/ /

Nome: Igor Domingos da Silva Mozetic RA: 11202320802

Matemática Discreta II - Lista 01.

• Problema 01 (2 pontos para cada item). Prove as seguintes declarações:

a) Se x é um número par, então $x^2 - 6x + 5$ é um número ímpar.

A prova é pela direta. Desejamos provar a declaração: Se x é um número par, então $x^2 - 6x + 5$ é um número ímpar.
Com isso, temos como hipótese: "x é um número par" e como tese: "$x^2 - 6x + 5$ é um número ímpar".
Seja x um número par. Então existe um número inteiro K tal que $x = 2K$. Assim:

$$x^2 - 6x + 5 = (2K)^2 - 6(2K) + 5 = 4K^2 - 12K + 5$$

Podemos escrever o 5 sendo 4+1. Logo:

$$4K^2 - 12K + 4 + 1 = 2(2K^2 - 6K + 2) + 1 = 2K_1 + 1$$

Onde $K_1 = 2K^2 - 6K + 2$. Como $K \in \mathbb{Z}$, segue que $K_1 \in \mathbb{Z}$.
Portanto, $x^2 - 6x + 5$ é um número ímpar. ■

b) Sejam $a, b \in \mathbb{R}$. Se $0 < a < b$ então $a^2 < b^2$

A prova é pela direta. Desejamos provar a declaração: Sejam $a, b \in \mathbb{R}$. Se $0 < a < b$ então $a^2 < b^2$.
Com isso, temos como hipótese: "$0 < a < b$" e como tese "$a^2 < b^2$".
Seja $0 < a < b$. Para que tanto a, quanto b, atingirem a forma ao quadrado, é preciso multiplicar por a e b. Então ao multiplicar $0 < a < b$, obtém-se que:
$0 \cdot a < a \cdot a < a \cdot b = 0 < a^2 < ab.$

E, então, ao multiplicar $0 < a < b$ por b, obtém-se que:

$0 \cdot b < a \cdot b < b \cdot b = 0 < ab < b^2$.

Com isso, ao combinar as inequações com os termos semelhantes, obtém-se que:

$$0 < a^2 < ab < b^2$$

Logo $a^2 < b^2$ ∎

c) Sejam $a, b \in \mathbb{R}$. Se $a < b$ então $\frac{(a+b)}{2} < b$.

A prova é pela direta. Desejamos provar a declaração: "Sejam $a, b \in \mathbb{R}$. Se $a < b$ então $\frac{(a+b)}{2} < b$".

Com isso, temos a hipótese: "$a < b$" e como tese: "$\frac{(a+b)}{2} < b$".

Seja $a < b$. Para que o lado esquerdo da inequação atinja a forma prevista na tese, será somado b em ambos os lados. Assim:

$a < b = a + b < b + b = a + b < 2b$.

E, então, para que ambos os lados da inequação assumam a forma prevista na tese, serão divididos por 2:

$a + b < 2b = \frac{(a+b)}{2} < \frac{2b}{2} = \frac{(a+b)}{2} < b$.

Portanto, $\frac{(a+b)}{2} < b$. ∎

d) Seja $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Se $\dfrac{\sqrt[3]{x}+5}{x^2+6} = \dfrac{1}{x}$ então $x \neq 8$

A prova é pela contradição. Desejamos provar a declaração: "Seja $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Se $\dfrac{\sqrt[3]{x}+5}{x^2+6} = \dfrac{1}{x}$ então não $x \neq 8$".

Ou seja, desejamos provar que: "Se $\dfrac{\sqrt[3]{x}+5}{x^2+6} = \dfrac{1}{x}$ então $x = 8$".

Suponha que $x = 8$. Então, substituindo na equação:

$$\frac{\sqrt[3]{x}+5}{x^2+6} = \frac{1}{x} \Rightarrow \frac{\sqrt[3]{8}+5}{8^2+6} = \frac{1}{8} \Rightarrow \frac{2+5}{64+6} = \frac{1}{8} \Rightarrow \frac{1}{10} = \frac{1}{8}$$

Ao aplicar a substituição, foi concluído um resultado absurdo, onde $\dfrac{1}{10} = \dfrac{1}{8}$. Isso faz com que a declaração seja válida.

Portanto se $\dfrac{\sqrt[3]{x}+5}{x^2+6} = \dfrac{1}{x}$ então $x \neq 8$. ■

e) Suponha que A, B e C são conjuntos com $A \cap C \subseteq B$ e $x \in C$. Então $x \notin A \setminus B$.

A prova é pela contradição. Desejamos provar a declaração: "Para $A \cap C \subseteq B$ e $x \in C$. Então $x \in A \setminus B$".
Suponha que $A \cap C \subseteq B$ e $x \in C$. Então $x \in A \setminus B$. Isso fornece que $x \in A$ e $x \notin B$, visto que o operador "$\setminus$" representa tudo aquilo que há no primeiro conjunto e não exista no segundo conjunto.
Com isso, como $x \in A$ e $x \in C$, então $x \in A \cap C$.
Ao analisar a hipótese: "$A \cap C \subseteq B$", é possível substituir os termos e chegar em: $x \in B$, implicando em uma contradição com a tese: "Então $x \in A \setminus B$".

Portanto, se $A \cap C \subseteq B$ então $x \notin A \setminus B$. ■