Análise real

Igor Prado Teixeira Borja

Capítulo 1

Derivadas

Definição 1. *Dada $X \subseteq \mathbb{R}$, X' (conjunto de pts de acumulação) é definido por*

$$X' = \{x \in \mathbb{R} \mid x \text{ é ponto de acumulação de } X\}$$

.

Definimos que x é ponto de acumulação se e só se $\forall \epsilon > 0, B_\epsilon(x) \cap X \setminus \{x\} \neq \emptyset$.

Lema 1. *Dado $x \in X'$, existe uma sequência (x_n) dois a dois disjuntos em $X \setminus \{x\}$ tal que $\lim x_n = x$.*

Demonstração. Tome $x_n \in B_{1/n}(x) \cap X \setminus \{x\}$, que existe pois $x \in X'$. Então $\lim x_n = x$. Como $x_n \in X \setminus \{x\}$, temos $x_n \in X$ e $x_n \neq x$ para todo $n \in \mathbb{N}$. □

Definição 2. *Dada $f : X \to \mathbb{R}$ e $a \in X \cap X'$, dizemos que f é diferenciável em a se existe o limite:*

$$L = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

Isso é igual a, pondo $h = x - a$:

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(a + h) - f(a)}{h}$$

Lema 2. *Se f é diferenciável em a, então definindo $r(h) := f(a+h) - [f(a) + f'(a)h]$, temos que $r(h)$ tende a 0 mais rápido que h, ou seja:*

$$\lim_{h \to 0} \frac{r(h)}{h} = 0$$

Onde $r(h)$ representa o resto da aproximação pela função afim $f(a) + f'(a)h$.

Teorema 1. *Se f é diferenciável em a, então f é contínua em a.*

Demonstração. Observe que $f(a + h) = f(a) + f'(a)h + r(h)$ implica que $\lim_{h \to 0} f(a + h) = f(a)$. Logo f é contínua em a. □

Observação. *Note que a derivada é única pela unicidade do limite. O resto representa o erro absoluto da aproximação pela função afim para um dado h.*

Teorema 2 (Regra da Cadeia)**.** *Sejam $f : X \to Y$ e $g : Y \to \mathbb{R}$ com $f(X) \subseteq Y$. Seja $a \in X \cap X'$ e $b = f(a)$. Se existem $f'(a)$ e $g'(b)$, então $g \circ f$ é diferenciável em a e:*

$$(g \circ f)'(a) = g'(b) \cdot f'(a) = g'(f(a)) \cdot f'(a)$$

Observação. *Você pode tentar argumentar que:*

$$\lim_{h \to 0} \frac{(g \circ f)(a + h) - (g \circ f)(a)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{g(f(a + h)) - g(f(a))}{f(a + h) - f(a)} \cdot \frac{f(a + h) - f(a)}{h}$$

Porém, nada garante que $f(a + h) - f(a) \neq 0$, o que quebra o argumento!

Demonstração. Pelo Lema 2, temos $f(a + h) = f(a) + f'(a)h + \rho(h)h$ com $\lim_{h \to 0} \rho(h) = 0$ e $g(b + k) = g(b) + g'(b)k + \sigma(k)k$ com $\lim_{k \to 0} \sigma(k) = 0$. Logo:

$$(g \circ f)(a + h) = g(f(a) + f'(a)h + \rho(h)h)$$

$$= g(b) + g'(b)[f'(a)h + \rho(h)h] + \sigma(f'(a)h + \rho(h)h)[f'(a)h + \rho(h)h]$$

$$\frac{(g \circ f)(a+h) - (g \circ f)(a)}{h} = g'(b)[f'(a) + \rho(h)] + \sigma(f'(a)h + \rho(h)h)[f'(a) + \rho(h)]$$

Observe que pela continuidade de σ, $\lim_{h \to 0} \sigma(f'(a)h + \rho(h)h) = \sigma(0) = 0$. Logo:

$$(g \circ f)'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{(g \circ f)(a+h) - (g \circ f)(a)}{h} = g'(b)f'(a) = g'(f(a)) \cdot f'(a)$$

Note que definimos $\rho(h) := \frac{r_f(h)}{h}$ se $h \neq 0$ e $\sigma(k) := \begin{cases} \frac{r_g(k)}{k} & k \neq 0 \\ 0 & k = 0 \end{cases}$ em que r é o resto da derivada de g relativa a b. $\square$

Teorema 3. *Seja $f : X \to Y$ função com inversa $g = f^{-1}$, com f diferenciável em $a \in X \cap X'$ e g contínua em $b = f(a)$. Então g é diferenciável em b se e somente se $f'(a) \neq 0$, caso no qual $g'(b) = \frac{1}{f'(a)}$.*

Demonstração. ($\Rightarrow$) (Se g é diferenciável $\Rightarrow f'(a) \neq 0$): Pela regra da cadeia, como g é diferenciável em $f(a)$, temos $\mathrm{id} = (g \circ f)(x) \implies 1 = (g \circ f)'(a) = g'(b)f'(a) \Rightarrow f'(a) \neq 0$.

($\Leftarrow$) ($f'(a) \neq 0 \Rightarrow g$ é diferenciável em b): Temos que:

$$\lim_{y \to b} \frac{g(y) - g(b)}{y - b} = \lim_{y \to f(a)} \frac{g(y) - a}{y - f(a)}$$

Fazendo $y = f(x)$, pela continuidade de g, quando $y \to b$, temos $x = g(y) \to g(b) = a$. Assim:

$$\lim_{y \to b} \frac{g(y) - a}{y - f(a)} = \lim_{x \to a} \frac{x - a}{f(x) - f(a)} = \frac{1}{\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}} = \frac{1}{f'(a)}$$

A penúltima igualdade vale pela continuidade de g. Logo $g'(b)$ existe e $g'(b) = \frac{1}{f'(a)}$. $\square$

Definição 3. *Dada um intervalo $I \subseteq \mathbb{R}$, definimos:*

$$C^0(I) = \{f : I \to \mathbb{R}, f \text{ é contínua}\}$$

$$C^{m+1}(I) = \{f : I \to \mathbb{R}, f \text{ é diferenciável e } f' \in C^m(I)\}$$

$$C^\infty(I) = \{f : I \to \mathbb{R}, f \text{ é diferenciável e } f' \in C^\infty(I)\}$$

Obtemos que $C^\infty(I) \subsetneq \cdots \subsetneq C^{m+1}(I) \subsetneq C^m(I) \subsetneq \cdots \subsetneq C^0(I)$.

Derivadas Laterais

Definição 4. *Dada uma função $f : X \to \mathbb{R}$ e $a \in X \cap X'_+$, definimos a derivada pela direita por:*

$$f'_+(a) = \lim_{x \to a^+} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

Se $a \in X \cap X'_-$, definimos a derivada pela esquerda por:

$$f'_-(a) = \lim_{x \to a^-} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

Exemplo. $f(x) = \begin{cases} 1 & x > 0 \\ 0 & x \leq 0 \end{cases}$. *$f'(0)$ não existe, pois o limite lateral diverge para $+\infty$.*

Exercício 1. *Dada $f : X \to \mathbb{R}$ e $a \in X \cap X'_+ \cap X'_-$, mostre que f possui derivada em a se e somente se existem ambas as derivadas laterais em a, e elas são iguais ($f'_+(a) = f'_-(a)$). Nesse caso, a derivada é igual às derivadas laterais.*

Exemplo. $f(x) = \begin{cases} x^2 \sin(1/x) + x/2 & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$. *$f$ é diferenciável em todo ponto, porém f' é descontínua em 0. Assim, embora $f'(0) = 1/2 > 0$, não podemos afirmar que f é crescente em uma vizinhança de 0.*

Teorema 4. *Seja $f : X \to \mathbb{R}$ tal que existe $f'_+(a)$, em que $a \in X \cap X'_+$. Se $f'_+(a) > 0$, então existe $\delta > 0$ tal que se $x \in (a, a + \delta)$, então $f(a) < f(x)$. O mesmo vale para a derivada pela esquerda $f'_-(a) > 0$. Observe que isso não significa que f é crescente localmente, em $(a, a + \delta)$.*

Demonstração. Seja $L = \lim_{x\to a^+} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} > 0$. Tome $\epsilon > 0$ tal que $L - \epsilon > 0$ (por exemplo $\epsilon = L/2$). Logo existe $\delta > 0$ tal que $x \in (a, a+\delta)$ implica que $\frac{f(x)-f(a)}{x-a} \in (L-\epsilon, L+\epsilon)$. Em particular, $\frac{f(x)-f(a)}{x-a} > L-\epsilon > 0$. Como $x > a$, então segue que $f(x) - f(a) > 0$, ou seja, $f(x) > f(a)$. □

Corolário 1. *Se f é derivável em a e $f'(a) > 0$, então existe $\delta > 0$ tal que se $x \in (a-\delta, a)$, então $f(x) < f(a)$ e se $y \in (a, a + \delta)$, então $f(a) < f(y)$. Se $f'(a) < 0$, o comportamento é análogo com sinal trocado.*

Demonstração. Como $f'(a) > 0$, então tanto $f'_+(a) > 0$ quanto $f'_-(a) > 0$, o que pelo Teorema 5 significa que existem $\delta_1, \delta_2 > 0$ tais que $x \in (a, a+\delta_1) \implies f(a) < f(x)$ e $x \in (a-\delta_2, a) \implies f(x) < f(a)$. Tomamos então $\delta = \min(\delta_1, \delta_2)$. □

Em resumo, para δ suficientemente pequena:

- $f'(a) > 0 \Rightarrow f(a - \delta) < f(a)$
- $f'(a) > 0 \Rightarrow f(a) < f(a + \delta)$
- $f'(a) < 0 \Rightarrow f(a - \delta) > f(a)$
- $f'(a) < 0 \Rightarrow f(a) > f(a + \delta)$

Teorema 5. *Se $f : X \to \mathbb{R}$ é derivável em $a \in int(X)$ (ponto interior) e a é ponto de mínimo local ou de máximo local, então $f'(a) = 0$.*

Demonstração. Como a derivada existe, temos 3 casos: $f'(a) > 0$, $f'(a) < 0$ ou $f'(a) = 0$. Observe que:

1. Se $f'(a) > 0$, então pelo Teorema 5 existe $\delta > 0$ tal que $(a-\delta, a) \subseteq X$ e $x \in (a-\delta, a) \implies f(x) < f(a)$ e $x \in (a, a + \delta) \implies f(a) < f(x)$. Logo a não é nem mínimo nem máximo local.

2. Se $f'(a) < 0$, então pelo Teorema 5 existe $\delta > 0$ tal que $(a-\delta, a) \subseteq X$ e $x \in (a-\delta, a) \implies f(x) > f(a)$ e $x \in (a, a + \delta) \implies f(a) > f(x)$. Logo a não é mínimo nem máximo local.

Por tanto, necessariamente $f'(a) = 0$. □

Observação. *Note que a recíproca* **não é verdadeira***: podemos ter $f'(a) = 0$ em pontos que não são min/max locais, como por exemplo pontos de sela. Exemplo: $a = 0$ em $f(x) = x^3$. Além disso, pode ocorrer de a ser mínimo/máximo local e a derivada não existir, como em $a = 0$ em $f(x) = |x|$.*

Funções deriváveis em um intervalo

Para as provas que seguem, relembre do seguinte (de Weierstrass):

Teorema 6 (Weierstrass)**.** *Se $f : K \to \mathbb{R}$ é contínua em $K \subset \mathbb{R}$ um compacto, então f é limitada e atinge seu mínimo e máximo global. Ou seja, existem $x_1, x_2 \in K$ com $f(x_1) \leq f(x) \leq f(x_2)$.*

Demonstração. Mostremos que a imagem de um compacto por uma função contínua é um compacto. De fato, seja $f(K) \subseteq \bigcup_{\lambda \in L} A_\lambda$ uma cobertura de $f(K)$ por abertos. Como é uma cobertura da imagem, para todo $x \in K$ podemos escolher um índice $\omega(x) \in L$ tal que $f(x) \in A_{\omega(x)}$, criando assim uma função de "seleção"dos índices.

Como f é contínua, se $f(x) \in A_{\omega(x)}$, existe um intervalo (ou bola) $I_{\omega(x)}$ contendo x tal que $f(I_{\omega(x)} \cap K) \subseteq A_{\omega(x)}$. Assim, a coleção $\{I_{\omega(x)}\}_{x \in K}$ forma uma cobertura aberta de K. Como K é compacto, temos uma subcobertura finita $\{I_{\omega(x_i)}\}_{i=1}^n$, de forma que:

$$K \subseteq \bigcup_{i=1}^n I_{\omega(x_i)} \implies f(K) = f\left(\bigcup_{i=1}^n (I_{\omega(x_i)} \cap K)\right) = \bigcup_{i=1}^n f(I_{\omega(x_i)} \cap K) \subseteq \bigcup_{i=1}^n A_{\omega(x_i)}$$

Dessa forma, obtemos uma subcobertura finita de $f(K)$ a partir de uma cobertura por abertos arbitrária $(A_\lambda)_{\lambda \in L}$. Logo, $f(K)$ é um conjunto compacto.

Sendo $f(K) \subset \mathbb{R}$ um compacto, ele é fechado e limitado. Como $f(K)$ é limitado, existem o supremo $M = \sup f(K)$ e o ínfimo $m = \inf f(K)$. Pelo fato de $f(K)$ ser fechado, temos que $\sup f(K) \in f(K)$ e $\inf f(K) \in f(K)$. Portanto, existem $x_1, x_2 \in K$ tais que $f(x_1) = \inf f(K)$ e $f(x_2) = \sup f(K)$, o que prova que a função atinge seu mínimo e máximo globais. ☐

Teorema 7 (Darboux - TVI para derivadas)**.** *Seja $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ derivável em todo $[a, b]$. Se $f'(a) < d < f'(b)$, então existe $c \in (a, b)$ tal que $f'(c) = d$.*

Demonstração. Se $d = 0$, então pelo Teorema de Weierstrass f atinge seu mínimo (ou máximo) em algum ponto $x^* \in [a, b]$. Porém, como $f'(a) < 0$, existe δ_1 tal que $x \in (a, a + \delta_1) \implies f(x) < f(a)$. Como $f'(b) > 0$, existe δ_2 tal que $x \in (b - \delta_2, b) \implies f(x) < f(b)$. Logo a e b não são mínimos locais, portanto $x^* \in (a, b)$. Pelo Teorema 6, $f'(x^*) = 0 = d$. Se $d \neq 0$, aplique o caso anterior para $g(x) = f(x) - dx$. ☐

Teorema 8 (Rolle)**.** *Seja $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ contínua em $[a, b]$ e derivável em (a, b) tal que $f(a) = f(b)$. Então existe $c \in (a, b)$ tal que $f'(c) = 0$.*

Demonstração. Seja $y = f(a) = f(b)$. Se f for constante no intervalo, então $f' = 0$ em (a, b). Caso contrário, como f é contínua, pelo Teorema de Weierstrass ela atinge um máximo M e um mínimo m. Pelo menos um desses valores deve ser diferente de y, ocorrendo em algum $c \in (a, b)$. Pelo Teorema 6, $f'(c) = 0$. ☐

Teorema 9 (TVM - Teorema do Valor Médio de Lagrange)**.** *Se $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ é contínua em $[a,b]$ e derivável em (a,b), então existe $c \in (a,b)$ tal que:*

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

Demonstração. Considere $g(x) = f(x) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}x$. g é contínua em $[a,b]$, derivável em (a,b) e $g(a) = g(b) = \frac{f(a)b-f(b)a}{b-a}$. Pelo Teorema de Rolle, existe $c \in (a,b)$ tal que $g'(c) = 0$. Como $g'(x) = f'(x) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$, então $f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$. □

Corolário 2. *Se uma função possui derivada nula em todos os pontos de um intervalo, então f é constante nesse intervalo.*

Demonstração. Tome $x, y \in [a,b]$ com $x < y$. Pelo TVM, existe $c \in (x,y)$ tal que $\frac{f(y)-f(x)}{y-x} = f'(c)$. Como $f'(c) = 0$, temos $f(y) - f(x) = 0 \Rightarrow f(x) = f(y)$. Logo f é constante. □

Corolário 3. *Se $f, g : (a,b) \to \mathbb{R}$ são deriváveis e $f' = g'$ em todo ponto, então existe uma constante c tal que $g(x) = f(x) + c$.*

Teorema 10 (Monotonicidade e Inversa)**.** *Seja $f : I \to \mathbb{R}$ derivável em um intervalo I.*

1. *$f'(x) \geq 0$ para todo $x \in I$ se e só se f é não-decrescente (e analogamente $f'(x) \leq 0$ para f não-crescente).*

2. *Se $f'(x) > 0$ para todo $x \in I$, então f é estritamente crescente e possui inversa $g : f(I) \to \mathbb{R}$ contínua e derivável no intervalo $f(I)$.*

Demonstração. 1) ($\Rightarrow$) Pelo TVM, para $x < y$, existe $z \in (x,y)$ tal que $\frac{f(y)-f(x)}{y-x} = f'(z) \geq 0$, logo $f(x) \leq f(y)$. ($\Leftarrow$) Da definição de derivada, se f é não-decrescente, $\frac{f(x)-f(a)}{x-a} \geq 0$. Tomando o limite, $f'(a) \geq 0$.

2) Se $f'(x) > 0$, f é estritamente crescente e injetiva. Se $f(x) = f(y)$ para $x \neq y$, pelo Teorema de Rolle existiria $z \in (x,y)$ tal que $f'(z) = 0$, uma contradição. A existência e diferenciabilidade da inversa segue do Teorema 3. □

Observação. *Note que a recíproca do item 2 não vale: uma função pode ser estritamente crescente com derivada que se anula em alguns pontos (que não são de extremo). Exemplo: $f(x) = x^3$ em $x = 0$.*

Capítulo 2

Integral de Riemann

Integral de Riemann

Definição 10

Dizemos que uma partição Q é um refinamento de uma partição P de um intervalo $[a, b]$ se $P \subseteq Q$. (Lembre-se da definição de partição na Definição 7).

Teorema 14

Suponha que $[a, b]$ é um intervalo e P uma partição tal que Q refina P (ou seja, $P \subseteq Q$), e $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ é uma função limitada. Então:

- A soma inferior não diminui: $s(f; P) \leq s(f; Q)$
- A soma superior não aumenta: $S(f; P) \geq S(f; Q)$

Demonstração. Provamos por indução no tamanho da diferença $k = |Q \setminus P|$. O caso base em que $|Q \setminus P| = 0$ é trivial, pois ele implica que $Q = P$. Supondo então válida para todo par $\tilde{P} \subseteq \tilde{Q}$ de partições com $|\tilde{Q} \setminus \tilde{P}| = k - 1$.

Tome um $\lambda \in Q \setminus P$ qualquer. Então $R = Q \setminus \{\lambda\}$ é um refinamento de P, porém com $|R \setminus P| = k - 1$, portanto por hipótese indutiva $s(f, P) \leq s(f, R)$ e $S(f, P) \geq S(f, R)$.

Seja $R = \{t_0, t_1, \ldots, t_m\}$ com $a = t_0 < t_1 < \cdots < t_m = b$ e suponha sem perda de generalidade que $t_i < \lambda < t_{i+1}$ com $0 \leq i < m$. (De fato, λ não pode ser uma das extremidades, pois estas são comuns a todas as partições).

Então, pondo $m' = \inf_{x \in [t_i, \lambda]} f(x)$ e $m'' = \inf_{x \in [\lambda, t_{i+1}]} f(x)$, temos:

$$s(f; Q) = \sum_{j=0}^{i-1} m_j(t_{j+1} - t_j) + m'(\lambda - t_i) + m''(t_{i+1} - \lambda) + \sum_{j=i+1}^{m-1} m_j(t_{j+1} - t_j)$$

Observe que, como $[t_i, \lambda] \subseteq [t_i, t_{i+1}]$ e $[\lambda, t_{i+1}] \subseteq [t_i, t_{i+1}]$, temos:

$$m' := \inf_{x \in [t_i, \lambda]} f(x) \geq \inf_{x \in [t_i, t_{i+1}]} f(x) =: m_i$$

$$m'' := \inf_{x \in [\lambda, t_{i+1}]} f(x) \geq \inf_{x \in [t_i, t_{i+1}]} f(x) =: m_i$$

Assim,

$$m'(\lambda - t_i) + m''(t_{i+1} - \lambda) \geq m_i(\lambda - t_i) + m_i(t_{i+1} - \lambda) = m_i(t_{i+1} - t_i)$$

Logo, aplicando na expressão anterior, $s(f; Q) \geq s(f; R)$. Analogamente, pondo $M' = \sup_{x \in [t_i, \lambda]} f(x)$ e $M'' = \sup_{x \in [\lambda, t_{i+1}]} f(x)$, temos que $M' \leq M_i$ e $M'' \leq M_i$, logo $S(f; Q) \leq S(f; R)$.

Desta forma, $s(f; P) \leq s(f; R) \leq s(f; Q)$ e $S(f; P) \geq S(f; R) \geq S(f; Q)$, e está provado o teorema por indução. $\square$

O conjunto de somas inferiores e superiores sempre existe. Além disso, temos o seguinte:

Teorema 15

Seja $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ uma função limitada. Então, para quaisquer partições P e Q de $[a,b]$, sendo $m = \inf_{x\in[a,b]} f(x)$ e $M = \sup_{x\in[a,b]} f(x)$:

$$m(b-a) \leq s(f;P) \leq S(f;Q) \leq M(b-a)$$

Em especial, $\underline{\int_a^b} f(x)dx \leq \overline{\int_a^b} f(x)dx$.

Demonstração. Como $m(b-a) = s(f;P_0)$ com $P_0 = \{a,b\}$ sendo a partição base definida anteriormente, então pelo fato de $P_0 \subseteq P$, temos $m(b-a) \leq s(f;P)$ pelo Teorema 14. Similarmente, $S(f,Q) \leq M(b-a)$.

Ademais, como $P \cup Q$ refina ambos P e Q, então novamente pelo Teorema 14:

$$s(f;P) \leq s(f;P\cup Q) \leq S(f;P\cup Q) \leq S(f;Q)$$

provando a última desigualdade central. Seja então $A = \{s(f;P) : P \in \mathcal{P}\}$ o conjunto de somas inferiores e $B = \{S(f;P) : P \in \mathcal{P}\}$ o conjunto de somas superiores. Como para todos $x \in A, y \in B$ temos $x \leq y$, temos que $\sup A \leq \inf B$, pois qualquer elemento de B é cota superior de A. (Observe que A é limitada superiormente por qualquer $S(f,Q)$ e B é limitada inferiormente por qualquer $s(f,P)$). Assim:

$$\int_{\underline{a}}^{b} f(x)dx = \sup A \leq \inf B = \int_{a}^{\overline{b}} f(x)dx$$

Isso mostra que a definição faz sentido! □

Teorema 16

Sejam $a < c < b$ e $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ limitada. Então:

$$\int_{\underline{a}}^{b} f(x)dx = \int_{\underline{a}}^{c} f(x)dx + \int_{\underline{c}}^{b} f(x)dx$$

$$\int_{a}^{\overline{b}} f(x)dx = \int_{a}^{\overline{c}} f(x)dx + \int_{c}^{\overline{b}} f(x)dx$$

Demonstração. Provamos para a integral inferior. O outro caso é análogo por simetria.

Lema 3. *16.1 Sejam $a < c < b$ e $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ limitada. Então:*

- *Dada uma partição $P \in \mathcal{P}([a,b])$ tal que $c \in P$, existem $A \in \mathcal{P}([a,c])$ e $B \in \mathcal{P}([c,b])$ tais que $P = A \cup B$ e vale também $s(f;P) = s(f;A) + s(f;B)$.*
- *Reciprocamente, se $A \in \mathcal{P}([a,c])$ e $B \in \mathcal{P}([c,b])$, então $A\cup B \in \mathcal{P}([a,b])$ e $s(f;A\cup B) = s(f;A)+s(f;B)$.*

Prova do lema. Seja $P = \{t_0, t_1, \ldots, t_n\}$ com $c = t_i$ para algum i. Então sendo $A = \{t_0, \ldots, t_i\}$ e $B = \{t_i, \ldots, t_n\}$, temos que $A \in \mathcal{P}([a,c])$ e $B \in \mathcal{P}([c,b])$ e:

$$s(f,A) + s(f,B) = \sum_{j=1}^{i} m_j(t_j - t_{j-1}) + \sum_{j=i+1}^{n} m_j(t_j - t_{j-1}) = \sum_{j=1}^{n} m_j(t_j - t_{j-1}) = s(f,P)$$

A recíproca segue a mesma lógica de soma de intervalos contíguos. □

Assim, dado $\epsilon > 0$, por propriedades de supremo existe $P \in \mathcal{P}([a,b])$ tal que $s(f,P) > \int_{\underline{a}}^{b} f - \epsilon/2$. Pelo Teorema 14, $s(f; P \cup \{c\}) \geq s(f;P) > \int_{\underline{a}}^{b} f - \epsilon$.

Pelo Lema 16.1, $P \cup \{c\} = A \cup B$ com A partição de $[a,c]$ e B partição de $[c,b]$. Então:

$$\int_{\underline{a}}^{b} f - \epsilon < s(f; P \cup \{c\}) = s(f,A) + s(f,B) \leq \int_{\underline{a}}^{c} f + \int_{\underline{c}}^{b} f$$

Como vale para todo ϵ, temos $\int_{\underline{a}}^{b} f \leq \int_{\underline{a}}^{c} f + \int_{\underline{c}}^{b} f$.

Por outro lado, dadas partições $A \in \mathcal{P}([a,c])$ e $B \in \mathcal{P}([c,b])$, temos que $A \cup B \in \mathcal{P}([a,b])$, logo:

$$s(f,A) + s(f,B) = s(f, A \cup B) \leq \int_{\underline{a}}^{b} f$$

Tomando o supremo sobre todos A e B:

$$\int_{\underline{a}}^{c} f + \int_{\underline{c}}^{b} f \leq \int_{\underline{a}}^{b} f$$

Juntando as duas desigualdades, conclui-se a igualdade. □

Corolário 16.1

Seja $P = \{t_0, \ldots, t_m\}$ uma partição do intervalo $[a,b]$, e $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ uma função escada, ou seja, uma função constante e igual a α_i em cada um dos intervalos abertos (t_{i-1}, t_i) para todo $1 \leq i \leq m$. Então:

$$\int_{\underline{a}}^{b} f(x)dx = \int_{a}^{\overline{b}} f(x)dx = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i (t_i - t_{i-1})$$

(Nota: Os valores nas extremidades t_i não importam).

Demonstração. Pelo Teorema 16, aplicado repetidamente (ou seja, via indução) temos que

$$\int_{\underline{a}}^{b} f(x)dx = \sum_{i=1}^{m} \int_{\underline{t_{i-1}}}^{t_i} f(x)dx$$

Afirmamos que $\int_{\underline{t_{i-1}}}^{t_i} f(x)dx = \alpha_i(t_i - t_{i-1})$. De fato, para todo ϵ pequeno (por exemplo, $\epsilon < \frac{1}{2}(t_i - t_{i-1})$) temos:

$$\int_{\underline{t_{i-1}}}^{t_i} f(x)dx = \int_{\underline{t_{i-1}}}^{t_{i-1}+\epsilon} f(x)dx + \int_{\underline{t_{i-1}+\epsilon}}^{t_i-\epsilon} f(x)dx + \int_{\underline{t_i-\epsilon}}^{t_i} f(x)dx$$

Observemos que, como $m_i \leq f(x) \leq M_i$ para todo $x \in [t_{i-1}, t_{i-1}+\epsilon]$, então:

$$\min(f(t_{i-1}), \alpha_i) \cdot \epsilon \leq \int_{\underline{t_{i-1}}}^{t_{i-1}+\epsilon} f(x)dx \leq \max(f(t_{i-1}), \alpha_i) \cdot \epsilon$$

E algo análogo vale para a integral de $t_i - \epsilon$ até t_i. Na integral do meio, a função é simplesmente constante e igual a α_i nesse intervalo. Logo:

$$\min(f(t_{i-1}), \alpha_i) \cdot \epsilon + (t_i - t_{i-1} - 2\epsilon)\alpha_i + \min(f(t_i), \alpha_i) \cdot \epsilon \leq \int_{\underline{t_{i-1}}}^{t_i} f(x)dx$$
$$\leq \max(f(t_{i-1}), \alpha_i) \cdot \epsilon + (t_i - t_{i-1} - 2\epsilon)\alpha_i + \max(f(t_i), \alpha_i) \cdot \epsilon$$

Pondo $m = \min(f(t_{i-1}), \alpha_i)$, $M = \max(f(t_{i-1}), \alpha_i)$, $r = \min(f(t_i), \alpha_i)$ e $R = \max(f(t_i), \alpha_i)$, temos:

$$(m + r - 2\alpha_i)\epsilon + \alpha_i(t_i - t_{i-1}) \leq \underline{\int}_{t_{i-1}}^{t_i} f(x)dx \leq (M + R - 2\alpha_i)\epsilon + \alpha_i(t_i - t_{i-1})$$

Como a desigualdade vale para todo $\epsilon > 0$, fazendo $\epsilon \to 0$, pelo teorema do sanduíche (ou pela arbitrariedade do ϵ), obtemos:

$$\underline{\int}_{t_{i-1}}^{t_i} f(x)dx = \alpha_i(t_i - t_{i-1})$$

O mesmo argumento se aplica para a integral superior $\overline{\int}_a^b f(x)dx$, resultando no mesmo valor. □

Linearidade da Integral

Sejam $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ limitadas. Então:

$$\underline{\int}_a^b f(x)dx + \underline{\int}_a^b g(x)dx \leq \underline{\int}_a^b [f(x) + g(x)]dx \leq \overline{\int}_a^b [f(x) + g(x)]dx \leq \overline{\int}_a^b f(x)dx + \overline{\int}_a^b g(x)dx$$

Demonstração.

1. Quando $c < 0$, $\underline{\int}_a^b c \cdot f = c\overline{\int}_a^b f$ e $\overline{\int}_a^b c \cdot f = c \cdot \underline{\int}_a^b f$.
2. Quando $c > 0$, $\underline{\int}_a^b c \cdot f = c\underline{\int}_a^b f$ e $\overline{\int}_a^b c \cdot f = c \cdot \overline{\int}_a^b f$.

Prova de 1) A segunda desigualdade é o Teorema 15 aplicado à $f + g$ e a terceira desigualdade é análoga à primeira.

Para provar a primeira desigualdade, observemos que para qualquer intervalo $[c, d] \subseteq [a, b]$,

$$\inf(f) + \inf(g) \leq \inf(f + g)$$

uma vez que a primeira é uma cota inferior de $f + g$ em $[c, d]$. Assim, para qualquer partição P de $[a, b]$,

$$s(f; P) + s(g; P) \leq s(f + g; P)$$

Para mostrar a desigualdade então observemos que, para toda partição P de $[a, b]$,

$$\underline{\int}_a^b [f(x) + g(x)]dx \geq s(f + g; P) \geq s(f; P) + s(g; P)$$

e portanto

$$\underline{\int}_a^b [f(x) + g(x)]dx = \sup_{P \in \mathcal{P}([a,b])} (s(f; P) + s(g; P)) = \sup_{P \in \mathcal{P}([a,b])} s(f; P) + \sup_{P \in \mathcal{P}([a,b])} s(g; P)$$

$$= \underline{\int}_a^b f(x)dx + \underline{\int}_a^b g(x)dx$$

Prova de 2) Para $c > 0$, observamos que para toda partição P de $[a, b]$ vale

$$s(c \cdot f; P) = c \cdot s(f; P)$$

dessa forma

$$\underline{\int_a^b} cf = \sup\{s(c\cdot f;P) : P \in \mathcal{P}([a,b])\}$$

$$= c\cdot \sup\{s(f;P) : P \in \mathcal{P}([a,b])\} = c\underline{\int_a^b} f$$

Por simetria vale também $\overline{\int_a^b} c\cdot f = c\cdot \overline{\int_a^b} f$.

Para $c < 0$, temos para todo intervalo $[x_{i-1}, x_i] \subseteq [a,b]$ que $\inf(cf) = -c\sup(f)$ e logo $s(cf;P) = cS(f;P)$ para toda partição P de $[a,b]$. Assim, $-c > 0$ e dessa forma:

$$s(c\cdot f;P) = (-c)\cdot(-1)S(f;P) = c\cdot S(f;P)$$

$$\underline{\int_a^b} cf = \sup\{s(c\cdot f;P) : P \in \mathcal{P}([a,b])\} = \sup\{c\cdot S(f;P) : P \in \mathcal{P}([a,b])\}$$
$$= (-c)\cdot\sup\{-S(f;P) : P \in \mathcal{P}([a,b])\} = (-c)\cdot(-1)\inf\{S(f;P) : P \in \mathcal{P}([a,b])\}$$
$$= c\cdot \overline{\int_a^b} f$$

Por simetria vale também $\overline{\int_a^b} c\cdot f = c\underline{\int_a^b} f$. □

Para as demonstrações anteriores utilizamos os seguintes lemas:

Lema 4. *Sejam A, B dois conjuntos limitados superiormente. Então* $\sup(A+B) = \sup(A) + \sup(B)$.

Lema 5. *Seja A um conjunto limitado superiormente e $c > 0$. Então* $\sup(c\cdot A) = c\cdot\sup A$.

Lema 6. *Seja A um conjunto limitado inferiormente. Então $-A$ é limitado superiormente e* $\inf(-A) = -\sup(A)$.

Teorema 18 (Monotonicidade da Integral)

Sejam $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ funções limitadas e $f(x) \le g(x)$ para todo $x \in [a,b]$. Então:

$$\underline{\int_a^b} f \le \underline{\int_a^b} g \quad \text{e} \quad \overline{\int_a^b} f \le \overline{\int_a^b} g$$

Demonstração. Para toda partição P de $[a,b]$, como $f \le g$ em todo ponto, temos:

$$\inf_{x\in[t_{i-1},t_i]} f(x) \le \inf_{x\in[t_{i-1},t_i]} g(x)$$

para todo $1 \le i \le n$ e logo:

$$s(f,P) = \sum_{i=1}^{n} \inf_{x\in[t_{i-1},t_i]} f(x)(t_i - t_{i-1}) \le \sum_{i=1}^{n} \inf_{x\in[t_{i-1},t_i]} g(x)(t_i - t_{i-1}) = s(g,P)$$

Logo $s(f,P) \le s(g,P)$. Consequentemente, como a integral inferior é o supremo das somas inferiores, para toda partição P:

$$\underline{\int_a^b} g(x)dx \ge s(g,P) \ge s(f,P)$$

de onde segue que:
$$\underline{\int_a^b} g(x)dx \geq \sup_P s(f,P) = \underline{\int_a^b} f(x)dx$$
A outra desigualdade, para a integral superior, é análoga. □

Exercício 2. *Para todas as partições P e Q de $[a,b]$ e $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ limitada, vale $s(f;P)\leq S(f;Q)$.*

Corolário 4. *Seja $\mathcal{P}$ o conjunto das partições de $[a,b]$. Seja $\tilde{\mathcal{P}}\subseteq\mathcal{P}$ um subconjunto de partições. Então:*
$$\sup_{P\in\mathcal{P}} s(f,P) = \sup_{P\in\tilde{\mathcal{P}}} s(f,P)$$
$$\inf_{P\in\mathcal{P}} S(f,P) = \inf_{P\in\tilde{\mathcal{P}}} S(f,P)$$

Demonstração. Como $\tilde{\mathcal{P}}\subseteq\mathcal{P}$, então $\{s(f,P):P\in\tilde{\mathcal{P}}\}\subseteq\{s(f,P):P\in\mathcal{P}\}$. Denotando esses conjuntos por $\tilde{A}$ e A respectivamente, temos então $\sup\tilde{A}\leq\sup A$. Suponha que a desigualdade é estrita, e tome $\epsilon=\sup A-\sup\tilde{A}>0$. Por propriedades de supremos, existe $P\in\mathcal{P}$ com $s(f,P)>\sup A-\epsilon=\sup\tilde{A}$. Porém, se tomarmos uma partição $P_0\in\tilde{\mathcal{P}}$, a partição $P\cup P_0$ também pertence a $\tilde{\mathcal{P}}$ (se $\tilde{\mathcal{P}}$ for o conjunto de refinamentos) e $s(f,P\cup P_0)\geq s(f,P)>\sup\tilde{A}$. Contradição! Logo $\sup A=\sup\tilde{A}$. Por simetria, se $B=\{S(f,P):P\in\mathcal{P}\}$ e $\tilde{B}=\{S(f,P):P\in\tilde{\mathcal{P}}\}$, então $\inf B=\inf\tilde{B}$. □

Isso é uma reflexão do seguinte lema (mais geral):

Lema 7. *Sejam $A'\subseteq A$ e $B'\subseteq B$ conjuntos.*

1. *Se A' é limitado inferiormente e para todo $a'\in A'$ existe $a\in A$ com $a\leq a'$ então $\inf A=\inf A'$.*
2. *Se B' é limitado superiormente e para todo $b'\in B'$ existe $b\in B$ com $b\geq b'$ então $\sup B=\sup B'$.*

Definição 5. *Dizemos que uma função $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ limitada é Riemann integrável se*
$$\overline{\int_a^b} f(x)dx = \underline{\int_a^b} f(x)dx.$$
Denotamos esse valor por $\int_a^b f(x)dx$.

Teorema 19

Uma função $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ limitada é Riemann integrável se e somente se para todo $\epsilon>0$ existe partição P de $[a,b]$ tal que $S(f,P)-s(f,P)<\epsilon$.

Demonstração. ($\Rightarrow$) Suponha que f é Riemann integrável. Seja $I=\int_a^b f(x)dx=\overline{\int_a^b} f(x)dx=\underline{\int_a^b} f(x)dx$.

Por propriedades de ínfimo e supremo, dado $\epsilon>0$ existe partição P de $[a,b]$ tal que
$$I-s(f,P)<\epsilon/2$$
e existe partição Q de $[a,b]$ tal que
$$S(f,Q)-I<\epsilon/2.$$

Logo, somando as duas desigualdades temos que $S(f,Q) - s(f,P) < \epsilon$. Considerando a partição $T = P \cup Q$ que refina ambas, temos $s(f,P) \leq s(f,T)$ e $S(f,T) \leq S(f,Q)$, e logo

$$S(f,T) - s(f,T) < \epsilon.$$

($\Leftarrow$) Para todo $\epsilon > 0$, existe P partição de $[a,b]$ tal que $S(f,P) - s(f,P) < \epsilon$.
Como $\overline{\int_a^b} f(x)dx \leq S(f,P)$ e $-\underline{\int_a^b} f(x)dx \leq -s(f,P)$, somando as duas desigualdades obtemos:

$$\overline{\int_a^b} f(x)dx - \underline{\int_a^b} f(x)dx \leq S(f,P) - s(f,P) < \epsilon.$$

Porém, do Teorema 15 sabemos que a diferença é não negativa, e logo para todo $\epsilon > 0$:

$$0 \leq \overline{\int_a^b} f(x)dx - \underline{\int_a^b} f(x)dx < \epsilon.$$

Isto implica que $\overline{\int_a^b} f(x)dx = \underline{\int_a^b} f(x)dx$, o que prova que f é Riemann integrável. $\square$

O caso geral do Teorema 19 é o seguinte:

Teorema 11 (Teorema 19B)**.** *Sejam $A, B \subseteq \mathbb{R}$ não vazios tais que para todo $x \in A$ e $y \in B$, $x \leq y$. Então:*

$$\sup A = \inf B \iff \textit{para todo } \epsilon > 0 \textit{ existe } x \in A, y \in B \textit{ com } y - x < \epsilon.$$

Definição 12

Dada $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ limitada e $A \subseteq [a,b]$, definimos a oscilação de f em A por

$$osc_A(f) = \sup_{x \in A} f(x) - \inf_{x \in A} f(x)$$

Note que

$$S(f,P) - s(f,P) = \sum_{i=1}^{n} osc_{[t_{i-1},t_i]}(f) \cdot \Delta t_i$$

Definição 13

$f : [a,b] \to \mathbb{R}$ é uniformemente contínua se para todo $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que se $x, y \in [a,b]$ e $|x - y| < \delta$, então $|f(x) - f(y)| < \epsilon$.

Teorema 20

Toda função $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ que é contínua em um intervalo fechado $[a,b]$ é uniformemente contínua em $[a,b]$.

Teorema 21

Toda função contínua $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ é integrável.

Demonstração. Pelo Teorema 20, f é uniformemente contínua em $[a,b]$. Então, dado $\epsilon > 0$, seja $\delta > 0$ tal que $x, y \in [a,b]$ com $|x - y| < \delta$ implica $|f(x) - f(y)| < \frac{\epsilon}{b-a}$.

Seja $P \in \mathcal{P}([a,b])$, $P = \{t_0, \dots, t_n\}$ uma partição com $\max |t_i - t_{i-1}| < \delta$. Então, para todo $1 \leq i \leq n$:

$$\sup_{x \in [t_{i-1}, t_i]} f(x) - \inf_{x \in [t_{i-1}, t_i]} f(x) \leq \frac{\epsilon}{b-a}$$

Pois $t_i - t_{i-1} < \delta$. Logo, sendo $m_i := \inf_{x \in [t_{i-1}, t_i]} f(x)$ e $M_i := \sup_{x \in [t_{i-1}, t_i]} f(x)$:

$$\begin{aligned} S(f,P) - s(f,P) &= \sum_{i=1}^{n} (M_i - m_i)(t_i - t_{i-1}) \\ &< \sum_{i=1}^{n} \frac{\epsilon}{b-a}(t_i - t_{i-1}) \\ &= \frac{\epsilon}{b-a} \sum_{i=1}^{n} (t_i - t_{i-1}) \\ &= \frac{\epsilon}{b-a}(t_n - t_0) = \frac{\epsilon(b-a)}{b-a} = \epsilon \end{aligned}$$

Ou seja, mostramos que para todo $\epsilon > 0$, existe partição P com $S(f,P) - s(f,P) < \epsilon$. Em particular, dado $\epsilon > 0$, existe P com:

$$S(f,P) - \underline{\int_a^b} f(x)dx < \epsilon$$

Assim, como

$$s(f,P) \leq \underline{\int_a^b} f(x)dx \leq \overline{\int_a^b} f(x)dx \leq S(f,P)$$

temos que

$$0 \leq \overline{\int_a^b} f(x)dx - \underline{\int_a^b} f(x)dx < \epsilon$$

Como ϵ é arbitrário, segue que $\int_a^b f(x)dx = \underline{\int_a^b} f(x)dx$, e f é integrável. $\square$

Teorema 22

Sejam $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ limitadas e integráveis. Então:

1. $f \cdot g$ é integrável;
2. Se existir k tal que $0 < k < |g(x)|$ para todo $x \in [a,b]$, então f/g é integrável (ou seja, se $\inf |g(x)| > 0$);
3. $|\int_a^b f(x)dx| \leq \int_a^b |f(x)|dx$ (Desigualdade Triangular).

Demonstração. **1)** Seja $M_f = \sup |f|$ e $M_g = \sup |g|$. Então para todos $x, y \in [a,b]$:

$$|f(x)g(x) - f(y)g(y)| = |f(x)g(x) - f(x)g(y) + f(x)g(y) - f(y)g(y)|$$

$$\leq |f(x)||g(x) - g(y)| + |g(y)||f(x) - f(y)|$$

$$\leq M_f|g(x) - g(y)| + M_g|f(x) - f(y)|$$

$$\leq M \cdot (|g(x) - g(y)| + |f(x) - f(y)|) \text{ com } M = \max(M_f, M_g) \geq 0.$$

Logo, para todo intervalo $I \subseteq [a,b]$,

$$osc_I(f\cdot g) \equiv \sup_{x,y\in I} |f(x)g(x) - f(y)g(y)| \le M[\sup_{x,y\in I}(|f(x)-f(y)| + |g(x)-g(y)|)]$$

$$\le M \sup_{x,y\in I} |f(x)-f(y)| + M \sup_{x,y\in I} |g(x)-g(y)| = M(osc_I f + osc_I g).$$

Assim, para uma partição $P = \{t_0, t_1, \ldots, t_n\}$ de $[a,b]$:

$$S(f\cdot g, P) - s(f\cdot g, P) = \sum_{i=1}^{n} osc_{[t_{i-1},t_i]}(f\cdot g)(t_i - t_{i-1}) \le M \sum_{i=1}^{n}(osc_I f + osc_I g)(t_i - t_{i-1})$$

$$= M[S(f,P) - s(f,P) + S(g,P) - s(g,P)].$$

Se $M = 0$, trivialmente $f \cdot g$ é integrável pois $S(f\cdot g, P) = s(f\cdot g, P)$ para toda P (de fato, $M = 0 \Rightarrow f = g = 0$). Sendo $M > 0$, como f e g são integráveis, existem partições P_0, Q_0 tais que $S(f,P_0) - s(f,P_0) < \frac{\epsilon}{2M}$ e $S(g,Q_0) - s(g,Q_0) < \frac{\epsilon}{2M}$.

Com isso,

$$\overline{\int_a^b} fg\,dx - \underline{\int_a^b} fg\,dx \le S(fg, P_0\cup Q_0) - s(fg, P_0 \cup Q_0)$$

$$\le M[S(f, P_0\cup Q_0) - s(f, P_0\cup Q_0) + S(g, P_0\cup Q_0) - s(g, P_0\cup Q_0)]$$

$$\le M[S(f,P_0) - s(f,P_0)] + M[S(g,Q_0) - s(g,Q_0)] < M\cdot\frac{\epsilon}{2M} + M\cdot\frac{\epsilon}{2M} = \epsilon.$$

Como $\epsilon > 0$ foi arbitrário, as integrais superior e inferior coincidem e $f\cdot g$ é integrável.

2) Mostraremos que $1/g$ é integrável, e depois aplicaremos a afirmação 1 sobre $f\cdot(1/g)$.

$$\left|\frac{1}{g(x)} - \frac{1}{g(y)}\right| = \frac{|g(y)-g(x)|}{|g(x)||g(y)|} < \frac{|g(y)-g(x)|}{k^2}$$

e dessa forma, para todo intervalo $I \subseteq [a,b]$,

$$osc_I\frac{1}{g} = \sup_{x,y\in I}\left|\frac{1}{g(x)} - \frac{1}{g(y)}\right| \le \sup_{x,y\in I}\frac{|g(y)-g(x)|}{k^2} = \frac{osc_I g}{k^2}.$$

Portanto, por argumento análogo à afirmação 1, para toda partição P:

$$S(1/g, P) - s(1/g, P) \le \frac{1}{k^2}(S(g,P) - s(g,P)).$$

Como g é integrável, dado $\epsilon > 0$ existe partição P com $S(g,P) - s(g,P) < k^2\epsilon$, logo

$$S(1/g, P) - s(1/g,P) < \frac{k^2\epsilon}{k^2} = \epsilon.$$

Logo as integrais coincidem e consequentemente o produto $f/g = f\cdot\frac{1}{g}$ é integrável.

3)

Lema 8 (Lema 22.1)**.** *Para todos $x, y \in \mathbb{R}$, $||x| - |y|| \le |x - y|$.*

Demonstração. Pela desigualdade triangular: $|x| = |x - y + y| \le |x-y| + |y| \Rightarrow |x| - |y| \le |x - y|$. $|y| = |y - x + x| \le |y - x| + |x| \Rightarrow |y| - |x| \le |x - y|$. Logo $||x| - |y|| = \max(|x|-|y|, |y|-|x|) \le |x-y|$. □

Para todo $x, y \in [a,b]$, $||f(x)| - |f(y)|| \leq |f(x) - f(y)|$ pelo Lema 22.1. Assim, para todo intervalo $I \subseteq [a,b]$,

$$osc_I|f| = \sup_{x,y\in I} ||f(x)| - |f(y)|| \leq \sup_{x,y\in I} |f(x) - f(y)| = osc_I f.$$

Consequentemente, para toda partição P:

$$S(|f|, P) - s(|f|, P) \leq S(f, P) - s(f, P).$$

Como f é integrável, existe partição P com $S(f, P) - s(f, P) < \epsilon$.

$$\overline{\int_a^b} |f(x)|dx - \underline{\int_a^b} |f(x)|dx \leq S(|f|, P) - s(|f|, P) < \epsilon.$$

As integrais superior e inferior coincidem, logo $|f|$ é integrável. Como para todo $x \in [a,b]$, $-|f(x)| \leq f(x) \leq |f(x)|$, por monotonicidade:

$$-\int_a^b |f(x)|dx \leq \int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b |f(x)|dx \Rightarrow \left|\int_a^b f(x)dx\right| \leq \int_a^b |f(x)|dx.$$

$\square$

Teorema 23

Sejam $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ duas funções com:

- f limitada e integrável;
- Existe $c > 0$ tal que $osc(g, J) \leq c \cdot osc(f, J)$ para todo intervalo $J \subseteq [a,b]$;

então g é integrável.

Demonstração. Dado $\epsilon > 0$, como f é integrável, existem partições P, Q de $[a,b]$ tais que $s(f,P) > \int_a^b f(x)dx - \frac{\epsilon}{2c}$ e $S(f,Q) < \int_a^b f(x)dx + \frac{\epsilon}{2c}$. Denotamos o valor da integral de f por I.

Considerando a partição comum $P \cup Q$, temos que $S(f, P\cup Q) - s(f, P \cup Q) < \frac{\epsilon}{c}$. Se $P \cup Q = \{t_0, t_1, \dots, t_n\}$, então:

$$\begin{aligned}
S(g, P\cup Q) - s(g, P\cup Q) &= \sum_{i=1}^{n} (\sup_{[t_{i-1},t_i]} g - \inf_{[t_{i-1},t_i]} g)(t_i - t_{i-1}) \\
&= \sum_{i=1}^{n} osc_{[t_{i-1},t_i]} g \cdot (t_i - t_{i-1}) \\
&\leq c \cdot \sum_{i=1}^{n} osc_{[t_{i-1},t_i]} f \cdot (t_i - t_{i-1}) \\
&= c \cdot [S(f, P\cup Q) - s(f, P\cup Q)] \\
&< c \cdot \frac{\epsilon}{c} = \epsilon.
\end{aligned}$$

Como ϵ é arbitrário, g é integrável pelo Teorema 14.1. $\square$

Teorema 24

Toda função monótona $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ é integrável.

Demonstração. Vamos supor que f seja não constante e não decrescente. Logo $f(b) - f(a) > 0$. Seja $P = \{t_0, \ldots, t_n\}$ uma partição com $\max |t_i - t_{i-1}| < \delta$ tal que $\delta < \frac{\epsilon}{f(b)-f(a)}$. Temos:

$$\begin{aligned}
S(f, P) - s(f, P) &= \sum_{i=1}^{n} osc_{[t_{i-1}, t_i]} f \cdot (t_i - t_{i-1}) \\
&< \sum_{i=1}^{n} (f(t_i) - f(t_{i-1})) \frac{\epsilon}{f(b) - f(a)} \\
&= \frac{\epsilon}{f(b) - f(a)} \sum_{i=1}^{n} (f(t_i) - f(t_{i-1})) \\
&= \frac{\epsilon}{f(b) - f(a)} [f(t_n) - f(t_0)] \\
&= \frac{\epsilon(f(b) - f(a))}{f(b) - f(a)} = \epsilon.
\end{aligned}$$

Como ϵ foi arbitrário, f é integrável. Se f for monótona não crescente, então $-f$ é integrável, logo f é integrável. Obviamente, se f é constante, o resultado segue pelos casos anteriores, cobrindo assim todos os casos. $\square$

Integração de Riemann como limite de partições pontilhadas

Definição 6 (Definição 17)**.** *Dizemos que uma função $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ limitada é Riemann integrável se*

$$\overline{\int_a^b} f(x)dx = \underline{\int_a^b} f(x)dx.$$

Denotamos este valor por $\int_a^b f(x)dx$.

Teorema 19

Uma função $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ limitada é Riemann integrável se e somente se para todo $\epsilon > 0$ existe uma partição P de $[a,b]$ tal que $S(f,P) - s(f,P) < \epsilon$.

Demonstração. ($\Rightarrow$) Suponha que f seja Riemann integrável. Seja $I = \int_a^b f(x)dx = \overline{\int_a^b} f(x)dx = \underline{\int_a^b} f(x)dx$. Por propriedades de ínfimo e supremo, dado $\epsilon > 0$, existe uma partição P de $[a,b]$ tal que $I - s(f,P) < \epsilon/2$ e existe uma partição Q de $[a,b]$ tal que $S(f,Q) - I < \epsilon/2$.

Logo, somando as duas desigualdades, temos que $S(f,Q) - s(f,P) < \epsilon$. Considerando a partição $T = P \cup Q$ que refina ambas, temos $s(f,P) \leq s(f,T)$ e $S(f,T) \leq S(f,Q)$, e logo $S(f,T) - s(f,T) < \epsilon$.

($\Leftarrow$) Para todo $\epsilon > 0$, exista P partição de $[a,b]$ tal que $S(f,P) - s(f,P) < \epsilon$. Como $\overline{\int_a^b} f(x)dx \leq S(f,P)$ e $-\underline{\int_a^b} f(x)dx \leq -s(f,P)$, somando as duas desigualdades obtemos:

$$\overline{\int_a^b} f(x)dx - \underline{\int_a^b} f(x)dx \leq S(f,P) - s(f,P) < \epsilon.$$

Porém, do Teorema 15 sabemos que essa diferença é não negativa, e logo para todo $\epsilon > 0$:

$$0 \leq \overline{\int_a^b} f(x)dx - \underline{\int_a^b} f(x)dx < \epsilon.$$

Isto implica que $\overline{\int_a^b} f(x)dx = \underline{\int_a^b} f(x)dx$, portanto f é Riemann integrável. $\square$

Teorema 19B (Caso Geral)

Sejam $A, B \subseteq \mathbb{R}$ não vazios tais que para todo $x \in A$ e $y \in B$, $x \leq y$. Então:

$$\sup A = \inf B \iff \text{para todo } \epsilon > 0, \text{ existe } x \in A, y \in B \text{ com } y - x < \epsilon.$$

Dada uma partição P, definimos a norma de P pela medida do maior subintervalo. Sendo $P = \{t_0, t_1, \ldots, t_n\}$ uma partição de $[a, b]$, temos:

$$|P| := \max_{1 \leq i \leq n} (t_i - t_{i-1}).$$

Teorema 25

A integral superior é o limite das somas superiores quando a norma da partição tende a 0:

$$\overline{\int_a^b} f(x)dx = \lim_{|P| \to 0} S(f, P).$$

Isso significa que, $\forall \epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que para toda partição P com $|P| < \delta$, vale $S(f, P) < \overline{\int_a^b} f(x)dx + \epsilon$. Analogamente, $\underline{\int_a^b} f(x)dx = \lim_{|P| \to 0} s(f, P)$.

Demonstração. Vamos supor que $M := \sup_{[a,b]} f > 0$. Para o caso $M \leq 0$, basta considerar a aplicação do caso anterior na função $g(x) = f(x) + 2|M| + 1$, que satisfaz $\sup g > 0$.

Dado $\epsilon > 0$, fixe uma partição $P_\epsilon = \{t_0, \ldots, t_m\}$ tal que $S(f, P_\epsilon) < \overline{\int_a^b} f(x)dx + \frac{\epsilon}{2}$. Seja $P = \{\lambda_0, \ldots, \lambda_k\}$ uma partição de $[a, b]$ com $|P| < \delta$. Dividimos os subintervalos de P em dois conjuntos: S_j, o conjunto de subintervalos contidos em $[t_{j-1}, t_j]$, e I, o conjunto de subintervalos que cruzam as fronteiras de P_ϵ.

Observemos que existem no máximo $m - 1$ intervalos em I que cruzam pontos internos de P_ϵ. Logo, para $M_j = \sup_{[t_{j-1}, t_j]} f$:

$$S(f, P) = \sum_{i=1}^{k} \sup_{[\lambda_{i-1}, \lambda_i]} f \cdot (\lambda_i - \lambda_{i-1})$$

$$\leq \sum_{j=1}^{m} M_j \sum_{i \in S_j} (\lambda_i - \lambda_{i-1}) + |I| \cdot M \cdot \delta < S(f, P_\epsilon) + mM\delta.$$

Escolhendo $\delta = \frac{\epsilon}{2mM}$, temos que $S(f, P) \leq S(f, P_\epsilon) + \frac{\epsilon}{2} < \overline{\int_a^b} f(x)dx + \epsilon$.

Para a soma inferior, usamos o fato de que $S(-f, P) = -s(f, P)$ e $\overline{\int}(-f) = -\underline{\int} f$. Como $\lim_{|P| \to 0} S(-f, P) = \overline{\int_a^b}(-f)(x)dx$, segue que $\lim_{|P| \to 0} s(f, P) = \underline{\int_a^b} f(x)dx$. □

Dada uma função limitada $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ com $\lim |P_n| = 0$, temos que $\lim s(f, P_n) = \underline{\int_a^b} f(x)dx$. Dado $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que $|P| < \delta \Rightarrow S(f, P) < \int_a^b f(x)dx + \epsilon$. Como $\lim |P_n| = 0$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $n > N \Rightarrow |P_n| < \delta$. Logo, para todo $n > N$, $|S(f, P_n) - \overline{\int_a^b} f(x)dx| < \epsilon$, o que prova pela definição de limite que $\lim S(f, P_n) = \overline{\int_a^b} f(x)dx$. O caso da integral inferior é análogo.

Definição 7 (Definição 16)**.** *Dada uma partição $P = \{t_0, t_1, \ldots, t_n\}$ de $[a, b]$, um **pontilhamento** (ou partição pontilhada) de P é um conjunto $P^* = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ tal que $x_i \in [t_{i-1}, t_i]$. A soma de Riemann associada é definida por $\Sigma(f, P^*) := \sum_{i=1}^{n} f(x_i)(t_i - t_{i-1})$.*

Dizemos que $I = \lim_{|P| \to 0} \Sigma(f, P^*)$ se para todo $\epsilon > 0$ existe um $\delta > 0$ tal que para toda partição P com $|P| < \delta$ e para todo pontilhamento P^* de P, vale $|\Sigma(f, P^*) - I| < \epsilon$.

Teorema 26

Dada uma função limitada $f : [a,b] \to \mathbb{R}$, f é integrável se e só se existe o limite $\lim_{|P|\to 0} \Sigma(f, P^*)$. Nesse caso, teremos que

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{|P|\to 0} \Sigma(f, P^*)$$

Ou seja, a integral é o limite da soma pontilhada.

Demonstração. ($\Rightarrow$) Suponha que f é integrável com $I := \int_a^b f(x)dx$. Pelo Teorema 25, existe $\delta_1 > 0$ tal que $|P| < \delta_1 \Rightarrow s(f,P) > I - \frac{\epsilon}{2}$ e existe $\delta_2 > 0$ tal que $|P| < \delta_2 \Rightarrow S(f,P) < I + \frac{\epsilon}{2}$. Logo, pondo $\delta = \min(\delta_1, \delta_2)$, se $|P| < \delta$, temos que:

$$I - \epsilon/2 < s(f,P) \leq \Sigma(f, P^*) \leq S(f,P) < I + \epsilon/2$$

Portanto, $|\Sigma(f,P^*) - I| < \epsilon$ para todo pontilhamento P^* com $|P| < \delta$.

($\Leftarrow$) Suponha que existe $I = \lim_{|P|\to 0} \Sigma(f,P^*)$. Então, dada $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que $|P| < \delta \Rightarrow |I - \Sigma(f,P^*)| < \epsilon/2$ para qualquer pontilhamento de P. Em particular, podemos tomar pontilhamentos com valores próximos dos supremos. Seja $P = \{t_0, \ldots, t_m\}$. Existe $x_j \in [t_{j-1}, t_j]$ com $f(x_j) > \sup f - \frac{\epsilon}{2(b-a)}$. Assim, sendo $M_j := \sup_{[t_{j-1},t_j]} f$, para esse pontilhamento temos:

$$|I - S(f,P)| \leq |I - \Sigma(f,P^*)| + |S(f,P) - \Sigma(f,P^*)|$$

$$< \frac{\epsilon}{2} + \sum_{j=1}^{m}(M_j - f(x_j))(t_j - t_{j-1}) < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2(b-a)}\sum_{j=1}^{m}(t_j - t_{j-1}) = \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon$$

Logo, pelo Teorema 25, $I = \lim S(f,P) = \overline{\int_a^b} f(x)dx$. Analogamente, existe $y_j \in [t_{j-1}, t_j]$ com $f(y_j) < \inf f + \frac{\epsilon}{2(b-a)}$, provando que $I = \underline{\int_a^b} f(x)dx$. Portanto, f é integrável. $\square$

Condições de Integrabilidade

Definição 8. *Um conjunto $X \subseteq \mathbb{R}$ tem **conteúdo nulo** (segundo Jordan) se existe uma coleção finita de intervalos abertos $I_j = (a_j, b_j)$, $1 \leq j \leq m$, com $a_j, b_j \in \mathbb{R}$, que cobre X:*

$$X \subseteq \bigcup_{j=1}^{m} I_j$$

com $\sum_{j=1}^{m} |I_j| < \epsilon$ para qualquer $\epsilon > 0$.

Observe que todo conjunto com conteúdo nulo é limitado. Se cada I_j possui extremidades reais (não pode ser infinito), então

$$X \subseteq [\min_{1\leq i\leq n} a_i, \max_{1\leq i\leq n} b_i]$$

A união finita de intervalos abertos possui um comprimento total finito.

Podemos trivialmente substituir intervalo aberto por fechado na definição acima, pois são equivalentes. A ida é trivial; para a volta, se para todo $\epsilon > 0$ existe uma cobertura de X por intervalos fechados cuja soma dos comprimentos é menor que $\epsilon/2$, então, em particular, existem $I_1, \ldots, I_m$ intervalos fechados com $\bigcup_{j=1}^{m} I_j \supseteq X$ e $\sum |I_j| < \frac{\epsilon}{2}$. Sendo $I_j = [a_j, b_j]$ e definindo

$$A_j = \Big(a_j - \frac{\epsilon}{4m}, b_j + \frac{\epsilon}{4m}\Big)$$

temos que

$$\sum_{j=1}^{m} |A_j| = \frac{\epsilon}{2} + \sum_{j=1}^{m} |I_j| < \epsilon$$

Isso mostra que X tem conteúdo nulo, segundo Jordan.

Teorema 27

Se $X \subseteq (a, b)$ possui conteúdo nulo, então dado $\epsilon > 0$ existe uma partição P de $[a, b]$ tal que a soma dos comprimentos dos intervalos de P que intersectam X é menor que ϵ.

Demonstração.

Lema 9. *A união finita de intervalos fechados pode ser escrita como uma união finita de intervalos fechados disjuntos.*

Demonstração. Procedemos por indução na quantidade de intervalos. O caso $m = 1$ é trivial. Suponha então válida para a união de n intervalos fechados. Seja $X = \bigcup_{j=1}^{n+1} I_j$. Por hipótese de indução existem $J_1 = [a_1, b_1], \ldots, J_\lambda = [a_\lambda, b_\lambda]$ disjuntos com $a_1 \leq b_1 < a_2 \leq b_2 < \cdots < a_\lambda \leq b_\lambda$ tais que $\bigcup_{j=1}^{n} I_j = \bigcup_{k=1}^{\lambda} J_k$.

Se I_{n+1} não intersecta nenhum J_k, então a coleção é uma coleção finita de intervalos fechados disjuntos. Caso contrário, sejam J_{k_1} o primeiro e J_{k_m} o último intervalo que I_{n+1} intersecta. Então:

$$I_{n+1} \cup J_{k_1} \cup \cdots \cup J_{k_m} = [\min(a_{k_1}, a_{n+1}), \max(b_{k_m}, b_{n+1})]$$

e teremos que

$$\bigcup_{j=1}^{n+1} I_j = J_1 \cup \cdots \cup J_{k_1 - 1} \cup [\min(a_{k_1}, a_{n+1}), \max(b_{k_m}, b_{n+1})] \cup J_{k_m + 1} \cup \cdots \cup J_\lambda$$

é uma coleção finita de intervalos fechados disjuntos. O que prova a indução. O lema para intervalos abertos é análogo. ☐

Se $X \subseteq (a, b)$ possui conteúdo nulo, existem $I_1, \ldots, I_n$ intervalos fechados disjuntos com $\bigcup_{j=1}^n I_j \supseteq X$ e $\sum |I_j| < \epsilon$. Podemos supor sem perda de generalidade que $I_j \subseteq (a, b)$, do contrário basta remover a parte que sai de (a, b) ou remover I_j completamente se $I_j \cap (a, b) = \emptyset$. Assim, sendo $I_j = [a_j, b_j]$, podemos tomar a partição $P = \{a, a_1, b_1, a_2, b_2, \ldots, a_n, b_n, b\}$. A soma dos comprimentos dos intervalos de P que intersectam X é:

$$\sum_{j=1}^{n}(b_j - a_j) = \sum_{j=1}^{n} |I_j| < \epsilon$$

☐

Definição 9. *Dada função limitada $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, e $x \in [a, b]$, definimos a oscilação de f no ponto x como o limite da oscilação de vizinhanças cada vez menores centradas em x:*

$$\omega(f, x) := \lim_{\delta \to 0} \omega(\delta) = \lim_{\delta \to 0} osc_{[x-\delta, x+\delta] \cap [a,b]}(f)$$

Note que $\omega(\delta)$ como função de δ é limitada (por $M - m$, com $M = \sup(f)$ e $m = \inf(f)$) e não-decrescente, assim esse limite sempre existe.

Teorema 28

Uma função $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ limitada é integrável se e somente se para todo $\delta > 0$ o conjunto de pontos com oscilação maior ou igual a δ,

$$F_\delta = \{x \in [a, b] : \omega(f, x) \geq \delta\}$$

possui conteúdo nulo (segundo Jordan, vide Definição 17).

Demonstração. ($\Rightarrow$) Suponha que f é integrável. Se existe δ tal que F_δ não possui conteúdo nulo, então existe α tal que toda cobertura de F_δ por intervalos fechados possui soma dos comprimentos dos intervalos de pelo menos α.

Assim, de toda partição P de $[a, b]$ com $I_j = [t_{j-1}, t_j]$, seja $L = \{1 \leq j \leq m : I_j \cap F_\delta \neq \emptyset\}$ o conjunto de índices dos intervalos que intersectam F_δ, então $\cup_{j \in L} I_j \supseteq F_\delta$ e logo $\sum_{j \in L} |I_j| \geq \alpha$.

Como existe $x_j \in I_j \cap F_\delta$ para todo $j \in L$, então $\operatorname{osc}_{I_j}(f) \geq \omega(f, x_j) \geq \delta$. Assim:

$$S(f, P) - s(f, P) \geq \sum_{j \in L} \operatorname{osc}_{I_j}(f) \cdot |I_j| \geq \delta \cdot \sum_{j \in L} |I_j| \geq \delta \cdot \alpha > 0$$

Como a partição P é arbitrária, $\inf(S - s) \geq \delta\alpha > 0$, e f não é integrável, contradição! Logo F_δ possui conteúdo nulo.

($\Leftarrow$) Supondo que $c(F_\delta) = 0$ para todo $\delta > 0$. Vamos precisar do seguinte lema:

Lema 10. *Seja $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ limitada. Se $\omega(f, x) < \epsilon$ para todo $x \in [a, b]$, então existe uma partição $P = \{t_0, \ldots, t_n\}$ de $[a, b]$ tal que $osc_{I_j}(f) < \epsilon$ para todo j.*

Demonstração. Denote por $\omega(f, I) := \operatorname{osc}_I(f)$ a oscilação no intervalo I. Para cada $x \in [a, b]$, vamos construir um intervalo I_x onde a função oscila pouco, isto é, onde $\omega(f, I_x) < \epsilon$.

De fato, como $\omega(f,x) < \epsilon$, ponha $\tilde{\epsilon} = \epsilon - \omega(f,x) > 0$. Então pela definição de oscilação pontual como o ínfimo das oscilações nas vizinhanças, existe δ_x tal que $\omega(f,[x-\delta_x, x+\delta_x] \cap [a,b]) < \epsilon$. Tome $I_x = (x-\delta_x, x+\delta_x) \cap [a,b]$ (de forma que $\omega(f, I_x) < \epsilon$).

Assim, como $\cup I_x = [a,b]$ é uma cobertura de $[a,b]$ por abertos e pelo Teorema de Borel-Lebesgue admite subcobertura finita $V = \{J_{x_1}, \ldots, J_{x_n}\}$. Assim $\tilde{V} = \{I_{x_1}, \ldots, I_{x_n}\}$ com I_{x_k} fechados é uma cobertura de $[a,b]$ por intervalos fechados de "baixa oscilação"(menor que ϵ).

Sejam $P = \{t_0 = a, t_1, \ldots, t_k = b\}$ as extremidades dos intervalos I_{x_m} em ordem crescente. Observemos que todo $[t_{j-1}, t_j]$ deve estar contido em algum I_{x_m} — do contrário existiria uma extremidade de algum intervalo I_{x_m} estritamente entre esses dois. Temos então nossa partição. $\square$

Seguimos agora para finalizar a demonstração do Teorema 28: Se f é constante, é trivial. Suponha que f não é constante. Dado $\epsilon > 0$, tome $\delta = \frac{\epsilon}{2(b-a)}$.

Como F_δ tem conteúdo nulo, existe cobertura de F_δ por intervalos fechados disjuntos I_j com $\sum_{j=1}^{k} |I_j| < \frac{\epsilon}{2(M-m)}$.

Assim, $[a,b] \setminus \cup \mathrm{int}(I_j) = \cup J_j$ é uma união de intervalos fechados disjuntos. Para cada J_j, como $J_j \cap F_\delta = \emptyset$, pelo Lema 28.1 existe uma partição Q_j de J_j tal que a oscilação de cada subintervalo de Q_j é menor que δ.

Então pondo P como a união de Q_j e das extremidades dos intervalos I_j temos que (pondo $M = \sup_{[a,b]}(f), m = \inf_{[a,b]}(f)$):

$$\begin{aligned}
S(f,P) - s(f,P) &= \sum_{j=1}^{m} [S(f,Q_j) - s(f,Q_j)] + \sum_{j=1}^{k} \mathrm{osc}_{\bar{I}_j}(f)|I_j| \\
&\leq \sum_{j=1}^{m} \delta \cdot |Q_j| + (M-m) \sum_{j=1}^{k} |I_j| \\
&\leq \delta \cdot (b-a) + (M-m) \cdot \frac{\epsilon}{2(M-m)} \\
&= \frac{\epsilon}{2(b-a)} \cdot (b-a) + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon
\end{aligned}$$

Como $\epsilon > 0$ é arbitrária, f é integrável. Isso finaliza a demonstração do Teorema 28. $\square$

Teorema 29 (auxiliar para o Teorema 30)

Dada $f : [a,b] \to \mathbb{R}$, f é contínua em x se e só se $\omega(f,x) = 0$.

Reciprocamente, o conjunto de descontinuidades de f é $D_f = \{x \in [a,b] : \omega(f,x) > 0\}$.

Demonstração. f é contínua em x se dado $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que $y \in (x-\delta, x+\delta)$ implica $|f(y) - f(x)| < \epsilon$. Isso é equivalente a, para todo $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que $\omega(f, [a,b] \cap (x-\delta, x+\delta)) < \epsilon$, o que é equivalente a $\lim_{\delta \to 0} \omega(f, [a,b] \cap (x-\delta, x+\delta)) = 0$, ou seja $\omega(f,x) = 0$. Vide Definição 18. $\square$

Teorema 30 (Caracterização da Integrabilidade)

Uma função limitada $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ é integrável por Riemann se e só se o seu conjunto de descontinuidades D_f possui medida nula.

Demonstração. Observe que, pelo Teorema 29, o conjunto de descontinuidades D_f é

$$D_f = \{x \in [a,b] : \omega(f,x) > 0\} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} F_{1/n}$$

($\Rightarrow$) Se f é integrável, então pelo Teorema 28, todo $F_{1/n}$ possui conteúdo nulo. Então, dado $\epsilon > 0$, existe uma cobertura finita $U_n = \{I_{n,j}\}_{j=1}^{k_n}$ de $F_{1/n}$ por intervalos abertos com $\sum_{j=1}^{k_n} |I_{n,j}| < \frac{\epsilon}{2^n}$.

Temos que $\cup_{n=1}^{\infty} U_n$ cobre D_f. Portanto,

$$\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{k_n} |I_{n,j}| < \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\epsilon}{2^n} = \epsilon$$

Assim, D_f tem medida nula (segundo Lebesgue).

($\Leftarrow$) Suponha que D_f possui medida nula. Então cada $F_{1/n}$ também possui medida nula. Precisamos do seguinte lema:

Lema 11. *Para todo $\delta > 0$, $F_\delta = \{x \in [a,b] : \omega(f,x) \geq \delta\}$ é compacto.*

Demonstração. F_δ já é limitado. Vamos provar que é fechado. Sendo (x_n) uma sequência convergente em F_δ com $x = \lim x_n$, precisamos mostrar que $x \in F_\delta$. De fato, para todo $\epsilon > 0$, existe x_n com $x_n \in (x-\epsilon, x+\epsilon)$, e tomando um intervalo centrado em x_n, $I_{x_n} \subseteq (x-\epsilon, x+\epsilon) \cap [a,b]$, temos que $\omega(f,(x-\epsilon,x+\epsilon)) \geq \omega(f, I_{x_n}) \geq \delta$ para todo ϵ. Logo $\omega(f,x) = \inf \omega(f,(x-\epsilon,x+\epsilon)) \geq \delta$, logo $x \in F_\delta$. Logo F_δ é compacto. $\square$

Assim, como $F_{1/n}$ possui medida nula, isto é, dado $\epsilon > 0$ existe cobertura por abertos $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ com $\sum |I_n| < \epsilon$, e é compacto pelo Lema, então pelo Teorema de Borel-Lebesgue existe uma subcobertura finita dessa cobertura, cujo tamanho total também vai ser menor que ϵ. Ou seja, $F_{1/n}$ possui conteúdo nulo.

Dado $\delta > 0$, existe $m \in \mathbb{N}$ com $\frac{1}{m} < \delta$, e logo $E_{1/m} \supseteq E_\delta$. Como $E_{1/m}$ possui conteúdo nulo, então E_δ também possui conteúdo nulo. Como $\delta > 0$ foi arbitrário, todo E_δ possui conteúdo nulo, e pelo Teorema 28 segue que f é integrável. $\square$

Teorema Fundamental do Cálculo e outras fórmulas clássicas

Definição 10. *Dada uma função $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ integrável, definiremos a **integral indefinida** como a função $F : [a,b] \to \mathbb{R}$,*

$$F(x) := \int_a^x f(t)dt$$

Teorema 31

Seja $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ integrável.

1. Então sua integral indefinida F é lipschitziana (e portanto, uniformemente contínua).

2. Se f é contínua em $c \in [a,b]$, então sua integral indefinida F é derivável em c e $F'(c) = f(c)$.

Demonstração. 1) Como f é integrável, é limitada: existe K tal que $|f(t)| \leq K$ para todo $t \in [a,b]$. Então se $x, y \in [a,b]$:

$$|F(y) - F(x)| = \left| \int_a^y f(t)dt - \int_a^x f(t)dt \right| = \left| \int_x^y f(t)dt \right| \leq K|y-x|$$

F é lipschitziana. Consequentemente, dado $\epsilon > 0$ podemos tomar $\delta = \frac{\epsilon}{2\max(K,1)}$ de forma que $|y-x| < \delta$ implica $|F(x) - F(y)| < \epsilon$, e F é uniformemente contínua.

2) Suponha que, além de integrável, f é contínua no ponto $c \in (a,b)$. Então dado $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que $|x-c| < \delta \implies |f(x) - f(c)| < \epsilon/2$. Portanto:

$$f(c) - \epsilon/2 < f(x) < f(c) + \epsilon/2$$

Portanto, dado um x com $|x-c| < \delta$:

- Se $x \geq c$, então temos por monotonicidade:

$$\int_c^x (f(c) - \epsilon/2)dt \leq \int_c^x f(t)dt \leq \int_c^x (f(c) + \epsilon/2)dt$$

$$\Rightarrow (f(c) - \epsilon/2)(x-c) \leq \int_c^x f(t)dt \leq (f(c) + \epsilon/2)(x-c) \quad (*)$$

- Se $x \leq c$, então temos por monotonicidade que $(f(c) + \epsilon/2)(c-x) \geq \int_x^c f(t)dt \geq (f(c) - \epsilon/2)(c-x)$. Isto é, como $\int_c^x f(t)dt = -\int_x^c f(t)dt$, temos que:

$$(f(c) + \epsilon/2)(x-c) \leq \int_c^x f(t)dt \leq (f(c) - \epsilon/2)(x-c) \quad (**)$$

Dividindo ambos $(*)$ e $(**)$ por $x - c$ (que no segundo caso é negativo) temos que:

$$f(c) - \epsilon/2 \leq \frac{\int_c^x f(t)dt}{x-c} = \frac{F(x) - F(c)}{x-c} \leq f(c) + \epsilon/2$$

Isto é, para todo $\epsilon > 0$ existe δ tal que $|x-c| < \delta$ implica $|\frac{F(x)-F(c)}{x-c} - f(c)| < \epsilon$. Pela definição de derivada $F'(c) = \lim_{x\to c} \frac{F(x)-F(c)}{x-c} = f(c)$. $\square$

Definição 11. *Dada uma função $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ dizemos que $F : [a,b] \to \mathbb{R}$ é uma **primitiva** de f se $F' = f$ em todo ponto.*

Observação: Apesar da mesma notação (F), integral indefinida e primitiva são objetos diferentes. De fato, uma função não precisa ter nenhuma propriedade em especial (ser integrável, etc), a priori, para possuir uma primitiva, e possuirá infinitas primitivas distintas. Se G_1, G_2 são duas primitivas, $G_1' - G_2' = (G_1 - G_2)' = 0$, logo $G_1 - G_2$ é uma constante em todo ponto do intervalo.

Pelo Teorema 31, se f é contínua então sua integral indefinida é uma primitiva. O que provaremos com o **Teorema Fundamental do Cálculo** é que não é necessário assumir que f é contínua; se f possui ao menos uma primitiva e é integrável, então sua integral indefinida é uma das primitivas.

Teorema 32 (Teorema Fundamental do Cálculo)

Se $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ é integrável e possui ao menos uma primitiva F, então:

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

Obs.: Note que, como todo par de primitivas de f difere por uma constante, a quantidade $F(b) - F(a)$ é invariante e independe da escolha da primitiva.

Demonstração. Seja $(P_m)_{m \in \mathbb{N}}$ uma sequência de partições com $\lim |P_m| = 0$. Seja $P_m = \{t_0^{(m)}, \ldots, t_{k_m}^{(m)}\}$. Pelo Teorema do Valor Médio, aplicado sobre cada intervalo $[t_{i-1}^{(m)}, t_i^{(m)}]$, existe um ponto $x_i^{(m)}$ nesse intervalo tal que $F'(x_i^{(m)}) = \frac{F(t_i^{(m)}) - F(t_{i-1}^{(m)})}{t_i^{(m)} - t_{i-1}^{(m)}}$.

Logo, como $F' = f$, tomando a partição pontuada $\dot{P}_m := \{x_1^{(m)}, \ldots, x_{k_m}^{(m)}\}$, temos a soma de Riemann:

$$\begin{aligned} \Sigma(f, \dot{P}_m) &= \sum_{i=1}^{k_m} f(x_i^{(m)})(t_i^{(m)} - t_{i-1}^{(m)}) = \sum_{i=1}^{k_m} [F(t_i^{(m)}) - F(t_{i-1}^{(m)})] \\ &= F(t_{k_m}^{(m)}) - F(t_0^{(m)}) = F(b) - F(a) \end{aligned}$$

Como $|P_m| \to 0$ e f é integrável, a soma de Riemann converge para a integral:

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{m \to \infty} \Sigma(f, \dot{P}_m) = F(b) - F(a)$$

□

Teorema 33 (Mudança de Variáveis)

Seja $g : [c, d] \to [a, b]$ uma função derivável com g' integrável. Se $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ é contínua, então:

$$\int_{g(c)}^{g(d)} f(x)dx = \int_c^d f(g(t))g'(t)dt$$

Demonstração. Como f é contínua, ela admite uma primitiva F (pelo Teorema 31). Pela regra da cadeia, a função composta $F \circ g$ é derivável e:

$$(F \circ g)'(t) = F'(g(t)) \cdot g'(t) = f(g(t)) \cdot g'(t)$$

Como f e g são contínuas, $f \circ g$ é contínua. Como g' é integrável, o produto $(f \circ g) \cdot g'$ é integrável. Aplicando o Teorema Fundamental do Cálculo (Teorema 32):

$$\int_c^d f(g(t)) \cdot g'(t)dt = (F \circ g)(d) - (F \circ g)(c) = F(g(d)) - F(g(c))$$

Pela definição de F como primitiva de f, o termo da direita é exatamente $\int_{g(c)}^{g(d)} f(x)dx$. A igualdade segue. $\square$

Observação: Informalmente, ao utilizar na prática uma mudança de variáveis, temos uma integral $I = \int_a^b f(x)dx$. Encontramos um padrão que nos permite extrair uma nova variável: $f(x)dx = g(u)du$ para alguma g. Encontramos c, d tais que $u(c) = a$ e $u(d) = b$, e escrevemos:

$$I = \int_a^b f(x)dx = \int_{u(c)}^{u(d)} g(u)du = \int_c^d g(u(t))u'(t)dt$$

que é o que obtemos no "$du = u'(t)dt$" informalmente.

Teorema 34 (Integração por Partes)

Sejam $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ com derivadas tais que ambas f' e g' são integráveis. Então:

$$\int_a^b f(x)g'(x)dx + \int_a^b f'(x)g(x)dx = f(b)g(b) - f(a)g(a)$$

Demonstração. Como f e g possuem derivadas, elas são contínuas e portanto integráveis. Logo os produtos fg' e $f'g$ são integráveis. Pela regra do produto:

$$(fg)'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$$

Como a soma de integráveis é integrável, $(fg)'$ é integrável e fg é uma primitiva de $(fg)'$. Pelo Teorema Fundamental do Cálculo:

$$\int_a^b (fg)'(x)dx = (fg)(b) - (fg)(a)$$

$$\int_a^b [f'(x)g(x) + f(x)g'(x)]dx = f(b)g(b) - f(a)g(a)$$

Pela linearidade da integral, obtemos o resultado. $\square$

Limites de integrais e integrais impróprias

Teorema 35

Seja $f : (a, b] \to \mathbb{R}$ tal que f é limitada em $(a, b]$ e integrável em $[c, b]$ para todo $c \in (a, b)$. Então f é integrável em $[a, b]$ e:

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{c \to a^+} \int_c^b f(x)dx$$

Demonstração. Como f é limitada em (a, b) e está definida em b, então existe K tal que $|f(x)| \leq K$ para todo $x \in [a, b]$. Se $K = 0$, então f é identicamente nula e o resultado é trivial. Suponhamos então $K > 0$.

Dado $\epsilon > 0$, ponha $c_\epsilon = \min(a + \frac{\epsilon}{4K}, b)$. Como f é integrável em $[c_\epsilon, b]$, existe partição $\tilde{P}$ de $[c_\epsilon, b]$ tal que $S(f, \tilde{P}) - s(f, \tilde{P}) < \epsilon/2$.

Logo, sendo $P = \{a\} \cup \tilde{P}$ uma partição de $[a, b]$, temos:

$$\begin{aligned} S(f, P) - s(f, P) &= S(f|_{[c_\epsilon, b]}, \tilde{P}) - s(f|_{[c_\epsilon, b]}, \tilde{P}) + (M - m)(c_\epsilon - a) \\ &< \frac{\epsilon}{2} + (M - m)(c_\epsilon - a) \leq \frac{\epsilon}{2} + 2K \cdot \frac{\epsilon}{4K} = \epsilon \end{aligned}$$

sendo $M = \sup_{[a,c_\epsilon]} f$ e $m = \inf_{[a,c_\epsilon]} f$. Logo $\inf_P[S(f,P) - s(f,P)] = 0$, e f é integrável.

highlighting a small interval [a, c$_epsilon]neartheleftendpointwherethefunctionisbounded]$

Além disso, pela propriedade de aditividade da integral:

$$\left|\int_a^b f(x)dx - \int_c^b f(x)dx\right| = \left|\int_a^c f(x)dx\right| \leq \int_a^c |f(x)|dx \leq K(c-a)$$

Como $K(c-a) \to 0$ quando $c \to a^+$, o resultado segue. □

Corolário 35.1

Seja $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ limitada e integrável em todo $[c,d] \subseteq (a,b)$, então f é integrável em $[a,b]$ e $\int_a^b f(x)dx = \lim_{c\to a^+, d\to b^-} \int_c^d f(x)dx$.

Teorema 36 (Critério de Comparação)

Sejam $f, g : (a,b] \to \mathbb{R}$ tais que $0 \leq f(x) \leq g(x)$ em todo ponto e g é integrável. Então se f é integrável em $[c,b]$ para todo $c \in (a,b)$, então f é integrável em $[a,b]$ e $\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx$.

Demonstração. Como $0 \leq f(x) \leq g(x)$ e g é integrável, g é limitada e portanto f é limitada. O resultado segue do Teorema 35. □

Definição 12. *Dizemos que uma integral imprópria $\int_a^b f(x)dx$ é **absolutamente convergente** se a integral $\int_a^b |f(x)|dx$ é convergente.*

Exemplo 1: Observemos que $[0,1) = [0,\frac{1}{2}) \cup [\frac{1}{2},\frac{2}{3}) \cup \cdots = \bigcup_{k\geq 1} I_k$ com $I_k = [1-\frac{1}{k}, 1-\frac{1}{k+1}]$. Temos $|I_k| = \frac{1}{k+1} - \frac{1}{k} = \frac{k-(k+1)}{k(k+1)} \Rightarrow |I_k| = \frac{1}{k(k+1)}$. Então podemos pôr $f(x) = \sum_{k\geq 1}(-1)^{k+1}(k+1)\chi_{I_k}$. Logo $\int_0^1 f(x)dx = \sum_{k\geq 1}(-1)^{k+1}(k+1)\frac{1}{k(k+1)} = \sum_{k\geq 1}\frac{(-1)^{k+1}}{k} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \cdots = \ln 2$. Porém $\int_0^1 |f(x)|dx = \sum \frac{1}{k}$, que diverge.

Teorema 37

Seja $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ (ou $[a,b), (a,b]$) contínua. Então se a integral imprópria converge absolutamente, isto é, existe $\int_a^b |f(x)|dx$, então a integral imprópria converge, isto é, existe $\int_a^b f(x)dx$. Vale que:

$$\left|\int_a^b f(x)dx\right| \leq \int_a^b |f(x)|dx$$

Nota: Na definição de integral imprópria (Definição 22) assumimos f contínua.

Demonstração. Observemos que, sendo $f^+(x) = \max(f(x),0)$ e $f^-(x) = \max(-f(x),0)$ as partes positiva e negativa de f, então:

$$f = f^+ - f^-$$
$$|f| = f^+ + f^-$$

de onde segue que:

$$f^+ = \frac{|f|+f}{2} \quad \text{e} \quad f^- = \frac{|f|-f}{2}$$

de onde segue que $0 \leq f^+, f^- \leq |f|$.

Como f e $|f|$ são contínuas, f^+ e f^- são contínuas. Logo, pela teoria da comparação (Corolário 36.2) segue que ambas f^+ e f^- são integráveis em (a, b) e logo $f = f^+ - f^-$ é integrável, dando:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f^+(x)dx - \int_a^b f^-(x)dx$$

$\square$

Capítulo 3

Sequências e séries de funções