ДЗ 7 по Методам Оптимизации. Субградиент. Субдифференциал.

Соколов Игорь, группа 573

14 ноября 2017 г.

1

Докажите, что точка x_0 - является точкой минимума выпуклой функции $f(x)$ тогда и только тогда, когда $0 \in \partial f(x_0)$

Доказательство. $\Longrightarrow$

Имеем: x_0 - точка минимума функции $f(x)$.

Тогда $\forall x \in \mathbb{R}^n \leftarrow f(x) - f(x_0) \geq 0$, что можно переписать в виде:

$$f(x) - f(x_0) \geq 0 = \langle 0_n, x - x_0 \rangle \quad \forall x \in \mathbb{R}^n$$

$\Rightarrow 0_n \in \partial f(x_0)$

$\Longleftarrow$

Имеем: x_0 такова, что $0_n \in \partial f(x_0)$

Тогда по определению субградиента

$$f(x) - f(x_0) \geq \langle 0_n, x - x_0 \rangle = 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}^n$$

Таким образом точка x_0 есть точка минимума функции $f(x)$ на $\mathbb{R}^n$ □

2

Найти $\partial f(x)$, если $f(x) = \text{ReLU}(x) = \max\{0, x\}$

Решение:

$$\partial f = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ 1, & x > 0 \\ ?, & x = 0 \end{cases}$$

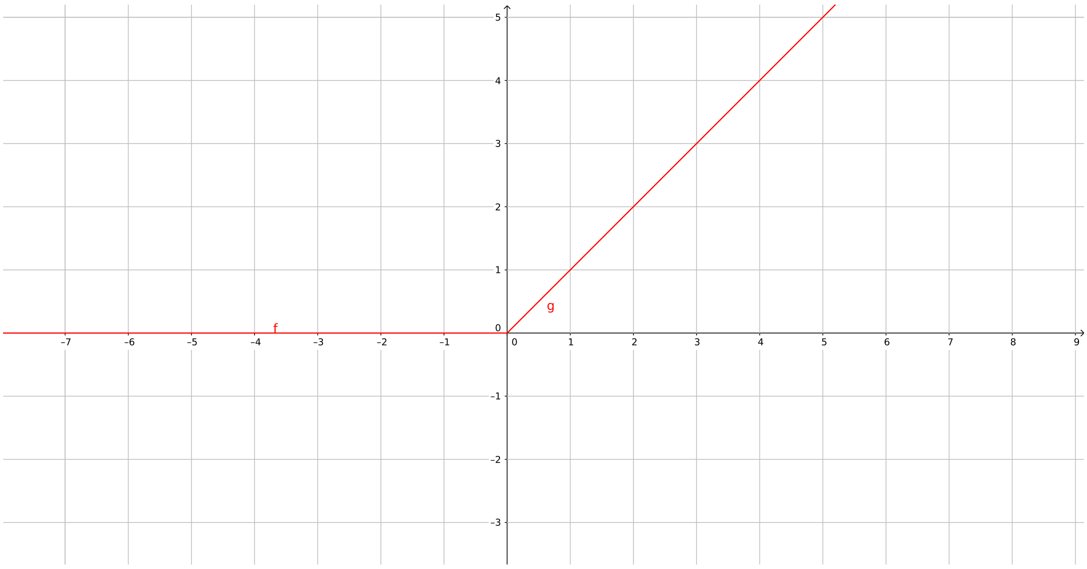
Случай $x = 0$ требует более подробного рассмотрения.

Теорема о субдифференциале поточечного максимума:

Пусть $f_i(x)$ - выпуклые функции на открытом выпуклом множестве $S \subseteq \mathbb{R}^n$, $x_0 \in S$, а поточечный максимум определяется как $f(x) = \max\limits_i f_i(x)$. Тогда:

$$\partial_S f(x_0) = \mathbf{conv}\left\{ \bigcup_{i \in I(x_0)} \partial_S f_i(x_0) \right\}$$

где $I(x) = \{i \in [1 : m] : f_i(x) = f(x)\}$



В нашем случае $f_1(x) = 0, \quad f_2(x) = x$
$\Rightarrow \partial f_1(0) = 0, \quad \partial f_2(0) = 1$
$\Rightarrow \partial f(0) = \mathbf{conv}\,\{\{0\},\{1\}\} = [0, 1]$

Ответ: $\partial f = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ 1, & x > 0 \\ [0,1], & x = 0 \end{cases}$

3

Найти $\partial f(x)$, если $f(x) = \|x\|_p$ при $p = 1,2,\infty$

Решение:

- $p = 1$

  Применим теорему Моро-Рокафеллара:

  Пусть $f_i(x)$ - выпуклые функции на выпуклых множествах S_i, $i = \overline{1,n}$. Тогда, если $\bigcap\limits_{i=1}^{n} \mathbf{ri} S_i \neq \emptyset$ то функция $f(x) = \sum\limits_{i=1}^{n} a_i f_i(x)$, $a_i > 0$ имеет субдифференциал $\partial_S f(x)$ на *множестве* $S = \bigcap\limits_{i=1}^{n} S_i$ *и*

$$\partial_S f(x) = \sum_{i=1}^{n} a_i \partial_{S_i} f_i(x)$$

$$\partial||\mathbf{x}||_1 = \mathbf{e_1} \cdot \begin{cases} 1, & \text{если } x_1 > 0; \\ -1, & \text{если } x_1 < 0; \\ [-1{,}1], & \text{если } x_1 = 0. \end{cases} + \mathbf{e_2} \cdot \begin{cases} 1, & \text{если } x_2 > 0; \\ -1, & \text{если } x_2 < 0; \\ [-1{,}1], & \text{если } x_2 = 0. \end{cases} + \dots +$$

$$+\mathbf{e_n} \cdot \begin{cases} 1, & \text{если } x_n > 0; \\ -1, & \text{если } x_n < 0; \\ [-1{,}1], & \text{если } x_n = 0. \end{cases}$$

где $\mathbf{e_i}$ — единичный орт по оси $\mathbf{0x_i}$.

- $p = 2$

  $f(x) = \|x\|_2 = \sqrt{\sum\limits_{i=0}^{n} |x_i|^2} = \sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2}$

  - $x \neq 0$

    $\forall x \neq 0 \to f(x)$ является дифференцируемой функцией

    $$\Rightarrow \partial f(x) = \nabla f(x) = \frac{x}{\|x\|_2}$$

  - $x = 0$

    По опр:

    $$f(x) \geq f(x_0) + \langle g, x - x_0 \rangle$$

    $$\|x\|_2 \geq \langle g, x \rangle$$

    $$\left\langle g, \frac{x}{\|x\|_2} \right\rangle \leq 1 \quad \forall x \in \mathbb{R}^n$$

    $$\langle g, e \rangle \leq 1$$

    $$\langle g, e \rangle \leq \|g\|_2 \|e\|_2 = \|g\|_2$$

    $$\partial f = \{g \mid \|g\|_2 \leq 1 \quad \forall x \in \mathbb{R}^n\}$$

- $p = \infty$

  Аналогично можно получить:

  $$\left\langle g, \frac{x}{\|x\|_\infty} \right\rangle \leq 1 \quad \forall x \in \mathbb{R}^n$$

  $$\partial f = \{g \mid \|g\|_\infty \leq 1 \quad \forall x \in \mathbb{R}^n\}$$

4

Найти $\partial f(x)$, если $f(x) = \|Ax - b\|_1^2$

Решение:

- $Ax \neq b$

  Пусть $A \in \mathbb{R}^{n \times m}, x \in \mathbb{R}^m$

  $\forall x : Ax \neq b \to f$ является дифференцируемой $\Rightarrow \partial f = \nabla f$.

  Рассмотрим f как $f(\varphi(\psi(g)))$, где

  $f(\varphi) = \varphi^2$

  $\varphi(\psi) = \psi^2,$

  $\psi(g) = \|g\|_1,$

  $g(x) = Ax - b$

  Тогда по правилу нахождения субдифференциала сложной функции:

$$\partial f = \frac{\partial f}{\partial \varphi}\frac{\partial \varphi}{\partial \psi}\frac{\partial \psi}{\partial g}\partial g$$

  Вспомогательная задача: ∇f, где $f(x) = \|x\|_1 = \sum\limits_{i=0}^{n} |x_i|$

$$\frac{\partial f}{\partial x_k} = \operatorname{sgn}(x_k)$$

$$\nabla f = \begin{pmatrix} \operatorname{sgn}(x_1) \\ \vdots \\ \operatorname{sgn}(x_n) \end{pmatrix}$$

  Также заметим, что $\|Ax - b\|_1 = \sum\limits_{i=0}^{n} \left| \sum\limits_{j=0}^{m} a_{ij}x_j - b_i \right|$

  Тогда

$$\partial f = 2\|Ax - b\|_1 A^T \begin{pmatrix} \operatorname{sgn}\left(\sum\limits_{j=0}^{m} a_{1j}x_j - b_1\right) \\ \vdots \\ \operatorname{sgn}\left(\sum\limits_{j=0}^{m} a_{nj}x_j - b_n\right) \end{pmatrix}$$

- $Ax = b$

  По опр:

$$f(x) \geq f(x_0) + \langle g, x - x_0 \rangle$$

  $x_0 = (A^T A)^{-1} A^T b$

$$\|Ax - b\|_1^2 \geq \langle g, x - (A^T A)^{-1} A^T b \rangle$$

5

Найти $\partial f(x)$, если $f(x) = e^{\|x\|}$

Рассмотрим $\|x\|_2$.

Аналогично.

- $x \neq 0$

  Пусть

  $f(g) = e^g$

  $g(x) = \|x\|_2$

$$\partial f = \frac{\partial f}{\partial g} \partial g$$

$$\partial f = e^{\|x\|_2} \frac{x}{\|x\|_2}$$

- $x = 0$

  По опр:

$$f(x) \geq f(x_0) + \langle g, x - x_0 \rangle$$
$$e^{\|x\|_2} - 1 \geq \langle g, x \rangle$$
$$\partial f = \left\{ g \middle| \left\langle g, \frac{x}{e^{\|x\|_2} - 1} \right\rangle \leq 1 \quad \forall x \in \mathbb{R}^n \right\}$$