Do godziny 23:59 kolejnego dnia w którym będą się odbywać drugie zajęcia przeznaczone na ten projekt wysyłają Państwo rozwiązania projektu na maila **Michal.Zwierzynski@pw.edu.pl** (w jednym pliku .PDF, każde zadanie na osobnej stronie, strony odpowiednio obrócone). Tytuł maila to **[AwAD 2023] Projekt nr 1**.

Klatki Jordana

Jak wiadomo, nie każda macierz kwadratowa nad ustalonym ciałem jest diagonalizowalna. Jednakże można udowodnić (czego nie zrobimy, a tylko przyjmiemy za pewnik), że każda macierz $A \in M_n(\mathbb{C})$ jest podobna do pewnej macierzy blokowej/klatkowej

$$J_A := \begin{bmatrix} J_{n_1}(\lambda_1) & & & \\ & J_{n_2}(\lambda_2) & & \\ & & \ddots & \\ & & & J_{n_k}(\lambda_k) \end{bmatrix},$$

gdzie $J_{n_i}(\lambda_i) \in M_{n_i}(\mathbb{C})$ jest postaci

$$J_{n_i}(\lambda_i) := \begin{bmatrix} \lambda_i & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_i & 1 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_i & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda_i \end{bmatrix}$$

dla $i \in [k]$, oraz $n_1 + n_2 + \ldots + n_k = n$. Macierz w postaci $J_{n_i}(\lambda_i)$ nazywamy blokiem/klatką Jordana. Klatka Jordana ma więc na głównej przekątnej ustaloną liczbę, a tuż nad główną przekatną jedynki. Okazuje się również, że λ_i są wartościami własnymi macierzy A dla $i \in [k]$.

W przypadku problemów z rozwiązywaniem zadanek z projektowych zachęcamy do kontaktu oraz do przejrzenia pliku z bibliografii.

Zadanko 1. Rozważmy macierz będącą pojedynczą klatką Jordana 4×4 postaci

$$A = \begin{bmatrix} \lambda & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix}.$$

Oblicz kilka początkowych potęg macierzy A (np. wykorzystując funkcję `MatrixPower` w programie Mathematica - można tam również wpisać, by od razu policzyć n-tą potęgę) oraz wywnioskuj wzór na n-tą potęgę klatki Jordana 4×4, który wykorzystuje symbol Newtona. Uogólnij go dla klatki Jordana wielkości $m \times m$ i udowodnij go (nie trzeba wcale dowodzić go indukcją, można rozpisać macierz A na sumę dwóch macierzy i skorzystać ze wzoru dwumianowego Newtona).

Zadanko 2. Rozważmy macierze

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -1 & -3 & 5 & -2 \\ -5 & -1 & 1 & -4 & 4 \\ 8 & -1 & -4 & 6 & -5 \\ 1 & 0 & 0 & -1 & -1 \\ 5 & -1 & -3 & 5 & -3 \end{pmatrix},$$

```
a={{4, -1, -3, 5, -2}, {-5, -1, 1, -4, 4}, {8, -1, -4, 6, -5}, {1, 0, 0, -1, -1}, {5, -1, -3, 5, -3}}
```

$$B = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 & 1 & 1 \\ -5 & -1 & 1 & -4 & 4 \\ 3 & 0 & -2 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

```
b={{-1, 0, -1, 1, 1}, {-5, -1, 1, -4, 4}, {3, 0, -2, 2, -2}, {1, 0, 0, -1, -1}, {0, 0, -1, 1, 0}}
```

$$C = \begin{pmatrix} -9 & 1 & 2 & -5 & 6 \\ -2 & -1 & 0 & -2 & 2 \\ -5 & 1 & 1 & -4 & 3 \\ 1 & 0 & 0 & -1 & -1 \\ -8 & 1 & 2 & -5 & 5 \end{pmatrix},$$

```
c={{-9, 1, 2, -5, 6}, {-2, -1, 0, -2, 2}, {-5, 1, 1, -4, 3}, {1, 0, 0, -1, -1}, {-8, 1, 2, -5, 5}}
```

$$D = \begin{pmatrix} -4 & 0 & 0 & -1 & 3 \\ -2 & -1 & 0 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 & -1 \\ -3 & 0 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix},$$

```
d={{-4, 0, 0, -1, 3}, {-2, -1, 0, -2, 2}, {0, 0, -1, 0, 0}, {1, 0, 0, -1, -1}, {-3, 0, 0, -1, 2}}
```

$$E = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 2 & 0 \\ -3 & -1 & 1 & -2 & 2 \\ 3 & 0 & -2 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & 0 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & 2 & -1 \end{pmatrix},$$

```
e={{0, 0, -1, 2, 0}, {-3, -1, 1, -2, 2}, {3, 0, -2, 2, -2}, {1, 0, 0, -1, -1}, {1, 0, -1, 2, -1}}
```

$$F = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 & 2 & -2 \\ -3 & -1 & 1 & -2 & 2 \\ 3 & 0 & -2 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 3 & 0 & -1 & 2 & -3 \end{pmatrix},$$

```
f={{2, 0, -1, 2, -2}, {-3, -1, 1, -2, 2}, {3, 0, -2, 2, -2}, {0, 0, 0, -1, 0}, {3, 0, -1, 2, -3}}
```

$$G = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

```
g={{-1, 0, 0, 0, 0}, {0, -1, 0, 0, 0}, {0, 0, -1, 0, 0}, {0, 0, 0, -1, 0}, {0, 0, 0, 0, -1}}
```

(a) Zweryfikuj, że każda macierz z zadania ma ten sam wielomian charakterystyczny, którego jedynym pierwiastkiem jest pewna liczba λ.

(b) Sprawdź do jakiej macierzy blokowej podobne są odpowiednie macierzy, w szczególności ile klatek Jordana ma dana macierz blokowa (przydatne będzie polecenie `JordanDecomposition` z Mathematici).

(c) Dla każdej macierzy X z zadania oblicz wymiar jądra przekształcenia $X - \lambda I$ (przydatne będzie polecenie `MatrixRank` z Mathematici).

(d) Napisz hipotezę w której dla macierzy X nad $\mathbb{C}$, która posiada jedną wartość własną, napiszesz wzór na liczbę klatek Jordana macierzy X w zależności od $\dim\ker(X - \lambda I)$ (przydatna będzie funkcja `IdentityMatrix`).

(e) Udowodnij hipotezę z poprzedniego podpunktu. Warto przy okazji udowodnić lemat, że jeśli macierze A i B są podobne, to macierze $A - \lambda I$ oraz $B - \lambda I$ są również podobne.

(f) Hipoteza ta też działa dla macierzy $X \in M_n(\mathbb{C})$ oraz liczby klatek Jordana dla ustalonej wartości własnej macierzy X. Uzasadnij to.

(g) Dla każdej macierzy X z zadania oblicz kolejne wymiary jąder przekształceń $X - \lambda I$, $(X - \lambda I)^2$, $(X - \lambda I)^3, \ldots$. Po pewnym czasie wymiar ten się stabilizuje (tak będzie zawsze, nie trzeba tego uzasadniać). Opisz zależności wielkości klatek Jordana macierzy X od odpowiednich wymiarów jąder potęg macierzy $X - \lambda I$.

(h) Zweryfikuj znalezioną zależność z poprzedniego podpunktu dla następujących macierzy H oraz K, czyli:

- Wyznacz wartości własne macierzy Y (Y to ustalona macierz z tego podpunktu), też okaże się, że macierz Y ma tylko jedną wartość własną.
- Oblicz $\dim\ker(Y - \lambda I)$, $\dim\ker(Y - \lambda I)^2$, $\dim\ker(Y - \lambda I)^3, \ldots$. I na podstawie tego zapisz wielkości poszczególnych klatek Jordana macierzy Y.
- Następnie sprawdź, że się zgadza.

$$H = \begin{pmatrix} -17 & -26 & -3 & 6 & -3 & 25 \\ 4 & 9 & 1 & -2 & 2 & -7 \\ -19 & -28 & -1 & 6 & -5 & 27 \\ -1 & -2 & 0 & 2 & -1 & 2 \\ -20 & -27 & -3 & 6 & -1 & 26 \\ -15 & -19 & -2 & 4 & -1 & 20 \end{pmatrix}.$$

```
h={{-17, -26, -3, 6, -3, 25}, {4, 9, 1, -2, 2, -7}, {-19, -28, -1, 6, -5, 27}, {-1, -2, 0, 2, -1, 2}, {-20, -27, -3, 6, -1, 26}, {-15, -19, -2, 4, -1, 20}}
```

$$K = \begin{pmatrix} -14 & -24 & -3 & 5 & -4 & 23 \\ 9 & 16 & 1 & -4 & 4 & -14 \\ -18 & -27 & -1 & 6 & -5 & 26 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ -16 & -24 & -3 & 5 & -2 & 23 \\ -7 & -10 & -2 & 1 & 0 & 11 \end{pmatrix}.$$

```
k={{-14, -24, -3, 5, -4, 23}, {9, 16, 1, -4, 4, -14}, {-18, -27, -1, 6, -5, 26}, {0, 0, 0, 2, 0, 0}, {-16, -24, -3, 5, -2, 23}, {-7, -10, -2, 1, 0, 11}}
```

(i) Metoda z poprzedniego podpunktu będzie działać również dla macierzy, które posiadają więcej niż jedną wartość własną, wtedy odpowiednie wymiary jąder przekształceń liczymy dla każdej z wartości własnych. Znajdź postać Jordana każdej macierzy z tego podpunktu, licząc wartości własne oraz wymiary jąder odpowiednich potęg przekształceń (i następnie zweryfikuj poprawność swoich wniosków).

$$M = \begin{pmatrix} -11 & -13 & -3 & 0 & 4 & 12 \\ -5 & 3 & 1 & -2 & 5 & -1 \\ -31 & -37 & -1 & 6 & -2 & 36 \\ -1 & -1 & 0 & 5 & 0 & 1 \\ -17 & -14 & -3 & 0 & 9 & 13 \\ -21 & -15 & -2 & -2 & 9 & 16 \end{pmatrix}.$$

```
m={{-11, -13, -3, 0, 4, 12}, {-5, 3, 1, -2, 5, -1}, {-31, -37, -1, 6, -2, 36}, {-1, -1, 0, 5, 0, 1}, {-17, -14, -3, 0, 9, 13}, {-21, -15, -2, -2, 9, 16}}
```

$$N = \begin{pmatrix} -21 & -29 & -5 & 4 & 0 & 28 \\ -40 & -53 & -6 & 12 & -9 & 55 \\ -26 & -29 & 0 & 4 & 0 & 28 \\ -1 & -1 & 0 & 5 & 0 & 1 \\ -27 & -30 & -5 & 4 & 5 & 29 \\ -66 & -87 & -11 & 16 & -9 & 88 \end{pmatrix}.$$

```
n={{-21, -29, -5, 4, 0, 28}, {-40, -53, -6, 12, -9, 55}, {-26, -29, 0, 4, 0, 28}, {-1, -1, 0, 5, 0, 1}, {-27, -30, -5, 4, 5, 29}, {-66, -87, -11, 16, -9, 88}}
```

Zadanko 3. Macierz realizującą podobieństwo macierzy $A \in M_n(\mathbb{C})$ ze swoją postacią klatkową Jordana $J(A)$ znajduje się o wiele trudniej niż postać blokową $J(A)$. Dokładny schemat jest np. dostępny w pozycji [1] w bibliografii. W Mathematice można tę macierz znaleźć używając komendy `JordanDecomposition`. Znajdź macierz realizującą podobieństwo dla macierzy H z poprzedniego zadania (wystarczy to zrobić używając odpowiedniej funkcji w Mathematice) i sprawdź poprawność, wykonując odpowiednie mnożenie macierzy.

Zadanko 4. Udowodnij, że dla każdej macierzy $A \in M_n(\mathbb{C})$ ślad macierzy A jest równy sumie wszystkich wartości własnych macierzy A, a wyznacznik macierzy A jest równy iloczynowi wszystkich wartości własnych macierzy A.

Zadanko 5. Podnieś macierz C z zadanka 2. do potęgi 2021, korzystając z postaci Jordana macierzy C.

Zadanko 6. Niech $A \in M_n(\mathbb{C})$ będzie macierzą nilpotentną (tzn. taką, której jedyna wartość własna to 0). Podaj przykład (lub uzasadnij, że to niemożliwe) takiego A w postaci Jordana, że

(a) $\dim\ker A^k$ przyjmowało kolejno wartości $1, 2, 3, 4, 4, 4, \ldots$.

(b) $\dim\ker A^k$ przyjmowało kolejno wartości $2, 4, 5, 5, 5, 5, \ldots$.

(c) $\dim\ker A^k$ przyjmowało kolejno wartości $1, 2, 3, 3, 4, 4, \ldots$.

Bibliografia

[1] `https://www.mimuw.edu.pl/~dp236688/gal121/jordan.pdf`