Nome: Igor Domingos da Silva Mozetic RA: 11202320802

Matemática Discreta II - Lista 02

• Problema 01 (1 ponto). Verifique se há algum erro na demonstração abaixo para o seguinte problema: Prove que:

$$\sum_{i=1}^{N} i = 1+2+3+\dots+N = \frac{N(N+1)}{2}$$ para todo inteiro não-negativo N.

Obs. Em (1), se $N=0$ então $\sum_{i=1}^{N} i=0$ e se $N=1$ então $\sum_{i=1}^{N} i=1$.

Na demonstração trazida na lista, o conjunto C foi definido como:

$$C = \{ N \in \mathbb{N} \mid 1+2+3+\dots+N \neq \frac{N(N+1)}{2} \}$$

Porém, no enunciado, é solicitado para que seja provado para todo inteiro não-negativo n.

Logo, o erro está no conjunto C ter apenas os números naturais.

A demonstração, apesar de bem detalhada, apresenta falhas, pois se o menor contraexemplo de C fosse $c=0$, o conjunto estaria com o número 0 de fora, pois o conjunto C foi definido como sendo números naturais, e $0 \notin \mathbb{N}$.

Problema 02 (1 ponto cada item). Prove que:

(a) $2+4+6+\ldots+2N = N(N+1)$

A prova é por indução em N. Devemos provar que a expressão: "$2+4+6+\ldots+2N$" pode ser escrita como "$N(N+1)$" para qualquer inteiro $N \geq 1$.

Base: Para $N=1$, temos: $2\cdot 1 = 2$ para o lado esquerdo da igualdade. Para o lado direito, temos: $1(1+1) = 2$. Logo o base está verificado.

Passo de indução: Assuma que a expressão é válida para $N=K \geq 1$, isto é: $2+4+6+\ldots+2K = K(K+1)$. A partir disso, precisamos mostrar que: $2+4+6+\ldots+2K+2(K+1) = (K+1)(K+1+1)$.

Para $N=K$: $2+4+6+\ldots+2K = K(K+1)$

Para $N=K+1$: $2+4+6+\ldots+2K+2(K+1) = (K+1)(K+1+1)$.

Como assumimos que para $N=K$ o resultado da expressão é dado por: $K(K+1)$, substituiremos na equação de $N=K+1$:

$$\underbrace{2+4+6+\ldots+2K}+2(K+1) = (K+1)(K+1+1)$$
$$K(K+1)+2(K+1) = (K+1)(K+2)$$
$$K^2+K+2K+2 = K^2+2K+1K+2$$
$$K^2+3K+2 = K^2+3K+2$$

Logo, a expressão $2+4+6+\ldots+2N$ pode ser escrita pela expressão $N(N+1)$.

Q.E.D

b) $1+4+7+\ldots+(3n-2) = \dfrac{n(3n-1)}{2}$.

A prova é por indução. Devemos provar que a expressão: "$1+4+7+\ldots+(3n-2)$" pode ser escrita como: "$(n(3n-1))/2$" para qualquer inteiro $n \geq 1$

Base: Para $n=1$, temos: $(3\cdot 1-2)=1$ para o lado esquerdo da igualdade. Para o lado direito, temos: $\dfrac{1(3\cdot 1-1)}{2} = \dfrac{2}{2} = 1$.

Logo, o base está verificado.

Passo de indução: Assuma que a expressão é válida para $n=k \geq 1$ isto é: $1+4+7+\ldots+(3k-2) = \dfrac{k(3k-1)}{2}$. A partir disso, precisamos mostrar que: $1+4+7+\ldots+(3k-2)+(3(k+1)-2) = \dfrac{(k+1)(3(k+1)-1)}{2}$.

Para $n=k$: $1+4+7+\ldots+(3k-2) = \dfrac{k(3k-1)}{2}$

Para $n=k+1$: $1+4+7+\ldots+(3k-2)+(3(k+1)-2) = \dfrac{(k+1)(3(k+1)-1)}{2}$.

Como assumimos que para $n=k$ o resultado da expressão é dado por: $\dfrac{k(3k-1)}{2}$, substituiremos na equação de $n=k+1$.

$$\underbrace{1+4+7+\ldots+(3k-2)}+(3(k+1)-2) = \frac{(k+1)(3(k+1)-1)}{2}$$

$$\frac{k(3k-1)}{2}+(3k+1) = \frac{(k+1)(3k+2)}{2}$$

$$\frac{k(3k-1)+2(3k+1)}{2} = \frac{(k+1)(3k+2)}{2}$$

$$\frac{3k^2-k+6k+2}{2} = \frac{3k^2+2k+3k+2}{2}$$

$$\frac{3k^2+5k+2}{2} = \frac{3k^2+5k+2}{2}$$

Logo, a expressão: $1+4+7+\ldots+(3n-2)$ pode ser escrita pela expressão: $\dfrac{n(3n-1)}{2}$.

Q.E.D

c) $\frac{1}{1\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 5}+\frac{1}{5\cdot 7}+\ldots+\frac{1}{(2N-1)(2N+1)}=\frac{N}{2N+1}$.

A prova é por indução em N. Devemos provar que a expressão: "$\frac{1}{1\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 5}+\frac{1}{5\cdot 7}+\ldots+\frac{1}{(2N-1)(2N+1)}$", pode ser escrita como: "$\frac{N}{2N+1}$" para qualquer inteiro $N\geqslant 1$.

Base: Para $N=1$, temos $\frac{1}{1\cdot 3}=\frac{1}{3}$ para o lado esquerdo da equação. Para o lado direito, temos que: $\frac{1}{2\cdot 1+1}=\frac{1}{3}$. Logo, o base está verificado.

Passo de indução: Assuma que a expressão é válida para $N=K\geqslant 1$, isto é: $\frac{1}{(1\cdot 3)}+\frac{1}{(3\cdot 5)}+\frac{1}{(5\cdot 7)}+\ldots+\frac{1}{(2K-1)(2K+1)}=\frac{K}{2K+1}$. A partir disso, precisamos mostrar que: $\frac{1}{(1\cdot 3)}+\frac{1}{(3\cdot 5)}+\frac{1}{(5\cdot 7)}+\ldots+\frac{1}{(2K-1)(2K+1)}+\frac{1}{(2(K+1)-1)(2(K+1)+1)}=\frac{K+1}{2(K+1)+1}$.

Para $N=K$:

$$\frac{1}{1\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 5}+\frac{1}{5\cdot 7}+\ldots+\frac{1}{(2K-1)(2K+1)}=\frac{K}{2K+1}$$

Para $N=K+1$

$$\frac{1}{1\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 5}+\frac{1}{5\cdot 7}+\ldots+\frac{1}{(2K-1)(2K+1)}+\frac{1}{(2K+1)(2K+3)}=\frac{K+1}{2K+3}$$

Como assumimos que para $N=K$ o resultado é $K/(2K+1)$, substituiremos em $N=K+1$.

$$\underbrace{\frac{1}{1\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 5}+\frac{1}{5\cdot 7}+\ldots+\frac{1}{(2K-1)(2K+1)}}+\frac{1}{(2K+1)(2K+3)}=\frac{K+1}{2K+3}$$

$$\frac{K}{2K+1}+\frac{1}{(2K+1)(2K+3)}=\frac{(K+1)}{2K+3}\Rightarrow\frac{1}{(2K+1)}\cdot\left(K+\frac{1}{(2K+3)}\right)=\frac{(K+1)}{2K+3}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\frac{1}{(2K+1)}\cdot\left(\frac{K(2K+3)+1}{(2K+3)}\right)=\frac{(K+1)}{2K+3}\Rightarrow\frac{1}{(2K+1)}\cdot\left(\frac{2K^2+3K+1}{(2K+3)}\right)=\frac{K+1}{2K+3}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\frac{1}{\cancel{(2K+1)}}\cdot\frac{\cancel{(2K+1)}(K+1)}{(2K+3)}=\frac{K+1}{2K+3}\Rightarrow\frac{(K+1)}{(2K+3)}=\frac{K+1}{2K+3}.$$

Logo, a expressão: $\frac{1}{1\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 5}+\frac{1}{5\cdot 7}+\ldots+\frac{1}{(2N-1)(2N+1)}$ pode ser escrita como: $\frac{N}{2N+1}$

Q.E.D

d) $1^2+2^2+3^2+\ldots+N^2 = \dfrac{N(N+1)(2N+1)}{6}$

A prova é por indução em N. Devemos provar que a expressão: "$1^2+2^2+3^2+\ldots+N^2$" pode ser escrita como: "$\dfrac{N(N+1)(2N+1)}{6}$" para qualquer inteiro $N \geq 1$.

Base: Para $N=1$, temos: $1^2=1$ para o lado esquerdo da igualdade. Para o lado direito, temos: $\dfrac{1(1+1)(2\cdot1+1)}{6} = \dfrac{2\cdot3}{6} = \dfrac{6}{6} = 1$. Logo a base está verificada.

Passo de indução: Assuma que a expressão é válida para $N=K \geq 1$, isto é: $1^2+2^2+3^2+\ldots+K^2 = \dfrac{K(K+1)(2K+1)}{6}$. E mostrar que: $1^2+2^2+3^2+\ldots+K^2+(K+1)^2 = \dfrac{(K+1)(K+2)(2K+3)}{6}$

Para N=K:	Para N=K+1:
$1^2+2^2+3^2+\ldots+K^2 = \dfrac{K(K+1)(2K+1)}{6}$	$1^2+2^2+3^2+\ldots+K^2+(K+1)^2 = \dfrac{(K+1)(K+2)(2K+3)}{6}$

Como assumimos para N=K o resultado da expressão é $\dfrac{K(K+1)(2K+1)}{6}$, substituiremos na equação N=K+1.

$$\underbrace{1^2+2^2+3^2+\ldots+K^2}+(K+1)^2 = \frac{(K+1)(K+2)(2K+3)}{6}$$

$$\frac{K(K+1)(2K+1)}{6} + (K+1)^2 = \frac{(K+1)(K+2)(2K+3)}{6}$$

$$\frac{K(K+1)(2K+1)+6(K+1)^2}{6} = \frac{(K+1)(K+2)(2K+3)}{6}$$

$$\frac{(K+1)[K(2K+1)+6(K+1)]}{6} = \frac{(K+1)(K+2)(2K+3)}{6}$$

→ Realizando divisão de polinomios, temos que:

$$\begin{array}{l|l} 2K^2+7K+6 & K+2 \\ \hline 0+3K+6 & 2K+3 \\ \quad 0\ 0 & \end{array}$$

Ou seja: $(K+2)(2K+3)$ é outra maneira de $(2K^2+7K+6)$

$$\frac{(K+1)[2K^2+K+6K+6]}{6} = \frac{(K+1)(K+2)(2K+3)}{6} \Rightarrow \frac{(K+1)(2K^2+7K+6)}{6} = \frac{(K+1)(K+2)(2K+3)}{6}$$

$$\Rightarrow \frac{(K+1)(K+2)(2K+3)}{6} = \frac{(K+1)(K+2)(2K+3)}{6}$$

Logo, a expressão $1^2+2^2+3^2+\ldots+N^2$ pode ser escrita pela expressão: $\dfrac{N(N+1)(2N+1)}{6}$.

Q.E.D.

Problema 03 (1 ponto) Prove que: se $x \in \mathbb{R}_{\geq 0}$, então $(1+x)^N \geq 1+x^N$

A prova é por indução. Devemos provar que a expressão: "$(1+x)^N \geq 1+x^N$" é válida para qualquer $N \geq 1$ e $x \geq 0$.

Base: Para $N=1$, temos: $(1+x)^1 \geq (1+x^1) \Rightarrow 1+x \geq 1+x$. Logo, base verificado.
Passo de indução: Assuma que a expressão é válida para $N=K \geq 1$, isto é: $(1+x)^K \geq (1+x^K)$.
A partir disso, precisamos mostrar que: $(1+x)^{K+1} \geq (1+x^{K+1})$.

Para $N=K$: $(1+x)^K \geq (1+x^K)$ | Para $N=K+1$: $(1+x)^{K+1} \geq (1+x^{K+1})$.

Como assumimos que para $N=K$ a inequação é válida, a partir dela iremos chegar na inequação de $N=K+1$. Portanto, para $(1+x)^K$ se tornar $(1+x)^{K+1}$ é necessário multiplicar por $(1+x)^1$. Para isso, ambos lados da inequação devem ser multiplicados, e, logo, chegaremos em:

$$(1+x)^K \cdot (1+x)^1 \geq (1+x^K)(1+x)^1$$
$$(1+x)^{K+1} \geq 1+x+x^K+x^{K+1}$$

Após desenvolvermos a inequação, notamos no lado direito, dois novos termos. Sabendo que $x \in \mathbb{R}_{\geq 0}$, podemos afirmar que $x+x^K \geq 0$, pois $K \geq 1$.

A partir disso, podemos afirmar que:

$$1+x+x^K+x^{K+1} \geq 1+x^{K+1}$$

Logo, juntando as inequações com os termos semelhantes, obtém-se que:

$$(1+x)^{K+1} \geq 1+x+x^K+x^{K+1} \geq 1+x^{K+1}$$

Portanto, a inequação $(1+x)^N \geq (1+x^N)$ para $N \geq 1$ e $x \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ é válida.

Q.E.D

/ /

Problema 04 (1 ponto). Seja A_N a área de um quadrado de lado 2^N, onde $N \in \mathbb{Z}_{>0}$. Mostre que o resto da divisão de A_N por 3 é igual a 1. para qualquer $N \in \mathbb{Z}_{>0}$.

A prova é por indução em N. Devemos provar que a divisão de A_N (área de um quadrado de lado 2^N) por três tem resto 01, para $N \in \mathbb{Z}_{>0}$

Base: Para $N=1$ temos $A_N = (2^1)^2 = 4$ e $3|4$ tem resto 1. Logo, base verificada.
Passo de indução: Assuma que a expressão é válida para $N=K \geq 1$, isto é: $3|A_K$ tem resto 1. E mostrar que $3|A_{K+1}$ também tem resto 1

Para $N=K$: $3|A_K \Rightarrow 3|(2^K)^2 \Rightarrow 3|4^K$ tem resto 1.
Para $N=K+1$: $3|A_{K+1} \Rightarrow 3|(2^{K+1})^2 \Rightarrow 3|4^{K+1} \Rightarrow 3|4^K \cdot 4^1$ tem resto 1.

De acordo com a hipótese e o caso base, temos que tanto 4^K quanto 4^1, quando divididos por 3, ficam com resto 1. Logo, com essa informação, podemos reescrever o valor da A_{K+1} com sendo:

$A_{K+1} = 4^{K+1} = 4^K \cdot 4^1 = (3 \cdot K_1 + 1)(3 \cdot K_2 + 1)$, sendo $K_1, K_2 \in \mathbb{Z}_{>0}$.

A partir desse novo método de escrever a equação, temos números na mesa base do divisor, mais o número 1, implicando na soma e justamente no número 1 que sobra da divisão. Logo, desenvolvendo a equação, temos que:

$A_{K+1} = (3K_1 + 1)(3K_2 + 1) = 9K_1K_2 + 3K_1 + 3K_2 + 1.$

Agrupando os três primeiros itens e colocando números 3 em evidência:

$A_{K+1} = 9K_1K_2 + 3K_1 + 3K_2 + 1 = 3(3K_1K_2 + K_1 + K_2) + 1.$

Como $K_1, K_2 \in \mathbb{Z}_{>0}$, então: "$3K_1K_2 + K_1 + K_2$" $= K_3 \in \mathbb{Z}_{>0}$

Portanto, $A_{K+1} = 3K_3 + 1$, ou seja, quando é divido por 3, tem o resto 1.

Q.E.D.

/ /

Problema 05 (1 ponto). Prove que $4 \mid 3^{2n-1}+1$ para todo inteiro $n \geq 1$.

A prova é por indução em n. Devemos provar que a expressão: "$3^{2n-1}+1$" é divisível por 4 para todo inteiro $n \geq 1$.

Base: Para $n=1$, temos: $4 \mid 3^{2\cdot 1-1}+1 = 4 \mid 3^1+1 = 4 \mid 4$. Logo, base verificada.
Passo de indução: Assuma que a expressão é válida para $n=k \geq 1$, isto é: "$3^{2k-1}+1$" é divisível por 4. E mostrar que: $3^{2(k+1)-1}+1$ também é.

Para $n=k$: $4 \mid 3^{2k-1}+1$ | Para $n=k+1$: $4 \mid 3^{2(k+1)-1}+1 = 4 \mid 3^{2k+2-1}+1$

Ao analisar a expressão de $n=k+1$, podemos reescrevê-la como: $4 \mid 3^2 \cdot 3^{2k-1}+1$.
Com isso, sepamos os termos, e agora temos 1 termo independente, e o outro termo existindo na equação de $n=k$, logo, ao reorganizar as equações, temos:

$4 \mid 3^{2k+2-1} = 4 \mid 3^2 \cdot 3^{2k-1}+1$, e como, assumimos que $3^{2k-1}+1$ é divisivel por 4, podemos reescrever $3^{2k-1}+1 = 4 \cdot k_1$, sendo $k_1 \geq 1$.

A partir disso, se isolarmos $3^{2k-1}+1$ na equação acima, podemos substituí-lo na equação de $n=k \geq 1$. Logo: $3^{2k-1}+1 = 4k_1 \Rightarrow 3^{2k-1} = 4k_1 - 1$.

Substituindo na equação de $n=k \geq 1$, temos: $4 \mid 3^2 \cdot 3^{2k-1}+1 = 4 \mid 3^2(4k_1-1)+1$.

Desenvolvendo, temos que: $4 \mid 3^2(4k_1-1)+1 = 4 \mid 9(4k_1-1)+1 = 4 \mid 36k_1-9+1 =$
$= 4 \mid 36k_1 - 8$.

Como 36 e -8 são multiplos de 4, podemos colocá-lo em evidência.
Assim, obtemos: $4 \mid 36k_1 - 8 = 4 \mid 4(9k_1-2)$.

Como $k_1 \geq 1$, então é possível afirmar que $(9k_1-2) \in \mathbb{Z}_{>0}$.

Portanto, a expressão 3^{2n-1} para todo inteiro $n \geq 1$ é válida.

Q.E.D.

spiral

•Problema 06 (1 ponto). Mostre que $4^N + 15N + (-1)$ é multiplo de 9 p/ todo inteiro $N \geq 1$

A prova é por indução em N. Devemos provar que a expressão: "$4^N + 15N - 1$" é multiplo de 9 para todo inteiro $N \geq 1$.

Base: Para $N=1$, temos: $4^1 + 15 \cdot 1 - 1 = 4 + 14 = 18$. E $9 | 18$, Logo, o base está verificado.

Passo de indução: Assuma que a expressão é válida para $N = K \geq 1$, isto é: "$4^K + 15K - 1$" é multiplo de 9. E mostrar que: "$4^{K+1} + 15(K+1) - 1$" também é multiplo de 9.

Para $N=K$: $9 | 4^K + 15K - 1$ / Para $N=K+1$: $9 | 4^{K+1} + 15(K+1) - 1$.

Partindo de $N=K$, devemos chegar em $N=K+1$. Para demonstração:

Assumindo a hipótese da indução, temos: $4^K + 15K - 1 = 9q$, $q \in \mathbb{Z}$

Para chegarmos em 4^{K+1}, multiplicaremos por 4: $4(4^K + 15K - 1) = 36q$.
Logo, temos: $4^{K+1} + 60K - 4 = 36q$.

Para chegarmos em $15K+1$, somaremos $3 - 45K$ a equação. Logo, temos:
$4^{K+1} + 60K - 4 + 3 - 45K = 36q + 3 - 45K \Rightarrow 4^{K+1} + 15K - 1 = 36q + 3 - 45K$

Agora, para chegarmos em $15(K+1)$, somaremos 15 a equação. Logo, temos:
$4^{K+1} + 15K + 15 - 1 = 36q + 3 + 15 - 45K \Rightarrow 4^{K+1} + 15(K+1) - 1 = 36q + 18 - 45K$

Percebe-se que o lado direito da igualdade tem todos os membros sendo multiplo de 9, logo: $4^{K+1} + 15(K+1) - 1 = 9(4q + 2 - 5K)$.

Como sabemos que $q \in \mathbb{Z}$ e $K \in \mathbb{Z}$, logo: $4q + 2 - 5K \in \mathbb{Z}$. Então:
$4^{K+1} + 15(K+1) - 1 = 9q'$, $q' \in \mathbb{Z}$.

Q.E.D.

Portanto, a expressão $4^N + 15N - 1$ é multiplo de 9

Problema 07 (1 ponto). Para $n \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$, defina recursivamente a função $u(n)$ por:

$$u(1) = 1,\ u(2) = 5,\ u(n+1) = u(n) + 2u(n-1) \text{ p/ } n \in \mathbb{Z}_{\geq 2}$$

Prove, usando o segundo princípio da indução matemática, que $u(n) = 2^n + (-1)^n$.

A prova é por indução em n. Devemos provar que a expressão: $u(n) = 2^n + (-1)^n$ é válida para todo $n \in \mathbb{Z}_{\geq 2}$ através do segundo princípio da indução matemática.

Base: Para $n=1$: $u(1) = 2^1 + (-1)^1 \Rightarrow u(1) = 1$; Para $n=2$: $u(2) = 2^2 + (-1)^2 \Rightarrow u(2) = 5$.
Logo, o base está verificado.
Passo de indução: Assuma que a expressão é válida para $2 \leq n \leq k$, isto é:
provar que $u(k+1) = 2^{k+1} + (-1)^{k+1}$.

Ao analisarmos a expressão $u(k+1) = u(k) + 2u(k-1)$, sabe-se que tanto para $k \geq 2$, quanto para $k-1 \geq 1$, ambos são válidos pela hipótese indutiva, sendo, respectivamente: $u(k) = 2^k + (-1)^k$ e $u(k-1) = 2^{k-1} + (-1)^{k-1}$.

Assim, reescrevendo a expressão, temos que:

$$u(k+1) = u(k) + 2u(k-1) = 2^k + (-1)^k + 2(2^{k-1} + (-1)^{k-1}) =$$
$$= 2^k + (-1)^k + 2^1 \cdot 2^{k-1} + 2 \cdot (-1)^{k-1} = 2^k + (-1)^k + 2^{k-1+1} + 2 \cdot (-1)^{k-1} =$$
$$= 2^k + (-1)^k + 2^k + 2 \cdot (-1)^{k-1} = 2^{k+1} + (-1)^k + 2 \cdot (-1)^{k-1} =$$
$$= 2^{k+1} + (-1)^{k-1} \cdot (-1) + 2 \cdot (-1)^{k-1} = 2^{k+1} + (2-1)(-1)^{k-1} =$$
$$= 2^{k+1} + (-1)^{k-1}.$$

Com isso, é possível observar que, $(-1)^{k-1}$ pode ser reescrito como:

$$(-1)^{k+1} = -1 \cdot (-1)^k = -1 \cdot -1 \cdot (-1)^{k-1} = (-1)^{k-1}.$$

Ao substituir, temos que: $u(k+1) = 2^{k+1} + (-1)^{k-1} = 2^{k+1} + (-1)^{k+1}$.

Portanto, a expressão $u(k) = 2^k + (-1)^k$ para todo $k \in \mathbb{Z}_{\geq 2}$ é válida.

Q.E.D.