

Autovalores complexos e repetidos

Autovalores Complexos

Seja  $X' = Ax$ . Para resolver, procuramos os autovalores de A. E se eles tiverem parte complexa? Isto é,  $\lambda_1 = a + bi$  e  $\lambda_2 = a - bi$ ,  $b \neq 0$ ?  
Vemos ver o que acabamos de falar:  
Suponha que  $\lambda_1$  é autovalor e  $v_1$  autovetor correspondente. Seja  $\lambda_1 = a + bi$ .  
 $\det(A - \lambda_1 I) = 0$ , logo  $(A - \lambda_1 I)v_1 = 0$ . Logo:

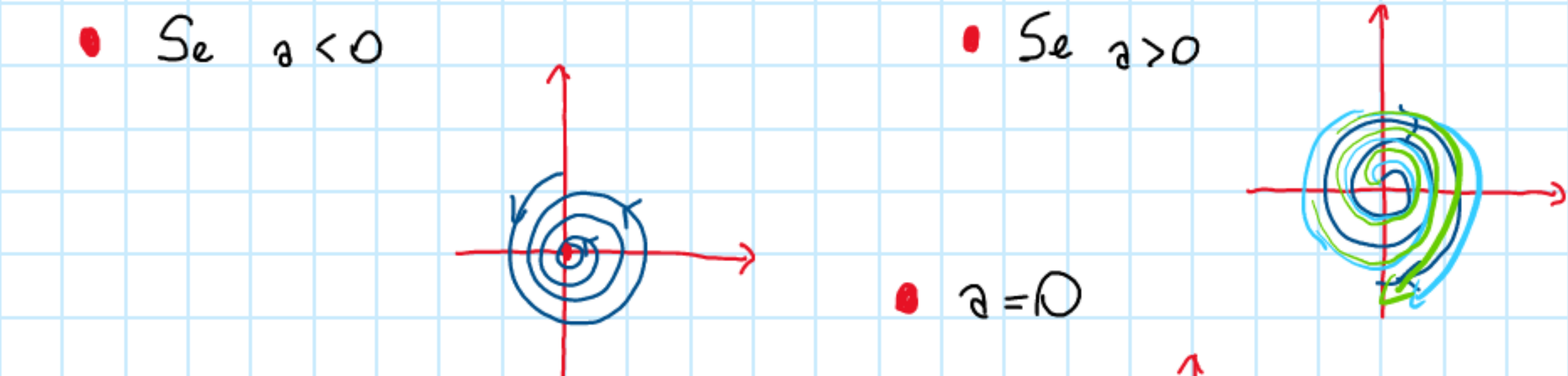
$$\begin{aligned} (A - \lambda_1 I)v_1 &= 0 \\ &= (A - \lambda_1 I) \cdot \bar{v}_1 \\ &= (\bar{A} - \bar{\lambda}_1 \bar{I}) \cdot \bar{v}_1 \\ &= (A - \lambda_2 I) \cdot \bar{v}_1 = 0 \end{aligned}$$

Assim  $\lambda_2 = \bar{\lambda}_1$  é autovalor e  $v_2 = \bar{v}_1$  seu autovetor.

Assim, na notação do livro:  $X(t) = c_1 v_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 v_2 e^{\lambda_2 t}$  é solução geral. Seja  $\lambda_1 = \lambda + i\mu$  ( $\lambda_2 = \bar{\lambda}_1$ ) e  $v_1 = a + bi$  ( $v_2 = \bar{v}_1$ )

$$\begin{aligned} X(t) &= c_1(a + bi)e^{(\lambda + i\mu)t} + c_2(a - bi)e^{(\lambda - i\mu)t} \\ &= c_1 e^{\lambda t} [a \cos \mu t - b \sin \mu t + i(a \sin \mu t + b \cos \mu t)] + c_2 e^{\lambda t} [a \cos \mu t - b \sin \mu t - i(a \sin \mu t + b \cos \mu t)] \\ &= e^{\lambda t} (a \cos \mu t - b \sin \mu t)(c_1 + c_2) + e^{\lambda t} (a \sin \mu t + b \cos \mu t)(c_1 - c_2) \\ &= e^{\lambda t} (a \cos \mu t - b \sin \mu t) \cdot d_1 + e^{\lambda t} (a \sin \mu t + b \cos \mu t) \cdot d_2 \end{aligned}$$

Então a solução geral é combinação linear de funções reais!



Exercícios da Lista:

17.  $X' = \begin{pmatrix} -1 & \alpha \\ -1 & -1 \end{pmatrix} X$

- a) Autovalores:
- $$\begin{aligned} p_\lambda &= (-1 - \lambda)(-1 - \lambda) - \alpha(-1) = 0 \\ &= \lambda^2 + 2\lambda + 1 + \alpha = 0 \\ \Rightarrow \lambda_{1,2} &= \frac{-2 \pm \sqrt{4 - 4(1 + \alpha)}}{2} \\ &= -1 \pm \frac{1}{2}\sqrt{-\alpha} \end{aligned}$$
- $\lambda_1 = -1 + \frac{1}{2}\sqrt{-\alpha}$   
 $\lambda_2 = -1 - \frac{1}{2}\sqrt{-\alpha}$
- b) Valor de  $\alpha$  onde o comportamento qualitativo muda.
- Se  $\alpha > 0$ :  
 $\lambda_1$  e  $\lambda_2$  tem parte real negativa e parte complexa diferente de zero.
  - Se  $\alpha = 0$ :  
 $\lambda_1 = \lambda_2 = -1$
  - Se  $\alpha \leq -4$ :  
 $\lambda_1 \leq -1 + \frac{1}{2}\sqrt{4} = 0$   
 $\lambda_2 < 0$
  - Se  $-4 < \alpha < 0$ :  
Raízes reais diferentes negativas

Autovalores Repetidos

Suponha que você encontre em  $X' = AX$  autovalores  $\lambda_1 = \lambda_2$  e autovetores  $v_1 = v_2$ . A solução geral será:  
$$\begin{aligned} x(t) &= c_1 v_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 v_2 e^{\lambda_2 t} \\ &= (c_1 + c_2) v_1 e^{\lambda_1 t} \end{aligned}$$
  
Logo as soluções não são linearmente independentes.  
Nesse caso  $A \sim B$  (existe  $P$  tal que  $AP = PB$ ), e  
 $B = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 1 \\ 0 & \lambda_1 \end{bmatrix}$ . Seja  $P = [v_1 \ v_2]$   
 $A[v_1 \ v_2] = [v_1 \ v_2]B$   
 $[Av_1 \ Av_2] = [\lambda_1 v_1 \ \lambda_1 v_2 + v_1]$   
Logo  $Av_2 = \lambda_1 v_2 + v_1 \Rightarrow A v_2 - \lambda_1 v_2 = v_1$   
 $\Rightarrow (A - \lambda_1 I)v_2 = v_1$  (Sistema Linear!)  
 $P = [v_1 \ v_2]$   
 $X(t) = P e^{Bt} P^{-1} X_0$  é solução geral.

No Livro  $x^{(1)}(t) = v_1 e^{\lambda_1 t}$   
 $x^{(2)}(t) = v_1 t e^{\lambda_1 t} + v_2 e^{\lambda_1 t}$   
onde  $(A - \lambda_1 I)v_2 = v_1$

10-  $X' = \begin{pmatrix} 3 & 9 \\ -1 & -3 \end{pmatrix} X$ ,  $x(0) = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}$

$$\begin{aligned} p_\lambda &= (3 - \lambda)(-3 - \lambda) + 9 = 0 \\ &= \lambda^2 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = 0 \\ \Rightarrow v_1 &= (3, -1) = v_2 \end{aligned}$$

Livro:  
 $x^{(1)}(t) = (3, -1)e^{0 \cdot t} = (3, -1)$   
 $x^{(2)}(t) = (3, -1) \cdot t \cdot e^{0 \cdot t} + v_2 e^{0 \cdot t}$   
 $(A - 0 \cdot I)v_2 = v_1 \Rightarrow$  Queremos encontrar  $v_2$   
 $\begin{pmatrix} 3 & 9 \\ -1 & -3 \end{pmatrix} v_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix} \Rightarrow v_2 = (4, -1)$   
 $x(t) = c_1 x^{(1)} + c_2 x^{(2)} = c_1(3, -1) + c_2(3, -1)t + c_2(4, -1)$

Gráfico:

$X' = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} X$

$$\begin{aligned} p_\lambda &= (1 - \lambda)(4 - \lambda) - 3 \cdot 2 = 0 \\ &= \lambda^2 - 5\lambda - 2 = 0 \\ \lambda &= \frac{5 \pm \sqrt{25 - 4(-2)}}{2} \end{aligned}$$
$$\begin{aligned} \lambda_1 &= \frac{5 + \sqrt{33}}{2} > 0 \\ \lambda_2 &= \frac{5 - \sqrt{33}}{2} < 0 \end{aligned}$$
$$\begin{aligned} v_1 &= (0.41, -0.82) \\ v_2 &= (-0.91, -0.56) \end{aligned}$$

$X(t) = c_1 v_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 v_2 e^{\lambda_2 t}$