Lista 8 - Geometria Analítica

Igor Roddtke

1- $\pi: 3x + y - z - 4 = 0$

a) Abscissa 1 e ordenada 3 $P(1, 3, 2)$

$x = 1$ $3.1 + 3 - z - 4 = 0$

$y = 3$ $-z + 2 = 0$

$z = 2$

b) Abscissa 0 e cota 2 $P(0, 6, 2)$

$x = 0$ $3.0 + y - 2 - 4 = 0$

$y = 2$ $y - 6 = 0$

$y = 6$

c) $P(k, 2, k-1)$ e π $2k + 2 - k + 1 - 4 = 0$

$2k - 1 = 0$

$k = \frac{1}{2}$

d) abscissa 2 ordenada = dobro da cota $P(2, -4, -2)$

$x = 2$ $3.2 + 2z - z - 4 = 0$

$y = 2z$ $z + 2 = 0$

$z = -2$

e) Valor de k para que o plano $\pi = kx - 4y + 4z - 7 = 0$ $\pi_1 // \pi$

- Se d e d1 não seguem a mesma proporcionalidade então π e π_1 são paralelos distintos

π e π_1 são paralelos somente se a, b, c e a1, b1, c1 são proporcionais.

3, 1, -1, -4 e k, -4, 4, -7 : π e π_1 são paralelos distintos

$k = -12$ (π for multiplicado por -4)

- Se d e d1 estão na mesma proporção então $\pi = \pi_1$

/ /

2- $\pi: 2x - 3y - z + 5 = 0$ $\quad A = (4, -2, 1)$

$\vec{n} = (2, -3, -1)$

A equação é da forma

$2x - 3y - z + d = 0$

Mas o ponto $A \in \pi$ então:

$2.4 - 3.(-2) - 1 + d = 0$

$8 + 6 - 1 + d = 0$

$d = -13$

Equação geral do plano:

$2x - 3y - z - 13 = 0$

3- $r: \begin{cases} x = 2 + 2t \\ y = 1 - 3t \\ z = 4t \end{cases}$ $\quad A(-1, 2, 3)$ $\quad \vec{n} = (2, -3, 4)$

A equação é da forma:

$2x - 3y + 4z + d = 0$

Mas o ponto A pertence ao plano, então:

$2.(-1) - 3.2 + 4.3 + d = 0$

$-2 - 6 + 12 + d = 0$

$d = -4$

Equação geral do plano:

$2x - 3y + 4z - 4 = 0$

4- $A(5, -1, 5)$ e $B(-1, -7, 1)$

Pm: ponto médio

$P_m: [(5-1)/2, (-1-7)/2, (4+1)/2]$

$P_m = (2, -4, \frac{5}{2})$

$P: \begin{cases} x - 2 \\ y + 4 \\ z - \frac{5}{2} \end{cases}$

AB são ortogonais:

$AB = (6, 6, 3)$

$6x - 12 + 6y + 24 + 3z - \frac{15}{2} = 0$

$6x + 6y + 3z + 12 - \frac{15}{2} = 0$

$6x + 6y + 3z + \frac{9}{2} = 0$

$12x + 12y + 6z + 9 = 0$

$4x + 4y + 2z + 3 = 0$

Digitalizado com CamScanner

5- $\vec{AB} = B - A = (-6, -3, -1)$
$\vec{AC} = C - A = (-2, -1, 1)$

$\vec{AB} \cdot \vec{AC} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ -6 & -3 & -1 \\ -2 & -1 & 1 \end{vmatrix} \rightarrow (-3i + 2j + 6k) - (6k + i - 6j)$

$-2i - 4j = 0$

$x - 2y = 0$

6- $A(2, 0, -2)$ $\vec{AU} = U - A = (-1, -1, 3)$
$U(1, -1, 1)$ $AV = V - A = (0, 3, 2)$
$V(2, 3, 0)$

$\vec{AU} \cdot \vec{AV} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ -1 & -1 & 3 \\ 0 & 3 & 2 \end{vmatrix}$ $-2i - 3k + 9i - 2j$

$7i - 2j - 3k = 0$

$3x - 2y - 5z - 16 = 0$

7- $V\pi \cdot \overline{AB} =$

$\begin{vmatrix} i & j & k \\ 2 & 6 & -3 \\ 2 & 1 & 3 \end{vmatrix} = \vec{\pi} = (3, -12, 2)$

$A(-3, 1, -2) \rightarrow 3 \cdot (-3) - 12 \cdot 1 + 2 \cdot 2 + d = 0$

$d = 25$

Equação geral $= 3x - 12y + 2z + 25 = 0$

9- $r: \begin{cases} x = 2 + t \\ y = 1 - t \\ z = 3 + 2t \end{cases}$ $r: 2x + 2y - 3z = 0$

$A(3, 0, 5) \rightarrow t = 1$

$m\pi 1 = (2, 2, -3)$
$Vr(1, -1, +2)$ $m\pi = Vr \cdot m\pi 1 = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & -3 \end{vmatrix} = d = -17$

Equação geral $= x - 7y - 4z + 17 = 0$

Digitalizado com CamScanner

/ /

10- Ponto A (4, 1, 1) perpendicular aos planos

$\pi_1: 2x + y - 3z = 0$. $\pi_2 = x + y - 2z - 3 = 0$

$\pi_1 = (2, 1, -3)$

$\begin{vmatrix} i & j & k \\ 2 & 1 & -3 \\ 1 & 1 & -2 \end{vmatrix} = (1, 1, 1)$ $\pi_2 = (1, 1, -2)$

$A = (4, 1, 1) = 4 + 1 + 1 + d = 0 \rightarrow d = -6$

Equação Geral: $x + y + z - 6 = 0$

11- $r_1 \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = -2 + 3t \\ z = 3 - t \end{cases}$ $r_2 \begin{cases} x = 1 - 2t \\ y = -2 - t \\ z = 3 + 2t \end{cases}$

$n = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 2 & 3 & -1 \\ -2 & -1 & 2 \end{vmatrix}$

$6i + 2j - 2k + 6k + i + 4j = (5, -2, 4)$

$5 . 1 - 2 . -2 + 4 . 3 + d = 0 \rightarrow d = -21$

Equação Geral $\rightarrow 5x - 2y + 4z - 21 = 0$

12- $r_1 \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = -2 + 3t \\ z = 3 - t \end{cases}$ $r_2 \begin{cases} x = -t \\ y = 1 \\ z = 2 - t \end{cases}$

$V_{r1} = (1, 0, 1)$ $C(0, 1, 2)$

$V_{r2} = (-1, 0, -1)$

$M = AC . BD$

$AC = (-1, 4, 1)$

$BD = (-3, 4, -1)$

$\bar{m} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ -1 & 4 & 1 \\ -3 & 4 & -1 \end{vmatrix} = -4i - 3j - 4k + 12k + 4i + j$

$(-2, -4, 2) = (-2, -1, 2)$

$C = (0, 1, 2) \rightarrow -2 . 0 - 1 . 1 + 2 . 2 + d = 0$

$d = -3$

$\boxed{2x + y - 2z + 3 = 0}$

credeal

Digitalizado com CamScanner

13- $A(4,3,2)$ $\quad r = \begin{cases} x = t \\ y = 2 - t \\ z = 3 + 2t \end{cases}$ $\quad B_r(0,2,3)$ $\quad V_r(1,-1,2)$ $\quad A.B_r(-4,-1,1)$

i	j	k
-4	-1	1
1	-1	2

$\bar{n} : AB_r . V_r = -2i + j + 4k + k - i - 8j =$

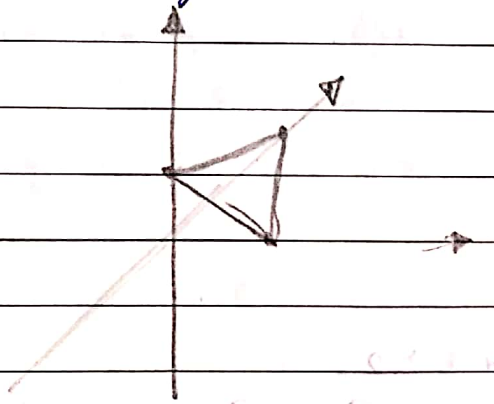
$\bar{M} = (-1, 9, 5)$

i	j	k
1	-1	2
-4	-1	1

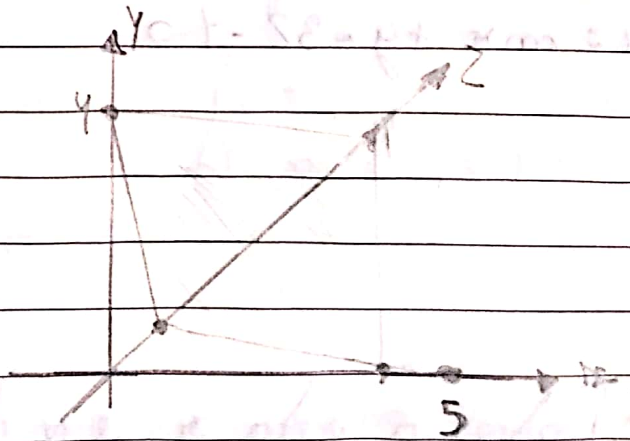
$= \bar{M} . V_r . AB \therefore \pi : 1x - 9y - 5z + d = 0$

$x - 9y - 5z + 33 = 0$

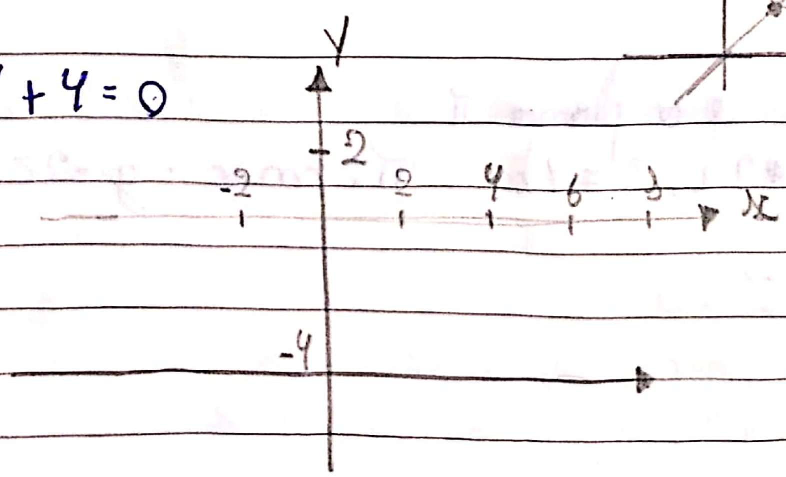
14- a) $3x + 4y + 2z + 12 = 0$



b) $x + y$ ~~[illegible]~~ $- 3 = 0$

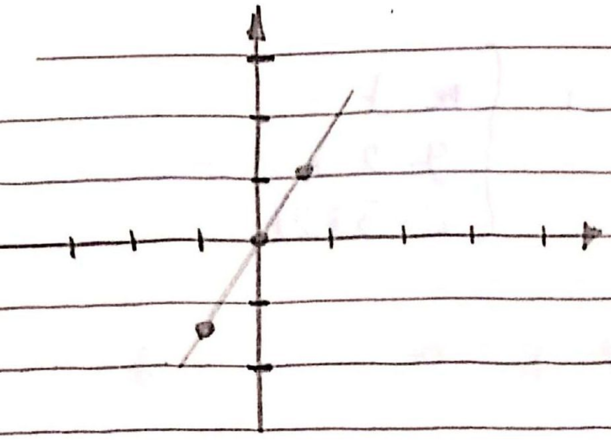


c) $Y + 4 = 0$



/ /

d) $2x - y = 0$



18- $\pi_1 = x - 2y + z - 6 = 0$ e $\pi_2 = 2x - y - z + 3 = 0$

$\to u = (1, -2, 1)$ $\to v = (2, -1, -1)$

$\langle u, v \rangle = 1 \cdot 2 + -2 \cdot -1 - 1 = 3$

$u^2 = 1^2 + (-2)^2 + 1^2 = \sqrt{6}$

$v^2 = 2^2 - 1^2 - 1^2 = \sqrt{6}$

$\cos\theta = \frac{3}{\sqrt{6} \cdot \sqrt{6}} = \frac{1}{2}$

$\cos \frac{1}{2} = \boxed{60°}$

19- Determine os planos de r1 e r2.

$r1 = mx + y - 3z - 1 = 0$ $r2 = 2x - 3my + 4z + 1 = 0$

$\overline{m1} : (m, 1, -3)$ $\overline{m1} \cdot \overline{m2} = 0$

$\overline{m2} = (2, -3m, 4)$

$(m, 1, -3) \cdot (2, -3m, 4) = 2m - 3m - 12 = 0$

$m = -12$

20- Dados a reta r e o plano π

$r = x = -3 + t, \; y = -1 + 2t, \; z = 4t$ $\pi : mx - y - 2z - 3 = 0$

I) $r \parallel \pi$

II) $r \perp \pi$ $\vec{v} \cdot \vec{u} = 0$

$\vec{v} = (1, 2, 4)$ $(1, 2, 4) \cdot (m, -1, -2) = 0$

$\vec{u} : (m, -1, -2)$ $m - 10 = 0$

$m = 10$

27- A(3, -2, 4) perpendicular ao plano
$x - 3y + 2z - 5 = 0$

$r: \frac{x - x_1}{a} = \frac{y - y_1}{y} = \frac{z - z_1}{c}$

$\frac{x-3}{a} = \frac{y-(-2)}{b} = \frac{z-4}{c} \rightarrow \frac{x-3}{a} = \frac{y+2}{b} = \frac{z-4}{c}$

$y = -3x + 7, \quad z = 2x - 2$

28- A(-1, 2, -1) $r_1: y = x, z = 1 - 3x$
$r_2 = 2x = y = 3z$

$ax + by + cz + d = 0$
$\bar{m} = (a, b, c)$

$r_1 // \pi \rightarrow \bar{m} \perp V_1$
$r_2 // \pi \rightarrow \bar{m} \perp V_2$
$\bar{m} = V_1 \cdot V_2$
$V_2 = (1, 2, \frac{2}{3})$
$(3, 6, 2) \rightarrow 2x = 3z \rightarrow z = \frac{2x}{3}$

$r_2: 2x = y = 3z$
$y = 2x$
$20x - 11y + 3z + 45 = 0$

29- Plano paralelo ao eixo dos z intercepta o eixo dos x em -3 e o dos y em 4.
A(-3, 4, 0) $ax + by + cz + d = 0$
$(-3, 4, 0) \cdot (2, 1, 0)$
$4x - 3y + 12 = 0$

31- A(1, 2, 1) e a reta de interseção do plano $x - 2y + z - 3 = 0$
$x - 2y + z - 3 = 0$ yOz
$\bar{m} = (a, b, c)$
$x = \frac{y}{3}$
$6x - 2y + z - 3 = 0$

/ /

32- $2x - y + z - 9 = 0$

$P(3, -1, -4)$
$A(2, -2, 3)$
$B(4, -4, -2)$
$C(0, -4, 5)$
$N = ?$
$N = (5, -2, -3)$

reta = $x = 3 + k2$
$y = -1 - k$
$z = -4 + k$

$AB = B - A = (2, -1, -5)$
$AC = C - A = (-2, -2, 2)$
$AP = P - A = (1, 1, -1)$

$x = 3 + 2 \cdot 1 = 5$
$y = -1 - 1 = -2$
$z = -4 + (\cdot 1) = -3$