ДЗ 3 по Методам Оптимизации. Отделимость. Проекция. Опорная гиперплоскость

Соколов Игорь, группа 573

3 октября 2017 г.

1

Найти $\pi_S(y) = \pi$, если $S = \{x \in \mathbb{R}^n \mid c^T x \geq b\}$

Решение:

Рассмотрим два случая:
1. $y \in S$:
Тогда $\pi(y) = y$.

2. $y \notin S$
Заметим, что $\{x \in \mathbb{R}^n \mid c^T x \geq b\}$ задает полупространство, тогда S - выпуклое замкнутое множество.
$\Rightarrow \pi_S(y) \in \partial S = \{x \in \mathbb{R}^n \mid c^T x = b\}$

Строим гипотезу:
$\pi = y + \alpha c$. Коэффициент α подбирается так, чтобы $\pi \in S$: $c^T \pi = b$, т.е.:

$$c^T(y + \alpha c) = b$$
$$c^T y + \alpha c^T c = b$$
$$c^T y = b - \alpha c^T c$$

$$\alpha = \frac{b - c^T y}{c^T c}$$

Проверяем неравенство для выпуклого замкнутого множества: $(\pi - y)^T (x - \pi) \geq 0$

$$(y + \alpha c - y)^T (x - y - \alpha c) =$$
$$\alpha c^T (x - y - \alpha c) =$$
$$\alpha(c^T x) - \alpha(c^T y) - \alpha^2 c^T c) =$$
$$\alpha b - \alpha(b - \alpha c^T c) - \alpha^2 c^T c =$$
$$\alpha b - \alpha b + \alpha^2 c^T c - \alpha^2 c^T c = 0 \geq 0$$

Ответ: $\pi = y + \dfrac{b - c^T y}{c^T c} c$

2

Найти $\pi_S(y) = \pi$, если $S = \{x \in \mathbb{R}^n \mid x = x_0 + X\alpha, X \in \mathbb{R}^{n\times m}, \alpha \in \mathbb{R}^m\}$, $y \notin S$

Решение:

Пусть $S = x_0 + S'$
Тогда $S' = \{x' \in \mathbb{R}^n \mid x' = X\alpha, X \in \mathbb{R}^{n\times m}, \alpha \in \mathbb{R}^m\}$

$$\Rightarrow \pi_S(y) = x_0 + \pi_{S'}(y) \tag{1}$$

Тогда сведем задачу к нахождению $\pi_{S'}(y) = \pi'$

$$x' = X\alpha$$
$$X^T x' = (X^T X)\alpha$$
$$(X^T X)^{-1} X^T x' = \alpha$$

где $(X^T X)$ - квадратная матрица.
Пусть $A = (X^T X)^{-1} X^T$.
Тогда

$$Ax' = \alpha$$

$\Rightarrow$

$$S' = \{x' \in \mathbb{R}^n \mid Ax' = \alpha, X \in \mathbb{R}^{n\times m}, \alpha \in \mathbb{R}^m\} \tag{2}$$

Имеем систему линейных уравнений относительно x'.
Геометрически это можно интерпретировать как перечение n гиперплоскостей в $\mathbb{R}^m$.

Рассмотрим расширенную матрицу системы $(A|\alpha)$:

1. Если $n > m$ или $n < m$:
1.1. Если есть повторяющиеся строки в $(A|\alpha)$,то уберем их - множество решений не изменится.
1.2. Если есть две повторяющиеся строки в A при этом они отличаются в правой части, то это соответствует двум параллельным гиперплоскостям. В таком случае система не будет иметь решение и $S' = \varnothing$
$\Rightarrow \nexists \pi_{S'}(y)$ (не существует проекции на пустое множество)

2. Если $n = m$:
2.1 $det(A) = 0$:
По правилу Крамера решений либо не существует(параллельные гиперплоскости), либо бесконечно много(совпадающие гиперплоскости).
2.2 $det(A) \neq 0$:
По правилу Крамера решение существует и единственно.

Строим гипотезу: $\pi_{S'}(y) = y + \sum\limits_{i=1}^{n} \beta_i A_i = y + A^T\beta$.
Столбцы матрицы A^T есть нормальные вектора гиперплоскостей.

Коэффициент β подбирается так, чтобы $\pi' \in S'$: $A\pi' = \alpha$, т.е.:

$$A(y + A^T\beta) = \alpha$$

$$Ay = \alpha - AA^T\beta \tag{3}$$

Проверяем неравенство для выпуклого замкнутого множества: $(\pi - y)^T(x' - \pi) \geq 0$

$$(y + A^T\beta - y)^T(x' - y - A^T\beta) =$$

$$\beta^T A(x' - y - A^T\beta) =$$

$$\beta^T(Ax') - \beta^T(Ay) - \beta^T AA^T\beta) =$$

$$\beta^T\alpha - \beta^T(\alpha - AA^T\beta) - \beta^T AA^T\beta =$$

$$\beta^T\alpha - \beta^T\alpha + \beta^T AA^T\beta - \beta^T AA^T\beta = 0 \geq 0$$

$\Rightarrow$ выполнено.

Из уравнения 3 находим
$\beta = (AA^T)^{-1}(\alpha - Ay)$
$\Rightarrow \pi_{S'}(y) = y + A^T(AA^T)^{-1}(\alpha - Ay)$

В силу 1 имеем

$$\pi_S(y) = x_0 + y + A^T(AA^T)^{-1}(\alpha - Ay) \tag{4}$$

$$A = (X^TX)^{-1}X^T$$

$$A^T = \left((X^TX)^{-1}X^T\right)^T = X((X^TX)^{-1})^T = X((X^TX)^T)^{-1} = X(X^TX)^{-1}$$

$$\left(AA^T\right)^{-1} = \left((X^TX)^{-1}X^TX(X^TX)^{-1}\right)^{-1} = \left((X^TX)^{-1}\right)^{-1} = X^TX$$

$$A^T(AA^T)^{-1} = X(X^TX)^{-1}(X^TX) = X$$

И тогда 4 переписывается как

$$\pi_S(y) = x_0 + y + X\left(\alpha - (X^TX)^{-1}X^Ty\right)$$

$$\pi_S(y) = x_0 + y + X\alpha - X(X^TX)^{-1}X^Ty$$

$$\pi_S(y) = x_0 + X\alpha + (\mathbb{E} - X(X^TX)^{-1}X^T)y$$

Ответ: $\pi_S(y) = x_0 + X\alpha + (\mathbb{E} - X(X^TX)^{-1}X^T)y$

3

Построить гиперплоскость, разделяющую S_1 и S_2:

$$S_1 = \left\{x \in \mathbb{R}^n \mid x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2 \leq 1\right\}, \quad S_2 = \left\{x \in \mathbb{R}^n \mid x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_{n-1}^2 + 1 \leq x_n\right\}$$

Решение:

Найдем $\partial \mathbf{S_1} \cap \partial \mathbf{S_2}$

$$\begin{cases} \sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2 = 1 \\ \sum\limits_{i=1}^{n-1} (x_i^2) + 1 = x_n \end{cases}$$

Вычтем второе уравнение из первого

$\Longrightarrow$

$$x_n^2 - 1 = 1 - x_n$$

$$x_n^2 + x_n - 2 = 0$$

$$x_{n_{1,2}} = -2; 1$$

Из двух корней подходит только $x_n = 1$, так как в левой части второго уравнения системы стоит положительное число.

$\Rightarrow$

$$x_1 = x_2 = \ldots = x_{n-1} = 0$$

т.е. множества пересекаются в точке $x_0 = (0, 0, \ldots, 0, 1)$

Построим касательные плоскости к обеим поверхностям в точке пересечения:

$$\begin{cases} \nabla F_1(x_0)^{\mathrm{T}}(x - x_0) = 0 \\ \nabla F_2(x_0)^{\mathrm{T}}(x - x_0) = 0 \end{cases} \tag{1}$$

Тогда

$$\begin{cases} \nabla F_1(x_0)^{\mathrm{T}} = (2x_1, 2x_2, \ldots, 2x_{n-1}, 2x_n)\Big|_{x_0} & = (0, 0, \ldots, 2)^T \\ \nabla F_2(x_0)^{\mathrm{T}} = (2x_1, 2x_2, \ldots, 2x_{n-1}, -1)\Big|_{x_0} & = (0, 0, \ldots, -1)^T \end{cases}$$

$$(x - x_0) = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \ldots \\ x_{n-1} \\ x_n - 1 \end{pmatrix}$$

Подставим найденные значения в систему 1.

$$\begin{cases} \ \ 2(x_n - 1) = 0 \\ -(x_n - 1) = 0 \end{cases} \tag{2}$$

Получаем, что $x_n = 1$ и $x_1 = x_2 = \ldots = x_{n-1}$ - любые действительные числа

Ответ: $p = (0, 0, \ldots, 0, 1), \beta = 1$

4

Построить опорную гиперплоскость для множества $S = \left\{x \in \mathbb{R}^3 \mid \frac{x_1^2}{4} + \frac{x_2^2}{8} + \frac{x_3^2}{25} \leq 1\right\}$ в граничной точке $x_0 = \left(-1, \frac{12}{5}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

Решение:

Имеем поверхность

$$F(x_1,x_2,x_3) = \frac{x_1^2}{4} + \frac{x_2^2}{8} + \frac{x_3^2}{25} - 1$$

$$\nabla F = \left(\frac{x_1}{2}, \frac{x_2}{4}, \frac{2x_3}{25}\right)$$

$$\nabla F(x_0) = \left(-\frac{1}{2}, \frac{3}{5}, \frac{\sqrt{3}}{25}\right)$$

Опорная гиперплоскоть задается уравнением :

$$\nabla F(x_0)^T(x - x_0) = 0$$

$\Longrightarrow$

$$\left(-\frac{1}{2}, \frac{3}{5}, \frac{\sqrt{3}}{25}\right)\left(x_1 + 1, x_2 - \frac{12}{5}, x_3 - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)^T = 0$$

Искомая опорная гиперплоскость:

$$-25x_1 + 30x_2 + 2\sqrt{3}x_3 = 100$$

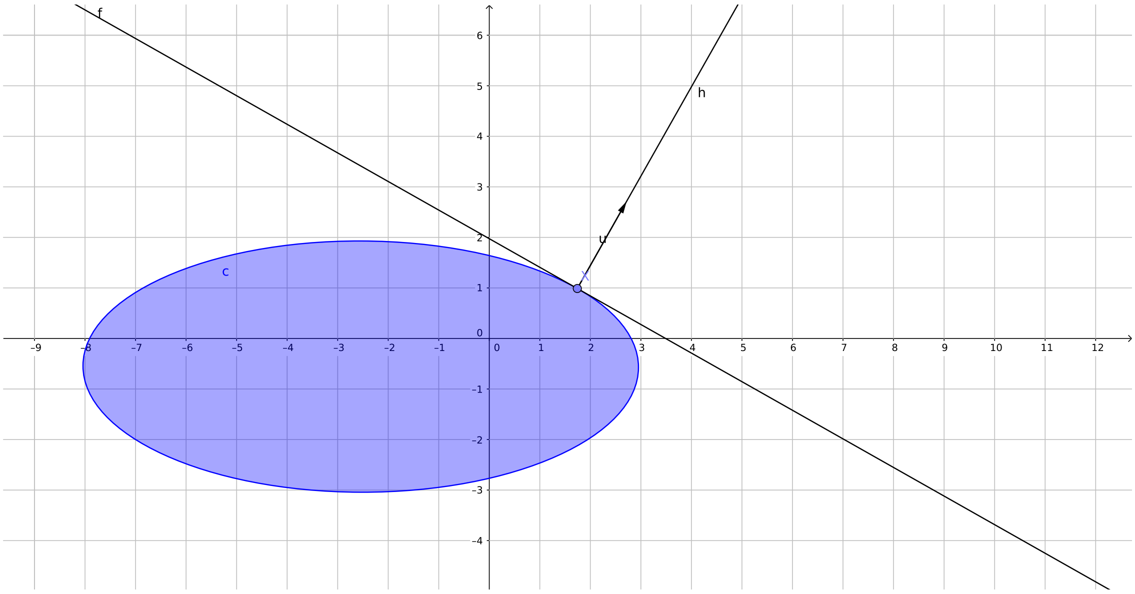
Ответ: $-25x_1 + 30x_2 + 2\sqrt{3}x_3 = 100$

5

Пусть $S \subset \mathbb{R}^n$ - замкнутое выпуклое множество, $\mathbf{x} \in S$. Найти множество $Y \subset \mathbb{R}^n$ такое, что $\forall \mathbf{y} \in Y$ выполнено $\mathbf{x} = \pi_S(\mathbf{y})$

Решение:

Если множество S выпукло и замкнуто, то по теореме 2.3.1 из Жадана(стр 46) $\forall y \in Y \to \exists! \pi_S(\mathbf{y})$.



Строим гипотезу $Y = \{y' \mid y' = \theta \mathbf{x} + (1-\theta)y, \forall y \in Y, \forall \theta \leq 1\}$, что геометрически представляет из себя луч проведенный из точки $\mathbf{x}$, коллинеарный вектору нормали касательной к выпуклому множеству плоскости в точке $\mathbf{x}$

Проверяем неравенство для выпуклого замкнутого множества.

Пусть y - фиксированная точка, так как S - выпукло и замкнуто верно:

$$\langle \pi_S(y) - y, x' - \pi_S(y) \rangle = \langle \mathbf{x} - y, x' - \mathbf{x} \rangle \geq 0, \forall x' \in S$$

Проверим, что это также верно и для $y' = \theta \mathbf{x} + (1-\theta)y$

$$\langle \mathbf{x} - \theta \mathbf{x} - (1-\theta)y, x' - \mathbf{x} \rangle = (1-\theta) \langle \mathbf{x} - y, x' - \mathbf{x} \rangle \geq 0 \textbf{, т. к. } \theta \leq 1$$

Заметим, что выражение

$$\{y' \mid y' = \theta \mathbf{x} + (1-\theta)y, \forall y \in Y, \forall \theta \leq 1\}$$

можно переписать как

$$\{y' \mid y' = \theta \mathbf{x} + (1-\theta)(\mathbf{x} + \nabla F(\mathbf{x})), \forall \theta \leq 1\}$$

Где $\nabla F(\mathbf{x})$ - вектор нормали касательной гиперплоскости в точке $\mathbf{x}$.

F(x) $=0$ - уравнение поверхности S

Ответ: $Y = \{y' \mid y' = \theta \mathbf{x} + (1-\theta)y, \forall y \in Y, \theta \leq 1\}$

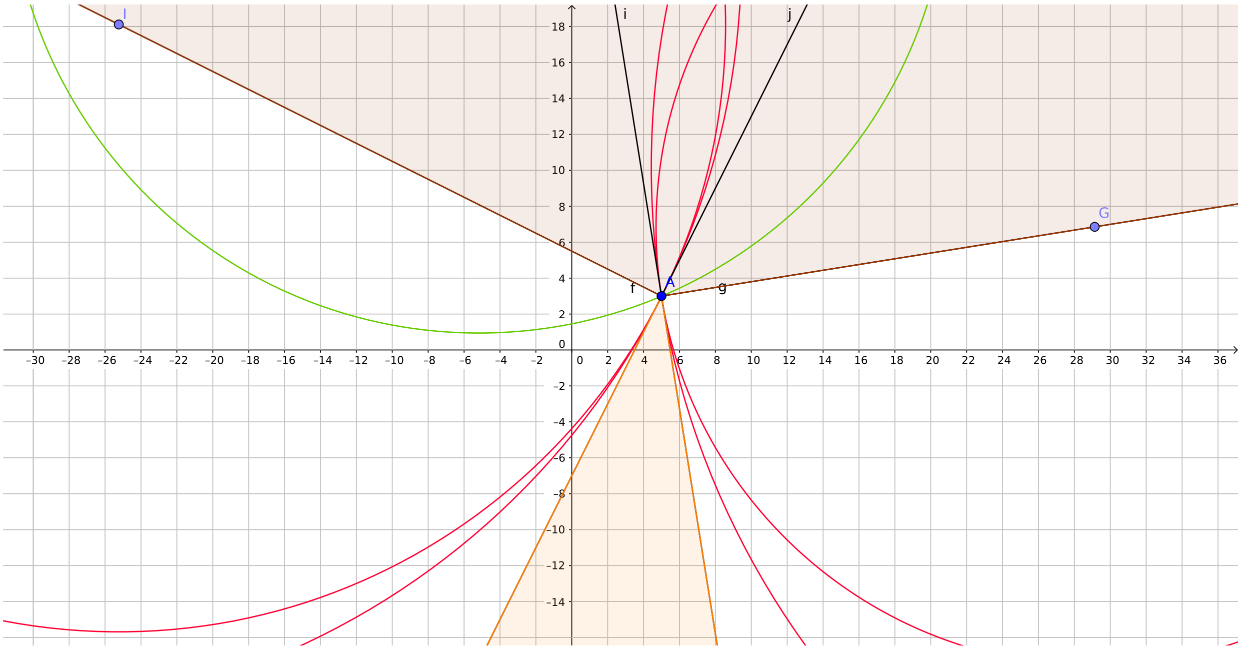
6

Пусть даны $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ и выпуклый конус $K \subseteq \mathbb{R}^n$. Пусть $Y = \mathbf{x} + K$, $\mathbf{y} \in Y$. Найти множество $X \subset \mathbb{R}^n$, такое, что $\mathbf{x} \in X, \forall \mathbf{y} \in Y : x = \pi_X(\mathbf{y})$

Решение:

1. Заметим, что задача имеет тривиальное решение когда $X = x$ (состоит из одной точки).

2. Мн-во $Y = \mathbf{x} + K$ соответствует смещенному конусу на вектор $\mathbf{x}$.
Геометрический подход к решению.



Y - фиолетовый конус на картинке.
X - оранжевый.
Так как $\vec{0} \in K \Rightarrow \mathbf{x}$ - вершина конуса.
Рассмотрим точки на границе конуса (крайний случай) и проведем из них окружности до $\mathbf{x}$.
Так как $\forall y \in \partial Y \rightarrow \pi_X(y) = \mathbf{x}$, окружности пересекаются с X только в точке $\mathbf{x}$.
Отсюда искомое множество X (золотой конус на картинке) строится как касательный конус ко всевозможным окружностям с центром на ∂Y.
Проведенные рассуждения на $\mathbb{R}^2$ обобщаются на $\mathbb{R}^n$