UNIVERSIDADE FEDERAL DO CARIRI
CENTRO DE CIÊNCIAS E TECNOLOGIA

6ª lista de exercícios de Cálculo Numérico

Unidade II: Solução de Sistemas Lineares

Método da Eliminação de Gauss

Prof Dr. Diego Frankin de Souza Veras Sant'Ana

1) Utilize o método da Eliminação de Gauss para resolver os sistemas lineares a seguir

a)

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 = 11 \\ 4x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 0 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 6 \\ 3x_1 + x_2 + x_3 = 4 \end{cases}$$

b)

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 3x_3 = 0 \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 = 0 \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 0 \end{cases}$$

c)

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0 \\ x_1 + x_2 + x_3 - x_4 = 4 \\ x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = -4 \\ x_1 - x_2 + x_3 + x_4 = 2 \end{cases}$$

d)

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 - 4x_3 = 1 \\ x_1 - x_2 + x_3 = 3 \\ x_1 - x_2 - 3x_3 = -3 \\ 3x_1 + 3x_2 - 5x_3 = 0 \\ -x_1 + x_2 + x_3 = 1 \end{cases}$$

e)

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 5 \\ 4x_1 + 3x_2 + 2x_3 + x_4 = 10 \\ x_1 - x_2 - x_3 - x_4 = -1 \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 3 \end{cases}$$

f)

$$\begin{cases} 4x_1 + 3x_2 + 2x_3 + x_4 = 5 \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 + 2x_4 = 6 \\ 2x_1 + x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 7 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 10 \end{cases}$$

g)

$$\begin{cases} -x_1 + 3x_2 - x_3 + 5x_4 = 39 \\ 3x_1 + 6x_2 - 3x_3 - 2x_4 = 37 \\ -3x_1 - 4x_2 - 5x_3 + x_4 = -69 \\ 2x_1 + 7x_2 + 2x_3 = 92 \end{cases}$$

h)

$$\begin{cases} x + y - z + 2w - v = 3 \\ 2x - y + z + 3w + v = 20 \\ x + 3y - z - w + 2v = 10 \\ x + y + z - 2w - v = -7 \\ -2x + y + 3z + w - 3v = -2 \end{cases}$$

Nas questões 2, 3 e 4, utilize o método de Eliminação de Gauss.

2) Determine a constante a de modo que o sistema linear a seguir seja indeterminado. Determine ainda qual o valor de a para que o sistema seja possivel e determinado.

$$\begin{cases} x - 2y + 3z = -4 \\ 5x - 6y + 7z = -8 \\ 6x - 8y + az = -12 \end{cases}$$

3) Determine a para que o sistema a seguir admita apenas a solução trivial.

$$\begin{cases} x + y + z = 0 \\ x + 2y + az = 0 \\ x + 4y + a^2 z = 0 \end{cases}$$

4) Considere o sistema de equações lineares:

$$\begin{cases} x + y + z = 8 \\ 2x + 4y + 3z = a \\ 3x + 7y + 8z = 25 \\ 4x + 6y + 5z = 36 \end{cases}$$

Determine o valor de a para que o sistema tenha solução. Obtido o valor de a, obtenha esta solução.

5) O método de Eliminação de Gauss é muito útil quando se necessita calcular o determinante de uma matriz. Sabe-se da Álgebra Linear que *o determinante de uma matriz triangular é igual ao produto dos seus elementos diagonais.* Nos itens a seguir, utilize eliminação de Gauss para triangularizar a matriz dada a fim de se calcular seu determinante.

a) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 5 & 3 & 2 \\ 1 & 3 & 7 & 3 & 4 \\ 0 & 5 & 2 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 6 & 7 & 4 & 7 \end{vmatrix}$ **b)** $\begin{vmatrix} 2 & 6 & 5 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 3 & 2 & -2 \\ 1 & 2 & 1 & 1 & -2 \\ -1 & -1 & 2 & -3 & 4 \\ 0 & 3 & -1 & 2 & 3 \end{vmatrix}$

OBS.: Lembre da propriedade do determinante de que *se uma linha, ou coluna de uma matriz for multiplicado por um escalar, seu determinante ficará multiplicado por este mesmo escalar.*

6) Uma transportadora possui cinco modelos de caminhões, representados pelos números 1, 2, 3, 4 e 5 aos quais são equipados para transportar cinco tipos diferentes de máquinas denominadas por A, B, C, D e E segundo a tabela abaixo

	Máquinas				
Caminhões	A	B	C	D	E
(C1)	1	1	1	0	2
(C2)	0	1	2	1	1
(C3)	2	1	1	2	0
(C4)	3	2	1	2	1
(C5)	2	1	2	3	1

Suponha que x_1, x_2, x_3, x_4 e x_5 representem, respectivamente, a quantidade de máquinas que cada caminhão pode transportar levando carga plena. Determine quantos caminhões de cada modelo devem ser enviados para transportar o total de máquinas fabricas:

- 26 máquinas do tipo A;
- 18 máquinas do tipo B;
- 23 máquinas do tipo C;
- 29 máquinas do tipo D;
- 13 máquinas do tipo E.

7) Utilize o Método da Eliminação de Gauss para resolver os seguintes sistemas lineares

$$a)\quad \begin{cases} 4x + 2y + z - 2w = 3 \\ 3x - 3y - z - w = 2 \\ 3x + 5y + z + w = 0 \\ \ x - y - z + 4w = -2 \end{cases} \qquad b)\quad \begin{cases} -2x_1 - 3x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 10 \\ -4x_1 - 6x_2 + 6x_3 + 6x_4 = 20 \\ -2x_1 + 4x_3 + 6x_4 = 10 \\ \ 4x_1 + 3x_2 - 8x_3 - 6x_4 = -17 \end{cases}$$

$$c)\quad \begin{cases} 0,156x + 2,34y + 4,03z = 1,0 \\ \ 0,34x + 3,4y + 2,34z = 3,4 \\ \ \ 1,3x + 0,345y + 3,45z = 2,8 \end{cases} \qquad d)\quad \begin{cases} 2x + 3y + z - w = 8 \\ \ x + y + z + w = 8 \\ \ x - y + 2z - w = 5 \\ 3x + 2y - z + 2w = 9 \\ 2x + 2y - 3z + 3w = 3 \end{cases}$$

No item c, utilize três casas decimais e arredondamento padrão.

8) Uma matriz tridiagonal é uma matriz quadrada onde apenas os elementos da diagonal principal e as que estão acima e abaixo a ela são não-nulas. Sistemas lineares tridiagonais são de grande importância em Matemática Aplicada, pois surgem da solução numérica de Equações Diferenciais e sabe-se muito bem que a Natureza é descrita em grande parte por equações diferenciais. O sistema linear abaixo é tridiagonal:

$$\begin{cases} x_1 - x_2 = 0 \\ -x_1 + 2,5x_2 - x_3 = 0,95 \\ -x_2 + 2,5x_3 - x_4 = 1 \\ -x_3 + 2,5x_4 - x_5 = 0,95 \\ -x_4 + 2x_5 = 0 \end{cases}$$

Resolva-o utilizando o método da Eliminação de Gauss. Opere com quatro casas decimais e arredondamento padrão.

GABARITO

a) $\vec{x} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}$ **b)**$\vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ **c)** $\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$

d) Sistema impossível

e) Sistema possível e indeterminado. Seja c uma constante.
Então, $x_4 = c$, $x_3 = -2c$, $x_2 = 2 + c$ e $x_1 = 1$

f) $\vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$ **g)** $\vec{x} = \begin{pmatrix} 5 \\ 10 \\ 6 \\ 4 \end{pmatrix}$ **h)** $\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}$

02) Se $a = 10$, solução: $\begin{pmatrix} 2+c \\ 3+2c \\ c \end{pmatrix}$, onde c é uma constante.

Se $a \neq 10$, solução: $\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$

03) $a = 1$ e $a = 2$

04) $a = 20$. solução: $\begin{pmatrix} 55/8 \\ 23/8 \\ -7/4 \end{pmatrix}$

05) **a)** 148 **b)** 24

06) 2 caminhões do modelo 1,
3 caminhões do modelo 2,
5 caminhões do modelo 3,
2 caminhões do modelo 4,
4 caminhões do modelo 5.

07) **a)** $\vec{x} = \begin{pmatrix} 6/13 \\ -5/13 \\ 1 \\ -6/13 \end{pmatrix}$ **b)** $\vec{x} = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ **c)** $\vec{x} = \begin{pmatrix} 3,109 \\ 1,002 \\ -0,454 \end{pmatrix}$

d) Sistema Impossível

08) $x_1 = 0,6328$ $x_2 = 1,2656$ $x_3 = 1,5812$ $x_4 = 1,6875$ $x_5 = 1,6875$