UNIVERSIDADE FEDERAL DO CARIRI
CENTRO DE CIÊNCIAS E TECNOLOGIA

8ª lista de exercícios de Cálculo Numérico

Unidade III: Teorias de Aproximação - Mínimos Quadrados

Prof: Dr. Diego Frankin de Souza Veras Sant'Ana

1) Considere os pontos $(2,3)$, $(4,7)$, $(6,5)$, $(8,10)$. Utilize o método dos mínimos quadrados para encontrar uma reta que melhor aproxime esses dados.

2) Considere a função $f(x)$ cujos valores são tabelados abaixo

x	0	1	2	3	4	5
$f(x)$	2,1	7,7	13,6	27,2	40,9	61,1

Utilize o método dos mínimos quadrados para encontrar uma parábola que melhor aproxima os dados apresentados. Trabalhe com quatro casas decimais e arredondamento padrão. Em seguida, calcule o resíduo (erro da aproximação).

3) Um determinado experimento retornou os seguintes dados tabelados

x	-0.5	0	0.5	1.0	1.5	2.0	2.5	3.0	3.5	4.0	4.5
$f(x)$	-0.25	0.5	0.25	0.00	0.75	1.50	1.25	1.00	1.75	2.50	2.25

Ao inserir os pontos em um plano cartesiano, note que o resultado do experimento possui um comportamento oscilatório e crescente. Este comportamento pode ser modelado por uma combinação linear entre as funções linear e uma função trigonométrica. Considere $g(x) = ax + b\cos(\pi x)$. Utilize o método dos mínimos quadrados para encontrar a função $g(x)$ que melhor se adequa aos dados obtidos no experimento.

4) Uma equipe de astrônomos mediu o brilho de uma estrela em Lúmens (símbolo: lm - é a unidade de medida de fluxo luminoso) ao longo de cinco anos. Tal equipe registrou a média anual do brilho da estrela, construindo a tabela a seguir

Ano	2003	2004	2005	2006	2007
Brilho	3.2	3.0	2.9	2.85	2.7

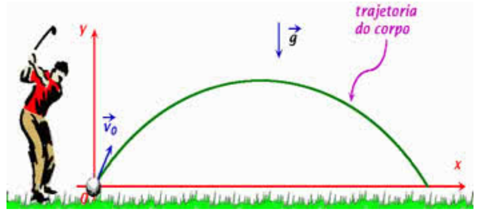
Note que o brilhos da estrela diminui ao longo dos anos, o que indica que a estrela está morrendo. Encontre a função $f(x) = ax + b$, onde x é o ano e $f(x)$ é o brilho da estrela que melhor ajusta estes pontos pelo método dos mínimos quadrados. Em seguida, utilize este resultado para estimar qual será o brilho desta estrela em 2010.

5) Certo fenômeno possui um comportamento cúbico. Os dados na tabela a seguir apresentam resultados de medições deste fenômeno:

x	0.0	1.5	3.0	4.5	6.0	7.5	9.0	10.5
$f(x)$	4.5	4.87	34.5	113.62	262.5	501.37	850.5	1330.12

Encontre uma função do terceiro grau que ajuste os pontos da medição.

6) Uma bola de golfe foi lançada obliquamente a partir do solo por uma pessoa comum em um jogo de Golfe. Sabe-se da Física Fundamental que a trajetória de um **lançamento oblíquo** é parabólico.



Um observador parado dispõe de uma boa câmera e fotografa o objeto em cinco momentos diferentes durante a subida da bola, anotando as distâncias na tabela abaixo.

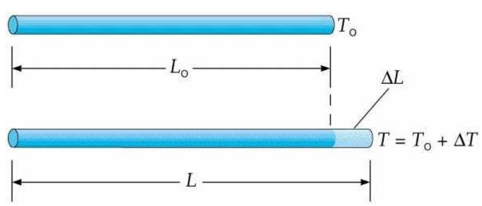
Alcance x em metros	3	4,5	9	10,5	12
Altura y em metros	1	2	3,7	5,2	4,9

a) Utilize o método dos quadrados mínimos para encontrar a parábola $y = ax^2 + bx + c$ que melhor aproxime a equação da trajetória do objeto lançado.
b) Com o resultado do item anterior, estime a altura máxima do objeto.
c) Estime também o alcance máximo do objeto.
d) Em um plano cartesiano, insira os dados tabelados e esboce a curva que descreve trajetória.

7) Dilatação térmica é o nome que se dá ao aumento do volume de um corpo ocasionado pelo aumento de sua temperatura, o que causa o aumento no grau de agitação de suas moléculas e consequentemente aumento na distância média entre as mesmas. A **Dilatação Linear** é o aumento de volume que acontece em apenas uma dimensão, no seu comprimento. Um exemplo simples de ocorrência de dilatação linear pode ser observado nos trilhos de trem ou em armaduras de vigas de concreto armado. A relação matemática para calcular a dilatação em uma barra de comprimento inicial L_0, chamada de **Lei da dilatação linear**, é:

$$\Delta L = \alpha L_0 \Delta T,$$

onde ΔL é a variação no comprimento da barra e ΔT é a variação na temperatura.



Em um experimento, foi medido o comprimento de uma barra em função da Temperatura de um dado material metálico.

T	$30\ ^oC$	$35\ ^oC$	$45\ ^oC$	$50\ ^oC$
L	$0,50\ m$	$0,574\ m$	$0,707\ m$	$0,766\ m$

Utilize o **método dos mínimos quadrados** para encontrar uma reta $L = aT + b$ que melhor aproxime os dados do experimento. Em seguida, determine o coeficiente de dilatação linear do metal utilizado no experimento. Note que o coeficiente de dilatação é o coeficiente angular da função $L(T)$. Utilize seus resultados para estimar o comprimento da barra quando a temperatura for de $40\ ^oC$.

8) Uma certa observação retornou o seguinte conjunto de dados

x	1	2	3	4	5	6	7	8
y	0,5	0,6	0,9	0,8	1,2	1,5	1,7	2,0

onde x é a variável independente e y, a dependente. Há duas correntes de pensamento: a primeira julga que as duas variáveis devem ter uma relação linear, enquanto que uma segunda, afirma que esta relação é quadrática. Utilize o método dos quadrados mínimos para encontrar uma reta $\varphi_1(x) = ax + b$ e uma parábola $\varphi_2(x) = ax^2 + bx + c$ que melhor ajustem os dados fornecidos. Após isso calcule o erro $E = \sum_{i=1}^{8} \Big(\varphi(x_i) - y_i\Big)^2$ e conclua qual das duas correntes de pensamento é a mais correta.

9) Considere os dados de um experimento conforme a tabela

x_i	-9	-6	-4	-2	0	2	4
y_i	30,1	10,1	8,9	5,9	5,0	3,9	4,01

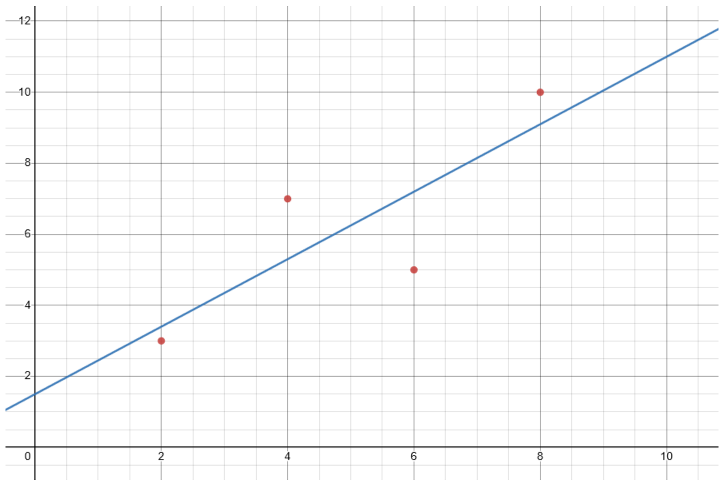
Encontre a hipérbole de ajuste para esses dados.

10) Encontre uma função exponencial da forma $\varphi(x) = b\,e^{ax}$ que ajusta os dados tabelados abaixo

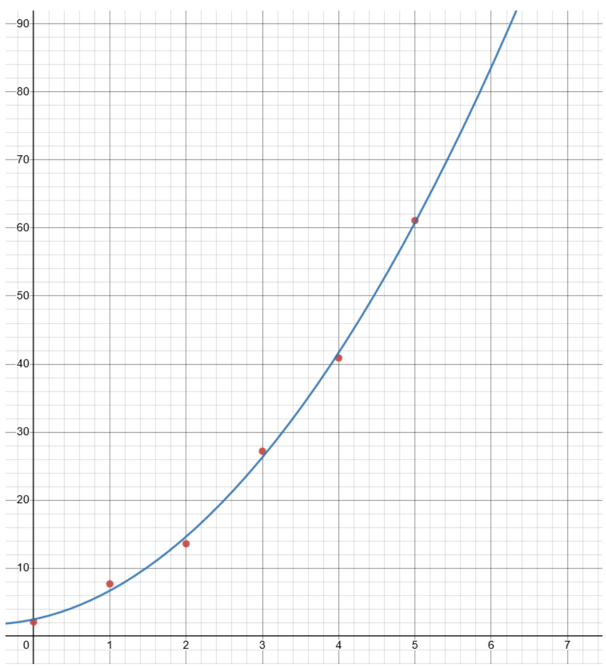
x_i	2,0774	2,3049	3,0125	4,7092	5,5016
y_i	1,4509	2,8462	2,1536	4,7438	7,7260

GABARITO

01) $y = 0,95\,x + 1,5$



02) $f(x) \approx 1,8607x^2 + 2,3593x + 2,4786$. Em $x = 6,\ f \approx 83,6$



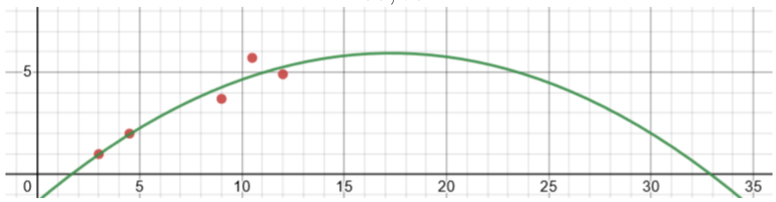
03) $g(x) = 0,5[x + \cos(\pi x)]$

04) $f(x) = -0,1046x + 212,8$ brilho estimado: $2,554$ lm

05) $0,99997x^3 + +2,00047x^2 - 5,00201x + 4,49939$

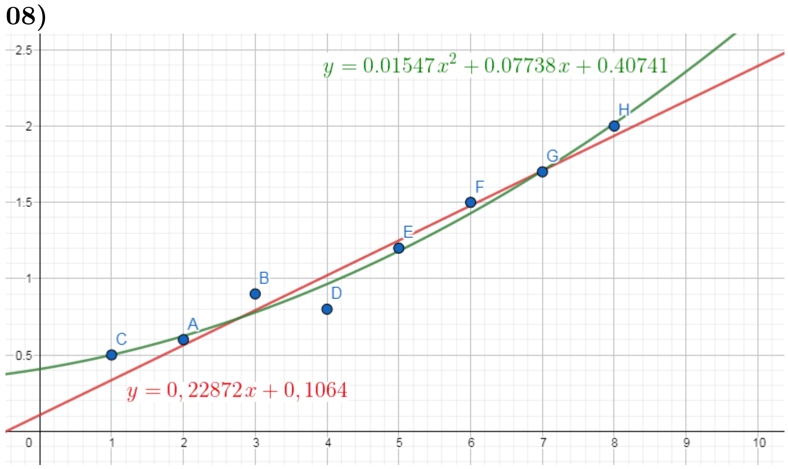
.

06) $y = -0,01918x^2 + 0.74175x - 1.02709$
altura máxima estimada: $6,14$ metros
alcance máximo estimado: $35,79$ metros



07) $L = 0,0133T + 0,1047$, logo $\alpha = 0,0133\ {}^oC^{-1}$. Quando $T = 40\ {}^oC$, $L = 0,6368$ m

08)



Para a reta, $E = 0,0961$. Para a parábola, $E = 0,04817$. Portanto, a parábola se ajusta melhor aos dados do que a reta.

09) $\varphi(x) = \dfrac{1}{0,0178x + 0,1982}$

10) $\varphi(x) = 0,7670\, e^{0,4040\, x}$