Igor Ribeiro – 140492

CN – Atividade 4

1) a) $x^{(k+1)} = Px^{(k)} + C$, onde $P = -D^{-1}(L+U)$ e $C = D^{-1} \cdot b$

Sendo D^{-1} a matriz inversa da diagonal de A,
L a matriz triangular inferior de A,
U a matriz triangular superior de A.

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 5 & -2 & 1 \\ 2 & 4 & 1 \\ -1 & 3 & 6 \end{bmatrix}}_{A} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & 0 \end{bmatrix}}_{L} + \underbrace{\begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix}}_{D} + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}}_{U}$$

$P = -D^{-1}(L+U)$ e $C = D^{-1} \cdot b$

$$P = \begin{bmatrix} -\frac{1}{5} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{6} \end{bmatrix} \cdot \left(\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \right)$$

$$= \begin{bmatrix} -\frac{1}{5} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{6} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & -2 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ -1 & 3 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & \frac{2}{5} & -\frac{1}{5} \\ -\frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{4} \\ \frac{1}{6} & -\frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} \frac{1}{5} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{6} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 4 \\ 7 \\ 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4/5 \\ 7/4 \\ 8/6 \end{bmatrix}$$

$$x^{(k+1)} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{2}{5} & -\frac{1}{5} \\ -\frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{4} \\ \frac{1}{6} & -\frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1^{(k)} \\ x_2^{(k)} \\ x_3^{(k)} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 4/5 \\ 7/4 \\ 8/6 \end{bmatrix}$$

---

b) $\|P\|_1$

$\|C_1\|_1 = |0| + |-\frac{1}{2}| + |\frac{1}{6}| = \frac{2}{3}$

$\|C_2\|_1 = |\frac{2}{5}| + |0| + |-\frac{1}{2}| = \frac{9}{10}$

$\|C_3\|_1 = |-\frac{1}{5}| + |-\frac{1}{4}| + |0| = 9/20$

$\|P\|_1 = \max\{\frac{2}{3}, \frac{9}{10}, \frac{9}{20}\} = 9/10$

$\|P\|_\infty$

$\|R_1^T\|_1 = |0| + |\frac{2}{5}| + |-\frac{1}{5}| = 3/5$ (0,6)

$\|R_2^T\|_1 = |-\frac{1}{2}| + |0| + |-\frac{1}{4}| = 3/4$ (0,75)

$\|R_3^T\|_1 = |\frac{1}{6}| + |-\frac{1}{2}| + |0| = 2/3$ (0,66..)

$\|P\|_\infty = \max\{\frac{3}{5}, \frac{3}{4}, \frac{2}{3}\} = \frac{3}{4}$

---

c) Podemos usar o critério das linhas para confirmar que a sequência converge. No item b), no cálculo de $\|P\|_\infty$, podemos observar que todas as linhas têm módulo menor que 1.

Método de Gauss-Jacobi

$$x^0 = \begin{bmatrix} 0.8 \\ 0.9 \\ 0.7 \end{bmatrix} \qquad \begin{aligned} x_1^{(k+1)} &= \frac{2x_2^{(k)} - x_3^{(k)} + 4}{5} \\ x_2^{(k+1)} &= \frac{-2x_1^{(k)} - x_3^{(k)} + 7}{4} \\ x_3^{(k+1)} &= \frac{x_1^{(k)} - 3x_2^{(k)} + 8}{6} \end{aligned}$$

1ª iteração

$x_1^{(1)} = \frac{2(0.9) - (0.7) + 4}{5} = 1.0200$

$x_2^{(1)} = \frac{-2(0.8) - (0.7) + 7}{4} = 1.1750$

$x_3^{(1)} = \frac{(0.8) - 3(0.9) + 8}{6} = 1.0166$

$\|b - Ax^{(1)}\| = \max\{0.2354, -0.7566, -0.6046\}$

$\|b - Ax^{(1)}\| = 0.7566$

$$x^1 = \begin{bmatrix} 1.02 \\ 1.175 \\ 1.0166 \end{bmatrix}$$

2ª iteração

$x_1^{(2)} = \frac{2(1.175) - (1.0166) + 4}{5} = 1.0668$

$x_2^{(2)} = \frac{-2(1.02) - (1.0166) + 7}{4} = 0,9859$

$x_3^{(2)} = \frac{(1.02) - 3(1.175) + 8}{6} = 0.9158$

$\|b - Ax^{(1)}\| = \max\{-0.2277, 0.0066, 0.6142\}$

$\|b - Ax^{(1)}\| = 0.6142$

$$x^2 = \begin{bmatrix} 1.0668 \\ 0.9859 \\ 0.9158 \end{bmatrix}$$

Método de Gauss-Seidel

$$x^0 = \begin{bmatrix} 0.8 \\ 0.9 \\ 0.7 \end{bmatrix} \qquad \begin{aligned} x_1^{(k+1)} &= \frac{2x_2^{(k)} - x_3^{(k)} + 4}{5} \\ x_2^{(k+1)} &= \frac{-2x_1^{(k+1)} - x_3^{(k)} + 7}{4} \\ x_3^{(k+1)} &= \frac{x_1^{(k+1)} - 3x_2^{(k+1)} + 8}{6} \end{aligned}$$

1ª iteração

$x_1^{(1)} = \frac{2(0.9) - (0.7) + 4}{5} = 1.02$

$x_2^{(1)} = \frac{-2(1.02) - (0.7) + 7}{4} = 1.065$

$x_3^{(1)} = \frac{(1.02) - 3(1.065) + 8}{6} = 0.9708$

$\|b - Ax^{(1)}\| = \max\{0.0592, -0.2708, 0.0002\}$

$\|b - Ax^{(1)}\| = 0.2708$

$$x^1 = \begin{bmatrix} 1.02 \\ 1.065 \\ 0.9708 \end{bmatrix}$$

2ª iteração

$x_1^{(2)} = \frac{2(1.065) - (0.9708) + 4}{5} = 1.0318$

$x_2^{(2)} = \frac{-2(1.0318) - (0.9708) + 7}{4} = 0.9914$

$x_3^{(2)} = \frac{1.0318 - 3(0.9914) + 8}{6} = 1.0096$

$\|b - Ax^{(1)}\| = \max\{-0.1858, -0.0388, 0\}$

$\|b - Ax^{(1)}\| = 0.1858$

$$x^2 = \begin{bmatrix} 1.0318 \\ 0.9914 \\ 1.0096 \end{bmatrix}$$

Igor Ribeiro — 140492

CN — Atividade 4

2) a)

A matriz de N linhas x N colunas terá N elementos formando sua diagonal.
Como todo elemento a_{ij} é nulo para $\{j < i-1$ ou $j > i+1\}$, então a matriz é composta apenas pela diagonais central e uma acima e outra abaixo da central.
Como é uma matriz quadrada, a diagonal acima da central $(a_{12}, \dots, a_{n-1,n})$ terá $(n-1)$ elementos.
Analogamente, a diagonal abaixo também terá $(n-1)$ elementos.

Uma matriz tridiagonal, portanto, tem até $(n + (n-1) + (n-1))$ elementos, ou $(3n-2)$ elementos.

Com $n = 50$, a matriz terá um total de 2500 elementos, dos quais até $(3 \cdot (50) - 2) = 148$ serão não-nulos

Isto representa

$$\frac{148 \cdot 100}{2500} = 5{,}92\%$$

b) Como $n = 50 \Rightarrow 5{,}92\%$ das entradas são não-nulas, esta matriz é esparsa.
Portanto, eu escolheria o método de Gauss-Seidel, por ser um método iterativo. Os métodos iterativos preservam a estrutura esparsa e conseguem ser mais eficientes em uso de memória e de tempo.

3) Não, pois isto implicaria que teríamos a diagonal principal nula.
Ambos os métodos dependem que cada elemento a_{ii}, $i = 1, 2, \dots, n$ seja não-nulo, para não gerar indeterminação na hora que formos isolar os xs:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \dots + a_{1i}x_n = b_1 \\ \dots + \dots + \dots = \dots \\ a_{i1}x_1 + \dots + a_{ii}x_n = b_n \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = \dfrac{b_1 - a_{12}x_2 \cdots - a_{1n}x_n}{a_{11}} \\ \vdots \\ x_n = \dfrac{(\dots)}{a_{ii}} \end{cases} \Rightarrow$$

a_{ii} sempre entrará como denominador, o que causará problemas caso ele seja igual a 0

∴ Não podemos utilizar os dois métodos iterativos visto em aula para solucionar o sistema