

Inferência Estatística

Questão Extra

Igor Patrício Michels

03/12/2020

Pequeno arquivo com a resolução da questão 19 da Seção 11.2 do DeGroot [1].

Resolução

Pelo enunciado, temos o vetor (X_1, X_2) com distribuição normal bivariada, com X_1 e X_2 possuindo mesma média e variância, ou seja, $\mu_1 = \mu_2 = \mu$ e $\sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \sigma^2$ e queremos mostrar que

$$|E(X_2 | x_1) - \mu| < |\mu - x_1|, \forall x_1.$$

Pelo Teorema 5.10.4 do DeGroot [1], temos que

$$E(X_2 | x_1) = \mu_2 + \rho\sigma_2 \left(\frac{x_1 - \mu}{\sigma_1} \right),$$

substituindo a média e desvio padrão dado, temos que

$$\begin{aligned} |E(X_2 | x_1) - \mu| &= \left| \mu_2 + \rho\sigma_2 \left(\frac{x_1 - \mu}{\sigma_1} \right) - \mu \right| \\ &= \left| \mu + \rho\sigma \left(\frac{x_1 - \mu}{\sigma} \right) - \mu \right| \\ &= |\rho(x_1 - \mu)|. \end{aligned}$$

Como $0 < \rho < 1$, segue que

$$0 < |\rho(x_1 - \mu)| < |x_1 - \mu| = |\mu - x_1|.$$

dessa forma conclui-se que

$$|E(X_2 | x_1) - \mu| < |\mu - x_1|.$$

Referências

- [1] Mark J. Schervish Morris H. DeGroot. *Probability and Statistics*. 4^a ed. Pearson, 2011. ISBN: 9780321500465.