

1. a) Primeiramente, vamos calcular $g(x) = \sqrt{x-3}$ nos pontos dados

x	4	7	12	19	28
$y = \sqrt{x-3}$	1	2	3	4	5

Os polinômios de Lagrange em $x=10$ é dado por:

$$L_0(x) = \frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)} = \frac{(10-7)(10-12)}{(4-7)(4-12)} = -0.2500$$

$$L_1(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)} = \frac{(10-4)(10-12)}{(7-4)(7-12)} = 0.8000$$

$$L_2(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)} = \frac{(10-4)(10-7)}{(12-4)(12-7)} = 0.4500$$

Logo,

$$\begin{aligned} f(10) &\approx P_2(10) = y_0 L_0(10) + y_1 L_1(10) + y_2 L_2(10) \\ &= 1(-0.2500) + 2(0.8000) + 3(0.4500) \\ g(10) &= 2.700 \end{aligned}$$

b) Como $g(x) = \sqrt{x-3}$ é uma função com derivadas até ordem 3 contínuas no intervalo $[x_0, x_3] = [4, 12]$ temos que:

$$|g(x) - P_2(x)| \leq E_{\text{sup}}(x)$$

onde

$$E_{\text{sup}}(x) = \frac{M_3}{3!} (x-x_0)(x-x_1)(x-x_2) \quad \wedge \quad M_3 = \max_{x \in [x_0, x_3]} |g'''(x)|$$

Note que

$$g(x) = \sqrt{x-3} \Rightarrow g'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x-3}} \Rightarrow g''(x) = -\frac{1}{4\sqrt{x-3}(x-3)} \Rightarrow g'''(x) = \frac{3}{8\sqrt{x-3}(x-3)^2}$$

$$\text{Seja } g(x) = |g'''(x)|, \quad g'''(x) > 0 \quad |x > 0$$

$g(x)$ é contínua no intervalo fechado, logo atinge o máximo global nele.

Além disso, como $g'(x) = -\frac{15}{16\sqrt{x-3}(x-3)^3} < 0$, $g(x)$ é decrescente neste intervalo

$$M_3 = \frac{3}{8 \cdot (1) \cdot (1)} = \frac{3}{8} = 0.3750$$

$$E_{\text{sup}} = \frac{0.3750}{6} (6)(3)(2) = \boxed{2.2500}$$

c) Considerando a forma de Newton, podemos descrever $P(x)$ como:

$$P(x) = \underbrace{1}_{a_0 N_0} + \underbrace{\frac{1}{3}(x-4)}_{a_1 N_1} - \underbrace{\frac{1}{60}(x-4)(x-7)}_{a_2 N_2} + \underbrace{\frac{1}{1260}(x-4)(x-7)(x-12)}_{a_3 N_3}$$

Então, para adicionarmos um termo que interpole x_3 e x_4 , basta inserir $a_4 N_4$, onde

$$N_4(x) = (x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3) = (x-4)(x-7)(x-12)(x-19)$$

e resolver a_4 :

$$\overset{\text{28-3}}{\text{25}} \rightarrow Q(28) = P(28) + a_4 N_4(28) \quad \parallel \text{Aplicando 28 em } p(x) \text{ obtemos } 7$$

$$5 = 7 + a_4 (28-4)(28-7)(28-12)(28-19)$$

$$a_4 = -\frac{1}{36288}$$

$$\therefore Q(x) = 1 + \frac{1}{3}(x-4) - \frac{1}{60}(x-4)(x-7) + \frac{1}{1260}(x-4)(x-7)(x-12) - \frac{1}{36288}(x-4)(x-7)(x-12)(x-19)$$

2.

a) $y = e^{a_1 + a_2 x + a_3 x^2}$
 $z = \ln(y) = \ln(e^{a_1 + a_2 x + a_3 x^2})$

$z = \beta_1 + \beta_2 x + \beta_3 x^2$, onde $\beta_1 = a_1, \beta_2 = a_2, \beta_3 = a_3$

x	-4.0	-2.0	0.0	2.0	4.0
y	5.4	2.0	1.2	1.0	1.2
z	1.6864	0.6931	0.1823	0	0.1823

$z = \beta_1 + \beta_2 x + \beta_3 x^2$

$z = \beta_1 g_1 + \beta_2 g_2 + \beta_3 g_3$

$g_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad g_2 = \begin{bmatrix} -4 \\ -2 \\ 0 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix} \quad g_3 = \begin{bmatrix} 16 \\ 4 \\ 0 \\ 4 \\ 16 \end{bmatrix}$

$AB = b$

$A = \begin{bmatrix} \langle g_1, g_1 \rangle & \langle g_1, g_2 \rangle & \langle g_1, g_3 \rangle \\ \langle g_2, g_1 \rangle & \langle g_2, g_2 \rangle & \langle g_2, g_3 \rangle \\ \langle g_3, g_1 \rangle & \langle g_3, g_2 \rangle & \langle g_3, g_3 \rangle \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 40 \\ 0 & 40 & 0 \\ 40 & 0 & 544 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_3 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} \langle z, g_1 \rangle \\ \langle z, g_2 \rangle \\ \langle z, g_3 \rangle \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2.7441 \\ -7.4026 \\ 32.6716 \end{bmatrix}$

$\begin{bmatrix} 5 & 0 & 40 \\ 0 & 40 & 0 \\ 40 & 0 & 544 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2.7441 \\ -7.4026 \\ 32.6716 \end{bmatrix}$

$40\beta_2 = -7.4026 \Rightarrow \beta_2 = -0.1851$

$\begin{cases} 5\beta_1 + 40\beta_3 = 2.7441 \\ 40\beta_1 + 544\beta_3 = 32.6716 \end{cases}$

$\beta_1 = \frac{2.7441 - 40\beta_3}{5}$

$\beta_3 = \frac{32.6716 - 40\left(\frac{2.7441 - 40\beta_3}{5}\right)}{544} = 0.0479$

↓

$\beta_1 = 0.1656$

$B = \begin{bmatrix} 0.1656 \\ -0.1851 \\ 0.0479 \end{bmatrix}$

$y = e^{0.1656 - 0.1851x + 0.0479x^2}$

b)

k	x_k	$y(x_k)$	$y^*(x_k)$	$y^* - y_k$	$[y^* - y_k]^2$
1	-4	5.4	5.3249	-0.0751	0.0056
2	-2	2.0	2.0697	0.0697	0.0049
3	0	1.2	1.1801	-0.0199	0.0004
4	2	1.0	0.9871	-0.0129	0.0002
5	4	1.2	1.2112	0.0112	0.0001

$\sum [y^*(x_k) - y(x_k)]^2 = \underline{\underline{0.0112}}$

c) Não necessariamente, pois os parâmetros foram obtidos através do modelo linearizado, e não pelo original não-linear ajustado.