“Elo” bidimensional

May 25, 2020

Elo unidimensional

O modelo diz que cada jogador i é tem uma proficiência b_i, de modo que

$$Pr(jog_i\ ganhar\ jog_j) = \frac{1}{1 + e^{-(b_1 - b_2)}}$$

Fazendo $B_i = e^{b_i}$ a probabilidade pode ser expressa por

$$Pr(jog_i\ ganhar\ jog_j) = \frac{B_i}{B_i + B_j}$$

Denote a probabilidade de i ganhar de j por p_{ij} . Então $p_{ij} = \frac{1}{1+e^{-(b_i - b_j)}}$ e, portanto, $(b_i - b_j) = log(\frac{p_{ij}}{1-p_{ij}})$ (obs: a função $log(\frac{p}{1-p})$, ou $log(p) - log(1-p)$, é chonhecida como “logit” de p. É o logo dos “odds” ou chances. O modelo então é dado por, $logit(p_{ij}) = (b_i - b_j))$.

Transitividade do modelo unidimensional

Se três jogadores, 1, 2 e 3, seguem o modelo unidimensional, então

$$(b_1 - b_2) = log(\frac{p_{12}}{1 - p_{12}})$$

$$(b_2 - b_3) = log(\frac{p_{23}}{1 - p_{23}})$$

Somando as igualdades: $(b1 - b3) = log(\frac{p_{12}}{1-p_{12}} \cdot \frac{p_{23}}{1-p_{23}})$. Portanto, $log(\frac{p_{13}}{1-p_{13}}) = log(\frac{p_{12}}{1-p_{12}} \cdot \frac{p_{23}}{1-p_{23}})$, ou seja, a probabilidade de 1 vencer 3 está determinada se forem conhecidas as probabilidades de 1 vencer 2 e 2 vencer 3. Explicitamente,

$$p_{13} = \frac{p_{12} \cdot p_{23}}{(1 - p_{12}) \cdot (1 - p_{23}) + p_{12} \cdot p_{23}}$$

Claro que a transitividade é uma propriedade deste modelo: se $p_{12} > 0.5$ e $p_{23} > 0.5$, então $p_{13} > 0.5$.

Modelos bidimensionais

As proficiências agora são vetores $v_i = (a_i, b_i)$. Por extensão do caso unidimensional, a probabilidade de i ganhar de j é dada por $logit(p_{ij}) = f(v_i, v_j)$. Lembrando que no caso unidimensional, $f(b_i, b_j) = (b_i - b_j)$.

Uma condição necessária para que essa função satisfaça a premissa de que para todo i e j, $p_{ij} = 1 - p_{ji}$ é que seja alternada, isto é

$$f(v_i, v_j) = -f(v_j, v_i)$$

Uma função $f : R^4 \rightarrow R$ linear não funciona, pois reduziria a proficiência de cada jogador $v_i = (a_i, b_j)$ a uma soma ponderada $\theta_i = c_1 \cdot a_i + c_2 b_i$ e seria equivalente ao modelo unidimensional. Temos então que buscar modelos não lineares.

Produto vetorial

Impondo f bilinear, a única opção bilinear alternada é $f(v_i, v_j) = det([v_j, v_i]) = a_j b_i - a_i b_j$ (ou um múltiplo do determinante).

Neste caso, fazendo $B_i = e^{b_i}$ a probabilidade pode ser expressa por

$$Pr(jog_i\ ganhar\ jog_j) = \frac{B_i^{a_j}}{B_i^{a_j} + B_j^{a_i}}$$

O caso unidimensional é um caso particular onde todos as primeiras coordenadas dos vetores de proficiências são iguais a 1 ($a_k = 1$).

Fazendo $A_i = e^{a_i}$, a probabilidade é expressa por $Pr(jog_i\ ganhar\ jog_j) = \frac{A_j^{b_i}}{A_j^{b_i} + A_i^{b_j}}$.

Assim como o modelo unidimensional, os parâmetros não são identificáveis: multiplicando uma constante c qualquer às primeiras coordenadas a_k e $1/c$ as segundas coordenadas b_k, as probabilidades previstas no modelo são as mesmas (será que é melhor escrever o modelo como $f(v_i, v_j) = \frac{b_i}{a_j} - \frac{b_j}{a_i}$?)

Transitividade

Suponhamos conhecidas as probabilidades do jogador 1 ganhar do jogador 2 e do jogador 2 ganhar do jogador 3 e do jogador 3 ganhar do jogador 1 (p_{12},p_{23} e p_{31}, respectivamente).

Então

$$logit(p_{12}) = a_2 b_1 - a_1 b_2$$

$$logit(p_{23}) = a_3 b_2 - a_2 b_3$$

$$logit(p_{31}) = a_1 b_3 - a_3 b_1$$

Então

$$logit(p_{13}) = logit(p_{12}) \frac{a_3}{a_2} + logit(p_{23}) \frac{a_1}{a_2}$$

A probabilidade p_{13} não fica completamente definido por p_{12} e p_{23} apenas.

O modelo deixa de ser transitivo. De fato, como $f(v_i, v_j) = det(v_i, v_j)$, podemos escolher três vetores no plano tal que $det([v_1, v_2]) > 0$, $det([v_2, v_3]) > 0$ e $det([v_3, v_1]) > 0$, como por exemplo três vetores formando 120 graus dois a dois.

Formulação do Paulo

O modelo é $f(v_i, v_j) = a_i a_j (b_i - b_j)$. A vantagem sobre o produto vetorial é a interpretabilidade dos parâmetros. Os coeficientes b_k têm interpretação similar ao da proficiência do caso unidimensional e os coeficientes a_k atuam como moduladores da diferença $(b_i - b_j)$.

Fazendo $B_i = e^{b_i}$ a probabilidade pode ser expressa por

$$Pr(jog_i \; ganhar \; jog_j) = \frac{B_i^{a_i a_j}}{B_i^{a_i a_j} + B_j^{a_i a_j}}$$

O modelo também não é identificável: somando uma constante c às coordenadas b_k não muda as probabilidades.

Transitividade

Suponhamos conhecidas as probabilidades do jogador 1 ganhar do jogador 2 e do jogador 2 ganhar do jogador 3 e do jogador 3 ganhar do jogador 1 (p_{12},p_{23} e p_{31}, respectivamente).

Então

$$logit(p_{12}) = a_1 a_2 (b_1 - b_2)$$

$$logit(p_{23}) = a_2 a_3 (b_2 - b_3)$$

$$logit(p_{31}) = a_3 a_1 (b_3 - b_1)$$

Então,

$$logit(p_{31}) = \frac{a_3}{a_2} logit(p_{12}) + \frac{a_1}{a_2} logit(p_{23})$$

Esta é a mesma previsão do modelo por produto vetorial.

Os dois modelos são equivalentes. De fato, tomando $f(v_i, v_j) = det([v_j, v_i]) = a_j b_i - a_i b_j$ podemos escrever $f(v_i, v_j) = a_i a_j (\frac{b_i}{a_i} - \frac{b_j}{a_j})$. Se ao invés de consideramos $v_k = (a_k, b_k)$, consideramos os vetores $\tilde{v_k} = (\tilde{a_k}, \tilde{b_k}) = (a_k, \frac{b_k}{a_k})$, a formulação por produto vetorial sobre v_k é idêntica à formulação do Paulo sobre $\tilde{v_k}$.