ДЗ 2 по Методам Оптимизации

Соколов Игорь, группа 573

21 сентября 2017 г.

1

Покажите, что множество афинно тогда и только тогда, когда его пересечение с любой прямой афинно.

$X - aff \Leftrightarrow \forall a \to a \cap X - aff$

Доказательство. $\Longrightarrow$

Пусть $X - aff$.

Любая прямая - афинное множество по определению.

Если $a \cap X = \varnothing$, тогда $a \cap X$ - aff по опр.

Если $a \cap X \neq \varnothing$, тогда возьмем $x_1, x_2 \in a \cap X$

$\Rightarrow$

$\begin{cases} x_1, x_2 \in a \\ x_1, x_2 \in X \end{cases}$

Так как $a - aff, X - aff$, то $\forall \theta \in \mathbb{R} \to \begin{cases} x_\theta = \theta x_1 + (1-\theta)x_2 \in a \\ x_\theta = \theta x_1 + (1-\theta)x_2 \in X \end{cases}$

$\Rightarrow x_\theta \in a \cap X$

$\Rightarrow a \cap X - aff$

$\Longleftarrow$

Пусть теперь $\forall a \to a \cap X - aff$.

Для произвольных x_1,$x_2 \in X \to$ пересечение X и прямой a, содержащей x_1,x_2 афинно, то есть содержит прямую, проходящую через x_1 и $x_2 \Rightarrow a \in a \cap X$, так как через две точки можно провести толлко

Так как $a \in a \cap X \Rightarrow a \in X$

То есть $\forall x_1,x_2 \in X \theta \in \mathbb{R} \to \theta x_1 + (1-\theta)x_2 \in X$

$\Rightarrow X - aff$ $\square$

2

Пусть $S_1, \ldots, S_k$ - произвольные непустые множества в $\mathbb{R}^n$. Докажите, что:

1. $\mathbf{cone}\left(\bigcup\limits_{i=1}^{k} S_i\right) = \sum\limits_{i=1}^{k} \mathbf{cone}\,(S_i)$

2. $\mathbf{conv}\left(\sum\limits_{i=1}^{k} S_i\right) = \sum\limits_{i=1}^{k} \mathbf{conv}\,(S_i)$

Начнем с 2.

Доказательство. По индукции:

База: $k = 1 \Rightarrow \mathbf{conv}\left(\sum\limits_{i=1}^{1} S_i\right) = \sum\limits_{i=1}^{1} \mathbf{conv}\,(S_i) = \mathbf{conv}\,(S_1)$- верно.

Пусть верно для $k = n \Rightarrow \mathbf{conv}\left(\sum\limits_{i=1}^{n} S_i\right) = \sum\limits_{i=1}^{n} \mathbf{conv}\,(S_i)$ - верно.

Докажем для $k = n + 1$, то есть докажем равенство:

$$\mathbf{conv}\left(\sum_{i=1}^{n+1} S_i\right) = \sum_{i=1}^{n+1} \mathbf{conv}\,(S_i)$$

$$\mathbf{conv}\left(\sum_{i=1}^{n} S_i + S_{n+1}\right) = \mathbf{conv}\left(\sum_{i=1}^{n} S_i\right) + \mathbf{conv}\,(S_{n+1})$$

Переобозначим:

$A = \sum\limits_{i=1}^{n} S_i$

$B = S_{n+1}$

Тогда

$$\mathbf{conv}\,(A + B) = \mathbf{conv}\,(A) + \mathbf{conv}\,(B)$$

$\Longrightarrow$

$A \subset \mathbf{conv}\,(A)$

$B \subset \mathbf{conv}\,(B)$

$A + B \subset \mathbf{conv}\,(A) + \mathbf{conv}\,(B)$

Так как $\mathbf{conv}\,(A) + \mathbf{conv}\,(B) - convex$ (так как сумма выпуклых множеств).

То $\mathbf{conv}\,(A + B) \subset \mathbf{conv}\,(A) + \mathbf{conv}\,(B)$ (так как $\mathbf{conv}\,(A + B)$ минимальное выпуклое множество, такое что $A + B \subseteq \mathbf{conv}\,(A + B)$)

Что значит "минимальное"?

Так как $\mathbf{conv}\,(A + B)$ есть пересечение всевозможных выпуклых множеств, содержащих $A + B$, то есть $\bigcap\limits_{i=0}^{n} S_i = \mathbf{conv}\,(A + B)$.

Можно ввести порядок по вложению: $S_{i_1} \subseteq S_{i_2} \subseteq \cdots \subseteq S_{i_n} \subseteq A + B,$ где $i_j \in [1{,}n]$

И под **"минимальным"** множеством подразумевалось как раз S_{i_1}

$\Longleftarrow$

Пусть $\quad z \in \mathbf{conv}\,(A) + \mathbf{conv}\,(B)\,, \quad$ то есть $z = x + y, \quad$ где $x \in \mathbf{conv}\,(A)\,, y \in \mathbf{conv}\,(B)$

Тогда $x = \sum\limits_{i=1}^{l} \alpha_i x_i, y = \sum\limits_{j=1}^{p} \beta_j y_j, \quad \alpha_i \geq 0, \beta_j \geq 0, \quad \sum\limits_{i=1}^{l} \alpha_i = \sum\limits_{j=1}^{p} \beta_j = 1$

$x + y \in \mathbf{conv}\,(A) + \mathbf{conv}\,(B)$

Для начала, заметим, что $x + y_j \in \mathbf{conv}(A + B)$, так как $x + y_j = \sum\limits_{i=1}^{l} \alpha_i (x_i + y_j)$

Затем можно записать $x + y$ как выпуклую комбинацию точек $x + y_j$, а именно:

$$z = x + y = \sum_{j=1}^{p} \beta_j (x + y_j) = \sum_{j=1}^{p} \sum_{i=1}^{l} \alpha_i \beta_j (x_i + y_j)$$

Где $x_i + y_i \in A + B, \alpha_i \beta_j \geq 0, \sum\limits_{j=1}^{p} \sum\limits_{i=1}^{l} \alpha_i \beta_j = \sum\limits_{i=1}^{l} \alpha_i \sum\limits_{j=1}^{p} \beta_j = 1$
Таким образом z является выпуклой комбинацией точек множества $A + B$
$\Rightarrow z \in \mathbf{conv}\,(A + B)$
Так как z было выбрано произвольно, то верно $\mathbf{conv}\,(A) + \mathbf{conv}\,(B) \subset \mathbf{conv}\,(A + B)$
Из включения в обе стороны следует равенство:

$$\mathbf{conv}\,(A + B) = \mathbf{conv}\,(A) + \mathbf{conv}\,(B)$$

□

Доказательство 1 идейно повторяет док-во 2, за исключением некоторых деталей.

Доказательство. По индукции:
База: $k = 1 \Rightarrow \mathbf{cone}\left(\bigcup\limits_{i=1}^{1} S_i\right) = \sum\limits_{i=1}^{1} \mathbf{cone}\,(S_i) = \mathbf{cone}\,(S_1)$- верно.
Пусть верно для $k = n \Rightarrow \mathbf{cone}\left(\bigcup\limits_{i=1}^{n} S_i\right) = \sum\limits_{i=1}^{n} \mathbf{cone}\,(S_i)$ - верно.
Докажем для $k = n + 1$, то есть докажем равенство:

$$\mathbf{cone}\left(\bigcup_{i=1}^{n+1} S_i\right) = \sum_{i=1}^{n+1} \mathbf{cone}\,(S_i)$$

$$\mathbf{cone}\left(\bigcup_{i=1}^{n} S_i \cup S_{n+1}\right) = \mathbf{cone}\left(\bigcup_{i=1}^{n} S_i\right) + \mathbf{cone}\,(S_{n+1})$$

Переобозначим:
$A = \bigcup\limits_{i=1}^{n} S_i$
$B = S_{n+1}$
Тогда

$$\mathbf{cone}\,(A \cup B) = \mathbf{cone}\,(A) + \mathbf{cone}\,(B)$$

$\Longrightarrow$
$A \subset \mathbf{cone}\,(A)$
$B \subset \mathbf{cone}\,(B)$
По опр:
$\mathbf{cone}(A) = \left\{\sum\limits_{i=1}^{l} \theta_i x_i \mid x_i \in A, \theta_i \geq 0\right\}$
$\mathbf{cone}(B) = \left\{\sum\limits_{j=1}^{p} \lambda_i y_i \mid y_j \in B, \lambda_j \geq 0\right\}$
Тогда $\mathbf{cone}(A \cup B) = \left\{\sum\limits_{i=1}^{l+p} \theta_i z_i \mid z_i \in A \cup B, \theta_i \geq 0\right\}$
Так как, $A \cup B$ состоит из x, y(как определено выше)

$\sum\limits_{i=1}^{l+p} \theta_i z_i = \sum\limits_{i=1}^{l} \theta_i x_i + \sum\limits_{i=l+1}^{l+p} \theta_i y_i$

Переобозначим
$\theta_{l+1} \to \lambda_1$
$\theta_{l+2} \to \lambda_2$
$\dots$
$\theta_{l+p} \to \lambda_p$

$y_{l+1} \to y_1$
$y_{l+2} \to y_2$
$\dots$
$y_{l+p} \to y_p$
Тогда можно записать:

$$\mathbf{cone}(A \cup B) = \left\{ \sum_{i=1}^{l} \theta_i x_i + \sum_{j=1}^{p} \lambda_j y_j \mid x_i \in A, y_j \in B, \theta_i, \lambda_j \geq 0 \right\} \tag{1}$$

Так как в формулу (1) входят всевозможные $\lambda_j, \theta_i \in \mathbb{R}$, то её можно представить как сумму Минковского всевозможных конических комбинаций, то есть:

$$\left\{ \sum_{i=1}^{l} \theta_i x_i + \sum_{j=1}^{p} \lambda_j y_j \mid x_i \in A, y_j \in B, \theta_i, \lambda_j \geq 0 \right\} = \left\{ \sum_{i=1}^{l} \theta_i x_i \mid x_i \in A, \theta_i \geq 0 \right\} + \\ + \left\{ \sum_{j=1}^{p} \lambda_i y_i \mid y_j \in B, \lambda_j \geq 0 \right\} \tag{2}$$

Что совпадает с суммой конических оболочек A и B.

$$\mathbf{cone}(A) + \mathbf{cone}(B) = \left\{ \sum_{i=1}^{l} \theta_i x_i \mid x_i \in A, \theta_i \geq 0 \right\} + \left\{ \sum_{j=1}^{p} \lambda_i y_i \mid y_j \in B, \lambda_j \geq 0 \right\} \tag{3}$$

$\Rightarrow \mathbf{cone}(A \cup B) = \mathbf{cone}(A) + \mathbf{cone}(B)$

$\square$

3

Докажите, что множество $S \subseteq \mathbb{R}^n$ выпукло тогда и только тогда, когда $(\alpha+\beta)S = \alpha S+\beta S$ для всех неотрицательных α и β

$S - convex \Leftrightarrow \forall \alpha, \beta \geq 0 \to (\alpha + \beta)S = \alpha S + \beta S$

Доказательство. $\Longrightarrow$

Так как $S - convex$, то $\forall \alpha, \beta \geq 0 \to \alpha S + \beta S - convex$

1. Если $\alpha = \beta = 0$
$(\alpha + \beta)S = (0 + 0)S = 0$
$\alpha S + \beta S = 0S + 0S = 0$
$\Rightarrow (\alpha + \beta)S = \alpha S + \beta S = 0$

2. Если $\alpha = 0, \beta \neq 0$(для случая $\beta = 0$ аналогично)
$(\alpha + \beta)S = (0 + \beta)S = \beta S$
$\alpha S + \beta S = 0S + \beta S = \beta S$
$\Rightarrow (\alpha + \beta)S = \alpha S + \beta S = \beta S$

3. Если $\alpha \neq 0, \beta \neq 0$ поделим на $(\alpha + \beta)$

$$\left(\frac{\alpha}{\alpha + \beta}\right) S + \left(1 - \frac{\alpha}{\alpha + \beta}\right) S = S$$

Пусть $\frac{\alpha}{\alpha+\beta} = \theta \in [0; 1]$
Тогда надо доказать, что

$$\theta S + (1 - \theta)\, S = S$$

$$\theta S + (1 - \theta)\, S = \{x_\theta \mid x_\theta = \theta x_1 + (1 - \theta)\, x_2, \quad \forall x_1, x_2 \in S, \theta \in [0; 1]\} \tag{1}$$

Так как S - выпукло, то $\forall x_\theta \to x_\theta \in S$
$\Rightarrow \theta S + (1 - \theta)\, S = S$ - верно.
$\Rightarrow (\alpha + \beta)S = \alpha S + \beta S$ - верно.

$\Longleftarrow$
По условию имеем, что $(\alpha + \beta)S = \alpha S + \beta S$ - верно.
При $\alpha, \beta \neq 0$ получаем $\theta S + (1 - \theta)\, S = S$ (случаи когда $\alpha = 0$ и (или) $\beta = 0$ рассматриваются аналогично)

$$\theta S + (1 - \theta)\, S = S \Leftrightarrow \{\theta x_1 + (1 - \theta)\, x_2 = x_\theta \mid \forall x_1, x_2 \in S, x_\theta \in S, \theta \in [0; 1]\}$$

Откуда следует выполнение определения выпуклого множества.
$\Rightarrow S$ - выпукло.

$\square$

4

Пусть $x \in \mathbb{R}$ - случайная величина с заданным вероятностным распределением $\mathbb{P}(x = a_i) = p_i$, где $i = 1, \ldots, n$, а $a_1 < \ldots < a_n$. Говорят, что вектор вероятностей исходов $p \in \mathbb{R}^n$ принадлежит вероятностному симплексу, т.е. $P = \left\{p \mid \mathbf{1}^T p = 1, p \succeq 0\right\} = \{p \mid p_1 + \ldots + p_n = 1, p_i \geq 0\}$.

Определите, выпукло ли множество таких p, которые удовлетворяют условию:
1. $\mathbb{P}(x > \alpha) \leq \beta$
2. $\mathbb{E}|x^{2017}| \leq \alpha \mathbb{E}|x|$
3. $\mathbb{E}|x^2| \geq \alpha$
4. $\mathbb{V}x \geq \alpha$

Доказательство. 1) Заметим, что данное неравенство эквивалентно линейному неравенству:

$$\sum_{i:a_i>\alpha} p_i \leq \beta$$

Которое задает полупространство A - $convex$.

Вероятностный симплекс P - $convex$

$\Rightarrow A \cap P - convex$

2)

$$\sum_{i=1}^{n} p_i \left(|a_i|^{2017} - \alpha \, |a_i| \right) \leq 0$$

Пусть $(|a_i|^{2017} - \alpha|a_i|) = \beta_i$

$$\sum_{i=1}^{n} p_i \beta_i \leq 0$$

Также задает некоторое полупространство($convex$), которое при пересечении с симплексом дает выпуклое множество.

3)

$$\sum_{i=1}^{n} p_i a_i^2 \geq \alpha$$

Также линейное неравенство, задающее некоторое полупространство и, пересекая его с симплексом, снова получаем выпуклое множество

4) $\mathbb{V}x = \mathbb{E}\left\{(x - \mathbb{E}x)^2\right\} = \mathbb{E}x^2 - (\mathbb{E}x)^2 = \sum\limits_{i=1}^{n} p_i a_i^2 - \left(\sum\limits_{i=1}^{n} p_i a_i \right)^2 \geq \alpha$

Перейдем к другим координатам.

$p_i a_i = y_i$ (при аффинном отображении сохраняется выпуклость).

$\sum\limits_{i=1}^{n} y_i a_i - \left(\sum\limits_{i=1}^{n} y_i \right)^2 \geq \alpha$

$\left(\sum\limits_{i=1}^{n} y_i \right)^2 - \sum\limits_{i=1}^{n} y_i a_i \leq \alpha$

Слева от неравенства некоторый квадратичный функционал, который можно привести к каноническому виду и далее увидеть, что полученная каноничная форма есть выпуклая фигура.

Перечение с симплексом даст снова выпуклое множество. □