

# ДЗ 2 по Методам Оптимизации

Соколов Игорь, группа 573

30 сентября 2017 г.

## 1

Покажите, что множество аффинно тогда и только тогда, когда его пересечение с любой прямой аффинно.

$$X - aff \Leftrightarrow \forall a \rightarrow a \cap X - aff$$

*Доказательство.*  $\Rightarrow$

Пусть  $X - aff$ .

Любая прямая - аффинное множество по определению.

Если  $a \cap X = \emptyset$ , тогда  $a \cap X - aff$  по опр.

Если  $a \cap X \neq \emptyset$ , тогда возьмем  $x_1, x_2 \in a \cap X$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1, x_2 \in a \\ x_1, x_2 \in X \end{cases}$$

$$\text{Так как } a - aff, X - aff, \text{ то } \forall \theta \in \mathbb{R} \rightarrow \begin{cases} x_\theta = \theta x_1 + (1 - \theta)x_2 \in a \\ x_\theta = \theta x_1 + (1 - \theta)x_2 \in X \end{cases}$$

$$\Rightarrow x_\theta \in a \cap X$$

$$\Rightarrow a \cap X - aff$$

$\Leftarrow$

Пусть теперь  $\forall a \rightarrow a \cap X - aff$ .

Для произвольных  $x_1, x_2 \in X \rightarrow$  пересечение  $X$  и прямой  $a$ , содержащей  $x_1, x_2$  аффинно, то есть содержит прямую, проходящую через  $x_1$  и  $x_2 \Rightarrow a \in a \cap X$ , так как через две точки можно провести только

$$\text{Так как } a \in a \cap X \Rightarrow a \in X$$

$$\text{То есть } \forall x_1, x_2 \in X \theta \in \mathbb{R} \rightarrow \theta x_1 + (1 - \theta)x_2 \in X$$

$$\Rightarrow X - aff$$

□

## 2

Пусть  $S_1, \dots, S_k$  - произвольные непустые множества в  $\mathbb{R}^n$ . Докажите, что:

$$1. \text{cone} \left( \bigcup_{i=1}^k S_i \right) = \sum_{i=1}^k \text{cone} (S_i)$$

$$2. \text{conv} \left( \sum_{i=1}^k S_i \right) = \sum_{i=1}^k \text{conv} (S_i)$$

Начнем с 2.

*Доказательство.* По индукции:

$$\text{База: } k = 1 \Rightarrow \text{conv} \left( \sum_{i=1}^1 S_i \right) = \sum_{i=1}^1 \text{conv} (S_i) = \text{conv} (S_1) - \text{верно.}$$

$$\text{Пусть верно для } k = n \Rightarrow \text{conv} \left( \sum_{i=1}^n S_i \right) = \sum_{i=1}^n \text{conv} (S_i) - \text{верно.}$$

Докажем для  $k = n + 1$ , то есть докажем равенство:

$$\begin{aligned} \text{conv} \left( \sum_{i=1}^{n+1} S_i \right) &= \sum_{i=1}^{n+1} \text{conv} (S_i) \\ \text{conv} \left( \sum_{i=1}^n S_i + S_{n+1} \right) &= \text{conv} \left( \sum_{i=1}^n S_i \right) + \text{conv} (S_{n+1}) \end{aligned}$$

Переобозначим:

$$A = \sum_{i=1}^n S_i$$

$$B = S_{n+1}$$

Тогда

$$\text{conv} (A + B) = \text{conv} (A) + \text{conv} (B)$$

$\Rightarrow$

$$A \subset \text{conv} (A)$$

$$B \subset \text{conv} (B)$$

$$A + B \subset \text{conv} (A) + \text{conv} (B)$$

Так как  $\text{conv} (A) + \text{conv} (B) - \text{convex}$  (так как сумма выпуклых множеств).

То  $\text{conv} (A + B) \subset \text{conv} (A) + \text{conv} (B)$  (так как  $\text{conv} (A + B)$  минимальное выпуклое множество, такое что  $A + B \subseteq \text{conv} (A + B)$ )

**Что значит "минимальное"?**

Так как  $\text{conv} (A + B)$  есть пересечение всевозможных выпуклых множеств, содержащих  $A + B$ , то есть  $\bigcap_{i=0}^n S_i = \text{conv} (A + B)$ .

Можно ввести порядок по вложению:  $S_{i_1} \subseteq S_{i_2} \subseteq \dots \subseteq S_{i_n} \subseteq A + B$ , где  $i_j \in [1, n]$

И под "минимальным" множеством подразумевалось как раз  $S_{i_1}$

$\Leftarrow$

Пусть  $z \in \text{conv} (A) + \text{conv} (B)$ , то есть  $z = x + y$ , где  $x \in \text{conv} (A)$ ,  $y \in \text{conv} (B)$

$$\text{Тогда } x = \sum_{i=1}^l \alpha_i x_i, y = \sum_{j=1}^p \beta_j y_j, \quad \alpha_i \geq 0, \beta_j \geq 0, \quad \sum_{i=1}^l \alpha_i = \sum_{j=1}^p \beta_j = 1$$

$$x + y \in \text{conv} (A) + \text{conv} (B)$$

Для начала, заметим, что  $x + y_j \in \text{conv} (A + B)$ , так как  $x + y_j = \sum_{i=1}^l \alpha_i (x_i + y_j)$

Затем можно записать  $x + y$  как выпуклую комбинацию точек  $x + y_j$ , а именно:

$$z = x + y = \sum_{j=1}^p \beta_j (x + y_j) = \sum_{j=1}^p \sum_{i=1}^l \alpha_i \beta_j (x_i + y_j)$$

Где  $x_i + y_i \in A + B$ ,  $\alpha_i \beta_j \geq 0$ ,  $\sum_{j=1}^p \sum_{i=1}^l \alpha_i \beta_j = \sum_{i=1}^l \alpha_i \sum_{j=1}^p \beta_j = 1$

Таким образом  $z$  является выпуклой комбинацией точек множества  $A + B$   
 $\Rightarrow z \in \mathbf{conv}(A + B)$

Так как  $z$  было выбрано произвольно, то верно  $\mathbf{conv}(A) + \mathbf{conv}(B) \subset \mathbf{conv}(A + B)$

Из включения в обе стороны следует равенство:

$$\mathbf{conv}(A + B) = \mathbf{conv}(A) + \mathbf{conv}(B)$$

□

Доказательство 1 идейно повторяет док-во 2, за исключением некоторых деталей.

*Доказательство.* По индукции:

База:  $k = 1 \Rightarrow \mathbf{cone}\left(\bigcup_{i=1}^1 S_i\right) = \sum_{i=1}^1 \mathbf{cone}(S_i) = \mathbf{cone}(S_1)$ - верно.

Пусть верно для  $k = n \Rightarrow \mathbf{cone}\left(\bigcup_{i=1}^n S_i\right) = \sum_{i=1}^n \mathbf{cone}(S_i)$  - верно.

Докажем для  $k = n + 1$ , то есть докажем равенство:

$$\begin{aligned} \mathbf{cone}\left(\bigcup_{i=1}^{n+1} S_i\right) &= \sum_{i=1}^{n+1} \mathbf{cone}(S_i) \\ \mathbf{cone}\left(\bigcup_{i=1}^n S_i \cup S_{n+1}\right) &= \mathbf{cone}\left(\bigcup_{i=1}^n S_i\right) + \mathbf{cone}(S_{n+1}) \end{aligned}$$

Переобозначим:

$$A = \bigcup_{i=1}^n S_i$$

$$B = S_{n+1}$$

Тогда

$$\mathbf{cone}(A \cup B) = \mathbf{cone}(A) + \mathbf{cone}(B)$$

$\Rightarrow$

$$A \subset \mathbf{cone}(A)$$

$$B \subset \mathbf{cone}(B)$$

По опр:

$$\mathbf{cone}(A) = \left\{ \sum_{i=1}^l \theta_i x_i \mid x_i \in A, \theta_i \geq 0 \right\}$$

$$\mathbf{cone}(B) = \left\{ \sum_{j=1}^p \lambda_j y_j \mid y_j \in B, \lambda_j \geq 0 \right\}$$

$$\text{Тогда } \mathbf{cone}(A \cup B) = \left\{ \sum_{i=1}^{l+p} \theta_i z_i \mid z_i \in A \cup B, \theta_i \geq 0 \right\}$$

Так как,  $A \cup B$  состоит из  $x, y$  (как определено выше)

$$\sum_{i=1}^{l+p} \theta_i z_i = \sum_{i=1}^l \theta_i x_i + \sum_{i=l+1}^{l+p} \theta_i y_i$$

Переобозначим

$$\theta_{l+1} \rightarrow \lambda_1$$

$$\theta_{l+2} \rightarrow \lambda_2$$

...

$$\theta_{l+p} \rightarrow \lambda_p$$

$$y_{l+1} \rightarrow y_1$$

$$y_{l+2} \rightarrow y_2$$

...

$$y_{l+p} \rightarrow y_p$$

Тогда можно записать:

$$\mathbf{cone}(A \cup B) = \left\{ \sum_{i=1}^l \theta_i x_i + \sum_{j=1}^p \lambda_j y_j \mid x_i \in A, y_j \in B, \theta_i, \lambda_j \geq 0 \right\} \quad (1)$$

Так как в формулу (1) входят всевозможные  $\lambda_j, \theta_i \in \mathbb{R}$ , то её можно представить как сумму Минковского всевозможных конических комбинаций, то есть:

$$\begin{aligned} \left\{ \sum_{i=1}^l \theta_i x_i + \sum_{j=1}^p \lambda_j y_j \mid x_i \in A, y_j \in B, \theta_i, \lambda_j \geq 0 \right\} = & \left\{ \sum_{i=1}^l \theta_i x_i \mid x_i \in A, \theta_i \geq 0 \right\} + \\ & + \left\{ \sum_{j=1}^p \lambda_j y_j \mid y_j \in B, \lambda_j \geq 0 \right\} \quad (2) \end{aligned}$$

Что совпадает с суммой конических оболочек  $A$  и  $B$ .

$$\mathbf{cone}(A) + \mathbf{cone}(B) = \left\{ \sum_{i=1}^l \theta_i x_i \mid x_i \in A, \theta_i \geq 0 \right\} + \left\{ \sum_{j=1}^p \lambda_j y_j \mid y_j \in B, \lambda_j \geq 0 \right\} \quad (3)$$

$$\Rightarrow \mathbf{cone}(A \cup B) = \mathbf{cone}(A) + \mathbf{cone}(B)$$

□

### 3

Докажите, что множество  $S \subseteq \mathbb{R}^n$  выпукло тогда и только тогда, когда  $(\alpha + \beta)S = \alpha S + \beta S$  для всех неотрицательных  $\alpha$  и  $\beta$

$$S - convex \Leftrightarrow \forall \alpha, \beta \geq 0 \rightarrow (\alpha + \beta)S = \alpha S + \beta S$$

*Доказательство.*  $\Rightarrow$

Так как  $S - convex$ , то  $\forall \alpha, \beta \geq 0 \rightarrow \alpha S + \beta S - convex$

1. Если  $\alpha = \beta = 0$   
 $(\alpha + \beta)S = (0 + 0)S = 0$   
 $\alpha S + \beta S = 0S + 0S = 0$   
 $\Rightarrow (\alpha + \beta)S = \alpha S + \beta S = 0$

2. Если  $\alpha = 0, \beta \neq 0$  (для случая  $\beta = 0$  аналогично)  
 $(\alpha + \beta)S = (0 + \beta)S = \beta S$   
 $\alpha S + \beta S = 0S + \beta S = \beta S$   
 $\Rightarrow (\alpha + \beta)S = \alpha S + \beta S = \beta S$

3. Если  $\alpha \neq 0, \beta \neq 0$  поделим на  $(\alpha + \beta)$

$$\left(\frac{\alpha}{\alpha + \beta}\right) S + \left(1 - \frac{\alpha}{\alpha + \beta}\right) S = S$$

Пусть  $\frac{\alpha}{\alpha + \beta} = \theta \in [0; 1]$   
Тогда надо доказать, что

$$\theta S + (1 - \theta) S = S$$

$$\theta S + (1 - \theta) S = \{x_\theta \mid x_\theta = \theta x_1 + (1 - \theta) x_2, \quad \forall x_1, x_2 \in S, \theta \in [0; 1]\} \quad (1)$$

Так как  $S$  - выпукло, то  $\forall x_\theta \rightarrow x_\theta \in S$   
 $\Rightarrow \theta S + (1 - \theta) S = S$  - верно.  
 $\Rightarrow (\alpha + \beta)S = \alpha S + \beta S$  - верно.

$\Leftarrow$

По условию имеем, что  $(\alpha + \beta)S = \alpha S + \beta S$  - верно.

При  $\alpha, \beta \neq 0$  получаем  $\theta S + (1 - \theta) S = S$  (случаи когда  $\alpha = 0$  и (или)  $\beta = 0$  рассматриваются аналогично)

$$\theta S + (1 - \theta) S = S \Leftrightarrow \{\theta x_1 + (1 - \theta) x_2 = x_\theta \mid \forall x_1, x_2 \in S, x_\theta \in S, \theta \in [0; 1]\}$$

Откуда следует выполнение определения выпуклого множества.  
 $\Rightarrow S$  - выпукло.

□

## 4

Пусть  $x \in \mathbb{R}$  - случайная величина с заданным вероятностным распределением  $\mathbb{P}(x = a_i) = p_i$ , где  $i = 1, \dots, n$ , а  $a_1 < \dots < a_n$ . Говорят, что вектор вероятностей исходов  $p \in \mathbb{R}^n$  принадлежит вероятностному симплексу, т.е.  $P = \{p \mid \mathbf{1}^T p = 1, p \succeq 0\} = \{p \mid p_1 + \dots + p_n = 1, p_i \geq 0\}$ .

Определите, выпукло ли множество таких  $p$ , которые удовлетворяют условию:

1.  $\mathbb{P}(x > \alpha) \leq \beta$
2.  $\mathbb{E}[x^{2017}] \leq \alpha \mathbb{E}[x]$
3.  $\mathbb{E}[x^2] \geq \alpha$
4.  $\forall x \geq \alpha$

*Доказательство.* 1) Заметим, что данное неравенство эквивалентно линейному неравенству:

$$\sum_{i: a_i > \alpha} p_i \leq \beta$$

Которое задает полупространство  $A$  - *convex*.

Вероятностный симплекс  $P$  - *convex*

$\Rightarrow A \cap P$  - *convex*

2)

$$\sum_{i=1}^n p_i (|a_i|^{2017} - \alpha |a_i|) \leq 0$$

Пусть  $(|a_i|^{2017} - \alpha |a_i|) = \beta_i$

$$\sum_{i=1}^n p_i \beta_i \leq 0$$

Также задает некоторое полупространство (*convex*), которое при пересечении с симплексом дает выпуклое множество.

3)

$$\sum_{i=1}^n p_i a_i^2 \geq \alpha$$

Также линейное неравенство, задающее некоторое полупространство и, пересекая его с симплексом, снова получаем выпуклое множество

$$4) \mathbb{V}x = \mathbb{E} \{ (x - \mathbb{E}x)^2 \} = \mathbb{E}x^2 - (\mathbb{E}x)^2 = \sum_{i=1}^n p_i a_i^2 - \left( \sum_{i=1}^n p_i a_i \right)^2 \geq \alpha$$

Перейдем к другим координатам.

$p_i a_i = y_i$  (при аффинном отображении сохраняется выпуклость).

$$\sum_{i=1}^n y_i a_i - \left( \sum_{i=1}^n y_i \right)^2 \geq \alpha$$

$$\left( \sum_{i=1}^n y_i \right)^2 - \sum_{i=1}^n y_i a_i \leq \alpha$$

Слева от неравенства некоторый квадратичный функционал, который можно привести к каноническому виду и далее увидеть, что полученная каноничная форма есть выпуклая фигура.

Пересечение с симплексом даст снова выпуклое множество.  $\square$