ДЗ по Теории Вероятностей к семинару №6.

Соколов Игорь, группа 573

6 ноября 2017 г.

1

Показать, что если случайные величины X_1 и X_2 независимы и имеют нормальное распределение с математическими ожиданиями μ_1 и μ_2 и дисперсиями σ_1^2 и σ_2^2 соответственно, то $X_1 + X_2$ также имеет нормальное распределение с математическим ожиданием $\mu_1 + \mu_2$ и дисперсией σ_1^2 и σ_2^2 .

Решение:

1. Приведем доказательство линейности мат. ожидания в общем случае для произвольного распределения. $\Rightarrow$ для нормального это свойство выполнится.

$$EX_1 + EX_2 = \int\limits_{\mathbb{R}} x f_x(x)dx + \int\limits_{\mathbb{R}} y f_y(y)dy$$

где $f_x(x), f_y(y)-$ плотности распределения случайных величин X_1, X_2 соответственно

Рассмотрим функцию совместного распределения $F_{xy}(x,y) = P(x < a, y < b)$

Для непрерывного распределения верно: $f_x(x) = \int\limits_{\mathbb{R}} x f_{xy}(y, x)dy$.

$\Longrightarrow$

$$EX_1 + EX_2 = \int\limits_{\mathbb{R}} x f_x(x)dx + \int\limits_{\mathbb{R}} y f_y(y)dy = \int\limits_{\mathbb{R}} x \left[\int\limits_{\mathbb{R}} x f_{xy}(y, x)dy \right] dx +$$

$$+ \int\limits_{\mathbb{R}} y \left[\int\limits_{\mathbb{R}} x f_{xy}(x, y)dx \right] dy = \int\limits_{\mathbb{R}} \int\limits_{\mathbb{R}} (x + y) f_{xy}(x, y)dxdy = E(X_1 + X_2)$$

$\Longrightarrow E(X_1 + X_2) = EX_1 + EX_2 = \mu_1 + \mu_2$

2) Проведем абсолютно аналогичные рассуждения для дисперсии

$$DX = EX^2 - (EX)^2$$

$$DX_1 + DX_2 = \int\limits_{\mathbb{R}} x^2 f_x(x)dx - \left(\int\limits_{\mathbb{R}} x f_x(x)dx\right)^2 + \int\limits_{\mathbb{R}} y^2 f_y(y)dy - \left(\int\limits_{\mathbb{R}} y f_y(y)dy\right)^2 =$$

$$= \int\limits_{\mathbb{R}} x^2 \left[\int\limits_{\mathbb{R}} f_{xy}(y,x)dy\right] dx + \int\limits_{\mathbb{R}} y^2 \left[\int\limits_{\mathbb{R}} f_{xy}(x,y)dx\right] dy - \int\limits_{\mathbb{R}} x \left[\int\limits_{\mathbb{R}} x f_{xy}(y,x)dy\right] dx$$

2

Показать, что если $\mathbb{E}|\xi| < \infty$, то $\forall a > 0 \to P\left(|\xi| \geq a\right) \leq \frac{\mathbb{E}|\xi|}{a}$

Доказательство.

$$\mathbb{E}|\xi| = \int\limits_0^{+\infty} x dF(x) \geq \int\limits_a^{+\infty} x dF(x) \geq a \int\limits_a^{+\infty} dF(x) = a\mathbb{P}(|\xi| \geq a)$$

$$\Rightarrow \frac{\mathbb{E}|\xi|}{a} \geq \mathbb{P}(|\xi| \geq a)$$

$\square$

3

Вычислить k-ый момент для стандартного($\mu = 0, \sigma^2 = 1$) нормального распределения.

Решение:

$$E\xi = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{x^k}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(\frac{-x^2}{2}\right) dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} -x^{k-1} \cdot d\left[\exp\left(\frac{-x^2}{2}\right)\right] \xrightarrow{\text{(по частям)}} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}(-x^{k-1}) \cdot \exp\left(\frac{-x^2}{2}\right)\Bigg|_{-\infty}^{\infty} - \quad \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} (k-1)(-x^{k-2}) \cdot \exp\left(\frac{-x^2}{2}\right) dx =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}(-x^{k-1}) \cdot \exp\left(\frac{-x^2}{2}\right)\Bigg|_{-\infty}^{\infty} - \quad \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} (k-1)(x^{k-3}) \cdot d\left[\exp\left(\frac{-x^2}{2}\right)\right] \xrightarrow{\text{(по частям)}}$$
$$\cdots \text{и так далее} \quad (1)$$

В зависимости от числа k, будем получать разные ответы:

1) k-нечетное:
   Тогда (1) $=0$, так как все члены четные.

2) k -четное:
   Тогда все члены без интегралла уйдут(они равны 0).

   Получаем:
$$\frac{-1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \int\limits_{-\infty}^{\infty} (k-1)(k-3)\cdots d\left[\exp\left(\frac{-x^2}{2}\right)\right] = \sigma^p(k-1)!!$$

4

Пусть X_n - количество чисел, не изменивших свои позиции при случайной перестановке элементов множества $1, \dots, n$. Найдите дисперсию X_n.

Решение:

Пусть
$\Omega-$ множество всех равновероятных перестановок.
$$\xi_i(\omega) = \begin{cases} 1 & i\text{-ый элемент остался на месте} \\ 0 & i\text{-ый элемент поменял свою позицию} \end{cases}$$

$$\Rightarrow$$

$\Rightarrow \Omega$ состоит из всевозможных последовательностей длины n из нулей и единиц.
Число перестановок, в которых i-ый элемент остался на месте - $(n-1)!$.

$$\Rightarrow \mathbb{P}(xi_i = 1) = \frac{(n-1)!}{n!} = \frac{1}{n}$$

Видно что введенная нами случайная величина имеет Биномиальное распределение.
Тогда имеем
$$\mathbb{E}\xi = np = n \cdot \frac{1}{n}$$
где p - вероятность успеха.
$$\mathbb{D}\xi = npq = np(1-p) = \frac{n-1}{n}$$

Ответ: $\mathbb{D}\xi = \dfrac{n-1}{n}$

5

Какова вероятность того, что в случайном графе на 4 вершинах с вероятностью проведения ребра $\frac{2}{3}$ нет треугольников?

Решение:

$n = 4$ по условию.

$V = \{V_1, \ldots, V_n\}$
$E = \{e_1, \ldots, e_{C_n^2}\}$

$$\mathbb{P}\{\text{в графе } k \text{ ребер }\} = \mathbb{P}\{|E| = k\} = C_{C_n^2}^k p^k (1-p)^{C_n^2 - k}$$

C_n^3– число «троек» ребер в графе.

$$\mathbb{P}\{\text{в графе } k \text{ треугольников }\} = C_{C_n^3}^k p^{3k} (1-p)^{C_n^3 - 3k}$$

$$\Rightarrow \mathbb{P}\{\text{в графе } 0 \text{ треугольников }\} = (1-p)^{C_4^3} = \left(1 - \frac{2}{3}\right)^4 = \frac{1}{3^4} = 0.012$$

Ответ: 0.012