Igor Ribeiro 140492

2.

a) $y = e^{a_1 + a_2 x + a_3 x^2}$

$z = \ln(y) = \ln(e^{a_1 + a_2 x + a_3 x^2})$

$\underline{z = B_1 + B_2 x + B_3 x^2}$, onde $B_1 = a_1$, $B_2 = a_2$, $B_3 = a_3$

x	-4.0	-2.0	0.0	2.0	4.0
y	5.4	2.0	1.2	1.0	1.2
z	1.6864	0.6931	0.1823	0	0.1823

$\underline{z = B_1 + B_2 x + B_3 x^2}$

$z = B_1 g_1 + B_2 g_2 + B_3 g_3$

$g_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad g_2 = \begin{bmatrix} -4 \\ -2 \\ 0 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix} \quad g_3 = \begin{bmatrix} 16 \\ 4 \\ 0 \\ 4 \\ 16 \end{bmatrix}$

$AB = b$

$A = \begin{bmatrix} \langle g_1, g_1 \rangle & \langle g_1, g_2 \rangle & \langle g_1, g_3 \rangle \\ \langle g_2, g_1 \rangle & \langle g_2, g_2 \rangle & \langle g_2, g_3 \rangle \\ \langle g_3, g_1 \rangle & \langle g_3, g_2 \rangle & \langle g_3, g_3 \rangle \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 40 \\ 0 & 40 & 0 \\ 40 & 0 & 544 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \\ B_3 \end{bmatrix}$, $b = \begin{bmatrix} \langle z, g_1 \rangle \\ \langle z, g_2 \rangle \\ \langle z, g_3 \rangle \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2.7441 \\ -7.4026 \\ 32.6716 \end{bmatrix}$

$$\begin{bmatrix} 5 & 0 & 40 \\ 0 & 40 & 0 \\ 40 & 0 & 544 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \\ B_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2.7441 \\ -7.4026 \\ 32.6716 \end{bmatrix}$$

$40 B_2 = -7.4026 \Rightarrow B_2 = -0.1851$

$\left.\begin{array}{l} 5B_1 + 4B_3 = 2.7441 \\ 40B_1 + 544B_3 = 32.6716 \end{array}\right\}$

$B_1 = \dfrac{2.7441 - 40B_3}{5}$

$\therefore$

$B_3 = \dfrac{32.6716 - 40\left(\frac{2.7441 - 40B_3}{5}\right)}{544} = 0.0479$

$\downarrow$

$B_1 = 0.1660$

$$B = \begin{bmatrix} 0.1660 \\ -0.1851 \\ 0.0479 \end{bmatrix}$$

$y = e^{0.1660 - 0.1851x + 0.0479x^2}$

b)

k	$x(k)$	$y(x_k)$	$y^*(x_k)$	$y^* - y_k$	$[y^* - y_k]^2$
1	-4	5.4	5.3271	-0.0729	0.0053
2	-2	2.0	2.0705	0.0705	0.0050
3	0	1.2	1.1806	-0.0194	0.0004
4	2	1.0	0.9875	-0.0125	0.0002
5	4	1.2	1.2117	0.0117	0.0001

$\sum [y^*(x_k) - y(x_k)]^2 = \underline{\underline{0.0110}}$

c) Não necessariamente, pois os parâmetros foram obtidos através do modelo linearizado, e não pelo original não-linear ajustado.

Igor Ribeiro 140492

1\. a) Primeiramente, vamos calcular $f(x)=\sqrt{x-3}$ nos pontos dados

x	4	7	12	19	28
$y=\sqrt{x-3}$	1	2	3	4	5

Os polinômios de Lagrange em $x=10$ é dado por:

$$L_0(x)=\frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)}=\frac{(10-7)(10-12)}{(4-7)(4-12)}=-0.2500$$

$$L_1(x)=\frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)}=\frac{(10-4)(10-12)}{(7-4)(7-12)}=0.8000$$

$$L_2(x)=\frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)}=\frac{(10-4)(10-7)}{(12-4)(12-7)}=0.4500$$

Logo,

$$f(10)\approx P_2(10)=y_0L_0(10)+y_1L_1(10)+y_2L_2(10)$$
$$=1(-0.2500)+2.(0.8000)+3.(0.4500)$$
$$f(10)=2.700$$

b) Como $f(x)=\sqrt{x-3}$ é uma função com derivadas até ordem 3 contínuas no intervalo $[x_0,x_2]=[4,12]$ temos que:

$$|f(x)-P_2(x)|\leq \mathcal{E}_{sup}(x)$$

onde

$$\mathcal{E}_{sup}(x)=\frac{M_3}{3!}\,|(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)| \quad \wedge \quad M_3=\max_{x\in[x_0,x_2]}|f'''(x)|$$

Note que

$$f(x)=\sqrt{x-3} \Rightarrow f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x-3}} \Rightarrow f''(x)=-\frac{1}{4\sqrt{x-3}\,(x-3)} \Rightarrow f'''(x)=\frac{3}{8\sqrt{x-3}\,(x-3)^2}$$

Seja $g(x)=|f'''(x)|$, $f'''(x)\geq 0 \;|\; x>0$

$g(x)$ é contínua no intervalo fechado, então atinge o máximo global nele.

Além disso, como $g'(x)=-\frac{15}{16\sqrt{x-3}\,(x-3)^3}<0$, $g(x)$ é decrescente neste intervalo

$$M_3=\frac{3}{8.(1).(1)}=\frac{3}{8}=0.3750$$

$$\mathcal{E}_{sup}=\frac{0.3750}{6}(6)(3)(2)=\boxed{-2.2500}$$

c) Considerando a forma de Newton, podemos descrever $P(x)$ como:

$$P(x)=\underbrace{1}_{a_0N_0}+\underbrace{\tfrac{1}{3}(x-4)}_{a_1N_1}-\underbrace{\tfrac{1}{60}(x-4)(x-7)}_{a_2N_2}+\underbrace{\tfrac{1}{1260}(x-4)(x-7)(x-12)}_{a_3N_3}$$

Então, para adicionarmos um termo que interpole x_3 e x_4, basta inserir a_4N_4, onde

$$N_4(x)=(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)=(x-4)(x-7)(x-12)(x-19)$$

e resolver a_4:

$\sqrt{28-3}$ $Q(x_4)=P(x_4)+a_4N_4(x_4)$ // Aplicando 28 em $p(x)$ obtemos 7

$$5=7+a_4(28-4)(28-7)(28-12)(28-19)$$

$$a_4=-\frac{1}{36288}$$

$$\therefore\; Q(x)=1+\frac{1}{3}(x-4)-\frac{1}{60}(x-4)(x-7)+\frac{1}{1260}(x-4)(x-7)(x-12)-\frac{1}{36288}(x-4)(x-7)(x-12)(x-19)$$