Análise real

Igor Prado Teixeira Borja

Capítulo 1

Derivadas

Definição 1. *Dada $X \subseteq \mathbb{R}$, X' (conjunto de pts de acumulação) é definido por*

$$X' = \{x \in \mathbb{R} \mid x \text{ é ponto de acumulação de } X\}$$

.

Definimos que x é ponto de acumulação se e só se $\forall \epsilon > 0, B_\epsilon(x) \cap X \setminus \{x\} \neq \emptyset$.

Lema 1. *Dado $x \in X'$, existe uma sequência (x_n) dois a dois disjuntos em $X \setminus \{x\}$ tal que $\lim x_n = x$.*

Demonstração. Tome $x_n \in B_{1/n}(x) \cap X \setminus \{x\}$, que existe pois $x \in X'$. Então $\lim x_n = x$. Como $x_n \in X \setminus \{x\}$, temos $x_n \in X$ e $x_n \neq x$ para todo $n \in \mathbb{N}$. □

Definição 2. *Dada $f : X \to \mathbb{R}$ e $a \in X \cap X'$, dizemos que f é diferenciável em a se existe o limite:*

$$L = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

Isso é igual a, pondo $h = x - a$:

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

Lema 2. *Se f é diferenciável em a, então definindo $r(h) := f(a+h) - [f(a) + f'(a)h]$, temos que $r(h)$ tende a 0 mais rápido que h, ou seja:*

$$\lim_{h \to 0} \frac{r(h)}{h} = 0$$

Onde $r(h)$ representa o resto da aproximação pela função afim $f(a) + f'(a)h$.

Teorema 1. *Se f é diferenciável em a, então f é contínua em a.*

Demonstração. Observe que $f(a+h) = f(a) + f'(a)h + r(h)$ implica que $\lim_{h \to 0} f(a+h) = f(a)$. Logo f é contínua em a. □

Observação. *Note que a derivada é única pela unicidade do limite. O resto representa o erro absoluto da aproximação pela função afim para um dado h.*

Teorema 2 (Regra da Cadeia). *Sejam $f : X \to Y$ e $g : Y \to \mathbb{R}$ com $f(X) \subseteq Y$. Seja $a \in X \cap X'$ e $b = f(a)$. Se existem $f'(a)$ e $g'(b)$, então $g \circ f$ é diferenciável em a e:*

$$(g \circ f)'(a) = g'(b) \cdot f'(a) = g'(f(a)) \cdot f'(a)$$

Observação. *Você pode tentar argumentar que:*

$$\lim_{h \to 0} \frac{(g \circ f)(a+h) - (g \circ f)(a)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{g(f(a+h)) - g(f(a))}{f(a+h) - f(a)} \cdot \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

Porém, nada garante que $f(a+h) - f(a) \neq 0$, o que quebra o argumento!

Demonstração. Pelo Lema 2, temos $f(a+h) = f(a) + f'(a)h + \rho(h)h$ com $\lim_{h \to 0} \rho(h) = 0$ e $g(b+k) = g(b) + g'(b)k + \sigma(k)k$ com $\lim_{k \to 0} \sigma(k) = 0$. Logo:

$$(g \circ f)(a+h) = g(f(a) + f'(a)h + \rho(h)h)$$

$$= g(b) + g'(b)[f'(a)h + \rho(h)h] + \sigma(f'(a)h + \rho(h)h)[f'(a)h + \rho(h)h]$$

$$\frac{(g \circ f)(a+h) - (g \circ f)(a)}{h} = g'(b)[f'(a) + \rho(h)] + \sigma(f'(a)h + \rho(h)h)[f'(a) + \rho(h)]$$

Observe que pela continuidade de σ, $\lim_{h \to 0} \sigma(f'(a)h + \rho(h)h) = \sigma(0) = 0$. Logo:

$$(g \circ f)'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{(g \circ f)(a+h) - (g \circ f)(a)}{h} = g'(b)f'(a) = g'(f(a)) \cdot f'(a)$$

Note que definimos $\rho(h) := \frac{r_f(h)}{h}$ se $h \neq 0$ e $\sigma(k) := \begin{cases} \frac{r_g(k)}{k} & k \neq 0 \\ 0 & k = 0 \end{cases}$ em que r é o resto da derivada de g relativa a b. $\square$

Teorema 3. *Seja $f : X \to Y$ função com inversa $g = f^{-1}$, com f diferenciável em $a \in X \cap X'$ e g contínua em $b = f(a)$. Então g é diferenciável em b se e somente se $f'(a) \neq 0$, caso no qual $g'(b) = \frac{1}{f'(a)}$.*

Demonstração. ($\Rightarrow$) (Se g é diferenciável $\Rightarrow f'(a) \neq 0$): Pela regra da cadeia, como g é diferenciável em $f(a)$, temos $\mathrm{id} = (g \circ f)(x) \implies 1 = (g \circ f)'(a) = g'(b)f'(a) \Rightarrow f'(a) \neq 0$.

($\Leftarrow$) ($f'(a) \neq 0 \Rightarrow g$ é diferenciável em b): Temos que:

$$\lim_{y \to b} \frac{g(y) - g(b)}{y - b} = \lim_{y \to f(a)} \frac{g(y) - a}{y - f(a)}$$

Fazendo $y = f(x)$, pela continuidade de g, quando $y \to b$, temos $x = g(y) \to g(b) = a$. Assim:

$$\lim_{y \to b} \frac{g(y) - a}{y - f(a)} = \lim_{x \to a} \frac{x - a}{f(x) - f(a)} = \frac{1}{\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}} = \frac{1}{f'(a)}$$

A penúltima igualdade vale pela continuidade de g. Logo $g'(b)$ existe e $g'(b) = \frac{1}{f'(a)}$. $\square$

Definição 3. *Dada um intervalo $I \subseteq \mathbb{R}$, definimos:*

$$C^0(I) = \{f : I \to \mathbb{R}, f \text{ é contínua}\}$$

$$C^{m+1}(I) = \{f : I \to \mathbb{R}, f \text{ é diferenciável e } f' \in C^m(I)\}$$

$$C^\infty(I) = \{f : I \to \mathbb{R}, f \text{ é diferenciável e } f' \in C^\infty(I)\}$$

Obtemos que $C^\infty(I) \subsetneq \cdots \subsetneq C^{m+1}(I) \subsetneq C^m(I) \subsetneq \cdots \subsetneq C^0(I)$.

Derivadas Laterais

Definição 4. *Dada uma função $f : X \to \mathbb{R}$ e $a \in X \cap X'_+$, definimos a derivada pela direita por:*

$$f'_+(a) = \lim_{x \to a^+} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

Se $a \in X \cap X'_-$, definimos a derivada pela esquerda por:

$$f'_-(a) = \lim_{x \to a^-} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

Exemplo. $f(x) = \begin{cases} 1 & x > 0 \\ 0 & x \leq 0 \end{cases}$. *$f'(0)$ não existe, pois o limite lateral diverge para $+\infty$.*

Exercício 1. *Dada $f : X \to \mathbb{R}$ e $a \in X \cap X'_+ \cap X'_-$, mostre que f possui derivada em a se e somente se existem ambas as derivadas laterais em a, e elas são iguais ($f'_+(a) = f'_-(a)$). Nesse caso, a derivada é igual às derivadas laterais.*

Exemplo. $f(x) = \begin{cases} x^2 \sin(1/x) + x/2 & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$. *$f$ é diferenciável em todo ponto, porém f' é descontínua em 0. Assim, embora $f'(0) = 1/2 > 0$, não podemos afirmar que f é crescente em uma vizinhança de 0.*

Teorema 4. *Seja $f : X \to \mathbb{R}$ tal que existe $f'_+(a)$, em que $a \in X \cap X'_+$. Se $f'_+(a) > 0$, então existe $\delta > 0$ tal que se $x \in (a, a + \delta)$, então $f(a) < f(x)$. O mesmo vale para a derivada pela esquerda $f'_-(a) > 0$. Observe que isso não significa que f é crescente localmente, em $(a, a + \delta)$.*

Demonstração. Seja $L = \lim_{x \to a^+} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} > 0$. Tome $\epsilon > 0$ tal que $L - \epsilon > 0$ (por exemplo $\epsilon = L/2$). Logo existe $\delta > 0$ tal que $x \in (a, a+\delta)$ implica que $\frac{f(x)-f(a)}{x-a} \in (L-\epsilon, L+\epsilon)$. Em particular, $\frac{f(x)-f(a)}{x-a} > L - \epsilon > 0$. Como $x > a$, então segue que $f(x) - f(a) > 0$, ou seja, $f(x) > f(a)$. ☐

Corolário 1. *Se f é derivável em a e $f'(a) > 0$, então existe $\delta > 0$ tal que se $x \in (a-\delta, a)$, então $f(x) < f(a)$ e se $y \in (a, a + \delta)$, então $f(a) < f(y)$. Se $f'(a) < 0$, o comportamento é análogo com sinal trocado.*

Demonstração. Como $f'(a) > 0$, então tanto $f'_+(a) > 0$ quanto $f'_-(a) > 0$, o que pelo Teorema 5 significa que existem $\delta_1, \delta_2 > 0$ tais que $x \in (a, a+\delta_1) \implies f(a) < f(x)$ e $x \in (a-\delta_2, a) \implies f(x) < f(a)$. Tomamos então $\delta = \min(\delta_1, \delta_2)$. ☐

Em resumo, para δ suficientemente pequena:

- $f'(a) > 0 \Rightarrow f(a - \delta) < f(a)$
- $f'(a) > 0 \Rightarrow f(a) < f(a + \delta)$
- $f'(a) < 0 \Rightarrow f(a - \delta) > f(a)$
- $f'(a) < 0 \Rightarrow f(a) > f(a + \delta)$

Teorema 5. *Se $f : X \to \mathbb{R}$ é derivável em $a \in int(X)$ (ponto interior) e a é ponto de mínimo local ou de máximo local, então $f'(a) = 0$.*

Demonstração. Como a derivada existe, temos 3 casos: $f'(a) > 0$, $f'(a) < 0$ ou $f'(a) = 0$. Observe que:

1. Se $f'(a) > 0$, então pelo Teorema 5 existe $\delta > 0$ tal que $(a-\delta, a) \subseteq X$ e $x \in (a-\delta, a) \implies f(x) < f(a)$ e $x \in (a, a+\delta) \implies f(a) < f(x)$. Logo a não é nem mínimo nem máximo local.
2. Se $f'(a) < 0$, então pelo Teorema 5 existe $\delta > 0$ tal que $(a-\delta, a) \subseteq X$ e $x \in (a-\delta, a) \implies f(x) > f(a)$ e $x \in (a, a+\delta) \implies f(a) > f(x)$. Logo a não é mínimo nem máximo local.

Por tanto, necessariamente $f'(a) = 0$. ☐

Observação. *Note que a recíproca* **não é verdadeira***: podemos ter $f'(a) = 0$ em pontos que não são min/max locais, como por exemplo pontos de sela. Exemplo: $a = 0$ em $f(x) = x^3$. Além disso, pode ocorrer de a ser mínimo/máximo local e a derivada não existir, como em $a = 0$ em $f(x) = |x|$.*

Funções deriváveis em um intervalo

Para as provas que seguem, relembre do seguinte (de Weierstrass):

Teorema 6 (Weierstrass)**.** *Se $f : K \to \mathbb{R}$ é contínua em $K \subset \mathbb{R}$ um compacto, então f é limitada e atinge seu mínimo e máximo global. Ou seja, existem $x_1, x_2 \in K$ com $f(x_1) \leq f(x) \leq f(x_2)$.*

Demonstração. Mostremos que a imagem de um compacto por uma função contínua é um compacto. De fato, seja $f(K) \subseteq \bigcup_{\lambda \in L} A_\lambda$ uma cobertura de $f(K)$ por abertos. Como é uma cobertura da imagem, para todo $x \in K$ podemos escolher um índice $\omega(x) \in L$ tal que $f(x) \in A_{\omega(x)}$, criando assim uma função de "seleção"dos índices.

Como f é contínua, se $f(x) \in A_{\omega(x)}$, existe um intervalo (ou bola) $I_{\omega(x)}$ contendo x tal que $f(I_{\omega(x)} \cap K) \subseteq A_{\omega(x)}$. Assim, a coleção $\{I_{\omega(x)}\}_{x \in K}$ forma uma cobertura aberta de K. Como K é compacto, temos uma subcobertura finita $\{I_{\omega(x_i)}\}_{i=1}^n$, de forma que:

$$K \subseteq \bigcup_{i=1}^n I_{\omega(x_i)} \implies f(K) = f\left(\bigcup_{i=1}^n (I_{\omega(x_i)} \cap K)\right) = \bigcup_{i=1}^n f(I_{\omega(x_i)} \cap K) \subseteq \bigcup_{i=1}^n A_{\omega(x_i)}$$

Dessa forma, obtemos uma subcobertura finita de $f(K)$ a partir de uma cobertura por abertos arbitrária $(A_\lambda)_{\lambda \in L}$. Logo, $f(K)$ é um conjunto compacto.

Sendo $f(K) \subset \mathbb{R}$ um compacto, ele é fechado e limitado. Como $f(K)$ é limitado, existem o supremo $M = \sup f(K)$ e o ínfimo $m = \inf f(K)$. Pelo fato de $f(K)$ ser fechado, temos que $\sup f(K) \in f(K)$ e $\inf f(K) \in f(K)$. Portanto, existem $x_1, x_2 \in K$ tais que $f(x_1) = \inf f(K)$ e $f(x_2) = \sup f(K)$, o que prova que a função atinge seu mínimo e máximo globais. $\square$

Teorema 7 (Darboux - TVI para derivadas)**.** *Seja $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ derivável em todo $[a, b]$. Se $f'(a) < d < f'(b)$, então existe $c \in (a, b)$ tal que $f'(c) = d$.*

Demonstração. Se $d = 0$, então pelo Teorema de Weierstrass f atinge seu mínimo (ou máximo) em algum ponto $x^* \in [a, b]$. Porém, como $f'(a) < 0$, existe δ_1 tal que $x \in (a, a + \delta_1) \implies f(x) < f(a)$. Como $f'(b) > 0$, existe δ_2 tal que $x \in (b - \delta_2, b) \implies f(x) < f(b)$. Logo a e b não são mínimos locais, portanto $x^* \in (a, b)$. Pelo Teorema 6, $f'(x^*) = 0 = d$. Se $d \neq 0$, aplique o caso anterior para $g(x) = f(x) - dx$. $\square$

Teorema 8 (Rolle)**.** *Seja $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ contínua em $[a, b]$ e derivável em (a, b) tal que $f(a) = f(b)$. Então existe $c \in (a, b)$ tal que $f'(c) = 0$.*

Demonstração. Seja $y = f(a) = f(b)$. Se f for constante no intervalo, então $f' = 0$ em (a, b). Caso contrário, como f é contínua, pelo Teorema de Weierstrass ela atinge um máximo M e um mínimo m. Pelo menos um desses valores deve ser diferente de y, ocorrendo em algum $c \in (a, b)$. Pelo Teorema 6, $f'(c) = 0$. $\square$

Teorema 9 (TVM - Teorema do Valor Médio de Lagrange)**.** *Se $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ é contínua em $[a, b]$ e derivável em (a, b), então existe $c \in (a, b)$ tal que:*

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

Demonstração. Considere $g(x) = f(x) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}x$. g é contínua em $[a, b]$, derivável em (a, b) e $g(a) = g(b) = \frac{f(a)b-f(b)a}{b-a}$. Pelo Teorema de Rolle, existe $c \in (a, b)$ tal que $g'(c) = 0$. Como $g'(x) = f'(x) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$, então $f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$. □

Corolário 2. *Se uma função possui derivada nula em todos os pontos de um intervalo, então f é constante nesse intervalo.*

Demonstração. Tome $x, y \in [a, b]$ com $x < y$. Pelo TVM, existe $c \in (x, y)$ tal que $\frac{f(y)-f(x)}{y-x} = f'(c)$. Como $f'(c) = 0$, temos $f(y) - f(x) = 0 \Rightarrow f(x) = f(y)$. Logo f é constante. □

Corolário 3. *Se $f, g : (a, b) \to \mathbb{R}$ são deriváveis e $f' = g'$ em todo ponto, então existe uma constante c tal que $g(x) = f(x) + c$.*

Teorema 10 (Monotonicidade e Inversa)**.** *Seja $f : I \to \mathbb{R}$ derivável em um intervalo I.*

1. *$f'(x) \geq 0$ para todo $x \in I$ se e só se f é não-decrescente (e analogamente $f'(x) \leq 0$ para f não-crescente).*
2. *Se $f'(x) > 0$ para todo $x \in I$, então f é estritamente crescente e possui inversa $g : f(I) \to \mathbb{R}$ contínua e derivável no intervalo $f(I)$.*

Demonstração. 1) ($\Rightarrow$) Pelo TVM, para $x < y$, existe $z \in (x, y)$ tal que $\frac{f(y)-f(x)}{y-x} = f'(z) \geq 0$, logo $f(x) \leq f(y)$. ($\Leftarrow$) Da definição de derivada, se f é não-decrescente, $\frac{f(x)-f(a)}{x-a} \geq 0$. Tomando o limite, $f'(a) \geq 0$.

2) Se $f'(x) > 0$, f é estritamente crescente e injetiva. Se $f(x) = f(y)$ para $x \neq y$, pelo Teorema de Rolle existiria $z \in (x, y)$ tal que $f'(z) = 0$, uma contradição. A existência e diferenciabilidade da inversa segue do Teorema 3. □

Observação. *Note que a recíproca do item 2 não vale: uma função pode ser estritamente crescente com derivada que se anula em alguns pontos (que não são de extremo). Exemplo: $f(x) = x^3$ em $x = 0$.*

Capítulo 2

Integral de Riemann

Integral de Riemann

Definição 10

Dizemos que uma partição Q é um refinamento de uma partição P de um intervalo $[a,b]$ se $P \subseteq Q$. (Lembre-se da definição de partição na Definição 7).

Teorema 14

Suponha que $[a,b]$ é um intervalo e P uma partição tal que Q refina P (ou seja, $P \subseteq Q$), e $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ é uma função limitada. Então:

- A soma inferior não diminui: $s(f;P) \leq s(f;Q)$
- A soma superior não aumenta: $S(f;P) \geq S(f;Q)$

Demonstração. Provamos por indução no tamanho da diferença $k = |Q \setminus P|$. O caso base em que $|Q \setminus P| = 0$ é trivial, pois ele implica que $Q = P$. Supondo então válida para todo par $\tilde{P} \subseteq \tilde{Q}$ de partições com $|\tilde{Q} \setminus \tilde{P}| = k - 1$.

Tome um $\lambda \in Q \setminus P$ qualquer. Então $R = Q \setminus \{\lambda\}$ é um refinamento de P, porém com $|R \setminus P| = k-1$, portanto por hipótese indutiva $s(f,P) \leq s(f,R)$ e $S(f,P) \geq S(f,R)$.

Seja $R = \{t_0, t_1, \ldots, t_m\}$ com $a = t_0 < t_1 < \cdots < t_m = b$ e suponha sem perda de generalidade que $t_i < \lambda < t_{i+1}$ com $0 \leq i < m$. (De fato, λ não pode ser uma das extremidades, pois estas são comuns a todas as partições).

Então, pondo $m' = \inf_{x \in [t_i, \lambda]} f(x)$ e $m'' = \inf_{x \in [\lambda, t_{i+1}]} f(x)$, temos:

$$s(f;Q) = \sum_{j=0}^{i-1} m_j(t_{j+1} - t_j) + m'(\lambda - t_i) + m''(t_{i+1} - \lambda) + \sum_{j=i+1}^{m-1} m_j(t_{j+1} - t_j)$$

Observe que, como $[t_i, \lambda] \subseteq [t_i, t_{i+1}]$ e $[\lambda, t_{i+1}] \subseteq [t_i, t_{i+1}]$, temos:

$$m' := \inf_{x \in [t_i, \lambda]} f(x) \geq \inf_{x \in [t_i, t_{i+1}]} f(x) =: m_i$$

$$m'' := \inf_{x \in [\lambda, t_{i+1}]} f(x) \geq \inf_{x \in [t_i, t_{i+1}]} f(x) =: m_i$$

Assim,

$$m'(\lambda - t_i) + m''(t_{i+1} - \lambda) \geq m_i(\lambda - t_i) + m_i(t_{i+1} - \lambda) = m_i(t_{i+1} - t_i)$$

Logo, aplicando na expressão anterior, $s(f;Q) \geq s(f;R)$. Analogamente, pondo $M' = \sup_{x \in [t_i, \lambda]} f(x)$ e $M'' = \sup_{x \in [\lambda, t_{i+1}]} f(x)$, temos que $M' \leq M_i$ e $M'' \leq M_i$, logo $S(f;Q) \leq S(f;R)$.

Desta forma, $s(f;P) \leq s(f;R) \leq s(f;Q)$ e $S(f;P) \geq S(f;R) \geq S(f;Q)$, e está provado o teorema por indução. $\square$

O conjunto de somas inferiores e superiores sempre existe. Além disso, temos o seguinte:

Teorema 15

Seja $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ uma função limitada. Então, para quaisquer partições P e Q de $[a,b]$, sendo $m = \inf_{x\in[a,b]} f(x)$ e $M = \sup_{x\in[a,b]} f(x)$:

$$m(b-a) \leq s(f;P) \leq S(f;Q) \leq M(b-a)$$

Em especial, $\underline{\int_a^b} f(x)dx \leq \overline{\int_a^b} f(x)dx$.

Demonstração. Como $m(b-a) = s(f;P_0)$ com $P_0 = \{a,b\}$ sendo a partição base definida anteriormente, então pelo fato de $P_0 \subseteq P$, temos $m(b-a) \leq s(f;P)$ pelo Teorema 14. Similarmente, $S(f,Q) \leq M(b-a)$.

Ademais, como $P \cup Q$ refina ambos P e Q, então novamente pelo Teorema 14:

$$s(f;P) \leq s(f;P\cup Q) \leq S(f;P\cup Q) \leq S(f;Q)$$

provando a última desigualdade central. Seja então $A = \{s(f;P) : P \in \mathcal{P}\}$ o conjunto de somas inferiores e $B = \{S(f;P) : P \in \mathcal{P}\}$ o conjunto de somas superiores. Como para todos $x \in A, y \in B$ temos $x \leq y$, temos que $\sup A \leq \inf B$, pois qualquer elemento de B é cota superior de A. (Observe que A é limitada superiormente por qualquer $S(f,Q)$ e B é limitada inferiormente por qualquer $s(f,P)$). Assim:

$$\underline{\int_a^b} f(x)dx = \sup A \leq \inf B = \overline{\int_a^b} f(x)dx$$

Isso mostra que a definição faz sentido! ☐

Teorema 16

Sejam $a < c < b$ e $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ limitada. Então:

$$\underline{\int_a^b} f(x)dx = \underline{\int_a^c} f(x)dx + \underline{\int_c^b} f(x)dx$$

$$\overline{\int_a^b} f(x)dx = \overline{\int_a^c} f(x)dx + \overline{\int_c^b} f(x)dx$$

Demonstração. Provamos para a integral inferior. O outro caso é análogo por simetria.

Lema 3. *16.1 Sejam $a < c < b$ e $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ limitada. Então:*

- *Dada uma partição $P \in \mathcal{P}([a,b])$ tal que $c \in P$, existem $A \in \mathcal{P}([a,c])$ e $B \in \mathcal{P}([c,b])$ tais que $P = A \cup B$ e vale também $s(f;P) = s(f;A) + s(f;B)$.*
- *Reciprocamente, se $A \in \mathcal{P}([a,c])$ e $B \in \mathcal{P}([c,b])$, então $A \cup B \in \mathcal{P}([a,b])$ e $s(f;A\cup B) = s(f;A)+s(f;B)$.*

Prova do lema. Seja $P = \{t_0, t_1, \ldots, t_n\}$ com $c = t_i$ para algum i. Então sendo $A = \{t_0, \ldots, t_i\}$ e $B = \{t_i, \ldots, t_n\}$, temos que $A \in \mathcal{P}([a,c])$ e $B \in \mathcal{P}([c,b])$ e:

$$s(f,A) + s(f,B) = \sum_{j=1}^{i} m_j(t_j - t_{j-1}) + \sum_{j=i+1}^{n} m_j(t_j - t_{j-1}) = \sum_{j=1}^{n} m_j(t_j - t_{j-1}) = s(f,P)$$

A recíproca segue a mesma lógica de soma de intervalos contíguos. ☐

Assim, dado $\epsilon > 0$, por propriedades de supremo existe $P \in \mathcal{P}([a,b])$ tal que $s(f,P) > \underline{\int_a^b} f - \epsilon/2$. Pelo Teorema 14, $s(f;P \cup \{c\}) \geq s(f;P) > \underline{\int_a^b} f - \epsilon$.

Pelo Lema 16.1, $P \cup \{c\} = A \cup B$ com A partição de $[a,c]$ e B partição de $[c,b]$. Então:

$$\underline{\int_a^b} f - \epsilon < s(f;P \cup \{c\}) = s(f,A) + s(f,B) \leq \underline{\int_a^c} f + \underline{\int_c^b} f$$

Como vale para todo ϵ, temos $\underline{\int_a^b} f \leq \underline{\int_a^c} f + \underline{\int_c^b} f$.

Por outro lado, dadas partições $A \in \mathcal{P}([a,c])$ e $B \in \mathcal{P}([c,b])$, temos que $A \cup B \in \mathcal{P}([a,b])$, logo:

$$s(f,A) + s(f,B) = s(f, A \cup B) \leq \underline{\int_a^b} f$$

Tomando o supremo sobre todos A e B:

$$\underline{\int_a^c} f + \underline{\int_c^b} f \leq \underline{\int_a^b} f$$

Juntando as duas desigualdades, conclui-se a igualdade. □

Corolário 16.1

Seja $P = \{t_0, \ldots, t_m\}$ uma partição do intervalo $[a,b]$, e $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ uma função escada, ou seja, uma função constante e igual a α_i em cada um dos intervalos abertos (t_{i-1}, t_i) para todo $1 \leq i \leq m$. Então:

$$\underline{\int_a^b} f(x)dx = \overline{\int_a^b} f(x)dx = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i (t_i - t_{i-1})$$

(Nota: Os valores nas extremidades t_i não importam).

Demonstração. Pelo Teorema 16, aplicado repetidamente (ou seja, via indução) temos que

$$\underline{\int_a^b} f(x)dx = \sum_{i=1}^{m} \underline{\int_{t_{i-1}}^{t_i}} f(x)dx$$

Afirmamos que $\underline{\int_{t_{i-1}}^{t_i}} f(x)dx = \alpha_i(t_i - t_{i-1})$. De fato, para todo ϵ pequeno (por exemplo, $\epsilon < \frac{1}{2}(t_i - t_{i-1})$) temos:

$$\underline{\int_{t_{i-1}}^{t_i}} f(x)dx = \underline{\int_{t_{i-1}}^{t_{i-1}+\epsilon}} f(x)dx + \underline{\int_{t_{i-1}+\epsilon}^{t_i-\epsilon}} f(x)dx + \underline{\int_{t_i-\epsilon}^{t_i}} f(x)dx$$

Observemos que, como $m_i \leq f(x) \leq M_i$ para todo $x \in [t_{i-1}, t_{i-1}+\epsilon]$, então:

$$\min(f(t_{i-1}), \alpha_i) \cdot \epsilon \leq \underline{\int_{t_{i-1}}^{t_{i-1}+\epsilon}} f(x)dx \leq \max(f(t_{i-1}), \alpha_i) \cdot \epsilon$$

E algo análogo vale para a integral de $t_i - \epsilon$ até t_i. Na integral do meio, a função é simplesmente constante e igual a α_i nesse intervalo. Logo:

$$\min(f(t_{i-1}), \alpha_i) \cdot \epsilon + (t_i - t_{i-1} - 2\epsilon)\alpha_i + \min(f(t_i), \alpha_i) \cdot \epsilon \leq \underline{\int_{t_{i-1}}^{t_i}} f(x)dx$$
$$\leq \max(f(t_{i-1}), \alpha_i) \cdot \epsilon + (t_i - t_{i-1} - 2\epsilon)\alpha_i + \max(f(t_i), \alpha_i) \cdot \epsilon$$

Pondo $m = \min(f(t_{i-1}), \alpha_i)$, $M = \max(f(t_{i-1}), \alpha_i)$, $r = \min(f(t_i), \alpha_i)$ e $R = \max(f(t_i), \alpha_i)$, temos:

$$(m + r - 2\alpha_i)\epsilon + \alpha_i(t_i - t_{i-1}) \leq \underline{\int_{t_{i-1}}^{t_i}} f(x)dx \leq (M + R - 2\alpha_i)\epsilon + \alpha_i(t_i - t_{i-1})$$

Como a desigualdade vale para todo $\epsilon > 0$, fazendo $\epsilon \to 0$, pelo teorema do sanduíche (ou pela arbitrariedade do ϵ), obtemos:

$$\underline{\int_{t_{i-1}}^{t_i}} f(x)dx = \alpha_i(t_i - t_{i-1})$$

O mesmo argumento se aplica para a integral superior $\overline{\int_a^b} f(x)dx$, resultando no mesmo valor. □

Linearidade da Integral

Sejam $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ limitadas. Então:

$$\underline{\int_a^b} f(x)dx + \underline{\int_a^b} g(x)dx \leq \underline{\int_a^b} [f(x) + g(x)]dx \leq \overline{\int_a^b} [f(x) + g(x)]dx \leq \overline{\int_a^b} f(x)dx + \overline{\int_a^b} g(x)dx$$

Demonstração. 1. Quando $c < 0$, $\underline{\int_a^b} c \cdot f = c\overline{\int_a^b} f$ e $\overline{\int_a^b} c \cdot f = c \cdot \underline{\int_a^b} f$.

2. Quando $c > 0$, $\underline{\int_a^b} c \cdot f = c\underline{\int_a^b} f$ e $\overline{\int_a^b} c \cdot f = c \cdot \overline{\int_a^b} f$.

Prova de 1) A segunda desigualdade é o Teorema 15 aplicado à $f + g$ e a terceira desigualdade é análoga à primeira.

Para provar a primeira desigualdade, observemos que para qualquer intervalo $[c, d] \subseteq [a, b]$,

$$\inf(f) + \inf(g) \leq \inf(f + g)$$

uma vez que a primeira é uma cota inferior de $f + g$ em $[c, d]$. Assim, para qualquer partição P de $[a, b]$,

$$s(f; P) + s(g; P) \leq s(f + g; P)$$

Para mostrar a desigualdade então observemos que, para toda partição P de $[a, b]$,

$$\underline{\int_a^b} [f(x) + g(x)]dx \geq s(f + g; P) \geq s(f; P) + s(g; P)$$

e portanto

$$\underline{\int_a^b} [f(x) + g(x)]dx = \sup_{P \in \mathcal{P}([a,b])} (s(f; P) + s(g; P)) = \sup_{P \in \mathcal{P}([a,b])} s(f; P) + \sup_{P \in \mathcal{P}([a,b])} s(g; P)$$

$$= \underline{\int_a^b} f(x)dx + \underline{\int_a^b} g(x)dx$$

Prova de 2) Para $c > 0$, observamos que para toda partição P de $[a, b]$ vale

$$s(c \cdot f; P) = c \cdot s(f; P)$$

dessa forma

$$\underline{\int_a^b} cf = \sup\{s(c \cdot f; P) : P \in \mathcal{P}([a,b])\}$$

$$= c \cdot \sup\{s(f;P) : P \in \mathcal{P}([a,b])\} = c \underline{\int_a^b} f$$

Por simetria vale também $\overline{\int_a^b} c \cdot f = c \cdot \overline{\int_a^b} f$.

Para $c < 0$, temos para todo intervalo $[x_{i-1}, x_i] \subseteq [a,b]$ que $\inf(cf) = -c \sup(f)$ e logo $s(cf;P) = cS(f;P)$ para toda partição P de $[a,b]$. Assim, $-c > 0$ e dessa forma:

$$s(c \cdot f; P) = (-c) \cdot (-1) S(f;P) = c \cdot S(f;P)$$

$$\underline{\int_a^b} cf = \sup\{s(c \cdot f; P) : P \in \mathcal{P}([a,b])\} = \sup\{c \cdot S(f;P) : P \in \mathcal{P}([a,b])\}$$
$$= (-c) \cdot \sup\{-S(f;P) : P \in \mathcal{P}([a,b])\} = (-c) \cdot (-1) \inf\{S(f;P) : P \in \mathcal{P}([a,b])\}$$
$$= c \cdot \overline{\int_a^b} f$$

Por simetria vale também $\overline{\int_a^b} c \cdot f = c \underline{\int_a^b} f$. □

Para as demonstrações anteriores utilizamos os seguintes lemas:

Lema 4. *Sejam A, B dois conjuntos limitados superiormente. Então* $\sup(A+B) = \sup(A) + \sup(B)$.

Lema 5. *Seja A um conjunto limitado superiormente e $c > 0$. Então* $\sup(c \cdot A) = c \cdot \sup A$.

Lema 6. *Seja A um conjunto limitado inferiormente. Então $-A$ é limitado superiormente e* $\inf(-A) = -\sup(A)$.

Teorema 18 (Monotonicidade da Integral)

Sejam $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ funções limitadas e $f(x) \leq g(x)$ para todo $x \in [a,b]$. Então:

$$\underline{\int_a^b} f \leq \underline{\int_a^b} g \quad \text{e} \quad \overline{\int_a^b} f \leq \overline{\int_a^b} g$$

Demonstração. Para toda partição P de $[a,b]$, como $f \leq g$ em todo ponto, temos:

$$\inf_{x \in [t_{i-1}, t_i]} f(x) \leq \inf_{x \in [t_{i-1}, t_i]} g(x)$$

para todo $1 \leq i \leq n$ e logo:

$$s(f,P) = \sum_{i=1}^{n} \inf_{x \in [t_{i-1}, t_i]} f(x)(t_i - t_{i-1}) \leq \sum_{i=1}^{n} \inf_{x \in [t_{i-1}, t_i]} g(x)(t_i - t_{i-1}) = s(g,P)$$

Logo $s(f,P) \leq s(g,P)$. Consequentemente, como a integral inferior é o supremo das somas inferiores, para toda partição P:

$$\underline{\int_a^b} g(x)dx \geq s(g,P) \geq s(f,P)$$

de onde segue que:

$$\underline{\int_a^b} g(x)dx \geq \sup_P s(f,P) = \underline{\int_a^b} f(x)dx$$

A outra desigualdade, para a integral superior, é análoga. $\square$

Exercício 2. *Para todas as partições P e Q de $[a,b]$ e $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ limitada, vale $s(f;P)\leq S(f;Q)$.*

Corolário 4. *Seja $\mathcal{P}$ o conjunto das partições de $[a,b]$. Seja $\tilde{\mathcal{P}}\subseteq\mathcal{P}$ um subconjunto de partições. Então:*

$$\sup_{P\in\mathcal{P}} s(f,P) = \sup_{P\in\tilde{\mathcal{P}}} s(f,P)$$

$$\inf_{P\in\mathcal{P}} S(f,P) = \inf_{P\in\tilde{\mathcal{P}}} S(f,P)$$

Demonstração. Como $\tilde{\mathcal{P}}\subseteq\mathcal{P}$, então $\{s(f,P):P\in\tilde{\mathcal{P}}\}\subseteq\{s(f,P):P\in\mathcal{P}\}$. Denotando esses conjuntos por $\tilde{A}$ e A respectivamente, temos então $\sup\tilde{A}\leq\sup A$. Suponha que a desigualdade é estrita, e tome $\epsilon=\sup A-\sup\tilde{A}>0$. Por propriedades de supremos, existe $P\in\mathcal{P}$ com $s(f,P)>\sup A-\epsilon=\sup\tilde{A}$. Porém, se tomarmos uma partição $P_0\in\tilde{\mathcal{P}}$, a partição $P\cup P_0$ também pertence a $\tilde{\mathcal{P}}$ (se $\tilde{\mathcal{P}}$ for o conjunto de refinamentos) e $s(f,P\cup P_0)\geq s(f,P)>\sup\tilde{A}$. Contradição! Logo $\sup A=\sup\tilde{A}$. Por simetria, se $B=\{S(f,P):P\in\mathcal{P}\}$ e $\tilde{B}=\{S(f,P):P\in\tilde{\mathcal{P}}\}$, então $\inf B=\inf\tilde{B}$. $\square$

Isso é uma reflexão do seguinte lema (mais geral):

Lema 7. *Sejam $A'\subseteq A$ e $B'\subseteq B$ conjuntos.*

1. *Se A' é limitado inferiormente e para todo $a'\in A'$ existe $a\in A$ com $a\leq a'$ então $\inf A=\inf A'$.*
2. *Se B' é limitado superiormente e para todo $b'\in B'$ existe $b\in B$ com $b\geq b'$ então $\sup B=\sup B'$.*

Definição 5. *Dizemos que uma função $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ limitada é Riemann integrável se*

$$\overline{\int_a^b} f(x)dx = \underline{\int_a^b} f(x)dx.$$

Denotamos esse valor por $\int_a^b f(x)dx$.

Teorema 19

Uma função $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ limitada é Riemann integrável se e somente se para todo $\epsilon>0$ existe partição P de $[a,b]$ tal que $S(f,P)-s(f,P)<\epsilon$.

Demonstração. ($\Rightarrow$) Suponha que f é Riemann integrável. Seja $I=\int_a^b f(x)dx=\overline{\int_a^b}f(x)dx=\underline{\int_a^b}f(x)dx$.

Por propriedades de ínfimo e supremo, dado $\epsilon>0$ existe partição P de $[a,b]$ tal que

$$I-s(f,P)<\epsilon/2$$

e existe partição Q de $[a,b]$ tal que

$$S(f,Q)-I<\epsilon/2.$$

Logo, somando as duas desigualdades temos que $S(f,Q) - s(f,P) < \epsilon$. Considerando a partição $T = P \cup Q$ que refina ambas, temos $s(f,P) \leq s(f,T)$ e $S(f,T) \leq S(f,Q)$, e logo

$$S(f,T) - s(f,T) < \epsilon.$$

($\Leftarrow$) Para todo $\epsilon > 0$, existe P partição de $[a,b]$ tal que $S(f,P) - s(f,P) < \epsilon$.
Como $\overline{\int_a^b} f(x)dx \leq S(f,P)$ e $-\underline{\int_a^b} f(x)dx \leq -s(f,P)$, somando as duas desigualdades obtemos:

$$\overline{\int_a^b} f(x)dx - \underline{\int_a^b} f(x)dx \leq S(f,P) - s(f,P) < \epsilon.$$

Porém, do Teorema 15 sabemos que a diferença é não negativa, e logo para todo $\epsilon > 0$:

$$0 \leq \overline{\int_a^b} f(x)dx - \underline{\int_a^b} f(x)dx < \epsilon.$$

Isto implica que $\overline{\int_a^b} f(x)dx = \underline{\int_a^b} f(x)dx$, o que prova que f é Riemann integrável. $\square$

O caso geral do Teorema 19 é o seguinte:

Teorema 11 (Teorema 19B). *Sejam $A, B \subseteq \mathbb{R}$ não vazios tais que para todo $x \in A$ e $y \in B$, $x \leq y$. Então:*

$$\sup A = \inf B \iff \textit{para todo } \epsilon > 0 \textit{ existe } x \in A, y \in B \textit{ com } y - x < \epsilon.$$

Definição 12

Dada $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ limitada e $A \subseteq [a,b]$, definimos a oscilação de f em A por

$$osc_A(f) = \sup_{x \in A} f(x) - \inf_{x \in A} f(x)$$

Note que

$$S(f,P) - s(f,P) = \sum_{i=1}^{n} osc_{[t_{i-1},t_i]}(f) \cdot \Delta t_i$$

Definição 13

$f : [a,b] \to \mathbb{R}$ é uniformemente contínua se para todo $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que se $x, y \in [a,b]$ e $|x - y| < \delta$, então $|f(x) - f(y)| < \epsilon$.

Teorema 20

Toda função $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ que é contínua em um intervalo fechado $[a,b]$ é uniformemente contínua em $[a,b]$.

Teorema 21

Toda função contínua $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ é integrável.

Demonstração. Pelo Teorema 20, f é uniformemente contínua em $[a,b]$. Então, dado $\epsilon > 0$, seja $\delta > 0$ tal que $x, y \in [a,b]$ com $|x - y| < \delta$ implica $|f(x) - f(y)| < \frac{\epsilon}{b-a}$.

Seja $P \in \mathcal{P}([a,b])$, $P = \{t_0, \dots, t_n\}$ uma partição com $\max |t_i - t_{i-1}| < \delta$. Então, para todo $1 \leq i \leq n$:

$$\sup_{x \in [t_{i-1}, t_i]} f(x) - \inf_{x \in [t_{i-1}, t_i]} f(x) \leq \frac{\epsilon}{b-a}$$

Pois $t_i - t_{i-1} < \delta$. Logo, sendo $m_i := \inf_{x \in [t_{i-1}, t_i]} f(x)$ e $M_i := \sup_{x \in [t_{i-1}, t_i]} f(x)$:

$$\begin{aligned} S(f,P) - s(f,P) &= \sum_{i=1}^{n} (M_i - m_i)(t_i - t_{i-1}) \\ &< \sum_{i=1}^{n} \frac{\epsilon}{b-a}(t_i - t_{i-1}) \\ &= \frac{\epsilon}{b-a} \sum_{i=1}^{n} (t_i - t_{i-1}) \\ &= \frac{\epsilon}{b-a}(t_n - t_0) = \frac{\epsilon(b-a)}{b-a} = \epsilon \end{aligned}$$

Ou seja, mostramos que para todo $\epsilon > 0$, existe partição P com $S(f,P) - s(f,P) < \epsilon$. Em particular, dado $\epsilon > 0$, existe P com:

$$S(f,P) - \underline{\int_a^b} f(x)dx < \epsilon$$

Assim, como

$$s(f,P) \leq \underline{\int_a^b} f(x)dx \leq \overline{\int_a^b} f(x)dx \leq S(f,P)$$

temos que

$$0 \leq \overline{\int_a^b} f(x)dx - \underline{\int_a^b} f(x)dx < \epsilon$$

Como ϵ é arbitrário, segue que $\int_a^b f(x)dx = \underline{\int_a^b} f(x)dx$, e f é integrável. $\square$

Teorema 22

Sejam $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ limitadas e integráveis. Então:

1. $f \cdot g$ é integrável;
2. Se existir k tal que $0 < k < |g(x)|$ para todo $x \in [a,b]$, então f/g é integrável (ou seja, se $\inf |g(x)| > 0$);
3. $|\int_a^b f(x)dx| \leq \int_a^b |f(x)|dx$ (Desigualdade Triangular).

Demonstração. **1)** Seja $M_f = \sup |f|$ e $M_g = \sup |g|$. Então para todos $x, y \in [a,b]$:

$$|f(x)g(x) - f(y)g(y)| = |f(x)g(x) - f(x)g(y) + f(x)g(y) - f(y)g(y)|$$

$$\leq |f(x)||g(x) - g(y)| + |g(y)||f(x) - f(y)|$$

$$\leq M_f|g(x) - g(y)| + M_g|f(x) - f(y)|$$

$$\leq M \cdot (|g(x) - g(y)| + |f(x) - f(y)|) \text{ com } M = \max(M_f, M_g) \geq 0.$$

Logo, para todo intervalo $I \subseteq [a,b]$,

$$osc_I(f \cdot g) \equiv \sup_{x,y \in I} |f(x)g(x) - f(y)g(y)| \leq M[\sup_{x,y \in I}(|f(x) - f(y)| + |g(x) - g(y)|)]$$

$$\leq M \sup_{x,y \in I} |f(x) - f(y)| + M \sup_{x,y \in I} |g(x) - g(y)| = M(osc_I f + osc_I g).$$

Assim, para uma partição $P = \{t_0, t_1, \ldots, t_n\}$ de $[a,b]$:

$$S(f \cdot g, P) - s(f \cdot g, P) = \sum_{i=1}^{n} osc_{[t_{i-1},t_i]}(f \cdot g)(t_i - t_{i-1}) \leq M \sum_{i=1}^{n}(osc_I f + osc_I g)(t_i - t_{i-1})$$

$$= M[S(f,P) - s(f,P) + S(g,P) - s(g,P)].$$

Se $M = 0$, trivialmente $f \cdot g$ é integrável pois $S(f \cdot g, P) = s(f \cdot g, P)$ para toda P (de fato, $M = 0 \Rightarrow f = g = 0$). Sendo $M > 0$, como f e g são integráveis, existem partições P_0, Q_0 tais que $S(f, P_0) - s(f, P_0) < \frac{\epsilon}{2M}$ e $S(g, Q_0) - s(g, Q_0) < \frac{\epsilon}{2M}$.

Com isso,

$$\overline{\int_a^b} fg\,dx - \underline{\int_a^b} fg\,dx \leq S(fg, P_0 \cup Q_0) - s(fg, P_0 \cup Q_0)$$

$$\leq M[S(f, P_0 \cup Q_0) - s(f, P_0 \cup Q_0) + S(g, P_0 \cup Q_0) - s(g, P_0 \cup Q_0)]$$

$$\leq M[S(f, P_0) - s(f, P_0)] + M[S(g, Q_0) - s(g, Q_0)] < M \cdot \frac{\epsilon}{2M} + M \cdot \frac{\epsilon}{2M} = \epsilon.$$

Como $\epsilon > 0$ foi arbitrário, as integrais superior e inferior coincidem e $f \cdot g$ é integrável.

2) Mostraremos que $1/g$ é integrável, e depois aplicaremos a afirmação 1 sobre $f \cdot (1/g)$.

$$\left|\frac{1}{g(x)} - \frac{1}{g(y)}\right| = \frac{|g(y) - g(x)|}{|g(x)||g(y)|} < \frac{|g(y) - g(x)|}{k^2}$$

e dessa forma, para todo intervalo $I \subseteq [a,b]$,

$$osc_I \frac{1}{g} = \sup_{x,y \in I} \left|\frac{1}{g(x)} - \frac{1}{g(y)}\right| \leq \sup_{x,y \in I} \frac{|g(y) - g(x)|}{k^2} = \frac{osc_I g}{k^2}.$$

Portanto, por argumento análogo à afirmação 1, para toda partição P:

$$S(1/g, P) - s(1/g, P) \leq \frac{1}{k^2}(S(g,P) - s(g,P)).$$

Como g é integrável, dado $\epsilon > 0$ existe partição P com $S(g,P) - s(g,P) < k^2\epsilon$, logo

$$S(1/g, P) - s(1/g, P) < \frac{k^2\epsilon}{k^2} = \epsilon.$$

Logo as integrais coincidem e consequentemente o produto $f/g = f \cdot \frac{1}{g}$ é integrável.

3)

Lema 8 (Lema 22.1)**.** *Para todos $x, y \in \mathbb{R}$, $||x| - |y|| \leq |x - y|$.*

Demonstração. Pela desigualdade triangular: $|x| = |x - y + y| \leq |x - y| + |y| \Rightarrow |x| - |y| \leq |x - y|$. $|y| = |y - x + x| \leq |y - x| + |x| \Rightarrow |y| - |x| \leq |x - y|$. Logo $||x| - |y|| = \max(|x| - |y|, |y| - |x|) \leq |x - y|$. $\square$

Para todo $x, y \in [a,b]$, $||f(x)| - |f(y)|| \leq |f(x) - f(y)|$ pelo Lema 22.1. Assim, para todo intervalo $I \subseteq [a,b]$,

$$osc_I|f| = \sup_{x,y \in I} ||f(x)| - |f(y)|| \leq \sup_{x,y\in I} |f(x) - f(y)| = osc_I f.$$

Consequentemente, para toda partição P:

$$S(|f|, P) - s(|f|, P) \leq S(f, P) - s(f, P).$$

Como f é integrável, existe partição P com $S(f,P) - s(f,P) < \epsilon$.

$$\overline{\int_a^b} |f(x)|dx - \underline{\int_a^b} |f(x)|dx \leq S(|f|, P) - s(|f|, P) < \epsilon.$$

As integrais superior e inferior coincidem, logo $|f|$ é integrável. Como para todo $x \in [a,b]$, $-|f(x)| \leq f(x) \leq |f(x)|$, por monotonicidade:

$$-\int_a^b |f(x)|dx \leq \int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b |f(x)|dx \Rightarrow \left| \int_a^b f(x)dx \right| \leq \int_a^b |f(x)|dx.$$

□

Teorema 23

Sejam $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ duas funções com:

- f limitada e integrável;
- Existe $c > 0$ tal que $osc(g, J) \leq c \cdot osc(f, J)$ para todo intervalo $J \subseteq [a,b]$;

então g é integrável.

Demonstração. Dado $\epsilon > 0$, como f é integrável, existem partições P, Q de $[a,b]$ tais que $s(f,P) > \int_a^b f(x)dx - \frac{\epsilon}{2c}$ e $S(f,Q) < \int_a^b f(x)dx + \frac{\epsilon}{2c}$. Denotamos o valor da integral de f por I.

Considerando a partição comum $P \cup Q$, temos que $S(f, P\cup Q) - s(f, P \cup Q) < \frac{\epsilon}{c}$. Se $P \cup Q = \{t_0, t_1, \ldots, t_n\}$, então:

$$\begin{aligned}
S(g, P\cup Q) - s(g, P \cup Q) &= \sum_{i=1}^{n} (\sup_{[t_{i-1}, t_i]} g - \inf_{[t_{i-1},t_i]} g)(t_i - t_{i-1}) \\
&= \sum_{i=1}^{n} osc_{[t_{i-1},t_i]} g \cdot (t_i - t_{i-1}) \\
&\leq c \cdot \sum_{i=1}^{n} osc_{[t_{i-1},t_i]} f \cdot (t_i - t_{i-1}) \\
&= c \cdot [S(f, P\cup Q) - s(f, P \cup Q)] \\
&< c \cdot \frac{\epsilon}{c} = \epsilon.
\end{aligned}$$

Como ϵ é arbitrário, g é integrável pelo Teorema 14.1. □

Teorema 24

Toda função monótona $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ é integrável.

Demonstração. Vamos supor que f seja não constante e não decrescente. Logo $f(b) - f(a) > 0$. Seja $P = \{t_0, \ldots, t_n\}$ uma partição com $\max |t_i - t_{i-1}| < \delta$ tal que $\delta < \frac{\epsilon}{f(b)-f(a)}$. Temos:

$$\begin{aligned} S(f,P) - s(f,P) &= \sum_{i=1}^{n} osc_{[t_{i-1},t_i]} f \cdot (t_i - t_{i-1}) \\ &< \sum_{i=1}^{n} (f(t_i) - f(t_{i-1})) \frac{\epsilon}{f(b) - f(a)} \\ &= \frac{\epsilon}{f(b) - f(a)} \sum_{i=1}^{n} (f(t_i) - f(t_{i-1})) \\ &= \frac{\epsilon}{f(b) - f(a)} [f(t_n) - f(t_0)] \\ &= \frac{\epsilon(f(b) - f(a))}{f(b) - f(a)} = \epsilon. \end{aligned}$$

Como ϵ foi arbitrário, f é integrável. Se f for monótona não crescente, então $-f$ é integrável, logo f é integrável. Obviamente, se f é constante, o resultado segue pelos casos anteriores, cobrindo assim todos os casos. □

Integração de Riemann como limite de partições pontilhadas

Definição 6 (Definição 17)**.** *Dizemos que uma função* $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *limitada é Riemann integrável se*

$$\overline{\int_a^b} f(x)dx = \underline{\int_a^b} f(x)dx.$$

Denotamos este valor por $\int_a^b f(x)dx$.

Teorema 19

Uma função $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ limitada é Riemann integrável se e somente se para todo $\epsilon > 0$ existe uma partição P de $[a, b]$ tal que $S(f, P) - s(f, P) < \epsilon$.

Demonstração. ($\Rightarrow$) Suponha que f seja Riemann integrável. Seja $I = \int_a^b f(x)dx = \overline{\int_a^b} f(x)dx = \underline{\int_a^b} f(x)dx$. Por propriedades de ínfimo e supremo, dado $\epsilon > 0$, existe uma partição P de $[a, b]$ tal que $I - s(f, P) < \epsilon/2$ e existe uma partição Q de $[a, b]$ tal que $S(f, Q) - I < \epsilon/2$.

Logo, somando as duas desigualdades, temos que $S(f, Q) - s(f, P) < \epsilon$. Considerando a partição $T = P \cup Q$ que refina ambas, temos $s(f, P) \leq s(f, T)$ e $S(f, T) \leq S(f, Q)$, e logo $S(f, T) - s(f, T) < \epsilon$.

($\Leftarrow$) Para todo $\epsilon > 0$, exista P partição de $[a, b]$ tal que $S(f, P) - s(f, P) < \epsilon$. Como $\overline{\int_a^b} f(x)dx \leq S(f, P)$ e $-\underline{\int_a^b} f(x)dx \leq -s(f, P)$, somando as duas desigualdades obtemos:

$$\overline{\int_a^b} f(x)dx - \underline{\int_a^b} f(x)dx \leq S(f, P) - s(f, P) < \epsilon.$$

Porém, do Teorema 15 sabemos que essa diferença é não negativa, e logo para todo $\epsilon > 0$:

$$0 \leq \overline{\int_a^b} f(x)dx - \underline{\int_a^b} f(x)dx < \epsilon.$$

Isto implica que $\overline{\int_a^b} f(x)dx = \underline{\int_a^b} f(x)dx$, portanto f é Riemann integrável. $\square$

Teorema 19B (Caso Geral)

Sejam $A, B \subseteq \mathbb{R}$ não vazios tais que para todo $x \in A$ e $y \in B$, $x \leq y$. Então:

$$\sup A = \inf B \iff \text{para todo } \epsilon > 0, \text{ existe } x \in A, y \in B \text{ com } y - x < \epsilon.$$

Dada uma partição P, definimos a norma de P pela medida do maior subintervalo. Sendo $P = \{t_0, t_1, \ldots, t_n\}$ uma partição de $[a, b]$, temos:

$$|P| := \max_{1 \le i \le n} (t_i - t_{i-1}).$$

Teorema 25

A integral superior é o limite das somas superiores quando a norma da partição tende a 0:

$$\overline{\int_a^b} f(x)dx = \lim_{|P| \to 0} S(f, P).$$

Isso significa que, $\forall \epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que para toda partição P com $|P| < \delta$, vale $S(f, P) < \overline{\int_a^b} f(x)dx + \epsilon$. Analogamente, $\underline{\int_a^b} f(x)dx = \lim_{|P| \to 0} s(f, P)$.

Demonstração. Vamos supor que $M := \sup_{[a,b]} f > 0$. Para o caso $M \le 0$, basta considerar a aplicação do caso anterior na função $g(x) = f(x) + 2|M| + 1$, que satisfaz $\sup g > 0$.

Dado $\epsilon > 0$, fixe uma partição $P_\epsilon = \{t_0, \ldots, t_m\}$ tal que $S(f, P_\epsilon) < \overline{\int_a^b} f(x)dx + \frac{\epsilon}{2}$. Seja $P = \{\lambda_0, \ldots, \lambda_k\}$ uma partição de $[a, b]$ com $|P| < \delta$. Dividimos os subintervalos de P em dois conjuntos: S_j, o conjunto de subintervalos contidos em $[t_{j-1}, t_j]$, e I, o conjunto de subintervalos que cruzam as fronteiras de P_ϵ.

Observemos que existem no máximo $m - 1$ intervalos em I que cruzam pontos internos de P_ϵ. Logo, para $M_j = \sup_{[t_{j-1}, t_j]} f$:

$$S(f, P) = \sum_{i=1}^{k} \sup_{[\lambda_{i-1}, \lambda_i]} f \cdot (\lambda_i - \lambda_{i-1})$$

$$\le \sum_{j=1}^{m} M_j \sum_{i \in S_j} (\lambda_i - \lambda_{i-1}) + |I| \cdot M \cdot \delta < S(f, P_\epsilon) + mM\delta.$$

Escolhendo $\delta = \frac{\epsilon}{2mM}$, temos que $S(f, P) \le S(f, P_\epsilon) + \frac{\epsilon}{2} < \overline{\int_a^b} f(x)dx + \epsilon$.

Para a soma inferior, usamos o fato de que $S(-f, P) = -s(f, P)$ e $\overline{\int}(-f) = -\underline{\int} f$. Como $\lim_{|P| \to 0} S(-f, P) = \overline{\int_a^b}(-f)(x)dx$, segue que $\lim_{|P| \to 0} s(f, P) = \underline{\int_a^b} f(x)dx$. □

Dada uma função limitada $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ com $\lim |P_n| = 0$, temos que $\lim s(f, P_n) = \underline{\int_a^b} f(x)dx$. Dado $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que $|P| < \delta \Rightarrow S(f, P) < \int_a^b f(x)dx + \epsilon$. Como $\lim |P_n| = 0$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $n > N \Rightarrow |P_n| < \delta$. Logo, para todo $n > N$, $|S(f, P_n) - \overline{\int_a^b} f(x)dx| < \epsilon$, o que prova pela definição de limite que $\lim S(f, P_n) = \overline{\int_a^b} f(x)dx$. O caso da integral inferior é análogo.

Definição 7 (Definição 16)**.** *Dada uma partição $P = \{t_0, t_1, \ldots, t_n\}$ de $[a, b]$, um* ***pontilhamento*** *(ou partição pontilhada) de P é um conjunto $P^* = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ tal que $x_i \in [t_{i-1}, t_i]$. A soma de Riemann associada é definida por $\Sigma(f, P^*) := \sum_{i=1}^{n} f(x_i)(t_i - t_{i-1})$.*

Dizemos que $I = \lim_{|P| \to 0} \Sigma(f, P^*)$ se para todo $\epsilon > 0$ existe um $\delta > 0$ tal que para toda partição P com $|P| < \delta$ e para todo pontilhamento P^* de P, vale $|\Sigma(f, P^*) - I| < \epsilon$.

Teorema 26

Dada uma função limitada $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, f é integrável se e só se existe o limite $\lim_{|P|\to 0} \Sigma(f, P^*)$. Nesse caso, teremos que

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{|P|\to 0} \Sigma(f, P^*)$$

Ou seja, a integral é o limite da soma pontilhada.

Demonstração. ($\Rightarrow$) Suponha que f é integrável com $I := \int_a^b f(x)dx$. Pelo Teorema 25, existe $\delta_1 > 0$ tal que $|P| < \delta_1 \Rightarrow s(f, P) > I - \frac{\epsilon}{2}$ e existe $\delta_2 > 0$ tal que $|P| < \delta_2 \Rightarrow S(f, P) < I + \frac{\epsilon}{2}$. Logo, pondo $\delta = \min(\delta_1, \delta_2)$, se $|P| < \delta$, temos que:

$$I - \epsilon/2 < s(f, P) \leq \Sigma(f, P^*) \leq S(f, P) < I + \epsilon/2$$

Portanto, $|\Sigma(f, P^*) - I| < \epsilon$ para todo pontilhamento P^* com $|P| < \delta$.

($\Leftarrow$) Suponha que existe $I = \lim_{|P|\to 0} \Sigma(f, P^*)$. Então, dada $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que $|P| < \delta \Rightarrow |I - \Sigma(f, P^*)| < \epsilon/2$ para qualquer pontilhamento de P. Em particular, podemos tomar pontilhamentos com valores próximos dos supremos. Seja $P = \{t_0, \ldots, t_m\}$. Existe $x_j \in [t_{j-1}, t_j]$ com $f(x_j) > \sup f - \frac{\epsilon}{2(b-a)}$. Assim, sendo $M_j := \sup_{[t_{j-1}, t_j]} f$, para esse pontilhamento temos:

$$|I - S(f, P)| \leq |I - \Sigma(f, P^*)| + |S(f, P) - \Sigma(f, P^*)|$$

$$< \frac{\epsilon}{2} + \sum_{j=1}^{m} (M_j - f(x_j))(t_j - t_{j-1}) < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2(b-a)} \sum_{j=1}^{m} (t_j - t_{j-1}) = \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon$$

Logo, pelo Teorema 25, $I = \lim S(f, P) = \overline{\int_a^b} f(x)dx$. Analogamente, existe $y_j \in [t_{j-1}, t_j]$ com $f(y_j) < \inf f + \frac{\epsilon}{2(b-a)}$, provando que $I = \underline{\int_a^b} f(x)dx$. Portanto, f é integrável. $\square$

Condições de Integrabilidade

Definição 8. *Um conjunto $X \subseteq \mathbb{R}$ tem* ***conteúdo nulo*** *(segundo Jordan) se existe uma coleção finita de intervalos abertos $I_j = (a_j, b_j)$, $1 \leq j \leq m$, com $a_j, b_j \in \mathbb{R}$, que cobre X:*

$$X \subseteq \bigcup_{j=1}^{m} I_j$$

com $\sum_{j=1}^{m} |I_j| < \epsilon$ para qualquer $\epsilon > 0$.

Observe que todo conjunto com conteúdo nulo é limitado. Se cada I_j possui extremidades reais (não pode ser infinito), então

$$X \subseteq [\min_{1\leq i\leq n} a_i, \max_{1\leq i\leq n} b_i]$$

A união finita de intervalos abertos possui um comprimento total finito.

Podemos trivialmente substituir intervalo aberto por fechado na definição acima, pois são equivalentes. A ida é trivial; para a volta, se para todo $\epsilon > 0$ existe uma cobertura de X por intervalos fechados cuja soma dos comprimentos é menor que $\epsilon/2$, então, em particular, existem $I_1, \dots, I_m$ intervalos fechados com $\bigcup_{j=1}^{m} I_j \supseteq X$ e $\sum |I_j| < \frac{\epsilon}{2}$. Sendo $I_j = [a_j, b_j]$ e definindo

$$A_j = \left(a_j - \frac{\epsilon}{4m}, b_j + \frac{\epsilon}{4m}\right)$$

temos que

$$\sum_{j=1}^{m} |A_j| = \frac{\epsilon}{2} + \sum_{j=1}^{m} |I_j| < \epsilon$$

Isso mostra que X tem conteúdo nulo, segundo Jordan.

Teorema 27

Se $X \subseteq (a, b)$ possui conteúdo nulo, então dado $\epsilon > 0$ existe uma partição P de $[a, b]$ tal que a soma dos comprimentos dos intervalos de P que intersectam X é menor que ϵ.

Demonstração.

Lema 9. *A união finita de intervalos fechados pode ser escrita como uma união finita de intervalos fechados disjuntos.*

Demonstração. Procedemos por indução na quantidade de intervalos. O caso $m = 1$ é trivial. Suponha então válida para a união de n intervalos fechados. Seja $X = \bigcup_{j=1}^{n+1} I_j$. Por hipótese de indução existem $J_1 = [a_1, b_1], \dots, J_\lambda = [a_\lambda, b_\lambda]$ disjuntos com $a_1 \leq b_1 < a_2 \leq b_2 < \cdots < a_\lambda \leq b_\lambda$ tais que $\bigcup_{j=1}^{n} I_j = \bigcup_{k=1}^{\lambda} J_k$.

Se I_{n+1} não intersecta nenhum J_k, então a coleção é uma coleção finita de intervalos fechados disjuntos. Caso contrário, sejam J_{k_1} o primeiro e J_{k_m} o último intervalo que I_{n+1} intersecta. Então:

$$I_{n+1} \cup J_{k_1} \cup \cdots \cup J_{k_m} = [\min(a_{k_1}, a_{n+1}), \max(b_{k_m}, b_{n+1})]$$

e teremos que

$$\bigcup_{j=1}^{n+1} I_j = J_1 \cup \cdots \cup J_{k_1-1} \cup [\min(a_{k_1}, a_{n+1}), \max(b_{k_m}, b_{n+1})] \cup J_{k_m+1} \cup \cdots \cup J_\lambda$$

é uma coleção finita de intervalos fechados disjuntos. O que prova a indução. O lema para intervalos abertos é análogo. □

Se $X \subseteq (a,b)$ possui conteúdo nulo, existem $I_1, \ldots, I_n$ intervalos fechados disjuntos com $\bigcup_{j=1}^n I_j \supseteq X$ e $\sum |I_j| < \epsilon$. Podemos supor sem perda de generalidade que $I_j \subseteq (a,b)$, do contrário basta remover a parte que sai de (a,b) ou remover I_j completamente se $I_j \cap (a,b) = \emptyset$. Assim, sendo $I_j = [a_j, b_j]$, podemos tomar a partição $P = \{a, a_1, b_1, a_2, b_2, \ldots, a_n, b_n, b\}$. A soma dos comprimentos dos intervalos de P que intersectam X é:

$$\sum_{j=1}^{n}(b_j - a_j) = \sum_{j=1}^{n}|I_j| < \epsilon$$

□

Definição 9. *Dada função limitada $f : [a,b] \to \mathbb{R}$, e $x \in [a,b]$, definimos a oscilação de f no ponto x como o limite da oscilação de vizinhanças cada vez menores centradas em x:*

$$\omega(f,x) := \lim_{\delta\to 0}\omega(\delta) = \lim_{\delta\to 0} osc_{[x-\delta,x+\delta]\cap[a,b]}(f)$$

Note que $\omega(\delta)$ como função de δ é limitada (por $M - m$, com $M = \sup(f)$ e $m = \inf(f)$) e não-decrescente, assim esse limite sempre existe.

Teorema 28

Uma função $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ limitada é integrável se e somente se para todo $\delta > 0$ o conjunto de pontos com oscilação maior ou igual a δ,

$$F_\delta = \{x \in [a,b] : \omega(f,x) \geq \delta\}$$

possui conteúdo nulo (segundo Jordan, vide Definição 17).

Demonstração. ($\Rightarrow$) Suponha que f é integrável. Se existe δ tal que F_δ não possui conteúdo nulo, então existe α tal que toda cobertura de F_δ por intervalos fechados possui soma dos comprimentos dos intervalos de pelo menos α.

Assim, de toda partição P de $[a,b]$ com $I_j = [t_{j-1}, t_j]$, seja $L = \{1 \leq j \leq m : I_j \cap F_\delta \neq \emptyset\}$ o conjunto de índices dos intervalos que intersectam F_δ, então $\cup_{j\in L} I_j \supseteq F_\delta$ e logo $\sum_{j\in L}|I_j| \geq \alpha$.

Como existe $x_j \in I_j \cap F_\delta$ para todo $j \in L$, então $\mathrm{osc}_{I_j}(f) \geq \omega(f, x_j) \geq \delta$. Assim:

$$S(f,P) - s(f,P) \geq \sum_{j\in L}\mathrm{osc}_{I_j}(f)\cdot|I_j| \geq \delta\cdot\sum_{j\in L}|I_j| \geq \delta\cdot\alpha > 0$$

Como a partição P é arbitrária, $\inf(S - s) \geq \delta\alpha > 0$, e f não é integrável, contradição! Logo F_δ possui conteúdo nulo.

($\Leftarrow$) Supondo que $c(F_\delta) = 0$ para todo $\delta > 0$. Vamos precisar do seguinte lema:

Lema 10. *Seja $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ limitada. Se $\omega(f,x) < \epsilon$ para todo $x \in [a,b]$, então existe uma partição $P = \{t_0, \ldots, t_n\}$ de $[a,b]$ tal que $osc_{I_j}(f) < \epsilon$ para todo j.*

Demonstração. Denote por $\omega(f,I) := \mathrm{osc}_I(f)$ a oscilação no intervalo I. Para cada $x \in [a,b]$, vamos construir um intervalo I_x onde a função oscila pouco, isto é, onde $\omega(f, I_x) < \epsilon$.

De fato, como $\omega(f,x) < \epsilon$, ponha $\tilde{\epsilon} = \epsilon - \omega(f,x) > 0$. Então pela definição de oscilação pontual como o ínfimo das oscilações nas vizinhanças, existe δ_x tal que $\omega(f,[x-\delta_x, x+\delta_x] \cap [a,b]) < \epsilon$. Tome $I_x = (x-\delta_x, x+\delta_x) \cap [a,b]$ (de forma que $\omega(f, I_x) < \epsilon$).

Assim, como $\cup I_x = [a,b]$ é uma cobertura de $[a,b]$ por abertos e pelo Teorema de Borel-Lebesgue admite subcobertura finita $V = \{J_{x_1}, \ldots, J_{x_n}\}$. Assim $\tilde{V} = \{I_{x_1}, \ldots, I_{x_n}\}$ com I_{x_k} fechados é uma cobertura de $[a,b]$ por intervalos fechados de "baixa oscilação"(menor que ϵ).

Sejam $P = \{t_0 = a, t_1, \ldots, t_k = b\}$ as extremidades dos intervalos I_{x_m} em ordem crescente. Observemos que todo $[t_{j-1}, t_j]$ deve estar contido em algum I_{x_m} — do contrário existiria uma extremidade de algum intervalo I_{x_m} estritamente entre esses dois. Temos então nossa partição. □

Seguimos agora para finalizar a demonstração do Teorema 28: Se f é constante, é trivial. Suponha que f não é constante. Dado $\epsilon > 0$, tome $\delta = \frac{\epsilon}{2(b-a)}$.

Como F_δ tem conteúdo nulo, existe cobertura de F_δ por intervalos fechados disjuntos I_j com $\sum_{j=1}^{k} |I_j| < \frac{\epsilon}{2(M-m)}$.

Assim, $[a,b] \setminus \cup \mathrm{int}(I_j) = \cup J_j$ é uma união de intervalos fechados disjuntos. Para cada J_j, como $J_j \cap F_\delta = \emptyset$, pelo Lema 28.1 existe uma partição Q_j de J_j tal que a oscilação de cada subintervalo de Q_j é menor que δ.

Então pondo P como a união de Q_j e das extremidades dos intervalos I_j temos que (pondo $M = \sup_{[a,b]}(f), m = \inf_{[a,b]}(f)$):

$$\begin{aligned} S(f,P) - s(f,P) &= \sum_{j=1}^{m} [S(f,Q_j) - s(f,Q_j)] + \sum_{j=1}^{k} \mathrm{osc}_{\bar{I}_j}(f)|I_j| \\ &\leq \sum_{j=1}^{m} \delta \cdot |Q_j| + (M-m) \sum_{j=1}^{k} |I_j| \\ &\leq \delta \cdot (b-a) + (M-m) \cdot \frac{\epsilon}{2(M-m)} \\ &= \frac{\epsilon}{2(b-a)} \cdot (b-a) + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon \end{aligned}$$

Como $\epsilon > 0$ é arbitrária, f é integrável. Isso finaliza a demonstração do Teorema 28. □

Teorema 29 (auxiliar para o Teorema 30)

Dada $f : [a,b] \to \mathbb{R}$, f é contínua em x se e só se $\omega(f,x) = 0$.

Reciprocamente, o conjunto de descontinuidades de f é $D_f = \{x \in [a,b] : \omega(f,x) > 0\}$.

Demonstração. f é contínua em x se dado $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que $y \in (x-\delta, x+\delta)$ implica $|f(y) - f(x)| < \epsilon$. Isso é equivalente a, para todo $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que $\omega(f, [a,b] \cap (x-\delta, x+\delta)) < \epsilon$, o que é equivalente a $\lim_{\delta \to 0} \omega(f, [a,b] \cap (x-\delta, x+\delta)) = 0$, ou seja $\omega(f,x) = 0$. Vide Definição 18. □

Teorema 30 (Caracterização da Integrabilidade)

Uma função limitada $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ é integrável por Riemann se e só se o seu conjunto de descontinuidades D_f possui medida nula.

Demonstração. Observe que, pelo Teorema 29, o conjunto de descontinuidades D_f é

$$D_f = \{x \in [a,b] : \omega(f,x) > 0\} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} F_{1/n}$$

($\Rightarrow$) Se f é integrável, então pelo Teorema 28, todo $F_{1/n}$ possui conteúdo nulo. Então, dado $\epsilon > 0$, existe uma cobertura finita $U_n = \{I_{n,j}\}_{j=1}^{k_n}$ de $F_{1/n}$ por intervalos abertos com $\sum_{j=1}^{k_n} |I_{n,j}| < \frac{\epsilon}{2^n}$.

Temos que $\cup_{n=1}^{\infty} U_n$ cobre D_f. Portanto,

$$\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{k_n} |I_{n,j}| < \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\epsilon}{2^n} = \epsilon$$

Assim, D_f tem medida nula (segundo Lebesgue).

($\Leftarrow$) Suponha que D_f possui medida nula. Então cada $F_{1/n}$ também possui medida nula. Precisamos do seguinte lema:

Lema 11. *Para todo $\delta > 0$, $F_\delta = \{x \in [a,b] : \omega(f,x) \geq \delta\}$ é compacto.*

Demonstração. F_δ já é limitado. Vamos provar que é fechado. Sendo (x_n) uma sequência convergente em F_δ com $x = \lim x_n$, precisamos mostrar que $x \in F_\delta$. De fato, para todo $\epsilon > 0$, existe x_n com $x_n \in (x-\epsilon, x+\epsilon)$, e tomando um intervalo centrado em x_n, $I_{x_n} \subseteq (x-\epsilon, x+\epsilon) \cap [a,b]$, temos que $\omega(f,(x-\epsilon,x+\epsilon)) \geq \omega(f, I_{x_n}) \geq \delta$ para todo ϵ. Logo $\omega(f,x) = \inf \omega(f,(x-\epsilon,x+\epsilon)) \geq \delta$, logo $x \in F_\delta$. Logo F_δ é compacto. ☐

Assim, como $F_{1/n}$ possui medida nula, isto é, dado $\epsilon > 0$ existe cobertura por abertos $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ com $\sum |I_n| < \epsilon$, e é compacto pelo Lema, então pelo Teorema de Borel-Lebesgue existe uma subcobertura finita dessa cobertura, cujo tamanho total também vai ser menor que ϵ. Ou seja, $F_{1/n}$ possui conteúdo nulo.

Dado $\delta > 0$, existe $m \in \mathbb{N}$ com $\frac{1}{m} < \delta$, e logo $E_{1/m} \supseteq E_\delta$. Como $E_{1/m}$ possui conteúdo nulo, então E_δ também possui conteúdo nulo. Como $\delta > 0$ foi arbitrário, todo E_δ possui conteúdo nulo, e pelo Teorema 28 segue que f é integrável. ☐

Teorema Fundamental do Cálculo e outras fórmulas clássicas

Definição 10. *Dada uma função $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ integrável, definiremos a* ***integral indefinida*** *como a função $F : [a, b] \to \mathbb{R}$,*

$$F(x) := \int_a^x f(t)dt$$

Teorema 31

Seja $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ integrável.

1. Então sua integral indefinida F é lipschitziana (e portanto, uniformemente contínua).
2. Se f é contínua em $c \in [a, b]$, então sua integral indefinida F é derivável em c e $F'(c) = f(c)$.

Demonstração. 1) Como f é integrável, é limitada: existe K tal que $|f(t)| \le K$ para todo $t \in [a, b]$. Então se $x, y \in [a, b]$:

$$|F(y) - F(x)| = \left| \int_a^y f(t)dt - \int_a^x f(t)dt \right| = \left| \int_x^y f(t)dt \right| \le K|y - x|$$

F é lipschitziana. Consequentemente, dado $\epsilon > 0$ podemos tomar $\delta = \frac{\epsilon}{2\max(K,1)}$ de forma que $|y - x| < \delta$ implica $|F(x) - F(y)| < \epsilon$, e F é uniformemente contínua.

2) Suponha que, além de integrável, f é contínua no ponto $c \in (a, b)$. Então dado $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que $|x - c| < \delta \implies |f(x) - f(c)| < \epsilon/2$. Portanto:

$$f(c) - \epsilon/2 < f(x) < f(c) + \epsilon/2$$

Portanto, dado um x com $|x - c| < \delta$:

- Se $x \ge c$, então temos por monotonicidade:

$$\int_c^x (f(c) - \epsilon/2)dt \le \int_c^x f(t)dt \le \int_c^x (f(c) + \epsilon/2)dt$$

$$\Rightarrow (f(c) - \epsilon/2)(x - c) \le \int_c^x f(t)dt \le (f(c) + \epsilon/2)(x - c) \quad (*)$$

- Se $x \le c$, então temos por monotonicidade que $(f(c) + \epsilon/2)(c - x) \ge \int_x^c f(t)dt \ge (f(c) - \epsilon/2)(c - x)$. Isto é, como $\int_c^x f(t)dt = -\int_x^c f(t)dt$, temos que:

$$(f(c) + \epsilon/2)(x - c) \le \int_c^x f(t)dt \le (f(c) - \epsilon/2)(x - c) \quad (**)$$

Dividindo ambos $(*)$ e $(**)$ por $x - c$ (que no segundo caso é negativo) temos que:

$$f(c) - \epsilon/2 \le \frac{\int_c^x f(t)dt}{x - c} = \frac{F(x) - F(c)}{x - c} \le f(c) + \epsilon/2$$

Isto é, para todo $\epsilon > 0$ existe δ tal que $|x - c| < \delta$ implica $|\frac{F(x)-F(c)}{x-c} - f(c)| < \epsilon$. Pela definição de derivada $F'(c) = \lim_{x \to c} \frac{F(x)-F(c)}{x-c} = f(c)$. □

Definição 11. *Dada uma função $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ dizemos que $F : [a, b] \to \mathbb{R}$ é uma* ***primitiva*** *de f se $F' = f$ em todo ponto.*

Observação: Apesar da mesma notação (F), integral indefinida e primitiva são objetos diferentes. De fato, uma função não precisa ter nenhuma propriedade em especial (ser integrável, etc), a priori, para possuir uma primitiva, e possuirá infinitas primitivas distintas. Se G_1, G_2 são duas primitivas, $G_1' - G_2' = (G_1 - G_2)' = 0$, logo $G_1 - G_2$ é uma constante em todo ponto do intervalo.

Pelo Teorema 31, se f é contínua então sua integral indefinida é uma primitiva. O que provaremos com o **Teorema Fundamental do Cálculo** é que não é necessário assumir que f é contínua; se f possui ao menos uma primitiva e é integrável, então sua integral indefinida é uma das primitivas.

Teorema 32 (Teorema Fundamental do Cálculo)

Se $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ é integrável e possui ao menos uma primitiva F, então:

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

Obs.: Note que, como todo par de primitivas de f difere por uma constante, a quantidade $F(b)-F(a)$ é invariante e independe da escolha da primitiva.

Demonstração. Seja $(P_m)_{m\in\mathbb{N}}$ uma sequência de partições com $\lim |P_m| = 0$. Seja $P_m = \{t_0^{(m)}, \ldots, t_{k_m}^{(m)}\}$. Pelo Teorema do Valor Médio, aplicado sobre cada intervalo $[t_{i-1}^{(m)}, t_i^{(m)}]$, existe um ponto $x_i^{(m)}$ nesse intervalo tal que $F'(x_i^{(m)}) = \frac{F(t_i^{(m)})-F(t_{i-1}^{(m)})}{t_i^{(m)}-t_{i-1}^{(m)}}$.

Logo, como $F' = f$, tomando a partição pontuada $\dot{P}_m := \{x_1^{(m)}, \ldots, x_{k_m}^{(m)}\}$, temos a soma de Riemann:

$$\begin{aligned}\Sigma(f, \dot{P}_m) &= \sum_{i=1}^{k_m} f(x_i^{(m)})(t_i^{(m)} - t_{i-1}^{(m)}) = \sum_{i=1}^{k_m} [F(t_i^{(m)}) - F(t_{i-1}^{(m)})] \\ &= F(t_{k_m}^{(m)}) - F(t_0^{(m)}) = F(b) - F(a)\end{aligned}$$

Como $|P_m| \to 0$ e f é integrável, a soma de Riemann converge para a integral:

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{m\to\infty} \Sigma(f, \dot{P}_m) = F(b) - F(a)$$

□

Teorema 33 (Mudança de Variáveis)

Seja $g : [c, d] \to [a, b]$ uma função derivável com g' integrável. Se $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ é contínua, então:

$$\int_{g(c)}^{g(d)} f(x)dx = \int_c^d f(g(t))g'(t)dt$$

Demonstração. Como f é contínua, ela admite uma primitiva F (pelo Teorema 31). Pela regra da cadeia, a função composta $F \circ g$ é derivável e:

$$(F \circ g)'(t) = F'(g(t)) \cdot g'(t) = f(g(t)) \cdot g'(t)$$

Como f e g são contínuas, $f \circ g$ é contínua. Como g' é integrável, o produto $(f \circ g) \cdot g'$ é integrável. Aplicando o Teorema Fundamental do Cálculo (Teorema 32):

$$\int_c^d f(g(t)) \cdot g'(t)dt = (F \circ g)(d) - (F \circ g)(c) = F(g(d)) - F(g(c))$$

Pela definição de F como primitiva de f, o termo da direita é exatamente $\int_{g(c)}^{g(d)} f(x)dx$. A igualdade segue. $\square$

Observação: Informalmente, ao utilizar na prática uma mudança de variáveis, temos uma integral $I = \int_a^b f(x)dx$. Encontramos um padrão que nos permite extrair uma nova variável: $f(x)dx = g(u)du$ para alguma g. Encontramos c, d tais que $u(c) = a$ e $u(d) = b$, e escrevemos:

$$I = \int_a^b f(x)dx = \int_{u(c)}^{u(d)} g(u)du = \int_c^d g(u(t))u'(t)dt$$

que é o que obtemos no "$du = u'(t)dt$"informalmente.

Teorema 34 (Integração por Partes)

Sejam $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ com derivadas tais que ambas f' e g' são integráveis. Então:

$$\int_a^b f(x)g'(x)dx + \int_a^b f'(x)g(x)dx = f(b)g(b) - f(a)g(a)$$

Demonstração. Como f e g possuem derivadas, elas são contínuas e portanto integráveis. Logo os produtos fg' e $f'g$ são integráveis. Pela regra do produto:

$$(fg)'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$$

Como a soma de integráveis é integrável, $(fg)'$ é integrável e fg é uma primitiva de $(fg)'$. Pelo Teorema Fundamental do Cálculo:

$$\int_a^b (fg)'(x)dx = (fg)(b) - (fg)(a)$$

$$\int_a^b [f'(x)g(x) + f(x)g'(x)]dx = f(b)g(b) - f(a)g(a)$$

Pela linearidade da integral, obtemos o resultado. $\square$

Limites de integrais e integrais impróprias

Teorema 35

Seja $f : (a,b] \to \mathbb{R}$ tal que f é limitada em $(a,b]$ e integrável em $[c,b]$ para todo $c \in (a,b)$. Então f é integrável em $[a,b]$ e:

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{c \to a^+} \int_c^b f(x)dx$$

Demonstração. Como f é limitada em (a,b) e está definida em b, então existe K tal que $|f(x)| \leq K$ para todo $x \in [a,b]$. Se $K = 0$, então f é identicamente nula e o resultado é trivial. Suponhamos então $K > 0$.

Dado $\epsilon > 0$, ponha $c_\epsilon = \min(a + \frac{\epsilon}{4K}, b)$. Como f é integrável em $[c_\epsilon, b]$, existe partição $\tilde{P}$ de $[c_\epsilon, b]$ tal que $S(f, \tilde{P}) - s(f, \tilde{P}) < \epsilon/2$.

Logo, sendo $P = \{a\} \cup \tilde{P}$ uma partição de $[a,b]$, temos:

$$\begin{aligned} S(f,P) - s(f,P) &= S(f|_{[c_\epsilon,b]}, \tilde{P}) - s(f|_{[c_\epsilon,b]}, \tilde{P}) + (M-m)(c_\epsilon - a) \\ &< \frac{\epsilon}{2} + (M-m)(c_\epsilon - a) \leq \frac{\epsilon}{2} + 2K \cdot \frac{\epsilon}{4K} = \epsilon \end{aligned}$$

sendo $M = \sup_{[a,c_\epsilon]} f$ e $m = \inf_{[a,c_\epsilon]} f$. Logo $\inf_P [S(f,P) - s(f,P)] = 0$, e f é integrável.

highlighting a small interval [a, c$_epsilon] near the left endpoint where the function is bounded]$

Além disso, pela propriedade de aditividade da integral:

$$\left| \int_a^b f(x)dx - \int_c^b f(x)dx \right| = \left| \int_a^c f(x)dx \right| \leq \int_a^c |f(x)|dx \leq K(c-a)$$

Como $K(c-a) \to 0$ quando $c \to a^+$, o resultado segue. □

Corolário 35.1

Seja $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ limitada e integrável em todo $[c,d] \subseteq (a,b)$, então f é integrável em $[a,b]$ e $\int_a^b f(x)dx = \lim_{c\to a^+, d\to b^-} \int_c^d f(x)dx$.

Teorema 36 (Critério de Comparação)

Sejam $f, g : (a,b] \to \mathbb{R}$ tais que $0 \leq f(x) \leq g(x)$ em todo ponto e g é integrável. Então se f é integrável em $[c,b]$ para todo $c \in (a,b)$, então f é integrável em $[a,b]$ e $\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx$.

Demonstração. Como $0 \leq f(x) \leq g(x)$ e g é integrável, g é limitada e portanto f é limitada. O resultado segue do Teorema 35. □

Definição 12. *Dizemos que uma integral imprópria $\int_a^b f(x)dx$ é **absolutamente convergente** se a integral $\int_a^b |f(x)|dx$ é convergente.*

Exemplo 1: Observemos que $[0,1) = [0, \frac{1}{2}) \cup [\frac{1}{2}, \frac{2}{3}) \cup \cdots = \bigcup_{k\geq 1} I_k$ com $I_k = [1 - \frac{1}{k}, 1 - \frac{1}{k+1}]$. Temos $|I_k| = \frac{1}{k+1} - \frac{1}{k} = \frac{k-(k+1)}{k(k+1)} \Rightarrow |I_k| = \frac{1}{k(k+1)}$. Então podemos pôr $f(x) = \sum_{k\geq 1} (-1)^{k+1}(k+1)\chi_{I_k}$. Logo $\int_0^1 f(x)dx = \sum_{k\geq 1} (-1)^{k+1}(k+1)\frac{1}{k(k+1)} = \sum_{k\geq 1} \frac{(-1)^{k+1}}{k} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \cdots = \ln 2$. Porém $\int_0^1 |f(x)|dx = \sum \frac{1}{k}$, que diverge.

Teorema 37

Seja $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ (ou $[a,b), (a,b]$) contínua. Então se a integral imprópria converge absolutamente, isto é, existe $\int_a^b |f(x)|dx$, então a integral imprópria converge, isto é, existe $\int_a^b f(x)dx$. Vale que:

$$\left| \int_a^b f(x)dx \right| \leq \int_a^b |f(x)|dx$$

Nota: Na definição de integral imprópria (Definição 22) assumimos f contínua.

Demonstração. Observemos que, sendo $f^+(x) = \max(f(x), 0)$ e $f^-(x) = \max(-f(x), 0)$ as partes positiva e negativa de f, então:

$$f = f^+ - f^-$$
$$|f| = f^+ + f^-$$

de onde segue que:

$$f^+ = \frac{|f| + f}{2} \quad \text{e} \quad f^- = \frac{|f| - f}{2}$$

de onde segue que $0 \leq f^+, f^- \leq |f|$.

Como f e $|f|$ são contínuas, f^+ e f^- são contínuas. Logo, pela teoria da comparação (Corolário 36.2) segue que ambas f^+ e f^- são integráveis em (a, b) e logo $f = f^+ - f^-$ é integrável, dando:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f^+(x)dx - \int_a^b f^-(x)dx$$

$\square$

Capítulo 3

Sequências e séries de funções

Sequências e séries de funções

Definição 13 (23)**.** *Dizemos que uma sequência* (f_n) *de funções converge simplesmente (ou pontualmente) para uma função* f *(sendo* D *o domínio) se para todo* $x \in D$*,*

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$$

Obs.: Se $(a_n) \to a$ é uma sequência de números reais, e $f_n \to f$ pontualmente, **não** necessariamente $\lim f_n(a_n) = f(a)$.

Por exemplo, a sequência $f_n : (0,1) \to \mathbb{R}$, $f_n(x) = x^n$ converge pontualmente para a função identicamente nula $f \equiv 0$. Seja $a_n = (1/2)^{1/n}$. Converge para $a = 1$. Porém:

$$\lim f_n(a_n) = \lim \left((1/2)^{1/n}\right)^n = \frac{1}{2} \neq f(a) = 0$$

Teorema 38

Se $(f_n) : X \to \mathbb{R}$ são contínuas e $f_n \to f$ uniformemente, então para todo x:

$$\lim_{n\to+\infty} \lim_{t\to x} f_n(t) = \lim_{t\to x} \lim_{n\to+\infty} f_n(t) = f(x)$$

Prova:

$$\begin{aligned}\lim_{t\to x} \lim_{n\to\infty} f_n(t) &= \lim_{t\to x} f(t) \quad \text{(convergência pontual em } t\text{)}\\ &= f(x) \quad \text{(continuidade de } f\text{)}\end{aligned}$$

E por outro lado:

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} \lim_{t\to x} f_n(t) &= \lim_{n\to\infty} f_n(x) \quad \text{(continuidade de } f_n\text{)}\\ &= f(x) \quad \text{(convergência pontual em } x\text{)}\end{aligned}$$

Logo os limites coincidem.

Em particular, se $x_n \to x$, então sob essa hipótese de continuidade (convergência uniforme):

$$\lim f_n(x_n) = \lim(\lim f_n(x)) = f(x)$$

Note que isso é diferente de $\lim f_n(a_n)$, que foi o que falhou no contra-exemplo anterior.

Exemplo 2: $f_m : [0,1] \to \mathbb{R}$. Temos que

$$f_m(x) = \lim_{n\to+\infty} (\cos(m!\pi x))^{2n}$$

Temos que $f_m(x) = 1$ se $x \in \{\frac{1}{m!}, \frac{2}{m!}, \ldots, \frac{m!}{m!} = 1\}$ e 0 caso contrário. Então $f_m \to f$ pontualmente com $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \in \mathbb{Q} \\ 0 & \text{se } x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$. Ou seja, $f = \chi_{\mathbb{Q}}$ (função de Dirichlet). Ou seja, temos uma sequência de funções integráveis que converge pontualmente a uma função não integrável.

Exemplo 3: $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$f_n(x) = \frac{1}{\sqrt{n}} \sin(nx)$$

Temos que $f_n \to 0$ pontualmente (converge pontualmente para a função $f \equiv 0$). Porém $f_n'(x) = \frac{1}{\sqrt{n}} \cdot n\cos(nx) = \sqrt{n}\cos(nx)$. Em particular $f_n'(0) = \sqrt{n} \to +\infty$. Logo (f_n') não converge a f' (que seria 0).

Exemplo 4: $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$

$$f_n(x) = n^2 x(1-x^2)^n$$

Temos que $f_n(0) = f_n(1) = 0$ para todo n e $\lim f_n(x) = 0$ quando $0 < x < 1$. Pelo teste da razão:

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{f_{n+1}(x)}{f_n(x)} = \lim_{n\to+\infty} \frac{(n+1)^2}{n^2}(1-x^2) = 1 - x^2 < 1$$

Logo $f_n \to 0$ pontualmente.

Porém, fazendo $u = 1 - x^2$, $du = -2xdx$:

$$\int_0^1 f_n(x)dx = \int_0^1 n^2 x(1-x^2)^n dx = \frac{-n^2}{2}\int_1^0 u^n du = \frac{n^2}{2(n+1)}$$

Logo

$$\lim_{n\to+\infty} \int_0^1 f_n(x)dx = \lim_{n\to+\infty} \frac{n^2}{2(n+1)} = +\infty$$

Enquanto

$$\int_0^1 \lim_{n\to+\infty} f_n(x)dx = \int_0^1 0dx = 0$$

Nesse caso

$$\lim \int f_n(x)dx \neq \int \lim f_n(x)dx$$

A convergência pontual não implica poder trocar limite com integral.

Definição 14 (24)**.** *Dizemos que $f_n : X \to \mathbb{R}$ converge **uniformemente** para f, se para todo $\epsilon > 0$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que para todo $n \geq n_0$:*

$$|f_n(x) - f(x)| < \epsilon$$

para todo $x \in X$. O mesmo n_0 vale para todo x, depende apenas de ϵ.

Na convergência pontual, o n_0 é uma função de ϵ e de x.

$$f_n \to f \text{ pont.} \iff \forall\epsilon > 0, \forall x \in X, \exists n_0(\epsilon, x) : n \geq n_0 \implies |f_n(x) - f(x)| < \epsilon$$

$$f_n \to f \text{ unif.} \iff \forall\epsilon > 0, \exists n_0(\epsilon), \forall x \in X : n \geq n_0 \implies |f_n(x) - f(x)| < \epsilon$$

Teorema 39

Definindo $||f - g||_X := \sup_{x\in X} |f(x) - g(x)|$ como a norma do supremo, temos que $f_n : X \to \mathbb{R}$ converge uniformemente para $f : X \to \mathbb{R}$ se e somente se

$$\lim_{n\to+\infty} ||f_n - f||_X = 0$$

Demonstração. Dado $\epsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que eventualmente para $n \geq n_0$ a curva de f_n vai estar sempre contida entre as curvas de $f - \epsilon$ e $f + \epsilon$.

($\Rightarrow$) Suponha que $f_n \to f$ uniformemente. Então para todo $\epsilon > 0$ existe n_0 tal que para todo $x \in X$ e para todo $n \geq n_0$, $|f_n(x) - f(x)| < \epsilon$. Logo $\sup_{x\in X} |f_n(x) - f(x)| \leq \epsilon$. Logo $\lim ||f_n - f||_X = 0$.

($\Leftarrow$) Se existe esse limite, então para todo $\epsilon > 0$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que para todo $n \geq n_0$, $||f_n - f||_X < \epsilon$. Ou seja, para todo $n \geq n_0$ e para todo $x \in X$,

$$|f_n(x) - f(x)| \leq ||f_n - f||_X < \epsilon$$

Assim $f_n \to f$ uniformemente pela definição. □

Teorema 40 (Critério de Cauchy para Convergência Uniforme)

Uma sequência $f_n : X \to \mathbb{R}$ converge uniformemente se, e somente se, para todo $\epsilon > 0$ existe $N \in \mathbb{N}$ tal que para $m, n \geq N$:

$$||f_n - f_m||_X < \epsilon$$

Demonstração. ($\Rightarrow$) Suponha que (f_n) converge uniformemente e seja f a função limite. Então dado $\epsilon > 0$ existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $n \geq N$ e $x \in X$ implica $|f_n(x) - f(x)| < \frac{\epsilon}{2}$. Logo para todos $m, n \geq N$ e $x \in X$:

$$|f_n(x) - f_m(x)| \leq |f_n(x) - f(x)| + |f(x) - f_m(x)| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon$$

Como x foi arbitrário, está provado que (f_n) é de Cauchy.

($\Leftarrow$) Suponha que (f_n) é de Cauchy. Fixado $x \in X$, temos que a sequência $a_n = f_n(x)$ é de Cauchy em $\mathbb{R}$, logo converge para um dado L_x. Definimos a função $f : X \to \mathbb{R}$, $f(x) = L_x = \lim f_n(x)$, a função limite ponto-a-ponto. Basta provarmos que $f_n \to f$ uniformemente.

De fato, dado $\epsilon > 0$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $m, n \geq N$ e $x \in X \implies |f_n(x) - f_m(x)| < \epsilon/2$. Fixe $n \geq N$ qualquer. Pela desigualdade triangular, para todo $m \geq N$:

$$|f_n(x) - f(x)| \leq |f_n(x) - f_m(x)| + |f_m(x) - f(x)|$$

Tomando o limite quando $m \to \infty$:

$$\lim_{m \to +\infty} |f_n(x) - f_m(x)| = |f_n(x) - f(x)|$$

Mas, como $|f_n(x) - f_m(x)| < \frac{\epsilon}{2}$, por monotonicidade do limite $|f_n(x) - f(x)| \leq \frac{\epsilon}{2} < \epsilon$.

Observemos que isso vale para todo $x \in X$. Ou seja, dado $\epsilon > 0$ existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $n \geq N$ e $x \in X$ implica que $|f_n(x) - f(x)| < \epsilon$. É a definição de $f_n \to f$ uniformemente. □

Teorema (Critério M de Weierstrass para Convergência de Séries)

Seja $(f_n) : X \to \mathbb{R}$ sequência de funções e $f : X \to \mathbb{R}$. Seja $M_n := \sup_{x \in X} |f_n(x)|$. Se $\sum M_n$ converge, então $\sum f_n$ converge uniformemente.

Demonstração. Como $M_n \geq 0$, trata-se de uma série de termos não-negativos. Se $\sum M_n$ converge, então converge absolutamente. Ou seja, dado $\epsilon > 0$ existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $S - S_N < \epsilon$ (pondo $S_m := \sum_{i=1}^m M_i$ e $S = \lim S_m$). Assim, dado $\epsilon > 0$ existe N. Defina $F_m := \sum_{i=1}^m f_i$. Então para todos $m > n \geq N$ e $x \in X$:

$$|F_m(x) - F_n(x)| = \left| \sum_{j=n+1}^{m} f_j(x) \right| \leq \sum_{j=n+1}^{m} |f_j(x)| \leq \sum_{j=n+1}^{m} M_j$$
$$\leq S_m - S_n \leq S - S_N < \epsilon$$

E portanto pelo Critério de Cauchy (Teorema 40), (F_m) converge uniformemente. Como (F_m) é a sequência de somas parciais, então $\sum f_n$ converge uniformemente. □

A recíproca é falsa: $f_n : X \to \mathbb{R}$ constante e igual a $(-1)^{n-1}/n$. Então como $\sum \frac{(-1)^{n-1}}{n}$ converge a uma constante, $\sum f_n$ converge uniformemente para a função $f : X \to \mathbb{R}$ constante e igual à soma da série ($\ln 2$). Por outro lado $M_n = \frac{1}{n}$ e $\sum M_n = \sum \frac{1}{n}$ é a série harmônica, que diverge.

Teorema 42 (Continuidade sob convergência uniforme)

Seja $(f_n) : X \to \mathbb{R}$ e $f : X \to \mathbb{R}$ com $f_n \to f$ uniformemente. Então

$$\lim_{n\to+\infty} \lim_{t\to x} f_n(t) = \lim_{t\to x} \lim_{n\to+\infty} f_n(t)$$

para todo $x \in X'$ (ponto de acumulação). Isso existe, assumindo que os limites parciais $\lim_{t\to x} f_n(t)$ e $\lim_{t\to x} f(t)$ ambos existem.
Em particular, se (f_n) são todas contínuas e $f_n \to f$ uniformemente, então f é contínua. (convergência uniforme preserva continuidade)

Demonstração. Ora, como existem $\lim_{t\to x} f(t)$ e $\lim_{t\to x} f_n(t)$ (pelo enunciado do Teorema), podemos definir

$$A_n = \lim_{t\to x} f_n(t) \quad \text{para todo } n \in \mathbb{N} \quad \text{e} \quad L = \lim_{t\to x} f_n(t) = \lim_{t\to x} \lim_{n\to+\infty} f_n(t)$$

(a última igualdade segue do fato que convergência uniforme implica convergência pontual).

Afirmação 1: (A_n) converge. Pela definição de limite, existe δ_n tal que $t \in B_{\delta_n}(x) \setminus \{x\}$ implica que $|A_n - f_n(t)| < \epsilon/3$. Além disso, como (f_n) é de Cauchy (pelo Teorema 40) então existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $m, n \geq N$ implica $|f_n(t) - f_m(t)| < \frac{\epsilon}{3}$ para todo $t \in X$.

Logo, dados $m, n \geq N$, podemos definir $\delta_{m,n} = \min(\delta_n, \delta_m)$, e ao tomar um ponto qualquer $t_{m,n} \in B_{\delta_{m,n}}(x) \setminus \{x\}$, segue que:

$$\begin{aligned}
|A_n - A_m| &\leq |A_n - f_n(t_{m,n})| + |f_n(t_{m,n}) - f_m(t_{m,n})| + |f_m(t_{m,n}) - A_m| \\
&< \frac{\epsilon}{3} \text{ pois } |t_{m,n} - x| < \delta_n \\
&< \frac{\epsilon}{3} \text{ pois } n, m \geq N \\
&< \frac{\epsilon}{3} \text{ pois } |t_{m,n} - x| < \delta_m \\
&= \epsilon
\end{aligned}$$

Logo (A_n) é de Cauchy, logo converge.

Afirmação 2: $L = \lim A_n$. Seja $A = \lim A_n$. Então existe $N_A \in \mathbb{N}$ tal que $n \geq N_A \implies |A - A_n| < \frac{\epsilon}{4}$. Também existe $\delta_n > 0$ tal que $t \in B_{\delta_n}(x)$ implica que $|f_n(t) - A_n| < \frac{\epsilon}{4}$. Também existe, pela convergência uniforme, $N_f \in \mathbb{N}$ tal que $n \geq N_f \Rightarrow |f_n(t) - f(t)| < \frac{\epsilon}{4}$ para todo $t \in X$. Por fim, como existe limite de f em x, existe $\delta > 0$ tal que $t \in B_\delta(x)$ implica que $|f(t) - L| < \frac{\epsilon}{4}$.

Logo, pondo para todo $n \geq \max(N_A, N_f)$, pondo $\delta_{final} = \min(\delta_n, \delta)$ e escolhendo um ponto arbitrário

$p_n \in B_{\delta_{final}}(x)$ como "testemunha" temos que:

$$\begin{aligned}
|A - L| &\leq |A - A_n| + |A_n - f_n(p_n)| + |f_n(p_n) - f(p_n)| + |f(p_n) - L| \\
&< \frac{\epsilon}{4} \text{ (pois } n \geq N_A) \\
&< \frac{\epsilon}{4} \text{ (pois } |p_n - x| < \delta_n) \\
&< \frac{\epsilon}{4} \text{ (pois } n \geq N_f) \\
&< \frac{\epsilon}{4} \text{ (pois } |p_n - x| < \delta) \\
&= \epsilon
\end{aligned}$$

Como isso vale para todo $\epsilon > 0$, então $A = L$. O que prova o teorema. $\square$

Em particular, se (f_n) todas contínuas então aplicando o Teorema que provamos temos:

$$\begin{aligned}
\lim_{t \to x} \lim_{n \to +\infty} f_n(t) &= \lim_{n \to +\infty} \lim_{t \to x} f_n(t) \\
\Rightarrow \lim_{t \to x} f(t) &= \lim_{n \to +\infty} f_n(x) \quad \text{(continuidade de } f_n) \\
&= f(x) \quad \text{(convergência pontual em } x)
\end{aligned}$$

para todo x, logo f é contínua.

Prova alternativa do Teorema 40

Sobre a volta do Teorema 40 (Critério de Cauchy), temos a seguinte explicação mais simples: Por ser de Cauchy, dado $\epsilon > 0$ existe $N_0 \in \mathbb{N}$ tal que para todos $m, n \geq N_0$ e $x \in X$, $|f_n(x) - f_m(x)| < \frac{\epsilon}{2}$. Como $(f_n(x))$ é de Cauchy, converge para um $f(x) \in \mathbb{R}$, e a função f é assim implicitamente definida (ponto a ponto). Assim, fixado x e $n \geq N_0$:

$$\frac{\epsilon}{2} \geq \lim_{m \to +\infty} |f_n(x) - f_m(x)| = |f_n(x) - \lim_{m \to +\infty} f_m(x)| = |f_n(x) - f(x)|$$

pela continuidade do Valor Absoluto em $\mathbb{R}$. Logo para todo $n \geq N_0$ e $x \in X$:

$$|f(x) - f_n(x)| \leq \frac{\epsilon}{2} < \epsilon$$

Ou seja, $f_n \to f$ uniformemente.

Prova alternativa do Teorema 42

Definimos $A_m = \lim_{t\to x} f_m(t)$. Como $f_n \to f$ uniformemente, então é de Cauchy pelo Teorema 40 (referência ao critério de Cauchy), logo dado $\epsilon > 0$ existe $N_0 \in \mathbb{N}$ tal que para todo $m, n \geq N_0$ e $t \in X$:

$$|f_n(t) - f_m(t)| < \frac{\epsilon}{2}$$

Logo, pela continuidade do valor absoluto em X, e por monotonicidade do limite:

$$\frac{\epsilon}{2} \geq \lim_{t\to x} |f_n(t) - f_m(t)| = |\lim_{t\to x} f_n(t) - \lim_{t\to x} f_m(t)| = |A_n - A_m|$$

E (A_m) é de Cauchy, logo converge. Seja $A = \lim A_m$.
Logo para todos $m, n \geq N_0$, $|A_n - A_m| \leq \frac{\epsilon}{2} < \epsilon$.
Dado $\epsilon > 0$, existe $m_0 \in \mathbb{N}$ tal que $||f_m - f||_X < \frac{\epsilon}{3}$ para todo $m \geq m_0$ pela convergência uniforme.
Existe também $M \in \mathbb{N}$ tal que $|A_m - A| < \frac{\epsilon}{3}$ para todo $m \geq M$.
Fixe $k_0 = \max(m_0, M)$. Então existe $\delta > 0$ tal que $0 < |x - t| < \delta$ implica que $|f_{k_0}(t) - A_{k_0}| < \frac{\epsilon}{3}$ pela definição de A_{k_0}.
Logo, para t tal que $0 < |x - t| < \delta$, temos:

$$\begin{aligned}
|f(t) - A| &\leq |f(t) - f_{k_0}(t)| + |f_{k_0}(t) - A_{k_0}| + |A_{k_0} - A| \\
&< \frac{\epsilon}{3} + |f_{k_0}(t) - A_{k_0}| + \frac{\epsilon}{3} \quad \text{(pois } k_0 \geq m_0 \text{ e } k_0 \geq M) \\
&< \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} \quad \text{(pois } 0 < |x - t| < \delta) \\
&= \epsilon
\end{aligned}$$

Como $\epsilon > 0$ foi arbitrário, então $\lim_{t\to x} f(t) = A$.
Intuitivamente, se n é suficientemente grande, então o δ que serve para f_n vai servir para f com um limitante similar:

$$0 < |t - x| < \delta \implies |f(t) - A| < c \cdot \epsilon$$

para alguma constante c. Ou seja, quando a convergência é uniforme, o comportamento local se assemelha em uma vizinhança para n suficientemente grande.

Teorema 43 (Teorema de Dini)

Seja K compacto, $f_n : K \to \mathbb{R}$ contínuas, tal que $f_n \to f$ pontualmente e $f_n \geq f_{n+1}$ (monotonicamente decrescente). Se f é contínua, então $f_n \to f$ uniformemente em K.

Demonstração. Seja $g_n := f_n - f$. Como $(f_n(x))_n$ é monótona decrescente com limite $f(x)$, então $g_n(x) \downarrow 0$ (decresce para 0). Além disso g_n é contínua, pois ambas f_n e f são contínuas. Dado $\epsilon > 0$, defina para todo $n \in \mathbb{N}$:

$$K_n = \{x \in K : g_n(x) \geq \epsilon\} = g_n^{-1}([\epsilon, +\infty))$$

(Note que $g_n(x) \geq 0$ para todo x).

Em algum momento, uma curva vai estar inteiramente abaixo do ϵ. Então K_n é fechado (pré-imagem de fechado por função contínua) e limitado (pois $K_n \subseteq K$), logo compacto.

Além disso, como $g_{n+1} \leq g_n$, então se $x \in K_{n+1} \implies \epsilon \leq g_{n+1}(x) \leq g_n(x) \implies x \in K_n$. Logo $K_{n+1} \subseteq K_n$ para todo n.

Se (K_n) fossem todos não vazios, então temos que a interseção de compactos encaixados não vazios é não vazia. Então existe $x_0 \in \bigcap K_n$. Isso implica que $g_n(x_0) \geq \epsilon$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Logo $\lim g_n(x_0) \geq \epsilon$. Mas $\lim g_n(x_0) = f(x_0) - f(x_0) = 0$, contradição (pois $\epsilon > 0$).

Logo, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ com $K_{n_0} = \emptyset$. E como são encaixados, logo $K_n = \emptyset$ para todo $n \geq n_0$. Isto é, para todo $n \geq n_0$ e para todo $x \in K$,

$$|f_n(x) - f(x)| = f_n(x) - f(x) = g_n(x) < \epsilon$$

E como ϵ foi arbitrário, $f_n \to f$ uniformemente. □

Teorema 43' (Dual do Teorema de Dini)

Seja K compacto, $f_n : K \to \mathbb{R}$ contínuas tal que $f_n \to f$ pontualmente e $f_n \leq f_{n+1}$. Se f é contínua, então $f_n \to f$ uniformemente em K.

Demonstração. Pelo Teorema 43, $-f_n \to -f$ uniformemente em K. O resultado segue. □

Teorema 44 (Convergência Uniforme preserva integral)

Se $f_n : [a, b] \to \mathbb{R}$ é uma sequência de funções integráveis tal que $f_n \to f$ uniformemente. Então:

- f é integrável.
- $\int_{[a,b]} f = \lim \int_{[a,b]} f_n$ (ou seja $\int \lim f_n = \lim \int f_n$).

Demonstração. Defina D_n o conjunto de descontinuidades de f_n, e D o conjunto de descontinuidades de f. Se $x \in \bigcap D_n^c$, então f_n é contínua em x para todo $n \in \mathbb{N}$, isto é, f_n é contínua em x para todo n. Então, pelo Teorema 38 (como $f_n \to f$ uniformemente e f_n contínua em x em particular), f é contínua em x. Logo $x \in D^c$. Portanto:

$$\bigcap D_n^c \subseteq D^c \Rightarrow (\bigcup D_n)^c \subseteq D^c \Rightarrow D \subseteq \bigcup D_n$$

Como f_n é integrável, D_n tem medida nula. Sendo D um subconjunto da união enumerável de conjuntos de medida nula (pois a união enumerável de conjuntos de medida nula tem medida nula), logo D possui medida nula, e f é integrável.

Agora provemos a igualdade da segunda parte. Dado $\epsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $n \geq n_0 \Rightarrow |f_n(x) - f(x)| < \frac{\epsilon}{b-a}$ para todo $x \in [a, b]$. Ou seja, $f_n \to f$ uniformemente.

Então:

$$\begin{aligned} \left| \int_a^b f_n(x)dx - \int_a^b f(x)dx \right| &= \left| \int_a^b (f_n - f)(x)dx \right| \\ &\leq \int_a^b |f_n(x) - f(x)|dx \\ &< \int_a^b \frac{\epsilon}{b-a} dx = \epsilon \end{aligned}$$

E logo $\lim \int_a^b f_n(x)dx = \int_a^b f(x)dx$. □

Exercício 2: Mostre que $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$

$$f_n(x) = \frac{x^2}{x^2 + (1-nx)^2}$$

não converge uniformemente, e nenhuma subsequência converge uniformemente também.

Contraexemplo para o Teorema de Bolzano-Weierstrass em funções

O Teorema de Bolzano-Weierstrass para sequências não vale na situação geral para funções. De fato, seja $f_n : [0, 2\pi] \to [-1, 1]$, $f_n(x) = \cos(nx)$. A sequência é uniformemente limitada (o limitante é o mesmo: $|f_n| \leq 1, \forall n$).

Se $f_{n_k} \to f$ uniformemente para alguma subsequência de índices n_k, então pontualmente $\lim(\cos(n_k x) - \cos(n_{k+1}x)) = 0$. Logo, pelo critério de Cauchy, $\lim \int(\cos(n_k x) - \cos(n_{k+1}x))^2 dx = 0$.

Porém:

$$\int_0^{2\pi} (\cos(n_k x) - \cos(n_{k+1}x))^2 dx = \int_0^{2\pi} (\cos^2(n_k x) - 2\cos(n_k x)\cos(n_{k+1}x) + \cos^2(n_{k+1}x))dx$$

Como $\int_0^{2\pi} \cos^2(mx)dx = \pi$ e $\int \cos(ax)\cos(bx)dx = 0$ se $a \neq b$, temos:

$$= \pi - 0 + \pi = 2\pi \neq 0$$

Logo não converge uniformemente.

Função contínua não diferenciável em nenhum ponto

Exemplo. *Seja*

$$\varphi(x) = |x| \quad se\ |x| \leq 1, \quad \varphi(x+2) = \varphi(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

Sendo $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (\frac{3}{4})^n \varphi(4^n x)$ *então a série converge uniformemente, para uma função contínua. Porém* f *não é diferenciável em nenhum ponto.*

Demonstração. Observemos que φ é Lipschitz, logo contínua. Sendo $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (\frac{3}{4})^n \varphi(4^n x)$ então a série converge uniformemente, para uma função contínua.

Defina $x \in \mathbb{R}$ qualquer e $m \in \mathbb{N}$. Defina $\delta_m = \pm\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4^m}$ (em que a escolha de sinal é feita de forma que não haja inteiro entre $4^m x$ e $4^m(x + \delta_m)$). Seja

$$\gamma_n = \frac{\varphi(4^n(x+\delta_m)) - \varphi(4^n x)}{\delta_m}$$

1. Se $n > m$, $4^n \delta_m = \pm\frac{1}{2}4^{n-m}$ é um inteiro par (pois $n - m \geq 1$ implica $4^{n-m}/2 = 2 \cdot 4^{n-m-1} \in 2\mathbb{Z}$) e logo $\varphi(4^n(x+\delta_m)) = \varphi(4^n x)$, o que implica $\gamma_n = 0$.

2. Se $n = m$, $4^m \delta_m = \pm\frac{1}{2}$, logo $|\varphi(4^m(x+\delta_m)) - \varphi(4^m x)| = \frac{1}{2}$ (pela inclinação ser ± 1 e não haver inteiro no meio). Logo $|\gamma_m| = \frac{1/2}{|\delta_m|} = \frac{1/2}{(1/2)4^{-m}} = 4^m$.

3. Se $n < m$, não há inteiros entre $4^n x$ e $4^n(x+\delta_m)$ e logo

$$|\gamma_n| = \frac{|\varphi(4^n(x+\delta_m)) - \varphi(4^n x)|}{|\delta_m|} \leq \frac{|4^n(x+\delta_m) - 4^n x|}{|\delta_m|} = 4^n$$

Assim,

$$\begin{aligned}
\left|\frac{f(x+\delta_m)-f(x)}{\delta_m}\right| &= \left|\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{3}{4}\right)^n \gamma_n\right| \\
&= \left|\left(\frac{3}{4}\right)^m \gamma_m + \sum_{n=0}^{m-1}\left(\frac{3}{4}\right)^n \gamma_n\right| \\
&\geq \left(\frac{3}{4}\right)^m |\gamma_m| - \sum_{n=0}^{m-1}\left(\frac{3}{4}\right)^n |\gamma_n| \\
&\geq \left(\frac{3}{4}\right)^m 4^m - \sum_{n=0}^{m-1}\left(\frac{3}{4}\right)^n 4^n \\
&= 3^m - \sum_{n=0}^{m-1} 3^n = 3^m - \frac{3^m-1}{2} = \frac{3^m+1}{2}
\end{aligned}$$

Como $\frac{3^m+1}{2} \to +\infty$, então o limite

$$\lim_{\delta\to 0}\frac{f(x+\delta)-f(x)}{\delta}$$

não existe e f não é diferenciável em x. Como x foi arbitrário, f é contínua em todo ponto e não é diferenciável em nenhum ponto. □

Diferenciabilidade sob convergência uniforme

Teorema 45

Sejam $(f_n) : [a,b] \to \mathbb{R}$ sequência de funções diferenciáveis. Se existe $c \in [a,b]$ tal que $f_n(c)$ converge e f_n' converge uniformemente, então $f_n \to f$ uniformemente, sendo f diferenciável com $f' = g$ (onde $g = \lim f_n'$).

Demonstração. Pelo TVM aplicado a $f_n - f_m$, existe um $d_{n,m}$ entre c e x tal que:

$$f_n(x) - f_m(x) = f_n(c) - f_m(c) + (x-c)(f_n'(d_{n,m}) - f_m'(d_{n,m}))$$

$$\begin{aligned}
|f_n(x) - f_m(x)| &\leq |f_n(c) - f_m(c)| + |x-c||f_n'(d_{n,m}) - f_m'(d_{n,m})| \\
&\leq |f_n(c) - f_m(c)| + (b-a)|f_n'(d_{n,m}) - f_m'(d_{n,m})|
\end{aligned}$$

Como (f_n') converge uniformemente, dado $\epsilon > 0$, existe $N_0 \in \mathbb{N}$ tal que $|f_n' - f_m'| < \frac{\epsilon}{2(b-a)}$ para todo $m, n \geq N_0$ (por ser de Cauchy, Teorema 40).

Similarmente, existe $N_1 \in \mathbb{N}$ tal que $|f_n(c) - f_m(c)| < \frac{\epsilon}{2}$ para todos $m, n \geq N_1$. Assim, $|f_n(x) - f_m(x)| \leq \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon$ para todos $m, n \geq N_2 = \max(N_0, N_1)$.

Como a convergência de (f_n) independe de x, (f_n) é de Cauchy e, portanto, uniformemente convergente (Teorema 40). Seja $f = \lim f_n$.

Fixe agora $x_0 \in (a,b)$. Para todo $x \neq x_0$, existe $d_{n,m}$ entre x e x_0 tal que:

$$f_n(x) - f_m(x) = f_n(x_0) - f_m(x_0) + (f_n'(d_{n,m}) - f_m'(d_{n,m}))(x - x_0)$$

Pondo

$$q_n(x) := \frac{f_n(x) - f_n(x_0)}{x - x_0}$$

temos que

$$q_n(x) - q_m(x) = f'_n(d_{n,m}) - f'_m(d_{n,m})$$

e

$$|q_n(x) - q_m(x)| = |f'_n(d_{n,m}) - f'_m(d_{n,m})|$$

Como (f'_n) converge uniformemente, então (q_n) é de Cauchy uniformemente para um dado x_0.

Evidentemente: 1) q_n é contínua, pois f_n é diferenciável; 2) q_n converge uniformemente para o limite pontual:

$$q(x) = \lim_{n\to+\infty} q_n(x) = \lim_{n\to+\infty} \frac{f_n(x) - f_n(x_0)}{x - x_0} = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

E logo, pela convergência uniforme e existência de limite $\lim q_n(x_0)$ (pelo Teorema de troca de limites), podemos trocar a ordem dos limites:

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x\to x_0} q(x) = \lim_{x\to x_0} \lim_{n\to+\infty} q_n(x) = \lim_{n\to+\infty} \lim_{x\to x_0} q_n(x)$$

$$= \lim_{n\to+\infty} f'_n(x_0) = g(x_0) \implies f' = g$$

□

Equicontinuidade e o Teorema de Arzela-Ascoli

Definição 15 (25)**.** *Uma família $\mathcal{F}$ de funções é dita* ***equicontínua*** *se para todo $\epsilon > 0$ existe $\delta = \delta(\epsilon) > 0$ tal que para todo $f \in \mathcal{F}$:*

$$|x - y| < \delta \implies |f(x) - f(y)| < \epsilon$$

(δ independe de x e de f).

Exemplos:

1. Se $\mathcal{F} = \{f_n : [0,1] \to [0,1], f_n(x) = \frac{x}{n}, n \geq 1\}$, então $\mathcal{F}$ é equicontínua com $\delta(\epsilon) = \epsilon$.

2. Se $\mathcal{F}$ é uma família de funções Lipschitz-contínuas com a mesma constante de Lipschitz L (mais formalmente: de forma que exista uma constante L que valha para todas as funções), então $\mathcal{F}$ é equicontínua com $\delta(\epsilon) = \frac{\epsilon}{L}$.

3. Considere $f_n : [a, b] \to \mathbb{R}$ tal que a sequência de derivadas é uniformemente limitada: f_n é diferenciável e $|f_n'(x)| \leq M$ para todo $n \in \mathbb{N}$ e $x \in [a, b]$. Então $\{f_n\}$ é equicontínua.

   De fato, pelo Teorema do Valor Médio (TVM), dados $x, y \in [a, b]$, existe $p \in (x, y)$ tal que:

   $$f_n(x) - f_n(y) = f_n'(p)(x - y)$$

   Logo $|f_n(x) - f_n(y)| \leq M|x - y|$. E caímos no exemplo anterior.

Teorema 46 (Arzela-Ascoli)

Este é o análogo de Bolzano-Weierstrass para sequências de funções.
Seja $K \subseteq \mathbb{R}$ compacto, $f_n : K \to \mathbb{R}$ contínuas tais que $|f_n(x)| \leq M_x$ para todo n (limitada pontualmente), e $\{f_n\}$ é equicontínua. Então:

1. $\{f_n\}$ é uniformemente limitada em K.

2. Existe subsequência (f_{n_k}) que converge uniformemente.

Exemplo de aplicação de Arzela-Ascoli:

Defina a norma $||\cdot||$ por $||f|| = \sup_{x \in [a,b]}(|f(x)| + |f'(x)|)$ no espaço vetorial de funções contínuas com derivada contínua, $C^1([a, b])$. Então a bola $\bar{B}_M(0)$ é sequencialmente compacta pelo Teorema de Arzela-Ascoli, ou seja, toda sequência possui subsequência convergente.

Demonstrando o teorema de Arzela-Ascoli

Definição 16 (26)**.** *Dada uma família de funções de X em $\mathbb{R}$, $\mathcal{F}$ (por exemplo, uma sequência de funções), dizemos que $\mathcal{F}$ é:*

- ***Pontualmente limitada*** *(pointwise bounded) se existe uma função não negativa $\varphi : X \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ tal que $|f| \leq \varphi$ para toda $f \in \mathcal{F}$. (ou seja $|f(x)| \leq \varphi(x)$ para toda $f \in \mathcal{F}$ e $x \in X$).*

- ***Uniformemente limitada*** *(uniformly bounded) se existe um número não negativo $M \geq 0$ tal que $|f| \leq M$ para toda $f \in \mathcal{F}$. (ou seja, $|f(x)| \leq M$ para todo $f \in \mathcal{F}$ e $x \in X$).*

Teorema 47 (Critério da seleção diagonal)

Se $(f_n) : E \to \mathbb{R}$ é uma sequência pontualmente limitada e E é enumerável (conjunto infinito enumerável), então existe uma subsequência de funções que converge em todo $x \in E$.

Prova: Ora, como (f_n) é pontualmente limitada, para todo $x \in E$ fixado, o conjunto $\{f_n(x) : n \in \mathbb{N}\}$ é limitado (pode ser visto como uma sequência limitada em $\mathbb{R}$, portanto pelo teorema de Bolzano-Weierstrass existe uma subsequência convergente).

Em particular, se $E = \{x_1, x_2, \dots\}$ é uma enumeração de E:

- Existe uma subsequência $\mathbb{N}_1 \subseteq \mathbb{N}$ tal que $(f_n(x_1))_{n\in\mathbb{N}_1}$ converge.
- Para todo k, existe uma subsequência $\mathbb{N}_{k+1} \subseteq \mathbb{N}_k$ tal que $(f_n(x_{k+1}))_{n\in\mathbb{N}_{k+1}}$ converge.

Temos a seguinte estrutura (processo diagonal): Seja $f_{k,i}$ o i-ésimo termo da subsequência $\mathbb{N}_k$. Então temos:

$$\begin{aligned}
&\mathbb{N}_1 : f_{1,1}, f_{1,2}, f_{1,3}, \dots && \text{(converge em } x_1\text{)}\\
&\mathbb{N}_2 : f_{2,1}, f_{2,2}, f_{2,3}, \dots && \text{(converge em } x_1, x_2\text{)}\\
&\mathbb{N}_3 : f_{3,1}, f_{3,2}, f_{3,3}, \dots && \text{(converge em } x_1, x_2, x_3\text{)}\\
&\quad\vdots
\end{aligned}$$

Tomamos a diagonal $g_n = f_{n,n}$. A sequência (g_n) é, a menos de um número finito de termos, uma subsequência de $\mathbb{N}_k$ para qualquer k. Portanto, $(g_n(x_k))$ converge para todo k. Como x_k varre todo E, a sequência diagonal converge em todo E.

Nessa nova linguagem, temos o seguinte enunciado do Teorema de Arzela-Ascoli:

Teorema 46 (Arzela-Ascoli)

Se K é compacto e $\{f_n\}$ é uma sequência de funções pontualmente limitada e equicontínua, então:

1. $\{f_n\}$ é uniformemente limitada.
2. $\{f_n\}$ possui subsequência uniformemente convergente.

Demonstração. I) $\{f_n\}$ é uniformemente limitada.

Como $\{f_n\}$ é equicontínua, dado $\epsilon = 1$, escolha $\delta(1)$ como um número tal que $|x - y| < \delta(1) \implies |f_n(x) - f_n(y)| < 1$, para todo $x, y \in K$ e $n \in \mathbb{N}$.

Seja $\varphi : K \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ uma cota superior pontual de $\{f_n\}$.

Como $U = \{B_{\delta(1)}(x) : x \in K\}$ é uma cobertura de K por abertos, existe uma subcobertura finita $V = \{B_{\delta(1)}(x_1), \dots, B_{\delta(1)}(x_k)\}$. Observe que se $y \in B_{\delta(1)}(x_i)$, então para todo $n \in \mathbb{N}$:

$$|f_n(y)| \leq |f_n(y) - f_n(x_i)| + |f_n(x_i)| < 1 + \varphi(x_i)$$

Ponha $M = \max_{1\leq i\leq k}[1 + \varphi(x_i)]$.

Então para todo $x \in K$ e $n \in \mathbb{N}$, existe um i tal que $x \in B_{\delta(1)}(x_i)$ (pois essas bolas formam uma cobertura finita) e logo

$$|f_n(x)| < 1 + \varphi(x_i) \leq M$$

Logo $\{f_n\}$ é uniformemente limitada, como queríamos demonstrar. Note que a escolha de 1, em vez de qualquer número positivo, foi arbitrária.

II) $\{f_n\}$ possui subsequência uniformemente convergente.

Como K é compacto, existe $E \subseteq K$ enumerável e denso. Pelo critério de seleção do Teorema 47, como a sequência de funções é pontualmente limitada, existe uma subsequência (f_{n_k}) convergente em E. Vamos mostrar que ela é uniformemente convergente em K. Denote $g_k := f_{n_k}$.

Fixe $\epsilon > 0$. Como $\{g_k\}$ é equicontínua (pois é subsequência de equicontínua), existe $\delta(\epsilon/3) > 0$ tal que $|x - y| < \delta \implies |g_k(x) - g_k(y)| < \epsilon/3$.

Como K é compacto, a cobertura $U = \{B_{\delta(\epsilon/3)}(x) : x \in K\}$ possui subcobertura finita $V = \{B_{\delta(\epsilon/3)}(x_1), \ldots, B_{\delta(\epsilon/3)}(x_p)\}$.

Para mostrar que (g_k) é uniformemente convergente, utilizaremos o critério de Cauchy.

Observemos que, como E é denso, existe $e_i \in E \cap B_{\delta(\epsilon/3)}(x_i)$.

Como (g_k) converge em E, existe $N_i \in \mathbb{N}$ tal que, para todos $m, n \geq N_i$, $|g_n(e_i) - g_m(e_i)| < \epsilon/3$.

Seja $N = \max(N_1, \ldots, N_p)$.

Assim, para todo $x \in K$ e $m, n \geq N$, existe i tal que $x \in B_{\delta(\epsilon/3)}(x_i)$. Então:

$$\begin{aligned}
|g_n(x) - g_m(x)| &\leq |g_n(x) - g_n(e_i)| + |g_n(e_i) - g_m(e_i)| + |g_m(e_i) - g_m(x)| \\
&< \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} = \epsilon
\end{aligned}$$

(Note que $|x - e_i|$ é pequeno o suficiente pela desigualdade triangular na bola, garantindo a aplicação da equicontinuidade).

Logo (g_k) converge uniformemente.

$\square$