Introdução à Análise Numérica
$1^{\underline{a}}$ Lista

Igor Patrício Michels

20/08/2021

Considerando a equação de recorrência

$$a_{n+1} = \frac{22}{7}a_n - \frac{3}{7}a_{n-1}; \qquad a_0 = 1,\ a_1 = \frac{1}{7},$$

podemos encontrar o termo geral por meio do método de Funções Geradoras. Dessa forma, seja

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

a Função Geradora dessa sequência. Assim, reescrevendo nossa sequência como

$$a_n x^n = \frac{22}{7}a_{n-1}x^n - \frac{3}{7}a_{n-2}x^n,$$

podemos fazer o somatório para $n \geq 2$, o que nos dá

$$\sum_{n=2}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{22}{7}a_{n-1}x^n - \sum_{n=2}^{\infty} \frac{3}{7}a_{n-2}x^n.$$

Note que, com isso, podemos ver que

$$f(x) - a_0 - a_1 x = \frac{22}{7}x\left(f(x) - a_0\right) - \frac{3}{7}x^2 f(x),$$

de onde sai que

$$f(x) = \frac{7 - 21x}{3x^2 - 22x + 7},$$

cuja representação em séries se dá por

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{7^n}x^n,$$

e, com isso, concluí-se que $a_n = 7^{-n}$.

Uma implementação de um processo iterativo para encontrar essa sequência, bem como plotando alguns gráficos, pode ser encontrado abaixo, no Listing 1.

```python
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

def recorrencia(n, a0, a1):
  if n == 0:
    return a0
  elif n == 1:
    return a1
  else:
    a = [a0, a1]
    for i in range(2, n + 1):
```

```python
        a0, a1 = a1, 22/7 * a1 - 3/7 * a0
        a.append(a1)

    return np.array(a)

def sequencia(n, a0 = 1, a1 = 1/7):
  a = recorrencia(n, a0, a1)
  return a[-1]

def plot_graph(n, a0 = 1, a1 = 1/7, expression = '(1/7)**i', save_name = 'graph.png'):
  a_real = np.array([eval(expression) for i in range(n + 1)])
  a_alg = recorrencia(n, a0, a1)
  n = np.array([*range(n + 1)])

  plt.clf()
  plt.plot(n, a_real, 'b*', label = '1/7^n')
  plt.plot(n, a_alg, 'r*', label = 'Recorrencia')
  plt.xlabel('n')
  plt.ylabel('a_n')
  plt.legend()
  plt.savefig(save_name)

for n in range(10, 110, 10):
  plot_graph(n, save_name = f'graph with n = {n}.png')
```

Listing 1: Função para a recorrência

Como resultado do código, obtemos alguns gráficos, dentre os quais estão as Figuras 1 e 2.

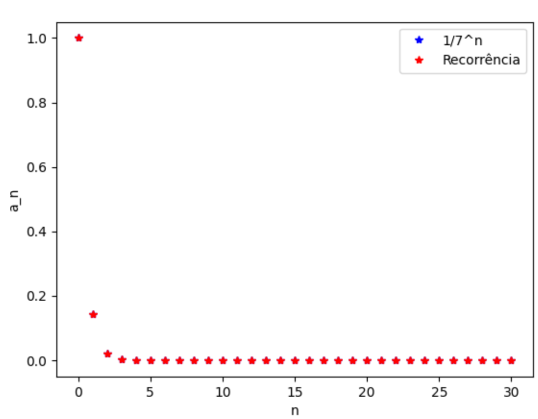

Figure 1: Gráfico ilustrando 30 iterações

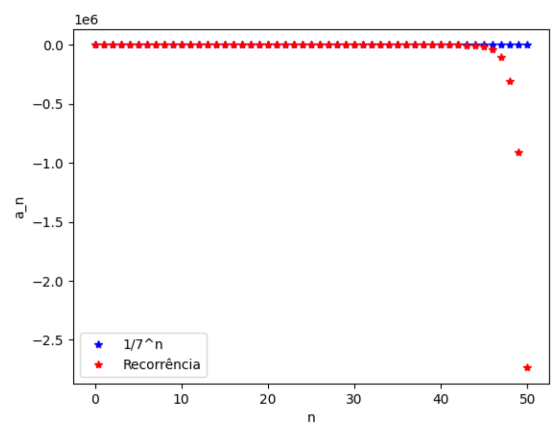

Figure 2: Gráfico ilustrando 50 iterações

Podemos perceber pelos gráficos apresentados que a recorrência, apesar de resultar na sequência $a_n = 7^{-n}$, não está convergindo para a mesma, mas sim para $-\infty$. Essa convergência se dá pelo fato de que o número 7 é primo com o número 2, ou seja, frações com denominadores 7 (e seus múltiplos) não podem ser representadas de forma finita em binário o que faz com que o computador realiza uma aproximação para o valor $\frac{1}{7}$, o que pode causar essas explosões no limite da sequência. Note que essas explosões começam a ser perceptíveis quando n é grande, o que será explicado mais adiante.

Primeiro vamos resolver essa recorrência de outra forma. Calculando o polinômio característico temos

$$x^2 - \frac{22}{7}x + \frac{3}{7} = 0 \implies x = \frac{1}{7} \vee x = 3.$$

Dessa forma, temos que o termo geral da recorrência é dado por

$$x_n = c_1 \cdot 7^{-1} + c_2 \cdot 3^n.$$

Agora, calculando o valor $\frac{1}{7}$, como armazenado no computador, temos

$$\frac{1}{7} = 0.\overline{001}_2,$$

ou seja, temos $s = 0_2$ (o valor é positivo), $c = -3 + 1023 = 1020 = 01111111100_2$ e $f = 001001\ldots0010_2$, logo, podemos ver que

$$\frac{1}{7} - fl\left(\frac{1}{7}\right) = \left(1.\overline{001} \cdot 2^{-54}\right)_2,$$

de onde chegamos que, no computador, $\frac{1}{7}$ é, na realidade, igual a $\frac{1}{7} - \delta$, com $\delta = \left(1.\overline{001} \cdot 2^{-54}\right)_2$. Dessa forma, a sequência encontrada pelo computador é dada por

$$\begin{cases} 1 & = & c_1 + c_2 \\ \frac{1}{7} - \delta & = & \frac{c_1}{7} + 3c_2 \end{cases}.$$

Resolvendo o sistema acima por substituição, temos

$$\begin{aligned} \frac{1}{7} - \delta = \frac{c_1}{7} + 3 - 3c_1 &\iff 1 - 7\delta = c_1 + 21 - 21c_1 \\ &\iff 20c_1 = 20 + 7\delta \\ &\iff c_1 = 1 + \frac{7\delta}{20} \\ &\implies c_2 = -\frac{7\delta}{20}. \end{aligned}$$

Logo temos o termo geral

$$x_n = 7^{-n} \cdot \left(1 + \frac{7\delta}{20}\right) - 3^n \frac{7\delta}{20}.$$

Como visto anteriormente, $\delta > 0$, dessa forma, quando n é pequeno o último termo da expressão acima é baixo, o que não nos dá uma diferença perceptível, já quando n aumenta o valor de 3^n começa a crescer e o último termo começa a dominar o termo geral, fazendo com que a sequência exploda e tenda para $-\infty$.