ДЗ 8 по Методам Оптимизации. Сопряженная функция

Соколов Игорь, группа 573

21 ноября 2017 г.

1

Найти $f^*(y)$, если $f(x) = -\dfrac{1}{x}, \ \ x \in \mathbb{R}_{++}$

Решение:

1.
$$f^*(y) = \sup_{x \in \mathbf{dom}\, f} (\langle y,x \rangle - f(x)) = \sup_{x \in \mathbf{dom}\, f} f(x,y)$$
$$f(x,y) = xy + \frac{1}{x}$$

2. Поиск тех значений y, при которых $\sup\limits_{x \in \mathbf{dom}\, f} f(x,y)$ конечен. Эти значения есть $\mathbf{dom} f^*$

   - $y > 0$
     $\Rightarrow f(x,y)$ не ограничена сверху при каждом фиксированном y при $x \in \mathbf{dom} f$.
   - $y \leq 0$
     $\sup\limits_{x \in \mathbf{dom}\, f(x,y)}$ ограничен сверху.
     $\Rightarrow \mathbf{dom} f^* = -\mathbb{R}_+$

3. Поиск x^*, при котором $f(x,y)$ достигает своего максимального значения как функция по x. $f^*(y) = f(x^*, y)$

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = y - \frac{1}{x^2} = 0$$
$$y = \frac{1}{x^2}$$
$$\Rightarrow x^* = \frac{1}{\sqrt{-y}}, \quad y \leq 0$$

   Значит $f^*(y) = -\dfrac{-y}{\sqrt{-y}} + \sqrt{-y} = -2\sqrt{y}$

Ответ:
$f^*(y) = -2\sqrt{y}$
$\mathbf{dom} f^* = -R_+$

2

Найти $f^*(y)$, если $f(x) = -0{,}5 - \log x, \quad x > 0$

Решение:

1.
$$f^*(y) = \sup_{x \in \mathbf{dom}\, f} (\langle y,x \rangle - f(x)) = \sup_{x \in \mathbf{dom}\, f} f(x,y)$$

$$f(x,y) = xy + 0.5 + \log x$$

2. Поиск тех значений y, при которых $\sup\limits_{x \in \mathbf{dom}\, f} f(x,y)$ конечен. Эти значения есть $\mathbf{dom} f^*$

   - $y \geq 0$
     $\Rightarrow f(x,y)$ не ограничена сверху при каждом фиксированном y при $x \in \mathbf{dom} f$.
   - $y < 0$
     $\sup\limits_{x \in \mathbf{dom}\, f} f(x,y)$ ограничен сверху.
     $\Rightarrow \mathbf{dom} f^* = -\mathbb{R}_+$

3. Поиск x^*, при котором $f(x,y)$ достигает своего максимального значения как функция по x. $f^*(y) = f(x^*, y)$

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = y + \frac{1}{x} = 0$$
$$y = -\frac{1}{x}$$
$$\Rightarrow x^* = -\frac{1}{y}, \quad y < 0$$

Значит $f^*(y) = -\frac{y}{y} + 0.5 + \log\left(-\frac{1}{y}\right) = -0.5 - \log(-y)$

Ответ:
$f^*(y) = -0.5 - \log(-y)$
$\mathbf{dom} f^* = -\mathbb{R}_+$

3

Найти $f^*(y)$, если $f(x) = \log\left(\sum\limits_{i=1}^{n} e^{x_i}\right)$

Решение:

1.

$$f^*(y) = \sup_{x \in \mathbf{dom}\, f} (\langle y,x \rangle - f(x)) = \sup_{x \in \mathbf{dom}\, f} f(x,y)$$

$$f(x,y) = xy - \log\left(\sum_{i=1}^{n} e^{x_i}\right)$$

2. Поиск тех значений y, при которых $\sup\limits_{x \in \mathbf{dom}\, f} f(x,y)$ конечен. Эти значения есть $\mathbf{dom} f^*$

- $y \prec 0$
  Покажем, что этот случай не подходит.
  Пусть $y_k \leq 0$, $\begin{cases} x_k = -t, t > 0 \\ x_i = 0, i \neq k \end{cases}$
  Тогда $f(x,y) = x_k y_k - \log\left(e^{x_k} + (n-1)\right) = -t y_k - \log\left(e^{-t} + (n-1)\right) \to +\infty$ при $t \to +\infty$
  $\Rightarrow f(x,y)$ не ограничена сверху при каждом фиксированном y при $x \in \mathbf{dom} f$.
- $y \succeq 0$ Покажем, что $\mathbf{1}^T y = 1$ Пусть это не так, тогда возможный два случая:
  - $\mathbf{1}^T y > 1$
    Пусть $x = t\mathbf{1}$.
    Тогда $f(x,y) = t\mathbf{1}^T y - \left(\sum\limits_{i=1}^{n} e^t\right) = t\mathbf{1}^T y - t - \log n = t(\mathbf{1}^T y - 1) - \log n \to +\infty$ при $t \to +\infty$
    $\Rightarrow f(x,y)$ не ограничена сверху при каждом фиксированном y при $x \in \mathbf{dom} f$.
  - $\mathbf{1}^T y < 1$
    Аналогично при $x = t\mathbf{1}$ получаем $f(x,y) = t(\mathbf{1}^T y - 1) - \log n = -t(1 - \mathbf{1}^T y) - \log n \to +\infty$ при $t \to -\infty$
    $\Rightarrow f(x,y)$ не ограничена сверху при каждом фиксированном y при $x \in \mathbf{dom} f$.

  В итоге получаем, что $\mathbf{dom} f^* = \mathbb{R}^n_+$

3. Поиск x^*, при котором $f(x,y)$ достигает своего максимального значения как функция по x. $f^*(y) = f(x^*, y)$

$$\frac{\partial f(x,k)}{\partial x_k} = y_k - \frac{e^{x_k}}{\sum\limits_{i=1}^{n} e^{x_i}} = 0$$

$$y_k = \frac{e^{x_k}}{\sum\limits_{i=1}^{n} e^{x_i}}$$

$$x_k^* = \log\left(y_k \sum_{i=1}^{n} e^{x_i}\right)$$

Значит

$$f^*(y) = \sum_{k=1}^{n} y_k \log\left(y_k \sum_{i=1}^{n} e^{x_i}\right) - \log\left(\sum_{i=1}^{n} e^{x_i}\right) =$$
$$= \sum_{k=1}^{n} y_k \log y_k + \log\left(\sum_{i=1}^{n} e^{x_i}\right) \sum_{k=1}^{n} y_k - \log\left(\sum_{i=1}^{n} e^{x_i}\right) = \sum_{k=1}^{n} y_k \log y_k \quad (1)$$

так как $\sum\limits_{k=1}^{n} y_k = 1$

Полагаем, что $0 \log 0 = 0$

Ответ:

$f^*(y) = \sum\limits_{k=1}^{n} y_k \log y_k, \quad f(\vec{0}) = 0$

$\mathbf{dom} f^* = \mathbb{R}^n_+, \mathbf{1}^T y = 1$

4

Найти $f^*(y)$, если $f(x) = -(a^2 - x^2)^{1/2}, \quad |x| \leq a, \quad a > 0$

Решение:

1. $$f^*(y) = \sup_{x \in \mathbf{dom}\, f} (\langle y,x \rangle - f(x)) = \sup_{x \in \mathbf{dom}\, f} f(x,y)$$
$$f(x,y) = xy + (a^2 - x^2)^{1/2}$$

2. Поиск тех значений y, при которых $\sup\limits_{x \in \mathbf{dom}\, f} f(x,y)$ конечен. Эти значения есть $\mathbf{dom} f^*$

   Нетрудно заметить, что $\forall y \in \mathbb{R} \quad \forall x \in [-a; a] \to f(x,y)$ ограничена.

   $\Rightarrow \mathbf{dom} f^* = \mathbb{R}$

3. Поиск x^*, при котором $f(x,y)$ достигает своего максимального значения как функция по x. $f^*(y) = f(x^*, y)$
$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = y + \frac{-2x}{2(a^2 - x^2)^{1/2}} = 0$$
$$y = \frac{x}{(a^2 - x^2)^{1/2}}$$
$$y^2(a^2 - x^2) = x^2$$
$$x^2 = \frac{y^2 a^2}{y^2 + 1}$$

$x_1 = \dfrac{ya}{\sqrt{y^2+1}}$ - максимум достигается для таких x.

$x_2 = -\dfrac{ya}{\sqrt{y^2+1}}$

$$x^* = \frac{ya}{\sqrt{y^2+1}}$$

Значит

$$f^*(y) = \frac{y^2 a}{\sqrt{y^2+1}} + \left(a^2 - \frac{y^2 a^2}{y^2+1}\right)^{1/2} = \frac{y^2 a}{\sqrt{y^2+1}} + a\left(\frac{1}{y^2+1}\right) = a\sqrt{y^2+1}$$

Ответ:

$f^*(y) = a\sqrt{y^2+1}$

$\mathbf{dom} f^* = \mathbb{R}$