

1 Enunciado

O problema é o **1703F**, do contest 806 (Div4), da plataforma CodeForces, disponível em <https://codeforces.com/contest/1703/problem/F>

2 Solução (em C++)

```
1 #include <bits/stdc++.h>
2 using namespace std;
3
4 template <typename T>
5 void ps(T a[], int n){
6     for (int i = 1; i < n; i++){
7         a[i] += a[i-1];
8     }
9 }
10
11 void solve(){
12     int n;
13     cin >> n;
14     int a[n+1]; // to solve 1-indexing we prepend 0 to the array
15     a[0] = 0;
16     for (int i = 1; i < n + 1; i++) cin >> a[i];
17
18     vector<int> s;
19     for (int i = 0; i < n + 1; i++){
20         if (a[i] < i) s.emplace_back(i);
21     } // guaranteed 0 not in s
22
23     /*calculating #(s intersection [0, a[j])) fast with prefix sums*/
24     long long b[n + 1] = {0}; // avoid OVERFLOW
25     for (int i : s) ++b[i];
26     ps(b, n + 1);
27     // then #(s \cap [0, a[j])) = b[a[j] - 1]
28
29     long long ans = 0; // avoid OVERFLOW
30     for (int i : s){
31         if (a[i] > 0){
32             ans += b[a[i] - 1];
33         }
34         // else if a[i] == 0 then there is no j in S with j < a[i]
35     }
36     cout << ans << '\n';
37 }
```

3 Demonstração

Defina por S o conjunto de índices $S = \{i : a[i] < i\}$. Então temos que (i, j) é um par válido, isto é, que satisfaz $a[i] < i < a[j] < j$, se e só se $i \in S, j \in S$ e $i < a[j]$.

Portanto, para cada $j \in S$ temos que existem exatamente $|\{i \in S : i < a[j]\}| = |S \cap \{1, \dots, a[j] - 1\}|$ pares válidos de índices em que o maior índice é j . Segue que a resposta final é

$$\text{ans} = \sum_{j \in S} |S \cap \{1, \dots, a[j] - 1\}|$$

Considere a função característica $f_S : \{1, \dots, n\} \rightarrow \{0, 1\}$ dada por $f_S^{-1}(0) = \{1, \dots, n\} \setminus S$ e $f_S^{-1}(1) = S$. Assim, temos que

$$|S \cap \{1, \dots, a[j] - 1\}| = \sum_{1 \leq i < a[j]} f_S(i)$$

que é exatamente $\text{prefix_sum}(b)[a[j] - 1]$ se $a[j] > 1$, ou do contrário 0 (devido à soma vazia), em que b é o vetor característico de S . Denotemos essa função definida por partes por σ_b .

Portanto, podemos computar b em $O(n)$, podemos realizar a prefix_sum desse vetor também em $O(n)$, e por fim, com todas essas informações, a resposta final

$$\text{ans} = \sum_{j \in S} |S \cap \{1 \dots, a[j] - 1\}| = \sum_{1 \leq j \leq n} b[j] \sigma_b(a[j] - 1)$$

pode ser computada em $O(n)$.

Assim, mostra-se que essa é uma solução correta e com complexidade linear $O(n)$.