ДЗ к семинару №3-4 по Теории Вероятностей.

Соколов Игорь, группа 573

12 октября 2017 г.

1

Показать, что из независимости событий A и B следует независимость событий $\overline{A}$ и B, A и $\overline{B}$, $\overline{A}$ и $\overline{B}$.

Доказательство. Обозначение: $A \cap B = AB$

По условию : $\mathbb{P}(AB) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)$

1) Из свойств вероятности имеем:

$$\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(AB) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)$$

$$A \cup B = A \cup (B \backslash AB)$$

$$\Rightarrow \mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A \cup (B \backslash AB)) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B \backslash AB) - \mathbb{P}(AB \backslash AB)$$

$$\mathbb{P}(AB \backslash AB) = \mathbb{P}(\varnothing) = 0$$

$$\Rightarrow \mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B \backslash AB) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(AB)$$

Доказали, что

$$\mathbb{P}(B \backslash AB) = \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(AB)$$

$$\mathbb{P}(\overline{A}B) = \mathbb{P}((\Omega \backslash A)B) = \mathbb{P}(\Omega B \backslash AB) = \mathbb{P}(B \backslash AB) = \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(AB) = \mathbb{P}(B)(1 - \mathbb{P}(A)) = \mathbb{P}(\overline{A})\mathbb{P}(B) \quad (1)$$

2) Аналогично:

$$\mathbb{P}(A\overline{B}) = \mathbb{P}(A(\Omega \backslash B)) = \mathbb{P}(\Omega A \backslash AB) = \mathbb{P}(A \backslash AB) = \mathbb{P}(A) - \mathbb{P}(AB) = \mathbb{P}(A)(1 - \mathbb{P}(B)) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(\overline{B}) \quad (2)$$

3)

$$\mathbb{P}(\overline{A}\overline{B}) = \mathbb{P}(\overline{A}(\Omega \backslash B)) = \mathbb{P}(\Omega\overline{A} \backslash \overline{A}B) = \mathbb{P}(\overline{A} \backslash \overline{A}B) = \mathbb{P}(\overline{A}) - \mathbb{P}(\overline{A}B) = \mathbb{P}(\overline{A})(1 - \mathbb{P}(B)) = \mathbb{P}(\overline{A})\mathbb{P}(\overline{B}) \quad (3)$$

При доказательстве использовали $\mathbb{P}(\overline{A}B) = \mathbb{P}(\overline{A})P(B)$

$\square$

2

Подбрасываются три игральные кости. События A, B и C означают выпадение одинакового числа очков (соответственно) на первой и второй, на второй и третьей, на первой и третьей костях. Являются ли эти события независимыми

a)Попарно.

b)В совокупности.

Решение:

$\Omega = \{(a_1,a_2,a_3), a_i \in [1,6], i \in [1,3]\}$ - цепочки из трех элементов, где $i-$ номер кости.

$|\Omega| = 6^3$

a)

В событие A у нас 6 способов задать $a_1 = a_2$ и 6 способов задать a_3

(считаем, что на 3-й кости может быть одинаковое число очков с первой и второй. Условие это не запрещает)

$$\mathbb{P}(A) = \frac{6^2}{6^3} = \frac{1}{6}$$

Аналогично

$$\mathbb{P}(B) = \frac{6^2}{6^3} = \frac{1}{6}$$

Событие AB означает выпадение одинакового числа на всех трех кубиках - 6 способов задать $a_1 = a_2 = a_3$

$$\mathbb{P}(AB) = \frac{6}{6^3} = \frac{1}{6^2}$$

$$\Rightarrow \mathbb{P}(AB) = \frac{1}{6^2} = \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)$$

Аналогично можно показать, что

$$\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(C)$$
$$\mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(B)\mathbb{P}(C)$$

$\Rightarrow$ **события попарно независимы**

b)

Событие ABC означает выпадение одинакового числа на всех трех кубиках - 6 способов задать $a_1 = a_2 = a_3$

$$\mathbb{P}(ABC) = \frac{6}{6^3} = \frac{1}{6^2} \neq \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)\mathbb{P}(C)$$

$\Rightarrow$ **отсутствует независимость в совокупности**

3

Известно, что в результате бросания десяти игральных костей выпала по крайней мере две «пятёрки». Какова вероятность того, что число выпавших «пятёрок» больше пяти?

Решение:

$\Omega = \{(a_1, \dots, a_10), a_i \in [1,6], i \in [1,10]\}$ - последовательности чисел из 10 элементов, где $i-$ номер кости.

$|\Omega| = 6^{10}$

Введем события:

$A = \{$выпало 2 пятерки$\}$

$B = \{$выпало больше 5 пятерок$\}$

$C_i = \{$выпало i пятерок$\}$

Надо найти:

$$\mathbb{P}(B|A) = \frac{\mathbb{P}(AB)}{\mathbb{P}(A)} = \frac{\mathbb{P}(B)}{\mathbb{P}(A)} = \frac{1 - \mathbb{P}(\overline{B})}{\mathbb{P}(A)}$$

где $\overline{B} = \{$выпало меньше или равно 5 пятерок$\}$.

Рассмотрим знаменатель:

C_{10}^2 - количество способов зафиксировать две пятерки в последовательности из 10 элементов.

5^8 - количество способов задать все остальные элементы (имеем в виду, что "5"больше не встречается)

Получаем: $\mathbb{P}(A) = \dfrac{C_{10}^2 \cdot 5^8}{6^{10}}$

Рассмотрим числитель:

$\mathbb{P}(\overline{B}) = \mathbb{P}(C_0) + \dots + \mathbb{P}(C_5)$

Аналогичными рассуждениями получаем:

$\mathbb{P}(\overline{B}) = \dfrac{C_{10}^0 5^{10}}{6^{10}} + \dfrac{C_{10}^1 5^9}{6^{10}} + \dots + \dfrac{C_{10}^5 5^5}{6^{10}} = 0.9976$

$$\mathbb{P}(B|A) = \frac{0.0024}{0.291} = 0.0083$$

Ответ: $\mathbb{P}(B|A) = 0.0083$

4

За тремя дверями находится две козы и автомобиль. Вы выбираете одну дверь, затем ведущий открывает другую дверь, за которой находится коза. После этого вы можете поменять свой выбор. Найти вероятность того, что вы выиграете, если измените выбор.

Решение:

1)Будем считать, что ведущий знает, где находится автомобиль.

Пронумеруем двери для удобства. На вероятностном пространстве это не отразится.
Пусть вначале я выбрал дверь 1.
Ведущий открыл 3.
Рассмотрим следующие события:
$Y_i = \{$я выбираю дверь $i\}$
$H_i = \{$ведущий открывает дверь $i\}$
$C_i = \{$автомобиль находится за дверью $i\}$
$G_i = \{$коза находится за дверью $i\}$

Из условия задачи понятно, что надо подсчитать вероятность $\mathbb{P}(C_2|Y_1H_3G_3)$.
Найдем вначале

$$\mathbb{P}(C_1|Y_1H_3G_3) = \frac{\mathbb{P}(C_1H_3G_3|Y_1)\mathbb{P}(Y_1)}{\mathbb{P}(H_3G_3|Y_1)\mathbb{P}(Y_1)} = \frac{\mathbb{P}(C_1H_3G_3|Y_1)}{\mathbb{P}(H_3G_3|Y_1)}$$

Так как ведущий знает, где находится автомобиль, то $H_3 \subseteq G_3$
(он открывает дверь 3 только если за ней коза)) и $G_1H_3Y_1 = G_1G_3Y_1$
(то есть если я выбираю дверь 1, за которой находится коза, то он открывает дверь 3 всякий раз, когда за ней находится коза)
Также имеем $\mathbb{P}(C_1|Y_1) = 1/3$ и $\mathbb{P}(H_3|Y_1C_1) = 1/2$ в силу симметрии.
В этом случае $\mathbb{P}(C_1H_3G_3|Y_1) = \mathbb{P}(C_1H_3|Y_1) = \mathbb{P}(C_1Y_1)\mathbb{P}(H_3|Y_1C_1) = \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2} = \frac{1}{6}$.
С другой стороны $\mathbb{P}(H_3G_3|Y_1) = \mathbb{P}(H_3|Y_1) = \mathbb{P}((G_1+C_1)H_3|Y_1) = \mathbb{P}(G_1H_3|Y_1)+\mathbb{P}(C_1H_3|Y_1) =$

$$= \frac{\mathbb{P}(G_1H_3Y_1)}{\mathbb{P}(Y_1)} + \frac{1}{6} = \frac{\mathbb{P}(G_1G_3Y_1)}{\mathbb{P}(Y_1)} + \frac{1}{6} = \mathbb{P}(C_2|Y_1) + \frac{1}{6} = \frac{1}{3} + \frac{1}{6} = \frac{1}{2}$$

Таким образом $\mathbb{P}(C_1|Y_1H_3G_3) = \frac{1/6}{1/2} = \frac{1}{3}$
$\mathbb{P}(C_2|Y_1H_3G_3) = 1 - P(C_2|Y_1H_3G_3) = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$
Получаем, что если я изменю решение, то вероятность возрастет.

2) Предположим, ведущий не знает, где находится автомобиль.
Тогда события C_1, Y_1 и H_3 независимы и в силу симметрии получаем:
$\mathbb{P}(C_1|Y_1H_3G_3) = \mathbb{P}(C_2|Y_1H_3G_3) = \frac{1}{2}$
Ответ: 1) 2/3; **2)** 1/2

5

На заводе, изготавливающем болты, на долю машин A, B, C приходятся соответственно 25, 35, 40% изделий. В их продукции брак составляет соответственно 5, 4, 2%. Случайно выбранный болт оказался деффектным. Каковы вероятности того, что он был изготовлен соответственно на машине A, B, C?

Решение:
Рассмотрим следующие события:
$A = \{$болт изготовлен на машине А$\}$

$B = \{$болт изготовлен на машине B$\}$
$C = \{$болт изготовлен на машине C$\}$
$D = \{$встретился бракованный болт$\}$
Из условий имеем
$\mathbb{P}(D|A) = 0.05$
$\mathbb{P}(D|B) = 0.04$
$\mathbb{P}(D|C) = 0.02$
$\mathbb{P}(A) = 0.25$
$\mathbb{P}(B) = 0.35$
$\mathbb{P}(C) = 0.40$
Напишем формулу полной вероятности:

$$P(A|D) = \frac{P(D|A) \cdot P(A)}{P(D|A) \cdot P(A) + P(D|B) \cdot P(B) + P(D|C) \cdot P(C)}$$

Знаменатель равен : $0.05 \cdot 0.25 + 0.04 \cdot 0.35 + 0.02 \cdot 0.40 = \frac{69}{2000}$

1. Для машины A:

$$P(A|D) = \frac{0.05 \cdot 0.25}{69/2000} = 0.36$$

2. Для машины B:

$$P(A|D) = \frac{0.04 \cdot 0.35}{69/2000} = 0.41$$

3. Для машины C:

$$P(A|D) = \frac{0.02 \cdot 0.40}{69/2000} = 0.23$$