ДЗ 4 по Методам Оптимизации. Сопряженные множества. Двойственные конусы. Многогранники. Лемма Фаркаша

Соколов Игорь, группа 573

9 октября 2017 г.

1

Найти и изобразить на плоскости множество, сопряженное к многогранному конусу:

$$S = \mathbf{conv}\left\{(-4,-1),(-2,-1),(-2,1)\right\} + \mathbf{cone}\left\{(1,0),(2,1)\right\}$$

Решение:
Приведем теорему из семинара:
Пусть $x_1,\ldots,x_m \in \mathbb{R}^n$. Сопряженным к многогранному множеству:

$$\mathbf{S} = \mathbf{conv}\{x_1,\ldots,x_k\} + \mathbf{cone}\{x_{k+1},\ldots,x_m\}$$

является полиэдр (многогранник):

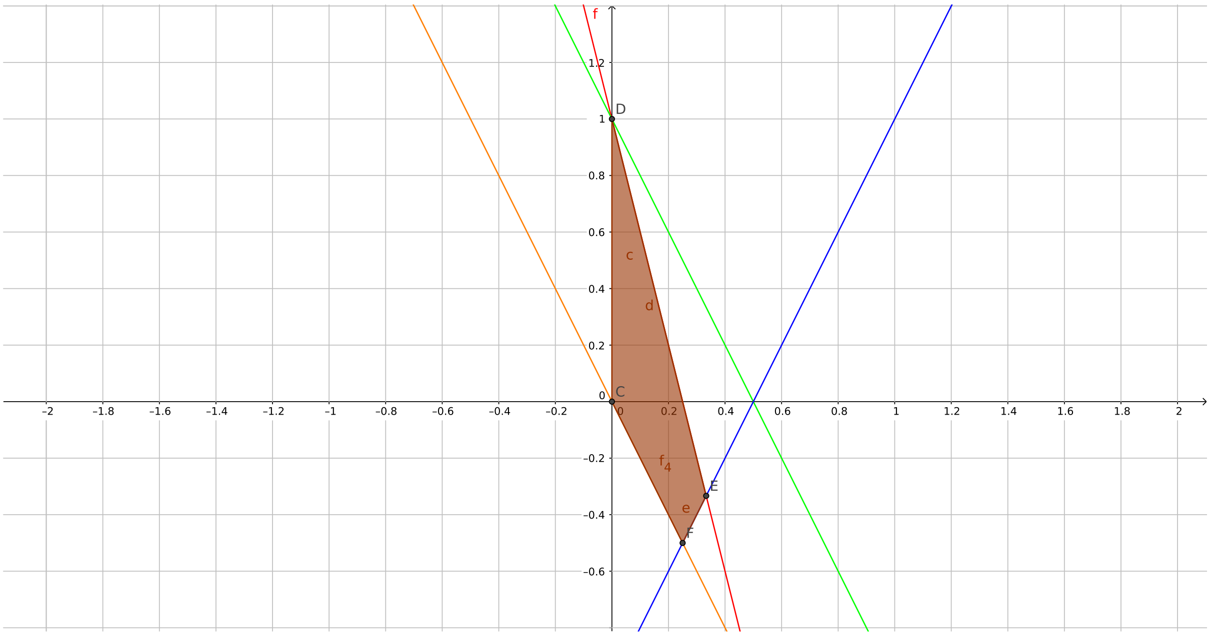
$$\mathbf{S}^* = \left\{p \in \mathbb{R}^n \mid \langle p, x_i\rangle \geq -1, i = \overline{1,k}; \langle p, x_i\rangle \geq 0, i = \overline{k+1,m}\right\}$$

Используя теорему:

$$\mathbf{S}^* = \{\mathbf{p} \in \mathbb{R}^n \mid -4p_1 - p_2 \geq -1\mathbf{,} -2p_1 - p_2 \geq -1\mathbf{,} -2p_1 + p_2 \geq -1\mathbf{,} p_1 \geq 0\mathbf{,} 2p_1 + p_2 \geq 0\}$$

Таким образом имеем систему:

$$\begin{cases} p_2 \leq -4p_1 + 1 \\ p_2 \leq -2p_1 + 1 \\ p_2 \geq 2p_1 - 1 \\ p_1 \geq 0 \\ p_2 \geq -2p_1 \end{cases}$$



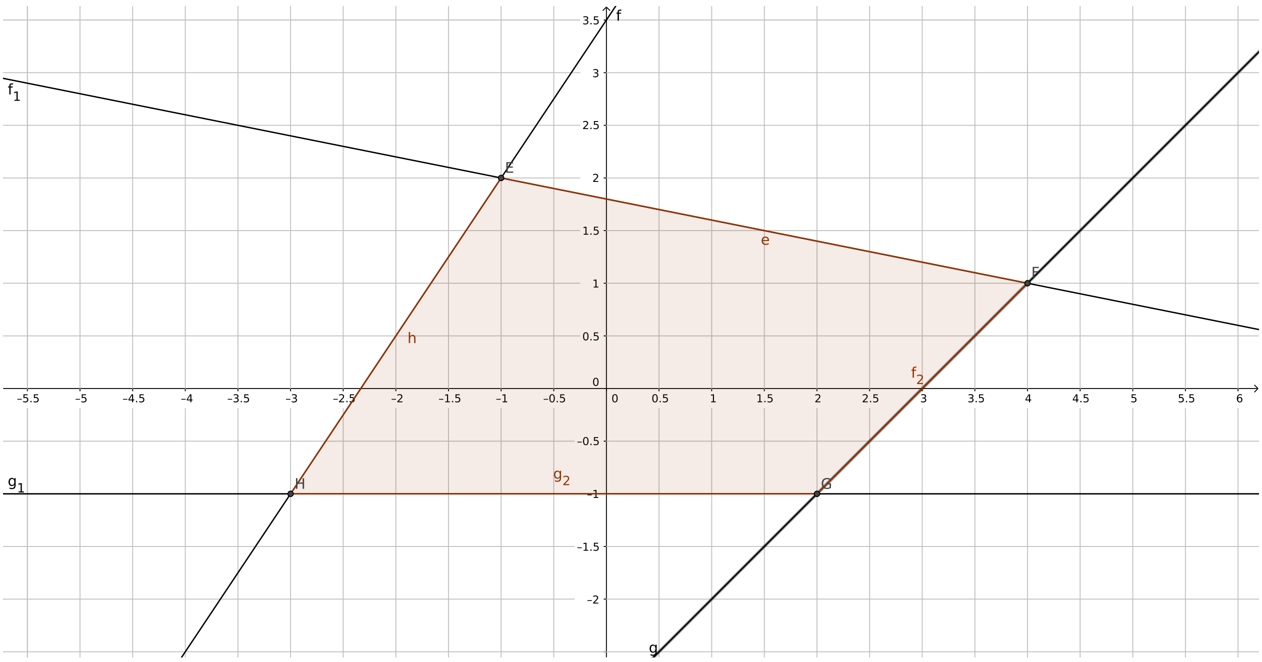
2

Найти и изобразить на плоскости множество, сопряженное к полиэдру:

$$S = \left\{x \in \mathbb{R}^2 \mid -3x_1 + 2x_2 \le 7, x_1 + 5x_2 \le 9, x_1 - x_2 \le 3, -x_2 \le 1\right\}$$

Решение:

Изобразим множество S на плоскости.



S задается системой:

$$\begin{cases} -3x_1 + 2x_2 \le 7 \\ x_1 + 5x_2 \le 9 \\ x_1 - x_2 \le 3 \\ -x_2 \le 1 \end{cases}$$

Пусть

$H = \begin{pmatrix} -3 \\ -1 \end{pmatrix}$ точка пересечения прямых $\begin{cases} -3x_1 + 2x_2 = 7 \\ -x_2 = 1 \end{cases}$

$E = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ точка пересечения прямых $\begin{cases} -3x_1 + 2x_2 = 7 \\ x_1 + 5x_2 = 9 \end{cases}$

$F = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}$ точка пересечения прямых $\begin{cases} x_1 + 5x_2 = 9 \\ x_1 - x_2 = 3 \end{cases}$

$G = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ точка пересечения прямых $\begin{cases} x_1 - x_2 = 3 \\ -x_2 = 1 \end{cases}$

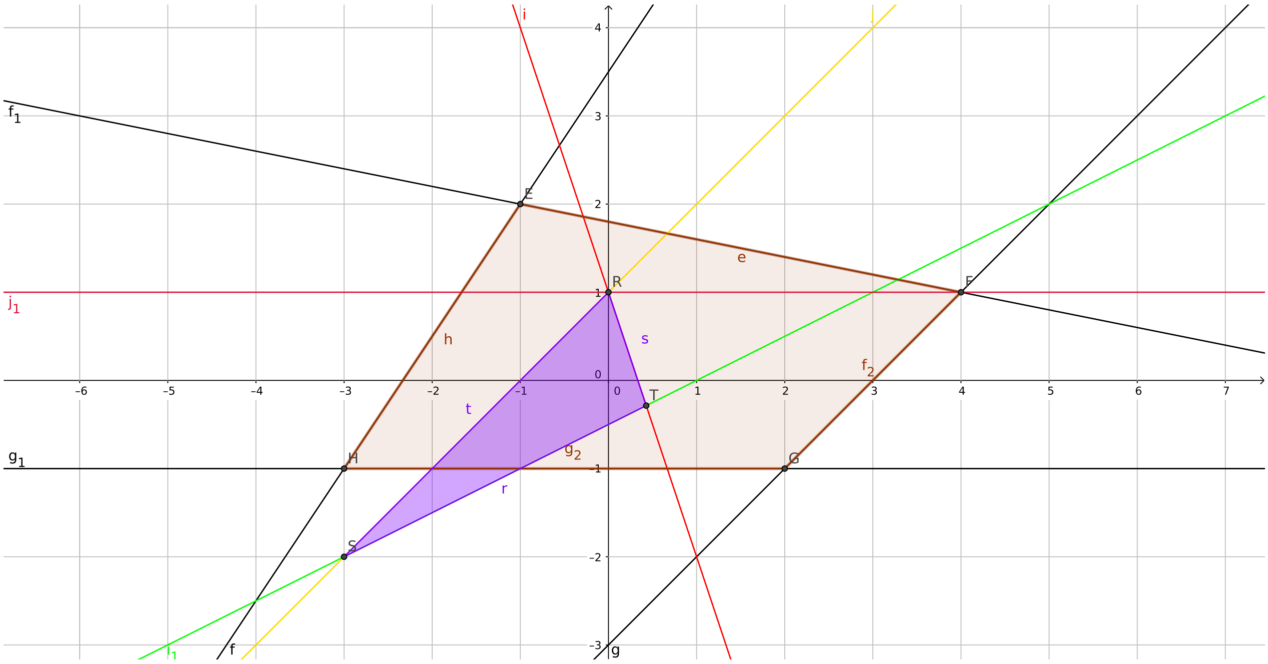
Очевидно, что $S = \mathbf{conv}(H, E, F, G)$.

Тогда по ранее приведенной теореме имеем:

$$\mathbf{S}^* = \left\{ \mathbf{p} \in \mathbb{R}^2 \mid -3p_1 - p_2 \ge -1, -p_1 + 2p_2 \ge -1, p_1 - p_2 \ge -1, -p_2 \ge -1, \right\}$$

$$\begin{cases} p_2 \le -3p_1 + 1 \\ p_2 \ge \dfrac{p_1}{2} - \dfrac{1}{2} \\ p_2 \le p_1 + 1 \\ p_2 \le 1 \end{cases}$$

Изобразим теперь множество $\mathbf{S}$ и $\mathbf{S}^*$ на плоскости.



3

Доказать, что если понятие сопряженного множества к множеству S вводить как:

$$S^* = \{y \ \in \mathbb{R}^n \mid \langle y, x \rangle \leq 1 \ \ \forall x \in S\},$$

то единичный шар с центром в нуле - единственное самосопряженное множество в $\mathbb{R}^n$.

Доказательство. Пусть $X = X^*$, $X^* = \{x \in \mathbb{R}^n \mid (x, x') \leq 1, \forall x' \in X\}$.

Сначала докажем, что $X \subseteq B(0, 1)$.

Пусть $x \in X$, значит $x \in X^*$, значит $(x, x') \leq 1$, $\forall x' \in X$, значит $(x, x) = \|x\| \leq 1$, значит $x \in B(0, 1)$.

Теперь докажем, что $X \supseteq B(0, 1)$. Пусть $x \in B(0, 1)$. Пусть $x' \in X \subseteq B(0, 1)$, тогда по теореме Коши-Буняковского $(x, x') \leq \|x\|\|x'\| \leq 1$, значит $x \in X^* = X$ $\square$

4

Найти множество, сопряженное к эллипсоиду:

$$S = \left\{ x \in \mathbb{R}^n \mid \sum_{i=1}^{n} a_i^2 x_i^2 \leq \varepsilon^2 \right\}$$

Решение:

$$S = \left\{ x \in \mathbb{R}^n \mid \sum_{i=1}^{n} \frac{a_i^2}{\varepsilon^2} x_i^2 \leq 1 \right\} \tag{1}$$

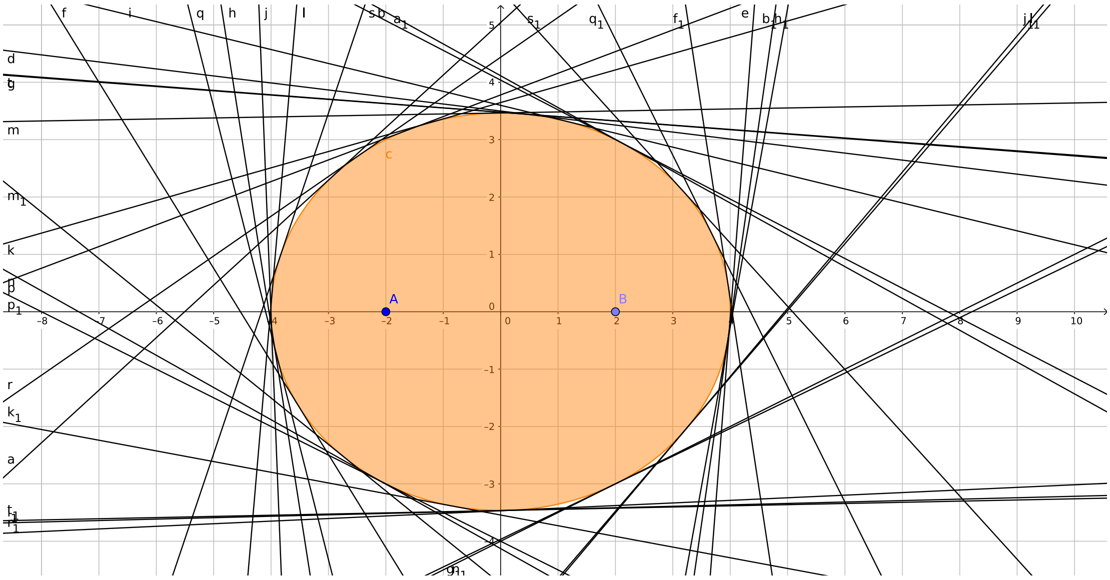
1) Рассмотрим точки на ∂S.
Для каждой точки $\mathbf{x} \in \partial S$ найдем уравнение касательной плоскости γ.

$\nabla F(\mathbf{x}) = \left(\frac{2a_1^2 x_1}{\varepsilon^2}, \ldots, \frac{2a_n^2 x_n}{\varepsilon^2} \right)^T$
$\nabla F(\mathbf{x})\,(\mathbf{x} - \mathbf{y}) = 0$, где $\mathbf{y} \in \gamma$
Если записать

$$\nabla F(\mathbf{x})\,(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \leq 0 \tag{2}$$

то данное неравенство описывает уже подпространство под плоскостью γ.

Таким образом наше множество S можно представить в виде множества пересекающихся подпространств, определяемых в каждой точке $\mathbf{x} \in \partial S$ касательной гиперплоскостью.



Из (2)$\Rightarrow$ $S = \left\{ \sum_{i=1}^{n} \frac{2a_i^2}{\varepsilon^2} x_i(y_i - x_i) \leq 0 \mid \forall \mathbf{x} \in \partial S, \right\}$

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{2a_i^2}{\varepsilon^2} x_i y_i \leq \sum_{i=1}^{n} \frac{2a_i^2}{\varepsilon^2} x_i^2$$

Из (1) $\Rightarrow \sum_{i=1}^{n} \frac{a_i^2}{\varepsilon^2} x_i^2 \leq 1$

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^{n} \frac{2a_i^2}{\varepsilon^2} x_i y_i \leq 2$$

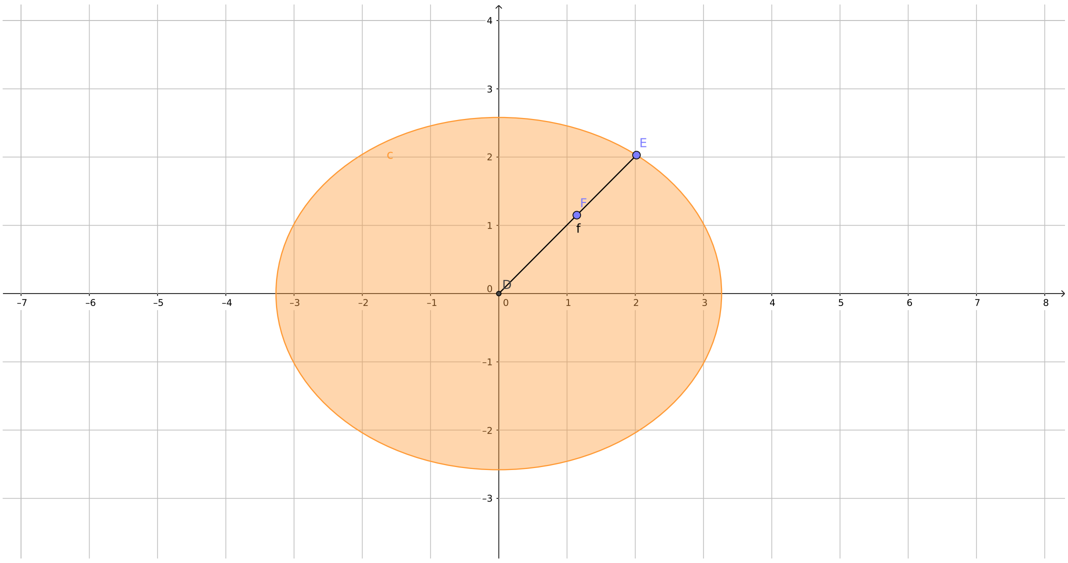
$$\sum_{i=1}^{n} \frac{a_i^2}{\varepsilon^2} x_i y_i \leq 1$$

$$\sum_{i=1}^{n} \left[\left(-\frac{a_i^2}{\varepsilon^2} y_i \right) x_i \right] \geq -1$$

$$\Rightarrow \partial \mathbf{S}^* = \left\{ \begin{pmatrix} -\frac{a_1^2}{\varepsilon^2} y_1 \\ \vdots \\ -\frac{a_n^2}{\varepsilon^2} y_n \end{pmatrix} \middle| \sum_{i=1}^{n} \left[\left(-\frac{a_i^2}{\varepsilon^2} y_i \right) x_i \right] \geq -1, \forall \mathbf{x} \in \partial \mathbf{S} \right\} \tag{3}$$

2) Покажем, что также верно

$$\mathbf{S}^* = \left\{ \begin{pmatrix} -\frac{a_1^2}{\varepsilon^2} y_1 \\ \vdots \\ -\frac{a_n^2}{\varepsilon^2} y_n \end{pmatrix} \middle| \sum_{i=1}^{n} \left[\left(-\frac{a_i^2}{\varepsilon^2} y_i \right) x_i \right] \geq -1, \forall \mathbf{x} \in \mathbf{S} \right\} \tag{4}$$



$$\sum_{i=1}^{n} \left[\left(\frac{a_i^2}{\varepsilon^2} y_i \right) x_i \right] \leq 1 \tag{5}$$

Возьмем $\widetilde{\mathbf{x}} = \theta \mathbf{x}, \forall \theta \in [0,1]$ (любая точка между на отрезке, соединяющий $\vec{0}$ и $\mathbf{x}$)

$\Rightarrow \sum_{i=1}^{n} \left[\left(\frac{a_i^2}{\varepsilon^2} y_i \right) \widetilde{x}_i \right] = \sum_{i=1}^{n} \left[\left(\frac{a_i^2}{\varepsilon^2} y_i \right) \theta x_i \right] = \theta \sum_{i=1}^{n} \left[\left(\frac{a_i^2}{\varepsilon^2} y_i \right) x_i \right] \leq 1$

$\Rightarrow \theta \sum_{i=1}^{n} \left[\left(-\frac{a_i^2}{\varepsilon^2} y_i \right) x_i \right] \geq -1$

$\Rightarrow \forall \mathbf{x} \in \partial S \to \widetilde{\mathbf{x}} = \theta \mathbf{x} \in \mathbf{S}^*$

$\Rightarrow$ (4) верно.

3) Покажем, что (4) определяет некоторый эллипсоид.

Из (5) $\sum_{i=1}^{n} y_i \left(a_i^2 x_i \right) \leq \varepsilon^2$ - полупространство

$\forall \mathbf{x} \in S \to \mathbf{x}$ и $\mathbf{y}$ лежат на одной касательной в точке $\mathbf{x}$ гиперплоскости. Рассмотрев по всем $\mathbf{x} \in \partial S$ снова получаем перечение полупространств, которые дают нам эллипсоид.