Igor Ribeiro Ferreira de Matos - 140492

CN - Atividade 2

$$F = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{pqx}{(x^2+R^2)^{3/2}} \quad (I), \quad \varepsilon_0 = 8.85 \times 10^{-12}$$

1) Com $R = \sqrt{3}$, podemos substituir R^2 por $\sqrt{3}^2 = 3$, nos restando:

$$F = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{pqx}{(x^2+3)^{3/2}}$$

Então, calcularemos os polinômios de Taylor até chegarmos na equação (2) e tomaremos $x_0 = 1$

$$f'(x) = \frac{d}{dx}\left[\frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{pqx}{(x^2+3)^{3/2}}\right] = \frac{(pqx)' \cdot 4\pi\varepsilon_0 (x^2+3)^{3/2} - pqx \cdot \left(4\pi\varepsilon_0 (x^2+3)^{3/2}\right)'}{\left(4\pi\varepsilon_0 (x^2+3)^{3/2}\right)^2} = \frac{pq\,4\pi\varepsilon_0 (x^2+3)^{3/2} - pqx \cdot 4\pi\varepsilon_0 \cdot \frac{3}{2} \cdot (x^2+3)^{\frac{1}{2}} \cdot 2x}{\left(4\pi\varepsilon_0 (x^2+3)^{3/2}\right)^2} = \frac{-2pqx^2 + 3pq}{4\pi\varepsilon_0 \sqrt{x^2+3}\,(x^2+3)^2}$$

$$P_1 \left[\begin{array}{l} f(1) = \dfrac{pq}{32\pi\varepsilon_0}, \quad f'(x_0) = \dfrac{-2pqx^2+3pq}{4\pi\varepsilon_0\sqrt{x^2+3}\,(x^2+3)^2}, \quad c_1 = \dfrac{f'(1)}{1!} = \dfrac{-2pq(1)^2+3pq}{4\pi\varepsilon_0\sqrt{(1)^2+3}\,((1)^2+3)^2} = \dfrac{pq}{128\pi\varepsilon_0} \\ \\ P_1(x_0) = f(x_0) + c_1(x-x_0) \\ P_1(1) = \dfrac{pq}{32\pi\varepsilon_0} + \dfrac{pqx - pq}{128\pi\varepsilon_0} \end{array} \right.$$

como a equação ainda não é a esperada calcularemos com o polinômio seguinte

$$f''(x) = \frac{d}{dx}\left[\frac{-2pqx^2+3pq}{4\pi\varepsilon_0\sqrt{x^2+3}\,(x^2+3)^2}\right] = \frac{(-2pqx^2+3pq)' \cdot 4\pi\varepsilon_0\sqrt{x^2+3}\,(x^2+3)^2 - (-2pqx^2+3pq) \cdot \left(4\pi\varepsilon_0\sqrt{x^2+3}\,(x^2+3)^2\right)'}{\left(4\pi\varepsilon_0\sqrt{x^2+3}\,(x^2+3)^2\right)^2} = \frac{-2pq \cdot 2x \cdot 4\pi\varepsilon_0\sqrt{x^2+3}\,(x^2+3)^2 - (-2pqx^2+3pq)\left(4\pi\varepsilon_0 \left(\frac{1}{2\sqrt{x^2+3}}\right) + 4\pi\varepsilon_0\sqrt{x^2+3} \cdot 2(x^2+3) \cdot 2x\right)}{\left(4\pi\varepsilon_0\sqrt{x^2+3}\,(x^2+3)^2\right)^2}$$

$$f''(x) = \frac{6pqx^3 - 27pqx}{4\pi\varepsilon_0\sqrt{x^2+3}\,(x^2+3)^3}$$

$$P_2 \left[\begin{array}{l} f''(x_0) = \dfrac{6pqx^3 - 27pqx}{4\pi\varepsilon_0\sqrt{x^2+3}\,(x^2+3)^3}, \quad C_2 = \dfrac{f''(1)}{2!} = -\dfrac{21pq}{1024\pi\varepsilon_0} \\ \\ P_2(x_0) = f(x_0) + c_1(x-x_0) + C_2(x-x_0)^2 \\ \\ P_2(1) = \dfrac{pq}{32\pi\varepsilon_0} + \dfrac{pqx-pq}{128\pi\varepsilon_0} - \dfrac{21pqx^2 - 42pqx + 21pq}{1024\pi\varepsilon_0} \end{array} \right.$$

Isolando o termo $\left(\frac{pq}{4\pi\varepsilon_0}\right)$:

$$= \left(\frac{pq}{4\pi\varepsilon_0}\right) \cdot \left(\frac{1}{8} + \frac{x-1}{32} - \frac{21x^2 - 42x + 21}{256}\right)$$

$$= \left(\frac{pq}{4\pi\varepsilon_0}\right) \cdot \left(\frac{3+x}{32} - \frac{21 - 42x + 21x^2}{256}\right)$$

$$= \left(\frac{pq}{4\pi\varepsilon_0}\right) \cdot \left(\frac{-21x^2 + 50x + 3}{256}\right)$$

$$= \left(\frac{pq}{4\pi\varepsilon_0}\right) \cdot \left(\frac{3}{256} + \frac{25x}{128} - \frac{21x^2}{256}\right)$$

Igor Ribeiro Ferreira de Matos - 140492

CN - Atividade 2

2) $F_2(x) = \frac{pq}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{3}{256} + \frac{25}{128}x - \frac{21}{256}x^2\right)$

$p = q = 1 \times 10^{-5}$

$F_2(1.5) = \frac{1.10^{-5}.10^{-5}}{4.\pi.\varepsilon_0}\left(0{,}0117 + 0{,}1953.(1{,}5) - 0{,}0820.(1{,}5)^2\right)$

$= \frac{1.10^{-10}}{12{,}5664\,\varepsilon_0}\left(0{,}0117 + 0{,}2930 - 0{,}1845\right)$

$= \frac{0{,}1202\;.10^{-10}}{111.2126.10^{-12}} = \frac{0{,}1080.\cancel{10^{-2}}.\cancel{10^{-10}}}{\cancel{10^{-12}}} = 0{,}1080$

---

3) $F_2(1{,}5) = 0{,}1080$, $\quad F_1(1{,}5) = \frac{10^{-10}.1{,}5}{4.\pi.\varepsilon_0.(1{,}5^2+3)^{3/2}} = 0{,}112124$

$\varepsilon_R = \left|\frac{0{,}112124 - 0{,}1080}{0{,}112124}\right| = 0{,}0367807 \cong 3{,}68\%$

---

4) $F = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{pqx}{(x^2+R^2)^{3/2}} \qquad (\div\, pq)$

$\frac{F}{pq} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{x}{(x^2+R^2)^{3/2}} \qquad (\times\, 4\pi\varepsilon_0)$

$\frac{4\pi\varepsilon_0 F}{pq} = \frac{x}{(x^2+R^2)^{3/2}} \qquad \left(-\,\frac{4\pi\varepsilon_0 F}{pq}\right)$

$0 = \frac{x}{(x^2+R^2)^{3/2}} - \frac{4\pi\varepsilon_0 F}{pq}$

$\frac{x}{(x^2+R^2)^{3/2}} - \frac{4\pi\varepsilon_0 F}{pq} = 0, \quad F = 1{,}5 \quad p = 2.10^{-5} \quad q = 5.10^{-5} \quad r = 1$

Simplificando a equação (3):

$\frac{x}{(x^2+1)^{3/2}} - \frac{4.\pi.8{,}85.10^{-12}.1{,}5}{2.10^{-5}.5.10^{-5}} = \frac{x}{(x^2+1)^{3/2}} - 531\pi.10^{4} = \frac{x}{(x^2+1)^{3/2}} - 0{,}1668$

Igor Ribeiro Ferreira de Matos - 140492

CN - Atividade 2

$$\frac{x}{(x^2+1)^{3/2}} - 0{,}1668 \qquad (3)$$

5) Como visto no teorema de Bolzano, se $f(a) \cdot f(b) < 0$, em um intervalo $[a,b]$, então há pelo menos um $x^* \mid f(x^*) = 0$

Então, no intervalo $[0,1]$, podemos verificar a existência de raízes através de:

$$f(0) \cdot f(1) < 0$$

$$\left(\frac{0}{(1)^{3/2}} - 0{,}1668\right) \cdot \left(\frac{1}{(2)^{3/2}} - 0{,}1668\right) = -0{,}03115 \quad < 0$$

$\therefore$ De acordo com o teorema de Bolzano, há pelo menos uma raiz no intervalo $[0,1]$

6) $\varepsilon = 10^{-6}$, $[0,1]$

Temos que:

$$k > \log_2\left(\frac{1}{10^{-6}}\right) = \log_2(10^6) = 6\log_2(10) = 6 \cdot (3{,}3219) \approx 19{,}9314$$

Logo, serão necessários, no mínimo, 20 iterações do método da bissecção

7) $x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}$, $f(x_k) = \frac{x}{(x^2+1)^{3/2}} - 0{,}1668$, $f'(x_k) = d\left[\frac{x}{(x^2+1)^{3/2}}\right] = \frac{x' \cdot (x^2+1)^{3/2} - x \cdot ((x^2+1)^{3/2})'}{((x^2+1)^{3/2})^2} = \frac{(x^2+1)^{3/2} - x \cdot \frac{3}{2}(x^2+1)^{1/2} \cdot 2x}{((x^2+1)^{3/2})^2} = \frac{-2x^2+1}{(x^2+1)^2 \cdot \sqrt{x^2+1}}$

$x_0 = 0{,}3$

	$F(x)$	$f'(x)$
$x_0 = 0{,}3$	$f(0{,}3) = 0{,}0968219$	$f'(x) = 0{,}66107$
$x_1 = 0{,}3 - \frac{0{,}0968219}{0{,}66107} = 0{,}153538$	$f(0{,}153538) = -0{,}0185355$	$f'(x) = 0{,}998455$
$x_2 = 0{,}153538 - \frac{-0{,}0185355}{0{,}998455} = 0{,}172102$	$f(0{,}172102) = -0{,}00207063$	$f'(x) = 0{,}874557$
$x_3 = 0{,}172102 - \frac{-0{,}00207063}{0{,}874557} = 0{,}174467$	$f(0{,}174467) = 0{,}61512 \cdot 10^{-5}$	

K	x_k	$f(x_k)$	$S(K)$
0	0,3000	0,0968218	$\lvert x_{k+1} - x_k \rvert$
1	0,153538	−0,0185355	
2	0,172102	−0,00207063	
3	0,174467	− 6,1512 E −6	

8) Agora, tomando $x_0 = 0{,}7$ podemos observar:

$f(0{,}7) = 0{,}1847$

$f'(0{,}7) = 0{,}0074$

O que é um problema, pois em $x_{k+1} = x_k - \frac{f(x)}{f'(x)}$ teríamos um denominador muito próximo de zero, causando um erro muito grande.

Então, não. $x_0 = 0{,}7$ **Não** é um bom ponto inicial