ДЗ по Теории Вероятностей к семинару №7.

Соколов Игорь, группа 573

8 ноября 2017 г.

1

Найти функцию и плотность распределения суммы двух независимых случайных величин, которые распределены равномерно на отрезке [0, 1].

Решение:
$\eta = \xi_1 + \xi_2$

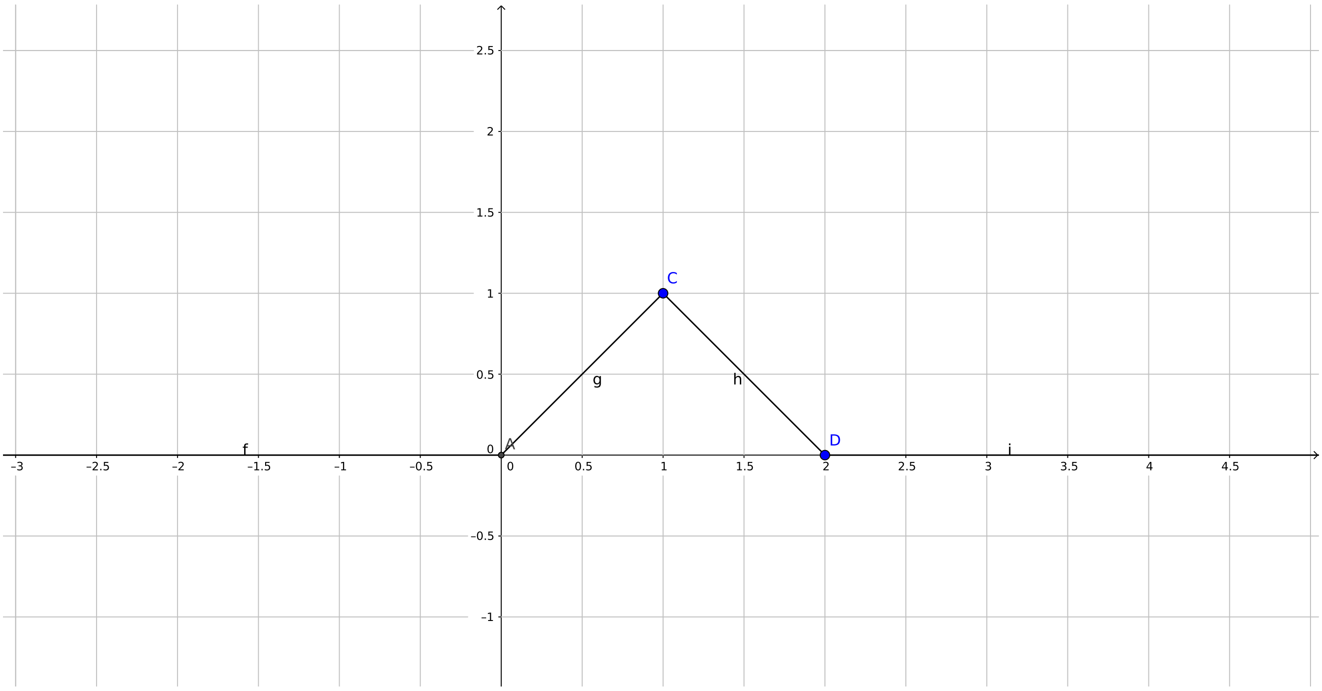
$$F_\eta(u) = \mathbb{P}(\xi_1 + \xi_2 < u) = \iint\limits_{x_1+x_2} f_{\xi_1,\xi_2}(x_1,x_2) = \int\limits_{-\infty}^{u} dy_2 \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f_{\xi_1,\xi_2}(y_1,y_2 - y_1)dy_1 \tag{1}$$

$$f_{\xi_1,\xi_2}(u) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f_{\xi_1,\xi_2}(y, u - y)dy \tag{2}$$

Получили формулу свертки.
Если ξ_1 и ξ_2 независимы, то справедливо

$$f_{\xi_1,\xi_2}(x) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f_{\xi_1}(y) f_{\xi_2}(x - y)dy = \begin{cases} 0, & x \notin [0;2] \\ x, & x \in [0;1] \\ 2 - x, & x \in [1;2] \end{cases} \tag{3}$$

График $f_\eta(x)$

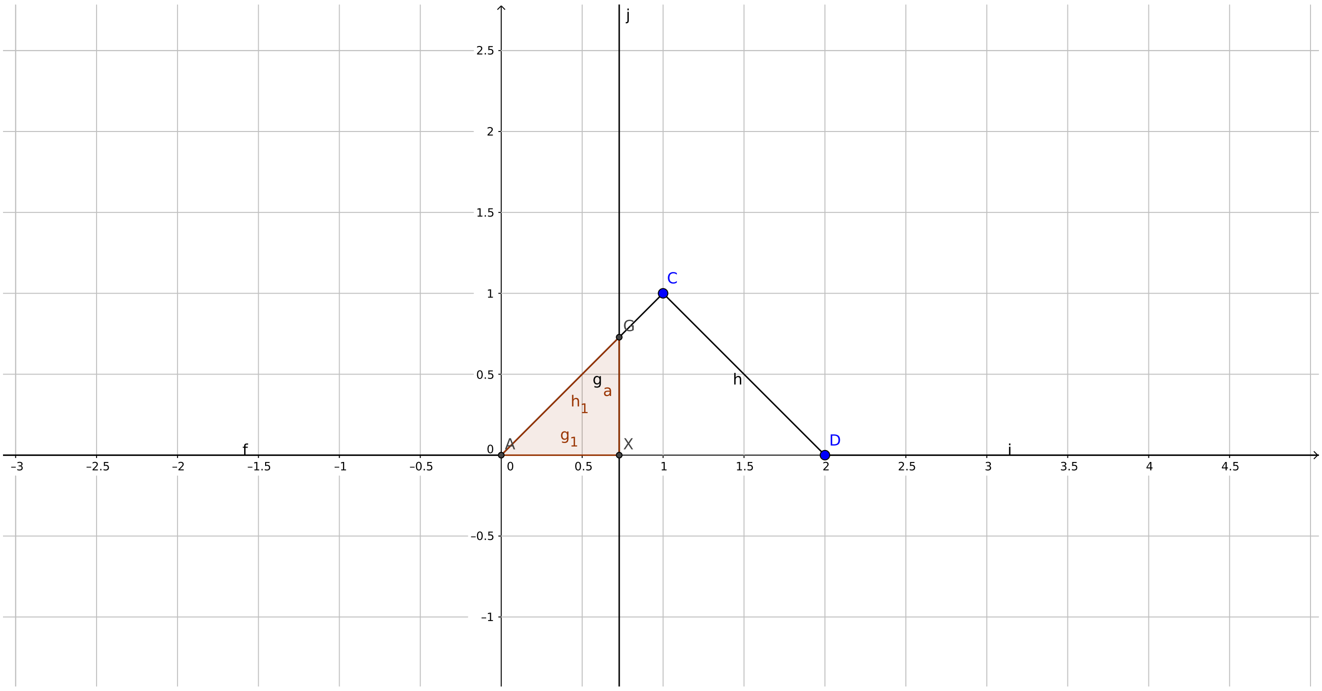


По опр

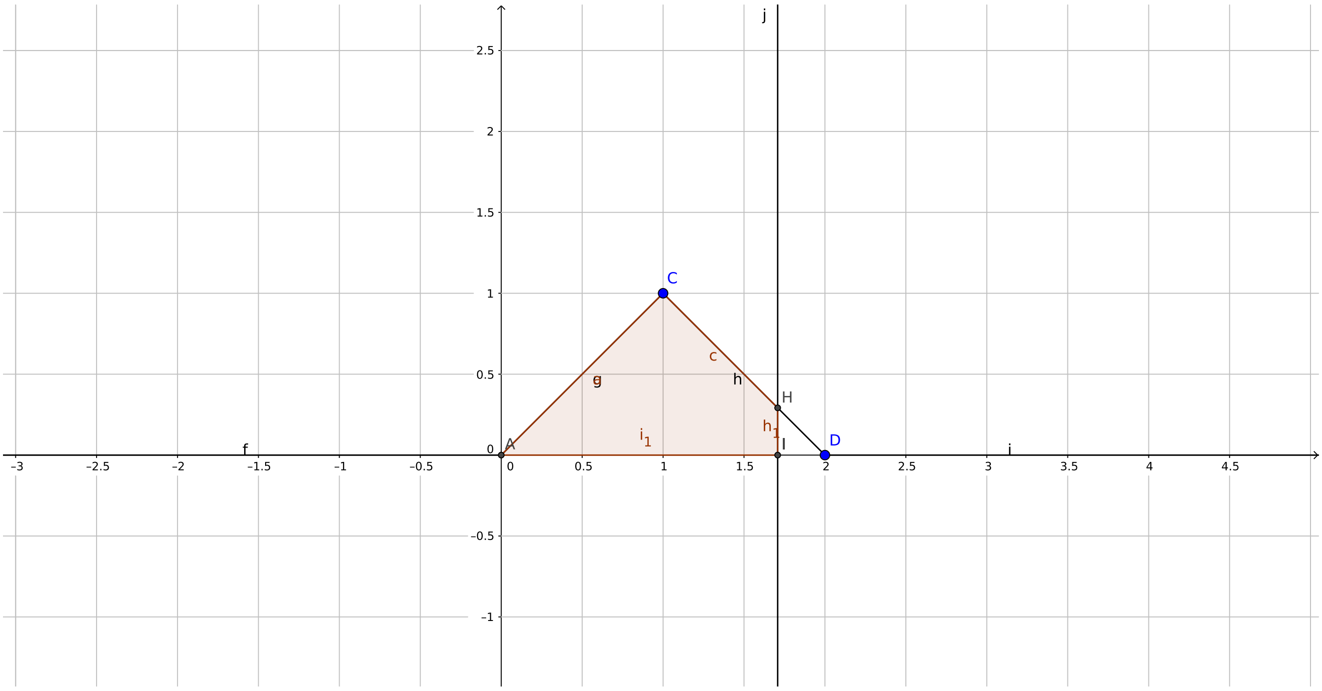
$$F_\eta(x) = \int\limits_{-\infty}^{x} f_\eta(y)dy \tag{4}$$

Найдем функцию распределения геометрически, посчитав площадь под графиком функции плотности.

Рассмотрим различные случаи:



$x \in [0; 1]$



$x \in [1; 2]$
Итого получаем:

$$F_\eta(x) = \begin{cases} 0, & x \notin [0; 2] \\ \dfrac{x^2}{2}, & x \in [0; 1] \\ 1 - \dfrac{(2-x)^2}{2}, & x \in [1; 2] \end{cases} \tag{5}$$

Ответ:

$$f_{\xi_1+\xi_2}(x) = \begin{cases} 0, & x \notin [0; 2] \\ x, & x \in [0; 1] \\ 2 - x, & x \in [1; 2] \end{cases}$$

$$F_{\xi_1+\xi_2}(x) = \begin{cases} 0, & x \notin [0; 2] \\ \dfrac{x^2}{2}, & x \in [0; 1] \\ 1 - \dfrac{(2-x)^2}{2}, & x \in [1; 2] \end{cases}$$