Igor Ribeiro Ferreira de Matos - 140492

CG

(1)

Primeiro, tomamos $P = (x, y)$ e desenvolvemos $R(\theta_1)$:

$$P' = R(\theta_1) . P$$

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ h' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta_1 & -\operatorname{Sen}\theta_1 & 0 \\ \operatorname{sen}\theta_1 & \cos\theta_1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Agora, concatenamos com $R(\theta_2)$, substituindo $P = P'$

$$P'' = R(\theta_2) . P' = R(\theta_2) R(\theta_1) P$$

$$\begin{bmatrix} x'' \\ y'' \\ h'' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta_2 & -\operatorname{Sen}\theta_2 & 0 \\ \operatorname{sen}\theta_2 & \cos\theta_2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} \cos\theta_1 & -\operatorname{Sen}\theta_1 & 0 \\ \operatorname{sen}\theta_1 & \cos\theta_1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\theta_1)\cos(\theta_2) + (-\operatorname{Sen}(\theta_1) \cdot \operatorname{Sen}(\theta_2)) & \cos(\theta_1) \cdot (-\operatorname{Sen}\theta_2) + (-\operatorname{Sen}\theta_1 \cdot \cos\theta_2) & 0 \\ \operatorname{Sen}\theta_1 \cos\theta_2 + \cos\theta_1 \operatorname{Sen}(\theta_2) & \operatorname{Sen}\theta_1 \cdot (-\operatorname{Sen}\theta_2) + \cos\theta_1 \cos\theta_2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (*)$$

Então, a partir das seguintes identidades trigonométricas:

i) $\cos(a+b) = \cos(a) . \cos(b) - \operatorname{Sen}(a) . \operatorname{sen}(b)$

ii) $\operatorname{Sen}(a+b) = \operatorname{Sen}(a)\cos(b) + \cos(a)\cos(b)$

Podemos simplificar $(*)$, tomando $a = \theta_1$ e $b = \theta_2$:

$$= \begin{bmatrix} \cos(\theta_1 + \theta_2) & -\operatorname{Sen}(\theta_1 + \theta_2) & 0 \\ \operatorname{Sen}(\theta_1 + \theta_2) & \cos(\theta_1 + \theta_2) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

(2) Pois, usando coordenadas homogêneas, podemos acumular e concatenar transformações mais facilmente, já que teríamos apenas uma matriz 3x3 definindo os processos.

(3)
- Primeiro, movemos a figura até que $P_3 = P_3'$: $T(-8, -2)$
- Então, movemos o P_3 para a origem, pois a figura irá girar em torno dela: $T(0, -4)$
- Agora, giramos a figura 90° no sentido anti-horário: $R(90°)$ ou $R(\frac{\pi}{2})$
- Desfazemos a translação até o ponto de origem: $T(0, 4)$

$$P' = T(0, -4) R(\tfrac{\pi}{2}) T^{-1}(0, -4) T(-8, 2)$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} \cos(\frac{\pi}{2}) & -\operatorname{Sen}(\frac{\pi}{2}) & 0 \\ \operatorname{Sen}(\frac{\pi}{2}) & \cos(\frac{\pi}{2}) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 1 & 0 & -8 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \cos(\pi/2) & -\operatorname{Sen}(\frac{\pi}{2}) & -8\cos(\frac{\pi}{2}) + 2\cos(\frac{\pi}{2}) \\ \operatorname{Sen}(\pi/2) & \cos(\frac{\pi}{2}) & -8\operatorname{Sen}(\frac{\pi}{2}) - 2\cos(\frac{\pi}{2}) \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & -8 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Igor Ribeiro Ferreira de Matos - 140492

CG

4)

a) Na 1) vimos que $R(\theta_1).R(\theta_2) = R(\theta_1+\theta_2)$, então, concluímos que não importa a ordem das operações de Rotação, mas sim o valor resultante de de $\theta_1+\theta_2$. Portanto:

$$R(\theta_1).R(\theta_2) = R(\theta_2).R(\theta_1) = R(\theta_1+\theta_2)$$

b) A partir de $T_1(t_{x_1}, t_{y_1})$ e $T_2(t_{x_2}, t_{y_2})$, fazemos $P' = T_1 T_2 P$ e $P'' = T_2 T_1 P$

$$P' = \begin{bmatrix} 1 & 0 & t_{x_1} \\ 0 & 1 & t_{y_2} \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & t_{x_2} \\ 0 & 1 & t_{y_2} \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & (t_{x_1}+t_{x_2}) \\ 0 & 1 & (t_{y_1}+t_{y_2}) \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$P'' = \begin{bmatrix} 1 & 0 & t_{x_2} \\ 0 & 1 & t_{y_2} \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & t_{x_1} \\ 0 & 1 & t_{y_1} \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & (t_{x_2}+t_{x_1}) \\ 0 & 1 & (t_{y_2}+t_{y_1}) \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Como $(t_{x_1}+t_{x_2}) = (t_{x_2}+t_{x_1})$ e $(t_{y_1}+t_{y_2}) = (t_{y_2}+t_{y_1})$, então

$$P' = P''$$

c) Com $P' = S_1(s_{x_1}, s_{y_1}) S_2(s_{x_2}, s_{y_2}) P$

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s_{x_1} & 0 & 0 \\ 0 & s_{y_1} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s_{x_2} & 0 & 0 \\ 0 & s_{y_2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s_{x_1}s_{x_2} & 0 & 0 \\ 0 & s_{y_1}s_{y_2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

E como a ordem do produto não influencia o resultado

$$S(s_{x_1}, s_{y_1}).S(s_{x_2}, s_{y_2}) = S(s_{x_2}, s_{y_2}) S(s_{x_1}, s_{y_2})$$

5) Tomando $R(\theta) = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & -\operatorname{sen}(\theta) & 0 \\ \operatorname{sen}(\theta) & \cos(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$,

$$\begin{cases} x' = \cos(\theta).x - \operatorname{sen}(\theta) y \\ y' = \operatorname{sen}(\theta).x + \cos(\theta) y \end{cases}$$

$$\frac{d}{d\theta}[R(\theta)] = \begin{bmatrix} -\operatorname{sen}(\theta) & -\cos(\theta) & 0 \\ \cos(\theta) & -\operatorname{sen}(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} \dfrac{d[x']}{d\theta} = -\operatorname{sen}\theta\, x - \cos\theta\, y = -y' \\ \dfrac{d[y']}{d\theta} = \cos\theta\, x - \operatorname{sen}(\theta) y = x' \end{cases}$$