Inferência Estatística
4º Trabalho

Igor Patrício Michels

18/11/2020

Introdução

Trabalho elaborado pelo aluno Igor Patrício Michels referente a disciplina de Inferência Estatística, do quarto período da Graduação em Matemática Aplicada da FGV-EMAp. Nele iremos abordar o conceito de teste uniformemente mais poderoso.

O enunciado e eventuais funções utilizadas para resolução deste ou de outros trabalhos podem ser encontrados **nesse repositório do GitHub**.

Teste Uniformemente Mais Poderoso

Contextualizando

Em 2008 fui passar minhas férias em Gotham City. Confesso que as férias não foram das melhores, a cidade estava um caos. Aparentemente um palhaço não gostava de morcegos e estava numa tremenda batalha com um tal de homem morcego. Pelo que soube esse tal homem morcego era uma espécia de herói na cidade. Certo dia eu estava caminhando pela rua e encontrei um possível vítima desse palhaço, ele havia explodido um hospital no dia anterior. O homem que encontrei parecia ter saído de um transplante facial, o qual não tinha sido finalizado e o homem estava meio cara, meio... coroa. Acho que ele ão foi com minha cara quando perguntei por que ele estava dessa forma e disse que iria lançar sua moeda e, se o resultado fosse C (cara), me daria uns cascudos. Tentei chamar esse tal de homem morcego, mas parece que aquele palhaço estava interessado em explodir uns barcos, então quem sou eu no meio dessa crise toda? Achei válido o tal do homem morcego se interessar em evitar as explosões. No fim, acabei pedindo para esse cara da moedinha decidir se me daria os cascudos pela moeda mesmo mas antes lançar a moedas algumas vezes para mim ter uma ideia do meu futuro. Surpreendentemente ele aceita, falando que sou um cara engraçado então poderia me fazer esse favor, mas que eu não escaparia dessa sem ele lançar a moeda. Ele lançou a moeda 10 vezes e obteve a sequência

KCKCKCCKKK.

Como ele caiu na minha e fez esses lançamentos pude fazer alguns testes a respeito da moeda e analisar se valeria a pena tentar fugir desse sujeito, talvez tomando dois cascudos por isso, ou se ficaria e deixaria o destino a cargo da moeda.

Antes de ver o que aconteceu comigo, vamos ver algumas definições e ideias.

Teste UMP e MLR

Conforme subseção anterior, iremos, nessa subseção, tomar algumas definições e ideias, as quais também podem ser encontradas no DeGroot [1].

Sejam δ um procedimento de teste, $\alpha(\delta)$ o tamanho do teste δ e $\pi(\theta \mid \delta)$ a função poder do teste, podemos definir um Teste Uniformemente Mais Poderoso como

Definição 1 (Teste Uniformemente Mais Poderoso)**.** *Dadas duas hipóteses $H_0 : \theta \in \Omega_0$ e $H_1 : \theta \in \Omega_1$ dizemos que um procedimento δ^* é uniformemente mais poderoso sob as hipóteses H_0 e H_1 no nível de significância α_0 se $\alpha(\delta^*) \leq \alpha_0$ e, para todo procedimento δ de modo que $\alpha(\delta) \leq \alpha_0$, vale que*

$$\pi(\theta \mid \delta) \leq \pi(\theta \mid \delta^*), \forall\ \theta \in \Omega_1.$$

Uma outra definição importante se é a definição de Razão de Verossimilhança Monotônica

Definição 2 (Razão de Verossimilhança Monotônica)**.** *Seja $f_n(x \mid \theta)$ a função de densidade conjunta das observações $X = (X_1,\ X_2,\ \dots,\ X_n)$ e $T = r(X)$ uma estatística. Dizemos que a distribuição conjunta de X tem razão de verossimilhança monotônica (MLR) na estatística T se para todo par de valores $\theta_1, \theta_2 \in \Omega$, com $\theta_1 < \theta_2$, a razão*

$$\frac{f_n(x \mid \theta_2)}{f_n(x \mid \theta_1)} \tag{1}$$

depende do vetor de observações apenas por meio da estatística T e a razão acima é uma função monótona de T na imagem de $r(x)$.

Por fim, podemos fazer uma última definição

Definição 3 (Razão de Verossimilhança Monotônica Crescente e Razão de Verossimilhança Monotônica Decrescente)**.** *Dizemos que X tem Razão de Verossimilhança Monotônica Crescente quando a razão 1 é crescente e que X tem Razão de Verossimilhança Monotônica Decrescente quando a razão 1 é decrescente.*

Dadas tais definições, podemos enunciar alguns Teoremas.

Teorema 1. *Tome δ^* um procedimento em que a hipótese H_0 não é rejeitada se $af_0(x) > bf_1(x)$ e a hipótese H_0 é rejeitada se $af_0(x) < bf_1(x)$. Para o caso em que $af_0(x) = bf_1(x)$ a hipótese H_0 pode ser tanto rejeitada quanto não rejeitada. Então, para todo outro procedimento de teste δ vale que*

$$a\alpha(\delta^*) + b\beta(\delta^*) \leq a\alpha(\delta) + b\beta(\delta).$$

Demonstração. A cargo do leitor.

Dica: Veja a seção 9.2 do DeGroot [1]. □

Visto esse teorema, temos o ferramental para provar um outro Teorema:

Teorema 2 (Lema de Nayman-Pearson)**.** *Suponha que δ^* é um procedimento de teste que, dada uma constante $k > 0$, a hipótese H_0 não é rejeitada se $f_1(x) < kf_0(x)$ e é rejeitada se $f_1(x) > kf_0(x)$. Caso $f_1(x) = kf_0(x)$ a hipótese H_0 pode tanto ser rejeitada quanto não rejeitada. Se δ é um outro procedimento de forma que $\alpha(\delta) \leq \alpha(\delta^*)$, então $\beta(\delta) \geq \beta(\delta^*)$. Além disso, se $\alpha(\delta) < \alpha(\delta^*)$, então $\beta(\delta) > \beta(\delta^*)$.*

Demonstração. Pelo Teorema 1, temos que

$$k\alpha(\delta^*) + \beta(\delta^*) \leq k\alpha(\delta) + \beta(\delta) \implies k\left(\alpha(\delta^*) - \alpha(\delta)\right) + \beta(\delta^*) \leq \beta(\delta).$$

Agora, como $\alpha(\delta) \leq \alpha(\delta^*)$, vale que $k\left(\alpha(\delta^*) - \alpha(\delta)\right) \geq 0$, logo, temos que $\beta(\delta) \geq \beta(\delta^*)$. Em especial, se $\alpha(\delta) < \alpha(\delta^*)$, vale que $k\left(\alpha(\delta^*) - \alpha(\delta)\right) > 0$ e então decorre que $\beta(\delta) > \beta(\delta^*)$. □

Teorema 3. *Seja $H_0 : \theta = \theta_0,\ \theta_0 \in \Omega$ uma hipótese simples. Se vale o Teorema da Fatoração e existem c e α_0 de modo que*

$$P(r(X) \leq c \mid \theta = \theta_0) = \alpha_0,$$

então o procedimento δ^* que rejeita H_0 se $r(X) \leq c$ é UMP para H_0 ao nível α_0.

Demonstração. Em primeiro lugar, considere o procedimento δ', teste de razão de verossimilhança de nível $k \in (0,1)$, isto é, o teste em que rejeitamos H_0 se $\Lambda(x) \leq k$. Dessa forma

$$\begin{aligned}
\Lambda(x) \leq k &\iff \frac{\sup_{\theta_0 \in \Omega_0} f_n(x \mid \theta)}{\sup_{\theta \in \Omega} f_n(x \mid \theta)} \leq k \\
&\overset{(1)}{\iff} \frac{f_n\left(x \mid \theta_0\right)}{f_n\left(x \mid \hat{\theta}\right)} \leq k \\
&\overset{(2)}{\iff} \frac{u(x) \cdot v\left(r(x), \theta_0\right)}{u(x) \cdot v\left(r(x), \hat{\theta}\right)} \leq k \\
&\iff \frac{v\left(r(x), \theta_0\right)}{v\left(r(x), \hat{\theta}\right)} \leq k \\
&\iff v\left(r(x), \theta_0\right) \leq k \cdot v\left(r(x), \hat{\theta}\right).
\end{aligned}$$

Agora, fazendo $v\left(r(x), \theta_0\right) = f_1(x)$ e $v\left(r(x), \hat{\theta}\right) = f_0(x)$, dessa forma, podemos dizer que o teste que estamos realizando é equivalente ao teste que não rejeita $H_0' = H_1$ se $f_1(x) \leq k \cdot f_0(x)$. Mas, pelo Teorema 2, isso implica que para todo outro procedimento de teste δ, vale que

$$\beta(\delta) \geq \beta(\delta'),$$

o que nos mostra que o procedimento δ' é um teste UMP.

Agora iremos mostrar que δ' equivale a δ^*.

Caso $\theta_0 = \hat{\theta}$, teremos que a razão de verossimilhança será igual a 1 e, com isso, não rejeitamos a hipótese nula. Agora, caso contrário, podemos escrever $\theta_0 = g_1(r(X))$ e $\hat{\theta} = g_2(r(X))$, além de supor que $\theta \in \mathbb{R}$. Se $\theta_0 < \hat{\theta}$, temos que a razão de verossimilhança será monotônica. Dessa forma, reescrevemos

$$\frac{v\left(r(x), g_1(r(X))\right)}{v\left(r(x), g_2(r(X))\right)} \leq k,$$

de onde vemos que a razão depende apenas da imagem de $r(X)$, então podemos tirar uma relação do tipo $r(x) \leq c$. Caso contrário, isto é, $\theta_0 > \hat{\theta}$, a razão

$$\frac{v\left(r(x), g_2(r(X))\right)}{v\left(r(x), g_1(r(X))\right)} \geq \frac{1}{k},$$

também é monotônica dependendo apenas da imagem de $r(X)$, valendo o mesmo que o caso anterior. Dessa forma, conclui-se que os testes δ^* é equivalente a δ', ou seja, δ^* como descrito no enunciado é UMP. □

Voltando a nosso contexto

Uma vez que aquele sujeito aceitou lançar a moeda 10 vezes pude realizar um teste de hipóteses. Como eu levaria um cascudo caso o resultado fosse C, é interessante analisar as hipóteses $H_0 : p \leq \frac{1}{2}$ e $H_1 : p > \frac{1}{2}$, onde p é a probabilidade de eu me dar mal.[1]

Note que esse caso se dá por 10 lançamentos independentes de uma moeda com probabilidade p de resultar cara, dessa forma, o espaço de parâmetros se dá pelo intervalo $\Omega = [0,1]$ e, além disso, temos $\Omega_0 = \left[0, \frac{1}{2}\right]$. Dessa forma, podemos escrever a razão de verossimilhança como

$$\Lambda(x) = \frac{\sup_{\theta_0 \in \Omega_0} f_n(x \mid \theta)}{\sup_{\theta \in \Omega} f_n(x \mid \theta)}.$$

[1] Ou seja, dar cara e eu levar uns cascudos.

Mas aqui estamos tratando de variáveis Bernoulli, onde sabemos que a quantidade de caras resultantes é uma estatística suficiente, então podemos reescrever

$$\begin{aligned}\Lambda(x) &= \frac{\sup_{\theta\in\Omega_0} \binom{n}{y}\theta^y(1-\theta)^{n-y}}{\sup_{\theta\in\Omega} \binom{n}{y}\theta^y(1-\theta)^{n-y}} \\ &= \frac{\sup_{\theta\in\Omega_0} \theta^4(1-\theta)^6}{\sup_{\theta\in\Omega} \theta^4(1-\theta)^6},\end{aligned}$$

onde é fácil ver que $\theta_0 = \theta = \frac{2}{5}$, dessa forma

$$\Lambda(x) = \frac{\left(\frac{2}{5}\right)^4\left(1-\frac{2}{5}\right)^6}{\left(\frac{2}{5}\right)^4\left(1-\frac{2}{5}\right)^6} = 1,$$

onde vemos que a hipótese H_0 não seria rejeitada no teste de razão de verossimilhança.

Além disso, reescrevendo essa razão de verossimilhança como

$$\Lambda(x) = \frac{\theta_0^y(1-\theta_0)^{n-y}}{\hat{\theta}^y(1-\hat{\theta})^{n-y}} = \left(\frac{\theta_0\left(1-\hat{\theta}\right)}{\hat{\theta}\,(1-\theta_0)}\right)^y\left(\frac{1-\theta_0}{1-\hat{\theta}}\right)^n,$$

onde podemos ver que temos uma razão de verossimilhança monotônica na estatística y, que representa a quantidade de caras que foram obtidas. Dessa forma, aplicando, de forma adaptada para o caso discreto, o teorema 9.3.1 do DeGroot [1], temos que o teste que rejeita H_0 no nível α_0 é o teste que rejeita H_0 se $y \geq c$, onde c é tal que

$$P\left(y \leq c \mid \theta = \frac{1}{2}\right) = \alpha_0.$$

Tomando $\alpha_0 = 0.1$, temos que iremos rejeitar H_0 se $y \geq 8$, sendo esse um teste UMP para esse caso. Como obtivemos um total de 4 caras, não temos como rejeitar a hipótese H_0, dessa forma, optei não fugir do sujeito que queria me dar uns cascudos.

Entretanto, apesar do teste não rejeitar a hipótese de que $\theta_0 \leq \frac{1}{2}$, surgiu uma outra oportunidade para mim[2], um outro homem estava se aproximando de nós dois com uma sacola de moedas a serem trocadas, então pensei "esse sujeito aí só pode decidir se vai me dar uns cascudos através da moedinha se ele souber qual a moedinha", dessa forma, quando o homem que estava com a sacola de moedas se aproximou eu pedi para que ele decidisse sobre meu cascudo e, enquanto a moeda estava no ar, lancei a sacola de moedas no ar e saí correndo enquanto o sujeito lá buscava por sua moedinha.

Moral: o teste de hipóteses me inclinou a aceitar que ele lançasse a moedinha para ver minha sorte, mas minha sorte foi, na verdade, o homem com a sacola de moedas!

Desafio ao leitor

Facilmente podemos ver que no nosso contexto não podemos atingir qualquer nível α_0. Isso se dá pelo fato de estarmos trabalhando com variáveis discretas, ou seja, nossa função é uma função "escada", cheia de degraus, veja a Figura 1 para uma ilustração desse fato.

Note que nem toda reta do tipo $y = \alpha_0$ intersecta a função de probabilidade acumulada, ou seja, nem sempre podemos encontrar um valor k de forma que a acumulada da distribuição tenha imagem α_0. Como exemplo, se traçarmos a reta $y = 0.1$, como se estivéssemos considerando $\alpha_0 = 0.1$, não temos nenhum ponto k que nos dê um teste de nível 0.1 no experimento descrito anteriormente.

A ideia aqui é que você proponha uma solução para isso, ou seja, mostre como podemos fazer nosso teste de modo que possamos atingir qualquer nível α_0 em $(0, 1)$.

[2] Curiosamente, uma outra jogada de sorte!

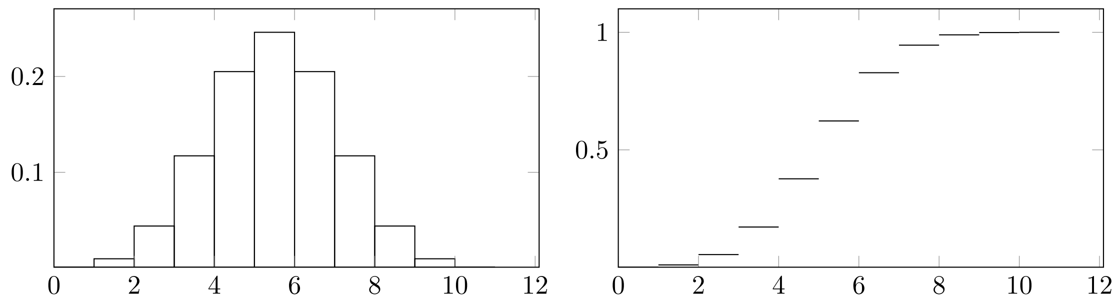

Figura 1: à esquerda, com a ideia de ilustrar, temos a plotagem da densidade de uma $\mathrm{Bin}(10, 0.5)$ em forma de histograma, já à direita a plotagem da acumulada da mesma.

Conclusão

Em primeiro lugar, pude concluir nas férias que palhaços e bananas pode resultar numa combinação explosiva. Além disso, vi que a frase “nunca fale com estranhos na rua” realmente é muito válida e que moedas, além de facilitarem seu troco, podem te auxiliar a sair de algumas furadas, embora possam te colocar em outras.

Fora essas conclusões, podemos ver que, em alguns casos, é mais simples e eficaz realizar um procedimento de teste a partir de uma estatística suficiente, tanto pela simplicidade do teste quanto pelos resultados, principalmente quando esse procedimento for UMP. Note que basta comparar a estatística com um valor real para rejeitar ou não a hipótese nula, ou seja, é um teste relativamente simples de ser aplicado.

Já pelos resultados, vimos que um teste UMP busca minimizar as probabilidades de erros, dessa forma aplicar um teste UMP, quando possível, pode ser muito relevante para a análise que desejamos fazer, principalmente quando um erro pode ser crucial como, por exemplo, nos testes de eficiência para uma nova droga.

Resposta do desafio

Essencialmente, a solução do desafio proposto é aplicar uma ideia probabilística ao teste. Ou seja, dado um nível α_0 se encontrarmos c de forma que

$$P(r(X) \geq c \mid \theta = \theta_0) = \alpha_0,$$

está perfeito e temos nosso teste pronto. Caso contrário, isto é, se não existe c que satisfaça a relação acima, podemos encontrar um valor c tal que

$$P(r(X) \geq c \mid \theta = \theta_0) < \alpha_0 \text{ e } P(r(X) \geq c + 1 \mid \theta = \theta_0) > \alpha_0.$$

Agora, nesse momento, rejeitando H_0 caso $r(X) \geq c$, o tamanho do teste será menor que α_0, mas rejeitando H_0 quando $r(X) \geq c+1$, o tamanho será maior que α_0. Então uma solução para termos um teste de tamanho α_0 é rejeitar H_0 se $r(X) \geq c$ e, se $r(X) = c+1$, rejeitar H_0 com uma probabilidade q, a qual será escolhida de forma que

$$q \cdot P(r(X) = c + 1 \mid \theta = \theta_0) + P(r(X) \geq c \mid \theta = \theta_0) = \alpha_0.$$

Uma ilustração disso é como se, quando $r(X) = c$, a gente lançasse uma “moeda”[3] com probabilidade q de sair cara. Tendo o resultado dessa moeda, rejeitamos H_0 se o resultado for cara e não rejeitamos se for coroa.

Referências

[1] Mark J. Schervish Morris H. DeGroot. *Probability and Statistics*. 4ª ed. Pearson, 2011. ISBN: 9780321500465.

[3] Moedas aparecendo de novo...