MATRIZ

Multiplicao de Matrizes

Matriz 'A' vezes a Matriz 'B'

REVISAO

1.3 Matrizes e operações matriciais

Coleções retangulares de números reais aparecem em muitos contextos, não só como a matriz aumentada de um sistema de equações lineares. Nesta seção, começamos a estudar matrizes como objetos independentes, definindo sobre elas as operações de adição, subtração e multiplicação.

Notação e terminologia matricial

Na Seção 1.2, usamos coleções retangulares de números, denominadas *matrizes aumentadas*, para abreviar a escrita de sistemas de equações lineares. Contudo, essas coleções retangulares de números ocorrem também em outros contextos. Por exemplo, a seguinte coleção retangular de três linhas e sete colunas pode descrever o número de horas que um estudante gastou estudando três matérias numa certa semana.

	2ª	3ª	4ª	5ª	6ª	Sáb.	Dom.
Matemática	2	3	2	4	1	4	2
História	0	3	1	4	3	2	2
Línguas	4	1	3	1	0	0	2

Suprimindo os títulos, ficamos com a seguinte coleção retangular de números com três linhas e sete colunas, denominada "matriz".

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 & 2 & 4 & 1 & 4 & 2 \\ 0 & 3 & 1 & 4 & 3 & 2 & 2 \\ 4 & 1 & 3 & 1 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Mais geralmente, fazemos a seguinte definição.

O PDF segue na página abaixo.

Seja a matriz retangular $A = (a_{ij})_{2x3}$, de tamanho 2x3, duas linhas e 3 colunas,

$$i = linhas \quad e \quad j = colunas.$$

$$m = linhas \quad e \quad n = colunas$$

$$i \quad e \quad m \quad indicam \;\; as \; linhas$$

$$j \quad e \quad n \quad indicam \; as \;\; colunas$$

As linhas sao as retas orizontais da matriz.

As colunas sao as linhas verticais da matriz.

Cada elemento a_{ij} *da matriz é o ponto de curzamento da linha horizontal com a reta coluna vertical da matriz.*

Álgebra ⟶ **OPERAÇOES:** Adição, Subtração, Multiplicação e Divisão.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}_{mxn}$$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix}_{2x3}$$

Linha 1	a_{11}, a_{11} e a_{13}
Linha 2	a_{13}, a_{22} e a_{23}

Coluna 1	a_{11} e a_{13}
Coluna 2	a_{13} e a_{22}
Coluna 3	a_{22} e a_{23}

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 10 & 11 & 12 & 13 \\ 15 & 16 & 17 & 18 \end{bmatrix}_{4X4} \begin{array}{l} \to 1^{\underline{o}} \\ \to 2^{\underline{o}} \\ \to 3^{\underline{o}} \\ \to 4^{\underline{o}} \end{array}$$

LINHAS HORIZONTAIS

X **DEFINIÇÃO 1** Uma ***matriz*** é um agrupamento retangular de números. Dizemos que os números nesse agrupamento são as ***entradas*** da matriz.

X **EXEMPLO 1 Exemplos de matrizes**

Alguns exemplos de matrizes são

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}, \quad [2 \quad 1 \quad 0 \quad -3], \quad \begin{bmatrix} e & \pi & -\sqrt{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}, \quad [4]$$

X Uma matriz com somente uma coluna é denominada ***matriz coluna***, ou ***vetor coluna***, e uma matriz com somente uma linha é denominada ***matriz linha***, ou ***vetor linha***. No Exemplo 1, a matriz 2×1 é um vetor coluna, a matriz 1×4 é um vetor linha e a matriz 1×1 é um vetor coluna e também um vetor linha.

X O ***tamanho*** de uma matriz é descrito em termos do número de linhas (fileiras horizontais) e de colunas (fileiras verticais) que ela contém. Por exemplo, a primeira matriz do Exemplo 1 tem três linhas e duas colunas, portanto, seu tamanho é 3 por 2 (e escrevemos 3×2). Numa descrição de tamanho, o primeiro número sempre denota o número de linhas e o segundo, o de colunas. As outras matrizes do Exemplo 1 têm tamanhos 1×4, 3×3, 2×1 e 1×1, respectivamente.

Utilizamos letras maiúsculas para denotar matrizes e letras minúsculas para denotar quantidades numéricas; assim, podemos escrever

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 7 \\ 3 & 4 & 2 \end{bmatrix} \quad \text{ou} \quad C = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{bmatrix}$$

X Quando discutimos matrizes, é costume dizer que as quantidades numéricas são ***escalares***. Salvo menção explícita em contrário, *escalares são números reais*; escalares complexos serão considerados mais adiante no texto.

A entrada que ocorre na linha i e coluna j de uma matriz A é denotada por 3×4. Assim, uma matriz arbitrária 3×4 pode ser escrita como

X É prática comum omitir os colchetes de matrizes 1×1, tornando impossível saber, por exemplo, se o símbolo 4 denota o número "quatro" ou a matriz [4]. Isso raramente causa problemas, pois geralmente é possível ver a qual dos dois nos estamos referindo a partir do contexto.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{bmatrix}$$

X e uma matriz arbitrária $m \times n$ como

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \tag{1}$$

X Quando for desejada uma notação mais compacta, a matriz precedente pode ser escrita como

$$[a_{ij}]_{m\times n} \quad \text{ou} \quad [a_{ij}]$$

X sendo utilizada a primeira notação quando for importante, na argumentação, saber o tamanho da matriz, e a segunda quando o tamanho não necessitar ênfase. Em geral, combinamos a letra denotando a matriz com a letra denotando suas entradas; assim, para uma matriz B, costumamos usar b_{ij} para a entrada na linha i e na coluna j e para uma matriz C, usamos a notação c_{ij}.

X A entrada na linha i e na coluna j de uma matriz A também é comumente denotada pelo símbolo $(A)_{ij}$. Assim, para a matriz (1) acima, temos

$$(A)_{ij} = a_{ij}$$

Bibliografia
HOWARD ANTON
e
CHRIS RORRES
UFRGS
bookman

DIAGONAL

Seja a matriz quadrada $B = (b_{ij})_{3x3}$, de tamanho 3x3, três linhas e 3 colunas, $i = linhas$

$e \quad j = colunas.$

Diagonal Principal

diagonal principal

$$B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{pmatrix}_{3x3}$$

VERTICAIS COLUNAS

$$A = \begin{array}{cccc} 1^{\circ} & 2^{\circ} & 3^{\circ} & 4^{\circ} \\ \end{array}$$
$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 10 & 11 & 12 & 13 \\ 15 & 16 & 17 & 18 \end{bmatrix}_{4X4}$$

CRUZAMENTO

$a_{ij} = a_{33} = 12$

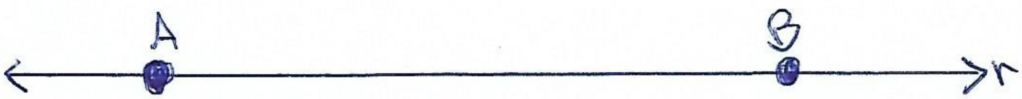
$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 10 & 11 & 12 & 13 \\ 15 & 16 & 17 & 18 \end{bmatrix}_{4X4}$$

Diagonal Principal

Diagonal Principal da Matriz B, acima	b_{11} , b_{22} e b_{33}

RETA

Postulado	Dois pontos diferentes, distintos, determinam uma reta.



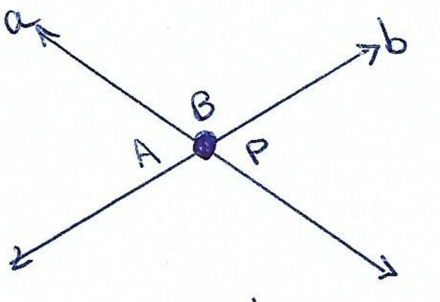
$A \neq B$

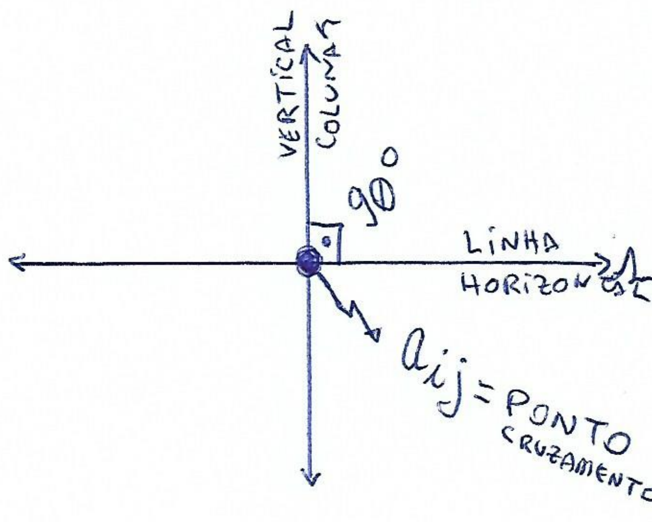
INFINITOS PONTOS

Postulado	Há infinitos pontos na reta e fora dela.

Retas concorrentes

Definição	Duas retas se cruzam em um único ponto.
	Uma reta horizontal se cruza com uma reta vertical.





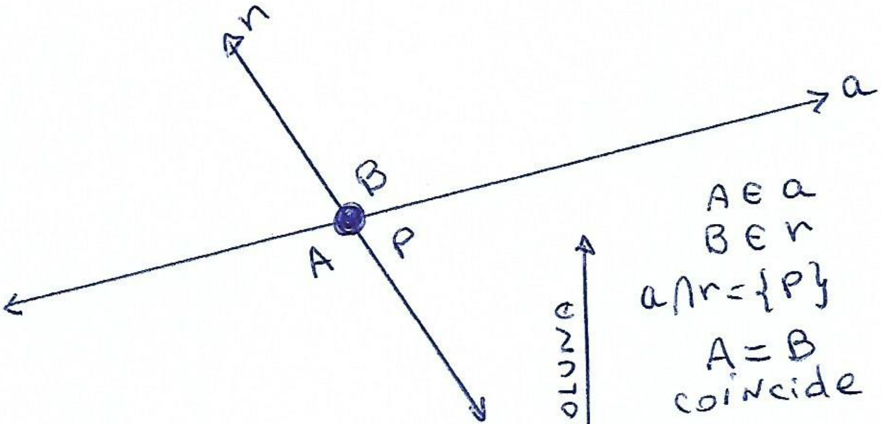
$A \in a$ e $B \in b$

$a \cap b = \{P\}$

$A = B$

IGUAL

AXIOMA	Coisas coincidentes são iguais entre si.



$A \in a$

$B \in r$

$a \cap r = \{P\}$

$A = B$

coincide

COLUNA a

LINHA b

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 10 & 11 & 12 & 13 \\ 15 & 16 & 17 & 18 \end{bmatrix}_{4X4}$$

COLUNA

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 10 & 11 & 12 & 13 \\ 15 & 16 & 17 & 18 \end{bmatrix}_{4X4}$$

$a \cap b = \{P\} = a_{ij} = a_{22} = 6$ = POSIÇÃO MATEMÁTICA

Diagonal Secundária

diagonal secundária

$$B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{pmatrix}_{3x3}$$

Diagonal Secundária da Matriz B	b_{31} , b_{22} e b_{13}

REGRA:

- LINHA de 'A' VEZES COLUNAS de 'B'
- Quantidade de colunas de 'A' é a mesma quantidade de linhas de 'B'
- Os tamanhos são conformáveis para o produto

$$C = A.B = \begin{bmatrix} 3 & 4 & 2 \\ 3 & 9 & 1 \end{bmatrix}_{2x3} . \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 4 & 1 & 5 \\ 3 & 0 & 1 \end{bmatrix}_{3x3} =$$

$$= \begin{bmatrix} 3.(1) + 4.(4) + 2.(3) & 3.(2) + 4.(1) + 2.(0) & 3.(4) + 4.(5) + 2.(1) \\ 3.(1) + 9.(4) + 1.(3) & 3.(2) + 9.(1) + 1.(0) & 3.(4) + 9.(5) + 1.(1) \end{bmatrix}_{2x3} =$$

$$= \begin{bmatrix} 3 + 16 + 6 & 6 + 4 + 0 & 12 + 20 + 2 \\ 3 + 36 + 3 & 6 + 9 + 0 & 12 + 45 + 1 \end{bmatrix}_{2x3} = \begin{bmatrix} 25 & 10 & 34 \\ 42 & 15 & 58 \end{bmatrix}_{2x3} = C_{2x3}$$

OPERAÇAO

MULTIPLICAÇAO

Multiplicaçao: Matriz vezes Matriz

Definição	Seja as matrizes $A = [a_{ij}]_{mxn}$ e $B = [b_{jk}]_{nxp}$. A matriz $C = A.B$ é $tal\ que$: $C = [c_{ik}]_{mxp}\ , tal\ que, \quad c_{ik} = \sum_{j}^{n} a_{ij}\,.\,b_{jk} \begin{cases} para\ todo\ i \in IN^*, & 1 \leq 1 \leq m \\ para\ todo\ k \in IN^*, & 1 \leq k \leq p \end{cases}$ $Multiplicaçao \qquad C = A.B = \left[\sum_{j}^{n} a_{ij}\,.\,b_{jk}\right]_{mxp}$

EXERCÍCIO 1

Sejam as matrizes $A = \begin{pmatrix} 4 & 6 \\ 0 & -3 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}_{3x2}$ e $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}_{2x2}$. Efetue o produto

$$A.B;\ A\ vezes\ B\ ,\ \ e\ mostre\ a\ \ ordem\ da\ matriz\ resultado.$$

BIBLIOGRAFIA

AREF ANTAR NETO

VOLUME: 4

2.3 – MULTIPLICAÇÃO DE MATRIZES

Requisito para a existência do produto de matrizes

Para que o produto de duas matrizes exista, exige-se que os fatores que são multiplicados sejam **conformáveis para a multiplicação**; isto significa que o primeiro fator deve possuir tantas colunas quantas são as linhas do segundo fator.

Assim, se A é uma matriz de ordem $m \times n$ e B é uma matriz de ordem $p \times k$, o produto $A \cdot B$ só existe se $n = p$. Se $n \neq p$, a multiplicação de A por B não pode ser efetuada, isto é, o produto $A \cdot B$ não existe.

Definição

Sejam as matrizes $A = [a_{ij}]_{m \times n}$ e $B = [b_{jk}]_{n \times p}$, conformáveis para a multiplicação.

O **produto de A por B**, notado com $A \cdot B$, é a matriz de ordem $m \times p$, $C = [c_{ik}]_{m \times p}$, para a qual o elemento c_{ik}, que se encontra em sua i-ésima linha e em sua k-ésima coluna, é obtido multiplicando-se os elementos da i-ésima **linha** de A pelos "correspondentes" elementos da k-ésima **coluna** de B e somando-se os "produtos parciais" assim obtidos:

$$c_{ik} = a_{i1} \cdot b_{1k} + a_{i2} b_{2k} + a_{i3} b_{3k} + \ldots + a_{in} \cdot b_{nk} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} b_{jk}$$

Exemplos

1º)

$$\underset{\text{matriz A}}{\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{bmatrix}} \cdot \underset{\text{matriz B}}{\begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \\ b_{31} & b_{32} \\ b_{41} & b_{42} \end{bmatrix}} = \underset{\text{matriz A} \cdot \text{B}}{\begin{bmatrix} * & * \\ * & * \\ * & c_{32} \end{bmatrix}}$$

3×4 — são conformáveis — 4×2 — 3×2

$$c_{32} = a_{31} \cdot b_{12} + a_{32} \cdot b_{22} + a_{33} \cdot b_{32} + a_{34} \cdot b_{42} = \sum_{j=1}^{4} a_{3j} b_{j2}$$

Observe que, para obtermos o elemento c_{32} da matriz produto, multiplicamos os elementos da 3ª linha de A pelos "correspondentes" elementos da 2ª coluna de B, somando-se, então, os produtos assim obtidos.

2º) Sejam $A = \begin{bmatrix} 3 & 4 & 2 \\ 3 & 9 & 1 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 4 & 1 & 5 \\ 3 & 0 & 1 \end{bmatrix}$; então:

$$A \cdot B = \underset{2 \times 3}{\begin{bmatrix} 3 & 4 & 2 \\ 3 & 9 & 1 \end{bmatrix}} \cdot \underset{3 \times 3}{\begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 4 & 1 & 5 \\ 3 & 0 & 1 \end{bmatrix}} = \underset{2 \times 3}{\begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \end{bmatrix}}$$

$c_{11} = 3 \cdot 1 + 4 \cdot 4 + 2 \cdot 3 = 25$ $\quad c_{12} = 3 \cdot 2 + 4 \cdot 1 + 2 \cdot 0 = 10$ $\quad c_{13} = 3 \cdot 4 + 4 \cdot 5 + 2 \cdot 1 = 34$

$c_{21} = 3 \cdot 1 + 9 \cdot 4 + 1 \cdot 3 = 42$ $\quad c_{12} = 3 \cdot 2 + 9 \cdot 1 + 1 \cdot 0 = 15$ $\quad c_{23} = 3 \cdot 4 + 9 \cdot 5 + 1 \cdot 1 = 58$

$$A \cdot B = \begin{bmatrix} 25 & 10 & 34 \\ 42 & 15 & 58 \end{bmatrix}$$

3º) $\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (a_{11} \cdot b_{11} + a_{12} \cdot b_{21}) & (a_{11} \cdot b_{12} + a_{12} \cdot b_{22}) \\ (a_{21} \cdot b_{11} + a_{22} \cdot b_{21}) & (a_{21} \cdot b_{12} + a_{22} \cdot b_{22}) \end{bmatrix} =$

$$= \begin{bmatrix} \sum\limits_{j=1}^{2} a_{1j}b_{j1} & \sum\limits_{j=1}^{2} a_{1j}b_{j2} \\ \sum\limits_{j=1}^{2} a_{2j}b_{j1} & \sum\limits_{j=1}^{2} a_{2j}b_{j2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum\limits_{j=1}^{2} a_{ij}b_{jk} \end{bmatrix}_{2 \times 2}$$

4º) Sejam $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$; então:

$$A \cdot B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \cdot 0 + 1 \cdot 1 & 1 \cdot 0 + 1 \cdot 1 \\ 0 \cdot 0 + 1 \cdot 1 & 0 \cdot 0 + 1 \cdot 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$B \cdot A = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \cdot 1 + 0 \cdot 0 & 0 \cdot 1 + 0 \cdot 1 \\ 1 \cdot 1 + 1 \cdot 0 & 1 \cdot 1 + 1 \cdot 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

Observe que $A \cdot B \neq B \cdot A$, isto é, a multiplicação de matrizes *não é uma operação comutativa.*

5º) Sejam $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix}$ e $C = [-2 \quad 1]$

Calculemos $(A \cdot B) \cdot C$

$$A \cdot B = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \cdot 1 + 1 \cdot 3 + (-1) \cdot 2 \\ 0 \cdot 1 + (-1) \cdot 3 + 2 \cdot 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$(A \cdot B) \cdot C = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix} \cdot [-2 \quad 1] = \begin{bmatrix} 3 \cdot (-2) & 3 \cdot 1 \\ 1 \cdot (-2) & 1 \cdot 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -6 & 3 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$$

Agora, calculemos $A \cdot (B \cdot C)$

$$B \cdot C = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix} [-2 \quad 1] = \begin{bmatrix} 1 \cdot (-2) & 1 \cdot 1 \\ 3 \cdot (-2) & 3 \cdot 1 \\ 2 \cdot (-2) & 2 \cdot 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ -6 & 3 \\ -4 & 2 \end{bmatrix}$$

$$A \cdot (B \cdot C) = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ -6 & 3 \\ -4 & 2 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 2 \cdot (-2) + 1 \cdot (-6) + (-1) \cdot (-4) & 2 \cdot 1 + 1 \cdot 3 + (-1) \cdot 2 \\ 0 \cdot (-2) + (-1) \cdot (-6) + 2 \cdot (-4) & 0 \cdot 1 + (-1) \cdot 3 + 2 \cdot 2 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} -6 & 3 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$$

Observe que $(A \cdot B) \cdot C = A \cdot (B \cdot C)$

6º) Sejam $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ e a **matriz identidade** $I_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$; então:

$$A \cdot I_2 = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a \cdot 1 + b \cdot 0 & a \cdot 0 + b \cdot 1 \\ c \cdot 1 + d \cdot 0 & c \cdot 0 + d \cdot 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = A$$

$$I_2 \cdot A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \cdot a + 0 \cdot c & 1 \cdot b + 0 \cdot d \\ 0 \cdot a + 1 \cdot c & 0 \cdot b + 1 \cdot d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = A$$

Observe que $A \cdot I_2 = I_2 \cdot A = A$

7º) Sejam $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ e a **matriz nula** $O_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$; então:

$$A \cdot O_2 = O_2 \cdot A = O_2$$

Formalizando, então, a definição discutida acima:

DEFINIÇÃO

Sejam as matrizes $A = [a_{ij}]_{m \times n}$ e $B = [b_{jk}]_{n \times p}$.

A matriz $C = A \cdot B$ é tal que:

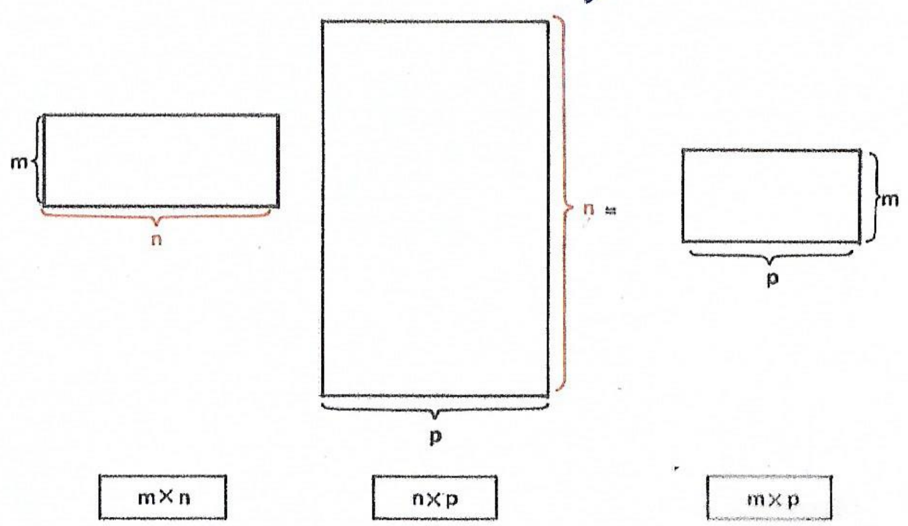
$$C = [c_{ik}]_{m \times p} \text{ onde } c_{ik} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \cdot b_{jk} \quad \begin{cases} \text{para todo } i, 1 \leqslant i \leqslant m \\ \text{para todo } k, 1 \leqslant k \leqslant p \end{cases}$$

$$A \cdot B = \left[\sum_{j=1}^{n} a_{ij} b_{jk} \right]_{m \times p}$$

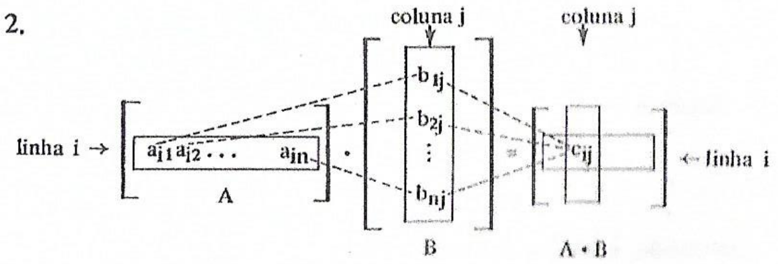
Um resumo para memorizar

1. $\underset{m \times n}{A} \cdot \underset{n \times p}{B} = \underset{m \times p}{C}$

conformáveis



2.



Exercícios Propostos

2.21) As matrizes A, B, C e D são de ordem 2×3, 3×4, 1×3 e 2×1, respectivamente. Dê a ordem de cada matriz abaixo:

a) $A \cdot B$ b) $C \cdot B$ c) $D \cdot (C \cdot B)$

2.22) Sejam $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 1 & 4 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} -2 & 5 \\ 4 & -3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$; determine $A \cdot B$.

2.23) Para as matrizes $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 4 & -6 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}$, determine $A \cdot B$.

2.24) Se $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$ e $C = \begin{bmatrix} -2 & 7 \\ 5 & -1 \end{bmatrix}$ verifique que $A \cdot B = A \cdot C$.

2.25) a) Se $A = \begin{bmatrix} -2 & 3 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & -1 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & -1 \\ -1 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$, calcule $A \cdot B$ e $B \cdot A$.

b) Se $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 4 & 0 & 2 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 2 & -1 & -2 \\ 4 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$, determine $A \cdot B$ e $B \cdot A$.

2.26) Se $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$, determine a matriz X tal que: $A \cdot X = I_2$.

Propriedades da multiplicação de matrizes

1ª) A multiplicação de matrizes *não é comutativa.*

Sejam as matrizes A e B. Se o produto $A \cdot B$ existe, o produto $B \cdot A$ pode não existir. Por exemplo, se A é de ordem 5×2 e B é de ordem 2×3, existe $A \cdot B$, mas não existe $B \cdot A$ (por quê?).

Mas, atenção! mesmo que existam $A \cdot B$ e $B \cdot A$, pode-se ter $A \cdot B \neq B \cdot A$ (veja o 4º exemplo, acima).

Então, para duas matrizes A e B quaisquer, é **falso** que necessariamente:

$$A \cdot B = B \cdot A$$

Quando as matrizes A e B são tais que $A \cdot B = B \cdot A$, diz-se que A e B **comutam.**

EXERCÍCIO 2

$$\text{Efetue a multiplicação } A.X = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}_{3x3} . \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}_{3x1} =$$

EXERCÍCIO 3

$$\text{Efetue } A_{3x3}.I_3 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 4 & -3 & 5 \\ 3 & 2 & -6 \end{pmatrix}_{3x3} . \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}_{3x3} = A\ vezes\ I_n,\ \ de\ ordem\ conformavéis\ =?$$

EXERCÍCIO 4

Fazer a resenha crítica da definição de matriz retangular e do texto em PDF sobre matriz retangular.

Fazer a resenha crítica da definição da multiplicação de Matriz vezes Matriz.

Fazer a resenha crítica da definição de retas concorrentes.

Fazer a resenha crítica do Postulado determinação da reta.

Fazer a resenha crítica do Postulado dos infinitos pontos na reta.

MATRIZ INVERSA

EXEMPLO

$$\text{Seja a matriz quadrada } A_{2x2} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}_{2x2}.$$

Considerando a matriz $A_{2x2} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}_{2x2}$, determine uma matriz B, tal que a equação $A.B = B.A = I_2$

Efetuando,

Supondo que

$$B = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}_{2x2}, \text{ e encontremos os valores de } a,\ b,\ c,\ d$$

Teremos, multiplicando,

$$A.B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}_{2x2} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}_{2x2} = \begin{pmatrix} a+c & b+d \\ a+2c & b+2d \end{pmatrix}_{2x2} = I_2$$

$$A.B = I_n \implies produto\ e\ igualdade\ de\ matrizes \implies sistema\ linear$$

$$\begin{pmatrix} a+c & b+d \\ a+2c & b+2d \end{pmatrix}_{2x2} = I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}_{2x2}$$

Sistema do primeiro grau,

$$\begin{cases} a+c &= 1 \\ a+2c &= 0 \end{cases} \implies a = 2\ , \quad c = -1$$

$$\begin{cases} b+d &= 0 \\ b+2d &= 1 \end{cases} \implies \quad b = -1\ , \quad d = 1$$

Logo, $B = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}_{2x2} = \begin{pmatrix} a=2 & b=-1 \\ c=-1 & d=1 \end{pmatrix}_{2x2} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}_{2x2} = A^{-1}$

A matriz B é a única matriz inversa da matriz A, tais que, $A.B = A.A^{-1} = I_2$.

$A.B = A.A^{-1} = I_2$, isto é, uma matriz que se for multiplicada por A, em qualquer ordem, vai resultar a matriz unidade, identidade. Sempre que isto ocorrer para uma matriz quadrada A, diremos que A é invertível, isto é:

Matriz INVERSA

Uma matriz quadrada A, de ordem n, é invertível se, e somente se, existir uma matriz B, tal que, $A.B = B.A = I_n$.

A matriz 'B', quando existe, é chamada matriz INVERSA de A e a representaremos por $B = A^{-1}$. Então:

MATRIZ INVERSA

$$A.A^{-1} = A^{-1}.A = I_n$$

Convém notar que, sendo A e I_n matrizes do tipo $nxn,$ $quadrada,$ a matriz C , se existir, é também do tipo

$$nxn.$$

Se Não INVETÍVEL

$$Se\ \ nao\ existe\ \ A^{-1}, \qquad entao\ \ a\ matriz\ \ A\ \text{é}\ nao\ invert\acute{\imath}vel.$$

EXERCÍCIO 1

Seja a matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}_{2x2}$. Determine A^{-1} , se existir.

EXERCÍCIO 2

Determine, se existir, a inversa da $W = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 7 & 6 \end{bmatrix}_{2x2}$.

- Se a matriz tiver inversa, ela é invertível
- Se a matriz não tiver inversa, ela é singular

EXERCÍCIO 3

Fazer a resenha crítica da proposição acima de matriz inversa, .

Aulas no youtuber:

1. MULTIPLICAÇAO: https://www.youtube.com/watch?v=eCmv6v53V88 - acesso em 31/08/2020
2. MATRIZ INVERSA: https://www.youtube.com/watch?v=wfDoPGfo2fE - acesso em 31/08/2020

O Texto acima, é a Última parte de matriz.

O próximo conteúdo será a Definição de DETERMINANTE, a Definição de Cofator, o Teorema de Sarrus, e o Teorema de Lapalce.

BIBLIOGRAFIA –

IEZZI, volume 2

AREF ANTAR NETO. Volume 4

Prof. FRANÇA
S. PAULO, 31/08/2020