Autovalores complexos e repetidos

Autovalores Complexos.

- Seja $X' = AX$. Para resolver, procuramos os autovalores de A. E se eles tiverem parte complexa? Isto é, $\lambda_1 = a + bi$ e $\lambda_2 = a - bi$, $b \neq 0$?

Vamos ver o que acabamos de falar:

Suponha que λ_1 é autovalor e v_1 autovetor correspondente. Seja $\lambda_1 = a + bi$.

$\det(A - \lambda_1 I) = 0$, logo $(A - \lambda_1 I) v_1 = 0$. Logo:

$$\begin{aligned} \overline{(A - \lambda_1 I) v_1} &= \overline{0} \\ &= \overline{(A - \lambda_1 I)} \cdot \overline{v_1} \\ &= (\overline{A} - \overline{\lambda_1} \cdot \overline{I}) \cdot \overline{v_1} \\ &= (A - \overline{\lambda_1} \cdot I) \cdot \overline{v_1} = 0 \end{aligned}$$

A real

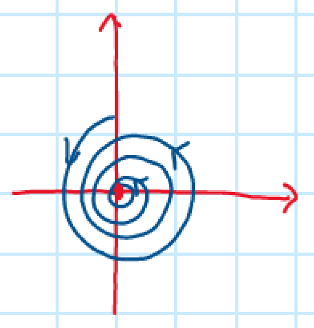
Assim $\lambda_2 = \overline{\lambda_1}$ é autovalor e $v_2 = \overline{v_1}$ seu autovetor.

- Assim, na notação do livro: $X(t) = c_1 v_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 v_2 e^{\lambda_2 t}$ é solução geral. Mas lembre que:
  - $e^{\lambda_1 t} = e^{at}(\cos bt + i \operatorname{sen} bt)$
  - $e^{\lambda_2 t} = e^{at}(\cos bt - i \operatorname{sen} bt)$
  - $u(t) = \dfrac{e^{\lambda_1 t} + e^{\lambda_2 t}}{2} = e^{at} \cos bt$
  - $v(t) = \dfrac{e^{\lambda_1 t} - e^{\lambda_2 (t)}}{2i} = e^{at} \operatorname{sen} bt$

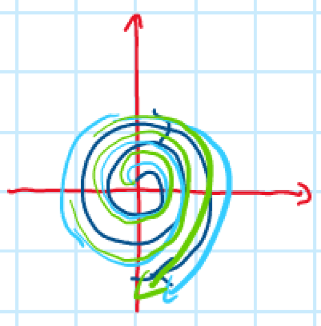
  São soluções

Portanto $X(t) = c_1 \mathbf{u}(t) + c_2 \mathbf{v}(t) = e^{at}(c_1 \cos bt + c_2 \operatorname{sen} bt)$

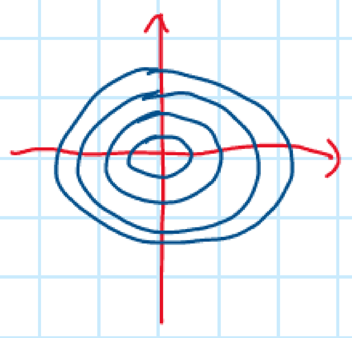
- Se $a < 0$



- Se $a > 0$



- $a = 0$



Exercícios da Lista:

17. $X' = \begin{pmatrix} -1 & \alpha \\ -1 & -1 \end{pmatrix} X$

a) Autovalores:

$$\begin{aligned} p_\lambda &= (-1-\lambda)(-1-\lambda) - \alpha \cdot (-1) = 0 \\ &= \lambda^2 + 2\lambda + 1 + \alpha = 0 \\ &\Rightarrow \lambda_1 = (-2 + \sqrt{4 - 4(1+\alpha)})/2 \\ &= -1 + \tfrac{1}{2}\sqrt{-\alpha} \\ \lambda_2 &= -1 - \tfrac{1}{2}\sqrt{-\alpha} \end{aligned}$$

b) Valor de α onde o comportamento qualitativo muda.

- Se $\alpha > 0$:
  λ_1 e λ_2 tem parte real negativa e parte complexa diferente de zero.
- Se $\alpha = 0$:
  $\lambda_1 = \lambda_2 = -1$
- Se $\alpha \leq -4$
  $\lambda_1 \leq -1 + 1/2\sqrt{4} = 0$
  $\lambda_2 < 0$
- Se $-4 < \alpha < 0$
  Raízes reais diferentes negativas

Autovalores Repetidos

Suponha que você encontre em $X' = AX$ autovalores $\lambda_1 = \lambda_2$ e autovetores $v_1 = v_2$. A solução geral será:

$$\begin{aligned} x(t) &= c_1 v_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 v_2 e^{\lambda_2 t} \\ &= (c_1 + c_2) v_1 e^{\lambda_1 t} \end{aligned}$$

Logo as soluções não são linearmente independentes.

Nesse caso $A \sim B$ (existe P tal que $AP = PB$), e $B = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 1 \\ 0 & \lambda_1 \end{bmatrix}$. Seja $P = [v_1 \ v_2]$

$$A[v_1 \ v_2] = [v_1 \ v_2] B$$
$$[Av_1 \ Av_2] = [\lambda_1 v_1 \ \ v_1 + \lambda_1 v_2]$$

Logo $Av_2 = v_1 + \lambda_1 v_2 \Rightarrow Av_2 - \lambda_1 I v_2 = v_1$
$\Rightarrow (A - \lambda_1 I) v_2 = v_1$

Sistema Linear!

$P = [v_1 \ v_2]$

$X(t) = P e^{Bt} P^{-1} X_0$ é solução geral.

No Livro

$$\begin{aligned} x^{(1)}(t) &= v_1 e^{\lambda_1 t} \\ x^{(2)}(t) &= v_1 \cdot t e^{\lambda_1 t} + v_2 e^{\lambda_1 t} \end{aligned}$$

onde $(A - \lambda_1 I) v_2 = v_1$

10 - $X' = \begin{pmatrix} 3 & 9 \\ -1 & -3 \end{pmatrix} X$, $x(0) = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}$

$$\begin{aligned} p_\lambda &= (3-\lambda)(-3-\lambda) + 9 = 0 \\ &= \lambda^2 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = 0 \\ &\Rightarrow v_1 = (3, -1) = v_2 \end{aligned}$$

Livro:

$x^{(1)}(t) = (3,-1) e^{0 \cdot t} = (3,-1)$

$x^{(2)}(t) = (3,-1) \cdot t \cdot e^{0 \cdot t} + v_2 e^{0 \cdot t}$

$(A - 0 \cdot I) v_2 = v_1 \Rightarrow$ Queremos encontrar v_2

$\left(\begin{array}{cc|c} 3 & 9 & 3 \\ -1 & -3 & -1 \end{array}\right) \Rightarrow v_2 = (4, -1)$

$x(t) = c_1 x^{(1)} + c_2 x^{(2)} = c_1(3,-1) + c_2(3,-1) \cdot t + c_2(4,-1)$

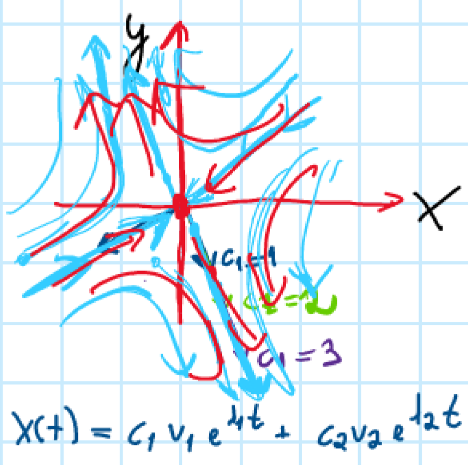
- Gráfico:

- $X' = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} X$

$$\begin{aligned} p_\lambda &= (1-\lambda)(4-\lambda) - 3 \cdot 2 = 0 \\ &= \lambda^2 - 5\lambda - 2 = 0 \\ \lambda &= \frac{5 \pm \sqrt{25 - 4 \cdot (-2)}}{2} \end{aligned}$$

$$\begin{cases} \lambda_1 = \dfrac{5}{2} + \dfrac{\sqrt{33}}{2} > 0 \\ \lambda_2 = \dfrac{5}{2} - \dfrac{\sqrt{33}}{2} < 0 \end{cases}$$

$v_1 = (0.41, -0.82)$
$v_2 = (-0.91, -0.56)$



$X(t) = c_1 v_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 v_2 e^{\lambda_2 t}$