Introdução à Análise Numérica
$4^{\underline{a}}$ Lista

Igor Patrício Michels

16/10/2021

Primeiramente, a questão 3 se encontra no arquivo .py correspondente a ela. Vamos então provar a questão 4.

Note que, se temos um polinômio de grau máximo n que passa pelos pontos $(i, -i), i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ e com termo independente igual a $(-1)^n$ deve ser o mesmo polinômio que o polinômio que passa pelos pontos $(i, -i), i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ e $(0, (-1)^n)$. Dessa forma, seja $P(x)$ esse polinômio e definimos $Q(x) = P(x) + x$.

É fácil ver que o grau de P e de Q é o mesmo, uma vez que P tem grau maior ou igual a 1 e P e Q diferem apenas pela soma de um termo de grau 1. Além disso, é fácil ver que, para $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$, $Q(i) = 0$, pois $Q(i) = P(i) + i = -i + i = 0$. Ou seja, Q é um polinômio de grau n com as raízes sendo o conjunto $\{1, 2, \ldots, n\}$. Sabendo disso, podemos escrever Q como

$$Q(x) = a \cdot \prod_{i=1}^{n} (x - i), \text{ para algum coeficiente } a.$$

Podemos descobrir a utilizando o ponto $(0, (-1)^n)$ de P, que, por Q, nos leva ao mesmo ponto ($Q(0) = P(0) + 0 = P(0) = (-1)^n$). Dessa forma, temos que

$$\begin{aligned}
Q(0) &= a \cdot \prod_{i=1}^{n} (0 - i) \\
(-1)^n &= a \cdot \prod_{i=1}^{n} (-i) \\
(-1)^n &= (-1)^n \cdot a \cdot \prod_{i=1}^{n} i \\
1 &= a \cdot \prod_{i=1}^{n} i \\
1 &= a \cdot n! \\
a &= \frac{1}{n!}.
\end{aligned}$$

Logo, temos que

$$Q(x) = \frac{1}{n!} \prod_{i=1}^{n} (x - i),$$

ou seja, vale que

$$P(x) = \frac{1}{n!} \prod_{i=1}^{n} (x - i) - x.$$

Agora, para k natural, com $k > n$, notamos que

$$\begin{aligned}
P(k) &= \frac{1}{n!}\prod_{i=1}^{n}(k-i) - k \\
&= \frac{(k-n-1)!}{n!\cdot(k-n-1)!}\prod_{i=1}^{n}(k-i) - k \\
&= \frac{(k-1)!}{n!\cdot(k-n-1)!} - k \\
&= \binom{k-1}{n} - k,
\end{aligned}$$

como queríamos demonstrar.