Lucas Moschen

Monitoria 12 e 13

22 de novembro de 2019

1 Autovalores e Autovetores

Definição: Autovetor é um vetor ($\neq \vec{0}$) que tem como imagem de uma transformação linear um vetor proporcional. A proporção é chamada de autovalor.

Polinômio Característico: Polinômio cujas raízes são os autovalores de uma transformação linear.

Subespaço invariante: Também conhecido como auto-espaço, é formado pela combinação dos autovetores associados ao mesmo autovalor.

Teorema 1: Seja A um operador linear, λ um autovalor e v um autovetor. $Av = \lambda v \implies A^n v = \lambda^n v$.

Teorema 2: A autovalores diferentes do mesmo operador correspondem autovetores linearmente independentes.

2 Mudança de Base

Considere as seguintes bases:

$E = \{e_1, ..., e_n\}$

$U = \{u_1, ..., u_n\}$

$V = \{v_1, ..., v_n\}$

Considere $w = (x_1, ..., x_n)$. Isso significa que w é escrito como uma combinação linear dos vetores da base E, canônica, e os coeficientes são $x_1, ..., x_n$. Imagine que queiramos escrever na base U. Para isso, basta encontrarmos os coeficientes de cada vetor da base U. Para isso, basta resolver o sistema linear onde cada vetor de U é uma coluna e o vetor restultado é o vetor na base canônica.

Assim, a matriz formada pelos vetores da base U formam uma matriz que transforma vetores da base U em vetores da base canônica. A inversa faz o processo contrário.

Se quiséssemos mudar da base E para a base U sem o uso da inversa, só precisamos saber a transformação dos vetores da base canônica.

Para fazer a transformação de uma base em outra, basta transformarmos na canônica como intermédio.

3 Matrizes Semelhantes e Diagonalização

Definição: Duas matrizes são semelhantes se existe P invertível tal que $B = P^{-1}AP (AP = PB)$, que tem o mesmo polinômio característico e o mesmo determinante.

Diagonalização: Uma matriz é diagonalizável se existe uma matriz semelhante que seja diagonal. A é diagonálizável se, e só se, tiver n autovetores LI. Nesse caso P é a matriz cujas colunas são os autovetores de A e D os autovalores correspontes.

Observe que $P^{-1}AP = D$, logo para transformar um vetor na base V em outro na base V correspondente a imagem desse vetor na base canônica da matriz A, basta usar a transformação D.

4 Recorrências

Podemos utilizar matrizes para representar recorrências. Um exemplo famoso é a sequência de Fibonight.

5 Produto Interno

Seja E um espaço vetorial e $u, v \in E$. Define-se produto interno com $< u, v >$ com um número real que satisfaz as seguintes condições:

- $< u, v + v' >=< u, v > + < u, v' >$ e $< u + u', v >=< u, v > + < u', v >$
- $< u, v >=< v, u >$
- $< \alpha u, v >= \alpha < u, v >$ e $< u, \alpha v >= \alpha < u, v >$
- Se $u \neq 0$, $< u, u >> 0$

5.1 Projeções

Já sabemos que $p = (\frac{u \cdot v}{v \cdot v})v$ é a projeção do vetor u sobre a reta gerada por v. Quando queremos projetar um vetor v sobre um hiperplano π, com vetor nornal n, temos que $v = p + tn$, onde t é uma constante. Logo, podemos montar um sistema com n equações.

5.2 Ortogonalidade

Se $< u, v >= 0$, dizemos que u e v são ortogonais. Um conjunto é dito ortogonal se a cada par de vetores, eles são ortogonais. Ele será ortonormal quando seus vetores ortogonais forem normalizados. Note que se X é um conjunto ortogonal, então é LI.

5.3 Ortogonalização de Gram-Schimidt

Lembre-se: Defina um vetor inicial e utilize a ideia de que cada outro vetor será subtraído das projeções do vetor calculado previamente.

5.4 Projeção de um vetor sobre um subespaço

Seja W um subespaço de E e α uma base ortogonal desse subespaço.
$p = proj_W v = \sum_{i=1}^{n} proj_{\alpha_i} v$

6 Informações Adicionais

Extendendo a ideia dos autovalores: Dado um operador linear $A : E \to E$ ou existe um vetor $u \in E$ tal que $Au = \lambda u$. Ou, então, existem $u, v \in E$ linearmente independentes, tais que $Au = \alpha u + \beta v$ e $Av = \gamma u + \delta v$.

Invariante: Diz-se que um subespaço vetorial $F \subset E$ é invariante pelo operador $A : E \to F$ quando $A(F) \subset F$. Isto é, quando a imagem dos vetorres desse subespaço estão nesse subespaço. Um subespaço de dimensão 1 é invariante por A se, e somente se, existe um número λ tal que $Av = \lambda v, \forall v \in F$. Se u, v formam um subespaço de dimensão 2, ele será invariante se, e só se, $Au \in F$ e $Av \in F$.

Teorema: Todo operador linear num espaço vetorial de dimensão finita possui um subespaço invariante de dimensão 1 ou 2. Para provar esse teorema, temos que provar o lema que diz que existem um polinômio de grau 1 ou 2 e um vetor v tal que $p(A) \cdot v = 0$.

7 Cadeias de Markov

Definição: É uma série temporal discreta no qual a distribuição de uma população pode ser calculada por recorrência. Ad condições são que a população nunca torna-se negativa e que a população total é fixa. Podemos utilizar uma matriz de tranição que descreva a movimentação probilística dessa população. Requere-se que a soma de cada coluna seja 1 e que não haja entradas negativas. O elemento ij da matriz descreve a probabilidade da população passar do estado j para o estadp i. Se T possui alguma potêncua com todas as entradas positivas, é dito regular. Uma matrzi de transição regular terá um estado estacionário. $Ts = s$. É possível mostrar que qualquer matriz de transição com as condições dadas deve ter um autovalor 1.