

ДЗ по Теории Вероятностей к семинару №5.

Соколов Игорь, группа 573

12 октября 2017 г.

1

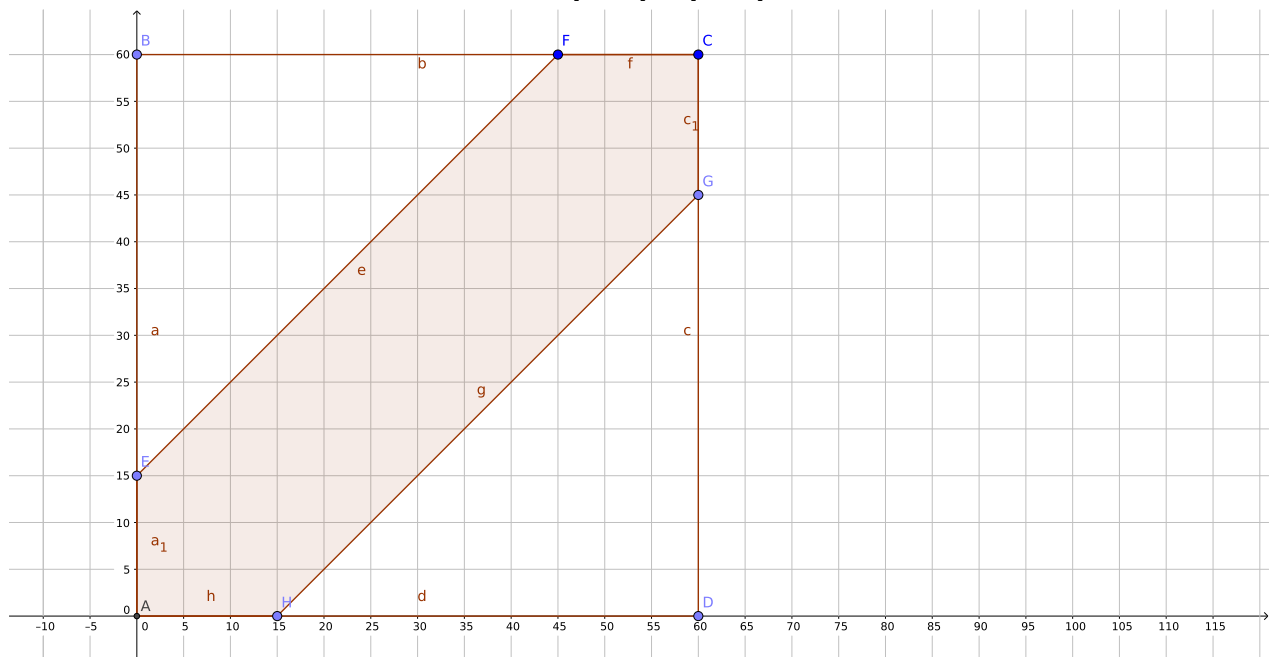
Двое условились о встрече между 9 и 10 часами утра, причем договорились ждать друг друга не более 15 минут. Считая, что момент прихода на встречу каждым выбирается «наудачу» в пределах указанного часа, найти вероятность того, что встреча состоится.

Решение:

Введем событие:

$A = \{\text{встреча состоялась}\}$.

Моменты появления участников представимы в виде двумерного вектора (t_1, t_2) , равномерно распределенного на квадрате $\tilde{S} = [0, 60] \times [0, 60]$.



Условие встречи: $|t_1 - t_2| \leq 15$ (попадание точки в закрашенную область)

$$\text{Поэтому, } \mathbb{P}(A) = \frac{S_{AEFCGH}}{|\tilde{S}|} = \frac{1575}{3600} = 0.4375$$

Ответ: $\mathbb{P}(A) = 0.4375$

2

На плоскости, замощённой одинаковыми прямоугольниками со сторонами 10 и 20 (прямоугольники примыкают сторонами), рисуют случайную окружность радиуса 4. Найдите вероятность того, что окружность имеет общие точки ровно с тремя прямоугольниками.

Решение:

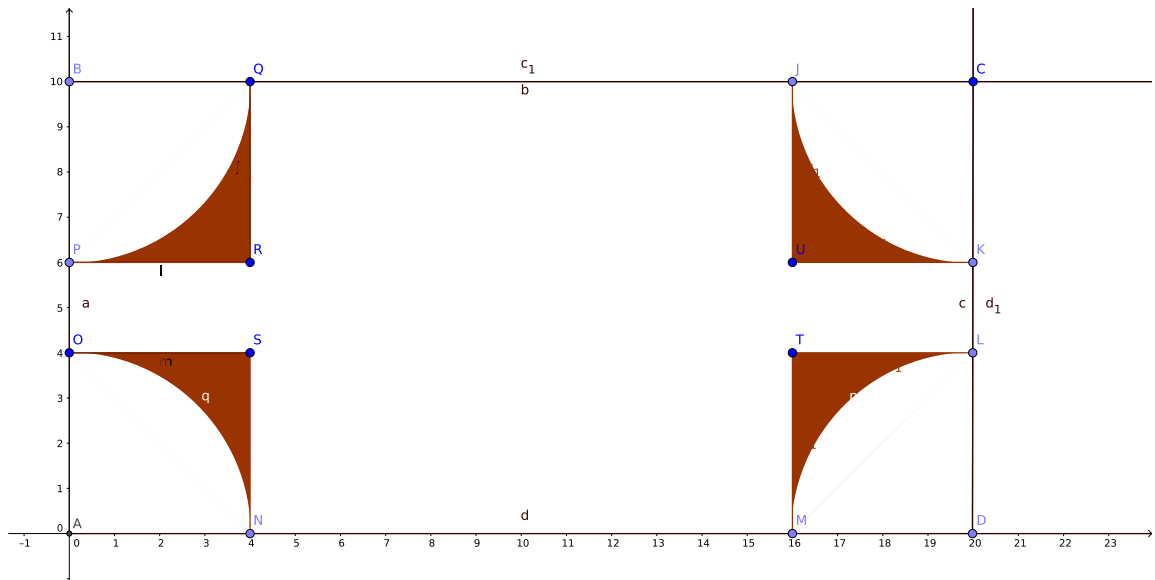
Ясно, что рассуждения можно провести в рамках одного прямоугольника. Зафиксируем центр окружности.

Условия пересечения ровно трех прямоугольников:

1) Расстояния от центра до двух ближайших сторон прямоугольника должны быть меньше 4;

2) Расстояние до ближайшей вершины прямоугольника должно быть больше 4;

Изобразим множество, удовлетворяющее условиям.



$$\text{Таким образом } \mathbb{P} = \frac{S_{\text{painted}}}{S_{\text{rectangle}}} = \frac{4 \cdot \left(16 - \frac{1}{4}16\pi\right)}{10 \cdot 20} = \frac{8 - 2\pi}{25}$$

$$\text{Ответ: } \mathbb{P} = \frac{8 - 2\pi}{25}$$

3

В тесто для выпечки булок с изюмом замешано n изюмин. Всего из данного теста выпечено k булок. Оценить вероятность того, что в случайно выбранной булке число изюмин находится в пределах от a до b .

Решение:

Пусть X — число изюмин в случайно выбранной булке, с биномиальным распределением $x \in \text{Bi}\left(n, \frac{1}{k}\right)$

Вероятность того, что в случайно выбранной булке число изюмин равно i :

$$P(i) = C_n^i \frac{1}{k^i} \left(1 - \frac{1}{k}\right)^{n-i}$$

Следовательно:

$$P(a \leq i \leq b) = \sum_{i=a}^b C_n^i \frac{1}{k^i} \left(1 - \frac{1}{k}\right)^{n-i} = \frac{1}{k^n} \sum_{i=a}^b C_n^i (k-1)^{n-i}$$

Ответ:

4

Московское центральное кольцо работает с 5:45 до 1:00. Интервал движения поездов «Ласточка» в час пик (7:30-11:30 и 16:00-21:00 в будние дни, 12:30-18:00 – в выходные) составляет 5 минут, в остальное время — 10 минут. Определить вероятность того, что время ожидания поезда составит менее 2 минут?

Решение:

Введем следующие события:

$C = \{\text{ожидание меньше 2 мин}\}$

$A = \{\text{час пик}\} \Rightarrow \bar{A} = \{\text{не час пик}\}$

$D = \{\text{будний день}\} \Rightarrow \bar{D} = \{\text{выходной день}\}$

Тогда надо найти:

$\mathbb{P}(C) = \mathbb{P}(C\Omega) = \mathbb{P}(CA) + \mathbb{P}(C\bar{A}) = \mathbb{P}(CAD) + \mathbb{P}(C\bar{A}D) + \mathbb{P}(C\bar{A}\bar{D}) + \mathbb{P}(C\bar{A}\bar{D})$

Где каждый из сомножителей найдем из геометрической вероятности.

Пусть τ - время ожидания.

t - время суток.

Из условия имеем:

$$\tau = \begin{cases} 5, & t \in [7:30, 11:30] \cup [16:00, 21:00] \text{ в будние, } [12:30, 18:00] \text{ в выходные} \\ 10, & t \in [5:45, 7:30] \cup [11:30, 16:00] \cup [21:00, 01:00] \text{ будние, } [5:45, 12:30] \cup [18:00, 01:00] \text{ в выходные} \end{cases}$$

Время работы метрополитена - 19.25 часов в сутки.

Поезда ходят с интервалом 5 или 10 мин.

Пассажир ожидает меньше 2 мин - множество благоприятных исходов есть последние 2 мин каждого интервала.

CAD - час пик, будни

Множество благоприятных исходов есть последние 2 мин каждого 2 минутного интервала. $\Rightarrow \frac{2}{5}$ от $[7:30, 11:30] \cup [16:00, 21:00] \Rightarrow \frac{2}{5}$ от 9 часов

$$\mathbb{P}(CAD) = \frac{9}{19.25} \cdot \frac{2}{5}$$

CAD - час пик, выходные

Множество благоприятных исходов: $\frac{2}{5}$ от $[12:30, 18:00] \Rightarrow \frac{2}{5}$ от 5.5 часов

$$\mathbb{P}(CAD) = \frac{5.5}{19.25} \cdot \frac{2}{5}$$

CAD - не час пик, будние

Множество благоприятных исходов: $\frac{2}{10}$ от $[5:45, 7:30] \cup [11:30, 16:00] \cup [21:00, 01:00] \Rightarrow \frac{2}{10}$ от 10.25 часов

$$\mathbb{P}(CAD) = \frac{10.25}{19.25} \cdot \frac{2}{10}$$

CAD - не час пик, выходные

Множество благоприятных исходов: $\frac{2}{10}$ от $[5:45, 12:30] \cup [18:00, 01:00] \Rightarrow \frac{2}{10}$ от 13.75 часов

$$\mathbb{P}(CAD) = \frac{13.75}{19.25} \cdot \frac{2}{10}$$

Итого:

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(C) &= \mathbb{P}(CAD) + \mathbb{P}(CAD) + \mathbb{P}(CAD) + \mathbb{P}(CAD) = \\ &= \frac{9}{19.25} \cdot \frac{2}{5} + \frac{5.5}{19.25} \cdot \frac{2}{5} + \frac{13.75}{19.25} \cdot \frac{2}{10} + \frac{10.25}{19.25} \cdot \frac{2}{10} = 0.55 \quad (1) \end{aligned}$$

Ответ: $\mathbb{P}(C) = 0.55$