$\frac{d}{dt} \|\alpha'(t)\|^2 = \frac{d}{dt} \langle \alpha'(t), \alpha'(t) \rangle = 2 \langle \alpha'(t), \alpha''(t) \rangle = 0,$$

de onde sai que $\|\alpha'(t)\|^2$ é constante e, consequentemente, $\|\alpha'(t)\|$ é constante. \square

Outra proposição que podemos enunciar e demonstrar é a que segue.

Proposição 2. Se $\alpha : I_1 \subseteq \mathbb{R} \rightarrow S$ é uma geodésica, então sua parametrização por comprimento de arco, $\beta : I_2 \subseteq \mathbb{R} \rightarrow S$, também é uma geodésica.

Demonstração. Tome a função comprimento de arco $s(t) = \int_0^t \|\alpha'(t)\| dt$. Pela Proposição 1, $\|\alpha'(t)\|$ é constante, logo, $s(t) = t\|\alpha'(t)\|$. Agora sabemos que $\alpha(t) = \beta(s(t))$, dessa forma, derivando duas vezes se obtém:

$$\begin{aligned} \alpha'(t) &= \beta'(s(t))s'(t) = \beta'(s(t))\|\alpha'(t)\| \text{ e} \\ \alpha''(t) &= \beta''(s(t))s'(t)\|\alpha'(t)\| + \beta'(s(t))(\|\alpha'(t)\|)' = \beta'(s(t))\|\alpha'(t)\|^2. \end{aligned}$$

Note que isso implica que $\beta''(s(t))$ é um múltiplo de $\alpha''(t)$, logo, $\beta''(s(t))$ também é perpendicular a S em $\alpha(t) = \beta(s(t))$, ou seja, β também é uma geodésica. \square

Agora, se α é uma curva de S , de modo que $\|\alpha'(t)\|$ é constante. Nesse caso, pode-se afirmar que o conjunto $\{T, N, T \times N\}$, com $T = T(\alpha(t)) = \alpha'(t)$ e $N = N(\alpha(t))$ é uma base ortogonal para \mathbb{R}^3 em todo ponto de α . Além disso, por $\|\alpha'(t)\|$ ser constante, percebe-se que $\alpha''(t) \perp T$, ou seja, podemos escrever

$$\alpha''(t) = \kappa_n \cdot N + \kappa_g \cdot (N \times T). \quad (1)$$

Dessa forma, podemos definir formalmente a curvatura normal e a curvatura geodésica:

Definição 3. Dada uma superfície $S \subset \mathbb{R}^3$ e uma curva $\alpha : I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow S$ qualquer, os valores reais κ_n e κ_g que satisfazem a Equação 1 são chamados, respectivamente, **Curvatura Normal** e **Curvatura Geodésica** de α no ponto t .

Note que utilizando as Definições 2 e 3, podemos enunciar uma nova definição de geodésica.

Definição 4. Dada uma superfície $S \subset \mathbb{R}^3$ e uma curva $\alpha : I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow S$, α é uma geodésica em S se κ_g é nula para todo ponto de α .

Tendo tais definições feitas, podemos partir para o teorema que vai nos possibilitar dizer se uma curva é ou não uma geodésica.

3.2 Caracterizando uma Geodésica

Teorema 1. Seja S uma superfície regular. Seja também $X : D \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow S$, com a primeira forma fundamental de X igual a $Edu^2 + 2Fdudv + Gdv^2$, e tome a curva regular $\alpha : I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow S$ de modo que $\alpha(t) = X(u(t), v(t))$. Temos que α é uma geodésica se, e somente se, o seguinte sistema de equações é satisfeito:

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}(Eu' + Fv') = \frac{1}{2}(E_u(u')^2 + 2F_u u'v' + G_u(u')^2) \\ \frac{d}{dt}(Fu' + Gv') = \frac{1}{2}(E_v(u')^2 + 2F_v u'v' + G_v(u')^2) \end{cases}. \quad (2)$$

As Equações de 2 são chamadas de **Equações Geodésicas**.

Demonstração. Sabendo que $\{X_u, X_v\}$ é a base do plano tangente que é tangente a S em $\alpha(t)$, então α será geodésica se, e somente se, α'' é perpendicular a X_u e a X_v . Como $\alpha' = u'X_u + v'X_v$, essa relação se resume a

$$\begin{cases} \left\langle \frac{d}{dt}(u'X_u + v'X_v), X_u \right\rangle = 0 \\ \left\langle \frac{d}{dt}(u'X_u + v'X_v), X_v \right\rangle = 0 \end{cases}. \quad (3)$$

Note que

$$\begin{aligned} \left\langle \frac{d}{dt}(u'X_u + v'X_v), X_u \right\rangle &= \frac{d}{dt}\langle u'X_u + v'X_v, X_u \rangle - \left\langle u'X_u + v'X_v, \frac{d}{dt}X_u \right\rangle \\ &= \frac{d}{dt}(Eu' + Fv') - \langle u'X_u + v'X_v, u'X_{uu} + v'X_{uv} \rangle \\ &= \frac{d}{dt}(Eu' + Fv') - (u')^2\langle X_u, X_{uu} \rangle - u'v'(\langle X_u, X_{uv} \rangle + \langle X_v, X_{uu} \rangle) - (v')^2\langle X_v, X_{uv} \rangle \end{aligned}$$

Agora, veja que

$$E_u = \langle X_u, X_u \rangle_u = \langle X_{uu}, X_u \rangle + \langle X_u, X_{uu} \rangle = 2\langle X_u, X_{uu} \rangle$$

$$G_u = \langle X_v, X_v \rangle_u = \langle X_{vu}, X_v \rangle + \langle X_v, X_{vu} \rangle = 2\langle X_v, X_{vu} \rangle$$

ou seja, temos que $\langle X_u, X_{uu} \rangle = \frac{1}{2}E_u$ e $\langle X_v, X_{uv} \rangle = \frac{1}{2}G_u$. Note também que

$$\langle X_u, X_{uv} \rangle + \langle X_v, X_{uu} \rangle = \langle X_u, X_v \rangle_u = F_u.$$

Perceba que, com isso, podemos substituir os produtos escalares encontrados no desenvolvimento da primeira equação. Dessa forma

$$\begin{aligned} \left\langle \frac{d}{dt}(u'X_u + v'X_v), X_u \right\rangle &= \frac{d}{dt}(Eu' + Fv') - \frac{1}{2}(u')^2E_u - u'v'F_u - \frac{1}{2}(v')^2G_u \\ &= \frac{d}{dt}(Eu' + Fv') - \frac{1}{2}((u')^2E_u + 2u'v'F_u + (v')^2G_u) \end{aligned}$$

Note que isso mostra que a primeira equação do Sistema de Equações 3 é equivalente a primeira equação do Sistema de Equações 2. De modo análogo, mostra-se a equivalência da segunda equação do Sistema de Equações 3 com a segunda equação do Sistema de Equações 2. \square

Note que as Equações Geodésicas vistas no Teorema 1 definem um sistema de EDO's de ordem 2, o que nos leva ao seguinte teorema.

Teorema 2. *Seja S uma superfície regular e p um ponto de S . Seja também $v \in T_pS$, então existe apenas uma geodésica α em S de modo que $\alpha(0) = p$ e $\alpha'(0) = v$. Alternativamente, podemos dizer que existe apenas uma geodésica que passa por p com velocidade v .*

Demonstração. A demonstração para esse teorema sai diretamente ao aplicar o Teorema de Existência e Unicidade de EDO's de um sistema com condição inicial. \square

Tendo em mãos esse resultado, podemos definir a geodésica resultante como segue.

Definição 5. *A geodésica α em S que satisfaz as condições dadas no Teorema 2 será denotada por $\alpha_{p,v}$ e será definida no intervalo real $(-\varepsilon, \varepsilon)$, de modo que esse seja o maior intervalo simétrico onde tal geodésica é definida.*

Dessa forma, podemos tomar $\lambda > 0$ e definir uma nova curva β de modo que

$$\begin{aligned} \beta : \left(-\frac{\varepsilon}{\lambda}, \frac{\varepsilon}{\lambda}\right) &\rightarrow S \\ t &\mapsto \alpha_{p,v}(\lambda t). \end{aligned}$$

Vemos facilmente que β é geodésica, pois $\beta''(t) = \lambda^2 \alpha_{p,v}''(\lambda t)$ é perpendicular a S no ponto $\beta(t) = \alpha_{p,v}(\lambda t)$, uma vez que $\alpha_{p,v}$ é. Além disso, temos que $\beta(0) = \alpha_{p,v}(0) = p$ e $\beta'(0) = \lambda \alpha'_{p,v}(0) = \lambda v$. Assim, utilizando o resultado do Teorema 2, vemos que β é a única geodésica que passa por p com velocidade λv , logo, $\beta = \alpha_{p,\lambda v}$. Esse resultado pode ser enunciado como uma proposição.

Proposição 3. *Dada uma geodésica $\alpha_{p,v}$ em S e $\lambda > 0$, tem-se que*

$$\forall t \in \left(-\frac{\varepsilon}{\lambda}, \frac{\varepsilon}{\lambda}\right), \alpha_{p,\lambda v}(t) = \alpha_{p,v}(\lambda t).$$

Demonstração. Demonstrado acima. \square

Uma ideia intuitiva dessa proposição é que podemos deixar o intervalo de definição de $\alpha_{p,v}$ grande à medida com que diminuimos $\|v\|$, isso é, $\alpha_{p,v}$ está definida no intervalo $(-\varepsilon, \varepsilon)$ com velocidade $\|v\|$, já $\alpha_{p,\frac{v}{n}}$ está definida no intervalo $(-n\varepsilon, n\varepsilon)$ com velocidade $\frac{1}{n}\|v\|$. Note que isso nos leva ao seguinte corolário da Proposição 3:

Corolário 1. *Se $0 < \lambda < \varepsilon$, então a geodésica $\alpha_{p,\lambda v} : \left(-\frac{\varepsilon}{\lambda}, \frac{\varepsilon}{\lambda}\right)$ está definida para $t = 1$.*

3.3 Propriedade do Caminho Mínimo

Nas seções anteriores foram definidas e provadas algumas propriedades gerais de uma geodésica. Nessa seção iremos dar ênfase a propriedade de que a geodésica é a curva que gera o caminho mais curto entre dois pontos em uma superfície. Para isso, vamos apresentar uma solução pelo método de Euler-Lagrange.

Seja $\alpha : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ uma curva parametrizada numa carta local da superfície com forma fundamental $Edu^2 + 2Fdudv + Gdv^2$. Queremos saber se essa curva minimiza comprimento entre dois pontos, com parâmetros a e b . O comprimento pode ser expresso pela integral

$$\int_a^b \|\alpha'(t)\|_{\alpha(t)} dt$$

usando a primeira forma fundamental no ponto $\alpha(t)$ para achar o comprimento do vetor tangente $\alpha'(t)$. Dessa forma, o integrando dessa integral é uma função que depende do ponto $\alpha(t)$ e do vetor tangente $\alpha'(t)$. Assim, podemos generalizar o problema de otimização, fazendo a otimização da integral

$$\mathcal{L}(\alpha) = \int_a^b L(\alpha(t), \alpha'(t)) dt.$$

Para isso, basta definir uma função $L : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$.

Para caracterizar uma curva que otimiza “localmente” a medida dada pela função L , com extremos $\alpha(a)$ e $\alpha(b)$ fixos, vamos analisar perturbações suaves da curva. Para isso, supomos uma curva suave $\mu : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$, onde $\mu(a) = \mu(b) = 0$. Usando um $\varepsilon > 0$ real como grau de perturbação, a curva perturbada é dada por $(\alpha + \varepsilon\mu)(t) = \alpha(t) + \varepsilon\mu(t)$. Essa curva tem extremos iguais a original, bem como parâmetros iguais.

A curva é otimizada localmente exatamente quando $\frac{d}{d\varepsilon} \mathcal{L}(\alpha + \varepsilon\mu) |_{\varepsilon=0} = 0$.

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\varepsilon} \int_a^b L(\alpha(t) + \varepsilon\mu(t), \alpha'(t) + \varepsilon\mu'(t)) dt &= \int_a^b \frac{d}{d\varepsilon} L(\alpha(t) + \varepsilon\mu(t), \alpha'(t) + \varepsilon\mu'(t)) dt \\ &= \int_a^b L_u(\alpha(t) + \varepsilon\mu(t), \alpha'(t) + \varepsilon\mu'(t)) \mu(t) dt \\ &\quad + \int_a^b L_v(\alpha(t) + \varepsilon\mu(t), \alpha'(t) + \varepsilon\mu'(t)) \mu'(t) dt. \end{aligned}$$

Vamos calcular essa derivada em $\varepsilon = 0$ de modo a minimizar a função, ou seja, igualando a zero. Dessa forma, temos

$$\int_a^b L_u(\alpha(t), \alpha'(t)) \mu(t) dt + \int_a^b L_v(\alpha(t), \alpha'(t)) \mu'(t) dt = 0.$$

A integral indefinida do segundo termo pode ser reescrita, pela regra do produto, como

$$\int L_v(\alpha(t), \alpha'(t)) \mu'(t) dt = L_v(\alpha(t), \alpha'(t)) \mu(t) - \int \frac{d}{dt} L_v(\alpha(t), \alpha'(t)) \mu(t) dt.$$

Note que a primeira parcela é nula, pois $\mu(a) = \mu(b) = 0$, logo, essa segunda integral se resume a

$$\int_a^b -\frac{d}{dt} L_v(\alpha(t), \alpha'(t)) \mu(t) dt.$$

Então podemos reescrever a integral como

$$\begin{aligned} \int_a^b L_u(\alpha(t), \alpha'(t)) \mu(t) dt + \int_a^b -\frac{d}{dt} L_v(\alpha(t), \alpha'(t)) \mu(t) dt &= 0 \\ \int_a^b \left(L_u(\alpha(t), \alpha'(t)) - \frac{d}{dt} L_v(\alpha(t), \alpha'(t)) \right) \mu(t) dt &= 0. \end{aligned}$$

Como isso vale para toda função μ , devemos ter que

$$L_u(\alpha(t), \alpha'(t)) - \frac{d}{dt} L_v(\alpha(t), \alpha'(t)) = 0$$

Sabemos que a função L desejada é na forma $\sqrt{f(\alpha(t), \alpha'(t))}$. Com isso, aplicando a regra da cadeia, temos

$$\begin{aligned}\frac{f_u(\alpha(t), \alpha'(t))}{2\sqrt{f(\alpha(t), \alpha'(t))}} - \frac{\frac{d}{dt}f_v(\alpha(t), \alpha'(t))}{2\sqrt{f(\alpha(t), \alpha'(t))}} &= 0 \\ f_u(\alpha(t), \alpha'(t)) - \frac{d}{dt}f_v(\alpha(t), \alpha'(t)) &= 0.\end{aligned}$$

Agora podemos definir $\alpha(t) = (u(t), v(t))$ e $\alpha'(t) = (u'(t), v'(t))$. Logo, podemos reescrever a função L , já transformando a mesma para a expressão com a forma fundamental. Assim, vale que

$$L(\alpha(t), \alpha'(t)) = L((u, v), (u', v')) = E(u, v)(u')^2 + 2F(u, v)u'v' + G(u, v)(v')^2.$$

Note que podemos reescrever a equação acima como o seguinte sistema de equações

$$\begin{cases} E_u(u, v)(u')^2 + 2F_u(u, v)u'v' + G_u(u, v)(v')^2 &= \frac{d}{dt}(2E(u, v)u' + 2F(u, v)v') \\ E_v(u, v)(u')^2 + 2F_v(u, v)u'v' + G_v(u, v)(v')^2 &= \frac{d}{dt}(2F(u, v)u' + 2G(u, v)v') \end{cases}.$$

Mas perceba que o coeficiente 2 é constante, então ele pode sair da derivada do lado direito, o que nos possibilita reescrever o sistema acima como

$$\begin{cases} \frac{1}{2} (E_u(u, v)(u')^2 + 2F_u(u, v)u'v' + G_u(u, v)(v')^2) &= \frac{d}{dt}(E(u, v)u' + F(u, v)v') \\ \frac{1}{2} (E_v(u, v)(u')^2 + 2F_v(u, v)u'v' + G_v(u, v)(v')^2) &= \frac{d}{dt}(F(u, v)u' + G(u, v)v') \end{cases}.$$

Omitindo (u, v) com o intuito de deixar a equação mais limpa, obtemos a seguinte expressão

$$\begin{cases} \frac{1}{2} (E_u(u')^2 + 2F_u u'v' + G_u(v')^2) &= \frac{d}{dt}(Eu' + Fv') \\ \frac{1}{2} (E_v(u')^2 + 2F_v u'v' + G_v(v')^2) &= \frac{d}{dt}(Fu' + Gv') \end{cases}. \quad (4)$$

Note que a curva que minimiza a distância de $\alpha(a)$ a $\alpha(b)$ deve satisfazer o Sistema de Equações 4. Mas esse sistema é igual ao Sistema de Equações 2, logo, essa curva deve ser uma geodésica, ou seja, a curva que minimiza a distância de $\alpha(a)$ a $\alpha(b)$ é justamente a geodésica que passa por esses dois pontos.

3.4 Exemplo de uma Geodésica em uma Esfera

Exemplo 1. Seja \mathbb{S}^2 a esfera unitária centrada na origem e considere a carta coordenada dada pelas coordenadas esféricas, isso é

$$X(\theta, \varphi) = (\cos \varphi \cos \theta, \sin \varphi \cos \theta, \sin \theta).$$

Encontre a forma geral das geodésicas de \mathbb{S}^2 .

Solução: primeiramente, perceba que $E = 1$, $F = 0$ e $G = \cos^2 \theta$. Dessa forma, as equações geodésicas que uma curva $\alpha(t) = X(\theta(t), \varphi(t))$ de \mathbb{S}^2 deve satisfazer são:

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}(\theta') &= -\sin \theta \cos \theta (\varphi')^2 \\ \frac{d}{dt}(\varphi' \cos^2 \theta) &= 0 \end{cases}. \quad (5)$$

Note que pela segunda equação do Sistema 5, temos que $\varphi' \cos^2 \theta = k$, uma constante real. Note que se $k = 0$, então temos que $\varphi' = 0$ ou $\cos^2 \theta = 0$. No primeiro desses casos, φ é constante e a derivada segunda de θ é constante, logo, θ é uma função linear (ou constante) e esse caso vai representar, respectivamente,

um meridiano ou um ponto. Já se $\cos^2 \theta = 0$, então temos que $\theta = \pm \frac{\pi}{2}$, a primeira equação do Sistema 5 é satisfeita trivialmente e esse caso representa os pontos dos polos da esfera.

Já se $k \neq 0$, então vamos considerar que α é parametrizada por comprimento de arco, o que pela Proposição 2 não é um problema. Dessa forma, como $\|\alpha'(t)\| = 1$, vale que $(\theta')^2 + (\varphi')^2 \cos^2 \theta = 1$. Lembrando que $\varphi' \cos^2 \theta = k$, podemos escrever $\varphi' = \frac{k}{\cos^2 \theta}$ e, conseqüentemente, vale que

$$(\theta')^2 + (\varphi')^2 \cos^2 \theta = 1 \implies (\theta')^2 = 1 - (\varphi')^2 \cos^2 \theta \implies (\theta')^2 = 1 - \frac{k^2}{\cos^2 \theta}.$$

Tendo tanto θ' quanto φ' em função de k e $\cos^2 \theta$, podemos ver como se dá a razão entre eles. Dessa forma, temos

$$\begin{aligned} \left(\frac{\varphi'}{\theta'}\right)^2 &= \frac{\frac{k^2}{\cos^4 \theta}}{1 - \frac{k^2}{\cos^2 \theta}} \\ &= \frac{\frac{k^2}{\cos^4 \theta}}{\frac{\cos^2 \theta - k^2}{\cos^2 \theta}} \\ &= \frac{k^2}{\cos^4 \theta} \cdot \frac{\cos^2 \theta}{\cos^2 \theta - k^2} \\ &= \frac{1}{\cos^2 \theta (k^{-2} \cos^2 \theta - 1)} \\ &= \frac{\sec^2 \theta}{k^{-2} \cos^2 \theta - 1} \end{aligned}$$

De onde temos que

$$\frac{\varphi'}{\theta'} = \pm \sqrt{\frac{\sec^2 \theta}{k^{-2} \cos^2 \theta - 1}} \implies \mp d\varphi = \frac{\sec \theta}{\sqrt{k^{-2} \cos^2 \theta - 1}} d\theta.$$

Dessa forma, integrando ambos os lados, obtém-se

$$\mp(\varphi - \varphi_0) = \int_{\theta_0}^{\theta} \frac{\sec \theta}{\sqrt{k^{-2} \cos^2 \theta - 1}} d\theta.$$

Podemos fazer a mudança de variável $u = \tan \theta$, logo $du = \sec^2 \theta d\theta$, o que nos dá que $d\theta = \frac{du}{1+u^2}$ e $\sec \theta = \sqrt{1+u^2}$. Podemos simplificar o radical que está no denominador escrevendo o seno como inverso da secante, assim

$$\sqrt{k^{-2} \cos^2 \theta - 1} = \sqrt{k^{-2} \left(\frac{1}{1+u^2}\right) - 1} = \sqrt{\frac{k^{-2} - 1 - u^2}{1+u^2}}.$$

Por simplicidade, chamaremos $K = k^{-2} - 1$. Dessa forma, temos

$$\mp(\varphi - \varphi_0) = \int_{\theta_0}^{\theta} \frac{\sqrt{1+u^2}}{\sqrt{K-u^2}} \frac{du}{1+u^2} = \int_{\theta_0}^{\theta} \frac{du}{\sqrt{K-u^2}}.$$

Logo, chegamos que

$$\mp(\varphi - \varphi_0) = \arcsin\left(\frac{u}{K}\right) = \arcsin\left(\frac{\tan \theta}{K}\right).$$

Dessa forma, vale que

$$\mp K \sin(\varphi - \varphi_0) = \tan \theta.$$

Desenvolvendo essa expressão, temos

$$\begin{aligned}\mp K \sin(\varphi - \varphi_0) &= \tan \theta \\ \mp K (\sin \varphi \cos \varphi_0 - \sin \varphi_0 \cos \varphi) &= \frac{\sin \theta}{\cos \theta} \\ \mp K (\sin \varphi \cos \theta \cos \varphi_0 - \sin \varphi_0 \cos \varphi \cos \theta) &= \sin \theta.\end{aligned}$$

Por fim, fazendo $\pm K \sin \varphi_0 = a$ e $\mp K \cos \varphi_0 = b$, podemos escrever

$$\sin \theta = a \cos \varphi \cos \theta + b \sin \varphi \cos \theta,$$

mas note que nossa superfície foi parametrizada por $X(\theta, \varphi) = (\cos \varphi \cos \theta, \sin \varphi \cos \theta, \sin \theta)$, logo, vale que

$$z = ax + by,$$

que, como sabemos, é um plano que passa pela origem. Logo, as geodésicas de uma esfera são as curvas que representam a interseção entre a esfera e tal plano, de onde conclui-se que as geodésicas da esfera são as circunferências de raio máximo.

3.4.1 Na prática, isso importa em quê?

Trazendo o exemplo de [3] novamente, temos que Santiago está localizada nas coordenadas (33.4489°S, 70.6693°W) e Melbourne está em (37.8136°S, 144.9631°E). Note que as latitudes são muito próximas, então vamos considerar uma rota longitudinal, isso é, rumando sempre no sentido leste-oeste (ou oeste-leste, dependendo qual o mais próximo) de Santiago a Melbourne. Vale ressaltar também que, a fim de cálculos, estamos considerando o raio terrestre igual a 6371 km.

Como as latitudes são próximos, vamos supor também que as duas cidades estão localizadas a uma latitude igual a 35.63125°S, que é a média das latitudes reais. Nesse caso, nosso caminho se dá pelo menor arco de circunferência com a latitude dada, ou seja, teremos um raio igual a $6371 \cdot \cos 35.63125^\circ \approx 5178.24$ km.¹

Feito isso, podemos ver quantos graus estaremos nos deslocando ao fazer o percurso no sentido leste-oeste. Isso é fácil de calcular, pois note que indo para o leste temos que nos deslocar 70.6693° para chegar no Meridiano de Greenwich, depois mais 144.9631° para chegar a longitude desejada, percorrendo ao todo 215.6324°. Nesse caso, indo no sentido oeste-leste teremos um deslocamento de $360^\circ - 215.6324^\circ = 144.3676^\circ$, que é um deslocamento menor, ou seja, é preferível percorrer esse sentido. Por fim, note que esse deslocamento é de, aproximadamente, 2.52 radianos, assim, ao trazer isso para quilômetros, a distância longitudinal entre as duas cidades será próxima a $5178.24 \cdot 2.52 = 13049.16$ km.

Já para calcular a distância entre Santiago a Melbourne utilizando como caminho a circunferência geodésica, isso é, a circunferência de raio igual ao raio da Terra e que passa por ambas as cidades, podemos utilizar o resultado da proposição a seguir.

Proposição 4. *Dada uma esfera de raio r e centrada na origem, com parametrização dada por coordenadas polares, isso é, $(x, y, z) = (r \cos \varphi \cos \theta, r \sin \varphi \cos \theta, r \sin \theta)$, tem-se que a distância entre dois pontos P e Q , de latitudes e longitudes iguais a θ_1, φ_1 e θ_2, φ_2 , passando pela grande circunferência que contém P e Q é $r\omega$, onde ω é um ângulo central da esfera, dado em radianos, e que satisfaz a seguinte equação*

$$\cos \omega = \cos \theta_1 \cos \theta_2 \cos(\varphi_1 - \varphi_2) + \sin \theta_1 \sin \theta_2.$$

Demonstração. A demonstração pode ser encontrada na página 263 de [8]. □

Note que essa proposição nos permite calcular a distância aproximada, pela circunferência geodésica, entre duas cidades do planeta quando tomamos $r = 6371$ km. Dessa forma, a distância entre Santiago (33.4489°S, 70.6693°W), no Chile, e Melbourne (37.8136°S, 144.9631°E), na Austrália, pode ser encontrada utilizando a Proposição 4. Nesse caso, temos que o respectivo ω é tal que

$$\begin{aligned}\cos \omega &= \cos 37.8136^\circ \cos 33.4489^\circ \cos(144.9631^\circ + 70.6693^\circ) + \sin 37.8136^\circ \sin 33.4489^\circ \\ &\approx -0.1978.\end{aligned}$$

¹Resultado sai diretamente do Teorema de Pitágoras, $R^2 = r^2 + z^2$, onde r é o raio dessa seção com latitude fixa e R é o raio da esfera.

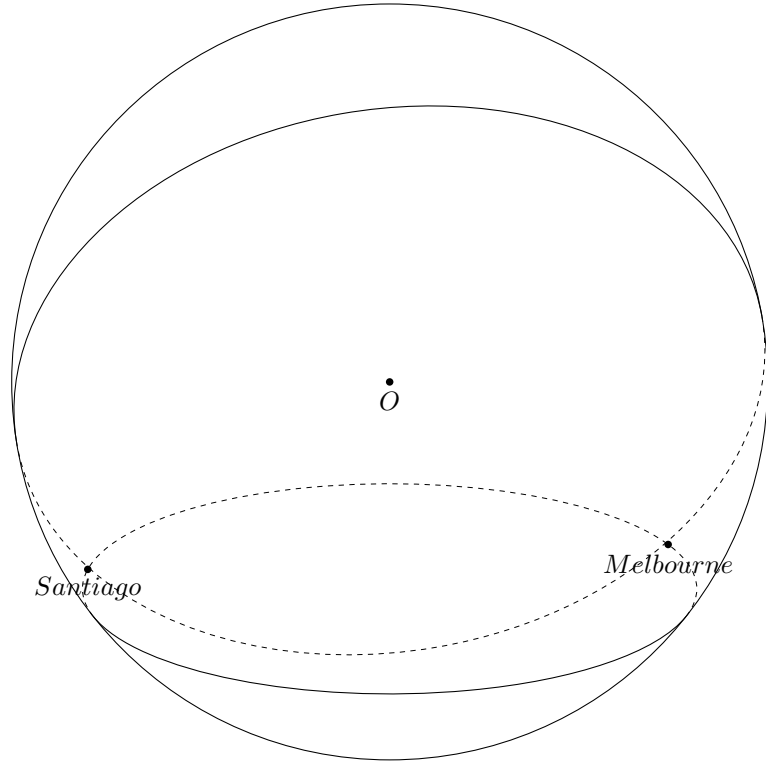


Figura 3: Caminhos longitudinal e geodésico entre as cidades de Santiago e Melbourne.

Note que, como Santiago está à oeste do Meridiano de Greenwich, usamos sua longitude como negativa. Por fim, note que queremos o menor ângulo ω , logo, podemos considerar $\omega \in [0, \pi)$. Assim, temos que $\omega \approx \arccos -0.1978 \approx 1.77$ radianos. Dessa forma, temos que a distância entre tais cidades, utilizando a curva geodésica como rota, é de aproximadamente $6371 \cdot 1.77 = 11276.67$ km.

Podemos fazer uma análise mais “justa”, mantendo a hipótese de que as duas cidades se localizam na mesma latitude, isso é, supondo que as cidades estão ambas sobre o paralelo 35.63125°S . Nesse caso, temos

$$\begin{aligned} \cos \omega &= \cos 35.63125^\circ \cos 35.63125^\circ \cos(144.9631^\circ + 70.6693^\circ) + \sin 35.63125^\circ \sin 35.63125^\circ \\ &\approx -0.1975. \end{aligned}$$

De onde temos que $\omega \approx \arccos -0.1975 \approx 1.7696$, do que decorre que a distância entre tais cidades é de, aproximadamente, $6371 \cdot 1.7696 = 11274.1216$ km. Uma ilustração desse exemplo pode ser visto na Figura 3.

Note que esse exemplo ajuda a ilustrar o fato de que a geodésica é a curva de menor distância entre dois pontos em uma superfície, em especial na superfície esférica. Na prática, a geodésica pode ser utilizada como rota aérea e naval entre dois pontos distantes com o objetivo de diminuir o custo, tanto o temporal quanto o custo de combustível a ser utilizado na viagem.

4 Rotações

Seja $w = \alpha X_u + \beta X_v$. Queremos rotacionar esse vetor por um ângulo γ nessa mesma base. Podemos fazer isso ortogonalizando e normalizando essa base, aplicando a matriz de rotação usual e depois obter os componentes da base original.

A ortogonalização da base é simplesmente

$$\begin{aligned}\tilde{X}_u &= X_u \\ \tilde{X}_v &= X_v - X_u \frac{\langle X_u, X_v \rangle}{\langle X_u, X_u \rangle} = X_v - X_u \frac{F}{E}\end{aligned}$$

O módulo ao quadrado do segundo vetor da base é

$$\begin{aligned}\langle X_v, X_v \rangle - 2 \frac{F}{E} \langle X_u, X_v \rangle + \frac{F^2}{E^2} \langle X_u, X_u \rangle &= \\ G - 2 \frac{F^2}{E} + \frac{F^2}{E} &= G - \frac{F^2}{E}\end{aligned}$$

Então podemos escrever a base normalizada como

$$\begin{aligned}\hat{X}_u &= \frac{X_u}{\sqrt{E}} \\ \hat{X}_v &= \frac{X_v - X_u \frac{F}{E}}{\sqrt{G - \frac{F^2}{E}}}\end{aligned}$$

Como só precisamos de uma base ortogonal cujos vetores são de mesmo comprimento, podemos dividir ambos por \sqrt{E}

$$\begin{aligned}X'_u &= \frac{X_u}{E} \\ X'_v &= \frac{X_v - X_u \frac{F}{E}}{\sqrt{EG - F^2}}\end{aligned}$$

Podemos tomar $R = \sqrt{EG - F^2}$.

Agora podemos achar $w = \alpha' X'_u + \beta' X'_v$ substituindo.

$$w = \alpha' \frac{X_u}{E} + \beta' \frac{X_v}{R} - \beta' \frac{X_u F}{RE}$$

Na mesma base, os coeficientes de um vetor são únicos.

$$\begin{aligned}\alpha &= \frac{\alpha'}{E} - \frac{\beta' F}{RE} \\ \beta &= \frac{\beta'}{R} \\ \beta' &= \beta R \\ \alpha' &= \alpha E + \frac{\beta' F}{R} = \alpha E + \beta F\end{aligned}$$

O vetor rotacionado é

$$\begin{aligned}R_w &= (\alpha' \cos \gamma - \beta' \sin \gamma) X'_u + (\alpha' \sin \gamma + \beta' \cos \gamma) X'_v \\ R_w &= (\alpha' \cos \gamma - \beta' \sin \gamma) \frac{X_u}{E} + (\alpha' \sin \gamma + \beta' \cos \gamma) \frac{X_v - X_u \frac{F}{E}}{R} \\ R_w &= \left(\alpha' \cos \gamma - \beta' \sin \gamma - (\alpha' \sin \gamma + \beta' \cos \gamma) \frac{F}{R} \right) \frac{X_u}{E} + (\alpha' \sin \gamma + \beta' \cos \gamma) \frac{X_v}{R} \\ R_w &= \left(\alpha E \cos \gamma - \left(\frac{\beta R^2}{R} + \frac{\alpha E F}{R} + \frac{\beta F^2}{R} \right) \sin \gamma \right) \frac{X_u}{E} + (\alpha' \sin \gamma + \beta' \cos \gamma) \frac{X_v}{R} \\ R_w &= \left(\alpha E \cos \gamma - \left(\frac{\beta E G}{R} + \frac{\alpha E F}{R} \right) \sin \gamma \right) \frac{X_u}{E} + (\alpha' \sin \gamma + \beta' \cos \gamma) \frac{X_v}{R} \\ R_w &= \left(\alpha \cos \gamma - \frac{\beta G + \alpha F}{R} \sin \gamma \right) X_u + (\alpha' \sin \gamma + \beta' \cos \gamma) \frac{X_v}{R} \\ R_w &= \left(\alpha \cos \gamma - \frac{\alpha F + \beta G}{R} \sin \gamma \right) X_u + \left(\frac{\alpha E + \beta F}{R} \sin \gamma + \beta \cos \gamma \right) X_v\end{aligned}$$

5 Aplicação computacional

A nossa aplicação da equação geodésica é um programa gráfico 3d interativo que exhibe uma superfície parametrizada dada pelo usuário. O usuário pode interagir com a câmera e com um ponto que pode se mover sobre a superfície. O ponto pode se mover nas direções das coordenadas ou na direção geodésica. É possível traçar o caminho andado pelo ponto ao se mover por geodésicos.

O programa não é simples, e por isso é dividido em partes: leitura de superfícies, computação simbólica, compilação de expressões, e um ambiente interativo que usa o método de Euler para encontrar geodésicos.

5.1 Leitura de Superfícies

Essa parte consiste em ler uma parametrização dada pelo usuário (em forma de texto) e interpretá-la para ser usada na computação simbólica. A expressão deve ser da forma $(x, y, z) [min_u, max_u] [min_v, max_v]$, onde as expressões x , y e z são funções de u e v . Os números min_u , max_u , min_v e max_v definem o domínio da aplicação em forma de retângulo.

A gramática dessas expressões é flexível. Ela inclui:

- exponenciação: u^3
- multiplicação por justaposição: $3u$ é $3 * u$
- aplicação de funções sem parênteses: $\cos u$ é $\cos(u)$

Obs: o argumento da função pode ser (gramaticalmente) uma constante/número, uma variável, outra aplicação ou uma expressão entre parênteses.

- variáveis predefinidas: u e v
- constantes predefinidas: π e e
- funções predefinidas: \sin , \cos , \tan , \arcsin , \arccos , \arctan , \exp , \log e $\sqrt{}$

O texto é interpretado dessa forma e é gerado árvores sintáticas que representam as expressões dadas em texto pelo usuário. Essa forma é muito mais fácil de processar nos estágios seguintes.

5.2 Computação simbólica

É necessário computar várias derivadas para se chegar na equação geodésica. Para isso, o programa é capaz de derivar uma expressão simbolicamente, em relação a u ou v . Como as expressões são árvores sintáticas, a derivação pode ser feita recursivamente. Dependendo do tipo de expressão, uma regra de derivação específica é usada. Todos os tipos de expressão possuem uma regra de derivação, então qualquer expressão pode ser derivada. Esse processo de derivação é bastante verboso, fazendo a expressão final ter bastante redundâncias. Nosso programa não é capaz de simplificar essas redundâncias, então essas expressões não são viáveis de se calcular (para u e v dados) devido ao seu tempo de execução.

5.3 Compilação de expressões

Como dito, as expressões possuem redundâncias que as fazem ser muito mais lentas de se efetuar. Além disso, os *overheads* da navegação pela árvore sintática também contribuem bastante para o tempo de execução.

Para resolver esses dois problemas, a nossa solução foi uma só. Convertamos as expressões sintáticas novamente para a forma textual, mas dessa vez em forma de um programa em C++. Cada função relevante é convertido numa função C++ que calcula o valor dados u e v . Um compilador moderno é muito ágil em simplificar as expressões geradas pela derivação. Além disso, o cálculo dessas funções estarão na forma de código de máquina, fazendo seus cálculos serem inúmeras vezes mais rápidos. O código compilado é então carregado pelo nosso programa e as funções são encontradas e prontas para o uso.

O compilador também é extremamente rápido no seu trabalho. A esfera

$$\left(\frac{1}{\sqrt{1+u^2+v^2}}, \frac{u}{\sqrt{1+u^2+v^2}}, \frac{v}{\sqrt{1+u^2+v^2}} \right)$$

gera um código de 15000 linhas. Mesmo assim, o compilador faz seu trabalho em menos de 1 segundo.

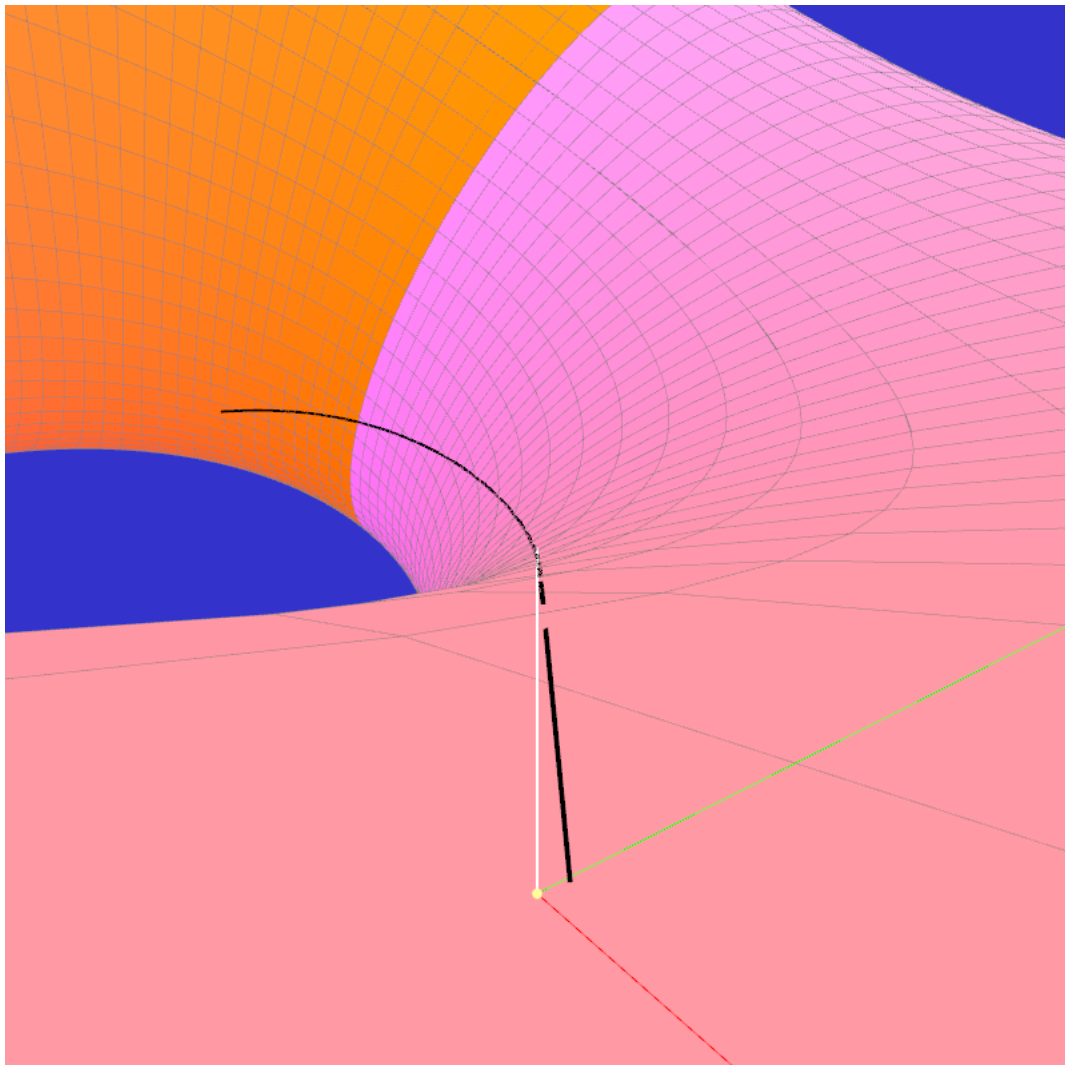


Figura 4: Curva geodésica num Toróide

5.4 Ambiente interativo

O ambiente interativo é construído usando OpenGL e C++. Para desenhar a superfície, o domínio da parametrização é cortado em vários retângulos, formando uma malha de pontos uv . O programa então gera uma amostra das imagens da malha uv , usando uma das funções compiladas. Uma vez gerada essa amostra, desenhar a superfície é mais rápida, pois os pontos já são conhecidos, basta desenhá-los os quadriláteros correspondentes.

O programa interage com o usuário através de um ponto sobre a superfície. Esse ponto pode ser movido nas direções das coordenadas ou em direções geodésicas, com direção inicial mutável. O programa também desenha os vetores da base, apontando para as linhas das coordenadas. Além disso, também desenha o vetor que define a direção para se andar em geodésicas.

O programa também pode fazer um traço do caminho percorrido pelo ponto, mas somente para caminhos geodésicos, e não para caminhos de coordenadas.

O usuário pode configurar a exibição da superfície, como número de pontos na amostra e visão grade das coordenadas. Além disso, é possível navegar com a câmera global. O usuário pode alterar entre visão global e visão local, cuja câmera fica grudada no ponto da superfície.

6 Conclusão

Nesse trabalho introduzimos as geodésicas, com sua definição e demonstração de algumas de suas propriedades, incluindo a propriedade que diz respeito a geodésica ser a curva de menor caminho entre dois pontos em uma superfície. Além disso, viu-se um exemplo de geodésica que pode ser aplicado no dia a dia por empresas aéreas e navais, com o cálculo da geodésica em uma esfera, bem como o exemplo real da distância entre Santiago e Melbourne.

Também foi apresentado um programa em C++ com o intuito de ilustrar visualmente as geodésicas em algumas superfícies espaciais, possibilitando, inclusive, caminhar sobre as superfícies.

Referências

- [1] Great Circle Distance. *Wikipedia*. https://en.wikipedia.org/wiki/Great-circle_distance.
- [2] Terra Verde Globo. *Pixabay*.
- [3] TEDESCO, L. A. del. (2017). Latam inaugura voo direto de 15 horas entre Chile e Austrália. *Folha de S.Paulo*. <https://www1.folha.uol.com.br/turismo/2017/10/1925090-latam-inaugura-voo-direto-de-15-horas-entre-chile-e-australia.shtml>.
- [4] NUNES, B. (2010). Geometria Diferencial de Superfícies e o Teorema de Gauss-Bonnet. *UFSC*. doi: http://mtm.ufsc.br/~ebatista/Orientacoes_arquivos/tcc_bruna_certo.pdf.
- [5] LIMA, R. F. de (2016). Introdução à Geometria Diferencial. *SBM*.
- [6] BRUXEL, D. A. (2018). Um Estudo sobre Curvas Geodésicas. *UFFS*. doi: <https://rd.uffs.edu.br/bitstream/prefix/2089/1/BRUXEL.pdf>.
- [7] MATOS, A. C. de A. (2016). Geodésicas: Suas Equações e Algumas Aplicações. *UEFS*. doi: http://proformat.uefs.br/arquivos/File/ARIANA_CORDEIRO_DE_AMORIM_MATOS.pdf.
- [8] FENN, R. (2007). Geometry. *Springer*.
- [9] Grundmann, C.; Michels, I. P. (2021). https://github.com/IgorMichels/Curves_and_surfaces.