ДЗ №6 по Теории Вероятностей

Соколов Игорь, группа 573

16 декабря 2017 г.

№ 104

Пусть в вероятностном пространстве $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}), \Omega = [0,1), \mathcal{F} - \sigma$-алгебра, содержащая полуинтервалы вида $\Omega_{in} = [(i-1)/n, i/n], i \in [1, n], n \in \mathbb{N}$ и P - мера Лебега ($\forall i, n : P\{\omega \in \Omega_{in}\} = 1/n$) Исследовать на сходимость послед случайных величин $X_1^{(1)}$,$X_2^{(1)}$,$X_2^{(2)}$,$X_3^{(1)}$,$X_3^{(2)}$,$X_3^{(3)}$,...

- **б)** $X_n^{(i)}(\omega) = \begin{cases} 1/n, & \omega \in \Omega_{in} \\ 0, & \omega \in \Omega \backslash \Omega_{in} \end{cases}$

  $X_n^{(i)}(\omega) = \begin{cases} 1/n, & p = 1/n \\ 0, & p = 1 - 1/n \end{cases}$

  1. в среднеквадратичном:

     $$\mathbb{E}|X_n|^2 = \frac{1}{n^2} \cdot \frac{1}{n} + 0 \cdot \left(1 - \frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n^3} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$$

     $\Rightarrow \exists$ сходимость в среднеквадратичном $\Rightarrow \exists$ сходимость по вероятности $\Rightarrow \exists$ сходимость по распределению

  2. почти наверное

     $$P\left\{\omega \mid \frac{1}{n} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0\right\} = 1$$

     $\Rightarrow$ есть сходимость п.н.

- **в)** $X_n^{(i)}(\omega) = \begin{cases} n, & \omega \in \Omega_{in} \\ 1/n, & \omega \in \Omega \backslash \Omega_{in} \end{cases}$

  $X_n^{(i)}(\omega) = \begin{cases} n, & p = 1/n \\ 1/n, & p = 1 - 1/n \end{cases}$

  Видно, что $X_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} X = \begin{cases} 1, & p = 0 \\ 0, & p = 1 \end{cases}$

  1. по распределению:

     Приведем следующие теоремы:

– *$F_n \to F \Leftrightarrow \varphi_n(t) \to \varphi(t)$ при каждом t, где $\varphi(t)-$х.ф., соответствующая F(сходимость по распределению эквивалентна сходимости характеристических функций)*

– *Пусть $\varphi_n(t)$ - последовательность характеристических функций: $\varphi_n(t) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \varphi(t)$ при каждом t. Тогда следующие условия эквивалентны:*

(a) $\varphi(t)$ является х.ф.;

(b) $\varphi(t)$ непрерывна в точке $t=0$.

$\varphi_{X_n}(t) = \mathbb{E}e^{itX_n} = e^{itn}\cdot\frac{1}{n} + e^{i\frac{t}{n}}\cdot\left(1-\frac{1}{n}\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1 = \varphi_X(t)$

$\varphi_X(t)$ непрерывна в нуле $\Rightarrow \varphi_X(t)$ - х.ф.(по сформулированной выше теореме)

$\varphi_X(t)$ есть х.ф. случайной величины $X=0$ с вероятностью $p=1$

$\Rightarrow\varphi_X(t)$ есть х.ф. F

$\exists$ сходимость по распределению

Так как ранее было получено, что $X_n \to 0$(к константе), то в данном случае из сходимости по распределению будет следовать сходимость по вероятности.

2. почти наверное:

$$P\left\{\omega \mid X_n \to 0\right\} = 1$$

$\nexists$ сходимость п.н.

3. в среднеквадратичном: $\mathbb{E}|X_n - X|^2 = \mathbb{E}|X_n|^2 = n^2\frac{1}{n} + \frac{1}{n}\left(1-\frac{1}{n}\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \infty$

$\nexists$ сходимость в среднеквадратичном.

- **г)**

$X_n^{(i)}(\omega) = \begin{cases} 1/n, & \omega\in\Omega_{in} \\ 1-1/n, & \omega\in\Omega\backslash\Omega_{in} \end{cases}$

$X_n^{(i)}(\omega) = \begin{cases} 1/n, & p=1/n \\ 1-1/n, & p=1-1/n \end{cases}$

1. по распределению: Аналогично пользуемся аппаратом х.ф.

$\varphi_{X_n}(t) = \mathbb{E}e^{itX_n} = e^{it\frac{1}{n}}\cdot\frac{1}{n} + e^{it\left(1-\frac{1}{n}\right)}\cdot\left(1-\frac{1}{n}\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} e^{it} = \varphi_X(t)$

Получили х.ф. случайной величины $X=1$ с вероятностью $p=1$

Аналогично имеет место сходимость по распределению.

Так как X_n сходится к константе, то $\exists$ сходимость по вероятности

2. в среднеквадратичном: $\mathbb{E}|X_n-1|^2 = \left(1-\frac{1}{n}\right)^2\frac{1}{n} + \left(1-\frac{1}{n}\right)\left(\frac{1}{n}\right)^2 = \left(1-\frac{1}{n}\right)\frac{1}{n} \to 0$

$\exists$ сходимость в среднеквадратичном.

3. почти наверное:

$$P\left\{\omega \mid X_n \to 1\right\} = 1$$

$\exists$ сходимость п.н.

№ 121

Случайные величины $X_1, \dots, X_n$ независимы и имеют распределение Коши

$$f(x) = \frac{d}{\pi(d^2 + x^2)}$$

Докажите равенство распределений X_1 и $\frac{X_1 X_1 + X_2 + \dots + X_n}{n}$. Противоречит ли это ЗБЧ или ЦПТ?

Доказательство. ЗБЧ и ЦПТ требуют существование конечного первого момента, но распределение Коши не имеет моментов $\Rightarrow$ не может быть использовано в данном случае.

Докажем равенство распределений через равенство х.ф.

Известно, что х.ф. для распределение Коши выражается так:

$$\varphi_{X_1} = e^{-d|t|}$$

$$\varphi_{\frac{\sum\limits_{j=1}^{n} X_j}{n}} = \mathbb{E}e^{i\frac{\sum\limits_{j=1}^{n} X_j}{n}t} = \prod_{j=1}^{n} \varphi_{X_j}\left(\frac{t}{n}\right) = \left[\varphi_{X_1}\left(\frac{t}{n}\right)\right]^n = \left[e^{-d|\frac{t}{n}|}\right]^n = e^{-d|t|} = \varphi_{X_1}(t)$$

Второе и третье равенства верны так как случайные величины независимы и из одного распределения.

Получили равенство х.ф. $\Rightarrow$ равенство распределений. $\square$