Conteúdos da Matéria Equações Diferencias Ordinárias

Lucas Moschen
Fundação Getulio Vargas

9 de Março de 2020

Resumo

Neste documento irei constar os principais temas cobertos pela matéria, que tem foco em um cálculo de edos, sem grandes definições precisas e estudo do comportamento qualitativo. Qualquer correção nesse documento pode ser sugerida pelo leitor através de um *pull request*. Para iniciar, irei listar os temas até agora cobertos e também inserirei um pequeno resumo sobre o determinado tópico.

Conteúdo

1 Equações Diferenciais Lineares de Primeira Ordem

Formato: $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + p(x)y = q(x)$. Observe a linearidade de y e que a sua derivada de maior ordem é a primeira. Para resolver esse exemplo, usamos oo fator de integração $u(x) = e^{\int p(x)dx}$ e multiplicamos em ambos os lados. Observe que escolhemos ele, porque queremos $(y \cdot u)' = y' \cdot u + y \cdot u' = u \cdot q$ e $u' = u \cdot p$. A partir disso, obstemos que $y(x)u(x) = \int u(x)q(x)dx$.

1.1 Equações de Bernoulli

Formato: $y' + p(x)y = q(x)y^n$. Neste caso temos que o expoente de y é de ordem n. Para resolver esse problema, supomos que $y \neq 0$ e fazemos uma transformação de variável $z(x) = [y(x)]^{1-n}, \forall x$. Essa transformação vai noos permitir obter a equação em um formato desejado. Para ver isso, primeiro façamos $\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}y}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = (1-n)y^{-n}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$, logo, substituindo os valores, teremos que $\frac{1}{1-n}y^n z' + p(x)zy^n = q(x)y^n \implies z' + (1-n)p(x)z = q(x)$ e resolvemos pelo formato anterior.

2 Equações com Variáveis Separáveis

Formato: $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = f(x,y) = \phi(x)\psi(y)$, isto é, a derivada pode ser escrita como um produto de uma função que só depende de x por outra que só depende de y. Nesse caso, usamos a reescrita diferencial para poder escrever isso da seguinte forma: $\int \frac{dy}{\psi(y)} = \int \phi(x)dx$. Isso pode ser extendido quando a função pode ser escrita como uma divisão de funções desse tipo, bastando vê-la como um produto.

3 Equações Exatas

Formato: Seja $\frac{\mathrm{d}dy}{\mathrm{d}dx} = f(x,y) = -\frac{M(x,y)}{N(x,y)}$ que pode ser reescrita da forma $M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$. Ela é caracterizada como **exata** se $\exists g(x,y)$, tal que $dg = Mdx + Ndy$, onde dg é o diferencial de g. Isto é, $\frac{\partial g}{\partial x} = M$ e $\frac{\partial g}{\partial y} = N$. Nesse caso, podemos provar pelo teorema de Clairaut-Schwars que $\frac{\partial M(x,y)}{\partial y} = \frac{\partial N(x,y)}{\partial x}$ (*).

3.1 Fator de Integração

Suponha que a equação $M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$ seja não exata. Nesse caso, a ideia é encontrar uma função u que ao multiplicar a equação, obtenha-se a hipótese do teorema de Clairaut-Schwars, como mencionado acima (*). Nesse caso, se $\frac{M_y - N_x}{N}$ é função apenas de x, o fator de integração será $u(x) = \exp\left\{\int \frac{M_y - N_x}{N} dx\right\}$. Para construir esse resultado, basta pensar, supondo a existência de $u(x)$, temos que $\frac{\partial(u \cdot M)}{\partial y} = u\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial(u \cdot N)}{\partial x} = \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}N + u\frac{\partial N}{\partial x}$. Agora, se $\frac{N_x - M_y}{M}$ é função apenas de y, vale que $u(y) = \exp\left\{\int \frac{N_x - M_y}{M} dy\right\}$.

4 Modelos da Dinâmica de uma População

4.1 Malthus

Também conhecido como modelo exponencial, é baseado na ideia de que o crescimento populacional é proporcional ao tamanho da população, o que faz um certo sentido. O modelo é parte da ideia de que existiria um ponto em que o número de pessoas seria maior do que o suporte para a alimentação que tem crescimento linear. Nesse caso, se $p(t)$ é a população no tempo t, o crescimento é dado por $p'(t) = rp(t)$. Esse coeficiente r vai indicar a taxa de crescimento populacional, e ele é tratado como constante. Essa ideia foi descartada posteriormente, pois o crescimento reduziu suas taxas de crescimento desde os anos de 1800. Nesse caso, $p(t) = p(0)e^{rt}$.

4.2 Logística de Verhuslt

Também conhecido como curva S o função logística. Diferente do primeiro modelo, ele não assume que os recursos são ilimitados. Entretanto, ele assume a existência da capacidade de carga K, que é o tamanho populacional máximo que o meio pode sustentar inndefinidamente. O crescimento nesse caso é proporcional a $p(t)$ e à diferença $K - p(t)$, onde $p(t)$ é o tamanho da população. Logo $p'(t) = sp(t)(K - p(t)) = sKp(t)(1 - \frac{p(t)}{K})$. Se $sK = r$, temos o modelo logístico.

5 Sistema Autônomo

6 Modelos das Ciências Naturais