

# 1 Enunciado

O problema é o **1703F**, do contest 806 (Div4), da plataforma CodeForces, disponível em <https://codeforces.com/contest/1703/problem/F>

## 2 Solução (em C++)

## 3 Demonstração

Defina por  $S$  o conjunto de índices  $S = \{i : a[i] < i\}$ . Então temos que  $(i, j)$  é um par válido, isto é, que satisfaz  $a[i] < i < a[j] < j$ , se e só se  $i \in S, j \in S$  e  $i < a[j]$ .

Portanto, para cada  $j \in S$  temos que existem exatamente  $|\{i \in S : i < a[j]\}| = |S \cap \{1, \dots, a[j] - 1\}|$  pares válidos de índices em que o maior índice é  $j$ . Segue que a resposta final é

$$\text{ans} = \sum_{j \in S} |S \cap \{1, \dots, a[j] - 1\}|$$

Considere a função característica  $f_S : \{1, \dots, n\} \rightarrow \{0, 1\}$  dada por  $f_S^{-1}(0) = \{1, \dots, n\} \setminus S$  e  $f_S^{-1}(1) = S$ . Assim, temos que

$$|S \cap \{1, \dots, a[j] - 1\}| = \sum_{1 \leq i < a[j]} f_S(i)$$

que é exatamente  $\text{prefix\_sum}(b)[a[j] - 1]$  se  $a[j] > 1$ , ou do contrário 0 (devido à soma vazia), em que  $b$  é o vetor característico de  $S$ . Denotemos essa função definida por partes por  $\sigma_b$ .

Portanto, podemos computar  $b$  em  $O(n)$ , podemos realizar a  $\text{prefix\_sum}$  desse vetor também em  $O(n)$ , e por fim, com todas essas informações, a resposta final

$$\text{ans} = \sum_{j \in S} |S \cap \{1, \dots, a[j] - 1\}| = \sum_{1 \leq j \leq n} b[j] \sigma_b(a[j] - 1)$$

pode ser computada em  $O(n)$ .

Assim, mostra-se que essa é uma solução correta e com complexidade linear  $O(n)$ .