

ДЗ 4 по Методам Оптимизации.
Сопряженные множества. Двойственные конусы.
Многогранники. Лемма Фаркаша

Соколов Игорь, группа 573

30 сентября 2017 г.

1

Найти и изобразить на плоскости множество, сопряженное к многогранному конусу:

$$S = \mathbf{conv}\{(-4, -1), (-2, -1), (-2, 1)\} + \mathbf{cone}\{(1, 0), (2, 1)\}$$

Решение:

Приведем теорему из семинара:

Пусть $x_1, \dots, x_m \in \mathbb{R}^n$. Сопряженным к многогранному множеству:

$$S = \mathbf{conv}\{x_1, \dots, x_k\} + \mathbf{cone}\{x_{k+1}, \dots, x_m\}$$

является полиэдр (многогранник):

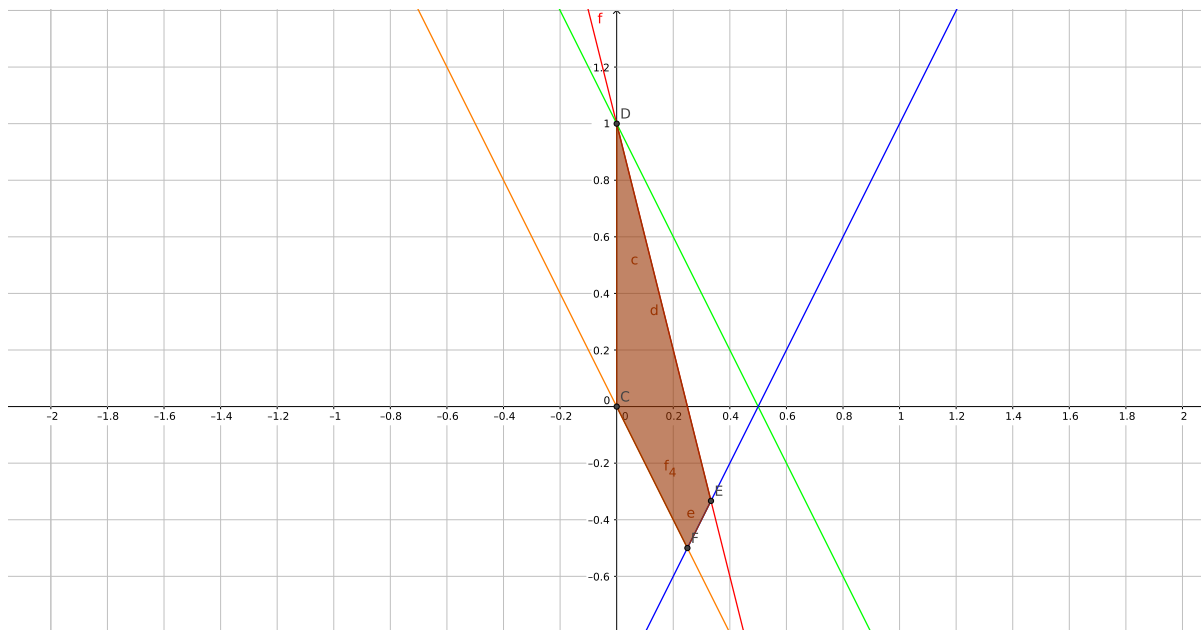
$$S = \{p \in \mathbb{R}^n \mid \langle p, x_i \rangle \geq -1, i = \overline{1, k}; \langle p, x_i \rangle \geq 0, i = \overline{k+1, m}\}$$

Используя теорему:

$$S^* = \{p \in \mathbb{R}^n \mid -4p_1 - p_2 \geq -1, -2p_1 - p_2 \geq -1, -2p_1 + p_2 \geq -1, p_1 \geq 0, 2p_1 + p_2 \geq 0\}$$

Таким образом имеем систему:

$$\begin{cases} p_2 \leq -4p_1 + 1 \\ p_2 \leq -2p_1 + 1 \\ p_2 \geq 2p_1 - 1 \\ p_1 \geq 0 \\ p_2 \geq -2p_1 \end{cases}$$



2

Найти и изобразить на плоскости множество, сопряженное к полиэдру:

$$S = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid -3x_1 + 2x_2 \leq 7, x_1 + 5x_2 \leq 9, x_1 - x_2 \leq 3, -x_2 \leq 1\}$$

Решение:

Ответ:

3

Доказать, что если понятие сопряженного множества к множеству S вводить как:

$$S^* = \{y \in \mathbb{R}^n \mid \langle y, x \rangle \leq 1 \quad \forall x \in S\},$$

то единичный шар с центром в нуле - единственное самосопряженное множество в \mathbb{R}^n .

Решение:

Ответ:

4

Найти множество, сопряженное к эллипсоиду:

$$S = \left\{ x \in \mathbb{R}^n \mid \sum_{i=1}^n a_i^2 x_i^2 \leq \varepsilon^2 \right\}$$

Решение:

Ответ: