Exponencial de uma Matriz

Tuesday, May 5, 2020 1:05 PM

- $e^A := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{k!}$ → É bem definida pois é convergente

$$\left\| \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{k!} \right\| \underset{\text{propriedade da norma}}{\leq} \sum_{k=0}^{\infty} \left\| \frac{A^k}{k!} \right\| = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\|A^k\|}{k!} \underset{\|A^k\| \leq \|A\|^k}{\leq} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\overbrace{\|A\|}^{\text{número real}}{}^k}{k!} = e^{\|A\|}$$

↳ Absolutamente Convergente

$\|AB\| \leq \|A\|\|B\|$

- Se $Q = PAP^{-1} \Rightarrow e^Q = Pe^AP^{-1}$
- Se $SA = AS \Rightarrow e^{S+A} = e^S e^A$

(E se $SA \neq AS$?) $S = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}$, $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 2 \end{bmatrix}$

- $e^{-S} = (e^S)^{-1}$
- $n = 2 \Rightarrow A = \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix} \Rightarrow e^A = e^a \begin{bmatrix} \cos b & -\operatorname{sen} b \\ \operatorname{sen} b & \cos b \end{bmatrix}$

$T(x,y) = (ax - by, ay + bx)$

↕

$f(x+iy) = (a+ib)(x+iy) = (ax - by, ay + bx)$

$e^{a+ib} = e^a(\cos b + i \operatorname{sen} b)(x + iy)$

- $A = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_1 \end{bmatrix} \Rightarrow e^A = \begin{bmatrix} e^{\lambda_1} & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2} \end{bmatrix}$
- $A = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 1 \\ 0 & \lambda_1 \end{bmatrix} \Rightarrow e^A = e^{\lambda_1} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$
- $A = \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix} \Rightarrow e^A = e^a \begin{bmatrix} \cos b & -\operatorname{sen} b \\ \operatorname{sen} b & \cos b \end{bmatrix}$

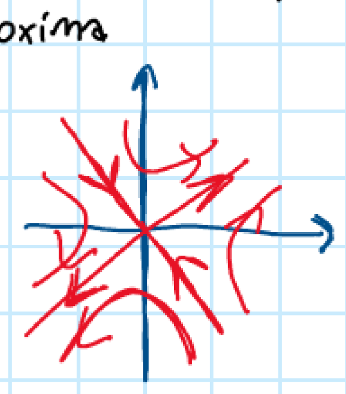
- $X'(t) = \underbrace{A}_{\text{não depende de } t} X(t) \Rightarrow X(t) = e^{tA}X(0)$ é solução única.

↳ equação homogênea

Observação (Livro):

A^*: Matriz Adjunta de A e $A^* := \bar{A}^T$, onde $\bar{A}$ é a conjugada de A, isto é, para cada elemento $x + iy$ de A será $x - iy$ em $\bar{A}$.

- Ponto de Sela: ponto instável em que apenas uma solução se aproxima



Exercício 15: A

$x' = \begin{pmatrix} 5 & -1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} x$, $x(0) = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$

$\det(A - \lambda I) = 0 \Rightarrow (5 - \lambda)(1 - \lambda) + 3 = 0$

$\begin{cases} \lambda_1 = 2 \\ \lambda_2 = 4 \end{cases}$

$\begin{pmatrix} 5-2 & -1 \\ 3 & 1-2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow v_1 = (3, 1)$

$\begin{pmatrix} 5-4 & -1 \\ 3 & 1-4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 3 & -3 \end{pmatrix} \Rightarrow v_2 = (1, 1)$

Livro: $x = c_1 \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} e^{2t} + c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{4t}$

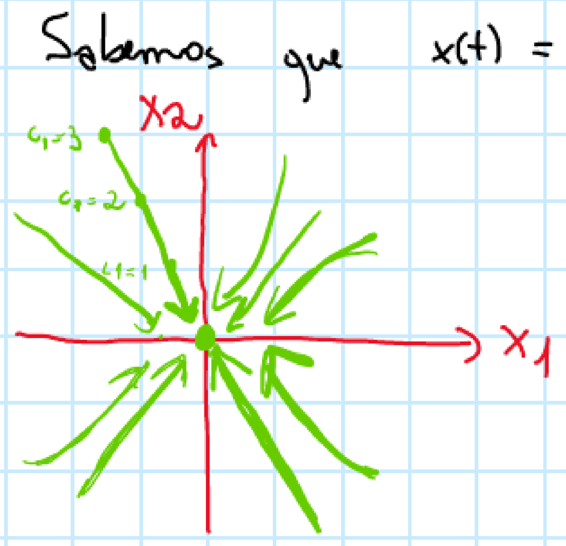
$x(0) = c_1 \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$

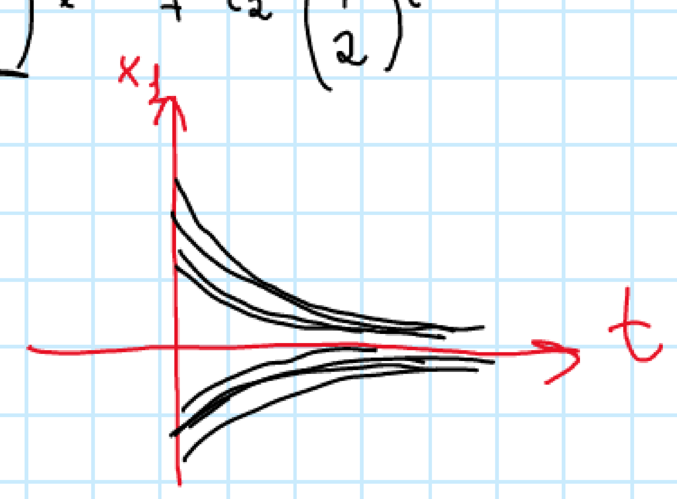
$\Rightarrow c_1 = \frac{3}{2}$ e $c_2 = -\frac{5}{2}$

Exercício 24.

$r_1 = -1$, $v_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$; $r_2 = -2$, $v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

Sabemos que $x(t) = c_1 \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} e^{-t} + c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} e^{-2t}$





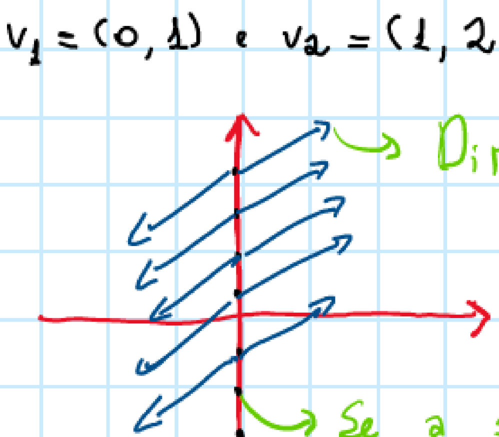
E se um dos autovalores for zero?

Ex.: $x' = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} x$

Polinômio Característico (Autovalores): $(1 - \lambda)(-\lambda) - 0 = 0$

$\lambda_1 = 0$ e $\lambda_2 = 1$ → autovalores

$v_1 = (0, 1)$ e $v_2 = (1, 2)$ → autovetores



Se a solução cair no eixo y, a solução não sai do eixo e é constante, pois o autovalor é 0