ДЗ по Теории Вероятностей к семинару №8.

Соколов Игорь, группа 573

12 ноября 2017 г.

1

Доказать следующие утверждения:

1. х.ф - равномерно непрерывная функция

   Доказательство. Нам понадобится **теорема о мажорируемой последовательности**: *Если* $\xi_n \underset{p}{\to} \xi$ *и* $|\xi_n| < \eta, \mathbb{E}\eta < \infty$, *то существует* $\mathbb{E}\xi$ *и* $\mathbb{E}|\xi_n - \xi| \to 0$

   $$|\varphi(t+h)-\varphi(t)| = |\mathbb{E}(e^{i(t+h)\xi}-e^{it\xi})| = |\mathbb{E}[(e^{it\xi})(e^{ih\xi}-1)]| = |\mathbb{E}(e^{it\xi})\mathbb{E}(e^{ih\xi}-1)| \leq |\mathbb{E}(e^{ih\xi}-1)| \to 0 \quad (1)$$

   по теореме о мажорируемой последовательности так как
   $|e^{ih\xi} - 1| \underset{p}{\to} 0$ при $h \to 0, |e^{ih\xi} - 1)| \leq 2$ □

2. $\overline{\varphi}_\xi(t) = \varphi_\xi(-t) = \varphi_{-\xi}(t)$

   Доказательство. $\overline{\varphi}_\xi(t) = \overline{\mathbb{E}e^{it\xi}} = \mathbb{E}\overline{e^{it\xi}} = \mathbb{E}e^{-it\xi} = \varphi_\xi(-t) = \varphi_{-\xi}(t)$ □

3. Если х.ф. интегрируема на всей действительной оси, то существует плотность соответствующей случайной величины и выполнено:

   $$f(x) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-itx}\varphi(t)dt$$

   Доказательство. (a) Сначало установим вспомогательное равенство:

   $$\forall\varepsilon \to p_\varepsilon(t) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{itu}\varphi(u)e^{-\varepsilon^2u^2/2}du \equiv \frac{1}{\sqrt{2\pi}\varepsilon}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \exp\left\{-\frac{(u-t)^2}{2\varepsilon^2}\right\}F(du) \quad (2)$$

   где F - распределение ξ.

Исходным является равенство

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\exp\left\{ix\frac{\xi-t}{\varepsilon}-\frac{x^2}{2}\right\}dx=\exp\left\{-\frac{(\xi-t)^2}{2\varepsilon^2}\right\} \tag{3}$$

В обеих частях стоит х.ф. стандартного нормального распределения в точке $(\xi-t)/\varepsilon$. Сделав замену $x=\varepsilon u$, левая часть этого равенства можно записать в виде

$$\frac{\varepsilon}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\exp\left\{iu(\xi-t)-\frac{\varepsilon^2u^2}{2}\right\}du$$

Взяв, математическое ожидание от обеих частей (3), получаем

$$\frac{\varepsilon}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}e^{-itu}\varphi(u)e^{-\varepsilon^2u^2/2}du=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\exp\left\{-\frac{(u-t)^2}{2\varepsilon^2}\right\}F(du)$$

Что доказывает равенство (2).

(b) Для доказательства исходной теоремы рассмотрим сначала левую часть равенства (2). Так как $e^{-\varepsilon^2u^2/2}\to 1$ при $\varepsilon\to 0, |e^{-\varepsilon^2u^2/2}|\le 1$ и $\varphi(u)$ интегрируема, то

$$p_\varepsilon(t)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}e^{-itu}\varphi(u)du=p_0(t) \tag{4}$$

при $\varepsilon\to 0$ равномерно по t, так как интеграл в левой части (2) равномерен по t. Отсюда также следует, что

$$\int\limits_a^b p_\varepsilon(t)dt\to\int\limits_a^b p_0(t)dt. \tag{5}$$

Рассмотрим левую часть равенства(2). Она представляет собой суммы $\xi+\varepsilon\eta$, где ξ и η независимы и η из стандартного нормального распределения. Поэтому

$$\int\limits_a^b p_\varepsilon(t)dt=\mathbb{P}(a<\xi+\varepsilon\eta\le b). \tag{6}$$

Так как $\xi+\varepsilon\eta\underset{p}{\to}\xi$ при $\varepsilon\to 0$ и $\forall a,b$ (фиксированных) предел $\int\limits_a^b p_\varepsilon(t)dt$ существует по полученному следствию (5), то (6) может быть только $F\left([a,b)\right)$

Из (5) и (6) получаем

$$\int\limits_a^b p_0(t)dt=F\left([a,b)\right) \tag{7}$$

Получаем, что распределение F имеет плотность $p_0(t)$ определяемую соотношением (4).

Ограниченность $p_0(t)$ следует из интегрируемости φ:

$$p_0(t) \le \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} |\varphi(t)|dt < \infty \tag{8}$$

□

2

Является ли $f(t)$ характеристической функцией

1. $f(t) = \exp(-t^4)$

   Доказательство. Предположим, что $f(t)$ является характеристической.

   Воспользуемся следующими теоремами из Боровкова (стр 152 -153):

   - *Если существует конечный k-й момент($k \ge 1$), то существует непрерывная k-я производная $\varphi^{(k)}(0)$ и $\varphi^{(k)}(0) = i^k \mathbb{E}\xi^k$*
   - *Если производная четного $\varphi^{(2k)}$ существует, то $\mathbb{E}|\xi^{2k}| < \infty$ и $\varphi^{(2k)} = (-1)^k \mathbb{E}\xi^{2k}$*

   Таким образом $\mathbb{E}\xi = -4t^3 \exp(-t^4)\Big|_{t=0} = 0$

   И $\mathbb{D}\xi = \mathbb{E}(\xi - \mathbb{E}\xi)^2 = \mathbb{E}\xi^2 = 0$

   Такие мат ожидание и дисперсия соответствуют случайной величине $\xi = \begin{cases} 0, & p = 1 \\ 1, & p = 0 \end{cases}$

   Но для $\varphi_\xi(t) = \mathbb{E}e^{it\xi} = \mathbb{E}1 = 1 \ne f(t)$

   Получили противоречие.

   $\Rightarrow f(t)$ **не является характеристической**. □

2. $f(t) = \dfrac{1}{1+t}$

   Доказательство. Это действительная функция, но она не является чётной. Свойство $\overline{\varphi}_\xi(t) = \varphi_\xi(-t) = \varphi_{-\xi}(t)$ не выполнено.

   $\Rightarrow f(t)$ **не является характеристической**. □

3. $f(t) = \dfrac{1}{1+it^2}$

Доказательство.

$$f(t) = \frac{1}{1+it^2} = \frac{1-it^2}{1+t^4} = \frac{1}{1+t^4} - i\frac{t^2}{1+t^4}$$

$$\overline{f}(t) = \frac{1}{1+t^4} + i\frac{t^2}{1+t^4}$$

Видно, что $\overline{f}(t) \neq f(-t)$

$\Rightarrow f(t)$ **не является характеристической**. $\square$

4. $f(t) = 1 + \cos t$

   Доказательство. При $t = 0 \to f(0) = 1 + \cos(0) = 2 > 1$, что противоречит свойству $\forall t \to |f(t)| \leq 1$

   $\Rightarrow f(t)$ **не является характеристической**. $\square$

5. $f(t) = \frac{1}{2}\cos^2 t 2^{\cos t}$

6. $f(t) = \begin{cases} 1 - t & |t| \leq 1 \\ 0 & \text{иначе} \end{cases}$

   Доказательство.
   - Функция действительного переменного, не являющаяся четной;
   - Разрыв в точке $-t \Rightarrow$ не является равномерно непрерывной.

   $\Rightarrow f(t)$ **не является характеристической**.

   $\square$