

ДЗ 4 по Методам Оптимизации.
Сопряженные множества. Двойственные конусы.
Многогранники. Лемма Фаркаша

Соколов Игорь, группа 573

4 октября 2017 г.

1

Найти и изобразить на плоскости множество, сопряженное к многогранному конусу:

$$S = \mathbf{conv}\{(-4, -1), (-2, -1), (-2, 1)\} + \mathbf{cone}\{(1, 0), (2, 1)\}$$

Решение:

Приведем теорему из семинара:

Пусть $x_1, \dots, x_m \in \mathbb{R}^n$. Сопряженным к многогранному множеству:

$$S = \mathbf{conv}\{x_1, \dots, x_k\} + \mathbf{cone}\{x_{k+1}, \dots, x_m\}$$

является полиэдр (многогранник):

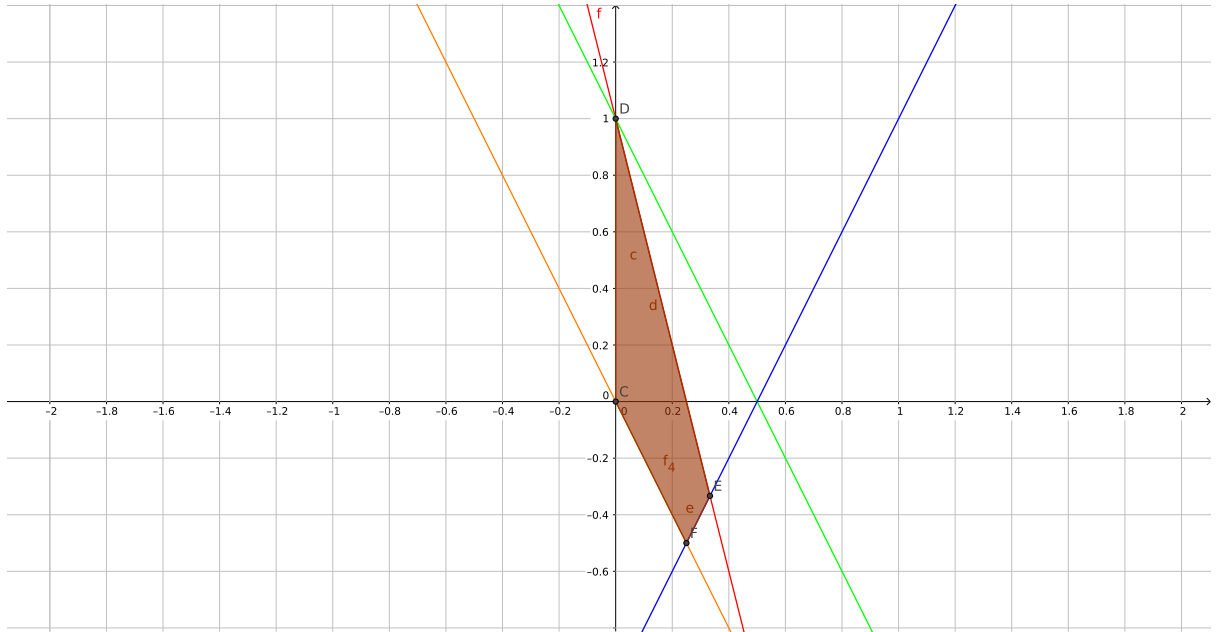
$$S^* = \{p \in \mathbb{R}^n \mid \langle p, x_i \rangle \geq -1, i = \overline{1, k}; \langle p, x_i \rangle \geq 0, i = \overline{k+1, m}\}$$

Используя теорему:

$$S^* = \{p \in \mathbb{R}^2 \mid -4p_1 - p_2 \geq -1, -2p_1 - p_2 \geq -1, -2p_1 + p_2 \geq -1, p_1 \geq 0, 2p_1 + p_2 \geq 0\}$$

Таким образом имеем систему:

$$\begin{cases} p_2 \leq -4p_1 + 1 \\ p_2 \leq -2p_1 + 1 \\ p_2 \geq 2p_1 - 1 \\ p_1 \geq 0 \\ p_2 \geq -2p_1 \end{cases}$$



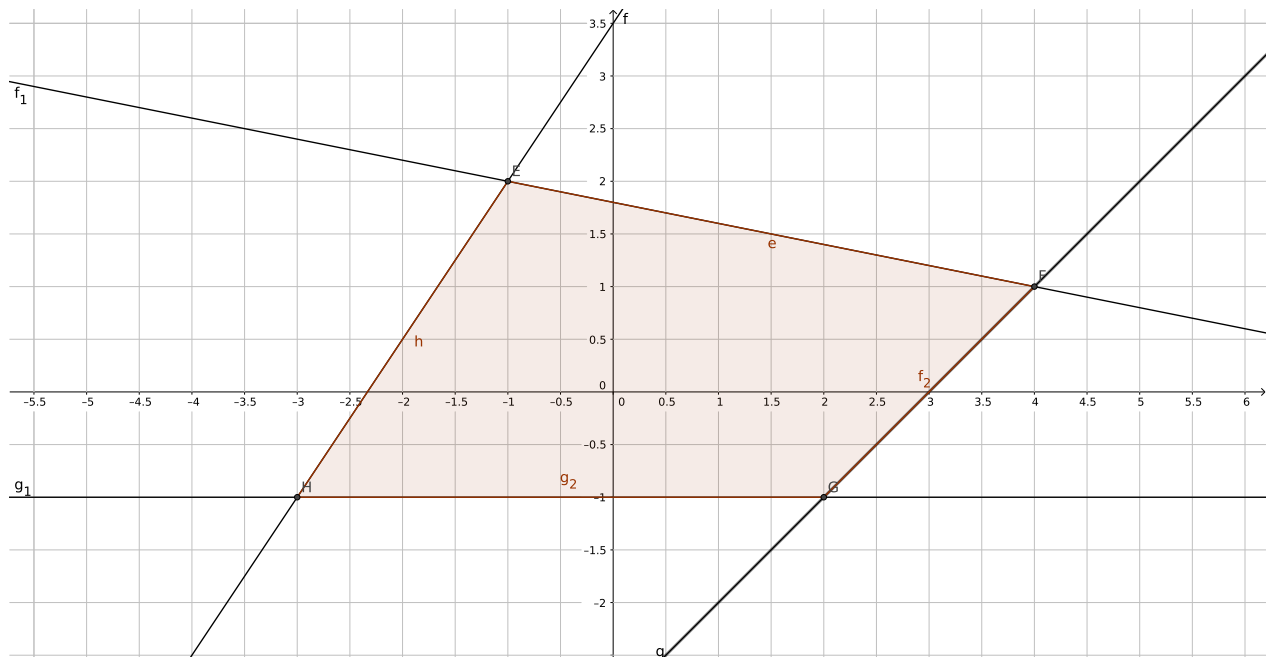
2

Найти и изобразить на плоскости множество, сопряженное к полиэдру:

$$S = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid -3x_1 + 2x_2 \leq 7, x_1 + 5x_2 \leq 9, x_1 - x_2 \leq 3, -x_2 \leq 1\}$$

Решение:

Изобразим множество S на плоскости.



S задается системой:

$$\begin{cases} -3x_1 + 2x_2 \leq 7 \\ x_1 + 5x_2 \leq 9 \\ x_1 - x_2 \leq 3 \\ -x_2 \leq 1 \end{cases}$$

Пусть

$$H = \begin{pmatrix} -3 \\ -1 \end{pmatrix} \text{ точка пересечения прямых } \begin{cases} -3x_1 + 2x_2 = 7 \\ -x_2 = 1 \end{cases}$$

$$E = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} \text{ точка пересечения прямых } \begin{cases} -3x_1 + 2x_2 = 7 \\ x_1 + 5x_2 = 9 \end{cases}$$

$$F = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ точка пересечения прямых } \begin{cases} x_1 + 5x_2 = 9 \\ x_1 - x_2 = 3 \end{cases}$$

$$G = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} \text{ точка пересечения прямых } \begin{cases} x_1 - x_2 = 3 \\ -x_2 = 1 \end{cases}$$

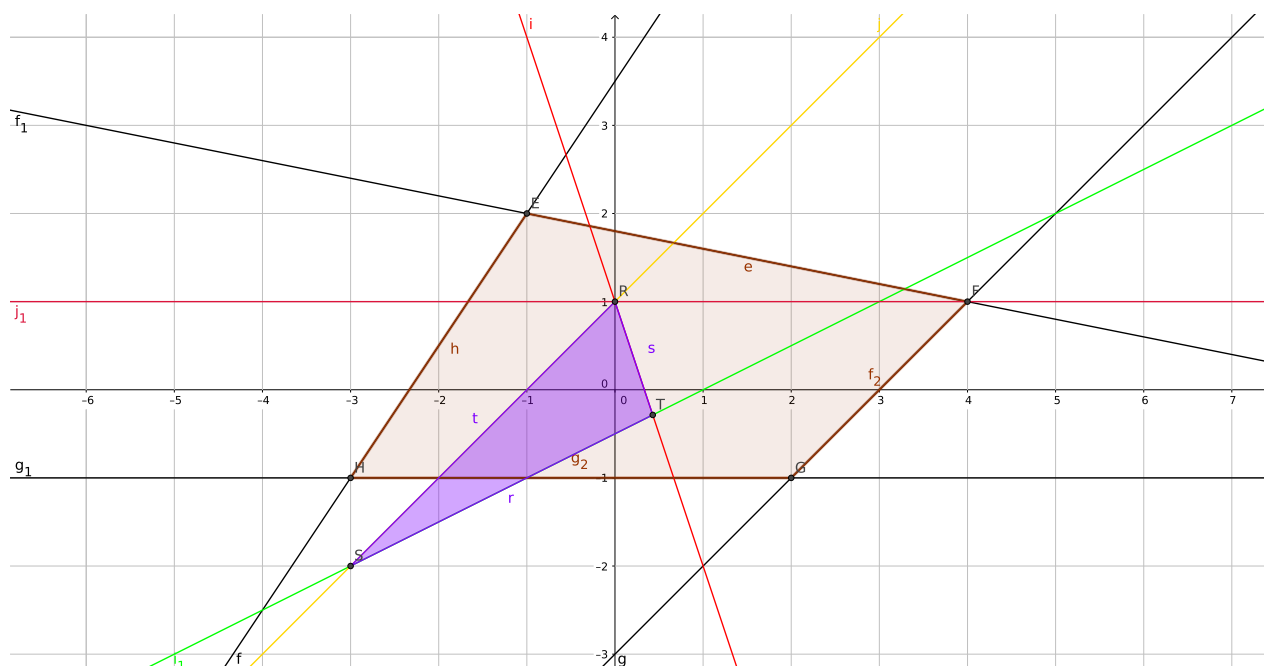
Очевидно, что $S = \mathbf{conv}(H, E, F, G)$.

Тогда по ранее приведенной теореме имеем:

$$\mathbf{S}^* = \{ \mathbf{p} \in \mathbb{R}^2 \mid -3p_1 - p_2 \geq -1, -p_1 + 2p_2 \geq -1, p_1 - p_2 \geq -1, -p_2 \geq -1, \}$$

$$\begin{cases} p_2 \leq -3p_1 + 1 \\ p_2 \geq \frac{p_1}{2} - \frac{1}{2} \\ p_2 \leq p_1 + 1 \\ p_2 \leq 1 \end{cases}$$

Изобразим теперь множество \mathbf{S} и \mathbf{S}^* на плоскости.



3

Доказать, что если понятие сопряженного множества к множеству S вводить как:

$$S^* = \{y \in \mathbb{R}^n \mid \langle y, x \rangle \leq 1 \quad \forall x \in S\},$$

то единичный шар с центром в нуле - единственное самосопряженное множество в \mathbb{R}^n .

Доказательство. Пусть $X = X^*$, $X^* = \{x \in \mathbb{R}^n \mid (x, x') \leq 1, \forall x' \in X\}$.

Сначала докажем, что $X \subseteq B(0, 1)$.

Пусть $x \in X$, значит $x \in X^*$, значит $(x, x') \leq 1, \forall x' \in X$, значит $(x, x) = \|x\| \leq 1$, значит $x \in B(0, 1)$.

Теперь докажем, что $X \supseteq B(0, 1)$. Пусть $x \in B(0, 1)$. Пусть $x' \in X \subseteq B(0, 1)$, тогда по теореме Коши-Буняковского $(x, x') \leq \|x\| \|x'\| \leq 1$, значит $x \in X^* = X$ \square

4

Найти множество, сопряженное к эллипсоиду:

$$S = \left\{ x \in \mathbb{R}^n \mid \sum_{i=1}^n a_i^2 x_i^2 \leq \varepsilon^2 \right\}$$

Решение:

$$S = \left\{ x \in \mathbb{R}^n \mid \sum_{i=1}^n \frac{a_i^2}{\varepsilon^2} x_i^2 \leq 1 \right\} \quad (1)$$

1) Рассмотрим точки на ∂S .

Для каждой точки $\mathbf{x} \in \partial S$ найдем уравнение касательной плоскости γ .

$$\nabla F(\mathbf{x}) = \left(\frac{2a_1^2 x_1}{\varepsilon^2}, \dots, \frac{2a_n^2 x_n}{\varepsilon^2} \right)^T$$

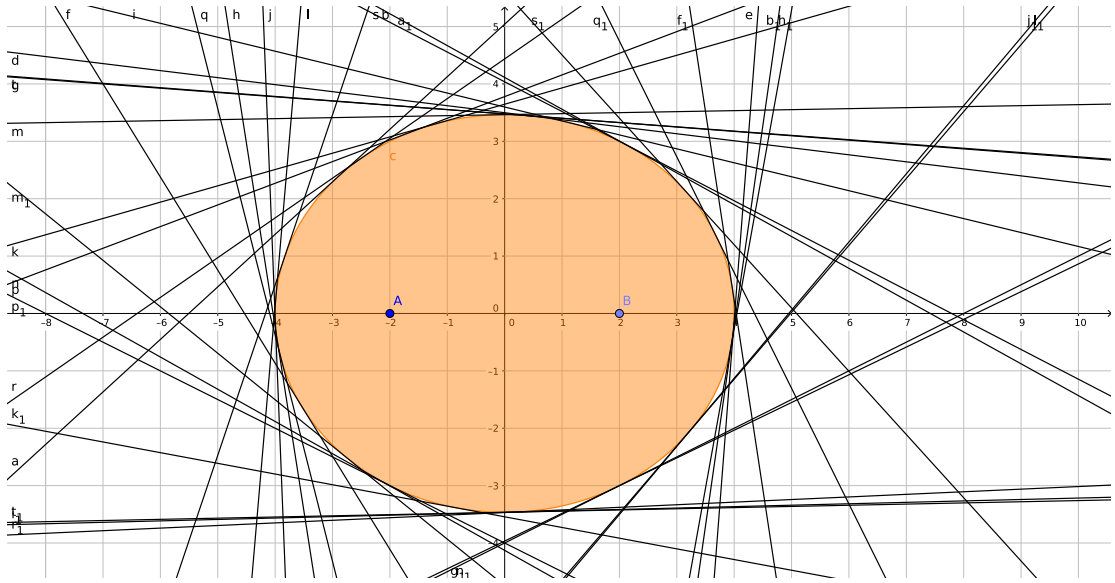
$$\nabla F(\mathbf{x}) (\mathbf{x} - \mathbf{y}) = 0, \text{ где } \mathbf{y} \in \gamma$$

Если записать

$$\nabla F(\mathbf{x}) (\mathbf{x} - \mathbf{y}) \leq 0 \quad (2)$$

то данное неравенство описывает уже подпространство под плоскостью γ .

Таким образом наше множество S можно представить в виде множества пересекающихся подпространств, определяемых в каждой точке $\mathbf{x} \in \partial S$ касательной гиперплоскостью.



$$\text{Из (2)} \Rightarrow S = \left\{ \sum_{i=1}^n \frac{2a_i^2}{\varepsilon^2} x_i (y_i - x_i) \leq 0 \mid \forall \mathbf{x} \in \partial S, \right\}$$

$$\sum_{i=1}^n \frac{2a_i^2}{\varepsilon^2} x_i y_i \leq \sum_{i=1}^n \frac{2a_i^2}{\varepsilon^2} x_i^2$$

$$\text{Из (1)} \Rightarrow \sum_{i=1}^n \frac{a_i^2}{\varepsilon^2} x_i^2 \leq 1$$

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^n \frac{2a_i^2}{\varepsilon^2} x_i y_i \leq 2$$

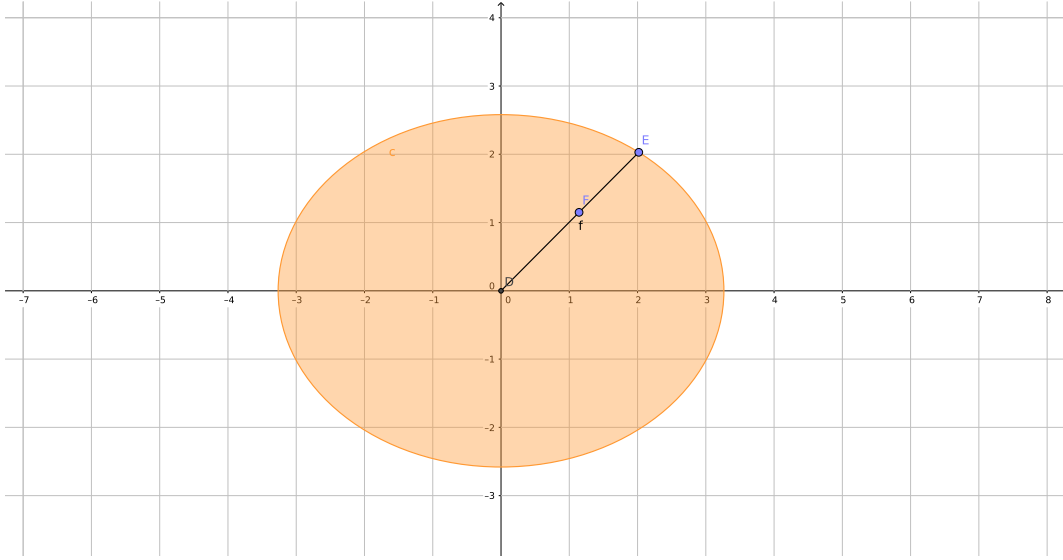
$$\sum_{i=1}^n \frac{a_i^2}{\varepsilon^2} x_i y_i \leq 1$$

$$\sum_{i=1}^n \left[\left(-\frac{a_i^2}{\varepsilon^2} y_i \right) x_i \right] \geq -1$$

$$\Rightarrow \partial \mathbf{S}^* = \left\{ \begin{pmatrix} -\frac{a_1^2}{\varepsilon^2} y_1 \\ \vdots \\ -\frac{a_n^2}{\varepsilon^2} y_n \end{pmatrix} \mid \sum_{i=1}^n \left[\left(-\frac{a_i^2}{\varepsilon^2} y_i \right) x_i \right] \geq -1, \forall \mathbf{x} \in \partial \mathbf{S} \right\} \quad (3)$$

2) Покажем, что также верно

$$\mathbf{S}^* = \left\{ \begin{pmatrix} -\frac{a_1^2}{\varepsilon^2} y_1 \\ \vdots \\ -\frac{a_n^2}{\varepsilon^2} y_n \end{pmatrix} \mid \sum_{i=1}^n \left[\left(-\frac{a_i^2}{\varepsilon^2} y_i \right) x_i \right] \geq -1, \forall \mathbf{x} \in \mathbf{S} \right\} \quad (4)$$



$$\sum_{i=1}^n \left[\left(\frac{a_i^2}{\varepsilon^2} y_i \right) x_i \right] \leq 1 \quad (5)$$

Возьмем $\tilde{\mathbf{x}} = \theta \mathbf{x}, \forall \theta \in [0,1]$ (любая точка между на отрезке, соединяющий $\vec{0}$ и \mathbf{x})

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^n \left[\left(\frac{a_i^2}{\varepsilon^2} y_i \right) \tilde{x}_i \right] = \sum_{i=1}^n \left[\left(\frac{a_i^2}{\varepsilon^2} y_i \right) \theta x_i \right] = \theta \sum_{i=1}^n \left[\left(\frac{a_i^2}{\varepsilon^2} y_i \right) x_i \right] \leq 1$$

$$\Rightarrow \theta \sum_{i=1}^n \left[\left(-\frac{a_i^2}{\varepsilon^2} y_i \right) x_i \right] \geq -1$$

$$\Rightarrow \forall \mathbf{x} \in \partial S \rightarrow \tilde{\mathbf{x}} = \theta \mathbf{x} \in \mathbf{S}^*$$

\Rightarrow (4) верно.

3) Покажем, что (4) определяет некоторый эллипсоид.

Из (5) $\sum_{i=1}^n y_i (a_i^2 x_i) \leq \varepsilon^2$ - полупространство

$\forall \mathbf{x} \in S \rightarrow \mathbf{x}$ и \mathbf{y} лежат на одной касательной в точке \mathbf{x} гиперплоскости. Рассмотрев по всем $\mathbf{x} \in \partial S$ снова получаем перечение полупространств, которые дают нам эллипсоид.