UNIVERSIDADE FEDERAL DO CARIRI
CENTRO DE CIÊNCIAS E TECNOLOGIA

1ª Avaliação de Cálculo Numérico (Engenharia de Materiais)

Nome(a):

Data: 05 de Setembro de 2023

Prof: Dr. Diego Frankin de Souza Veras Sant'Ana

---

1) (1,0 pt) Considere as expansões em série de Taylor das funções $\operatorname{sen} x$ e $\cos x$:

$$\operatorname{sen} x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots$$

onde (!) denota o fatorial Utilize as expansões acima com os quatro termos para estimar $\operatorname{sen}^2(\pi/4) + \cos^2(\pi/4)$ e calcule o erro percentual com relação ao valor exato. OBS. Configure sua calculadora para operar em radianos. Utilize todos os dígitos da sua calculadora e utilize o valor de π da calculadora com todos os dígitos.

2) (1,0 pt) Represente na base binária o número decimal 29,75.

3) (1,0 pt) Considere as funções

$$f(x) = x^2 + x\ln x \qquad g(x) = \cos(x^2) + \ln(x) \qquad h(x) = \log_3(\cos x)$$

Com base no Teorema de Bolzano, para qual(ou quais) das funções acima é garantido que haja pelo menos uma raiz no intervalo $[0.5,\ 1.5]$?
OBS.: Configure sua calculadora para operar em radianos. Apresente os cálculos que justifiquem sua resposta.

4) (2,0 pts) Com relação aos métodos numéricos de soluções de equações (obtenção de raízes) temos o método do ponto fixo (ou iteração linear) que consiste em escrever a equação $f(x) = 0$ como $x = \phi(x)$, onde ϕ é a chamada função de iteração. Considere a equação

$$e^x - 4x^2 = 0.$$

Esta equação possui duas soluções (duas raízes). Construa três funções de iteração diferentes para a equação acima e utilize o chute inicial $x_0 = 1$ em cada uma elas. Em cada caso, indique se o método converge ou não e, em caso de convergência, indique qual raíz é obtida.

5) Encontre a raiz da função $f(x) = x^2 + x\,e^x$ que esteja no intervalo $[-0,75\ ;\ -0,5]$ com precisão $\epsilon < 0,02$.

a) (1,0 pt) pelo método da bisseção.

b) (1,0 pt) pelo método da falsa posição.

6) (1,0 pt) Considere novamente a função da questão anterior, $f(x) = x^2 + x\,e^x$. Encontre a sua raíz pelo método de Newton-Raphson. Indique a estimativa inicial que for utilizada e escreva sua resposta considerando todos os dígitos da calculadora.

7) (2,0 pts) Uma matriz tridiagonal é uma matriz quadrada onde apenas os elementos da diagonal principal e as que estão acima e abaixo a ela são não-nulas. Sistemas lineares tridiagonais são de grande importância em Matemática Aplicada, pois surgem da solução numérica de Equações Diferenciais e sabe-se muito bem que os fenômenos da Natureza são descritos em grande parte por equações diferenciais. O sistema linear abaixo é tridiagonal e simétrico:

$$\begin{cases} 2,5x_1 - x_2 = 0 \\ -x_1 + 2,5x_2 - x_3 = 0,95 \\ -x_2 + 2,5x_3 - x_4 = 1 \\ -x_3 + 2,5x_4 - x_5 = 0,95 \\ -x_4 + 2,5x_5 = 0 \end{cases}$$

Escreva este sistema linear na forma matricial para visualizar a estrutura tridiagonal.

Resolva este sistema utilizando o método iterativo de Gauss-Siedel com 5 iterações. Opere com quatro casas decimais e arredondamento padrão. Considere o vetor $\vec{r}_0 = (1,\ 1,\ 1,\ 1)$ como estimativa inicial. Não é necessário calcular o erro.

Hoje é um bom dia para ser um bom dia!
Bom desempenho!!

01) Valor Aproximado:

$$\operatorname{sen} \pi/4 = 0,707106469$$

$$\cos \pi/4 = 0,707103214$$

$$\operatorname{sen}^2 \pi/4 + \cos^2 \pi/4 = (0,707106469)^2 + (0,707103214)^2$$

$$= 0,99994513$$

Valor Exato:

$$\operatorname{sen}^2 \pi/4 + \cos^2 \pi/4 = 1$$

Erro: $\dfrac{|0,99994513 - 1|}{|1|} = 5,48 \times 10^{-6}$

02) $(29,75)_{10}$

$$\begin{array}{lllll} 29 & \underline{|2} & & & \\ 1 & 14 & \underline{|2} & & \\ & 0 & 7 & \underline{|2} & \\ & & 1 & 3 & \underline{|2} \\ & & & 1 & 1 \end{array}$$

$0,75 \times 2 = 1,50$ 1

$0,50 \times 2 = 1,00$ 1

$(0,75)_{10} = (0,11)_2$

$(29)_{10} = (11101)_2$

$\Rightarrow \boxed{(29,75)_{10} = (11101,11)_2}$

03)
$$\begin{cases} f(0{,}5) = -0{,}09657359 \\ f(1{,}5) = 2{,}858197662 \end{cases}$$

$f(0{,}5) \cdot f(1{,}5) < 0$
Satisfaz o teorema de Bolzano

$$\begin{cases} g(0{,}5) = 0{,}275765241 \\ g(1{,}5) = -0{,}222708514 \end{cases}$$

$g(0{,}5) \cdot g(1{,}5) < 0$
satisfaz o teorema de Bolzano

$$\begin{cases} h(0{,}5) = -0{,}118862898 \\ h(1{,}5) = -2{,}411026785 \end{cases}$$

$h(0{,}5) \cdot h(1{,}5) > 0$
não satisfaz o teorema de Bolzano

Apenas as funções $f(x)$ e $g(x)$ tem garantia de existência de raiz no intervalo $[0{,}5\,;\,1{,}5]$

04) $e^x - 4x^2 = 0$

$e^x = 4x^2$

$x = \underbrace{\ln 4x^2}_{\phi_1(x)}$

com $x_0 = 1$, o método converge para $\xi_1 = 4{,}306584728$

"somando x"

$x + e^x - 4x^2 = x$

com $x_0 = 1$, o método diverge

$-4x^2 = -e^x$

$x^2 = e^x/4$

$x = \dfrac{\sqrt{e^x}}{2}$

com $x_0 = 1$, o método converge para $\xi_2 = 0{,}714836368$

05) a) $f(x) = x^2 + xe^x$

a_i	x_i	b_i	$f(a_i)$	$f(x_i)$	$f(b_i)$	$erro_i$
-0,75	-0,625	-0,5	+	+	-	
-0,625	-0,5625	-0,5	+	-	-	0,111
-0,625	-0,5938	-0,5625	+	+	-	0,578
~~-0,625~~ -0,5938	-0,5781	-0,5625	+	+	-	0,0237
-0,5781	-0,5703	-0,5625	+		-	0,0137

$$\Rightarrow \boxed{\xi \approx x_5 = -0,5703}$$

b)

a_i	x_i	b_i	$f(a_i)$	$f(x_i)$	$f(b_i)$	inclinação	erro
-0,75	-0,5510	-0,5	0,2082	-0,0140	-0,0533	-1,046	
-0,75	-0,5635	-0,5510	0,2082	$-3,186 \times 10^{-3}$	-0,0140	-1,1166	0,02218
-0,75	-0,5663	-0,5635	0,2082		$-3,186 \times 10^{-3}$	-1,1334	$4,9 \times 10^{-3}$

$$\Rightarrow \boxed{\xi \approx x_3 = -0,5663}$$

06) $f(x) = x^2 + xe^x$

$f'(x) = 2x + e^x + xe^x$ regra do produto

$$x_{i+1} = x_i - \frac{x_i^2 + x_i e^{x_i}}{2x_i + e^{x_i} + x_i e^{x_i}}$$

x_0 positivo $\Rightarrow$ $\xi_1 = 0$

x_0 negativo $\Rightarrow$ $\xi_2 = -0,56714329$

07) $x_1 = \dfrac{x_2}{2,5}$

$x_2 = \dfrac{0,95 + x_1 + x_3}{2,5}$

$x_3 = \dfrac{1 + x_2 + x_4}{2,5}$

$x_4 = \dfrac{0,95 + x_3 + x_5}{2,5}$

$x_5 = \dfrac{x_4}{2,5}$

$i=0$	$i=1$	$i=2$	$i=3$	$i=4$
$x_1 = 0,4$	$x_1 = 0,376$	$x_1 = 0,4003$	$x_1 = 0,4194$	$x_1 = 0,419$
$x_2 = 0,94$	$x_2 = 1,0008$	$x_2 = 1,0484$	$x_2 = 1,0496$	$x_2 = 1,044$
$x_3 = 1,176$	$x_3 = 1,27072$	$x_3 = 1,2547$	$x_3 = 1,2423$	$x_3 = 1,2363$
$x_4 = 1,2504$	$x_4 = 1,0884$	$x_4 = 1,0560$	$x_4 = 1,0459$	$x_4 = 1,041$
$x_5 = 0,50016$	$x_5 = 0,4353$	$x_5 = 0,4224$	$x_5 = 0,4183$	$x_5 = 0,416$