Resumo em Controle Ótimo

Lucas Machado Moschen
Escola de Matemática Aplicada

3 de Março de 2020

1 Problemas Básicos de Controle Ótimo

Exemplo 1

Como motivação apresentada, consideramos duas equações que representam a variação do peso da parte vegetativa e reprodutiva, respectivamente. Nesse caso, o controle é a fração da fotossíntese destinada para a parte vegetativa. Nosso objetivo, nesse caso, é maximixar:

$$F(x,u,t) := \int_0^T \ln(x_2(t))dt, s.a.$$

$$\begin{cases} x_1'(t) = u(t)x_1(t) \\ x_2'(t) = (1-u(t))x_2(t) \\ 0 \leq u(t) \leq 1 \end{cases}$$

Desta maneira, em um sistema de controle há variáveis de estado, funções de controle, que afetam a dinâmica do sistema, e o funcional objetivo, que funciona como o cálculo do lucro.

1.1 Definições Importantes

1. **Continuidade por partes:** Se uma função é contínua em cada ponto em que é definida, exceto em uma quantidade finita e é igual a seu limite à esquerda ou à direita me cada ponto (não permite pontos deslocados).

2. **Diferenciável por partes:** Função contínua que é diferenciável em cada ponto que é definida, exceto uma finidade.

3. **Côncava:** Se $\forall 0 \leq \alpha \leq 1$ e $\forall a \leq t_1, t_2 \leq b$, $\alpha k(t_1) + (1-\alpha)k(t_2) \leq k(\alpha t_1 + (1-\alpha)t_2)$.

4. **Lipschitz:** $|k(t_1) - k(t_2)| \leq c|t_1 - t_2|$.

5. **Teorema do Valor Médio**

6. **Teorema da Convergência Dominante:** Considere uma sequência $\{f_n\}$ dominada por uma função Lebesgue integrável g. Suponha que sequência converge ponto a ponto para uma função f. Então f é integrável e $\lim_{n\to\infty} \int_S f_n d\mu = \int_S f d\mu$.

Exercício 1

Se $k : I \to \mathbb{R}$ é diferenciável por partes em um intervalo limitado, k é Lipschitz.

Prova: Seja $P = \{p_0, ..., p_n\}$ pontos em que k não é diferenciável. Pelo teorema do valor médio, $\forall i, \exists x_i^0$, tal que $k(p_i) - k(p_{i-1}) = k'(x_i^0)(p_i - p_{i-1})$. Como k' é contínua em cada intervalo $[p_{i-1}, p_i]$, basta tomar o valor máximo da derivada nesse intervalo. Depois disso, basta tomar o maior valor entre todas as derivadas e a desigualdade de Lipschitz é satisfeita.

1.2 Problema

Considere $x'(t) = g(t, x(t), u(t)) \to u(t) \mapsto x(u)$. Queremos, então, dado um funcional $J(u) := \int_{t_0}^{t_1} (f(t, x(t), u(t))dt, x(t_0) = x_0$, maximizá-lo. $u(t)$ é contínua por partes.

Função Adjunta: proposta similar aos multiplicadores de Lagrange. $\lambda : [t_0, t_1] \to \mathbb{R}$ é diferenciável por partes e deve satisfazer algumas condições.

Para isso, assumimos a existência u^* e x^*. Nesse caso, $J(u) \leq J(u^*) < \infty$. Tome $u^\epsilon = u^*(t) + \epsilon h(t), x^\epsilon(t_0) = x_0 \implies \lim_{\epsilon \to 0} u^\epsilon = u^*$. x^ϵ é o estado associado ao controle. Como a função g é continuamente diferenciável, $x^\epsilon \to x^*$. Assim, a sua derivada em $\epsilon = 0$ existe. Utilizo, pelo TFC, que $\int_{t_0}^{t_1} \frac{d}{dt}(\lambda(t)x^\epsilon(t))dt = \lambda(t_1)x^\epsilon(t_1) - \lambda(t_0)x^\epsilon(t_0)$. Desta maneira, utilizo que $J(u^\epsilon) = \int_{t_0}^{t_1} f(t, x^\epsilon(t), u^\epsilon(t))dt - \lambda(t_1)x^\epsilon(t_1) + \lambda(t_0)x^\epsilon(t_0)$. Sabemos que $lim_{\epsilon \to 0} \frac{J(u^\epsilon) - J(u^*)}{\epsilon} = 0$, pois $J(u^*)$ é máximo. Desta maneira,

$$0 = \frac{d}{d\epsilon} J(u^\epsilon)_{\epsilon=0} = \int_{t_0}^{t_1} [(f_x + \lambda(t)g_x + \tag{1}$$

$$+\lambda'(t))\frac{\partial x^\epsilon}{\partial \epsilon}(t)_{\epsilon=0} + (f_u + \lambda(t)g_u)h(t)]dt - \lambda(t_1)\frac{\partial x^\epsilon}{\epsilon}(t_1)_{\epsilon=0} \tag{2}$$

Note que isso pode ser feito pelo Teorema da Convergência Dominante, pois podemos mover o limite (derivada) para dentro da integral (intervalo compacto e integrando é diferenciável po partes). Para que ocorra a igualdade citada acima, definimos $H(t, x, u, \lambda) := f(t, x, u) + \lambda g(t, x, u)$ e:

$$\begin{cases} \frac{\partial H}{\partial u}_{u=u^*} = 0 \\ \frac{\partial H}{\partial x}_{x=x^*} = -\lambda' \\ \frac{\partial H}{\partial \lambda} = x' \\ \lambda(t_1) = 0 \end{cases} \tag{3}$$

1.3 Princípio Máximo de Pontryagin

Se u^* e x^* são controle ótimo, então existe $\lambda(t)$ diferenciável por partes tal que a função H, como definida anteriormente, pode ser maximizada em $u^*(t)$. A demonstração é mais simples para o caso de f e g côncavas em u e $\lambda(t) \geq 0$. A segunda derivada do Hamiltoniano indica o tipo de problema: Se for negativa, é um problema de maximização.
Observação: A condição de maximizar H não sempre implica que $H_u = 0$.

1.4 Exercício 1.6 - Efeito Alle

Nesse efeito, consideramos um valor mínimo. O crescimento $x'(t) = rx(t)(\frac{x(t)}{x_{min}} - 1)(1 - \frac{x(t)}{x_{max}})$

2 Existência e Outras Propriedades

Observação: Se o funcional objetivo tiver valor mais ou menos infinito, dizemos que o problema não tem solução. Como assumimos a existência da solução, podemos obter um funcional que tem valor infinito, algo que não desejamos.

Teorema: $J(u) := \int_{t_0}^{t_1} f(t, x(t), u(t))dt, s.a\ x'(t) = g(t, x(t), u(t)), x(t_0) = x_0$. Ainda, $f, g \in C^1$ nos três argumentos e côncavos em x e u. Sob as condições apresentadas anteriormente, adicionadas a $\lambda(t) \geq 0$, então para todo u, $J(u^*) \geq J(u)$. A demonstração é basicamente mostrar que a diferença é maior do que 0.

Teorema 2: Seja $u \in L([t_0, t_1]; \mathbb{R})$, f é convexa em u existem constantes C_4 e C_1,C_2,C_3

> 0 e $\beta > 1$, tal que:

$$\begin{cases} g(t,x,u) = \alpha(t,x) + \beta(t,x)u \\ |g(t,x,u)| \leq C_1(1+|x|+|u|) \\ |g(t,x_1,u) - g(t,x,u)| \leq C_2|x_1 - x|(1+|u|) \\ f(t,x,u) \geq C_3|u|^\beta - C_4 \end{cases}$$

Então $J(u^*)$ é maximizador do funcional. Em problemas de minimização, g seria côncava e a desigualdade de f é revertida.

Agora, temos que extender as condições necessárias para Lebesgue.

Unicidade: Implica diretamente da unicidade das soluções do sistema de otimização (intervalos de tempo curto). A volta não é sempre verdadeira.

2.1 Interpretação da Adjunta

Considere o funcional $V(x_0, t_0)$ a ser maximizado. Estabelecemos que $\frac{\partial V}{\partial x}(x_0, t_0) = \lim_{\epsilon \to 0} \frac{V(x_0+\epsilon, t_0) - V(x_0, t_0)}{\epsilon} = \lambda(t_0)$. Podemos relacionar, então, a função adjunta à variação marginal da função custo/lucro com respeito ao estado. É o valor adicional associado com um incremento adicional da variável de estado. Podemos aproximar:

$$V(x_0 + \epsilon, t_0) \approx V(x_0, t_0) + \epsilon\lambda(t_0).$$

Se $\epsilon = 1$, podemos ver que ao adicionar um unidade de valor, $\lambda(t_0)$ é o valor objetivo adicional.

2.2 Princípio da Otimalidade

Teorema 3: Considere u^* o controle ótimo associado ao estado x^* para o problema de já citado. Se $\hat{t}, t_1 < \hat{t} < t_1$, então as funções restritas ao intervalo $[\hat{t}, t_1]$ formam uma solução ótima para o problema com tempo inicial $\hat{t}$. Além disso, será único, desde que u^* seja. A demonstração ocorre por contradição. Note que nada pode ser dito sobre o intervalo $[t_0, \hat{t}]$, pois existem contra-exemplos.

Teorema 4: $H(t, x, u, \lambda)$ é contínua por partes e contínua Lipschitz em relação ao tempo no caminho ótimo.

Função Autônoma: Quando não existe dependência do tempo nas funções f e g.

Teorema 5: Se um problema de controle ótimo é autônomo, então o Hamiltoniano é uma função que não depende do tempo. Note que se $M(t) := H(x^*(t), u^*(t), \lambda(t))$ é Lipschitz continua, sabemos que M é diferenciável em quase toda parte com respeito à medida de Lebesgue. A partir disso, e utilizando o princípio máximo, vemos que $M'(t) = 0$ em quase toda parte. Como M é contínua, ela é constante.

Princípio Máximo: O máximo de uma função é encontrado em uma das bordas.

3 Condições finais

3.1 Termo Payoff

Muitas vezes, também queremos maximizar o valor de uma função em um determinado tempo, em especial no final do intervalo. Nesse caso, o problema se torna:

$$\begin{cases} \max_u[\phi(x(t_1)) + \int_{t_0}^{t_1} f(t, x(t), u(t))dt] \\ x' = g(t, x(t), u(t)), x(t_0) = x_0 \end{cases}$$

A função ϕ é conhecida como termo payoff. A única mudança na obtenção das condições necessárias é na condição do tempo final. Obtemos que $\lambda(t_1) = \phi'(x^*(t_1))$. (Mais uma vez, precisamos fazer com que $\lim_{\epsilon \to 0} \frac{J(u^\epsilon) - J(u^*)}{\epsilon} = 0$

3.2 Estados com Pontos Finais Fixados

Obs.: O funcional objetivo ser imaterial significa que não depende da condição final do estado.

Podemos deixar $x(t_0)$ livre e $x(t_1) = x_1$ fixado. Essa caso é similar com o anterior, com a mudança de que $\lambda(t_0) = -\phi'(x(t_0))$. Isso sugere que exista uma dualidade entre as condições de estado e adjunta.

Também podemos fixar os pontos inicial e final de estado. Notamos que estamos considerando a maximização sobre o conjunto de controles admissíveis, que respeitem as condições, inclusive sobre a variável de estado.

Teorema 1: Se $u^*(t)$ e $x^*(t)$ são ótimos para o problema com pontos inicial e final fixados, então existe uma função $\lambda(t)$ diferenciável por partes e uma contante λ_0 igual a 0 ou 1, onde $H = \lambda_0 f(t, x(t), u(t)) + \lambda(t) g(t, x(t), u(t))$ e $\lambda'(t) = -H_x$.

A diferença é que a função adjunta não tem restrições. A demonstração utiliza uma técnica diferente da utilizada até então. A constante ajusta para problemas degenerados ou problema tem funcional objetivo imaterial.

4 Método Backward/Foward

Queremos agora resolver os problemas de controle ótimo numericalmente. A equação $\frac{\partial H}{\partial u} = 0$ deve ser satisfeita em u^* e pode ser de ajuda para encontrar u em função de x e λ. A partir disso, podemos utilizar um método como Runge-Kutta para resolver o sistema ótimo. Ele vai encontrar o controle ótimo se esse existir.

4.1 Algoritmo

1. Chute inicial para $\vec{u}$, sendo cada coordenada de u um valor no tempo discreto.

2. Resolva x Foward utilizando a condição inicial e utilizando sua equação diferencial.

3. Use a condição final de λ e resolva Backward de acordo com sua equação diferencial.

4. Atualize o vetor de controle.

5. Convergência.

É interessante utilizar uma combinação convexa entre o valor do controle anterior e o valor atual para acelerar a convergência.

Combinação Convexa: Combinação Linear de pontos, cuja soma dos coeficientes é positiva e a soma é 1.

O erro no algoritmo é em geral o relativo e ele deve ser menor do que uma tolerância aceitável. A condição que obtemos é que $\delta\|\vec{u}\| - \left\|\vec{u} - ol\vec{d}u\right\| \geq 0$

4.2 Runge-Kutta

$$\begin{cases} x(t+h) \approx x(t) + \frac{h}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4) \\ k1 = f(t, x(t)) \\ k2 = f(t + \frac{h}{2}, x(t) + \frac{h}{2}k_1) \\ k3 = f(t + \frac{h}{2}, x(t) + \frac{h}{2}k_2) \\ k4 = f(t + h, x(t) + hk_3) \end{cases}$$

O erro é da ordem de h^4.

5 Laboratórios

5.1 Laboratório 1

Nesse laboratório, o autor explora a utilização do MatLab como ferramenta, devido à facilidade de se trabalhar com essa linguagem matematicamente e pela quanlidade grafica dos resultados.

Além disso, ele resolve um problema de controle ótimo.

5.2 Laboratório 2

Aplicação em Biologia. Dada uma população com capacidade máxima (carrying capacity), queremos reduzí-la. Nesse caso, o controle é quantidade adicionada no tempo t. Assim, o problema se reduz a:

$$\begin{cases} \min_u \int_0^T (Ax(t)^2 + u(t)^2) dt \\ s.a. \;\; x'(t) = r(M - x(t)) - u(t)x(t), x(0) = x_0 \end{cases} \tag{4}$$

5.3 Laboratório 3

Aplicação sobre Bactéria. Nesse laboratório, o tópico pe sobre o crescimento de uma bactéria quando um nutriente qímico é utilizado para acelerar a reprodução. Nosso problema, então:

$$\begin{cases} \max_u Cx(1) - \int_0^1 u(t)^2 dt \\ s.a. \;\; x'(t) = rx(t) + Au(t)x(t) - Bu(t)^2 e^{-x(t)}, \\ x(0) = x_0, A, B, C \geq 0 \end{cases} \tag{5}$$

Como $\lambda(t) > 0 \forall t$, podemos obter a caracterização do controle como comumente fazemos.

6 Controles Limitados

Sabemos que, em geral, nossos problemas a serem resolvidos tem limitações no controle. Por exemplo, no uso de um químico, podemos indicar que o controle é necessariamente não negativo e tem, também, uma restrição legal, muitas vezes.

6.1 Condições Necessárias:

Esse problema será descrito da seguinte forma

$$\max_u \int_{t_0}^{t_1} f(t, x(t), u(t)dt + \phi(x(t_1))$$
$$s.a.\ x'(t) = g(t, x(t), u(t)), x(t_0) = x_0,$$
$$a \leq u(t) \leq b, a < b$$

Seja u^* e x^* o par ótimo. Observe que a derivada do funcional objetivo pode não ser zero no controle ótimo, pois u^* pode estar nos limites do intervalo. Podemos avaliar o sinal da derivada, entretanto. Agora, dizemos que $\epsilon \in (0, \epsilon_0]$. E, mais uma vez, reescrevemos o funcional e derivamos em relação a ϵ, no ponto 0, porém, nesse caso, essa derivada será menor ou igual a 0. Tomando a função adjunta com as restrições já utilizadas anteriormente, reduzo a inequação para $0 \geq \int_{t_0}^{t_1} (f_u + \lambda g_u) h dt$, que vale para todos os valores de h.

Seja s um ponto de continuidade de u^* com $a \leq u^*(s) < b$. Teremos que $f_u + \lambda g_u \leq 0$. Em contrapartida, se tivermos $a < u^*(s) \leq b$, concluiremos que $f_u + \lambda g_u \geq 0$. Os pontos que não há continuidade são irrelevantes. Sumariamente:

$$\begin{aligned} u^*(t) = a &\implies f_u + \lambda g_u \leq 0 \; at \; t \\ a < u^*(t) < b &\implies f_u + \lambda g_u = 0 \; at \; t \\ u^*(t) = b &\implies f_u + \lambda g_u \geq 0 \; at \; t \\ &\iff \\ f_u + \lambda g_u < 0 \; em \; t &\implies u^*(t) = a \\ f_u + \lambda g_u = 0 \; em \; t &\implies a < u^*(t) < b \\ f_u + \lambda g_u > 0 \; em \; t &\implies u^*(t) = b \end{aligned}$$

7 Laboratórios

7.1 Laboratório 4

É um reexame do primeiro laboratório. A primeira análise é de como o controle muda quando há uma restrição (o que faz sentido).

7.2 Laboratório 5 - Cancer

Queremos minimizar a densidade do tumor e os efeitos colaterais das drogas. É assumido que o tumor tenha um crescimento Gompertzian. O modelo utilizado no laboratório é Skiper's log-kill hipótese, que afirma que a morte de células devido às drofas é proporcional a população de tumor.

Considere $N(t)$ a densidade normalizada do tumor no tempo t. Assim:

$$N'(t) = rN(t) \ln(\frac{1}{N(t)} - u(t)\delta N(t)$$

r é a taxa de crescimento do tumor, δ a magnitude da dose e $u(t)$ descreve a ação da droga. É a força do efeito da droga. Escolhemos o funcional para ser

$$\min_u \int_0^T aN(t)^2 + u(t)$$

Além disso, $u(t) \geq 0$ e $N(0) = N_0$.

7.3 Laboratório 6 - Fish Harvesting

Suponha que em um tanque em $t = 0$ são adicionados peixes com massa média essencialmente 0. Além, descrevemos a massa do peixe segundo $f(t) = \frac{kt}{t+1}$. Note que $\lim f(t) = k$. Considere um intervalo $[0, T]$, com T pequeno suficiente para que não haja reprodução. Queremos:

$$\max_u \int_0^T A\frac{kt}{t+1}x(t)u(t) - u(t)^2 dt$$

$$\textit{subject to } x'(t) = -(m + u(t))x(t), x(0) = x_0, 0 \leq u(t) \leq M$$

M é um limite físico para a taxa de colheita. Note que para qualquer valor de $u(t) > 0$, a tax avai decrescer.

Como nos laboratórios anteriores, o valor T influencia o controle ótimo.

8 Optimal Control of Several Variables

Agora o problema se resume a:

$$max_{u_1,...,u_m} \int_{t_0}^{t_1} f(t, x_1(t), ..., x_n(t), u_1(t), ..., u_m(t))dt + \phi(x_1(t_1), ..., x_n(t_1))$$

$$\textit{subject to } x_i'(t) = g_i(t, x_1(t), ..., x_n(t), u_1(t), ..., u_m(t))$$

$$x_i(t_0) = x_{i0} \textit{ for } i = 1, 2, ..., n$$

onde as função f e g_i são continuamente diferenciáveis em cada variável. Podemos usar a expressão em forma de vetores. Considere $\vec{\lambda}(t) = [\lambda_1(t), ..., \lambda_n(t)]$ um vetor com funções diferenciáveis por partes. Definimos $H(t, \vec{x}, \vec{u}, \vec{\lambda}) = f(t, \vec{x}, \vec{u}) + \vec{\lambda}(t) \cdot \vec{g}(t, \vec{x}, \vec{u})$. Se fizermos o mesmo processo anterior, vamos obter as condições:

$$x_i'(t) = \frac{\partial H}{\partial \lambda_i} = g_i(t, \vec{x}, \vec{(u)}), x_i(0) = x_{i0} \; for \; i = 1, ...n$$

$$\lambda_j'(t) = -\frac{\partial H}{\partial x_j}, \lambda_j(t_1) = \phi_{x_j}(\vec{x}(t_1)) \; for \; j = 1, ..., n$$

$$0 = \frac{\partial H}{\partial u_k} \; at \; u_k^* \; for \; k = 1, ..., m$$

Outros ajustes vistos nos capítulos anteriores ocorrem de mesma forma no caso multivariado. Inclusive se os limites das variáveis de controle estiverem presentes, o que altera as condições, também.

8.1 Problemas Linear Quadratic Regulator

Considere a equação diferencial do estado linear em x e u e o funcional objetivo na forma quadrática.

$$J(u) := \frac{1}{2}[x^T(T)Mx(t) + \int_0^T x^T(t)Q(t)x(t) + u^T R(t)u(t)dt]$$

$$x'(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t)$$

Onde $M, Q(t)$ são positivas semidefinidas e $R(t)$ é positiva definida para garantir invertibilidade. As três são simétricas. Observe que isso garante a diagonalização. Assim: $H = \frac{1}{2}x^T Qx + \frac{1}{2}u^T Ru + \lambda^T(Ax + Bu)$.

Deste modo $u^* = -R^{-1}B^T\lambda$ e $\lambda' = -Qx - A^T\lambda, \lambda(T) = Mx(T)$. Se supormos que $\lambda = Sx$, chegamos que $S'x + Sx' = -Qx - A^T\lambda$. Com as devidas transformações. Obtermos que $-S'x = Qx + A^TSx - SBR^{-1}B^TSx$, com $S(T) = M$. Isso nos mostra que equação matricial Ricatti, que $S(t)$ deve satisfazer. Basta resolver o problema. Por fim $u^* = -R^{-1}B^T Sx$. Essa matriz é chamada de ganho.

8.2 Equações Diferenciais de Ordem mais Alta

Quando temos uma equação diferencial de ordem mais alta, podemos definir um sistema com as derivadas, onde $x_1(t) = x(t), x_2(t) = x'(t), ..., x_{n+1}(t) = x^{(n)}(t)$. A partir disso, podemos resolver com o Princípio Máximo de Pontryagin.

8.3 Limites Isoperimétricos

Além dos limites inferior e superior que podemos colocar no controle, também podemos querer que o exista limites na integral do controle. Exemplo: Para medicar uma pessoa, podemos querer que a quantidade total de remédia seja um valor B. Assim, a restrição é do tipo $\int_0^T u(t)dt = B$. De forma geral, podemos ter $\int_{t_0}^{t_1} h(t, x(t), u(t))dt = B$, sendo h continuamente diferenciável, como restrição. Desta maneira, não podemos usar o Princípio Máximo de Pontryagin. Para isso, introduzimos $z(t) = \int_{t_0}^{t} h(s, x(s), u(s))ds$. Desta maneira, nosso problema terá duas variáveis de estado.

8.4 Soluções Numéricas

Agora, para cada controle, um valor inicial para o controle é dado. Depois as variáveis de estado são resolvidas simultaneamente. Por fim, as adjuntas.

9 Linear Dependence on the Control

Vamos considerar problemas especiais em que o problema é linear no controle $u(t)$.

9.1 Controle Bang-Bang

Considere o problema de controle ótimo.

$$max_u \int_{t_0}^{t_1} f_1(t,x) + u(t)f_2(t,x)dt$$

$$s.a.\;\; x'(t) = g_1(t,x) + u(t)g_2(t,x), x(0) = x_0$$

$$a \leq u(t) \leq b$$

Assim $H(t,x,u,\lambda) = f_1(t,x) + \lambda g_1(t,x) + u(t)(f_2(t,x) + \lambda g_2(t,x))$, linear em $u(t)$. Observe a derivada parcial em relação a u não carrega informação sobre $u(t)$. Assim definimos $\psi(t) := f_2(t,x(t)) + \lambda(t)g_2(t,x(t))$, muitas vezes chamada de função de troca. Se $\psi = 0$ não pode ser obtido em um intervalo de tempo, mas ocorre apenas em pontos finitos, o controle é dito "Bing Bang", porque só varia entre os valores mínimo e máximo de $u(t)$. Os valores de $u(t)$ nesses pontos não são de interesse, portanto.

Em contrapartida, se $\psi(t) \equiv 0$ em um intervalo de tempo, dizemos que u^* é singular nesse intervalo. Esse caso será explorado na próxima sessão.

Para resolver esse tipo de problema, primeiro precisamos verificar se de fato o problema é Bang-Bang. Numericamente, o problema é apenas em verificar a positividade ou negatividade da função de troca.

9.2 Controles Singulares

O livro explora um exemplo inicial:

$$max_u \int_0^2 (x(t) - t^2)^2 dt$$

$$s.a.\;\; x'(t) = u(t), x(0) = 1$$

$$0 \leq u(t) \leq 4$$

Calculamos o Hamiltoniano e encontramos $u^*(t)$ em função da adjunta. Para sair dessa hipótese, precisamos fazer uma análise mais minunciosa. Ela começa em provar que $x(t) \geq t^2 \to \lambda'(t) \leq 0 \wedge \lambda(t) \geq 0$. Então, basta encontrar os valores de t em que essa função é positiva ou igual a 0. Dessa forma, teremos descrito o controle e estado ótimos.

No caso numérico, podemos ter que analisar quando nossa função de troca vai ser maior, igual ou menor que zero. Porém, a igualdade a 0 é complicada computacionalmente. Nesse sentido, estabelecemos um intervalo. No exemplo 17.4 do livro, quando o controle é Bang-Bang, houve convergência. Já o contrário não ocorreu. Como a função de troca é identicamente zero, problemas singulares são frequentemente instáveis.

Pesquisa tem sido feita nesse sentido. A condição de Legendre-Clebsch é um exemplo. É uma condição de segunda ordem, porque envolve ordem de derivadas mais altas.

10 SIQ models

O isolamento/quarentena é um procedimento para controlar o avanço da doença. Foi, provavelmente, um dos primeiros métodos de controle utilizados. Uma epidemia é um surto de uma doença em um curto período de tempo. Inicialmente, olharemos para os modelos SIR, com a adição de um novo compartimento, Q. Assumimos, inicialmente, que aqueles em quarentena não infectam suscetíveis.

Seja $S(t), I(t), Q(t)\ e\ R(t)$ o número de suscetíveis, infectados, removidos e em quarentena no tempo t. Seja β o número médio de contatos suficientes para transmissão, então $\beta\frac{I}{S+I+R}S$ é o número de novos casos e é chamada de incidência padrão. Podemos aplicar a lei das massas da mesma forma (βSI).

10.1 Simple mass action incidence

Considere que haja imunidade permanente $R(t)$. O modelo:

$$S'(t) = A - \beta SI - dS,$$

$$I'(t) = [\beta S - (\gamma + \delta + d + \alpha_1)]I,$$

$$Q'(t) = \delta I - (d + \alpha_2 + \epsilon)Q,$$

$$R'(t) = \gamma I + \epsilon Q - dR,$$

onde, α_1, α_2 representam os coeficientes de mortes causadas pelas doeças. Afirmamos que $D = \{(S, I, Q, R) | S \geq 0, I \geq 0, Q \geq 0, R \geq 0, S + I + Q + R \leq A/d\}$ é o conjunto das possíveis soluções, pois $N(t) \to A/d$ quando não há doença.

10.1.1 Equilíbrio

No equilíbrio, $I = 0$ ou $S = \frac{\gamma+\delta+d+\alpha_1}{\beta}$. Se $I = 0$, $S = A/d, Q = 0, R = 0$. Se $I \neq 0, I(t) = \frac{A-dS}{\beta S} = \frac{A-dS}{\gamma+\delta+d+\alpha_1}$. Nesse caso, $Q(t) = \frac{\delta I}{d+\alpha_2+\epsilon}$ e $R = \frac{\gamma I+\epsilon Q}{d}$.

Defina o número de reprodução de quarentena $R_q = \frac{\beta(A/d)}{\gamma+\delta+d+\alpha_1}$, onde β é a taxa de contato, e o denominador indica o tempo médio de residência. Assim R_q indica o número médio de infecções secundárias em uma população completamente suscetível quando um infeccioso entra na população.

10.2 Quarantine-adjusted incidence

$$S'(t) = A - \beta \frac{SI}{S + I + R} - dS,$$

$$I'(t) = [\beta \frac{S}{S + I + R} - (\gamma + \delta + d + \alpha_1)]I,$$

$$Q'(t) = \delta I - (d + \alpha_2 + \epsilon)Q,$$

$$R'(t) = \gamma I + \epsilon Q - dR,$$

10.3 Modelo de Controle Proposto I

$$\min_{u} \int_0^T CI(t) + [u(t)I(t)]^2 dt,$$

$$s.a\ S'(t) = A - \beta \frac{SI}{S+I+R} - dS,$$

$$I'(t) = \beta \frac{SI}{S+I+R} - (d + \alpha_1 + \gamma + u)I,$$

$$Q'(t) = uI - (\alpha_2 + d + \epsilon)Q,$$

$$R'(t) = \gamma I + \epsilon Q - dR$$

$$S(0) = S_0 \geq 0, I(0) = I_0 \geq 0, Q(0) = 0, R(t) = R_0 \geq 0,$$

$$0 \leq u(t) \leq 1$$

10.4 Modelo de Controle Proposto II - Controle Linear

$$\min_{u} \int_0^T CI(t) + u(t)I(t) dt,$$

$$s.a\ S'(t) = A - \beta \frac{SI}{S+I+R} - dS,$$

$$I'(t) = \beta \frac{SI}{S+I+R} - (d + \alpha_1 + \gamma + u)I,$$

$$Q'(t) = uI - (\alpha_2 + d + \epsilon)Q,$$

$$R'(t) = \gamma I + \epsilon Q - dR$$

$$S(0) = S_0 \geq 0, I(0) = I_0 \geq 0, Q(0) = 0, R(t) = R_0 \geq 0,$$

$$0 \leq u(t) \leq 1$$