**UNIVERSIDADE FEDERAL DO CARIRI**
**CENTRO DE CIÊNCIAS E TECNOLOGIA**

**9ª lista de exercícios de Cálculo Numérico**

**Unidade III: Integração Numérica**

**Prof: Dr. Diego Frankin de Souza Veras Sant'Ana**

**1)** Calcule o valor aproximado das integrais a seguir pela regra dos trapézios, pela regra de Simpson $1/3$ e pela regra de Simpson $3/8$, usando seis subintervalos ($N = 6$). Calcule o erro relativo percentual com relação ao valor exato das integrais para ambas as regras (para isso, resolva-as algebricamente). Trabalhe com seis casas decimais e arredondamento padrão.

**a)** $\displaystyle\int_0^6 \Big(x + \cos x\Big)dx$ **b)** $\displaystyle\int_0^1 3\,\mathrm{e}^{-x}\,dx$

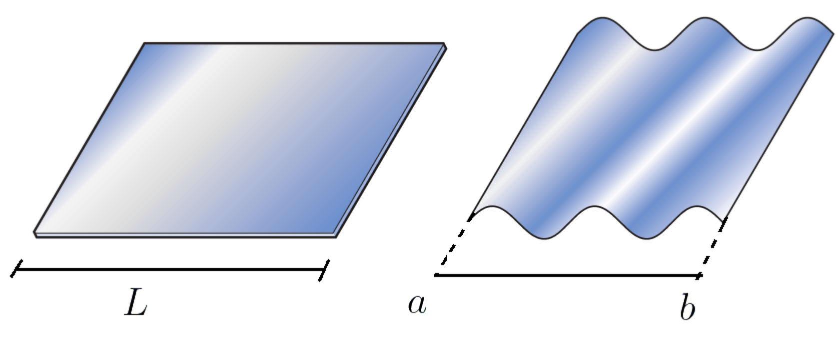
**c)** $\displaystyle\int_1^2 x\,\ln x\,dx$ **d)** $\displaystyle\int_1^3 \frac{x}{x^2+4}dx$

**2)** Deseja-se calcular a seguinte integral:

$$I = \int_0^3 \frac{dx}{\sqrt{1 + 4\,\mathrm{sen}^2(x)}}.$$

Esta integral é conhecida por **Integral Elíptica de Primeiro Tipo** e não possui solução analítica. Utilize a regra de Simpson $1/3$ para calcular o valor aproximado desta integral utilizando seis subdivisões ($N = 6$). Opere com seis casas decimais e arredondamento padrão. Configure sua calculadora para operar em radianos.

**3)** Uma placa projetada para telhado ondulado é construída pressionando-se uma chapa de alumínio em um molde cuja seção transversal tenha a forma senoidal, como na figura abaixo.




O problema de se encontrar o comprimento $L$ da chapa é o mesmo de se determinar o comprimento curva $f(x) = \mathrm{sen}\,x$:

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + \Big[f'(x)\Big]^2}\,dx = \int_a^b \sqrt{1 + \cos^2 x}\,dx$$

Esta integral é conhecida como **Integral Elíptica de Segundo Tipo** e não possui solução analítica (exata), sendo necessário, portanto, uma aproximação numérica. Suponha que a distância entre $a$ e $b$ seja de 8 metros. Determine o comprimento $L$ da chapa utilizando a regra dos trapézios com $N = 8$ subdivisões. Trabalhe com quatro casas decimais e arredondamento padrão.

**4)** Calcule o valor aproximado da seguinte integral

$$\int_1^2 \frac{\cos x}{(1+x)} dx$$

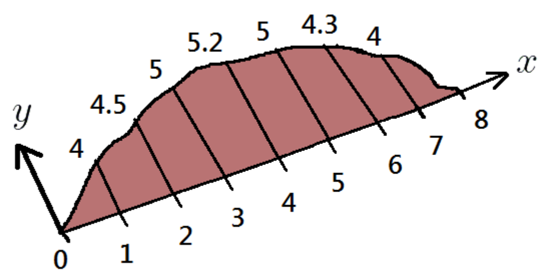
usando a regra de Simpson 1/3 com 6 subintervalos;

**5)** Um carro completa uma volta na pista de corrida em 84 segundos. A velocidade do carro, a cada intervalo de 6 segundos, é determinada por um radar e é fornecida no início da volta, em pés/segundo, pelos valores na seguinte tabela

| Tempo | 0 | 6 | 12 | 18 | 24 | 30 | 36 | 42 | 48 | 54 | 60 | 66 | 72 | 78 | 84 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Velocidade | 124 | 134 | 148 | 156 | 147 | 133 | 121 | 109 | 99 | 85 | 78 | 89 | 104 | 116 | 123 |

Qual é a extensão da pista? Lembre da Cinemática de que a posição $x(t)$ e a velocidade $v(t)$ estão relacionadas como $v(t) = \dfrac{dx}{dt} \Rightarrow x(t) = \int v(t)\, dt$.

**6)** Um levantamento planimétrico precisou ser feito em um terreno. Para isto, tirou-se as medidas da largura do terreno a cada 1m de distância de uma estação topográfica, conforme mostra a figura abaixo, onde as medidas são tomadas em metros.



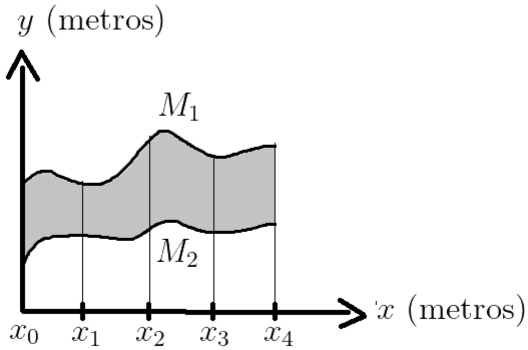

Determine o valor aproximado da área do terreno em questão usando a regra dos Trapézios com

**a)** $N_1 = 4$ subintervalos,

**b)** $N_2 = 8$ subintervalos.

**c)** Utilize agora a extrapolação de Richardson para aprimorar o cálculo da área deste terreno.

**7)** Um engenheiro precisou calcular a área de uma superfície de um rio. Para isto, ele tomou como referência de medida uma linha reta, conforme a Figura abaixo, Foram medidas distâncias, em metros, entre esta linha reta e as duas margens $M_1$ e $M_2$ a partir de um ponto tomado como origem. Tais dados foram registrados na tabela a seguir.




| $x_i$ | 0 | 10 | 20 | 30 | 40 |
|---|---|---|---|---|---|
| $M_2(x_i)$ | 50,8 | 86,2 | 136 | 72,8 | 51 |
| $M_1(x_i)$ | 113,6 | 144,5 | 185 | 171,2 | 95,3 |

Determine o valor aproximado da área da superfície do rio no intervalo $[0, 40]$ usando a regra de Simpson 1/3 com

**a)** $N_1 = 2$ subintervalos,

**b)** $N_2 = 4$ subintervalos.

**c)** Utilize agora a extrapolação de Richardson para aprimorar o cálculo da área da superfície deste rio.

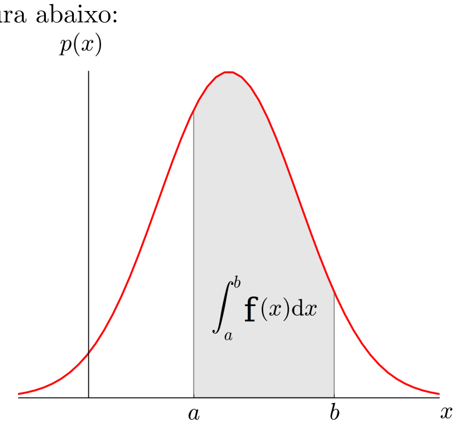
**8)** Em Probabilidade e Estatística, a **Distribuição Normal** conhecida também como **Distribuição Gaussiana** é uma das mais importantes distribuições contínuas. A função densidade de probablidade uma variável aleatória $x$ com média $\mu$ e desvio padrão $\sigma$ é dada por

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}$$

de modo que a probabilidade $P$ que de que $x$ esteja entre $a$ e $b$ é dada pela integral

$$P(x) = \int_a^b f(x)\, dx,$$

logo, a probabilidade representa a área sob a **Curva Normal**, como mostra a Figura abaixo:




**Problema:** As massas de engrenagens fabricadas em uma liinha de produção por uma certa empresa seguem uma Distribuição Normal com média 68 gramas e desvio padrão de 8 gramas. Utilize a **regra dos trapézios** com $N = 5$ subdivisões para calcular qual é a probabilidade de uma engrenagem escolhida ao acaso ter uma massa entre 63 e 73 gramas.

**OBS.:** Trabalhe com quatro digitos significativos e arredondamento padrão. A "tabela da Normal", muito utilizada em Estatística, é construída por meio de integrações numéricas.

**9)** Calcule a integral

$$\int_0^1 \frac{x\cos x}{1+x^2}$$

utilizando a regra de Simpson 1/3 com **a)** $N_1 = 2$ subintervalos e **b)** $N_2 = 4$ subintervalos. Em seguida, utilize a extrapolação de Richardson para melhorar a aproximação.

**10)** Dados os valores discretos tabelados a seguir

| $i$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|---|---|
| $x_i$ | 0.000 | 0.785 | 1.570 | 2.355 | 3.140 |
| $y_i$ | 1.000 | 0.6694 | 0.6366 | 0.6060 | 0.4673 |

Aproxime o valor da integral $\int_0^1 y(x)\,dx$ utilizando a regra de Simpson 1/3 com **a)** $N_1 = 2$ subintervalos e **b)** $N_2 = 4$ subintervalos. Em seguida, utilize a extrapolação de Richardson para melhorar a aproximação.

**11)** A integral dupla

$$\int_0^1 \int_1^{1,5} \frac{\operatorname{sen}(xy)}{x^2+y^2}\,dy\,dx$$

não possui solução exata, sendo necessário o uso de integração numérica. Resolva-a considerando duas subdivisões tanto para $x$ quanto para $y$ por meio

**a)** da regra dos Trapézios em ambas as dimensões

**b)** da regra de Simpson 1/3 em ambas as dimensões

**12)** Considere a integral dupla a seguir:

$$\int_0^1 \int_2^6 (x^2+y+3)\,dy\,dx$$

Resolva-a utilizando quatro subdivisões em cada dimensão e pela regra dos Trapézios unicamente. Compare com o resultado exato.

**13)** Sendo $f(x,y) = \dfrac{1}{x^2+y^2}$, estime $I = \displaystyle\int_3^4 \int_1^2 f(x,y)\,dy\,dx$ com $h_x = 0,2$ (usando a regra dos Trapézios) e $h_y = 0,25$ (usando a Primeira Regra de Simpson). Trabalhe com quatro casas decimais e arredondamento padrão.

**14)** Um tanque esférico de raio $R = 5$m está cheio com água. A água será drenada através de um orifício de raio $r = 0,1$m situado no fundo do tanque. A variação do nível $h$ da água no tanque com o tempo $t$, em segundos, é dada pela relação:

$$dt = \frac{R^2-h^2}{r^2\sqrt{2g(R+h)}}dh,$$

obtida nos estudo da Mecânica dos Fluidos. Aqui, $g = 9,81\,m/s^2$ é a aceleração da gravidade. Utilize a Segunda Regra de Simpson, para estimar o tempo para que o nível da água chegue a 1m do fundo do tanque. Divida o intervalo de integração em nove partes e faça os cálculos com duas casas decimais.

**15)** Em quantos intervalos é necessário particionar o domínio $[0,\ 1]$ para estimar a integral $I$ abaixo com três casas decimais corretas pela regra dos Trapézios?

$$I = \int_0^1 \mathrm{e}^{-2x}\ dx$$

# GABARITO

**01)**

**a)** Pela regra dos trapézios: $17,744267$;
Pela regra de Simpson 1/3: $17,718826$;
Pela regra de Simpson 3/8: $17,716015$;
Valor exato: $18 - \operatorname{sen} 6$.
Erros de $1,34 \times 10^{-3}$, $9,94 \times 10^{-5}$, e $2,58 \times 10^{-4}$, respectivamente

**b)** pela regra dos trapézios: $1,900749$;
pela regra de Simpson 1/3: $1,896370$;
pela regra de Simpson 3/8: $1,896380$;
valor exato: $3(1 - 1/e)$.

**c)** pela regra dos trapézios: $0,637898$;
pela regra de Simpson 1/3: $0,636298$;
pela regra de Simpson 3/8: $0,636301$;
valor exato: $2\ln 2 - 3/4$ (Obs: Utilize integração por partes)

**d)** Pela regra dos trapézios: $0,475912$;
Pela regra de Simpson 1/3: $0,477290$;
Pela regra de Simpson 3/8: $0,477283$;
Valor exato: $\frac{1}{2}(\ln 13 - \ln 5)$.

**02)** $1,865163$
**03)** $L = 9,7120 \quad \Rightarrow \quad$ (9,71 metros)
**04)** $0,0407777$
**05)** 9 858 pés.
**06)** $A_1 = 28\,m^2$ $\quad A_2 = 32\,m^2$ $\quad A = 33,33\,m^2$
**07)** $A_1 = 2.020,67\,m^2$ $\quad A_2 = 2.773,00\,m^2$ $\quad A = 2.823,16\,m^2$
**08)** $0,4659$ ou $46,59\%$ de probabilidade
**09)** **a)** 0.2709 **b)** 0.2741 **c)** 0.2738
**10)** **a)** 2.25776 **b)** 2.05202 **c)** 2.03830
**11)** **a)** $0,13418$ **b)** $0,14503$
**12)** 29,375. valor exato: 88/3
**13)** 0,0409
**14)** 541,34 s
**15)** $N \geq 18$