ЧАСТЬ 1: АРИФМЕТИКА

Определение. Множеством надвещественных чисел называется множество упорядоченных пар вещественных чисел (a,b) с введенными на нем двумя операциями сложения (символ $+$) и умножения (символ $\cdot$), определенными следующим образом.

1. $(a,b)+(c,d)=(a+b,c+d)$,

2. $(a,b)\cdot(c,d)=(ac,ad+bc)$ (не определено, если a,c одновременно равны 0).

Число a будем называть *вещественной* частью надвещественного числа и обозначать $\mathrm{Re}\,\hat{a}$, число b – *малой* частью числа и обозначать $\mathrm{Ab}\,\hat{a}$.

Множество надвещесвенных обозначим $\widehat{\mathbb{R}}$.

Заметим, что

$$\begin{aligned}(a,0)+(b,0) &= (a+b,0), \qquad (1)\\ (a,0)\cdot(b,0) &= (ab,0). \qquad (2)\end{aligned}$$

Таким образом, имеет смысл писать a вместо $(a,0)$ и считать множество вещественных чисел подмножеством множества надвещественных чисел:

$$\mathbb{R}\subset\widehat{\mathbb{R}}.$$

Пример 1 *Умножим вещественное число C на надвещественное $\hat{a}=(a,b)$:*

$$C\cdot\hat{a}=(C,0)\cdot(a,b)=(C\cdot a, C\cdot b+0\cdot a)=(Ca,Cb).$$

Пару $(0,1)$ обозначим как $\hat{o}$. Таким образом,

$$C\cdot(0,1)=(0,C)=C\hat{o},$$

отсюда

$$(a,b)=(a,0)+(0,b)=a+b\hat{o}. \qquad (3)$$

Такую запись надвещественного числа назовем *алгебраической*. Удобнее становится записывать сумму надвещественных чисел:

$$a+b\hat{o}+(c+d\hat{o})=(a+c)+(b+d)\hat{o}. \qquad (4)$$

Равенство. Надвещественные числа (a,b) и (c,d) равны тогда и только тогда, когда $a=c$, $b=d$. В других обозначениях:

$$\hat{a}=\hat{b}\Leftrightarrow\begin{cases}\mathrm{Re}\,\hat{a}=\mathrm{Re}\,\hat{b}\\ \mathrm{Ab}\,\hat{a}=\mathrm{Ab}\,\hat{b}\end{cases} \qquad (5)$$

Из этого определения немедленно вытекают рефлексивность, симметричность и транзитивность равенства, а также следующие свойства:

1. $\hat{a} = \hat{b},\ \hat{c} = \hat{d} \Rightarrow \hat{a} \cdot \hat{c} = \hat{b} \cdot \hat{d}$ (см. определение умножения).

2. $\hat{a} = \hat{b},\ \hat{c} = \hat{d} \Rightarrow \hat{a} + \hat{c} = \hat{b} + \hat{d}$,

Разность. *Разностью* надвещественных чисел $\hat{c}_1$ и $\hat{c}_2$ является надвещественное число $\hat{c}$ такое, что

$$\hat{c} + \hat{c}_2 = \hat{c}_1,$$

и обозначается

$$\hat{c} = \hat{c}_1 - \hat{c}_2.$$

Пусть $\hat{c} = (a, b)$, $\hat{c}_1 = (a_1, b_1)$, $\hat{c}_2 = (a_2, b_2)$. Тогда

$$\begin{cases} a + a_2 = a_1 \\ b + b_2 = b_1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = a_1 - a_2 \\ b = b_1 - b_2 \end{cases}$$

Следовательно, $a+b\hat{o}-(c+d\hat{o}) = (a-c)+(b-d)\hat{o}$. Позже аналогично определим корень n-ной степени надвещественного числа $\hat{a}$.

Свойства сложения и умножения. Перемножим числа в их алгебраической форме, как если бы они были действительными:

$$(a + b\hat{o}) \cdot (c + d\hat{o}) = ac + ad\hat{o} + cb\hat{o} + bd\hat{o}\hat{o} = ac + (ad + ac)\hat{o} + bd\hat{o}^2.$$

Но по определению

$$(a + b\hat{o}) \cdot (c + d\hat{o}) = ac + (ad + cb)\hat{o}.$$

Выходит, что чтобы перемножить два надвещественных числа в алгебраической форме, можно перемножить их как суммы действительных чисел, отбросив затем слогаемые вида $\hat{o}^n$, сделав вид, что вы их не видели.

Пример 2 *Получить формулу для n-ной степени числа $\hat{a}$ (а n-ной степенью надвещественного числа $\hat{a}$ назовем произведение n множителей $\hat{a}$) можно с помощью бинома Ньютона:*

$$(a + b\hat{o})^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k a^{n-k} (b\hat{o})^k = a^n + na^{n-1}b\hat{o} = a^{n-1}(a + nb\hat{o}).$$

Докажем полученное равенство средствами математической индукции. Возведем $\hat{a} = (a, b)$ в квадрат:

$$\hat{a}^2 = (a, b)^2 = (a^2, 2ab).$$

База индукции доказана. Предположим, что

$$\hat{a}^k = (a^k, na^{k-1}b),$$

тогда

$$\hat{a}^{k+1} = \hat{a}^k \cdot \hat{a} = (a^k, na^{k-1}b) \cdot (a, b) =$$
$$= (a^{k+1}, na^{k-1}b \cdot a + a^{k+1}b) = (a^{k+1}, (k+1)a^k b).$$

Таким образом,

$$\hat{a}^n = (a^n, na^{n-1}b). \tag{6}$$

Пример 3 *Может ли произведение надвещественных чисел быть вещественным числом? Да, пример – произведение чисел вида (a, b) и $(a, -b)$:*

$$(a, b) \cdot (a, -b) = (aa, ab + a(-b)) = (a^2, 0) = a^2.$$

Их сумма, очевидно, также действительное число.

Приведем свойства сложения и умножения. Пусть $\hat{a}$, $\hat{b}$ и $\hat{c}$ – надвещественные числа. Тогда

1. $\hat{a} + \hat{b} = \hat{b} + \hat{a}$ (сложение коммутативно);
2. $\hat{a} \cdot \hat{b} = \hat{b} \cdot \hat{a}$ (умножение коммутативно);
3. $(\hat{a} + \hat{b}) + \hat{c} = \hat{a} + (\hat{b} + \hat{c})$ (сложение ассоциативно);
4. $(\hat{a} \cdot \hat{b}) \cdot \hat{c} = \hat{a} \cdot (\hat{b} \cdot \hat{c})$ (умножение ассоциативно);
5. $(\hat{a}+\hat{b})\cdot\hat{c} = \hat{a}\cdot\hat{c}+\hat{b}\cdot\hat{c}$ (дистрибутивность сложения относительно умножения).

Докажем только последнее свойство. Пусть $\hat{a} = (a_1, b_1)$, $\hat{b} = (a_2, b_2)$, $\hat{c} = (a_3, b_3)$. Левая часть равенства равна

$$(\hat{a} + \hat{b}) \cdot \hat{c} = \big((a_1, b_1) + (a_2, b_2)\big) \cdot (a_3, b_3) = (a_1 + a_2, b_1 + b_2) \cdot (a_3, b_3) =$$
$$= \big((a_1 + a_2)a_3, (a_1 + a_2)b_3 + (b_1 + b_2)a_3\big) =$$
$$= (a_1a_3 + a_2a_3, a_1b_3 + a_2b_2 + b_1a_3 + b_2a_3).$$

Правая же равна

$$\hat{a} \cdot \hat{c} + \hat{b} \cdot \hat{c} = (a_1, b_1) \cdot (a_3, b_3) + (a_2, b_2) \cdot (a_3, b_3) =$$
$$= (a_1a_3, a_1b_3 + b_1a_3) + (a_2a_3, a_2b_3 + a_3b_2) =$$
$$= (a_1a_3 + a_2a_3, a_1b_3 + b_1a_3 + a_2b_3 + a_3b_2).$$

Свойство доказано.

Сравнение. Введем отношение “больше” ($>$) на множестве $\widehat{\mathbb{R}} \times \widehat{\mathbb{R}}$:

$$\hat{a} > \hat{b} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \quad \operatorname{Re}\hat{a} > \operatorname{Re}\hat{b} \\ \begin{cases} \operatorname{Re}\hat{a} = \operatorname{Re}\hat{b} \\ \operatorname{Ab}\hat{a} > \operatorname{Ab}\hat{b} \end{cases} \end{array}\right. \tag{7}$$

Отсюда следует важное утверждение. Рассмотрим числа $n\hat{o}$ и a, $a > 0$, тогда $n\hat{o} < a$. Поскольку мы не указали n и a, то неравенство будет справедливо для любых n и a:

$$\forall a > 0 \ \forall n \ n\hat{o} < a,$$

или

$$\forall a > 0 \quad \hat{o} < a.$$

Утверждение является отрицанием аксиомы Архимеда, а его второй способ записи призван подчеркнуть природу объекта $\hat{o}$, меньшего любого действительного числа, который теперь мы будем называть бесконечно малой.

Частное. *Частным* надвещественных чисел $\hat{c}_1$ и $\hat{c}_2$ назовем надвещественное число $\hat{c}$ такое, что

$$\hat{c} \cdot \hat{c}_2 = \hat{c}_1,$$

и обозначим

$$\hat{c} = \frac{\hat{c}_1}{\hat{c}_2}.$$

Найдем $\hat{c}$. Пусть $\hat{c} = (a, b)$, $\hat{c}_1 = (a_1, b_1)$, $\hat{c}_2 = (a_2, b_2)$. Тогда

$$\begin{cases} aa_2 = a_1 \\ ab_2 + ba_2 = b_1. \end{cases}$$

Видно, что при $a_2 = 0$, $a_1 \neq 0$ первое уравнение не имеет решения, а следовательно, частное не определено. Решение разбивается на два случая: при $a_1 = a_2 = 0$ и при $a_2 \neq 0$. В первом случае получаем систему

$$\begin{cases} 0 \cdot a = 0 \\ ab_2 + 0 \cdot b = b_1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b \in \mathbb{R} \\ a = \dfrac{b_1}{b_2}. \end{cases}$$

Из решения системы вытекает неопределенность: одинаково верны равенства $\dfrac{a\hat{o}}{b\hat{o}} = \dfrac{a}{b}$ и $\dfrac{a\hat{o}}{b\hat{o}} = \dfrac{a}{b} + 4\hat{o}$, поэтому будем считать малую часть частного равным 0.

Для второго случая получаем

$$\begin{cases} a = \dfrac{a_1}{a_2} \\ \dfrac{a_1}{a_2} b_2 + ba_2 = b_1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \dfrac{a_1}{a_2} \\ b = \left(b_1 - \dfrac{a_1}{a_2}\right)\dfrac{1}{a_2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \dfrac{a_1}{a_2} \\ b = \dfrac{a_2 b_1 - a_1 b_2}{a_2^2}. \end{cases}$$

Итак, $\hat{c} = \left(\dfrac{a_1}{a_2}, \dfrac{a_2 b_1 - a_1 b_2}{a_2^2}\right)$ при $a_2 \neq 0$, $\hat{c} = \dfrac{b_1}{b_2}$ при $a_1 = a_2 = 0$.

Найдем обратное к надвещественному $\hat{a} = (a, b)$ число $\hat{a}^{-1}$, т.е. такое число $\hat{b}$, что $\hat{a}\hat{b} = 1$. Как мы уже было показано, в случае, если $\operatorname{Re}\hat{a} = 0$, $\hat{a}^{-1}$ не определен, поскольку $\operatorname{Re} 1 = 1 \neq 0$. Тогда, если $\operatorname{Re}\hat{a} \neq 0$, согласно формуле деления получаем

$$\hat{a}^{-1} = \left(\frac{1}{a}, -\frac{b}{a^2}\right). \tag{8}$$

Таким образом, равенство $\dfrac{a}{b} = ab^{-1}$ в общем случае неверно.

Корень n-ной степени. *Корнем n-ной степени* надвещественного числа $\hat{a}$ назовем число $\hat{b}$ такое, что

$$\hat{a} = \hat{b}^n,$$

и обозначим

$$\hat{b} = \sqrt[n]{\hat{a}}.$$

Пусть $\hat{a} = (a_1, b_1)$, $\hat{b} = (a_2, b_2)$. Тогда, согласно (6), получаем

$$\begin{cases} a_1 = a_2^n \\ b_1 = n a_2^{n-1} b_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a_2 = a_1^{1/n} \\ b_2 = \dfrac{1}{n} a_1^{(1-n)/n} b_1 \end{cases}$$

Таким образом,

$$\sqrt[n]{\hat{a}} = \left(a^{1/n}, \frac{1}{n} a^{(1-n)/n} b\right). \tag{9}$$

Бесконечность. Введем символ $\dfrac{1}{\hat{o}}$, для которого определим следующие операции с надвещественными числами:

1. $\dfrac{1}{\hat{o}} \cdot a = a \cdot \dfrac{1}{\hat{o}} = \dfrac{a}{\hat{o}},\ a \in \mathbb{R}$;

2. $\dfrac{1}{\hat{o}} \cdot b\hat{o} = b\hat{o} \cdot \dfrac{1}{\hat{o}} = b,\ b \in \mathbb{R}$.

3. $\dfrac{1}{\hat{o}} + \hat{a} = \hat{a} + \dfrac{1}{\hat{o}} = \dfrac{1}{\hat{o}},\ \hat{a} \in \widehat{\mathbb{R}}$.