Wyprowadzenie sformułowania wariacyjnego dla równania potencjału grawitacyjnego

Autor: Igor Swat

1. Wstęp

Dane jest równanie potencjału grawitacyjnego postaci:

$$\frac{d^2\Phi}{dx^2} = 4\pi G p(x)$$

$$\Phi(0) = 5$$

$$\Phi(3) = 4$$

$$p(x) = \begin{cases} 0, & x\epsilon[0,1] \\ 1, & x\epsilon(1,2] \\ 0, & x\epsilon(2,3] \end{cases}$$

2. Wyprowadzenie sformułowania wariacyjnego

Definiujemy przestrzeń funkcyjną V jako przestrzeń tych funkcji, których wartości w punkach x = 0 i x = 3 wynoszą 0.

Wyjściowe równanie mnożymy obustronnie przez pewną funkcję testującą z przestrzeni funkcji testujących V a następnie całkujemy (także obustronnie) po całej dziedzinie $\Omega = [0,3]$:

$$\frac{d^2\Phi}{dx^2} v(x) = 4\pi G p(x) v(x)$$

$$\int_0^3 \frac{d^2\Phi}{dx^2} v\, dx = \int_0^3 4\pi G p v\, dx$$

$$\int_0^3 \frac{d^2\Phi}{dx^2} v\, dx = \int_1^2 4\pi G v\, dx = 4\pi G \int_1^2 v\, dx$$

Całkujemy przez części pierwszą z całek w celu wyeliminowania drugiej pochodnej z równania:

$$\int_0^3 \frac{d^2\Phi}{dx^2} v\, dx = [\Phi' v]_0^3 - \int_0^3 \Phi' v'\, dx$$

$$= \Phi'(3)v(3) - \Phi'(0)v(0) - \int_0^3 \Phi' v'\, dx$$

Po wstawieniu do równania powyższej całki otrzymujemy:

$$\Phi'(3)v(3) - \Phi'(0)v(0) - \int_0^3 \Phi' v'\, dx = 4\pi G \int_1^2 v\, dx$$

Ponieważ v należy do V, to $v(3) = 0$ i $v(0) = 0$, skąd otrzymujemy:

$$-\int_0^3 \Phi' v'\, dx = 4\pi G \int_1^2 v\, dx$$

Dokonajmy shiftu warunku brzegowego Dirichleta. Ponieważ $\Phi(0) = 5$ i $\Phi(3) = 4$, to przyjmujemy:

$$\Phi(\mathrm{x}) = w(x) + \widetilde{\Phi}(x)$$

$$\widetilde{\Phi}(0) = 5$$

$$\widetilde{\Phi}(3) = 4$$

$$\widetilde{\Phi}(x) = 5 - \frac{1}{3}x$$

Stąd $w(0) = w(3) = 0, w(x) = \Phi(\mathrm{x}) - \widetilde{\Phi}(x)$. Wstawiamy powyższe warunki do równania.

$$-\int_0^3 \mathrm{w}' v'\, dx = 4\pi G \int_1^2 v\, dx + \int_0^3 \widetilde{\Phi}' v'\, dx$$

Przyjmując :

$$-\int_0^3 \mathrm{u}' v'\, dx = B(u, v)$$

$$4\pi G \int_1^2 v\, dx = L(v)$$

$$4\pi G \int_1^2 v\, dx + \int_0^3 \widetilde{\Phi}' v'\, dx = L(v) + B\big(\widetilde{\Phi}, v\big) = \bar{L}(v)$$

Otrzymujemy równanie wariacyjne postaci:

$$B(w, v) = \bar{L}(v)$$

Gdzie $v \epsilon V$.

3. Funkcje testowe

Dzielimy przedział $(0, 3)$ na N równych podprzedziałów postaci $[x_i, x_{i+1}]$ oraz definiujemy funkcje testujące postaci:

$$e_0(x) = \begin{cases} \dfrac{x_1 - x}{x_1 - x_0}, & x \epsilon [x_0, x_1) \\ 0, & x \epsilon [x_1, x_2] \end{cases}$$

$$e_i(x) = \begin{cases} \dfrac{x - x_{i-1}}{x_i - x_{i-1}}, & x \epsilon [x_{i-1}, x_i) \\ \dfrac{x_{i+1} - x}{x_{i+1} - x_i}, & x \epsilon [x_i, x_{i+1}] \end{cases} ; \quad i = 1, 2, \dots, N - 1$$

$$e_N(x) = \begin{cases} 0, & x \epsilon [x_{N-2}, x_{N-1}) \\ \dfrac{x - x_{N-1}}{x_N - x_{N-1}}, & x \epsilon [x_{N-1}, x_N] \end{cases}$$

Ponieważ jednak z każdej strony na brzegu mamy warunek Dirichleta, to funkcje e_0 i e_N mogą zostać pominięte w dalszych obliczeniach, wobec tego odpowiadające im współczynniki w_0 i w_N są równe 0.

Dalsza część rozwiązania sprowadza się do komputerowego rozwiązania układu równań w postaci macierzowej:

$$\begin{bmatrix} B(e_1, e_1) & B(e_2, e_1) & \dots & B(e_{N-1}, e_1) \\ B(e_1, e_2) & B(e_2, e_2) & \dots & B(e_{N-1}, e_2) \\ & & \dots & \\ B(e_1, e_{N-1}) & B(e_2, e_{N-1}) & \dots & B(e_{N-1}, e_{N-1}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ \dots \\ w_{N-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{L}(e_1) \\ \bar{L}(e_2) \\ \dots \\ \bar{L}(e_{N-1}) \end{bmatrix}$$

I przybliżenia:

$$\Phi(\mathrm{x}) = \tilde{\Phi}(x) + \sum_{i=0}^{N} w_i \, e_i(x)$$