1

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 - 2x_4 = 0 \\ 2x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = -2 \\ x_1 + x_2 - 3x_3 + x_4 = 4 \end{cases}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -1 & -2 & 0 \\ 2 & 1 & -1 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & -3 & 1 & 4 \end{array}\right) \xrightarrow{1-3} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -1 & -2 & 0 \\ 2 & 1 & -1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 2 & -3 & -4 \end{array}\right) \quad \text{Ур.2} - 2\text{ур.}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -5 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & -3 & -4 \end{array}\right) \xrightarrow{1-2} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 3 & -2 \\ 0 & 1 & -1 & -5 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & -3 & -4 \end{array}\right)$$

СЛАУ имеет ∞ решений

Возьмем за свободную переменную $x_4 = C$

$$x_4 = \frac{-2 - C}{3}$$

$$x_3 = \frac{-4 + 3x_4}{2} = \frac{-4 + 3(-2 - C)}{2} = \frac{-10 - 3C}{2}$$

$$x_2 = 2 + x_3 + 5x_4 = 2 - \frac{3C + 10}{2} - \frac{5C + 10}{3} =$$

$$= \frac{12 - 9C - 30 - 10C - 20}{6} = \frac{-38 - 19C}{6}$$

при $C = 0$

$$x_2 = \frac{-19}{3}; \quad x_3 = -5; \quad x_4 = -\frac{2}{3}$$

2

$$A\begin{cases} 3x_1 - x_2 + x_3 = 4 \\ 2x_1 - 5x_2 - 3x_3 = -17 \\ x_1 + x_2 - x_3 = 0 \end{cases}$$

$$\bar{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & -1 & 1 & 4 \\ 2 & -5 & -3 & -17 \\ 1 & 2 & -1 & 0 \end{array}\right) 1-(2+3) \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 2 & 3 & 21 \\ 2 & -5 & -3 & -17 \\ 1 & 2 & -1 & 0 \end{array}\right) 2-2\cdot 3 \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 2 & 3 & 21 \\ 0 & -9 & -1 & -17 \\ 1 & 2 & -1 & 0 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 9 & 13{,}5 & 94{,}5 \\ 0 & 0 & 12{,}5 & 77{,}5 \\ 1 & 2 & -1 & 0 \end{array}\right)$$

$\text{rank } A = \text{rank } \bar{A} = n = 3 \Rightarrow$
Система совместна и определена
имеет 1 решение

$$B = \begin{cases} 2x_1 - 4x_2 + 6x_3 = 1 \\ x_1 - 2x_2 + 3x_3 = -2 \\ 3x_1 - 6x_2 + 9x_3 = 5 \end{cases}$$

$$\bar{B} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -4 & 6 & 1 \\ 1 & -2 & 3 & -2 \\ 3 & -6 & 9 & 5 \end{array}\right) \begin{matrix} 1+2\cdot(-3) \\ 1-2\cdot 2 \end{matrix} \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 0 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \\ 3 & -6 & 9 & 5 \end{array}\right)$$

$\text{rank } B = 1$
$\text{rank } \bar{B} = 3$
$n = 3$

$\text{rank } B \neq \text{rank } \bar{B}$ – система несовместна
решений нет

$$C\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 5x_3 = 4 \\ 3x_1 + x_2 - 8x_3 = -2 \end{cases}$$

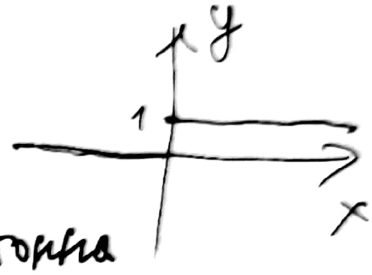
$$\bar{C} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 5 & 4 \\ 3 & 1 & -8 & -3 \end{array}\right) \cdot(-3) \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 5 & 23 & 15 \\ 1 & 2 & 5 & 4 \end{array}\right)$$

$\text{Rank } C = \text{Rank } \bar{C} = 2 < (n = 3)$

Система совместна, неопределена
решений ∞

1) identity
$f(x) = x$
$f'(x) = 1$
$E(f(x)) = (-\infty; +\infty)$
монотонна

2) binary step
$f(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ 1 & x \geq 0 \end{cases}$
$f'(x) = C' = 0$
$E(f(x)) = 0$ при $x < 0$
1 при $x \geq 0$
функция монотонна



3) hyperbolic tanh
$f(x) = \frac{(e^x - e^{-x})}{(e^x + e^{-x})}$

$f'(x) = \frac{(e^x - e^{-x})' \cdot (e^x + e^{-x}) - (e^x - e^{-x})(e^x + e^{-x})'}{(e^x + e^{-x})^2} =$

$= \frac{(e^x + e^{-x}) \cdot (e^x + e^{-x}) - (e^x - e^{-x})(e^x - e^{-x})}{(e^x + e^{-x})^2} =$

$= 1 - \frac{(e^x - e^{-x})^2}{(e^x + e^{-x})^2}$

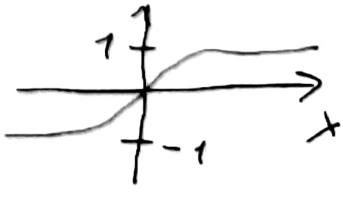
либо

$= \frac{e^{2x} + 2e^x e^{-x} + e^{-2x} - e^{2x} + 2e^x e^{-x} - e^{-2x}}{(e^x + e^{-x})^2} = \frac{4}{(e^x + e^{-x})^2}$

Если $x \to \infty$, то $e^{-x} \to 0$, $e^x \to \infty$
$x \to -\infty$, то $e^{-x} \to \infty$, $e^x \to 0$

$\lim\limits_{x \to \infty}(f) = \frac{\infty}{\infty} = 1$
$\lim\limits_{x \to -\infty}(f) = \frac{-\infty}{\infty} = -1$

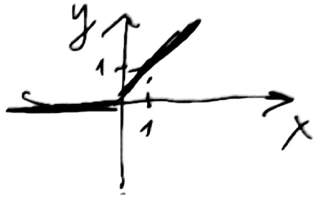
$\Rightarrow E(f(x)) = (-1; 1)$



монотонна

4) ReLU $f(x) = \begin{cases} 0 & x<0 \\ x & x \geq 0 \end{cases}$ $E(f) = [0; +\infty)$

$f'(x) = \begin{cases} 0, & x<0 \\ 1, & x \geq 0 \end{cases}$



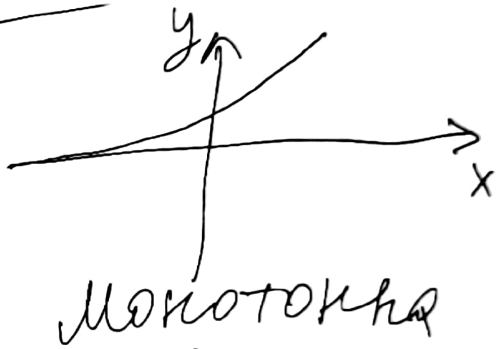
Монотонна

---

5) softplus

$f(x) = \ln(1+e^x)$

$f'(x) = (1+e^x)(\ln(1+e^x))' = \frac{e^x}{1+e^x}$



Монотонна

$\lim_{x \to -\infty} \ln(1+e^x) = 0$, $E(f(x)) = (0; +\infty)$

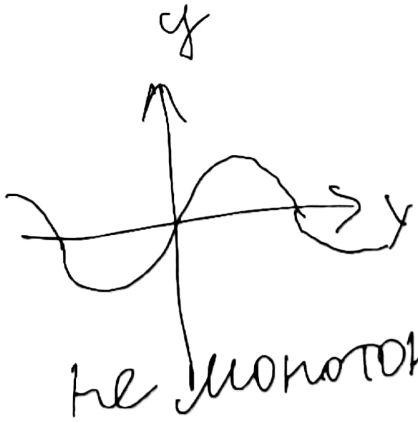
---

6) ~~синусоида~~

$f(x) = \sin(x)$

$f'(x) = \cos(x)$

$E(f_x) = [-1; 1]$



не монотонна