/ /

Matemática Discreta

Lista da Aula 13

Igor Raddle

1- Provar que $0! + 1! + 2! + \dots + n! \leq (n+1)!$ $\forall n \in \mathbb{N}$

2- Sequências dadas por recorrência

3- Para provar que a maluca estava certa, provar por indução que:

se $\begin{cases} F_0 = 0 \\ F_1 = 1 \\ F_n = F_{n-1} + F_{n-2} & n \geq 2 \end{cases}$

e se

$$G_N = \frac{\sqrt{5}}{5}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right]$$ então: $F_n = G_m$ $\forall n \in \mathbb{N}$

4- Um correio tem selos de 3 e 5 reais apenas.
Quero mandar uma carta para uma cidade cujo custo de envio é de: 10 reais, uso 2 selos de 5!
: 11 reais, dois de 3 e um de 5!
: 12 reais, 4×3

4937 R\$ = $\boxed{x \cdot 3 + y \cdot 5}$ = 4937

não da pra mandar pra = 1, 2, 4, 7

encontre x e y

Digitalizado com CamScanner

Ex 1: Provar por indução que: $\frac{1}{1.2}+\frac{1}{2.3}+\dots+\frac{1}{n.(n+1)}=\frac{n}{n+1}$

$\forall n \geq 1$

Caso base: $n=1$

$$\frac{1}{1.2}+\frac{n}{n+1}=\frac{1}{1.2}=\frac{1}{2}$$

Hipótese de indução (H.I)

$$\underbrace{\frac{1}{1.2}+\frac{1}{2.3}+\dots\frac{1}{n(n+1)}}_{\frac{n}{n+1}\text{ pela H.I.}}+\frac{1}{(n+1).(n+2)}=\frac{n+1}{n+2}$$

então $\frac{n}{n+1}+\frac{1}{(n+1).(n+2)}=\frac{n+1}{n+2}$

$$\frac{n.(n+2)+1}{(n+1).(n+2)}=\frac{n+1}{n+2}\Rightarrow\frac{n^2+2n+1}{(n+1).(n+2)}=\frac{n+1}{n+2}$$

$$\frac{\cancel{(n+1)}.(n+1)}{\cancel{(n+1)}.(n+2)}=\frac{n+1}{n+2}$$

Digitalizado com CamScanner

Exe II: Provar por indução que

$$\frac{1}{2.3} + \frac{1}{3.5} + \dots + \frac{1}{(2n-1.(2n+1)} = \frac{n}{2n+1} \quad \forall n \geq 1$$

Caso base: $n = 1$

$$\frac{1}{(2-1).(2+1)} = \frac{1}{3} \longleftrightarrow \frac{1}{2.1+3} = \frac{1}{3}$$

$$\frac{1}{2.3} + \frac{1}{3.5} + \dots + \frac{1}{(2n-1).(2n+1)} + \frac{1}{(2n+1).(2n+3)} = \frac{n+1}{2n+3}$$

aplicando a H.I.

$$\frac{n}{2n+1} + \frac{1}{(2n+1).(2n+3)} = \frac{n+1}{2n+3}$$

$$\frac{n.(2n+3)+1}{(2n+1).(2n+3)} = \frac{n+1}{2n+3} \rightarrow \frac{2n^2+3n+1}{(2n+1).(2n+3)} = \frac{n+1}{2n+3}$$

$$\frac{(n+1).\cancel{(2n+1)}}{\cancel{(2n+1)}.(2n+3)} = \frac{n+1}{2n+3} \rightarrow \frac{n+1}{(2n+3)} = \frac{n+1}{2n+3}$$

Digitalizado com CamScanner

1- i) se $n=0$, $0!=1$ e $(n+1)!=(0+1)!=1!=1$
logo $0! \leq (0+1)!$

II) Passo de indução: H. I.: $0!+1!+\ldots+K!$ $\leq (K+1)!$
Tese: $0!+1!+\ldots+K!+(K+1)! \leq (K+2)!$
da h. de indução $\rightarrow 0!+1!+\ldots+K! \leq (K+1)!$

Somando $(K+1)!$ a ambos os membros
$$0!+1!+\ldots+K!+(K+1)! \leq (K+1)!+(K+1)!$$
$$= 2.(K+1)!$$

Como $(K+1)!>0$ e $2 \leq K+2$ então $2.(K+1)! \leq (K+2).$
$(K+1)! = (K+2)!$
$$0!+1!+\ldots+K!+(K+1)! \leq 2.(K+1)! \leq (K+2)!$$

2- $G_n = \frac{\sqrt{5}}{5} \cdot \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \frac{\sqrt{5}}{5}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$

$G_0 = \frac{\sqrt{5}}{5} \cdot 1 - \frac{\sqrt{5}}{5} \cdot (1-1)^0 = 0 = F_0$

$G_1 = \frac{\sqrt{5}}{5} \cdot \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} - \frac{1-\sqrt{5}}{2}\right) = \frac{\sqrt{5}}{5}\left(\frac{1+\sqrt{5}-1+\sqrt{5}}{2}\right) = \frac{\sqrt{5}}{5}$
$\left(\frac{2\sqrt{5}}{2}\right) = 1 = F_1$

$G_2 = \frac{\sqrt{5}}{5}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^2 - \frac{\sqrt{5}}{5}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^2 = \ldots = 1 = F_2$

tilibra

Digitalizado com CamScanner

3- $n=0$ $G_1=1$ $G_0=0$

$F_1=1$ $F_0=0$

$\forall\, 0 \leq n \leq K$, vale $F_K = G_K$ Tese: $F_{K+1} = G_{K+1}$

$\rightarrow F_{K+1} = F_K + F_{K-1} = G_K + G_{K-1}$:

$$\frac{\sqrt{5}}{5}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^K - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{5}\right)^K\right] + \frac{\sqrt{5}}{5}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{K-1} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{K-1}\right]$$

$$\frac{\sqrt{5}}{5}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^K + \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{K-1} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^K - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{K-1}\right] =$$

$$\frac{\sqrt{5}}{3}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{K+1} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{K+1}\right] = G_{K+1}$$

4- passo base: se $n = 8$ faça $X = 1$ e $y = 1$ $\boxed{3.1 + 5.1 = 8}$

passo de indução: H. I.: existem X_0, y_0 naturais tais que $3X_0 + 5y_0 = K$. Tese: existem x, y naturais que $3x + 5y = K+1$

Se $X_0 \geq 3$ faça

$x = X_0 - 3$ e $y = y_0 + 2$

$3x + 5y = 3(X_0 - 3) + 5(y_0 + 2) =$

$3X_0 - 9 + 5y_0 + 10 = \underbrace{3X_0 + 5y_0}_{H.I.} + 1 = K+1$

Se $X_0 = 0$, então

$3.X_0 + 5.y_0 = K$

$3.0 + 5y_0 = K \rightarrow 5y_0 = K$

$5y_0 + 1 = K+1 \rightarrow 5y_0 + 9 - 8 = K+1$

$5y_0 + 3.3 - 5 - 3$

$5(y_0 - 1) + 3.2 = K+1 \rightarrow 3.2 + 5(y_0 - 1) = K+1$

$5y_0 = K$ e $X = 2$ e $y = y_0 - 1$

$K \geq 8$ logo $y_0 > 1$ e então

$y \in \mathbb{N}$ e $2 = X \in \mathbb{N}$

assim.

$3.2 + 5(y_0 - 1) = 6 + 5y_0 - 5 = 5y_0 + 1 = K+1$

$3x + 5y = K+1$

Se $X_0 = 1$ ou $X_0 = 2$ $\rightarrow 3.1 + 5y_0 = K$

$3 + 5y = K$

tilibra

Digitalizado com CamScanner