1 Problema

O problema a seguir é o *Codeforces 632C*, do *Educational Codeforces Round 9*. Disponível em `https://codeforces.com/problemset/problem/632/C`.

Problema 1. *You're given a list of n strings $a_1, a_2, \ldots, a_n$. You'd like to concatenate them together in some order such that the resulting string would be lexicographically smallest.*

Given the list of strings, output the lexicographically smallest concatenation.

Input
The first line contains integer n — the number of strings $1 \leq n \leq 5 \cdot 10^4$.

Each of the next n lines contains one string ai ($1 \leq |a_i| \leq 50$) consisting of only lowercase English letters. The sum of string lengths will not exceed $5 \cdot 10^4$.

Output
Print the only string a — the lexicographically smallest string concatenation.

Solução. Primeiro, precisamos definir uma relação de ordem importante. Seja Ω^* o alfabeto de palavras finitas contendo apenas as 26 letras minúsculas do alfabeto latino (exceto a palavra vazia), e denote por $\oplus : (\Omega^*)^2 \to \Omega^*$ como a operação de concatenação.

Lema 1.1. *A relação $\prec$ definida em Ω^* por*

$$a \prec b \iff a \oplus b <_L b \oplus a$$

(em que $<_L$ é a ordem lexicográfica tradicional) é uma relação de ordem estrita em Ω^*.

Prova da Afirmação. Interprete uma string em Ω^* como um número em base-26, isto é, dada a função única função monótona (com relação à ordem lexicográfica) $\eta : \{'a', \ldots, 'z'\} \to \{0, \ldots, 25\}$ podemos construir a (única) bijeção monótona (isomorfismo de ordem) $f : \Omega \to \mathbb{N}$ dada recursivamente por

$$f(\alpha) = \eta(\alpha) \text{ se } \alpha \in \{'a', \ldots, 'z'\}$$
$$f(\alpha \oplus \beta) = 26 f(\alpha) + \eta(\beta) \text{ para todo } \beta \in \{'a', \ldots, 'z'\}$$

Então para todos $\alpha, \beta \in \Omega^*$, vale $f(\alpha \oplus \beta) = 26^{|\beta|} f(\alpha) + f(\beta)$. Portanto:

$$\begin{aligned}
\alpha \prec \beta &\iff \alpha \oplus \beta <_L \beta \oplus \alpha \\
&\iff 26^{|\beta|} f(\alpha) + f(\beta) < 26^{|\alpha|} f(\beta) + f(\alpha) \\
&\iff \frac{f(\alpha)}{26^{|\alpha|} - 1} < \frac{f(\beta)}{26^{|\beta|} - 1}
\end{aligned}$$

Isso já mostra trivialmente a assimetria de $\prec$. Por fim, podemos agora provar a transitividade de $\prec$: suponha que $\alpha \prec \beta$ e $\beta \prec \gamma$: então $\frac{f(\alpha)}{26^{|\alpha|-1}} < \frac{f(\beta)}{26^{|\beta|-1}}$ e $\frac{f(\beta)}{26^{|\beta|-1}} < \frac{f(\gamma)}{26^{|\gamma|-1}}$, e segue que

$$\frac{f(\alpha)}{26^{|\alpha|} - 1} < \frac{f(\gamma)}{26^{|\gamma|} - 1}$$

pela transitivade da ordem em $\mathbb{Q}$. Logo $\alpha \prec \gamma$, e $\prec$ é transitiva. Podemos concluir que $\prec$ é ordem estrita em Ω^*. □

Defina agora $\preceq$ como a extensão de $\prec$ para o caso da igualdade: $\alpha \preceq \beta \iff \alpha \prec \beta$ ou $\alpha = \beta$. Temos então a afirmação principal desse problema:

Teorema 1.1. *(Afirmação principal) Sejam $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \Omega^*$. Seja τ uma permutação tal que $\alpha_{\tau(1)} \preceq \alpha_{\tau(2)} \preceq \ldots \preceq \alpha_{\tau(n)}$. Então a menor (lexicograficamente) soma (concatenação) dessas n palavras, dentre todas as ordens possíveis, é aquela feita respeitando a ordem $\preceq$:*

$$\min_{\sigma} \bigoplus_{1 \leq i \leq n} \alpha_{\sigma(i)} = \bigoplus_{1 \leq i \leq n} \alpha_{\tau(i)}$$

Lema 1.2. *Sejam $b, b' \in \Omega^*$. Então $b <_L b'$ implica que para todas as palavras $a, c \in \Omega^* \cup \{\epsilon\}$ (em que ϵ é a palavra vazia)*

$$a \oplus b \oplus c <_L a \oplus b' \oplus c$$

Prova do teorema principal. Suponha que o valor mínimo ocorre para uma permutação $\sigma \neq \tau$. Seja i o maior índice tal que $\sigma(j) = \tau(j)$ para todo $1 \leq j \leq i$. Como $\sigma \neq \tau$ temos $i \neq n$, e também $i \neq n - 1$, pois se duas permutações de n elementos coincidem em $n - 1$ pontos, coincidem também no último.

Assim, segue imediatamente que pela definição de i que $\tau^{-1}(\sigma(i+1)) > i+1$ (se fosse igual a $i+1$, teríamos uma subsequência ainda maior de posições coincidentes entre as permutações). Logo, pela ordenação gerada por τ, concluímos que $\alpha_{\sigma(i+1)} \geq_L \tau(i+2)$. O mesmo vale para todas as outras posições maiores que i, com exceção da pré-imagem de $\tau(i+1)$ por σ, a qual, é claro, é maior ou igual a $i+2$.

Seja $j = \sigma^{-1}(\tau(i+1))$. Então

$$\alpha_{\sigma(k)} \succeq (\alpha_{\sigma(j)} = \alpha_{\tau(i+1)}) \implies \alpha_{\sigma(k)} \oplus \alpha_{\tau(i+1)} \geq_L \alpha_{\tau(i+1)} \oplus \alpha_{\sigma(k)}$$

para todo $i < k < j$. Porém pelo Lema 1.2 isso implica na seguinte sequência de desigualdades:

$$\begin{aligned}
\left(\bigoplus_{1\leq k\leq n} \alpha_{\sigma(k)}\right) &= \left(\bigoplus_{1\leq k\leq j-2} \alpha_{\sigma(k)}\right) \oplus (\alpha_{\sigma(j-1)} \oplus \alpha_{\tau(i+1)}) \oplus \left(\bigoplus_{j+1\leq k\leq n} \alpha_{\sigma(k)}\right) \\
&\geq_L \left(\bigoplus_{1\leq k\leq j-2} \alpha_{\sigma(k)}\right) \oplus (\alpha_{\tau(i+1)} \oplus \alpha_{\sigma(j-1)}) \oplus \left(\bigoplus_{j+1\leq k\leq n} \alpha_{\sigma(k)}\right) \\
&\geq_L \cdots \\
&\geq_L \left(\bigoplus_{1\leq k\leq i} \alpha_{\sigma(k)}\right) \oplus (\alpha_{\tau(i+1)} \oplus \alpha_{\sigma(i+1)} \oplus \alpha_{\sigma(i+2)} \oplus \ldots \oplus \oplus\alpha_{\sigma(j-1)}) \oplus \left(\bigoplus_{j+1\leq k\leq n} \alpha_{\sigma(k)}\right) \\
&\overset{\text{usando a definição de } i}{=} \left(\bigoplus_{1\leq k\leq i+1} \alpha_{\tau(k)}\right) \oplus \left(\bigoplus_{i+1\leq k\leq n,\ k\neq j} \alpha_{\sigma(k)}\right)
\end{aligned}$$

e portanto após o deslocamento de $\alpha_{\tau(i+1)}$ para seu devido lugar, a $i+1$-ésima posição, obtemos uma nova permutação σ' que coincide com τ nas $i+1$ primeiras posições, em vez de apenas nas i primeiras, e que produz uma concatenação lexicograficamente menor ou igual àquela de σ.

Logo, é evidente que repetindo esse processo $n-i$ vezes obteremos a permutação τ, e uma sequência decrescente (lexicograficamente) de somas (concatenações). Como a permutação σ foi **arbitrária** temos que para toda permutação σ

$$\bigoplus_{1\leq i\leq n} \alpha_{\sigma(i)} \geq_L \bigoplus_{1\leq i\leq n} \alpha_{\tau(i)}$$

e portanto

$$\bigoplus_{1\leq i\leq n} \alpha_{\tau(i)} = \min_{\sigma} \bigoplus_{1\leq i\leq n} \alpha_{\sigma(i)}$$

como queríamos demonstrar. □

□