1) Kolejne potęgi macierzy A:

In[9]:= `MatrixForm[MatrixPower[A, 2]]`

Out[9]//MatrixForm=

$$\begin{pmatrix} \Lambda^2 & 2\Lambda & 1 & 0 \\ 0 & \Lambda^2 & 2\Lambda & 1 \\ 0 & 0 & \Lambda^2 & 2\Lambda \\ 0 & 0 & 0 & \Lambda^2 \end{pmatrix}$$

In[10]:= `MatrixForm[MatrixPower[A, 3]]`

Out[10]//MatrixForm=

$$\begin{pmatrix} \Lambda^3 & 3\Lambda^2 & 3\Lambda & 1 \\ 0 & \Lambda^3 & 3\Lambda^2 & 3\Lambda \\ 0 & 0 & \Lambda^3 & 3\Lambda^2 \\ 0 & 0 & 0 & \Lambda^3 \end{pmatrix}$$

In[11]:= `MatrixForm[MatrixPower[A, 4]]`

Out[11]//MatrixForm=

$$\begin{pmatrix} \Lambda^4 & 4\Lambda^3 & 6\Lambda^2 & 4\Lambda \\ 0 & \Lambda^4 & 4\Lambda^3 & 6\Lambda^2 \\ 0 & 0 & \Lambda^4 & 4\Lambda^3 \\ 0 & 0 & 0 & \Lambda^4 \end{pmatrix}$$

In[12]:= `MatrixForm[MatrixPower[A, 5]]`

Out[12]//MatrixForm=

$$\begin{pmatrix} \Lambda^5 & 5\Lambda^4 & 10\Lambda^3 & 10\Lambda^2 \\ 0 & \Lambda^5 & 5\Lambda^4 & 10\Lambda^3 \\ 0 & 0 & \Lambda^5 & 5\Lambda^4 \\ 0 & 0 & 0 & \Lambda^5 \end{pmatrix}$$

Wzór na n-tą potęgę macierzy A:

In[13]:= `MatrixForm[MatrixPower[A, n]]`

Out[13]//MatrixForm=

$$\begin{pmatrix} \Lambda^n & n\Lambda^{-1+n} & \frac{1}{2}(-1+n)\,n\,\Lambda^{-2+n} & \frac{1}{6}(-2+n)\,(-1+n)\,n\,\Lambda^{-3+n} \\ 0 & \Lambda^n & n\Lambda^{-1+n} & \frac{1}{2}(-1+n)\,n\,\Lambda^{-2+n} \\ 0 & 0 & \Lambda^n & n\Lambda^{-1+n} \\ 0 & 0 & 0 & \Lambda^n \end{pmatrix}$$

Wzór uwzględniający symbol Newtona:

Wzór uwzględniający symbol Newtona:

$$A^n = \begin{bmatrix} \lambda^n & \binom{n}{1}\lambda^{n-1} & \binom{n}{2}\lambda^{n-2} & \binom{n}{3}\lambda^{n-3} \\ 0 & \lambda^n & \binom{n}{1}\lambda^{n-1} & \binom{n}{2}\lambda^{n-2} \\ 0 & 0 & \lambda^n & \binom{n}{1}\lambda^{n-1} \\ 0 & 0 & 0 & \lambda^n \end{bmatrix}$$

Wzór na n-tą potęgę klatki Jordana wielkości mxm i dowód:

Wzór dla klatki J o wielkości $m \times m$ z wartościami własnymi λ i podniesionej do potęgi n.

$$J_m^m(\lambda)^n = \begin{bmatrix} \lambda^n & \binom{n}{1}\lambda^{n-1} & \binom{n}{2}\lambda^{n-2} & \cdots & \binom{n}{m-1}\lambda^{n-m+1} \\ & \lambda^n & \binom{n}{1}\lambda^{n-1} & \cdots & \binom{n}{m-2}\lambda^{n-m+2} \\ & & \ddots & \ddots & \vdots \\ & 0 & & \lambda^n & \binom{n}{1}\lambda^{n-1} \\ & & & & \lambda^n \end{bmatrix}$$

Dowód:

Niech $A = \begin{bmatrix} \lambda^n & & & 0 \\ & \lambda^n & & \\ & & \ddots & \\ & 0 & \lambda^n & \\ & \cdots & & \lambda^n \end{bmatrix}$ i $B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & & 0 \\ & 0 & 1 & \\ & & \ddots & \ddots \\ 0 & & & 1 \\ & & & 0 \end{bmatrix}$

Wtedy $A + B = J$

Policzmy teraz $(A+B)^n$

$$(A+B)^n = \binom{n}{0} \cdot \begin{bmatrix} \lambda^n & & 0 \\ & \lambda^n & \\ 0 & & \ddots & \\ & & & \lambda^n \\ & & & & \lambda^n \end{bmatrix}^n + \binom{n}{1} \begin{bmatrix} \lambda & & 0 \\ & \lambda & \\ 0 & & \ddots \\ & & & \lambda \\ & & & & \lambda \end{bmatrix}^{n-1} \begin{bmatrix} 0 & 1 & & 0 \\ & 0 & 1 & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & 1 \\ & & & 0 \end{bmatrix}^1 +$$

$$+\binom{n}{2}\begin{bmatrix}\lambda & & 0\\ & \lambda & \\ 0 & & \ddots\ \lambda\ \lambda\end{bmatrix}^{n-2}\begin{bmatrix}0 & 1 & & \\ & 0 & 1 & 0\\ & & \ddots & 1\\ 0 & & & 0\ 1\\ & & & 0\end{bmatrix}^{2}+\cdots+\binom{n}{m-2}\begin{bmatrix}\lambda & & 0\\ & \lambda & \\ 0 & & \ddots\ \lambda\ \lambda\end{bmatrix}^{n-m+2}\cdot$$

$$\cdot\begin{bmatrix}0 & 1 & & \\ & 0 & 1 & 0\\ & & \ddots & 1\\ 0 & & & 0\ 1\\ & & & 0\end{bmatrix}^{m-2}+\binom{n}{m-1}\begin{bmatrix}\lambda & & 0\\ & \lambda & \\ 0 & & \ddots\ \lambda\end{bmatrix}^{n-m+1}\begin{bmatrix}0 & 1 & & \\ & 0 & 1 & 0\\ & & \ddots & 1\\ 0 & & & 0\end{bmatrix}^{m-1}+\cdots+$$

$$+\binom{n}{n-1}\begin{bmatrix}\lambda & & 0\\ & \lambda & \\ 0 & & \ddots\ \lambda\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & 1 & & \\ & 0 & 1 & 0\\ & & \ddots & 1\\ 0 & & & 0\ 1\\ & & & 0\end{bmatrix}^{n-1}+\binom{n}{n}\begin{bmatrix}0 & 1 & & \\ & 0 & 1 & 0\\ & & \ddots & 1\\ 0 & & & 0\ 1\\ & & & 0\end{bmatrix}^{n}=$$

$$=\begin{bmatrix}\lambda^n & & 0\\ & \lambda^n & \\ 0 & & \ddots\ \lambda^n\ \lambda^n\end{bmatrix}+\binom{n}{1}\begin{bmatrix}0 & \lambda^{n-1} & & \\ & 0 & \lambda^{n-1} & 0\\ & & \ddots & \lambda^{n-1}\\ 0 & & & 0\ \lambda^{n-1}\\ & & & 0\end{bmatrix}+\binom{n}{2}\begin{bmatrix}0 & 0 & \lambda^{n-2} & & 0\\ & 0 & 0 & \ddots & \\ & & 0 & \ddots & \lambda^{n-2}\\ 0 & & & \ddots & 0\ 0\\ & & & & 0\end{bmatrix}+\cdots$$

$$\cdots+\binom{n}{m-2}\begin{bmatrix}0 & 0 & \cdots & \lambda^{n-m+2} & 0\\ & 0 & \ddots & & \lambda^{n-m+2}\\ & & \ddots & & \vdots\\ 0 & & & 0 & \vdots\\ & & & & 0\end{bmatrix}+\binom{n}{m-1}\begin{bmatrix}0 & 0 & \cdots & \lambda^{n-m+1}\\ & 0 & \ddots & 0\\ & & \ddots & 0\\ 0 & & & 0\ 0\\ & & & 0\end{bmatrix}+$$

$$\begin{bmatrix}0\end{bmatrix}+\cdots+\begin{bmatrix}0\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0\end{bmatrix}=$$

$$=\begin{bmatrix}\lambda^n & \binom{n}{1}\lambda^{n-1} & \binom{n}{2}\lambda^{n-2} & \cdots & \binom{n}{m-2}\lambda^{n-m+2} & \binom{n}{m-1}\lambda^{n-m+1}\\ & \lambda^n & \binom{n}{1}\lambda^{n-1} & \cdots & \vdots & \binom{n}{m-2}\lambda^{n-m+2}\\ & & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots\\ & & & \ddots & \vdots & \vdots\\ 0 & & & & \lambda^n & \binom{n}{1}\lambda^{n-1}\\ & & & & & \lambda^n\end{bmatrix}=J^n$$

c.k.d.

$$+\binom{n}{2}\begin{bmatrix}\lambda & & 0\\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda\end{bmatrix}^{n-2}\begin{bmatrix}0 & 1 & & 0\\ & 0 & \ddots & \\ & & \ddots & 1\\ 0 & & & 0\end{bmatrix}^{2}+\ldots+\binom{n}{n-2}\begin{bmatrix}\lambda & & 0\\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda\end{bmatrix}^{n-n+2}\cdot$$

$$\cdot\begin{bmatrix}0 & 1 & & 0\\ & 0 & \ddots & \\ & & \ddots & 1\\ 0 & & & 0\end{bmatrix}^{n-2}+\binom{n}{n-1}\begin{bmatrix}\lambda & & 0\\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda\end{bmatrix}^{n-n+1}\begin{bmatrix}0 & 1 & & 0\\ & 0 & \ddots & \\ & & \ddots & 1\\ 0 & & & 0\end{bmatrix}^{n-1}+\ldots+$$

$$+\binom{n}{n-1}\begin{bmatrix}\lambda & & 0\\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & 1 & & 0\\ & 0 & \ddots & \\ & & \ddots & 1\\ 0 & & & 0\end{bmatrix}^{n-1}+\binom{n}{n}\begin{bmatrix}0 & 1 & & 0\\ & 0 & \ddots & \\ & & \ddots & 1\\ 0 & & & 0\end{bmatrix}^{n}=$$

$$=\begin{bmatrix}\lambda^n & & 0\\ & \lambda^n & \\ & & \ddots \\ 0 & & & \lambda^n\end{bmatrix}+\binom{n}{1}\begin{bmatrix}0 & \lambda^{n-1} & & 0\\ & 0 & \lambda^{n-1} & \\ & & \ddots & \lambda^{n-1}\\ 0 & & & 0\end{bmatrix}+\binom{n}{2}\begin{bmatrix}0 & 0 & \lambda^{n-2} & & 0\\ & 0 & 0 & \ddots & \\ & & 0 & \ddots & \lambda^{n-2}\\ & & & \ddots & 0\\ 0 & & & & 0\end{bmatrix}+\ldots$$

$$\ldots+\binom{n}{n-2}\begin{bmatrix}0 & 0 & \cdots & \lambda^{n-n+2} & 0\\ & 0 & & & \lambda^{n-n+2}\\ & & \ddots & & \vdots\\ 0 & & & 0 & 0\end{bmatrix}+\binom{n}{n-1}\begin{bmatrix}0 & 0 & \cdots & \lambda^{n-n+1}\\ & 0 & \ddots & 0\\ & & \ddots & 0\\ 0 & & & 0\end{bmatrix}+$$

$$\begin{bmatrix}0\end{bmatrix}+\ldots+\begin{bmatrix}0\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0\end{bmatrix}=$$

$$=\begin{bmatrix}\lambda^n & \binom{n}{1}\lambda^{n-1} & \binom{n}{2}\lambda^{n-2} & \cdots & \binom{n}{n-2}\lambda^{n-n+2} & \binom{n}{n-1}\lambda^{n-n+1}\\ & \lambda^n & \binom{n}{1}\lambda^{n-1} & \cdots & & \binom{n}{n-2}\lambda^{n-n+2}\\ & & \ddots & & & \vdots\\ & & & \ddots & & \vdots\\ & & & & \lambda^n & \binom{n}{1}\lambda^{n-1}\\ 0 & & & & & \lambda^n\end{bmatrix}=J^n \quad \text{c.k.d.}$$

2a) Macierze mają ten sam wielomian charakterystyczny i tę samą, jedną wartość własną równą -1:

A:

```
In[38]:= aPolynomial = CharacteristicPolynomial[a, x]
```

Out[38]= $-1 - 5x - 10x^2 - 10x^3 - 5x^4 - x^5$

```
In[39]:= Solve[aPolynomial == 0, x]
```

Out[39]= $\{\{x \to -1\}, \{x \to -1\}, \{x \to -1\}, \{x \to -1\}, \{x \to -1\}\}$

B:

```
In[14]:= bPolynomial = CharacteristicPolynomial[b, x]
```

Out[14]= $-1 - 5x - 10x^2 - 10x^3 - 5x^4 - x^5$

```
In[15]:= Solve[bPolynomial == 0, x]
```

Out[15]= $\{\{x \to -1\}, \{x \to -1\}, \{x \to -1\}, \{x \to -1\}, \{x \to -1\}\}$

C:

```
In[41]:= cPolynomial = CharacteristicPolynomial[c, x]
```

Out[41]= $-1 - 5x - 10x^2 - 10x^3 - 5x^4 - x^5$

```
In[42]:= Solve[cPolynomial == 0, x]
```

Out[42]= $\{\{x \to -1\}, \{x \to -1\}, \{x \to -1\}, \{x \to -1\}, \{x \to -1\}\}$

D:

```
In[17]:= dPolynomial = CharacteristicPolynomial[d, x]
```

Out[17]= $-1 - 5x - 10x^2 - 10x^3 - 5x^4 - x^5$

```
In[18]:= Solve[dPolynomial == 0, x]
```

Out[18]= $\{\{x \to -1\}, \{x \to -1\}, \{x \to -1\}, \{x \to -1\}, \{x \to -1\}\}$

E:

```
In[44]:= ePolynomial = CharacteristicPolynomial[e, x]
```

Out[44]= $-1 - 5x - 10x^2 - 10x^3 - 5x^4 - x^5$

```
In[45]:= Solve[ePolynomial == 0, x]
```

Out[45]= $\{\{x \to -1\}, \{x \to -1\}, \{x \to -1\}, \{x \to -1\}, \{x \to -1\}\}$

F:

```
In[20]:= fPolynomial = CharacteristicPolynomial[f, x]
```

Out[20]= $-1-5x-10x^2-10x^3-5x^4-x^5$

```
In[21]:= Solve[fPolynomial == 0, x]
```

```
Out[21]= {{x → -1}, {x → -1}, {x → -1}, {x → -1}, {x → -1}}
```

G:

```
In[23]:= gPolynomial = CharacteristicPolynomial[g, x]
```

Out[23]= $-1-5x-10x^2-10x^3-5x^4-x^5$

```
In[24]:= Solve[gPolynomial == 0, x]
```

```
Out[24]= {{x → -1}, {x → -1}, {x → -1}, {x → -1}, {x → -1}}
```

2b)

```
In[74]:= JordanDecomposition[a]
Out[74]= {{{1, 0, 0, 0, -1}, {0, -1, 3, -2, 2}, {1, 0, -1, -1, 1}, {0, 0, 0, -1, 2}, {1, 0, 0, 0, 0}}, {{-1, 1, 0, 0, 0}, {0, -1, 1, 0, 0}, {0, 0, -1, 1,
     0}, {0, 0, 0, -1, 1}, {0, 0, 0, 0, -1}}}

In[75]:= Map[MatrixForm, %]
```

Out[75]= $\left\{\begin{pmatrix}1&0&0&0&-1\\0&-1&3&-2&2\\1&0&-1&-1&1\\0&0&0&-1&2\\1&0&0&0&0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1&1&0&0&0\\0&-1&1&0&0\\0&0&-1&1&0\\0&0&0&-1&1\\0&0&0&0&-1\end{pmatrix}\right\}$

Jedna klatka Jordana

```
In[37]:= JordanDecomposition[b]
Out[37]= {{{-5, 1, 2, 1, 0}, {1, -1, 1, 4, 0}, {-5, 1, 1, -2, 0}, {0, 0, 0, -1, 0}, {-5, 1, 2, 1, 1}}, {{-1, 0, 0, 0, 0}, {0, -1, 1, 0, 0}, {0, 0, -1, 1,
     0}, {0, 0, 0, -1, 1}, {0, 0, 0, 0, -1}}}

In[38]:= Map[MatrixForm, %]
```

Out[38]= $\left\{\begin{pmatrix}-5&1&2&1&0\\1&-1&1&4&0\\-5&1&1&-2&0\\0&0&0&-1&0\\-5&1&2&1&1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1&0&0&0&0\\0&-1&1&0&0\\0&0&-1&1&0\\0&0&0&-1&1\\0&0&0&0&-1\end{pmatrix}\right\}$

Dwie klatki Jordana

```
In[64]:= JordanDecomposition[c]
Out[64]= {{{1, 0, -1, 0, 0}, {2, -4, 7, -2, 5}, {0, 0, 0, 1, 0}, {0, -1, 3, 0, 1}, {1, 0, 0, 0, 0}}, {{-1, 1, 0, 0, 0}, {0, -1, 1, 0, 0}, {0, 0, -1, 0, 0}, {0,
     0, 0, -1, 1}, {0, 0, 0, 0, -1}}}

In[65]:= Map[MatrixForm, %]
```

Out[65]= $\left\{\begin{pmatrix}1&0&-1&0&0\\2&-4&7&-2&5\\0&0&0&1&0\\0&-1&3&0&1\\1&0&0&0&0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1&1&0&0&0\\0&-1&1&0&0\\0&0&-1&0&0\\0&0&0&-1&1\\0&0&0&0&-1\end{pmatrix}\right\}$

Dwie klatki Jordana

```
In[39]:= JordanDecomposition[d]
Out[39]= {{{0, 3, 1, 3, 0}, {0, 2, 2, 2, 0}, {1, 0, 0, 0, 0}, {0, 0, 0, -1, 0}, {0, 3, 1, 3, 1}}, {{-1, 0, 0, 0, 0}, {0, -1, 0, 0, 0}, {0, 0, -1, 1, 0}, {0, 0,
     0, -1, 1}, {0, 0, 0, 0, -1}}}

In[40]:= Map[MatrixForm, %]
```

Out[40]= $\left\{\begin{pmatrix}0&3&1&3&0\\0&2&2&2&0\\1&0&0&0&0\\0&0&0&-1&0\\0&3&1&3&1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1&0&0&0&0\\0&-1&0&0&0\\0&0&-1&1&0\\0&0&0&-1&1\\0&0&0&0&-1\end{pmatrix}\right\}$

Trzy klatki Jordana

```
In[67]:= JordanDecomposition[e]
Out[67]= {{{0, 2, 0, 0, 0}, {0, 0, 0, 2, 0}, {1, 0, 0, -2, 0}, {1/2, -1, 1, -1, 0}, {0, 2, 1, 0, 1}}, {{-1, 0, 0, 0, 0}, {0, -1, 1, 0, 0}, {0, 0, -1, 0, 0}, {0, 0, 0, -1, 1}, {0, 0, 0, 0, -1}}}

In[68]:= Map[MatrixForm, %]
```

Out[68]=
$$\left\{\begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -2 & 0 \\ \frac{1}{2} & -1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}\right\}$$

Trzy klatki Jordana

```
In[41]:= JordanDecomposition[f]
Out[41]= {{{0, 0, 0, -2, 0}, {1, 0, 0, 2, 0}, {0, 1, 0, -2, 0}, {0, 1/2, 1, 0, 0}, {0, 0, 1, -2, 1}}, {{-1, 0, 0, 0, 0}, {0, -1, 0, 0, 0}, {0, 0, -1, 0, 0}, {0, 0, 0, -1, 1}, {0, 0, 0, 0, -1}}}

In[42]:= Map[MatrixForm, %]
```

Out[42]=
$$\left\{\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}\right\}$$

Cztery klatki Jordana

```
In[71]:= JordanDecomposition[g]
Out[71]= {{{0, 0, 0, 0, 1}, {0, 0, 0, 1, 0}, {0, 0, 1, 0, 0}, {0, 1, 0, 0, 0}, {1, 0, 0, 0, 0}}, {{-1, 0, 0, 0, 0}, {0, -1, 0, 0, 0}, {0, 0, -1, 0, 0}, {0, 0, 0, -1, 0}, {0, 0, 0, 0, -1}}}

In[72]:= Map[MatrixForm, %]
```

Out[72]=
$$\left\{\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}\right\}$$

Pięć klatek Jordana

Kolorem czerwonym oznaczamy macierze Jordana. Są one macierzami blokowymi, podobnymi do rozważanych. Kolorem zielonym oznaczamy klatki Jordana.

2c) Liczymy wymiary jąder przekształceń dla kolejnych macierzy:

```
In[46]:= lambdaI = IdentityMatrix[5] * (-1)
Out[46]= {{-1, 0, 0, 0, 0}, {0, -1, 0, 0, 0}, {0, 0, -1, 0, 0}, {0, 0, 0, -1, 0}, {0, 0, 0, 0, -1}}
```

A:

```
In[79]:= 5 - MatrixRank[a - lambdaI]
Out[79]= 1
```

B:

```
In[53]:= 5 - MatrixRank[b - lambdaI]
Out[53]= 2
```

C:

```
In[80]:= 5 - MatrixRank[c - lambdaI]
Out[80]= 2
```

D:

```
In[54]:= 5 - MatrixRank[d - lambdaI]
Out[54]= 3
```

E:

```
In[81]:= 5 - MatrixRank[e - lambdaI]
Out[81]= 3
```

F:

```
In[55]:= 5 - MatrixRank[f - lambdaI]
Out[55]= 4
```

G:

```
In[82]:= 5 - MatrixRank[g - lambdaI]
Out[82]= 5
```

2d) Hipoteza: Dla danej macierzy X jest tyle klatek Jordana ile wynosi dimKer(X-lambda*I). Hipotezę postawiliśmy na podstawie wyników poszczególnych operacji z podpunktów b) oraz c).

2e) i f)

e) W podpunkcie d) Postawiliśmy hipotezę, że dla danej macierzy X jest tyle klatek Jordana ile wynosi $\dim \operatorname{Ker}(X-\lambda I)$. Aby móc ją wykazać, udowodnimy najpierw zaproponowany w zadaniu lemat.

(*) Chcemy wykazać, że jeżeli macierze A i B są podobne to również $A-\lambda I$, $B-\lambda I$ są podobne.

Dowód: Skoro A, B podobne to $A = SBS^{-1}$, gdzie S jest macierzą.

$$(A-\lambda I) = SBS^{-1} - \lambda I \quad \text{a to oznacza, że: } (A-\lambda I) = S(B-\lambda I)S^{-1}.$$

Wykazaliśmy, że $A-\lambda I$ oraz $B-\lambda I$ są podobne.

Po wykazaniu (*) wykażmy, że nasza hipoteza jest prawdziwa.

W tym celu rozważmy $X \in M_m^m(\mathbb{C})$. Rozważmy takie X, że mają one tylko jedną wartość własną. Niech J oznacza postać macierzy Jordana. Możemy zapisać:

$$X = S^{-1} J S.$$

Macierz X jest podobna do J.

Jak wiemy jeżeli macierze A, B są podobne to $rz A = rz B$. Pamiętamy, że: $A, B \in M_m^m(\mathbb{C})$ zatem: $\dim \operatorname{Ker} A = m - rz A$ oraz $\dim \operatorname{Ker} B = m - rz B$.

Ale z (*) otrzymujemy: $X - \lambda I = S^{-1}(J-\lambda I)S$, gdzie λ jest jedyną wartością własną macierzy X. Skoro $(X-\lambda I)$ oraz $(J-\lambda I)$ są podobne to automatycznie $\dim \operatorname{Ker}(X-\lambda I) = \dim \operatorname{Ker}(J-\lambda I)$. Niech liczba kl oznacza ilość klatek Jordana danej macierzy J. Niech st_w, $1 \le w \le kl$ oznacza stopień stopień w-tej klatki Jordana. Oczywistym jest, że $\sum_{z=1}^{kl} st_z = m$. Wiemy też, że: $\dim \operatorname{Ker}(X-\lambda I) = m - rz(A-\lambda I) =$
$= m - rz(J-\lambda I)$.

Zauważmy jeszcze, że: ~~dim~~

$$(**)\quad rz(J-\lambda I) = \sum_{z=1}^{kl}(st_z - 1) = m - kl.$$

~~Zal~~ $(**)$ wynika z niezależności liniowej kolumn.

Otrzymujemy finalnie: ~~dim(~~ $\dim \operatorname{Ker}(X-\lambda I) = m - (m-kl) = kl$.

Otrzymaliśmy to co chcieliśmy wykazać.

∎

f) Zgodnie z koncepcją zadania rozważmy macierz $X \in M_n^n(\mathbb{C})$. Niech kl_w oznacza ilość klatek macierzy X odpowiadającej wartości własnej λ_w, danej macierzy X. Chcemy wykazać, że $kl_w = \dim \ker(X-\lambda_w I)$. Zapiszmy podobnie jak w punkcie e): $X = S^{-1}JS$, gdzie J jest macierzą zapisaną w postaci Jordana. Możemy napisać: $X-\lambda_w I = S^{-1}JS - \lambda_w I = S^{-1}(J-\lambda_w I)S$. Z podobieństwa macierzy $X-\lambda_w I$ oraz $J-\lambda_w I$ wiemy, że: $\dim\ker(J-\lambda_w I) = \dim\ker(X-\lambda_w I)$. Przyjmijmy teraz, że z oznacza krotność algebraiczną odpowiadającej wartości własnej λ_w. Bo jak wiemy po napisaniu wielomianu charakterystycznego odpowiadającego danej macierzy X i przyrównaniu go do zera, otrzymamy na pewno pierwiastek λ_w ~~mający krotność równą~~ o krotności równej z. Dodatkowo zapiszmy fakt przytoczony na wykładzie i ćwiczeniach na przedmiocie ALZG na 1. sem. Przyjmując $X \in M_n^n(\mathbb{C})$ zachodzi $r X = n - \dim\ker X$. Analogicznie $r(X-\lambda_w I) = n - \dim\ker(X-\lambda_w I)$. Identycznie dla macierzy J zachodzi: $r(J-\lambda_w I) = n - \dim\ker(X-\lambda_w I)$ gdzie λ_w jest rozważaną w tym zadaniu wartością własną. Możemy również zapisać, że:

$\sum_{j=1}^{t} st_j = z$, st_j to stopień j-tej klatki macierzy J, dla wartości własnej λ_w. W macierzy J istnieją kolumny, które są od siebie liniowo zależne. Wobec przyjętych założeń możemy powiedzieć, że jest ich z − t. Zauważmy, że wówczas $r(J-\lambda_w I)$ jest równy sumie kolumn macierzy J, które nie odpowiadają wartości własnej λ_w, oraz liczbie kolumn zależnych od wartości własnej λ_w. (Kolumny te nie są ze sobą liniowo zależne). Z rozważań wyżej wynika, że tych drugich jest z−t. Natomiast tych pierwszych jest n−z, (mała adnotacja, przez kolumny związane z wartością własną λ_w, chodzi mi o to, że te kolumny są w pewnych klatkach w macierzy), a te klatki są związane z λ_w). Otrzymujemy zatem, że $r(J-\lambda_w I) = n - t$.
Ale z ALZG, wiemy, że: $r(X-\lambda_w I) = n - \dim\ker(X-\lambda_w I) \rightarrow$
$\dim\ker(X-\lambda_w I) = n - r(X-\lambda_w I) = n-(n-t) = t$. Dodatkowo skoro $\sum_{j=1}^{t} st_j = z$. A t oznacza liczbę klatek związanych z λ_w, to mamy to co chcieliśmy wykazać.

g) Liczymy kolejne wymiary jąder przekształceń (X-lambda*(id))^n:

A:

```
In[23]:= 5 - MatrixRank[MatrixPower[a - lambdaI, 2]]

Out[23]= 2

In[24]:= 5 - MatrixRank[MatrixPower[a - lambdaI, 3]]

Out[24]= 3

In[25]:= 5 - MatrixRank[MatrixPower[a - lambdaI, 4]]

Out[25]= 4

In[26]:= 5 - MatrixRank[MatrixPower[a - lambdaI, 5]]

Out[26]= 5

In[27]:= 5 - MatrixRank[MatrixPower[a - lambdaI, 6]]

Out[27]= 5
```

B:

```
In[30]:= 5 - MatrixRank[MatrixPower[b - lambdaI, 2]]

Out[30]= 3

In[32]:= 5 - MatrixRank[MatrixPower[b - lambdaI, 3]]

Out[32]= 4

In[33]:= 5 - MatrixRank[MatrixPower[b - lambdaI, 4]]

Out[33]= 5

In[35]:= 5 - MatrixRank[MatrixPower[b - lambdaI, 5]]

Out[35]= 5
```

C:

In[28]:= 5 - MatrixRank[MatrixPower[c - lambdaI, 2]]

Out[28]= 4

In[29]:= 5 - MatrixRank[MatrixPower[c - lambdaI, 3]]

Out[29]= 5

In[30]:= 5 - MatrixRank[MatrixPower[c - lambdaI, 4]]

Out[30]= 5

D:

In[20]:= 5 - MatrixRank[MatrixPower[d - lambdaI, 2]]

Out[20]= 4

In[21]:= 5 - MatrixRank[MatrixPower[d - lambdaI, 3]]

Out[21]= 5

In[23]:= 5 - MatrixRank[MatrixPower[d - lambdaI, 4]]

Out[23]= 5

E:

In[31]:= 5 - MatrixRank[MatrixPower[e - lambdaI, 2]]

Out[31]= 5

In[32]:= 5 - MatrixRank[MatrixPower[e - lambdaI, 3]]

Out[32]= 5

F:

In[27]:= 5 - MatrixRank[MatrixPower[f - lambdaI, 2]]

Out[27]= 5

In[29]:= 5 - MatrixRank[MatrixPower[f - lambdaI, 3]]

Out[29]= 5

G:

In[33]:= 5 - MatrixRank[MatrixPower[g - lambdaI, 2]]

Out[33]= 5

In[34]:= 5 - MatrixRank[MatrixPower[g - lambdaI, 3]]

Out[34]= 5

Ilość klatek Jordana jest równa ilości “sznurków”. Hipoteza: Wielkości poszczególnych klatek Jordana są takie same, jak ilość wektorów w odpowiednim “sznurku”. Opiszę teraz, co definiujemy przez sznurek. Rozważmy macierz A z jedną wartością własną w postaci Jordana.

In[2]:= MatrixForm[A]

Out[2]//MatrixForm=

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Gołym okiem widzimy, że przedstawiona macierz ma dwie klatki Jordana. Oznaczmy teraz wektory bazy kanonicznej przestrzeni R^(5) jako e1,e2,e3,e4,e5. Rozważmy przekształcenie F, które zadane jest powyższą macierzą. Wtedy:

F(e1)=3*e1

F(e2)=3*e2

F(e3)=e2+3*e3

F(e4)=e3+3*e4

F(e5)=e4+3*e5

Rozważmy teraz przekształcenie G(v)=(F-lambda*id)(v), gdzie lambda to wartość własna macierzy A, a id to macierz jednostkowa 5x5. Wtedy A-lambda*id wygląda następująco:

In[3]:= MatrixForm[A - 3 * IdentityMatrix[5]]

Out[3]//MatrixForm=

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Wtedy:

G(e1)=0

G(e2)=0

G(e3)=e2

G(e4)=e3

G(e5)=e4

Zauważmy, że:

e1->0

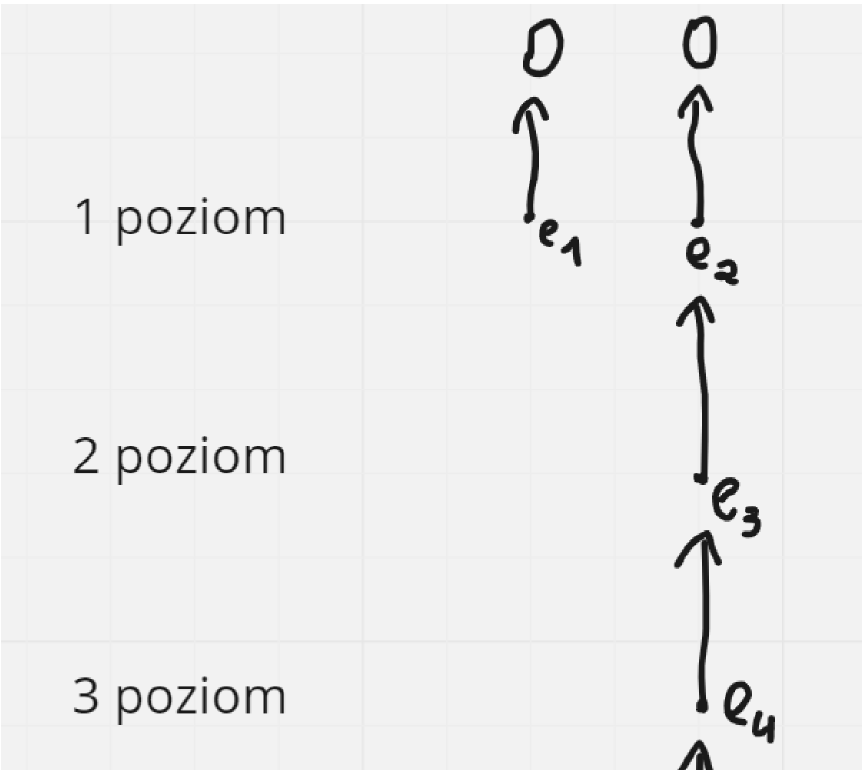
e2->0

e3->e2

e4->e3

e5->e4

Strukturę sznurkową definiujemy w ten sposób, że każdy wektor przechodzący na wektor zerowy jest w oddzielnym sznurku i znajduje się na szczycie struktury. Każdy wektor na szczycie struktury jest na pierwszym poziomie. Kolejne wektory doczepiane do hierarchicznie wyższych poziomów są na i+1-poziomie, jeśli poprzedni wektor był na i-poziomie Kolejne wektory doczepiamy do poszczególnych obrazów wektorów. Przykładowo jeśli wektor e2 przechodzi na wektor e1, to doklejamy go do wektora e1, i wtedy wektor e2 znajduje się na poziomie o jeden większym niż pozycja wektora e1. Obrazkowo, dla powyższego obrazka, można to pokazać w następujący sposób:



Weźmy teraz macierz B z naszego zadania:

```
In[5]:= MatrixForm[b]

Out[5]//MatrixForm=
```

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 & 1 & 1 \\ -5 & -1 & 1 & -4 & 4 \\ 3 & 0 & -2 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Wiemy, z wcześniejszych podpunktów, że lambda=(-1). Obliczymy teraz wymiary poszczególnych jąder potęg przekształceń B-lambda*id, aż do ustabilizowania się wymiaru. Twierdzę, że jeśli dimker((B-lambda*id)^(k))=dimker((B-lambda*id)^(k+1)), to sznurek jest k-poziomowy oraz:

*Na pierwszym poziomie jest dimker(B-lambda*id) wektorów,

*Na i-tym poziomie jest dimker((B-lambda*id)^(i))- dimker((B-lambda*id)^(i-1)) wektorów.

```
In[51]:= 5 - MatrixRank[MatrixPower[b - lambdaI, 1]]

Out[51]= 2

In[52]:= 5 - MatrixRank[MatrixPower[b - lambdaI, 2]]

Out[52]= 3

In[32]:= 5 - MatrixRank[MatrixPower[b - lambdaI, 3]]

Out[32]= 4

In[33]:= 5 - MatrixRank[MatrixPower[b - lambdaI, 4]]

Out[33]= 5

In[35]:= 5 - MatrixRank[MatrixPower[b - lambdaI, 5]]

Out[35]= 5
```

Obliczmy teraz ilość wektorów na poszczególnym poziomie z wcześniej podanej zależności:

*Na 1 poziomie są 2 wektory,

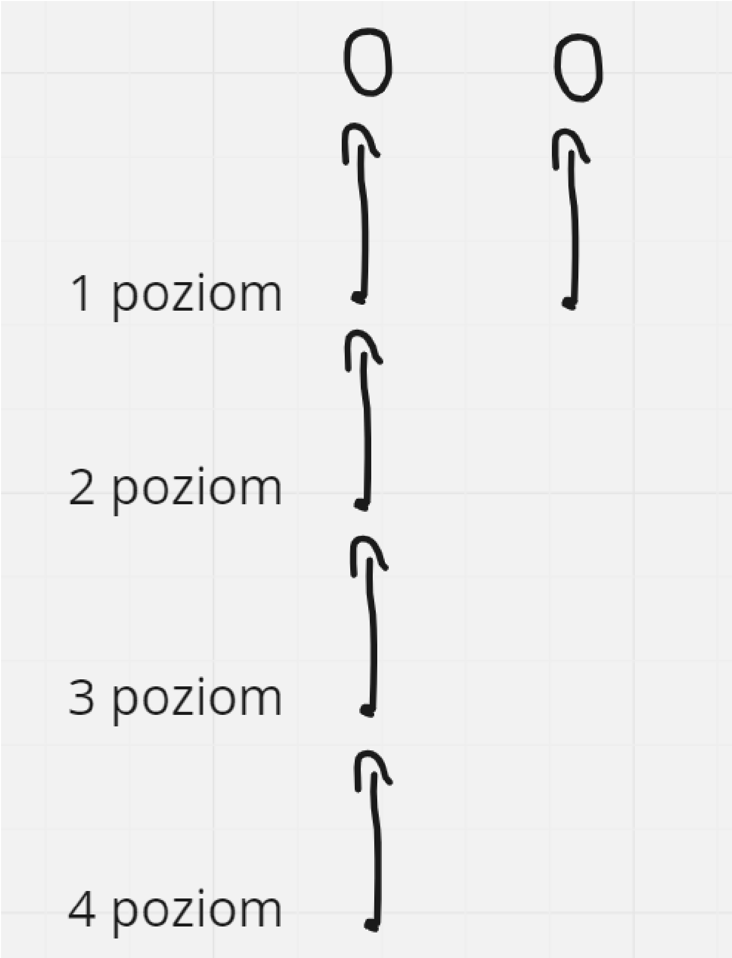
*Na 2 poziomie jest 3-2=1 wektor,

*Na 3 poziomie jest 4-3=1 wektor,

*Na 4 poziomie jest 5-4=1 wektor,

*Na 5 poziomie jest 5-5=0 wektorów.

Narysujmy powyższą sytuację:



Na pierwszym poziomie mamy 2 wektory, więc będziemy mieli 2 klatki Jordana, zaś ilość poszczególnych wektorów w sznurku wynosi: 4 i 1, więc wielkości klatek Jordana będą miały wielkość 4 i 1. Zauważmy, że podana zależność się zgadza:

In[37]:= `JordanDecomposition[b]`

Out[37]= `{{{-5, 1, 2, 1, 0}, {1, -1, 1, 4, 0}, {-5, 1, 1, -2, 0}, {0, 0, 0, -1, 0}, {-5, 1, 2, 1, 1}}, {{-1, 0, 0, 0, 0}, {0, -1, 1, 0, 0}, {0, 0, -1, 1, 0}, {0, 0, 0, -1, 1}, {0, 0, 0, 0, -1}}}`

In[38]:= `Map[MatrixForm, %]`

Out[38]= $\left\{\begin{pmatrix} -5 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 4 & 0 \\ -5 & 1 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ -5 & 1 & 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}\right\}$ Dwie klatki Jordana

Wielkość pierwszej z nich to 1, a drugiej 4.

h) Policzmy wielomiany charakterystyczne obu macierzy i wyliczmy wartości własne:

H:

In[57]:= `hPolynomial = CharacteristicPolynomial[h, x]`

Out[57]= $64 - 192 x + 240 x^2 - 160 x^3 + 60 x^4 - 12 x^5 + x^6$

In[58]:= `Solve[hPolynomial == 0, x]`

Out[58]= $\{\{x \to 2\}, \{x \to 2\}, \{x \to 2\}, \{x \to 2\}, \{x \to 2\}, \{x \to 2\}\}$

K:

```
In[60]:= kPolynomial = CharacteristicPolynomial[k, x]
```

Out[60]= $64 - 192\,x + 240\,x^2 - 160\,x^3 + 60\,x^4 - 12\,x^5 + x^6$

```
In[61]:= Solve[kPolynomial == 0, x]
Out[61]= {{x → 2}, {x → 2}, {x → 2}, {x → 2}, {x → 2}, {x → 2}}
```

Obie macierze mają jedną wartość własną lambda=2

```
In[60]:= lambdaI = IdentityMatrix[6] * 2
Out[60]= {{2, 0, 0, 0, 0, 0}, {0, 2, 0, 0, 0, 0}, {0, 0, 2, 0, 0, 0}, {0, 0, 0, 2, 0, 0}, {0, 0, 0, 0, 2, 0}, {0, 0, 0, 0, 0, 2}}
```

Policzę teraz wymiary poszczególnych jąder potęg macierzy H-lambda*(id)

```
In[61]:= 6 - MatrixRank[MatrixPower[h - lambdaI, 1]]
Out[61]= 2

In[67]:= 6 - MatrixRank[MatrixPower[h - lambdaI, 2]]
Out[67]= 4

In[71]:= 6 - MatrixRank[MatrixPower[h - lambdaI, 3]]
Out[71]= 6

In[74]:= 6 - MatrixRank[MatrixPower[h - lambdaI, 4]]
Out[74]= 6
```

dimker(H-lambda*(id))=2, więc wnioskuję, że będą dwie klatki Jordana.

Na odpowiednich poziomach znajduje się:

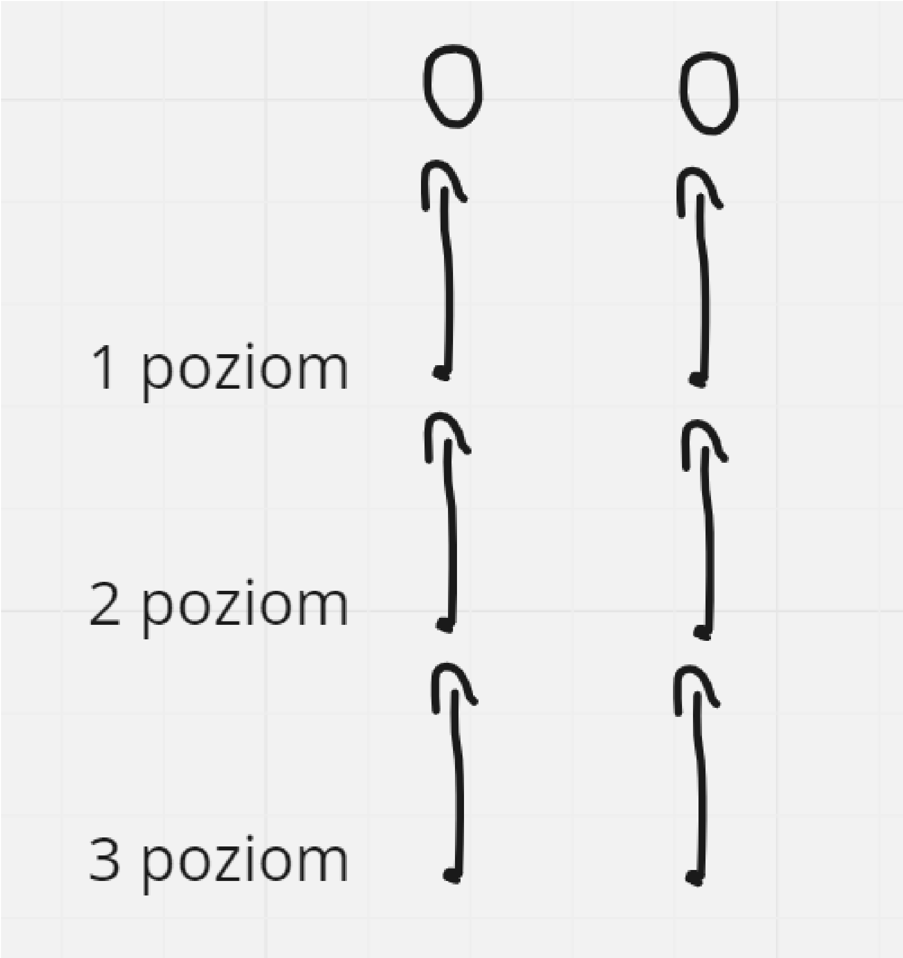
*1 poziom-> 2 wektory;

*2 poziom-> 4-2=2 wektory;

*3 poziom-> 6-4=2 wektory;

*4 poziom-> 6-6=0 wektorów;

Graficznie sytuację przedstawić można w następujący sposób:



Z zależności z poprzedniego punktu twierdzę, że wielkości poszczególnych klatek Jordana macierzy H będą równe: 3 i 3. I tak się rzeczywiście zgadza:

```
In[7]:= JordanDecomposition[h]

Out[7]= {{{1, 1, -2, 0, 3, 5}, {0, -1, 2, 0, -3, -4}, {1, 1, -3, 2, 5, -1}, {0, 0, 0, 1, 0, 0}, {1, 1, -2, 0, 2, 3}, {1, 0, 0, 0, 0, 0}}, {{2, 1,
        0, 0, 0, 0}, {0, 2, 1, 0, 0, 0}, {0, 0, 2, 0, 0, 0}, {0, 0, 0, 2, 1, 0}, {0, 0, 0, 0, 2, 1}, {0, 0, 0, 0, 0, 2}}}

In[8]:= Map[MatrixForm, %]
```

Out[8]= $\left\{\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 0 & 3 & 5 \\ 0 & -1 & 2 & 0 & -3 & -4 \\ 1 & 1 & -3 & 2 & 5 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -2 & 0 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}\right\}$

Są dwie klatki Jordana

Obie klatki mają wielkość 3.

Obliczmy teraz wymiary poszczególnych jąder potęg macierzy K-lambda*(id):

In[13]:= 6 - MatrixRank[MatrixPower[k - lambdaI, 1]]

Out[13]= 3

In[14]:= 6 - MatrixRank[MatrixPower[k - lambdaI, 2]]

Out[14]= 4

In[15]:= 6 - MatrixRank[MatrixPower[k - lambdaI, 3]]

Out[15]= 5

In[16]:= 6 - MatrixRank[MatrixPower[k - lambdaI, 4]]

Out[16]= 6

In[17]:= 6 - MatrixRank[MatrixPower[k - lambdaI, 5]]

Out[17]= 6

dimker(K-lambda*(id))=3, więc wnioskuję, że będą dwie klatki Jordana.

Na odpowiednich poziomach znajduje się:

*1 poziom-> 3 wektory;

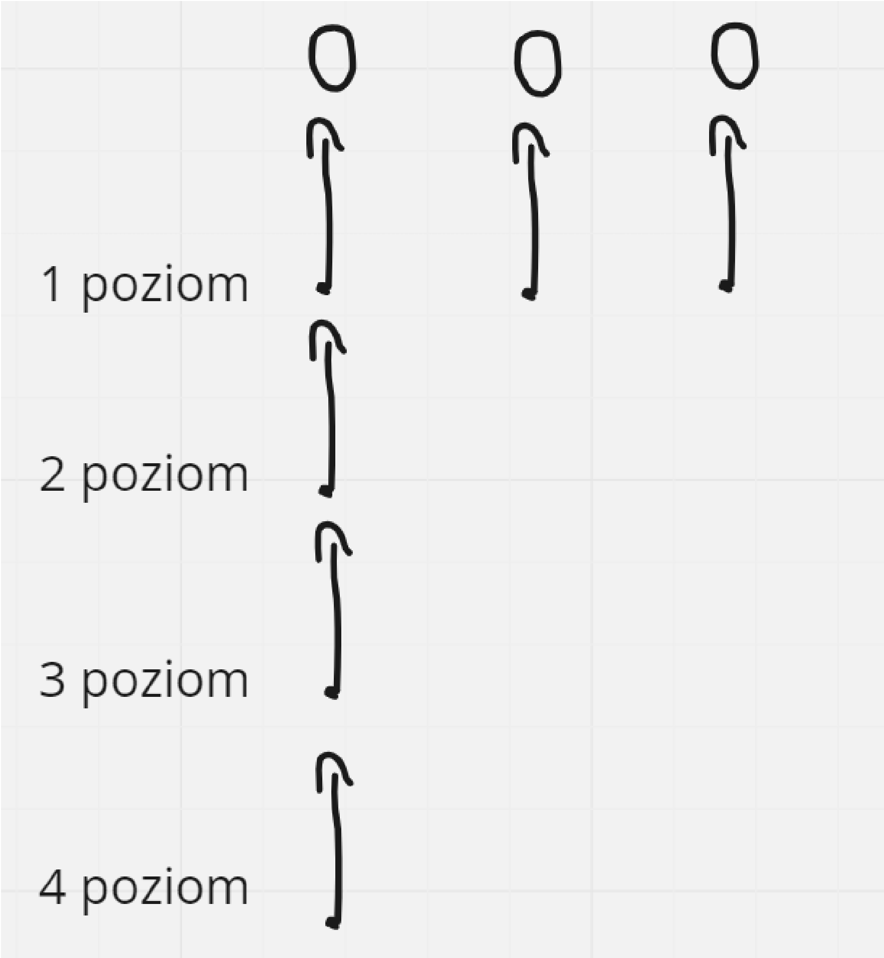
*2 poziom-> 4-3=1 wektor;

*3 poziom-> 5-4=1 wektor;

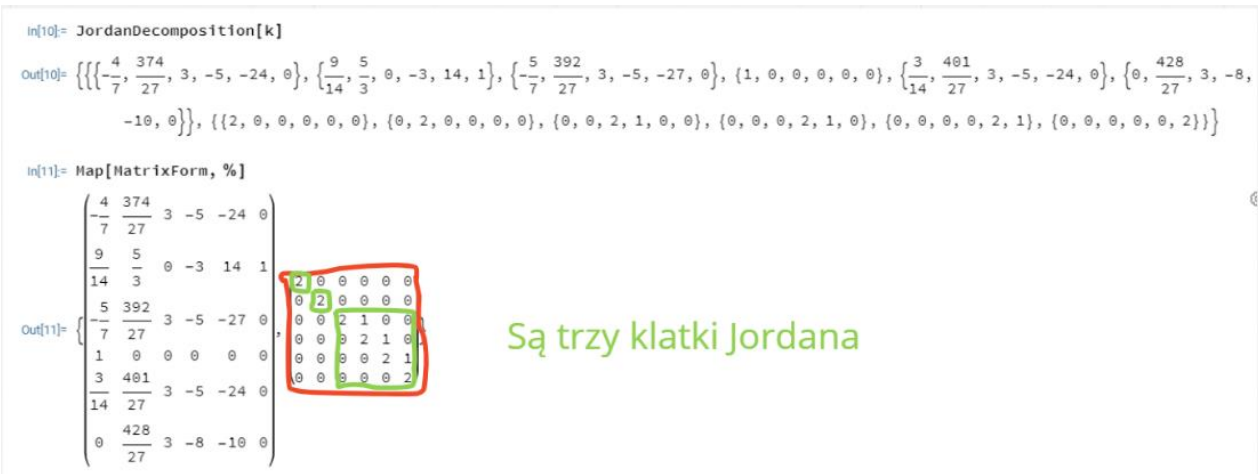
*4 poziom-> 6-5=1 wektor;

*5 poziom-> 6-6=0 wektorów;

Graficznie sytuację przedstawić można w następujący sposób:



Z zależności z poprzedniego punktu twierdzę, że wielkości poszczególnych klatek Jordana macierzy K będą równe: 4,1,1. I tak się rzeczywiście zgadza:



Klatki mają wielkość: 4,1,1.

i) Idea rozwiązania będzie praktycznie identyczna, jak te w poprzednich podpunktach. Jedyna różnica będzie taka, że będziemy liczyć odpowiednie wymiary przekształceń dla odpowiednich wartości własnych macierzy. Znajdźmy teraz wartości własne macierzy M:

```
In[13]:= mPolynomial = CharacteristicPolynomial[m, x]
```

Out[13]= $1000 - 2100x + 1770x^2 - 763x^3 + 177x^4 - 21x^5 + x^6$

```
In[14]:= Solve[mPolynomial == 0, x]
```

Out[14]= $\{\{x \to 2\}, \{x \to 2\}, \{x \to 2\}, \{x \to 5\}, \{x \to 5\}, \{x \to 5\}\}$

Obliczmy teraz wymiary jąder poszczególnych potęg przekształcenia (M-lambda2*(id))^n

```
In[4]:= lambdaIFirst = 2 * IdentityMatrix[6]
Out[4]= {{2, 0, 0, 0, 0, 0}, {0, 2, 0, 0, 0, 0}, {0, 0, 2, 0, 0, 0}, {0, 0, 0, 2, 0, 0}, {0, 0, 0, 0, 2, 0}, {0, 0, 0, 0, 0, 2}}

In[10]:= 6 - MatrixRank[MatrixPower[m - lambdaIFirst, 1]]
Out[10]= 1

In[11]:= 6 - MatrixRank[MatrixPower[m - lambdaIFirst, 2]]
Out[11]= 2

In[12]:= 6 - MatrixRank[MatrixPower[m - lambdaIFirst, 3]]
Out[12]= 3

In[13]:= 6 - MatrixRank[MatrixPower[m - lambdaIFirst, 4]]
Out[13]= 3
```

Dimker(M-lambda2*(id))=1, więc wnioskuję, że będzie jedna klatka Jordana dla wartości własnej lambda=2. Obliczmy teraz ile wektorów znajdzie się na poszczególnych poziomach "sznurków":

*1 poziom-> 1 wektor;

*2 poziom-> 2-1=1 wektor;

*3 poziom-> 3-2=1 wektor;

*4 poziom-> 3-3=0 wektorów;

Przedstawmy teraz podaną sytuację graficznie:

Z zależności z poprzednich punktów twierdzę, że macierz M będzie miała jedną klatkę Jordana wielkości 3 dla wartości własnej lambda=2.

Obliczmy teraz wymiary jąder poszczególnych przekształceń (M-lambda5*(id))^n dla wartości własnej lambda=5:

```
In[14]:= lambdaISecond = 5 * IdentityMatrix[6]
Out[14]= {{5, 0, 0, 0, 0, 0}, {0, 5, 0, 0, 0, 0}, {0, 0, 5, 0, 0, 0}, {0, 0, 0, 5, 0, 0}, {0, 0, 0, 0, 5, 0}, {0, 0, 0, 0, 0, 5}}

In[15]:= 6 - MatrixRank[MatrixPower[m - lambdaISecond, 1]]
Out[15]= 2

In[16]:= 6 - MatrixRank[MatrixPower[m - lambdaISecond, 2]]
Out[16]= 3

In[17]:= 6 - MatrixRank[MatrixPower[m - lambdaISecond, 3]]
Out[17]= 3
```

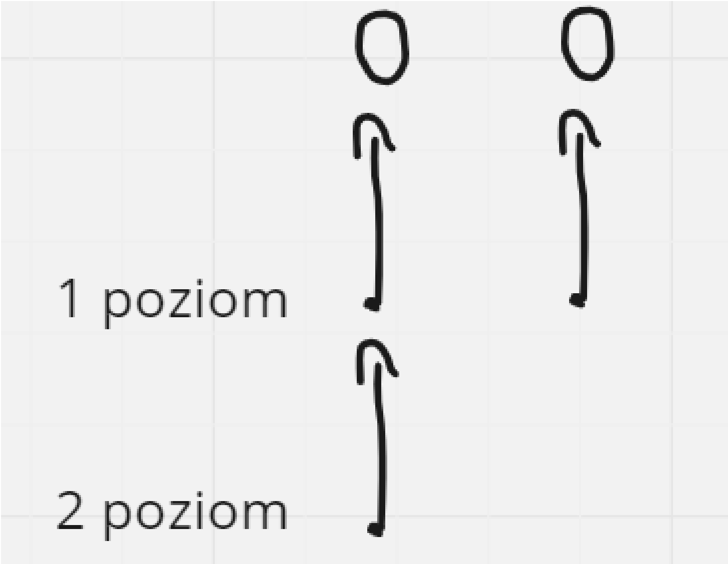
Dimker(M-lambda5*(id))=2, więc wnioskuję, że będą dwie klatki Jordana. Na odpowiednich poziomach sznurka znajdują się:

*1 poziom-> 2 wektory;

*2 poziom-> 3-2=1 wektor;

*3 poziom-> 3-3=0 wektorów;

Przedstawmy graficznie rozważaną sytuację:



Na podstawie wcześniejszych zależności twierdzę, że macierz M będzie miała dwie klatki Jordana dla wartości własnej lambda=5 o wielkościach: 2 i 1. Czyli łącząc poprzednie rozważania macierz M ma 3 klatki Jordana: jedna klatka wielkości 3 dla wartości własnej lambda=2 i dwie klatki wielkości 2 i 1 dla wartości własnej lambda=5. I tak rzeczywiście się zgadza:

In[2]:= `JordanDecomposition[m]`

Out[2]= $\left\{\left\{\left\{1, 1, -2, \frac{9}{2}, 4, -5\right\}, \left\{0, -1, 2, \frac{3}{2}, 4, 13\right\}, \left\{1, 1, -3, \frac{3}{2}, 4, 17\right\}, \{0, 0, 0, 0, 4, 0\}, \{1, 1, -2, 6, 8, 0\}, \{1, 0, 0, 6, 8, 12\}\right\}, \{\{2, 1, 0, 0, 0, 0\}, \{0, 2, 1, 0, 0, 0\}, \{0, 0, 2, 0, 0, 0\}, \{0, 0, 0, 5, 0, 0\}, \{0, 0, 0, 0, 5, 1\}, \{0, 0, 0, 0, 0, 5\}\}\right\}$

In[3]:= `Map[MatrixForm, %]`

Out[3]= $\left\{\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & \frac{9}{2} & 4 & -5 \\ 0 & -1 & 2 & \frac{3}{2} & 4 & 13 \\ 1 & 1 & -3 & \frac{3}{2} & 4 & 17 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & 0 \\ 1 & 1 & -2 & 6 & 8 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 6 & 8 & 12 \end{pmatrix}, \boxed{\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}}\right\}$

Jest jedna klatka Jordana dla **λ=2**

Są dwie klatki Jordana dla **λ=5**

Przeprowadźmy podobne rozumowanie dla macierzy N.

In[2]:= `nPolynomial = CharacteristicPolynomial[n, x]`

Out[2]= $2\,500 - 4\,500\,x + 3\,225\,x^2 - 1\,180\,x^3 + 234\,x^4 - 24\,x^5 + x^6$

In[3]:= `Solve[nPolynomial == 0, x]`

Out[3]= $\{\{x \to 2\}, \{x \to 2\}, \{x \to 5\}, \{x \to 5\}, \{x \to 5\}, \{x \to 5\}\}$

Macierz także ma dwie wartości własne lambda=2 i lambda=5. Policzmy teraz wymiary jąder poszczególnych przekształceń (N-lambda2*(id))^n:

```
In[23]:= lambdaIFirst = 2 * IdentityMatrix[6]
Out[23]= {{2, 0, 0, 0, 0, 0}, {0, 2, 0, 0, 0, 0}, {0, 0, 2, 0, 0, 0}, {0, 0, 0, 2, 0, 0}, {0, 0, 0, 0, 2, 0}, {0, 0, 0, 0, 0, 2}}

In[24]:= 6 - MatrixRank[MatrixPower[n - lambdaIFirst, 1]]
Out[24]= 1

In[25]:= 6 - MatrixRank[MatrixPower[n - lambdaIFirst, 2]]
Out[25]= 2

In[26]:= 6 - MatrixRank[MatrixPower[n - lambdaIFirst, 3]]
Out[26]= 2
```

Dimker(N-lambda2*(id))=1, więc wnioskuję, że będzie jedna klatka Jordana dla wartości własnej lambda=2. Obliczmy teraz ile wektorów znajdzie się na poszczególnych poziomach “sznurków”:

*1 poziom-> 1 wektor;

*2 poziom-> 2-1=1 wektor;

*3 poziom-> 2-2=0 wektorów;

Pokażmy podaną sytuację graficznie:

Z zależności z poprzednich punktów twierdzę, że macierz N będzie miała jedną klatkę Jordana wielkości 2 dla wartości własnej lambda=2.

Obliczmy teraz wymiary jąder poszczególnych przekształceń (M-lambda5*(id))^n dla wartości własnej lambda=5:

```
In[28]:= lambdaISecond = 5 * IdentityMatrix[6]
Out[28]= {{5, 0, 0, 0, 0, 0}, {0, 5, 0, 0, 0, 0}, {0, 0, 5, 0, 0, 0}, {0, 0, 0, 5, 0, 0}, {0, 0, 0, 0, 5, 0}, {0, 0, 0, 0, 0, 5}}

In[29]:= 6 - MatrixRank[MatrixPower[n - lambdaISecond, 1]]
Out[29]= 3

In[30]:= 6 - MatrixRank[MatrixPower[n - lambdaISecond, 2]]
Out[30]= 4

In[31]:= 6 - MatrixRank[MatrixPower[n - lambdaISecond, 3]]
Out[31]= 4
```

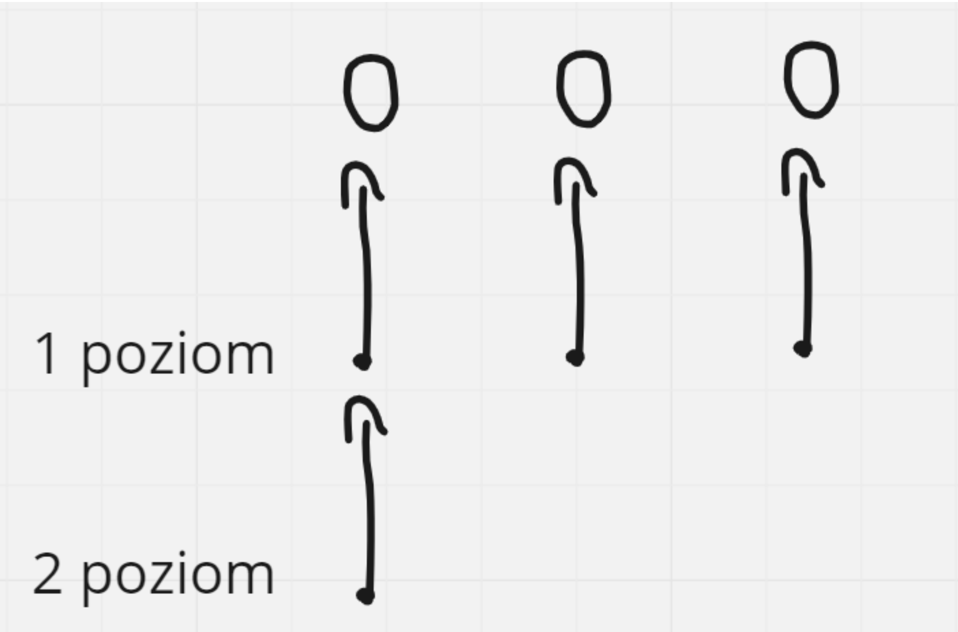
Dimker(N-lambda5*(id))=3, więc wnioskuję, że będą trzy klatki Jordana. Na odpowiednich poziomach sznurka znajdują się:

*1 poziom-> 3 wektory;

*2 poziom-> 4-3=1 wektor;

*3 poziom-> 4-4=0 wektorów;

Przedstawmy sytuację graficznie:



Na podstawie wcześniejszych zależności twierdzę, że macierz N będzie miała trzy klatki Jordana dla wartości własnej lambda=5 o wielkościach: 2,1,1. Czyli łącząc poprzednie rozważania macierz M ma 4 klatki Jordana: jedna klatka wielkości 2 dla wartości własnej lambda=2 i trzy klatki wielkości 2,1,1 dla wartości własnej lambda=5. I tak rzeczywiście się zgadza:

In[20]:= `JordanDecomposition[n]`

Out[20]= $$\left\{\left\{\left\{1, 1, -\frac{148}{3}, 37, 1, 3\right\}, \left\{0, -1, \frac{148}{3}, 74, 1, 33\right\}, \{1, 1, 0, 0, 1, 0\}, \{0, 0, 37, 0, 1, 0\}, \left\{1, 1, -\frac{148}{3}, 37, 2, 0\right\}, \{1, 0, 0, 111, 2, 37\}\right\}, \{\{2, 1, 0, 0, 0, 0\}, \{0, 2, 0, 0, 0, 0\}, \{0, 0, 5, 0, 0, 0\}, \{0, 0, 0, 5, 0, 0\}, \{0, 0, 0, 0, 5, 1\}, \{0, 0, 0, 0, 0, 5\}\}\right\}$$

In[21]:= `Map[MatrixForm, %]`

Out[21]= $$\left\{\begin{pmatrix} 1 & 1 & -\frac{148}{3} & 37 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & \frac{148}{3} & 74 & 1 & 33 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 37 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -\frac{148}{3} & 37 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 111 & 2 & 37 \end{pmatrix}, \boxed{\begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{matrix}} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & \boxed{5} & 0 & 0 & 0 \\ & & \boxed{5} & 0 & 0 \\ & & & \boxed{\begin{matrix} 5 & 1 \\ 0 & 5 \end{matrix}} \end{pmatrix}}\right\}$$

Jest jedna klatka Jordana dla **λ=2**

Są trzy klatki Jordana dla **λ=5**

Zad.3

In[102]:= `JordanDecomposition[h]`

Out[102]= {{{1, 1, -2, 0, 3, 5}, {0, -1, 2, 0, -3, -4}, {1, 1, -3, 2, 5, -1}, {0, 0, 0, 1, 0, 0}, {1, 1, -2, 0, 2, 3}, {1, 0, 0, 0, 0, 0}}, {{2, 1, 0, 0, 0, 0}, {0, 2, 1, 0, 0, 0}, {0, 0, 2, 0, 0, 0}, {0, 0, 0, 2, 1, 0}, {0, 0, 0, 0, 2, 1}, {0, 0, 0, 0, 0, 2}}}

In[103]:= `Map[MatrixForm, %]`

Out[103]= $$\boxed{\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 0 & 3 & 5 \\ 0 & -1 & 2 & 0 & -3 & -4 \\ 1 & 1 & -3 & 2 & 5 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -2 & 0 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}} \boxed{\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}}$$

Macierz podobieństwa P

Macierz Jordana J

In[105]:= $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 0 & 3 & 5 \\ 0 & -1 & 2 & 0 & -3 & -4 \\ 1 & 1 & -3 & 2 & 5 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -2 & 0 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Out[105]= {{1, 1, -2, 0, 3, 5}, {0, -1, 2, 0, -3, -4}, {1, 1, -3, 2, 5, -1}, {0, 0, 0, 1, 0, 0}, {1, 1, -2, 0, 2, 3}, {1, 0, 0, 0, 0, 0}}

In[106]:= $J = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

Out[106]= {{2, 1, 0, 0, 0, 0}, {0, 2, 1, 0, 0, 0}, {0, 0, 2, 0, 0, 0}, {0, 0, 0, 2, 1, 0}, {0, 0, 0, 0, 2, 1}, {0, 0, 0, 0, 0, 2}}

In[107]:= `PInversed = MatrixPower[P, -1]`

Out[107]= {{0, 0, 0, 0, 0, 1}, {-15, -19, -2, 4, -1, 18}, {-7, -10, -1, 2, -2, 10}, {0, 0, 0, 1, 0, 0}, {-1, -2, 0, 0, -1, 2}, {1, 1, 0, 0, 0, -1}}

In[108]:= `Map[MatrixForm, %]`

Out[108]= $$\left\{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -15 \\ -19 \\ -2 \\ 4 \\ -1 \\ 18 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -7 \\ -10 \\ -1 \\ 2 \\ -2 \\ 10 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}\right\}$$

Wszystko się zgadza:

In[111]:= `P.J.PInversed == h`

Out[111]= `True`

Zad.4

Zadanie 4.

Wykażmy najpierw, że dla każdej macierzy $A \in M_m^m(\mathbb{C})$ ślad macierzy A jest równy sumie wszystkich wartości własnych macierzy A.

Dowód.

Wiemy, że możemy zapisać: $J = SAS^{-1}$, gdzie S jest pewną macierzą odwracalną, natomiast J jest macierzą zapisaną w postaci Jordana. Możemy zatem zapisać:

$$tr\, J = tr\,(SAS^{-1}).$$

Wykażmy pomocniczy lemat, że: $tr\,(CD) = tr\,(DC)$, dla $C, D \in M_m^m(\mathbb{C})$.

Dowód lematu:

$$tr\,(CD) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{m} c_{ij} d_{ji}, \text{ natomiast}$$

$$tr\,(DC) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{m} c_{ij} d_{ji}, \text{ stąd łatwo zauważyć, że:}$$

$tr\,(CD) = tr\,(DC)$

Wróćmy teraz do naszego dowodu: mamy:

$$tr\, J = tr\,(SAS^{-1}) \text{ zatem:}$$

$$tr\, J = tr\,((SA)S^{-1}),$$

$$tr\, J = tr\,(ASS^{-1}) = tr\,(AI) = tr\, A.$$

Ponieważ J jest zapisany w postaci Jordana, to:

$$tr\, J = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \quad \text{(z def macierzy zapisanej w postaci Jordana).}$$

Zatem:

$$tr\, A = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i. \quad \blacksquare$$

Zad. 4

Dowód, że wyznacznik macierzy to iloczyn wszystkich wartości własnych macierzy A.

Niech $A = \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$

Niech $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \dots \lambda_n$ to wartości własne A.

Wiemy też, że:

$$p(\lambda) = \det(\lambda I - A) = \lambda^n + c_{n-1}\lambda^{n-1} + \dots + c_1\lambda + c_0$$

Wiemy, że $p(x) = (x-\lambda_1)(x-\lambda_2)\dots(x-\lambda_n)$

~~No~~ Obliczmy $p(0)$

$$p(0) = \det(0I - A) = \det(-A) = (-1)^n \det A$$

$$p(0) = (0-\lambda_1)(0-\lambda_2)\dots(0-\lambda_n) = (-1)^n \prod_{i=1}^{n} \lambda_i$$

$$\cancel{(-1)^n} \det A = \cancel{(-1)^n} \prod_{i=1}^{n} \lambda_i$$

$$\det A = \prod_{i=1}^{n} \lambda_i$$

Zad.5

```
In[94]:= c = {{-9, 1, 2, -5, 6}, {-2, -1, 0, -2, 2}, {-5, 1, 1, -4, 3}, {1, 0, 0, -1, -1}, {-8, 1, 2, -5, 5}}
Out[94]= {{-9, 1, 2, -5, 6}, {-2, -1, 0, -2, 2}, {-5, 1, 1, -4, 3}, {1, 0, 0, -1, -1}, {-8, 1, 2, -5, 5}}

In[81]:= JordanDecomposition[c]
Out[81]= {{{1, 0, -1, 0, 0}, {2, -4, 7, -2, 5}, {0, 0, 0, 1, 0}, {0, -1, 3, 0, 1}, {1, 0, 0, 0, 0}}, {{-1, 1, 0, 0, 0}, {0, -1, 1, 0, 0}, {0, 0, -1, 0, 0}, {0,
        0, 0, -1, 1}, {0, 0, 0, 0, -1}}}

In[82]:= Map[MatrixForm, %]
```

Out[82]=
$$\left\{ \boxed{\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 2 & -4 & 7 & -2 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 3 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}} \boxed{\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}} \right\}$$

Macierz podobieństwa ourW

Macierz Jordana J

```
In[89]:= ourW = {{1, 0, -1, 0, 0}, {2, -4, 7, -2, 5}, {0, 0, 0, 1, 0}, {0, -1, 3, 0, 1}, {1, 0, 0, 0, 0}}
Out[89]= {{1, 0, -1, 0, 0}, {2, -4, 7, -2, 5}, {0, 0, 0, 1, 0}, {0, -1, 3, 0, 1}, {1, 0, 0, 0, 0}}

In[90]:= OurWInversed = MatrixPower[ourW, -1]
Out[90]= {{0, 0, 0, 0, 1}, {-8, 1, 2, -5, 6}, {-1, 0, 0, 0, 1}, {0, 0, 1, 0, 0}, {-5, 1, 2, -4, 3}}

In[98]:= J = {{-1, 1, 0, 0, 0}, {0, -1, 1, 0, 0}, {0, 0, -1, 0, 0}, {0, 0, 0, -1, 1}, {0, 0, 0, 0, -1}}
Out[98]= {{-1, 1, 0, 0, 0}, {0, -1, 1, 0, 0}, {0, 0, -1, 0, 0}, {0, 0, 0, -1, 1}, {0, 0, 0, 0, -1}}

In[100]:= J2021 = MatrixPower[J, 2021]
Out[100]= {{-1, 2021, -2041210, 0, 0}, {0, -1, 2021, 0, 0}, {0, 0, -1, 0, 0}, {0, 0, 0, -1, 2021}, {0, 0, 0, 0, -1}}

In[101]:= FINALMATRIX = ourW. J2021 .OurWInversed
Out[101]= {{2025041, 2021, 4042, -10105, -2029084}, {4078378, -1, 0, -4042, -4078378}, {-10105, 2021, 4041, -8084, 6063}, {2021, 0, 0, -1,
        -2021}, {2025042, 2021, 4042, -10105, -2029085}}

In[102]:= Map[MatrixForm, %]
```

Out[102]=
$$\left\{ \begin{pmatrix} 2\,025\,041 \\ 2\,021 \\ 4\,042 \\ -10\,105 \\ -2\,029\,084 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4\,078\,378 \\ -1 \\ 0 \\ -4\,042 \\ -4\,078\,378 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -10\,105 \\ 2\,021 \\ 4\,041 \\ -8\,084 \\ 6\,063 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2\,021 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \\ -2\,021 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2\,025\,042 \\ 2\,021 \\ 4\,042 \\ -10\,105 \\ -2\,029\,085 \end{pmatrix} \right\}$$

Wszystko się zgadza:

```
In[103]:= FINALMATRIX == MatrixPower[c, 2021]
Out[103]= True
```

Zad.6

a) Weźmy podaną macierz:

```
In[11]:= A = {{0, 1, 0, 0}, {0, 0, 1, 0}, {0, 0, 0, 1}, {0, 0, 0, 0}}
Out[11]= {{0, 1, 0, 0}, {0, 0, 1, 0}, {0, 0, 0, 1}, {0, 0, 0, 0}}

In[12]:= MatrixForm[A]
Out[12]//MatrixForm=
```

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Wtedy jej postać Jordana wygląda w następujący sposób:

```
In[13]:= JordanDecomposition[A]

Out[13]= {{{1, 0, 0, 0}, {0, 1, 0, 0}, {0, 0, 1, 0}, {0, 0, 0, 1}}, {{0, 1, 0, 0}, {0, 0, 1, 0}, {0, 0, 0, 1}, {0, 0, 0, 0}}}

In[14]:= Map[MatrixForm, %]
Out[14]=
```

$$\left\{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \boxed{\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}\right\}$$

Postać Jordana jest taka sama jak macierz, więc będziemy podnosić tę macierz do kolejnych potęg.

Liczymy kolejne wymiary jądra potęg macierzy A:

```
         4 - MatrixRank[A]
Out[16]= 1

In[17]:= 4 - MatrixRank[A.A]
Out[17]= 2

In[18]:= 4 - MatrixRank[A.A.A]
Out[18]= 3

In[19]:= 4 - MatrixRank[A.A.A.A]
Out[19]= 4

In[20]:= 4 - MatrixRank[A.A.A.A.A]
Out[20]= 4
```

Widzimy, że po kilku podniesieniach macierz A staje się macierzą zerową. Wymiar jądra macierzy się stabilizuje i wynosi 4. Odpowiednie wymiary jąder są równe poszukiwanym wymiarom w zadaniu.

b) Stwórzmy macierz B:

```
In[4]:= B = {{0, 1, 0, 0, 0}, {0, 0, 1, 0, 0}, {0, 0, 0, 0, 0}, {0, 0, 0, 0, 1}, {0, 0, 0, 0, 0}}

Out[4]= {{0, 1, 0, 0, 0}, {0, 0, 1, 0, 0}, {0, 0, 0, 0, 0}, {0, 0, 0, 0, 1}, {0, 0, 0, 0, 0}}

In[5]:= B

Out[5]= {{0, 1, 0, 0, 0}, {0, 0, 1, 0, 0}, {0, 0, 0, 0, 0}, {0, 0, 0, 0, 1}, {0, 0, 0, 0, 0}}

In[6]:= MatrixForm[B]

Out[6]//MatrixForm=
```

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Zauważmy, że podana macierz jest w postaci Jordana. Będziemy teraz podnosić macierz B do kolejnych potęg i liczyć wymiary jej poszczególnych jąder:

```
In[14]:= 5 - MatrixRank[B]

Out[14]= 2

In[15]:= 5 - MatrixRank[B.B]

Out[15]= 4

In[16]:= 5 - MatrixRank[B.B.B]

Out[16]= 5

In[17]:= 5 - MatrixRank[B.B.B.B]

Out[17]= 5

In[18]:= 5 - MatrixRank[B.B.B.B.B]

Out[18]= 5
```

Po podniesieniu do trzeciej potęgi macierz B staje się macierzą zerową. Stąd kolejne potęgi będą macierzami zerowymi. Wymiary poszczególnych jąder potęg macierzy B zgadzają się z poszukiwanymi w zadaniu.

c)

Zad. 6

c) Zauważmy, że $\dim \ker A^1 = 1$.
Czyli szukana macierz C ma jedną klatkę Jordana. Zauważmy, że ~~podpunktu~~ ~~...~~

z podpunktu można wywnioskować, że wymiar jądra stabilizuje się i osiąga wartość 4. To oznacza, że C jest postaci 4×4. Istnieje dokładnie jedna macierz nilpotentna 4×4 w postaci Jordana, która ma jedną klatkę Jordana i wygląda w następujący sposób:

$$C = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$\dim \ker C = 1$

$$C^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$\dim \ker C^2 = 2$

$$C^3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$\dim \ker C^3 = 3$

$$C^4 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\dim \ker C^4 = 4$$

Widzimy, że nigdy ~~nie~~ jądro nie będzie miało wymiaru 3, ono rośnie, więc macierz spełniająca założenia zadania nie istnieje.