Conteúdos da Matéria Equações Diferencias Ordinárias

Lucas Moschen
Fundação Getulio Vargas

9 de Março de 2020

Resumo

Neste documento irei constar os principais temas cobertos pela matéria, que tem foco em um cálculo de edos, sem grandes definições precisas e estudo do comportamento qualitativo. Qualquer correção nesse documento pode ser sugerida pelo leitor através de um *pull request*. Para iniciar, irei listar os temas até agora cobertos e também inserirei um pequeno resumo sobre o determinado tópico.

Conteúdo

1 Equações Diferenciais Lineares de Primeira Ordem

Formato: $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + p(x)y = q(x)$. Observe a linearidade de y e que a sua derivada de maior ordem é a primeira. Para resolver esse exemplo, usamos oo fator de integração $u(x) = e^{\int p(x)dx}$ e multiplicamos em ambos os lados. Observe que escolhemos ele, porque queremos $(y \cdot u)' = y' \cdot u + y \cdot u' = u \cdot q$ e $u' = u \cdot p$. A partir disso, obstemos que $y(x)u(x) = \int u(x)q(x)dx$.

1.1 Equações de Bernoulli

Formato: $y' + p(x)y = q(x)y^n$. Neste caso temos que o expoente de y é de ordem n. Para resolver esse problema, supomos que $y \neq 0$ e fazemos uma transformação de variável $z(x) = [y(x)]^{1-n}, \forall x$. Essa transformação vai noos permitir obter a equação em um formato desejado. Para ver isso, primeiro façamos $\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}y}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = (1-n)y^{-n}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$, logo, substituindo os valores, teremos que $\frac{1}{1-n}y^n z' + p(x)zy^n = q(x)y^n \implies z' + (1-n)p(x)z = q(x)$ e resolvemos pelo formato anterior.

2 Equações com Variáveis Separáveis

Formato: $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = f(x,y) = \phi(x)\psi(y)$, isto é, a derivada pode ser escrita como um produto de uma função que só depende de x por outra que só depende de y. Nesse caso, usamos a reescrita diferencial para poder escrever isso da seguinte forma: $\int \frac{dy}{\psi(y)} = \int \phi(x)dx$. Isso pode ser extendido quando a função pode ser escrita como uma divisão de funções desse tipo, bastando vê-la como um produto.

3 Equações Exatas

Formato: Seja $\frac{\mathrm{d}dy}{\mathrm{d}dx} = f(x,y) = -\frac{M(x,y)}{N(x,y)}$ que pode ser reescrita da forma $M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$. Ela é caracterizada como **exata** se $\exists g(x,y)$, tal que $dg = Mdx + Ndy$, onde dg é o diferencial de g. Isto é, $\frac{\partial g}{\partial x} = M$ e $\frac{\partial g}{\partial y} = N$. Nesse caso, podemos provar pelo teorema de Clairaut-Schwars que $\frac{\partial M(x,y)}{\partial y} = \frac{\partial N(x,y)}{\partial x}$ (*).

3.1 Fator de Integração

Suponha que a equação $M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$ seja não exata. Nesse caso, a ideia é encontrar uma função u que ao multiplicar a equação, obtenha-se a hipótese do teorema de Clairaut-Schwars, como mencionado acima (*). Nesse caso, se $\frac{M_y - N_x}{N}$ é função apenas de x, o fator de integração será $u(x) = \exp\left\{\int \frac{M_y - N_x}{N} dx\right\}$. Para construir esse resultado, basta pensar, supondo a existência de $u(x)$, temos que $\frac{\partial(u \cdot M)}{\partial y} = u\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial(u \cdot N)}{\partial x} = \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}N + u\frac{\partial N}{\partial x}$. Agora, se $\frac{N_x - M_y}{M}$ é função apenas de y, vale que $u(y) = \exp\left\{\int \frac{N_x - M_y}{M} dy\right\}$.

4 Modelos da Dinâmica de uma População

4.1 Malthus

Também conhecido como modelo exponencial, é baseado na ideia de que o crescimento populacional é proporcional ao tamanho da população, o que faz um certo sentido. O modelo é parte da ideia de que existiria um ponto em que o número de pessoas seria maior do que o suporte para a alimentação que tem crescimento linear. Nesse caso, se $p(t)$ é a população no tempo t, o crescimento é dado por $p'(t) = rp(t)$. Esse coeficiente r vai indicar a taxa de crescimento populacional, e ele é tratado como constante. Essa ideia foi descartada posteriormente, pois o crescimento reduziu suas taxas de crescimento desde os anos de 1800. Nesse caso, $p(t) = p(0)e^{rt}$.

4.2 Logística de Verhuslt

Também conhecido como curva S o função logística. Diferente do primeiro modelo, ele não assume que os recursos são ilimitados. Entretanto, ele assume a existência da capacidade de carga K, que é o tamanho populacional máximo que o meio pode sustentar inndefinidamente. O crescimento nesse caso é proporcional a $p(t)$ e à diferença $K - p(t)$, onde $p(t)$ é o tamanho da população. Logo $p'(t) = sp(t)(K - p(t)) = sKp(t)(1 - \frac{p(t)}{K})$. Se $sK = r$, temos o modelo logístico.

4.3 Gopertz

É um modelo descrito por uma função sigmoide (em formato de S) que descreve o crecimento sendo mais lento no início e no final de um período de tempo. O modelo foi inicialmente desenvolvido para detalhar a mortalidade humano da Royal Socienty em 1825 (Wikipedia). A suposição é de que a resistência da pessoa à morte descresce com os tempo. Assune-se que a taxa de crescimentoo de um organismo decaia com o tamanho tal que, se $p(t)$ é a medida, $\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}t} = \alpha(\log\left(\frac{K}{p}\right)p)$. Existem várias variações para cada aplicação dessa curva.

5 Sistema Autônomo

É um sistema em EDO que não depende, explicitamente, de variáveis independentes, como o tempo. Ele é da forma, quanto de primeira ordem $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = f(x(t))$ e só depende do tempo através de $x(t)$. Uma propriedade interessante (exercício!) é: Se $x_1(t)$ é solução única do problema de valor inicial para um sistema auntônomo, $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = f(x(t)), x(0) = x_0$, definir $x_2(t) = x_1(t - t_0)$ resolve o problema para para a mesma função mas com condição $x(t_0) = x_0$.

Ponto de Equilíbrio ou Singularidade: Seja $y' = f(y)$. Se $f(\hat{y}) = 0$, dizemos que $\hat{y}$ é ponto de equilíbrio ou singularidade. Ele será as soluções se aproximam de $\hat{y}$, ele é dito ponto atrator ou singularidade estável. Caso contrário, é dito repulsor ou singularidade instável. De forma mais precisa, $\hat{y}$ é estável se dado $\epsilon > 0$, existe um $\delta > 0$ tal que se $|y_0 - \hat{y}| < \delta$, onde y_0 é o valor inicil, então, $|y(t) - \hat{y}| < \epsilon$ para todo t. Além do mais, se $\lim_{t\to\infty} y(t) = \hat{y}$, dizemos que ele é assintoticamente estável. Cas são seja estável, ele é instável.

Teorema: Seja $y' = f(y)$ com $f(y)$ diferencialmente contínua e $\hat{y}$ uma singularidade. Se $f'(\hat{y}) < 0$, $\hat{y}$ é uma singularidade estável.

6 Modelos das Ciências Naturais

6.1 Resfriamento de um corpo

Em 1701, Newton publicou um resultado sobre a temperatura de objetos ao longo do tempo. Ele encontrou que a diferença entre a temperatura do objeto e a temperatura constante do meio varia geometricamente a 0 enquanto o tempo varia arimeticamente. Isto é, se $T(t)$ é a temperatura do objeto e T_a a temperatura do meio,

$(T(t) - T_a)' = T'(t) = -k(T(t) - T(a))$.

A solução é $T(t) = (T(0) - T_a)e^{-kt} + T_a$.

Se agruparmos essa ideia com o conceito de calorimetria e m, c, m_a, m_c são constantes, temos que $mc(T(0) - T) = m_a c_a(T_a - T_a(0))$, podemos tomar a temperatura do ambiente como não constante.

6.2 Problemas de Mistura

Considere um tanque com massa de sal $Q(t)$ a cada instante de tempo t dissolvido no volume de água $V(t)$. Água está entrando no tanque a taxa $r_e(t)$ com concentração de sal $q_e(t)$. Água está saindo do tanque a taxa $r_s(t)$ com concentração de sal $q_s(t)$. Qual a unidade de r? Qual a unida de q?

Para esse modelo, precisamos fazer algumas simplificações. Supomos que o sal que entra no tanque é instantaneamente misturado. Logo, o tanque tem concentração de sal homogênea. Vamos tratar a taxa de entrada como constante.

Desta forma, temos que $Q'(t) = a(t)Q(t) + b(t)$, onde $a(t) = -\frac{r_s}{(r_e - r_o)t + V(0)}$ e $b(t) = r_e q_e(t)$.

A solução utiliza o primeiro tópico.

6.3 Produtos Químicos em uma Lagoa

Considere que a Lagoa Rodrigo de Freitas esteja com L milhões de galões de água fresca. Ao longo do tempo, uma água contaminada com produto químico fluiu para a lagoa a uma taxa r milhões de galões por ano. Mas naquela época a prefeitura do Rio era muito ativa e já realizava a limpeza a uma taxa s, por um processo de retirada da água, limpeza e reinserção no mar.

A concentração $y(t)$ do produto químico na água que entra varia com o tempo t segundo à expressão $y(t) = 2 + \sin(2t)$ gramas por galão. Considere o modelo da massa dessa substância na lagoa a qualquer tempo t.

6.3.1 Modelo

$\frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}t} = (r \times 10^6) \cdot (2 + \sin(2t)) - (s \times 10^6) \cdot (\frac{Q(t)}{L})$ e $Q(0) = 0$.