

# Conteúdos da Matéria Equações Diferenciais Ordinárias

Lucas Moschen  
Fundação Getulio Vargas

24 de Março de 2020

## Resumo

Neste documento irei constar os principais temas cobertos pela matéria, que tem foco em um cálculo de edos, sem grandes definições precisas e estudo do comportamento qualitativo. Qualquer correção nesse documento pode ser sugerida pelo leitor através de um *pull request*. Para iniciar, irei listar os temas até agora cobertos e também inserirei um pequeno resumo sobre o determinado tópico.

## Conteúdo

<b>1</b>	<b>Equações Diferenciais Lineares de 1ª Ordem</b>	<b>2</b>
1.1	Equações de Bernoulli . . . . .	2
<b>2</b>	<b>Equações com Variáveis Separáveis</b>	<b>3</b>
<b>3</b>	<b>Equações Exatas</b>	<b>3</b>
3.1	Fator de Integração . . . . .	3
<b>4</b>	<b>Equações Diferenciais de 2ª ordem</b>	<b>3</b>
4.1	Equações homogêneas (em que $G(x) = 0$ ) . . . . .	4
4.1.1	O Determinante Wronskiano . . . . .	4
4.1.2	Funções constantes . . . . .	4
4.2	Redução de ordem . . . . .	5
4.3	Não homogêneas com coeficientes constantes . . . . .	5
4.3.1	Método dos coeficientes a determinar . . . . .	5

<b>5</b>	<b>Modelos da Dinâmica de uma População</b>	<b>6</b>
5.1	Malthus . . . . .	6
5.2	Logística de Verhuslt . . . . .	6
5.3	Gopertz . . . . .	6
<b>6</b>	<b>Sistema Autônomo</b>	<b>7</b>
<b>7</b>	<b>Modelos das Ciências Naturais</b>	<b>7</b>
7.1	Resfriamento de um corpo . . . . .	7
7.2	Problemas de Mistura . . . . .	8
7.3	Produtos Químicos em uma Lagoa . . . . .	8
7.3.1	Modelo . . . . .	8
<b>8</b>	<b>Problemas Soltos</b>	<b>8</b>
8.1	Perseguição . . . . .	8

# 1 Equações Diferenciais Lineares de 1ª Ordem

Formato:  $\frac{dy}{dx} + p(x)y = q(x)$ . Observe a linearidade de  $y$  e que a sua derivada de maior ordem é a primeira. Para resolver esse exemplo, usamos o fator de integração  $u(x) = e^{\int p(x)dx}$  e multiplicamos em ambos os lados. Observe que escolhemos ele, porque queremos  $(y \cdot u)' = y' \cdot u + y \cdot u' = u \cdot q$  e  $u' = u \cdot p$ . A partir disso, obtemos que  $y(x)u(x) = \int u(x)q(x)dx$ .

## 1.1 Equações de Bernoulli

Formato:  $y' + p(x)y = q(x)y^n$ . Neste caso temos que o expoente de  $y$  é de ordem  $n$ . Para resolver esse problema, supomos que  $y \neq 0$  e fazemos uma transformação de variável  $z(x) = [y(x)]^{1-n}, \forall x$ . Essa transformação vai nos permitir obter a equação em um formato desejado. Para ver isso, primeiro façamos  $\frac{dz}{dx} = \frac{dz}{dy} \frac{dy}{dx} = (1-n)y^{-n} \frac{dy}{dx}$ , logo, substituindo os valores, teremos que  $\frac{1}{1-n}y^n z' + p(x)zy^n = q(x)y^n \implies z' + (1-n)p(x)z = q(x)$  e resolvemos pelo formato anterior.

## 2 Equações com Variáveis Separáveis

Formato:  $\frac{dy}{dx} = f(x, y) = \phi(x)\psi(y)$ , isto é, a derivada pode ser escrita como um produto de uma função que só depende de  $x$  por outra que só depende de  $y$ . Nesse caso, usamos a reescrita diferencial para poder escrever isso da seguinte forma:  $\int \frac{dy}{\psi(y)} = \int \phi(x)dx$ . Isso pode ser estendido quando a função pode ser escrita como uma divisão de funções desse tipo, bastando vê-la como um produto.

## 3 Equações Exatas

Formato: Seja  $\frac{dy}{dx} = f(x, y) = -\frac{M(x, y)}{N(x, y)}$  que pode ser reescrita da forma  $M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0$ . Ela é caracterizada como **exata** se  $\exists g(x, y)$ , tal que  $dg = Mdx + Ndy$ , onde  $dg$  é o diferencial de  $g$ . Isto é,  $\frac{\partial g}{\partial x} = M$  e  $\frac{\partial g}{\partial y} = N$ . Nesse caso, podemos provar pelo teorema de Clairaut-Schwarz que  $\frac{\partial M(x, y)}{\partial y} = \frac{\partial N(x, y)}{\partial x}$  (\*).

### 3.1 Fator de Integração

Suponha que a equação  $M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0$  seja não exata. Nesse caso, a ideia é encontrar uma função  $u$  que ao multiplicar a equação, obtenha-se a hipótese do teorema de Clairaut-Schwarz, como mencionado acima (\*). Nesse caso, se  $\frac{M_y - N_x}{N}$  é função apenas de  $x$ , o fator de integração será  $u(x) = \exp\left\{\int \frac{M_y - N_x}{N} dx\right\}$ . Para construir esse resultado, basta pensar, supondo a existência de  $u(x)$ , temos que  $\frac{\partial(u \cdot M)}{\partial y} = u \frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial(u \cdot N)}{\partial x} = \frac{du}{dx} N + u \frac{\partial N}{\partial x}$ . Agora, se  $\frac{N_x - M_y}{M}$  é função apenas de  $y$ , vale que  $u(y) = \exp\left\{\int \frac{N_x - M_y}{M} dy\right\}$ .

## 4 Equações Diferenciais de 2ª ordem

Sejam  $P(\cdot), Q(\cdot), R(\cdot), G(\cdot)$  (onde  $\cdot$  indica que é uma função) contínuas tal que

$$G(x) = R(x)y + Q(x)\frac{dy}{dx} + P(x)\frac{d^2y}{dx^2} \quad (1)$$

Temos uma equação diferencial de segunda ordem.

## 4.1 Equações homogêneas (em que $G(x) = 0$ )

**Teorema:** Se  $y_1(x)$  e  $y_2(x)$  são soluções de 1, com  $G(x) = 0$ . Então  $y(x) = c_1y_1(x) + c_2y_2(x)$  também é uma solução.

*Observação:* Duas soluções  $y_1(x)$  e  $y_2(x)$  são linearmente independentes se  $\alpha_1y_1(x) + \alpha_2y_2(x) = 0 \implies \alpha_1 = \alpha_2 = 0, \forall x$ . Em outras palavras, elas serão linearmente dependentes de  $\forall x, y_2(x) = \beta y_1(x)$ , para algum  $\beta \in \mathbb{R}$ .

**Teorema 2:** Se  $y_1(x)$  e  $y_2(x)$  são soluções linearmente independentes de 1, então a solução geral é  $y(x) = c_1y_1(x) + c_2y_2(x)$ , para  $c_1$  e  $c_2$  constantes arbitrárias.

Para demonstrar esse teorema, temos que mostrar que a dimensão do subespaço de soluções é 2. O resultado é uma consequência do Teorema da Existência e Unicidade.

*Observação:* Esse teorema é importante porque basta para nós descobrirmos duas soluções independentes e particulares, para encontrar todas as soluções.

### 4.1.1 O Determinante Wronskiano

### 4.1.2 Funções constantes

Considere  $ay'' + by' + cy = 0$ , com  $a \neq 0$ . Como estamos tratando de constantes multiplicadas por derivadas, vemos que  $y = \exp(rx)$  é uma solução se  $(y = e^{rx}, y' = re^{rx}, y'' = r^2e^{rx})$  satisfaz  $(ar^2 + br + c)e^{rx} = 0$ . Logo, basta encontrar  $r$  que seja raiz dessa equação de segundo grau.

1. **Caso 1 - Determinante positivo:** Se  $r_1$  e  $r_2$  são soluções,  $y(x) = c_1y^{r_1x} + c_2y^{r_2x}$  é a solução geral.
2. **Caso 2 - Determinante nulo:** Nesse caso, se  $r$  é raiz da equação, outra solução particular é  $xe^{rx}$  e a solução geral é  $y(x) = c_1e^{rx} + c_2xe^{rx}$ .
3. **Caso 3 - Determinante negativo:** Seja  $r_1 = \alpha + \beta i$  e  $r_2 = \alpha - \beta i$  soluções da equação. (Note que sempre  $r_1 = r_2$ , pois  $r_1 + r_2 = -b/a \in \mathbb{R}$ ). Nesse caso  $y(x) = c_1e^{r_1x} + c_2e^{r_2x} = e^{\alpha x}[(c_1 + c_2)\cos(\beta x) + (c_1 - c_2)\sin(\beta x)] = e^{\alpha x}(t_1\cos(\beta x) + t_2\sin(\beta x))$

## 4.2 Redução de ordem

Considere a equação na forma  $y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$ . Suponha que temos  $y_1(x)$ . Seja  $y = u(x)y_1(x)$ . Então  $y' = u'y_1 + uy_1'$  e  $y'' = u''y_1 + 2u'y_1' + uy_1''$ . Substituindo na equação, temos que  $y_1u'' + (2y_1' + py_1)u' = 0$ . Daqui podemos encontrar  $u(t)$  em função de  $y_1$ .

## 4.3 Não homogêneas com coeficientes constantes

Consideremos  $ay'' + by' + cy = g(x)$ .

**Teorema:** Seja  $y_h(x)$  a solução da equação homogênea (quando  $g(x) = 0$ ) e  $y_p(x)$  uma solução particular a ser encontrada. Então  $y(x) = y_p(x) + y_h(x)$  é solução geral da equação. De fato, basta observar que se  $y(x)$  é uma solução,  $y(x) - y_p(x)$  será solução da equação homogênea.

### 4.3.1 Método dos coeficientes a determinar

Nesse caso, temos vários exemplos e temos que resolver caso a caso. Vou restringir os casos:

1. Se  $g(x)$  é polinomial de grau  $n$ ,  $y_p(x)$  é um polinômio de grau  $n$ .
2. Se  $g(x) = ae^{bx}$ , então  $y_p(x) = Ae^{bx}$
3. Se  $g(x) = \alpha \sin(x)$ , então  $y_p(x) = A\sin(x) + B\cos(x)$
4. Se  $g(x)$  é produto de polinômio por exponencial,  $y_p$  também terá essa forma.
5. Se  $g(x)$  é produto de polinômio por função trigonométrica, então seu formato será  $A\sin(x)p(x) + B\cos(x)q(x)$ , onde  $p(x)$  e  $q(x)$  são polinômios de mesma ordem.

Em todos os casos, é necessário determinar os coeficientes, daí vem o nome.

## 5 Modelos da Dinâmica de uma População

### 5.1 Malthus

Também conhecido como modelo exponencial, é baseado na ideia de que o crescimento populacional é proporcional ao tamanho da população, o que faz um certo sentido. O modelo é parte da ideia de que existiria um ponto em que o número de pessoas seria maior do que o suporte para a alimentação que tem crescimento linear. Nesse caso, se  $p(t)$  é a população no tempo  $t$ , o crescimento é dado por  $p'(t) = rp(t)$ . Esse coeficiente  $r$  vai indicar a taxa de crescimento populacional, e ele é tratado como constante. Essa ideia foi descartada posteriormente, pois o crescimento reduziu suas taxas de crescimento desde os anos de 1800. Nesse caso,  $p(t) = p(0)e^{rt}$ .

### 5.2 Logística de Verhuslt

Também conhecido como curva S ou função logística. Diferente do primeiro modelo, ele não assume que os recursos são ilimitados. Entretanto, ele assume a existência da capacidade de carga  $K$ , que é o tamanho populacional máximo que o meio pode sustentar indefinidamente. O crescimento nesse caso é proporcional a  $p(t)$  e à diferença  $K - p(t)$ , onde  $p(t)$  é o tamanho da população. Logo  $p'(t) = sp(t)(K - p(t)) = sKp(t)(1 - \frac{p(t)}{K})$ . Se  $sK = r$ , temos o modelo logístico.

### 5.3 Gopertz

É um modelo descrito por uma função sigmoide (em formato de S) que descreve o crescimento sendo mais lento no início e no final de um período de tempo. O modelo foi inicialmente desenvolvido para detalhar a mortalidade humano da Royal Society em 1825 (Wikipedia). A suposição é de que a resistência da pessoa à morte decresce com o tempo. Assume-se que a taxa de crescimento de um organismo decaia com o tamanho tal que, se  $p(t)$  é a medida,  $\frac{dp}{dt} = \alpha(\log(\frac{K}{p}))p$ . Existem várias variações para cada aplicação dessa curva.

## 6 Sistema Autônomo

É um sistema em EDO que não depende, explicitamente, de variáveis independentes, como o tempo. Ele é da forma, quanto de primeira ordem  $\frac{dx}{dt} = f(x(t))$  e só depende do tempo através de  $x(t)$ . Uma propriedade interessante (exercício!) é: Se  $x_1(t)$  é solução única do problema de valor inicial para um sistema autônomo,  $\frac{dx}{dt} = f(x(t)), x(0) = x_0$ , definir  $x_2(t) = x_1(t - t_0)$  resolve o problema para a mesma função mas com condição  $x(t_0) = x_0$ .

**Ponto de Equilíbrio ou Singularidade:** Seja  $y' = f(y)$ . Se  $f(\hat{y}) = 0$ , dizemos que  $\hat{y}$  é ponto de equilíbrio ou singularidade. Ele será as soluções se aproximam de  $\hat{y}$ , ele é dito ponto atrator ou singularidade estável. Caso contrário, é dito repulsor ou singularidade instável. De forma mais precisa,  $\hat{y}$  é estável se dado  $\epsilon > 0$ , existe um  $\delta > 0$  tal que se  $|y_0 - \hat{y}| < \delta$ , onde  $y_0$  é o valor inicial, então,  $|y(t) - \hat{y}| < \epsilon$  para todo  $t$ . Além do mais, se  $\lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = \hat{y}$ , dizemos que ele é assintoticamente estável. Caso seja estável, ele é instável.

**Teorema:** Seja  $y' = f(y)$  com  $f(y)$  diferencialmente contínua e  $\hat{y}$  uma singularidade. Se  $f'(\hat{y}) < 0$ ,  $\hat{y}$  é uma singularidade estável.

## 7 Modelos das Ciências Naturais

### 7.1 Resfriamento de um corpo

Em 1701, Newton publicou um resultado sobre a temperatura de objetos ao longo do tempo. Ele encontrou que a diferença entre a temperatura do objeto e a temperatura constante do meio varia geometricamente a 0 enquanto o tempo varia aritmeticamente. Isto é, se  $T(t)$  é a temperatura do objeto e  $T_a$  a temperatura do meio,

$$(T(t) - T_a)' = T'(t) = -k(T(t) - T_a).$$

A solução é  $T(t) = (T(0) - T_a)e^{-kt} + T_a$ .

Se agruparmos essa ideia com o conceito de calorimetria e  $m, c, m_a, m_c$  são constantes, temos que  $mc(T(0) - T) = m_a c_a (T_a - T_a(0))$ , podemos tomar a temperatura do ambiente como não constante.

## 7.2 Problemas de Mistura

Considere um tanque com massa de sal  $Q(t)$  a cada instante de tempo  $t$  dissolvido no volume de água  $V(t)$ . Água está entrando no tanque a taxa  $r_e(t)$  com concentração de sal  $q_e(t)$ . Água está saindo do tanque a taxa  $r_s(t)$  com concentração de sal  $q_s(t)$ . Qual a unidade de  $r$ ? Qual a unidade de  $q$ ?

Para esse modelo, precisamos fazer algumas simplificações. Supomos que o sal que entra no tanque é instantaneamente misturado. Logo, o tanque tem concentração de sal homogênea. Vamos tratar a taxa de entrada como constante.

Desta forma, temos que  $Q'(t) = a(t)Q(t) + b(t)$ , onde  $a(t) = -\frac{r_s}{(r_e - r_s)t + V(0)}$  e  $b(t) = r_e q_e(t)$ .

A solução utiliza o primeiro tópico.

## 7.3 Produtos Químicos em uma Lagoa

Considere que a Lagoa Rodrigo de Freitas esteja com  $L$  milhões de galões de água fresca. Ao longo do tempo, uma água contaminada com produto químico fluiu para a lagoa a uma taxa  $r$  milhões de galões por ano. Mas naquela época a prefeitura do Rio era muito ativa e já realizava a limpeza a uma taxa  $s$ , por um processo de retirada da água, limpeza e reinserção no mar.

A concentração  $y(t)$  do produto químico na água que entra varia com o tempo  $t$  segundo à expressão  $y(t) = 2 + \sin(2t)$  gramas por galão. Considere o modelo da massa dessa substância na lagoa a qualquer tempo  $t$ .

### 7.3.1 Modelo

$$\frac{dQ}{dt} = (r \times 10^6) \cdot (2 + \sin(2t)) - (s \times 10^6) \cdot \left(\frac{Q(t)}{L}\right) \text{ e } Q(0) = 0.$$

## 8 Problemas Soltos

### 8.1 Perseguição

Considere um homem e seu cachorro correndo em linha reta. Em um dado ponto no tempo, o cachorro está a  $12m$  do seu dono, que começa a correr em direção perpendicular à praia com certa velocidade constante. O cachorro



corre duas vezes mais rápido e sempre em direção ao seu dono. Qual o ponto de encontro?