Lista 8

Dualidade

Fernanda Gomes e Igor Michels

Seção 4.1

Questão 1

Item a

Nosso problema é

$$\begin{aligned} \max\ & x_1 + 3x_2 + x_3 \\ \text{sujeito a}\ & x_1 + 2x_2 + 7x_3 \leq -3 \\ & x_2 - x_3 = 9 \\ & 9x_1 \leq 5 \\ & x_1 - x_2 + x_3 = 0 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \\ & x_3 \text{ livre.} \end{aligned} \tag{1}$$

Cujo dual será dado por

$$\begin{aligned} \min\ & -3y_1 + 9y_2 + 5y_3 \\ \text{sujeito a}\ & y_1 + 9y_3 + y_4 \geq 1 \\ & 2y_1 + y_2 - y_4 \geq 3 \\ & 7y_1 - y_2 + y_4 = 1 \\ & y_1, y_3 \geq 0 \\ & y_2, y_4 \text{ livre.} \end{aligned} \tag{2}$$

Item b

Nosso problema é

$$\begin{aligned} \min\ & 5x_1 + 6x_2 \\ \text{sujeito a}\ & 3x_1 - x_2 \geq 8 \\ & 2x_1 + 4x_2 = -2 \\ & 3x_1 + 2x_2 \leq 2 \\ & -x_1 + 2x_2 = -3 \\ & x_1 \geq 0 \\ & x_2 \text{ livre.} \end{aligned} \tag{3}$$

Cujo dual será dado por

$$
\begin{aligned}
\max\ & 8y_1 - 2y_2 + 2y_3 - 3y_4 \\
\text{sujeito a}\quad & 3y_1 + 2y_2 + 3y_3 - y_4 \geq 5 \\
& -y_1 + 4y_2 + 2y_3 + 2y_4 = 6 \\
& y_1 \leq 0 \\
& y_2, y_4 \text{ livre} \\
& y_3 \geq 0.
\end{aligned} \tag{4}
$$

Questão 2

Item a

Podemos concatenar os vetores c e d, as matrizes A e D e os vetores x e u, chegando em $\tilde{c} = \begin{bmatrix} c \\ d \end{bmatrix}$, $\tilde{A} = \begin{bmatrix} A & D \end{bmatrix}$ e $\tilde{x} = \begin{bmatrix} x \\ u \end{bmatrix}$. Suponha também que a dimensão de x (e consequentemente de u) seja n, então podemos formular nosso problema como

$$
\begin{aligned}
\min\ & \tilde{c}^\top \tilde{x} \\
\text{sujeito a}\ & \tilde{A}\tilde{x} = b \\
& \tilde{x}_i \geq 0 \qquad\qquad \forall i \in \{1, \ldots, n\} \\
& \tilde{x}_i \text{ livre} \qquad \forall i \in \{n+1, \ldots, 2n\}.
\end{aligned} \tag{5}
$$

Agora, podemos fazer o dual como anteriormente, ou seja, o dual é

$$
\begin{aligned}
\max\ & b^\top y \\
\text{sujeito a}\ & A^\top y \geq c \\
& D^\top y = d \\
& y \text{ livre}.
\end{aligned} \tag{6}
$$

Item b

Podemos seguir ideia análoga a do item anterior, concatenando as matrizes D e $-I$ e os vetores x e u, chegando em $\tilde{D} = \begin{bmatrix} D & -I \end{bmatrix}$ e $\tilde{x} = \begin{bmatrix} x \\ u \end{bmatrix}$. Suponha também que a dimensão de x (e consequentemente de u) seja n, então podemos formular nosso problema como

$$
\begin{aligned}
\max\ & c^\top x \\
\text{sujeito a}\ & Ax \geq b \\
& \tilde{D}\tilde{x} \leq d \\
& \tilde{x}_i \leq 0 \qquad\qquad \forall i \in \{1, \ldots, n\} \\
& \tilde{x}_i \geq 0 \qquad \forall i \in \{n+1, \ldots, 2n\}.
\end{aligned} \tag{7}
$$

Agora, para fazer o dual, vamos definir $\tilde{b} = \begin{bmatrix} b \\ d \end{bmatrix}$ e $\tilde{y} = \begin{bmatrix} y_A \\ y_D \end{bmatrix}$, com dimensões apropriadas, assim o dual é

$$
\begin{aligned}
\max\ & \tilde{b}^\top \tilde{y} \\
\text{sujeito a}\ & A^\top y_A + D^\top y_D \leq c \\
& -I y_D \geq 0 \\
& y_A \leq 0 \\
& y_D \geq 0.
\end{aligned} \tag{8}
$$

Questão 3

Item a

Seja j tal que $a_j = \min\{a_1, \ldots, a_n\}$. É fácil ver que $x = a_j$ é solução factível, pois, por definição, $a_j \leq a_i \forall i \in \{1, \ldots, n\}$, assim, basta provar que é máximo. Assim, suponha que $b = a_j + l$, com $l > 0$, é solução ótima, isso é, é factível e o máximo do problema. Assim, $\forall i \in \{1, \ldots, n\}$ $b \leq a_i$. Mas isso implica que $b \leq a_j \iff a_j + l \leq a_j \iff l \leq 0$, absurdo. Logo, a_j é solução ótima do problema.

Item b

Definindo $a = \begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix}$. O dual é

$$\begin{aligned} \min\ & a^\top y \\ \text{sujeito a } & \sum y = 1 \\ & y \geq 0. \end{aligned} \tag{9}$$

Item c

O problema dual está escolhendo uma entrada de y para ser 1 e as demais para ser 0, fazendo com que $a^\top y$ seja mínimo, ou seja, o dual fará $y_j = 1$, com j como definido no item a.

Questão 4

Podemos montar o problema (P)

$$\begin{aligned} \max\ & -x_1 \\ \text{sujeito a } & x_1 - x_2 \leq -1 \\ & x_1 - x_2 \geq 0 \\ & x \text{ livre.} \end{aligned} \tag{10}$$

Assim o dual (D) será dado por

$$\begin{aligned} \min\ & -y_1 \\ \text{sujeito a } & y_1 + y_2 = -1 \\ & -y_1 - y_2 = 0 \\ & y_1 \geq 0 \\ & y_2 \leq 0. \end{aligned} \tag{11}$$

Podemos mostrar, algebricamente, que o (P) é infactível, pois temos que $x_2 \geq x_1 + 1$ e $x_2 \leq x_1$, assim, temos que $x_1 \geq x_2 \geq x_1 + 1 \iff 0 \geq 1$, absurdo. Já para (D), podemos ver que $y_2 = -y_1$, assim, vale que $-1 = y_1 + y_2 = y_1 - y_1 = 0$, absurdo.

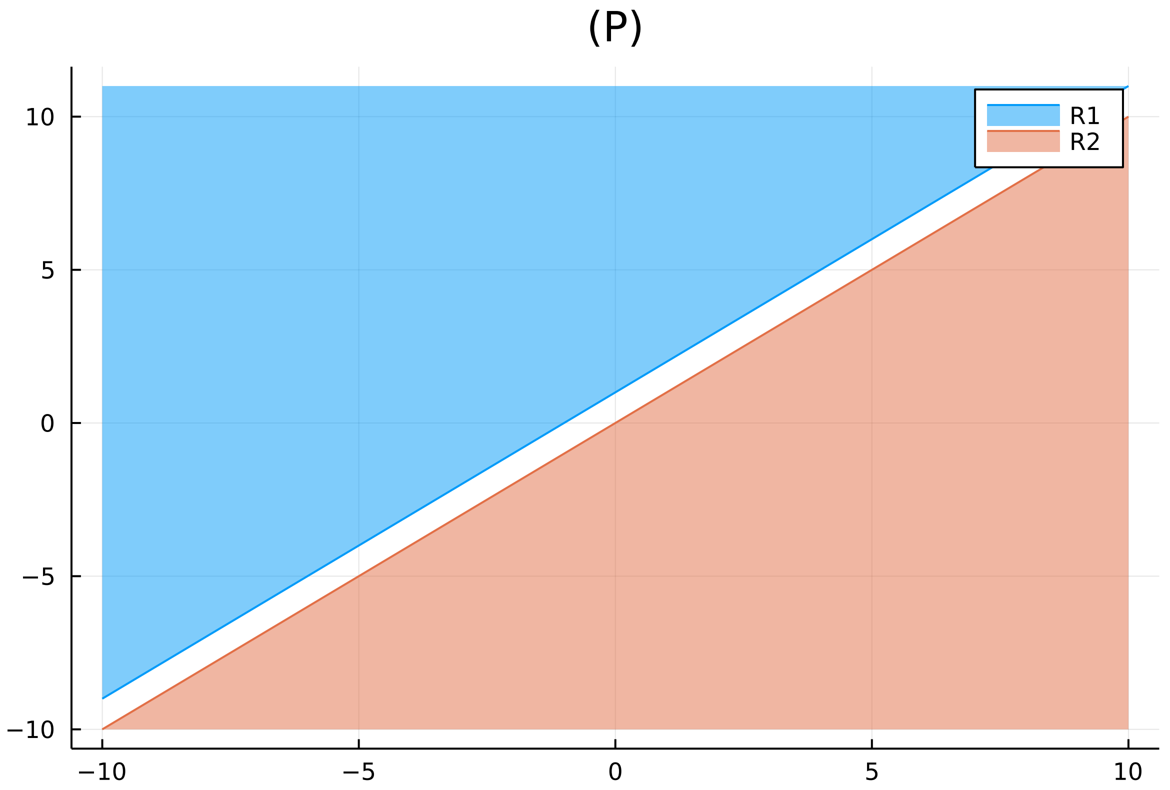
Também podemos ver isso graficamente:

In [1]:
```
using Plots;
f(x) = x + 1;
g(x) = x;
X = -10:10;
the_max = max(f(X[end]), f(X[1]));
```

```
the_min = min(g(X[end]), g(X[1]));

plot(X, f, fill = (the_max, 0.5, :auto), label = "R1", title = "(P)");
plot!(X, g, fill = (the_min, 0.5, :auto), label = "R2")
```

Out[1]:

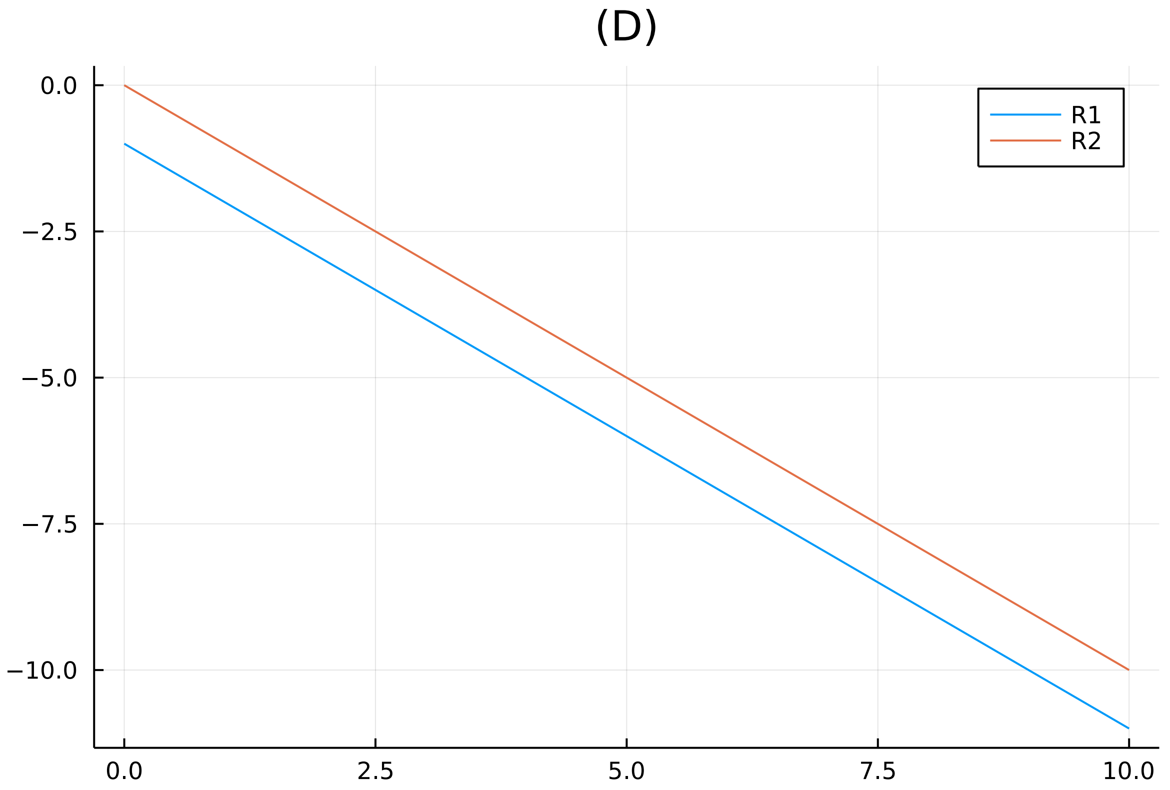


In [2]:

```
f(x) = - x - 1;
g(x) = - x;
X = 0:10;

plot(X, f, label = "R1", title = "(D)");
plot!(X, g, label = "R2")
```

Out[2]:



Seção 4.2

Questão 1

Item a

O problema já é de maximização e as restrições quanto a x já são de positividade, falta apenas tratar as restrições gerais para igualdade. Para fazer isso, basta modificar a restrição $Ax \leq b$ para $Ax + Iu = b$, onde I é a identidade e $u \geq 0$ é o vetor de folgas de cada uma das restrições.

Item b

Usando a mesma ideia da questão 2a da seção 4.1, com $D = I$, podemos concatenar as matrizes A e I, chegando em $\tilde{A} = \begin{bmatrix} A & I \end{bmatrix}$. Também definimos $\tilde{c} = \begin{bmatrix} c \\ 0 \end{bmatrix}$, com 0 sendo um vetor de zeros. Assim o dual é

$$\begin{aligned} \min b^\top y \\ \text{sujeito a } \tilde{A}^\top y \geq \tilde{c} \\ y \text{ livre.} \end{aligned} \tag{12}$$

Item c

Temos que, em (P'), vale que $x' = \begin{bmatrix} x \\ u \end{bmatrix}$, assim, como x é solução de (P), temos que as primeiras entradas de x' devem ser iguais as de x. As últimas entradas de x' são referentes ao vetor u, dado por $b - Ax$. Assim, temos que $x' = \begin{bmatrix} x \\ b - Ax \end{bmatrix}$.

Item d

Usando diretamente o Teorema, sai que, como x' é solução ótima de (P'), existe um y' que é solução ótima de (D') e que possui o mesmo valor, em (D'), que x' possui em (P').

Seção 4.3

Questão 1

Item a

- Primeiramente, vamos achar o dual:

$$\begin{aligned} \min 5y_1 + 7y_2 \\ \text{sujeito a } \quad y_1 - y_2 &\leq -2 \\ 3y_1 + 4y_2 &\geq -1 \\ 2y_1 + 2y_2 &= 0 \\ y_1 &\leq 0 \\ y_2 &\geq 0. \end{aligned} \tag{13}$$

- O Complementary Slackness de (P) é dado por

$$\begin{bmatrix} 5-(x_1+3x_2+2x_3) \\ 7-(-x_1+4x_2+2x_3) \end{bmatrix}. \tag{14}$$

- Já o Complementary Slackness de (D) é

$$\begin{bmatrix} -2-(y_1-y_2) \\ -1-(3y_1+4y_2) \\ 0-(2y_1+2y_2) \end{bmatrix}. \tag{15}$$

- É fácil ver que tanto $\overline{x} = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix}$ quanto $\overline{y} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$ são soluções factíveis para (P) e (D), respectivamente. Também podemos ver que $\begin{bmatrix} -2 & -1 & 0 \end{bmatrix} \overline{x} = 2$ e que $\begin{bmatrix} 5 & 7 \end{bmatrix} \overline{y} = 2$. Como (P) e (D) são um par primal-dual, com respectivos vetores que produzem o mesmo valor na função objetivo, temos que tais vetores são soluções ótimas.

- Usando CS, podemos ver que

$$5-(x_1+3x_2+2x_3)=0$$

$$7-(-x_1+4x_2+2x_3)=0$$

$$-2-(y_1-y_2)=0$$

$$x_2=0$$

$$0-(2y_1+2y_2)=0.$$

Item b

- Primeiramente, vamos achar o dual:

$$\begin{aligned} \max\ & 3y_1+9y_2+2y_3 \\ \text{sujeito a}\quad & y_1+4y_2+7y_3 \geq -5 \\ & 2y_1+5y_2+8y_3 \geq -7 \\ & 3y_1+6y_2+9y_3 \geq -5 \\ & y_1, y_2 \geq 0 \\ & y_3 \leq 0. \end{aligned} \tag{16}$$

- O Complementary Slackness de (P) é dado por

$$\begin{bmatrix} 3-(x_1+2x_2+3x_3) \\ 9-(4x_1+5x_2+6x_3) \\ 2-(7x_1+8x_2+9x_3) \end{bmatrix}. \tag{17}$$

- Já o Complementary Slackness de (D) é

$$\begin{bmatrix} -5-(y_1+4y_2+7y_3) \\ -7-(2y_1+5y_2+8y_3) \\ -5-(3y_1+6y_2+9y_3) \end{bmatrix}. \tag{18}$$

- É fácil ver que tanto $\overline{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ quanto $\overline{y} = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$ são soluções factíveis para (P) e (D), respectivamente. Também podemos ver que $\begin{bmatrix} -5 & -7 & -5 \end{bmatrix} \overline{x} = -12$ e que $\begin{bmatrix} 3 & 9 & 2 \end{bmatrix} \overline{y} = -12$. Como (P) e (D) são um par primal-dual, com respectivos vetores que produzem o mesmo valor na função objetivo, temos que tais vetores são soluções ótimas.

- Usando CS, podemos ver que

$$3 - (x_1 + 2x_2 + 3x_3) = 0$$
$$9 - (4x_1 + 5x_2 + 6x_3) = 0$$
$$x_3 = 0$$
$$-5 - (y_1 + 4y_2 + 7y_3) = 0$$
$$-7 - (2y_1 + 5y_2 + 8y_3) = 0$$
$$y_3 = 0.$$

Seção 4.4

Questão 1

Item a

Suponha que existe $x \geq 0$ tal que $Ax \leq b$. Note que se existir $y \geq 0$ tal que $A^\top y \geq 0$ e $b^\top y < 0$ teremos que $y^\top Ax \leq y^\top b$, assim $(A^\top y)^\top x \leq b^\top y$, onde o lado esquerdo é todo não negativo, resultando num valor não negativo e o lado direito é negativo, o que nos dá um absurdo.

Dessa forma, provamos que não podemos ter os dois ao mesmo tempo e, em especial, provamos que se a primeira sentença vale, a segunda não pode ser verdadeira. Agora, suponha que a primeira sentença é falsa. Dessa forma, o problema

$$\begin{aligned} \max\ & 0^\top x \\ \text{sujeito a}\ & Ax \leq b \\ & x \geq 0 \end{aligned} \tag{19}$$

é infactível. Com isso, seu dual

$$\begin{aligned} \min\ & b^\top y \\ \text{sujeito a}\ & A^\top y \geq 0 \\ & y \geq 0 \end{aligned} \tag{20}$$

é infactível ou ilimitado. Podemos ver que o problema dual é factível pois $A^\top 0 \geq 0$, logo, ele é ilimitado. Dessa forma, teremos algum valor de y de modo que $A^\top y \geq 0$, $y \geq 0$ e $b^\top y < 0$.

Item b

Suponha que existe $x \neq 0$ tal que $Ax = 0$. Note que se existir y tal que $A^\top y > 0$ teremos que $y^\top Ax = y^\top 0 = 0$, assim $(A^\top y)^\top x = 0$. Como $x \geq 0$ e $x \neq 0$, então temos que

$(A^\top y)^\top = 0$, ou seja, $A^\top y = 0$, absurdo.

Dessa forma, provamos que não podemos ter os dois ao mesmo tempo e, em especial, provamos que se a primeira sentença vale, a segunda não pode ser verdadeira. Agora, suponha que a primeira sentença é falsa. Dessa forma, temos que $\forall x \neq 0,\ Ax \neq 0 \vee \neg(x \geq 0)$. Em particular, temos que se $x \geq 0$, vale que $Ax = 0 \iff x = 0$. Assim, o problema primal

$$\begin{aligned} \max\ & 1^\top x \\ \text{sujeito a}\ & Ax = 0 \\ & x \geq 0 \end{aligned} \tag{21}$$

é factível com ótimo igual 0 em $x = 0$. Com isso, seu dual

$$\begin{aligned} \min\ & 0^\top y \\ \text{sujeito a}\ & A^\top y \geq 1 \end{aligned} \tag{22}$$

também é factível. Logo, existe y tal que $A^\top y \geq 1 > 0$.

Item c

Note que fazendo $\tilde{A} = \begin{bmatrix} A \\ A' \\ -A' \end{bmatrix}$ e $\tilde{b} = \begin{bmatrix} b \\ b' \\ -b' \end{bmatrix}$ temos que o enunciado é equivalente a termos exatamente uma das sentenças abaixo sendo verdadeira

- Existe x tal que $\tilde{A}x \leq \tilde{b}$ tem solução ou;
- Existe $y \geq 0$ tal que $\tilde{A}^\top y = 0$ e $b^\top y < 0$.

Note que provar que isso não pode ser simultaneamente verdade é simples, pois da primeira sentença podemos ver que $y^\top(Ax - b) \leq 0$, enquanto a segunda nos leva que $y^\top(Ax - b) > 0$.

Além disso, podemos ver que a segunda sentença é um certificado de infactibilidade para $Ax \leq b$, ou seja, se a primeira sentença não for válida, a segunda necessariamente é.

Item d

Suponha que ambas as sentenças sejam verdadeiras. Assim, temos que $y^\top Ax + y^\top A'x' = y^\top b$. Mas note que, dessa forma, o lado direito da equação é negativo e o esquerdo é não negativo, absurdo. Logo, as duas sentenças não podem ser verdadeiras ao mesmo tempo.

Agora, suponha que a primeira sentença seja falsa. Desse modo, fazendo $\tilde{A} = [\,A \quad A' \quad -A'\,]$ e $\tilde{x} = \begin{bmatrix} x \\ x' \\ -x' \end{bmatrix}$, temos que o problema

$$\begin{aligned} \max\ & 0^\top \tilde{x} \\ \text{sujeito a}\ & \tilde{A}\tilde{x} = b \\ & \tilde{x} \geq 0 \end{aligned} \tag{23}$$

é infactível. Seu dual,

$$\min b^\top y \\ \text{sujeito a } \tilde{A}^\top y \geq 0 \tag{24}$$

é ilimitado, pois $y = 0$ é uma solução factível. Logo, temos que existe y tal que $y^\top b < 0$, $A^\top y \geq 0 \implies y^\top A \geq 0$ e que $y^\top A' = 0$, pois $A'^\top y \geq 0$ e $-A'^\top y \geq 0$.

Dualidade em Grafos

Corretude do st-path

Seja $G = (V, E)$ um grafo com nós s e t distintos e $c_e > 0\ \forall e \in E$, ou seja, toda aresta tem um comprimento positivo. Seja P um st-path, devemos mostrar que P corresponde a uma solução factível x do problema (1.34). Para isso, vamos fazer $x_e = 1$ se $e \in P$ e $x_e = 0$ caso contrário. Pelo Remark 1.1, todo corte-st $\delta(U)$ contém uma aresta de P, assim vale que $\sum_{e \in \delta(U)} x_e \geq 1$, o que implica que x é uma solução factível.

Agora, devemos mostrar que toda solução ótima $\overline{x}$ é um st-path. Definindo $S = \{e \in E : x_e = 1\}$, temos que, pelo Remark 1.2, S contém um st-path. Se $S = P$, chegamos onde queríamos. Se não, definimos x' tal que $x'_e = 1$ se $e \in P$ e $x'_e = 0$ caso contrário, que também é solução factível (fato demonstrado no parágrafo anterior) mas que tem um custo menor que o custo de S, logo, $\overline{x}$ não pode ser solução ótima, o que é um absurdo. Disso segue que S deve ser um st-path.

Seção 1.5.2

Questão 2

Item a

A formulação geral será dada no item b, no item a iremos realizar a implementação da mesma.

In [3]:
```
using GLPK, JuMP;

arestas = [1 2; 1 4; 1 6; 2 3; 2 4; 2 5; 2 7
           3 5; 3 8; 4 6; 4 7; 5 7; 6 7; 7 8];

nodes = maximum(arestas);
edges = size(arestas, 1);
A = zeros(Int64, edges, nodes);
for i in 1:edges
    A[i, arestas[i, 1]] = 1;
    A[i, arestas[i, 2]] = 1;
end

model = Model(GLPK.Optimizer);
@variable(model, x[i = 1:nodes] >= 0, base_name = "x", Int);
opt_function = @expression(model, ones(nodes)'*x);
@constraint(model, C, A*x .>= ones(edges));
@objective(model, Min, opt_function);

status = JuMP.optimize!(model);
xstar = value.(x);
print("Nodes: ");
```

```
for i in 1:nodes
    if xstar[i] == 1
        print(i, " ");
    end
end
```

```
Nodes: 1 3 4 5 7
```

Item b

Como visto na implementação acima, a ideia do caso geral é gerar uma matriz A, onde cada linha representa uma aresta e as colunas representam os nós, assim a entrada $a_{i,j}$ será 1 se o nó j é extremo da aresta i. O vetor x será um vetor de inteiros (ou binário, pois queremos minimizar) do $\mathbb{R}^n$, sendo n o número de nós do grafo. O conjunto de interesse será dado pelas entradas não nulas de x, assim, para garantir que cada aresta tenha pelo menos uma de suas extremidades no conjunto devemos ter que $Ax \geq 1$.

Queremos a menor quantidade possível de nós no conjunto, então devemos minimizar $x^\top 1$, assim, nosso problema é dado por

$$\begin{aligned} \min x^\top 1 \\ \text{sujeito a } \; Ax \geq 1 \\ x \geq 0. \end{aligned} \tag{25}$$

Seção 3.1.3

Exercício 1

Item a

Utilizando as mesmas convenções da questão anterior (acima), podemos ver que o dual é

$$\begin{aligned} \max y^\top 1 \\ \text{sujeito a } \; A^\top y \leq 1 \\ y \geq 0. \end{aligned} \tag{26}$$

Item b

Dentro de um grafo, um matching é um conjunto de arestas M de modo que, para cada vértice v do grafo, no máximo uma aresta de M incide em v. O tamanho de um conjunto é a quantidade de elementos desse conjunto, assim, o tamaho do matching de um grafo é a quantidade de arestas desse matching.

Note que o dual (D) está buscando exatamente isso, o tamanho máximo de um matching do grafo G, uma vez que A é uma matriz onde as linhas corresponde as arestas e as colunas aos vértices, assim, sua transposta inverte essa relação. Já y faz referência as arestas do grafo, assim, $y \geq 0$ pode ser interpretado como se a aresta entra no conjunto ou não e $A^\top y$ como a quantidade de vezes que um vértice é atingido pelas arestas escolhidas. Note que fazendo $A^\top y \leq 1$ garantimos que o conjunto é um matching.

Agora, usando o Teorema 3.2, segue que (D) é lower bound de (P) e, usando as interpretações de (D) e (P), temos a prova do item.

Item c

Tome o K_5. É fácil ver que o vertex-cover desse grafo tem cardinalidade 4, caso contrário a aresta que conecta dois dos vértices não escolhidos não foi coberta. Por outro lado, todos os matchings tem tamanho, no máximo, 2, pois se considerarmos um matching de tamanho 3 estaremos atingindo 6 nós, assim, pelo PCP, um nó será atingido mais de uma vez. Além disso, temos que a solução ótima de (P) é 4 e de (D) é 2.5:

In [4]:

```
arestas = [1 2; 1 3; 1 4; 1 5; 2 3;
           2 4; 2 5; 3 4; 3 5; 4 5];

nodes = maximum(arestas);
edges = size(arestas, 1);
A = zeros(Int64, edges, nodes);
for i in 1:edges
    A[i, arestas[i, 1]] = 1;
    A[i, arestas[i, 2]] = 1;
end

model = Model(GLPK.Optimizer);
@variable(model, x[i = 1:nodes] >= 0, base_name = "x", Int);
opt_function = @expression(model, ones(nodes)'*x);
@constraint(model, C, A*x .>= ones(edges));
@objective(model, Min, opt_function);

status = JuMP.optimize!(model);
xstar = value.(x);
println("Solução ótima de (P): ", sum(xstar));

model = Model(GLPK.Optimizer);
@variable(model, y[i = 1:edges] >= 0, base_name = "y");
opt_function = @expression(model, ones(edges)'*y);
@constraint(model, C, A'*y .<= ones(nodes));
@objective(model, Max, opt_function);

status = JuMP.optimize!(model);
ystar = value.(y);
println("Solução ótima de (D): ", sum(ystar));
```

```
Solução ótima de (P): 4.0
Solução ótima de (D): 2.5
```