

# Resumo em Controle Ótimo

Lucas Machado Moschen  
Escola de Matemática Aplicada

3 de Março de 2020

## 1 Problemas Básicos de Controle Ótimo

### Exemplo 1

Como motivação apresentada, consideramos duas equações que representam a variação do peso da parte vegetativa e reprodutiva, respectivamente. Nesse caso, o controle é a fração da fotossíntese destinada para a parte vegetativa. Nosso objetivo, nesse caso, é maximizar:

$$F(x, u, t) := \int_0^T \ln(x_2(t)) dt, s.a.$$

$$\begin{cases} x_1'(t) = u(t)x_1(t) \\ x_2'(t) = (1 - u(t))x_2(t) \\ 0 \leq u(t) \leq 1 \end{cases}$$

Desta maneira, em um sistema de controle há variáveis de estado, funções de controle, que afetam a dinâmica do sistema, e o funcional objetivo, que funciona como o cálculo do lucro.

## 1.1 Definições Importantes

1. **Continuidade por partes:** Se uma função é contínua em cada ponto em que é definida, exceto em uma quantidade finita e é igual a seu limite à esquerda ou à direita em cada ponto (não permite pontos deslocados).
2. **Diferenciável por partes:** Função contínua que é diferenciável em cada ponto que é definida, exceto uma finitude.
3. **Côncava:** Se  $\forall 0 \leq \alpha \leq 1$  e  $\forall a \leq t_1, t_2 \leq b$ ,  $\alpha k(t_1) + (1 - \alpha)k(t_2) \leq k(\alpha t_1 + (1 - \alpha)t_2)$ .
4. **Lipschitz:**  $|k(t_1) - k(t_2)| \leq c|t_1 - t_2|$ .
5. **Teorema do Valor Médio**
6. **Teorema da Convergência Dominante:** Considere uma sequência  $\{f_n\}$  dominada por uma função Lebesgue integrável  $g$ . Suponha que sequência converge ponto a ponto para uma função  $f$ . Então  $f$  é integrável e  $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_S f_n d\mu = \int_S f d\mu$ .

### Exercício 1

Se  $k : I \rightarrow \mathbb{R}$  é diferenciável por partes em um intervalo limitado,  $k$  é Lipschitz.

**Prova:** Seja  $P = \{p_0, \dots, p_n\}$  pontos em que  $k$  não é diferenciável. Pelo teorema do valor médio,  $\forall i, \exists x_i^0$ , tal que  $k(p_i) - k(p_{i-1}) = k'(x_i^0)(p_i - p_{i-1})$ . Como  $k'$  é contínua em cada intervalo  $[p_{i-1}, p_i]$ , basta tomar o valor máximo da derivada nesse intervalo. Depois disso, basta tomar o maior valor entre todas as derivadas e a desigualdade de Lipschitz é satisfeita.

## 1.2 Problema

Considere  $x'(t) = g(t, x(t), u(t)) \rightarrow u(t) \mapsto x(u)$ . Queremos, então, dado um funcional  $J(u) := \int_{t_0}^{t_1} (f(t, x(t), u(t)))dt, x(t_0) = x_0$ , maximizá-lo.  $u(t)$  é contínua por partes.

**Função Adjunta:** proposta similar aos multiplicadores de Lagrange.  $\lambda : [t_0, t_1] \rightarrow \mathbb{R}$  é diferenciável por partes e deve satisfazer algumas condições.

Para isso, assumimos a existência  $u^*$  e  $x^*$ . Nesse caso,  $J(u) \leq J(u^*) < \infty$ . Tome  $u^\epsilon = u^*(t) + \epsilon h(t), x^\epsilon(t_0) = x_0 \implies \lim_{\epsilon \rightarrow 0} u^\epsilon = u^*$ .  $x^\epsilon$  é o estado associado ao controle. Como a função  $g$  é continuamente diferenciável,  $x^\epsilon \rightarrow x^*$ . Assim, a sua derivada em  $\epsilon = 0$  existe. Utilizo, pelo TFC, que  $\int_{t_0}^{t_1} \frac{d}{dt}(\lambda(t)x^\epsilon(t))dt = \lambda(t_1)x^\epsilon(t_1) - \lambda(t_0)x^\epsilon(t_0)$ . Desta maneira, utilizo que  $J(u^\epsilon) = \int_{t_0}^{t_1} f(t, x^\epsilon(t), u^\epsilon(t))dt - \lambda(t_1)x^\epsilon(t_1) + \lambda(t_0)x^\epsilon(t_0)$ . Sabemos que  $\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{J(u^\epsilon) - J(u^*)}{\epsilon} = 0$ , pois  $J(u^*)$  é máximo. Desta maneira,

$$0 = \frac{d}{d\epsilon} J(u^\epsilon)_{\epsilon=0} = \int_{t_0}^{t_1} [(f_x + \lambda(t)g_x + \quad (1)$$

$$+ \lambda'(t)) \frac{\partial x^\epsilon}{\partial \epsilon}(t)_{\epsilon=0} + (f_u + \lambda(t)g_u)h(t)]dt - \lambda(t_1) \frac{\partial x^\epsilon}{\partial \epsilon}(t_1)_{\epsilon=0} \quad (2)$$

Note que isso pode ser feito pelo Teorema da Convergência Dominante, pois podemos mover o limite (derivada) para dentro da integral (intervalo compacto e integrando é diferenciável po partes). Para que ocorra a igualdade citada acima, definimos  $H(t, x, u, \lambda) := f(t, x, u) + \lambda g(t, x, u)$  e:

$$\begin{cases} \frac{\partial H}{\partial u} u=u^* = 0 \\ \frac{\partial H}{\partial x} x=x^* = -\lambda' \\ \frac{\partial H}{\partial \lambda} = x' \\ \lambda(t_1) = 0 \end{cases} \quad (3)$$

### 1.3 Princípio Máximo de Pontryagin

Se  $u^*$  e  $x^*$  são controle ótimo, então existe  $\lambda(t)$  diferenciável por partes tal que a função  $H$ , como definida anteriormente, pode ser maximizada em  $u^*(t)$ . A demonstração é mais simples para o caso de  $f$  e  $g$  côncavas em  $u$  e  $\lambda(t) \geq 0$ . A segunda derivada do Hamiltoniano indica o tipo de problema: Se for negativa, é um problema de maximização.

**Observação:** A condição de maximizar  $H$  não sempre implica que  $H_u = 0$ .

### 1.4 Exercício 1.6 - Efeito Alle

Nesse efeito, consideramos um valor mínimo. O crescimento  $x'(t) = rx(t)\left(\frac{x(t)}{x_{\min}} - 1\right)\left(1 - \frac{x(t)}{x_{\max}}\right)$

## 2 Existência e Outras Propriedades

**Observação:** Se o funcional objetivo tiver valor mais ou menos infinito, dizemos que o problema não tem solução. Como assumimos a existência da solução, podemos obter um funcional que tem valor infinito, algo que não desejamos.

**Teorema:**  $J(u) := \int_{t_0}^{t_1} f(t, x(t), u(t))dt$ , s.a  $x'(t) = g(t, x(t), u(t))$ ,  $x(t_0) = x_0$ . Ainda,  $f, g \in C^1$  nos três argumentos e côncavos em  $x$  e  $u$ . Sob as condições apresentadas anteriormente, adicionadas a  $\lambda(t) \geq 0$ , então para todo  $u$ ,  $J(u^*) \geq J(u)$ . A demonstração é basicamente mostrar que a diferença é maior do que 0.

**Teorema 2:** Seja  $u \in L([t_0, t_1]; \mathbb{R})$ ,  $f$  é convexa em  $u$  existem constantes  $C_4$  e  $C_1, C_2, C_3$

$> 0$  e  $\beta > 1$ , tal que:

$$\begin{cases} g(t, x, u) = \alpha(t, x) + \beta(t, x)u \\ |g(t, x, u)| \leq C_1(1 + |x| + |u|) \\ |g(t, x_1, u) - g(t, x, u)| \leq C_2|x_1 - x|(1 + |u|) \\ f(t, x, u) \geq C_3|u|^\beta - C_4 \end{cases}$$

Então  $J(u^*)$  é maximizador do funcional. Em problemas de minimização,  $g$  seria côncava e a desigualdade de  $f$  é revertida.

Agora, temos que estender as condições necessárias para Lebesgue.

**Unicidade:** Implica diretamente da unicidade das soluções do sistema de otimização (intervalos de tempo curto). A volta não é sempre verdadeira.

## 2.1 Interpretação da Adjunta

Considere o funcional  $V(x_0, t_0)$  a ser maximizado. Estabelecemos que  $\frac{\partial V}{\partial x}(x_0, t_0) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{V(x_0 + \epsilon, t_0) - V(x_0, t_0)}{\epsilon} = \lambda(t_0)$ . Podemos relacionar, então, a função adjunta à variação marginal da função custo/lucro com respeito ao estado. É o valor adicional associado com um incremento adicional da variável de estado. Podemos aproximar:

$$V(x_0 + \epsilon, t_0) \approx V(x_0, t_0) + \epsilon \lambda(t_0).$$

Se  $\epsilon = 1$ , podemos ver que ao adicionar um unidade de valor,  $\lambda(t_0)$  é o valor objetivo adicional.

## 2.2 Princípio da Otimalidade

**Teorema 3:** Considere  $u^*$  o controle ótimo associado ao estado  $x^*$  para o problema de já citado. Se  $\hat{t}, t_1 < \hat{t} < t_1$ , então as funções restritas ao intervalo  $[\hat{t}, t_1]$  formam uma

solução ótima para o problema com tempo inicial  $\hat{t}$ . Além disso, será único, desde que  $u^*$  seja. A demonstração ocorre por contradição. Note que nada pode ser dito sobre o intervalo  $[t_0, \hat{t}]$ , pois existem contra-exemplos.

**Teorema 4:**  $H(t, x, u, \lambda)$  é contínua por partes e contínua Lipschitz em relação ao tempo no caminho ótimo.

**Função Autônoma:** Quando não existe dependência do tempo nas funções  $f$  e  $g$ .

**Teorema 5:** Se um problema de controle ótimo é autônomo, então o Hamiltoniano é uma função que não depende do tempo. Note que se  $M(t) := H(x^*(t), u^*(t), \lambda(t))$  é Lipschitz contínua, sabemos que  $M$  é diferenciável em quase toda parte com respeito à medida de Lebesgue. A partir disso, e utilizando o princípio máximo, vemos que  $M'(t) = 0$  em quase toda parte. Como  $M$  é contínua, ela é constante.

**Princípio Máximo:** O máximo de uma função é encontrado em uma das bordas.

## 3 Condições finais

### 3.1 Termo Payoff

Muitas vezes, também queremos maximizar o valor de uma função em um determinado tempo, em especial no final do intervalo. Nesse caso, o problema se torna:

$$\begin{cases} \max_u [\phi(x(t_1)) + \int_{t_0}^{t_1} f(t, x(t), u(t)) dt] \\ x' = g(t, x(t), u(t)), x(t_0) = x_0 \end{cases}$$

A função  $\phi$  é conhecida como termo payoff. A única mudança na obtenção das condições necessárias é na condição do tempo final. Obtemos que  $\lambda(t_1) = \phi'(x^*(t_1))$ .

(Mais uma vez, precisamos fazer com que  $\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{J(u^\epsilon) - J(u^*)}{\epsilon} = 0$ )

### 3.2 Estados com Pontos Finais Fixados

**Obs.:** O funcional objetivo ser imaterial significa que não depende da condição final do estado.

Podemos deixar  $x(t_0)$  livre e  $x(t_1) = x_1$  fixado. Essa caso é similar com o anterior, com a mudança de que  $\lambda(t_0) = -\phi'(x(t_0))$ . Isso sugere que exista uma dualidade entre as condições de estado e adjunta.

Também podemos fixar os pontos inicial e final de estado. Notamos que estamos considerando a maximização sobre o conjunto de controles admissíveis, que respeitem as condições, inclusive sobre a variável de estado.

**Teorema 1:** Se  $u^*(t)$  e  $x^*(t)$  são ótimos para o problema com pontos inicial e final fixados, então existe uma função  $\lambda(t)$  diferenciável por partes e uma contante  $\lambda_0$  igual a 0 ou 1, onde  $H = \lambda_0 f(t, x(t), u(t)) + \lambda(t)g(t, x(t), u(t))$  e  $\lambda'(t) = -H_x$ .

A diferença é que a função adjunta não tem restrições. A demonstração utiliza uma técnica diferente da utilizada até então. A constante ajusta para problemas degenerados ou problema tem funcional objetivo imaterial.

## 4 Método Backward/Foward

Queremos agora resolver os problemas de controle ótimo numericamente. A equação  $\frac{\partial H}{\partial u} = 0$  deve ser satisfeita em  $u^*$  e pode ser de ajuda para encontrar  $u$  em função de  $x$  e  $\lambda$ . A partir disso, podemos utilizar um método como Runge-Kutta para resolver o sistema ótimo. Ele vai encontrar o controle ótimo se esse existir.

### 4.1 Algoritmo

1. Chute inicial para  $\vec{u}$ , sendo cada coordenada de  $u$  um valor no tempo discreto.
2. Resolva  $x$  Foward utilizando a condição inicial e utilizando sua equação diferencial.

3. Use a condição final de  $\lambda$  e resolva Backward de acordo com sua equação diferencial.
4. Atualize o vetor de controle.
5. Convergência.

É interessante utilizar uma combinação convexa entre o valor do controle anterior e o valor atual para acelerar a convergência.

**Combinação Convexa:** Combinação Linear de pontos, cuja soma dos coeficientes é positiva e a soma é 1.

O erro no algoritmo é em geral o relativo e ele deve ser menor do que uma tolerância aceitável. A condição que obtemos é que  $\delta \|\vec{u}\| - \|\vec{u} - \alpha \vec{du}\| \geq 0$

## 4.2 Runge-Kutta

$$\left\{ \begin{array}{l} x(t+h) \approx x(t) + \frac{h}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4) \\ k_1 = f(t, x(t)) \\ k_2 = f(t + \frac{h}{2}, x(t) + \frac{h}{2}k_1) \\ k_3 = f(t + \frac{h}{2}, x(t) + \frac{h}{2}k_2) \\ k_4 = f(t + h, x(t) + hk_3) \end{array} \right.$$

O erro é da ordem de  $h^4$ .

# 5 Laboratórios

## 5.1 Laboratório 1

Nesse laboratório, o autor explora a utilização do MatLab como ferramenta, devido à facilidade de se trabalhar com essa linguagem matematicamente e pela quantidade



grafica dos resultados.

Além disso, ele resolve um problema de controle ótimo.

## 5.2 Laboratório 2

Aplicação em Biologia. Dada uma população com capacidade máxima (carrying capacity), queremos reduzi-la. Nesse caso, o controle é quantidade adicionada no tempo  $t$ .

Assim, o problema se reduz a:

$$\begin{cases} \min_u \int_0^T (Ax(t)^2 + u(t)^2) dt \\ \text{s.a. } x'(t) = r(M - x(t)) - u(t)x(t), x(0) = x_0 \end{cases} \quad (4)$$

## 5.3 Laboratório 3

Aplicação sobre Bactéria. Nesse laboratório, o tópico pe sobre o crescimento de uma bactéria quando um nutriente químico é utilizado para acelerar a reprodução. Nosso problema, então:

$$\begin{cases} \max_u Cx(1) - \int_0^1 u(t)^2 dt \\ \text{s.a. } x'(t) = rx(t) + Au(t)x(t) - Bu(t)^2 e^{-x(t)}, \\ x(0) = x_0, A, B, C \geq 0 \end{cases} \quad (5)$$

Como  $\lambda(t) > 0 \forall t$ , podemos obter a caracterização do controle como comumente fazemos.

## 6 Controles Limitados

Sabemos que, em geral, nossos problemas a serem resolvidos tem limitações no controle.

Por exemplo, no uso de um químico, podemos indicar que o controle é necessariamente

não negativo e tem, também, uma restrição legal, muitas vezes.

## 6.1 Condições Necessárias:

Esse problema será descrito da seguinte forma

$$\begin{aligned} & \max_u \int_{t_0}^{t_1} f(t, x(t), u(t)) dt + \phi(x(t_1)) \\ & s.a. \ x'(t) = g(t, x(t), u(t)), x(t_0) = x_0, \\ & \quad a \leq u(t) \leq b, a < b \end{aligned}$$

Seja  $u^*$  e  $x^*$  o par ótimo. Observe que a derivada do funcional objetivo pode não ser zero no controle ótimo, pois  $u^*$  pode estar nos limites do intervalo. Podemos avaliar o sinal da derivada, entretanto. Agora, dizemos que  $\epsilon \in (0, \epsilon_0]$ . E, mais uma vez, reescrevemos o funcional e derivamos em relação a  $\epsilon$ , no ponto 0, porém, nesse caso, essa derivada será menor ou igual a 0. Tomando a função adjunta com as restrições já utilizadas anteriormente, reduzo a inequação para  $0 \geq \int_{t_0}^{t_1} (f_u + \lambda g_u) h dt$ , que vale para todos os valores de  $h$ .

Seja  $s$  um ponto de continuidade de  $u^*$  com  $a \leq u^*(s) < b$ . Teremos que  $f_u + \lambda g_u \leq 0$ . Em contrapartida, se tivermos  $a < u^*(s) \leq b$ , concluiremos que  $f_u + \lambda g_u \geq 0$ . Os pontos que não há continuidade são irrelevantes. Sumariamente:

$$\begin{aligned}
u^*(t) = a &\implies f_u + \lambda g_u \leq 0 \text{ at } t \\
a < u^*(t) < b &\implies f_u + \lambda g_u = 0 \text{ at } t \\
u^*(t) = b &\implies f_u + \lambda g_u \geq 0 \text{ at } t \\
&\iff \\
f_u + \lambda g_u < 0 \text{ em } t &\implies u^*(t) = a \\
f_u + \lambda g_u = 0 \text{ em } t &\implies a < u^*(t) < b \\
f_u + \lambda g_u > 0 \text{ em } t &\implies u^*(t) = b
\end{aligned}$$

## 7 Laboratórios

### 7.1 Laboratório 4

É um reexame do primeiro laboratório. A primeira análise é de como o controle muda quando há uma restrição (o que faz sentido).

### 7.2 Laboratório 5 - Cancer

Queremos minimizar a densidade do tumor e os efeitos colaterais das drogas. É assumido que o tumor tenha um crescimento Gompertzian. O modelo utilizado no laboratório é Skipper's log-kill hipótese, que afirma que a morte de células devido às drogas é proporcional a população de tumor.

Considere  $N(t)$  a densidade normalizada do tumor no tempo  $t$ . Assim:

$$N'(t) = rN(t) \ln\left(\frac{1}{N(t)} - u(t)\right) \delta N(t)$$

$r$  é a taxa de crescimento do tumor,  $\delta$  a magnitude da dose e  $u(t)$  descreve a ação da droga. É a força do efeito da droga. Escolhemos o funcional para ser

$$\min_u \int_0^T aN(t)^2 + u(t)$$

Além disso,  $u(t) \geq 0$  e  $N(0) = N_0$ .

### 7.3 Laboratório 6 - Fish Harvesting

Suponha que em um tanque em  $t = 0$  são adicionados peixes com massa média essencialmente 0. Além, descrevemos a massa do peixe segundo  $f(t) = \frac{kt}{t+1}$ . Note que  $\lim f(t) = k$ . Considere um intervalo  $[0, T]$ , com  $T$  pequeno suficiente para que não haja reprodução. Queremos:

$$\max_u \int_0^T A \frac{kt}{t+1} x(t)u(t) - u(t)^2 dt$$

$$\text{subject to } x'(t) = -(m + u(t))x(t), x(0) = x_0, 0 \leq u(t) \leq M$$

$M$  é um limite físico para a taxa de colheita. Note que para qualquer valor de  $u(t) > 0$ , a taxa vai decrescer.

Como nos laboratórios anteriores, o valor  $T$  influencia o controle ótimo.

## 8 Optimal Control of Several Variables

Agora o problema se resume a:

$$\max_{u_1, \dots, u_m} \int_{t_0}^{t_1} f(t, x_1(t), \dots, x_n(t), u_1(t), \dots, u_m(t)) dt + \phi(x_1(t_1), \dots, x_n(t_1))$$

$$\text{subject to } x'_i(t) = g_i(t, x_1(t), \dots, x_n(t), u_1(t), \dots, u_m(t))$$

$$x_i(t_0) = x_{i0} \text{ for } i = 1, 2, \dots, n$$

onde as função  $f$  e  $g_i$  são continuamente diferenciáveis em cada variável. Podemos usar a expressão em forma de vetores. Considere  $\vec{\lambda}(t) = [\lambda_1(t), \dots, \lambda_n(t)]$  um vetor com funções diferenciáveis por partes. Definimos  $H(t, \vec{x}, \vec{u}, \vec{\lambda}) = f(t, \vec{x}, \vec{u}) + \vec{\lambda}(t) \cdot \vec{g}(t, \vec{x}, \vec{u})$ . Se fizermos o mesmo processo anterior, vamos obter as condições:

$$x'_i(t) = \frac{\partial H}{\partial \lambda_i} = g_i(t, \vec{x}, \vec{u}), x_i(0) = x_{i0} \text{ for } i = 1, \dots, n$$

$$\lambda'_j(t) = -\frac{\partial H}{\partial x_j}, \lambda_j(t_1) = \phi_{x_j}(\vec{x}(t_1)) \text{ for } j = 1, \dots, n$$

$$0 = \frac{\partial H}{\partial u_k} \text{ at } u_k^* \text{ for } k = 1, \dots, m$$

Outros ajustes vistos nos capítulos anteriores ocorrem de mesma forma no caso multivariado. Inclusive se os limites das variáveis de controle estiverem presentes, o que altera as condições, também.

## 8.1 Problemas Linear Quadratic Regulator

Considere a equação diferencial do estado linear em  $x$  e  $u$  e o funcional objetivo na forma quadrática.

$$J(u) := \frac{1}{2} [x^T(T)Mx(t) + \int_0^T x^T(t)Q(t)x(t) + u^T R(t)u(t)dt]$$

$$x'(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t)$$

Onde  $M, Q(t)$  são positivas semidefinidas e  $R(t)$  é positiva definida para garantir invertibilidade. As três são simétricas. Observe que isso garante a diagonalização. Assim:  $H = \frac{1}{2}x^T Qx + \frac{1}{2}u^T Ru + \lambda^T (Ax + Bu)$ .

Deste modo  $u^* = -R^{-1}B^T \lambda$  e  $\lambda' = -Qx - A^T \lambda, \lambda(T) = Mx(T)$ . Se supormos que  $\lambda = Sx$ , chegamos que  $S'x + Sx' = -Qx - A^T \lambda$ . Com as devidas transformações. Obtermos que  $-S'x = Qx + A^T Sx - SBR^{-1}B^T Sx$ , com  $S(T) = M$ . Isso nos mostra que

equação matricial Ricatti, que  $S(t)$  deve satisfazer. Basta resolver o problema. Por fim  $u^* = -R^{-1}B^T Sx$ . Essa matriz é chamada de ganho.

## 8.2 Equações Diferenciais de Ordem mais Alta

Quando temos uma equação diferencial de ordem mais alta, podemos definir um sistema com as derivadas, onde  $x_1(t) = x(t), x_2(t) = x'(t), \dots, x_{n+1}(t) = x^{(n)}(t)$ . A partir disso, podemos resolver com o Princípio Máximo de Pontryagin.

## 8.3 Limites Isoperimétricos

Além dos limites inferior e superior que podemos colocar no controle, também podemos querer que o exista limites na integral do controle. Exemplo: Para medicar uma pessoa, podemos querer que a quantidade total de remédia seja um valor  $B$ . Assim, a restrição é do tipo  $\int_0^T u(t)dt = B$ . De forma geral, podemos ter  $\int_{t_0}^{t_1} h(t, x(t), u(t))dt = B$ , sendo  $h$  continuamente diferenciável, como restrição. Desta maneira, não podemos usar o Princípio Máximo de Pontryagin. Para isso, introduzimos  $z(t) = \int_{t_0}^t h(s, x(s), u(s))ds$ . Desta maneira, nosso problema terá duas variáveis de estado.

## 8.4 Soluções Numéricas

Agora, para cada controle, um valor inicial para o controle é dado. Depois as variáveis de estado são resolvidas simultaneamente. Por fim, as adjuntas.

# 9 Linear Dependence on the Control

Vamos considerar problemas especiais em que o problema é linear no controle  $u(t)$ .

## 9.1 Controle Bang-Bang

Considere o problema de controle ótimo.

$$\begin{aligned} \max_u \int_{t_0}^{t_1} f_1(t, x) + u(t)f_2(t, x)dt \\ \text{s.a. } x'(t) = g_1(t, x) + u(t)g_2(t, x), x(0) = x_0 \\ a \leq u(t) \leq b \end{aligned}$$

Assim  $H(t, x, u, \lambda) = f_1(t, x) + \lambda g_1(t, x) + u(t)(f_2(t, x) + \lambda g_2(t, x))$ , linear em  $u(t)$ . Observe a derivada parcial em relação a  $u$  não carrega informação sobre  $u(t)$ . Assim definimos  $\psi(t) := f_2(t, x(t)) + \lambda(t)g_2(t, x(t))$ , muitas vezes chamada de função de troca. Se  $\psi = 0$  não pode ser obtido em um intervalo de tempo, mas ocorre apenas em pontos finitos, o controle é dito "Bang Bang", porque só varia entre os valores mínimo e máximo de  $u(t)$ . Os valores de  $u(t)$  nesses pontos não são de interesse, portanto.

Em contrapartida, se  $\psi(t) \equiv 0$  em um intervalo de tempo, dizemos que  $u^*$  é singular nesse intervalo. Esse caso será explorado na próxima sessão.

Para resolver esse tipo de problema, primeiro precisamos verificar se de fato o problema é Bang-Bang. Numericamente, o problema é apenas em verificar a positividade ou negatividade da função de troca.

## 9.2 Controles Singulares

O livro explora um exemplo inicial:

$$\begin{aligned} \max_u \int_0^2 (x(t) - t * 2) * 2dt \\ \text{s.a. } x'(t) = u(t), x(0) = 1 \\ 0 \leq u(t) \leq 4 \end{aligned}$$

Calculamos o Hamiltoniano e encontramos  $u^*(t)$  em função da adjunta. Para sair dessa hipótese, precisamos fazer uma análise mais minuciosa. Ela começa em provar que  $x(t) \geq t * 2 \rightarrow \lambda'(t) \leq 0 \wedge \lambda(t) \geq 0$ . Então, basta encontrar os valores de  $t$  em que essa função é positiva ou igual a 0. Dessa forma, teremos descrito o controle e estado ótimos.

No caso numérico, podemos ter que analisar quando nossa função de troca vai ser maior, igual ou menor que zero. Porém, a igualdade a 0 é complicada computacionalmente. Nesse sentido, estabelecemos um intervalo. No exemplo 17.4 do livro, quando o controle é Bang-Bang, houve convergência. Já o contrário não ocorreu. Como a função de troca é identicamente zero, problemas singulares são frequentemente instáveis.

Pesquisa tem sido feita nesse sentido. A condição de Legendre-Clebsch é um exemplo. É uma condição de segunda ordem, porque envolve ordem de derivadas mais altas.

## 10 SIQ models

O isolamento/quarentena é um procedimento para controlar o avanço da doença. Foi, provavelmente, um dos primeiros métodos de controle utilizados. Uma epidemia é um surto de uma doença em um curto período de tempo. Inicialmente, olharemos para os modelos SIR, com a adição de um novo compartimento,  $Q$ . Assumimos, inicialmente, que aqueles em quarentena não infectam suscetíveis.

Seja  $S(t)$ ,  $I(t)$ ,  $Q(t)$  e  $R(t)$  o número de suscetíveis, infectados, removidos e em quarentena no tempo  $t$ . Seja  $\beta$  o número médio de contatos suficientes para transmissão, então  $\beta \frac{I}{S+I+R} S$  é o número de novos casos e é chamada de incidência padrão. Podemos aplicar a lei das massas da mesma forma ( $\beta SI$ ).

### 10.1 Simple mass action incidence

Considere que haja imunidade permanente  $R(t)$ . O modelo:



$$S'(t) = A - \beta SI - dS,$$

$$I'(t) = [\beta S - (\gamma + \delta + d + \alpha_1)]I,$$

$$Q'(t) = \delta I - (d + \alpha_2 + \epsilon)Q,$$

$$R'(t) = \gamma I + \epsilon Q - dR,$$

onde,  $\alpha_1, \alpha_2$  representam os coeficientes de mortes causadas pelas doenças. Afirmamos que  $D = \{(S, I, Q, R) | S \geq 0, I \geq 0, Q \geq 0, R \geq 0, S + I + Q + R \leq A/d\}$  é o conjunto das possíveis soluções, pois  $N(t) \rightarrow A/d$  quando não há doença.

### 10.1.1 Equilíbrio

No equilíbrio,  $I = 0$  ou  $S = \frac{\gamma + \delta + d + \alpha_1}{\beta}$ . Se  $I = 0$ ,  $S = A/d, Q = 0, R = 0$ . Se  $I \neq 0, I(t) = \frac{A-dS}{\beta S} = \frac{A-dS}{\gamma + \delta + d + \alpha_1}$ . Nesse caso,  $Q(t) = \frac{\delta I}{d + \alpha_2 + \epsilon}$  e  $R = \frac{\gamma I + \epsilon Q}{d}$ .

Defina o número de reprodução de quarentena  $R_q = \frac{\beta(A/d)}{\gamma + \delta + d + \alpha_1}$ , onde  $\beta$  é a taxa de contato, e o denominador indica o tempo médio de residência. Assim  $R_q$  indica o número médio de infecções secundárias em uma população completamente suscetível quando um infeccioso entra na população.

## 10.2 Quarantine-adjusted incidence

$$S'(t) = A - \beta \frac{SI}{S + I + R} - dS,$$

$$I'(t) = [\beta \frac{S}{S + I + R} - (\gamma + \delta + d + \alpha_1)]I,$$

$$Q'(t) = \delta I - (d + \alpha_2 + \epsilon)Q,$$

$$R'(t) = \gamma I + \epsilon Q - dR,$$

### 10.3 Modelo de Controle Proposto I

$$\min_u \int_0^T I(t) + u(t)^2 I(t) dt,$$

$$s.a \ S'(t) = A - \beta \frac{SI}{S+I+R} - dS,$$

$$I'(t) = \beta \frac{SI}{S+I+R} - (d + \alpha_1 + \gamma + u)I,$$

$$Q'(t) = uI - (\alpha_2 + d + \epsilon)Q,$$

$$R'(t) = \gamma I + \epsilon Q - dR$$

$$S(0) = S_0 \geq 0, I(0) = I_0 \geq 0, Q(0) = 0, R(t) = R_0 \geq 0,$$

$$0 \leq u(t) \leq 1$$