ЧАСТЬ 1: АРИФМЕТИКА

Определение. Множеством надвещественных чисел называется множество упорядоченных пар вещественных чисел (a, b) с введенными на нем двумя операциями сложения (символ $+$) и умножения (символ $\cdot$), определенными следующим образом.

1. $(a, b) + (c, d) = (a + b, c + d),$ $\qquad (1)$

2. $(a, b) \cdot (c, d) = (ac, ad + bc)$ (если a, c не одновременно равны 0). $\qquad (2)$

Число a будем называть *вещественной* частью надвещественного числа и обозначать $\operatorname{Re}\hat{a}$, число b – *малой* частью числа и обозначать $\operatorname{Ab}\hat{a}$.

Множество надвещесвенных обозначим $\widehat{\mathbb{R}}$.

Заметим, что

$$\begin{aligned}(a, 0) + (b, 0) &= (a + b, 0),\\ (a, 0) \cdot (b, 0) &= (ab, 0).\end{aligned}$$

Таким образом, имеет смысл писать a вместо $(a, 0)$ и считать множество вещественных чисел подмножеством множества надвещественных чисел:

$$\mathbb{R} \subset \widehat{\mathbb{R}}.$$

Подробнее об этом написано в приложении 1.

Пример 1 *Умножим вещественное число C на надвещественное $\hat{a} = (a, b)$:*

$$C \cdot \hat{a} = (C, 0) \cdot (a, b) = (C \cdot a, C \cdot b + 0 \cdot a) = (Ca, Cb).$$

Пару $(0, 1)$ обозначим как $\hat{o}$. Таким образом,

$$C \cdot (0, 1) = (0, C) = C\hat{o},$$

отсюда

$$(a, b) = (a, 0) + (0, b) = a + b\hat{o}. \tag{3}$$

Такую запись надвещественного числа назовем *алгебраической*. Удобнее становится записывать сумму надвещественных чисел:

$$a + b\hat{o} + (c + d\hat{o}) = (a + c) + (b + d)\hat{o}. \tag{4}$$

Равенство. Надвещественные числа (a, b) и (c, d) равны тогда и только тогда, когда $a = c$, $b = d$. В других обозначениях:

$$\hat{a} = \hat{b} \Leftrightarrow \begin{cases} \operatorname{Re}\hat{a} = \operatorname{Re}\hat{b} \\ \operatorname{Ab}\hat{a} = \operatorname{Ab}\hat{b} \end{cases} \tag{5}$$

Из этого определения немедленно вытекают рефлексивность, симметричность и транзитивность равенства, а также следующие свойства:

1. $\hat{a}=\hat{b},\ \hat{c}=\hat{d}\Rightarrow \hat{a}\cdot\hat{c}=\hat{b}\cdot\hat{d}$ (см. определение умножения).

2. $\hat{a}=\hat{b},\ \hat{c}=\hat{d}\Rightarrow \hat{a}+\hat{c}=\hat{b}+\hat{d}$,

Разность. *Разностью* надвещественных чисел $\hat{c}_1$ и $\hat{c}_2$ является надвещественное число $\hat{c}$ такое, что

$$\hat{c}+\hat{c}_2=\hat{c}_1,$$

и обозначается

$$\hat{c}=\hat{c}_1-\hat{c}_2.$$

Пусть $\hat{c}=(a,b)$, $\hat{c}_1=(a_1,b_1)$, $\hat{c}_2=(a_2,b_2)$. Тогда

$$\begin{cases} a+a_2=a_1\\ b+b_2=b_1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} a=a_1-a_2\\ b=b_1-b_2\end{cases}$$

Следовательно, $a+b\hat{o}-(c+d\hat{o})=(a-c)+(b-d)\hat{o}$. Позже аналогично определим корень n-ной степени надвещественного числа $\hat{a}$.

Свойства сложения и умножения. Перемножим числа в их алгебраической форме, как если бы они были действительными:

$$(a+b\hat{o})\cdot(c+d\hat{o})=ac+ad\hat{o}+cb\hat{o}+bd\hat{o}\hat{o}=ac+(ad+ac)\hat{o}+bd\hat{o}^2.$$

Но по определению

$$(a+b\hat{o})\cdot(c+d\hat{o})=ac+(ad+cb)\hat{o}.$$

Выходит, что чтобы перемножить два надвещественных числа в алгебраической форме, можно перемножить их как суммы действительных чисел, отбросив затем слогаемые вида $\hat{o}^n$.

Пример 2 *Получить формулу для n-ной степени числа $\hat{a}$ (а n-ной степенью надвещественного числа $\hat{a}$ назовем произведение n множителей $\hat{a}$) можно с помощью бинома Ньютона:*

$$(a+b\hat{o})^n=\sum_{k=0}^{n}C_n^k a^{n-k}(b\hat{o})^k=a^n+na^{n-1}b\hat{o}=a^{n-1}(a+nb\hat{o}).$$

Докажем полученное равенство средствами математической индукции. Возведем $\hat{a}=(a,b)$ в квадрат:

$$\hat{a}^2=(a,b)^2=(a^2,2ab).$$

База индукции доказана. Предположим, что

$$\hat{a}^k=(a^k,na^{k-1}b),$$

тогда

$$\hat{a}^{k+1} = \hat{a}^k \cdot \hat{a} = (a^k, na^{k-1}b) \cdot (a, b) = \\ = (a^{k+1}, na^{k-1}b \cdot a + a^{k+1}b) = (a^{k+1}, (k+1)a^k b).$$

Таким образом,

$$\hat{a}^n = (a^n, na^{n-1}b). \tag{6}$$

Пример 3 *Найдем* $\hat{a}^0$*:*

$$\hat{a}^0 = (a, b)^0 = (a^0, 0 \cdot a^0 b) = (1, 0) = 1.$$

Пример 4 *Может ли произведение надвещественных чисел быть вещественным числом? Да, пример – произведение чисел вида* (a, b) *и* $(a, -b)$*:*

$$(a, b) \cdot (a, -b) = (aa, ab + a(-b)) = (a^2, 0) = a^2.$$

Их сумма, очевидно, также действительное число.

Приведем свойства сложения и умножения. Пусть $\hat{a}$, $\hat{b}$ и $\hat{c}$ – надвещественные числа. Тогда

1. $\hat{a} + \hat{b} = \hat{b} + \hat{a}$ (сложение коммутативно);
2. $\hat{a} \cdot \hat{b} = \hat{b} \cdot \hat{a}$ (умножение коммутативно);
3. $(\hat{a} + \hat{b}) + \hat{c} = \hat{a} + (\hat{b} + \hat{c})$ (сложение ассоциативно);
4. $(\hat{a} \cdot \hat{b}) \cdot \hat{c} = \hat{a} \cdot (\hat{b} \cdot \hat{c})$ (умножение ассоциативно);
5. $(\hat{a} + \hat{b}) \cdot \hat{c} = \hat{a} \cdot \hat{c} + \hat{b} \cdot \hat{c}$ (дистрибутивность сложения относительно умножения).

Докажем только последнее свойство. Пусть $\hat{a} = (a_1, b_1)$, $\hat{b} = (a_2, b_2)$, $\hat{c} = (a_3, b_3)$. Левая часть равенства равна

$$(\hat{a} + \hat{b}) \cdot \hat{c} = \big((a_1, b_1) + (a_2, b_2)\big) \cdot (a_3, b_3) = (a_1 + a_2, b_1 + b_2) \cdot (a_3, b_3) = \\ = \big((a_1 + a_2)a_3, (a_1 + a_2)b_3 + (b_1 + b_2)a_3\big) = \\ = (a_1a_3 + a_2a_3, a_1b_3 + a_2b_2 + b_1a_3 + b_2a_3).$$

Правая же равна

$$\hat{a} \cdot \hat{c} + \hat{b} \cdot \hat{c} = (a_1, b_1) \cdot (a_3, b_3) + (a_2, b_2) \cdot (a_3, b_3) = \\ = (a_1a_3, a_1b_3 + b_1a_3) + (a_2a_3, a_2b_3 + a_3b_2) = \\ = (a_1a_3 + a_2a_3, a_1b_3 + b_1a_3 + a_2b_3 + a_3b_2).$$

Свойство доказано.

Сравнение. Определим отношение “больше” (>) между элементами $\widehat{\mathbb{R}}$:

$$\hat{a} > \hat{b} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \operatorname{Re}\hat{a} > \operatorname{Re}\hat{b} \\ \begin{cases} \operatorname{Re}\hat{a} = \operatorname{Re}\hat{b} \\ \operatorname{Ab}\hat{a} > \operatorname{Ab}\hat{b} \end{cases} \end{array} \right. \tag{7}$$

Отсюда следует важное утверждение. Рассмотрим числа $n\hat{o}$ и a, $a > 0$, тогда $n\hat{o} < a$. Поскольку мы не указали n и a, то неравенство будет справедливо для любых n и a:

$$\forall a > 0 \ \forall n \ n\hat{o} < a,$$

или

$$\forall a > 0 \quad 0 < \hat{o} < a. \tag{8}$$

Утверждение является отрицанием аксиомы Архимеда, а его второй способ записи призван подчеркнуть природу объекта $\hat{o}$, меньшего любого действительного числа, который теперь мы будем называть бесконечно малой. Также введем отношение “больше или равно” $\geqslant$:

$$\hat{a} \geqslant \hat{b} \Leftrightarrow \hat{a} > \hat{b} \lor \hat{a} = \hat{b} \tag{9}$$

Частное. *Частным* надвещественных чисел $\hat{c}_1$ и $\hat{c}_2$ назовем надвещественное число $\hat{c}$ такое, что

$$\hat{c} \cdot \hat{c}_2 = \hat{c}_1,$$

и обозначим

$$\hat{c} = \frac{\hat{c}_1}{\hat{c}_2}.$$

Найдем $\hat{c}$. Пусть $\hat{c} = (a, b)$, $\hat{c}_1 = (a_1, b_1)$, $\hat{c}_2 = (a_2, b_2)$. Тогда

$$\begin{cases} aa_2 = a_1 \\ ab_2 + ba_2 = b_1. \end{cases}$$

Видно, что при $a_2 = 0$, $a_1 \neq 0$ первое уравнение не имеет решения, а следовательно, частное не определено. Решение разбивается на два случая: при $a_1 = a_2 = 0$ и при $a_2 \neq 0$. В первом случае получаем систему

$$\begin{cases} 0 \cdot a = 0 \\ ab_2 + 0 \cdot b = b_1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b \in \mathbb{R} \\ a = \dfrac{b_1}{b_2}. \end{cases}$$

Из решения системы вытекает неопределенность: одинаково верны равенства $\dfrac{a\hat{o}}{b\hat{o}} = \dfrac{a}{b}$ и $\dfrac{a\hat{o}}{b\hat{o}} = \dfrac{a}{b} + 4\hat{o}$, поэтому будем считать малую часть частного равным 0.

Для второго случая получаем

$$\begin{cases} a = \dfrac{a_1}{a_2} \\ \dfrac{a_1}{a_2}b_2 + ba_2 = b_1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \dfrac{a_1}{a_2} \\ b = \left(b_1 - \dfrac{a_1}{a_2}\right)\dfrac{1}{a_2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \dfrac{a_1}{a_2} \\ b = \dfrac{a_2b_1 - a_1b_2}{a_2^2}. \end{cases}$$

Итак, $\hat{c} = \left(\dfrac{a_1}{a_2}, \dfrac{a_2b_1 - a_1b_2}{a_2^2}\right)$ при $a_2 \neq 0$, $\hat{c} = \dfrac{b_1}{b_2}$ при $a_1 = a_2 = 0$.

Найдем обратное к надвещественному $\hat{a} = (a, b)$ число $\hat{a}^{-1}$, т.е. такое число $\hat{b}$, что $\hat{a}\hat{b} = 1$. Как мы уже было показано, в случае, если $\operatorname{Re}\hat{a} = 0$, $\hat{a}^{-1}$ не определен, поскольку $\operatorname{Re} 1 = 1 \neq 0$. Тогда, если $\operatorname{Re}\hat{a} \neq 0$, согласно формуле деления получаем

$$\hat{a}^{-1} = \left(\frac{1}{a}, -\frac{b}{a^2}\right). \tag{10}$$

Таким образом, равенство $\dfrac{a}{b} = ab^{-1}$ в общем случае неверно.

Корень n-ной степени. *Корнем n-ной степени* надвещественного числа $\hat{a}$ назовем число $\hat{b}$ такое, что

$$\hat{a} = \hat{b}^n,$$

и обозначим

$$\hat{b} = \sqrt[n]{\hat{a}}.$$

Пусть $\hat{a} = (a_1, b_1)$, $\hat{b} = (a_2, b_2)$. Тогда, согласно (6), получаем

$$\begin{cases} a_1 = a_2^n \\ b_1 = na_2^{n-1}b_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a_2 = a_1^{1/n} \\ b_2 = \dfrac{1}{n}a_1^{(1-n)/n}b_1 \end{cases}$$

Таким образом,

$$\sqrt[n]{\hat{a}} = \left(a^{1/n}, \frac{1}{n}a^{(1-n)/n}b\right). \tag{11}$$

Рациональную степень $\hat{\omega} = \hat{z}^{m/n}$, $m \in \mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{N}$, определим как $\hat{\omega} = \left(\sqrt[n]{\hat{z}}\right)^m$.

Пусть $\hat{z}^{1/n} = (a^{1/n}, \dfrac{1}{n}a^{(1-n)/n}b) = (a_1, b_1)$. Тогда

$$\hat{z}^{m/n} = (a_1^m, ma_1^{m-1}b_1) = (a^{m/n}, ma^{(m-1)/n} \cdot \frac{1}{n}a^{(1-n)/n}b) = (a^{m/n}, \frac{m}{n}a^{(m-n)/n}b).$$

Итак, если $\alpha \in \mathbb{Q}$, то

$$\hat{z}^\alpha = a^\alpha + \alpha a^{\alpha-1}b\hat{o}. \tag{12}$$

Приложение 1: о расширении действительных чисел

Покажем, что множество упорядоченных пар $\{(a, 0) \,|\, a \in \mathbb{R}\}$ с введеными на нем операциями сложения (1), умножения (2) и отношением порядка "больше или равно" $\big((a, 0) \geqslant (b, 0) \Leftrightarrow a \geqslant b\big)$ является множеством действительных чисел.

Определение множества действительных чисел и список аксиом см. в википедии. Покажем, что имеющееся множество удовлетворяет всем аксиомам. **Аксиомы поля**.

1. Сложение коммутативно. Для любых $(a, 0)$, $(b, 0) \in \widehat{\mathbb{R}}$

$$(a, 0) + (b, 0) = (a + b, 0) = (b + a, 0) = (b, 0) + (a, 0).$$

2. Сложение ассоциативно. Для любых $(a, 0)$, $(b, 0)$, $(c, 0) \in \widehat{\mathbb{R}}$

$$\begin{aligned}(a, 0) + \big((b, 0) + (c, 0)\big) &= (a, 0) + (b + c, 0) = (a + (b + c), 0) = \\ = ((a + b) + c, 0) &= (a + b, 0) + (c, 0) = \big((a, 0) + (b, 0)\big) + (c, 0).\end{aligned}$$

3. Ноль существует. Для любых $(a, 0) \in \widehat{\mathbb{R}}$

$$(a, 0) + (0, 0) = (a + 0, 0) = (a, 0).$$

4. Противоположный элемент существует. Для любых $(a, 0) \in \widehat{\mathbb{R}}$

$$(a, 0) + (-a, 0) = (a + (-a), 0) = (0, 0).$$

5. Умножение коммутативно. Для любых $(a, 0)$, $(b, 0) \in \widehat{\mathbb{R}}$

$$(a, 0) \cdot (b, 0) = (ab, 0) = (ba, 0) = (b, 0) \cdot (a, 0).$$

6. Умножение ассоциативно. Для любых $(a, 0)$, $(b, 0)$, $(c, 0) \in \widehat{\mathbb{R}}$

$$\begin{gathered}(a, 0) \cdot \big((b, 0) \cdot (c, 0)\big) = (a, 0) \cdot (bc, 0) = \\ = (a(bc), 0) = ((ab)c, 0) = (ab, 0) \cdot (c, 0) = \\ = \big((a, 0) \cdot (b, 0)\big) \cdot (c, 0).\end{gathered}$$

7. Единица существует. Для любых $(a, 0) \in \widehat{\mathbb{R}}$

$$(a, 0) \cdot (1, 0) = (a \cdot 1, 0) = (a, 0).$$

8. Обратный элемент существует. Для любого $(a,0) \neq (0,0)$
$$(a,0)\cdot(a^{-1},0) = (aa^{-1},0) = (1,0).$$
9. Сложение дистрибутивно относительно умножения.
Для любых $(a,0)$, $(b,0)$, $(c,0) \in \widehat{\mathbb{R}}$
$$\begin{gathered}(a,0)\cdot\big((b,0)+(c,0)\big) = (a,0)\cdot(b+c,0) = \\ = (a(b+c),0) = (ab+bc,0) = (ab,0)+(ac,0) = \\ = (a,0)\cdot(b,0)+(a,0)\cdot(c,0).\end{gathered}$$
10. Единица и ноль не равны:
$$1 \neq 0 \Rightarrow (1,0) \neq (0,0).$$

Аксиомы порядка.

1. Отношение $\geqslant$ рефлексифно. Для любых $(a,0) \in \widehat{\mathbb{R}}$
$$a \geqslant a \Leftrightarrow (a,0) \geqslant (a,0).$$
2. Отношение $\geqslant$ антисимметрично. Для любых $a, b \in \mathbb{R}$
$$(a,0) \geqslant (b,0) \,\wedge\, (b,0) \geqslant (a,0) \Leftrightarrow a \geqslant b \,\wedge\, b \geqslant a \Leftrightarrow a = b \Leftrightarrow (a,0) = (b,0).$$
3. Отношение $\geqslant$ транзитивно. Для любых $(a,0)$, $(b,0)$, $(c,0) \in \widehat{\mathbb{R}}$
$$(a,0) \geqslant (b,0) \,\wedge\, (b,0) \geqslant (c,0) \Leftrightarrow a \geqslant b \,\wedge\, b \geqslant c \Leftrightarrow a \geqslant c \Leftrightarrow (a,0) \geqslant (c,0).$$
4. $\{(a,0)\,|\,a \in \mathbb{R}\}$ линейно упорядочено. Для любых $(a,0)$, $(b,0) \in \widehat{\mathbb{R}}$
$$a \geqslant b \,\vee\, b \geqslant a \Leftrightarrow (a,0) \geqslant (b,0) \,\vee\, (b,0) \geqslant (a,0).$$
5. Для любых $(a,0)$, $(b,0)$, $(c,0) \in \widehat{\mathbb{R}}$
$$(a,0) \geqslant (b,0) \Leftrightarrow a \geqslant b \Leftrightarrow a+c \geqslant b+c \Leftrightarrow (a+c,0) \geqslant b+c.$$
6. Для любых $(a,0)$, $(b,0) \in \widehat{\mathbb{R}}$
$$\begin{gathered}(a,0) \geqslant (0,0) \,\wedge\, (b,0) \geqslant (0,0) \Leftrightarrow a \geqslant 0 \wedge b \geqslant 0 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow ab \geqslant 0 \Leftrightarrow (ab,0) \geqslant 0 \Leftrightarrow (a,0)\cdot(b,0) \geqslant 0.\end{gathered}$$

Аксиома непрерывности. Каковы бы ни были непустые множества $A \subset$ $\subset \{(a,0)\,|\,a \in \mathbb{R}\}$ и $B \subset \{(a,0)\,|\,a \in \mathbb{R}\}$, такие что для любых двух элементов $(a,0) \in A$ и $(b,0) \in B$ выполняется неравенство $(a,0) \geqslant (b,0)$, существует такое число $(c,0) \in \{(a,0)\,|\,a \in \mathbb{R}\}$, что для всех $(a,0) \in A$ и $(b,0) \in B$ имеет место соотношение
$$(a,0) \geqslant (c,0) \geqslant (b,0).$$

ЧАСТЬ 2: ФУНКЦИИ

Функции $f : \widehat{\mathbb{R}} \longmapsto \widehat{\mathbb{R}}$ назовем *функциями надвещественного переменного*. Поскольку каждое надвещественное число $\hat{\omega}$ характеризуется парой вещественных чисел, то задание надвещественной функции $\hat{\omega} = u + v\hat{o}$ переменной $\hat{z} = x + y\hat{o}$ эквивалентно заданию двух вещественных функций от двух вещественных переменных:

$$f(\hat{z}) = u(x, y) + v(x, y)\hat{o}, \tag{13}$$

Такую запись будем называть алгебраической формой функции $f(\hat{z})$. Функции u и v назовем *вещественной* и *малой* частями функции f соответственно.

Пример 5 *Запишем функцию $f(\hat{z}) = \hat{z}^3 + 2\hat{z}^2$ в алгебраической форме. Пусть $\hat{z} = x + y\hat{o}$, тогда:*

$$f(\hat{z}) = f(x + y\hat{o}) = (x + y\hat{o})^3 + 2(x + y\hat{o})^2 = x^3 + 3x^2y\hat{o} + 2x^2 + 4xy\hat{o} = \\ = (x^3 + 2x^2) + (3x^2y + 4xy)\hat{o}.$$

Пример 6 *Найдем область определения этой же функции. Поскольку возведение в степень не определено для чисел $\hat{z} = b\hat{o}$, $b \neq 0$, то*

$$D(f) = \widehat{\mathbb{R}} \backslash \{b\hat{o} \,|\, b \neq 0\}.$$

Попробуем теперь отыскать множество ее значений. Какие значения могут принимать $\mathrm{Re}\, f$ *и* $\mathrm{Ab}\, f$*? В соответствии с* (13) *они зависят от* $\mathrm{Re}\, \hat{z} = x$ *и* $\mathrm{Ab}\, \hat{z} = y$*. При $x = y = 0$* $\mathrm{Re}\, f = \mathrm{Ab}\, f = 0$*; при $x = 0$, $y \neq 0$ f не определена; при $x \neq 0$, $y \in \mathbb{R}$* $\mathrm{Re}\, f$ *принимает любые ненулевые значения,* $\mathrm{Ab}\, f$ *принимает любые значения. Таким образом,*

$$E(f) = \{0\} \cup \{(a, b) \,|\, a \in \mathbb{R} \backslash \{0\},\, b \in \mathbb{R}\} = \widehat{\mathbb{R}} \backslash \{b\hat{o} \,|\, b \neq 0\}.$$

Многочлены. *Надвещественными многочленами* будем называть суммы вида

$$P_n(\hat{z}) = \sum_{i=0}^{n} \hat{c}_i \hat{z}^i, \tag{14}$$

где $\hat{c}_i = a_i + b_i\hat{o} \in \widehat{\mathbb{R}}$, $\hat{z} = x + y\hat{o} \in \widehat{\mathbb{R}}$. Представим многочлен в алгебраической форме:

$$P_n(\hat{z}) = \sum_{i=0}^{n} \hat{c}_i \hat{z}^i = \sum_{i=0}^{n} (a_i + b_i\hat{o})(x + y\hat{o})^i = \sum_{i=0}^{n} (a_i + b_i\hat{o})(x^i + ix^{i-1}y\hat{o}) = \\ = \sum_{i=0}^{n} \left(a_i x^i + (a_i i x^{i-1} y + b_i x^i)\hat{o}\right) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i + \left(\sum_{i=0}^{n} (a_i i x^{i-1} y + b_i x^i)\right)\hat{o}.$$

$$P_n(\hat{z}) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i + \left(\sum_{i=0}^{n} (a_i i x^{i-1} y + b_i x^i) \right) \hat{o}. \qquad (15)$$

Дифференциалы. Рассмотрим функцию $f(\hat{z})$. *Правым дифференциалом функции* $f(\hat{z})$ назовем функцию надвещественного переменного $g(\hat{z}) = f(\hat{z}+\hat{o}) - f(\hat{z})$ и обозначим $d_+ f(\hat{z})$. *Левым дифференциалом функции* $f(\hat{z})$ назовем функцию надвещественного переменного $g(\hat{z}) = f(\hat{z}) - f(\hat{z}-\hat{o})$ и обозначим $d_- f(\hat{z})$. Далее, если особо не уточняется, под *дифференциалом функции* будет подразумеваться ее правый дифференциал и обозначаться просто $df(\hat{z})$.

Пример 7 *Найдем дифференциал функции* $f(\hat{z}) = \hat{z}^2$*:*

$$df(\hat{z}) = f(\hat{z}+\hat{o}) - f(\hat{z}) = (\hat{z}+\hat{o})^2 - \hat{z}^2 = \hat{z}^2 + 2\hat{z}\hat{o} - \hat{z}^2 = 2\hat{z}\hat{o}.$$

Если $\hat{z} = x + y\hat{o}$*, то*

$$df = 2(x + y\hat{o})\hat{o} = 2x\hat{o}.$$

Пример 8 *Найдем дифференциал функции* $f(\hat{z}) = \hat{z}$*:*

$$df(\hat{z}) = f(\hat{z}+\hat{o}) - f(\hat{z}) = \hat{z} + \hat{o} - \hat{z} = \hat{o}.$$

Это же равенство запишем в виде

$$d\hat{z} = \hat{o}. \qquad (16)$$

Пример 9 *Найдем дифференциал функции* $f(\hat{z}) = \dfrac{1}{\hat{z}}$*:*

$$df(\hat{z}) = f(\hat{z}+\hat{o}) - f(\hat{z}) = \frac{1}{\hat{z}+\hat{o}} - \frac{1}{\hat{z}} = \frac{\hat{z} - (\hat{z}+\hat{o})}{(\hat{z}+\hat{o})\hat{z}} = -\frac{\hat{o}}{\hat{z}^2 + \hat{z}\hat{o}}.$$

Представим $\hat{z}$ *в алгебраической форме:*

$$df = -\frac{\hat{o}}{(x+y\hat{o})^2 + (x+y\hat{o})\hat{o}} = -\frac{\hat{o}}{x^2 + (2xy + x)\hat{o}}.$$

Представим функцию df *в алгебраической форме, воспользовавшись формулой деления:*

$$df = -\left(\frac{0}{x^2} + \frac{x^2 \cdot 1 - 0 \cdot (2xy + x)}{x^4} \hat{o} \right) = -\frac{\hat{o}}{x^2}.$$

Замечание. *Попробуем найти дифференциал в том виде, в каком мы его понимали раньше:*

$$df = f(x+dx) - f(x) = \frac{1}{x+dx} - \frac{1}{x} = -\frac{dx}{(x+dx)x}.$$

Если бы мы хотели найти производную функции f делением дифференциала на dx, то у нас бы ничего не вышло:

$$f' = \frac{df}{dx} = -\frac{1}{x^2 + xdx}.$$

Чтобы получить правильный ответ, приходится совершать предельный переход, отбрасывая слагаемое xdx, что мотивируется "малостью xdx по сравнению с x^2". Надвещественные числа не нуждаются в подобном обхождении, одерживая победу.

Пример 10 *Обобщим полученные результаты и найдем дифференциал степенной функции $f(\hat{z}) = \hat{z}^\alpha$, $\alpha \in \mathbb{Q}$:*

$$\begin{gathered} df = (\hat{z} + \hat{o})^\alpha - \hat{z}^\alpha = (x + (y+1)\hat{o})^\alpha - (x + y\hat{o})^\alpha = \\ = x^\alpha + \alpha x^{\alpha-1}(y+1)\hat{o} - \left(x^\alpha + \alpha x^{\alpha-1} y\hat{o}\right), \end{gathered}$$

$$d\hat{z}^\alpha = \alpha x^{\alpha-1}\hat{o}. \tag{17}$$

Пример 11 *Функция $f(\hat{z}) = \operatorname{sgn}\hat{z}$ для надвещественных чисел определяется так же, как и для вещественных:*

$$\operatorname{sgn}\hat{z} = \begin{cases} 1, & \hat{z} > 0 \\ 0, & \hat{z} = 0 \\ -1, & \hat{z} < 0. \end{cases}$$

Найдем ее правый дифференциал в точке $\hat{z} = 0$. Имеем:

$$d_+ \operatorname{sgn} 0 = \operatorname{sgn}\hat{o} - \operatorname{sgn} 0 = 1 - 0 = 1.$$

Аналогично для левого дифференциала:

$$d_- \operatorname{sgn} 0 = \operatorname{sgn} 0 - \operatorname{sgn}(-\hat{o}) = 0 - (-1) = 1.$$

С другой стороны, в любой другой точке $\hat{z} \neq 0$ имеем

$$d \operatorname{sgn}\hat{z} = \operatorname{sgn}(\hat{z} + \hat{o}) - \operatorname{sgn}\hat{z} = 0.$$

Последний пример наталкивает на новое определение. Функция f называется *дифференцируемой справа в точке* $\hat{z}_0$, если $\operatorname{Re} d_+ f(\hat{z}_0) = 0$. Аналогично, функция f называется *дифференцируемой слева в точке* $\hat{z}_0$, если $\operatorname{Re} d_- f(\hat{z}_0) = 0$. Функция называется *дифференцируемой в точке* $\hat{z}_0$, если она дифференцируема справа и слева, а правый и левый дифференциалы равны. В силу (13) дифференциал такой функции может быть записан как $df(x + y\hat{o}) = u(x, y)\hat{o}$.

Пример 12 *Согласно этому определению, функция* $\operatorname{sgn}\hat{z}$ *недифференцируема в точке* $\hat{z}=0$*, но дифференцируема в любой другой точке. Рассмотрим функцию* $f(\hat{z})=|\hat{z}|$*, которая задается кусочно:*

$$|\hat{z}| = \begin{cases} \hat{z}, & \hat{z} \geqslant 0 \\ -\hat{z}, & \hat{z} < 0 \end{cases}$$

Ее правый дифференциал в точке $\hat{z}=0$ *равен*

$$d_+|\hat{z}| = |\hat{o}| - |0| = \hat{o},$$

а левый, с другой стороны,

$$d_-|\hat{z}| = |0| - |-\hat{o}| = -\hat{o}.$$

Функция дифференцируема слева и справа, но правый и левый дифференциалы не равны, а $|\hat{z}|$ *не дифференцируем в нуле.*

Свойства дифференциала Пусть f и g – функции надвещественного переменного. Тогда

1. $df(\hat{z}) = 0, f(\hat{z}) = \hat{z}_0 \in \widehat{\mathbb{R}}$;
2. $d(f+g)(\hat{z}) = df(\hat{z}) + dg(\hat{z})$;
3. $d(fg)(\hat{z}) = f(\hat{z}+\hat{o})dg(\hat{z}) + g(\hat{z})df(\hat{z}) = f(\hat{z})dg(\hat{z}) + g(\hat{z}+\hat{o})df(\hat{z})$;
4. $d\left(\dfrac{f}{g}\right)(\hat{z}) = \dfrac{g(\hat{z})df(\hat{z}) - f(\hat{z})dg(\hat{z})}{g(\hat{z})g(\hat{z}+\hat{o})}$.

Докажем свойства дифференциала по порядку.

1. $df(\hat{z}) = f(\hat{z}+\hat{o}) - f(\hat{z}) = \hat{z}_0 - \hat{z}_0 = 0$;
2. $d(f+g)(\hat{z}) = (f+g)(\hat{z}+\hat{o}) - (f+g)(\hat{z}) = f(\hat{z}+\hat{o}) - f(\hat{z}) + g(\hat{z}+\hat{o}) - g(\hat{z}) = df + dg$;
3. $$\begin{aligned} &d(fg)(\hat{z}) = (fg)(\hat{z}+\hat{o}) - (fg)(\hat{z}) = \\ &= f(\hat{z}+\hat{o})g(\hat{z}+\hat{o}) - f(\hat{z})g(\hat{z}) = \\ &= f(\hat{z}+\hat{o})g(\hat{z}+\hat{o}) - f(\hat{z}+\hat{o})g(\hat{z}) + f(\hat{z}+\hat{o})g(\hat{z}) - f(\hat{z})g(\hat{z}) =; \\ &= f(\hat{z}+\hat{o})\left(g(\hat{z}+\hat{o}) - g(\hat{z})\right) + g(\hat{z})\left(f(\hat{z}+\hat{o}) - f(\hat{z})\right) = \\ &= f(\hat{z}+\hat{o})dg(\hat{z}) + g(\hat{z})df(\hat{z}) \end{aligned}$$

4. $$\begin{aligned} d\left(\frac{f}{g}\right) &= \frac{f(\hat z+\hat o)}{g(\hat z+\hat o)} - \frac{f(\hat z)}{g(\hat z)} = \\ &= \frac{f(\hat z+\hat o)g(\hat z) - f(\hat z)g(\hat z+\hat o)}{g(\hat z)g(\hat z+\hat o)} = \\ &= \frac{f(\hat z+\hat o)g(\hat z) - f(\hat z)g(\hat z) + f(\hat z)g(\hat z) - f(\hat z)g(\hat z+\hat o)}{g(\hat z)g(\hat z+\hat o)} = \\ &= \frac{g(\hat z)\big(f(\hat z+\hat o) - f(\hat z)\big) - f(\hat z)\big(g(\hat z+\hat o) - g(\hat z)\big)}{g(\hat z)g(\hat z+\hat o)} = \frac{g(\hat z)df(\hat z) - f(\hat z)dg(\hat z)}{g(\hat z)g(\hat z+\hat o)}. \end{aligned}$$

Докажем теорему.

Теорема 1 *Вещественная часть функции f зависит только от вещественной части аргумента тогда и только тогда, когда f дифференцируема:*

$$\operatorname{Re} f(\hat z) = v(\operatorname{Re}\hat z) \Leftrightarrow df(\hat z) = u(x,y)\hat o. \tag{18}$$

Доказательство. Необходимость. Поскольку $\operatorname{Re} f(\hat z) = v(\operatorname{Re}\hat z)$, то $f(\hat z) = f(x+y\hat o) = v(x) + u(x,y)\hat o$. Тогда

$$\begin{gathered} df(\hat z) = f(\hat z+\hat o) - f(\hat z) = f(x+(y+1)\hat o) - f(x+y\hat o) = \\ = v(x) + u(x,y+1)\hat o - \big(v(x) + u(x,y)\hat o\big) = \big(u(x,y+1) - u(x,y)\big)\hat o = \tilde u(x,y)\hat o. \end{gathered}$$

Достаточность. Пусть функция $f(\hat z) = v(x,y)+u(x,y)\hat o$ дифференцируема. Тогда

$$\begin{gathered} df(\hat z) = f(\hat z+\hat o) - f(\hat z) = f(x+(y+1)\hat o) - f(x+y\hat o) = \\ = v(x,y+1) + u(x,y+1)\hat o - \big(v(x,y) + u(x,y)\hat o\big), \\ \big(v(x,y+1) - v(x,y)\big) + \big(u(x,y+1) - u(x,y)\big)\hat o = \tilde u(x,y)\hat o \end{gathered}$$

Вещественная часть правой части равенства равна нулю, тогда

$$v(x,y+1) - v(x,y) = 0.$$

Поскольку равенство верно для любых y, то $v(x,y)$ зависит только от x. □

Мы получили, что дифференцируемые функции записываются в виде $f(x+y\hat o) = v(x) + u(x,y)\hat o$. Отыскать функцию $v(x)$ довольно просто.

Теорема 2 *Если* $\operatorname{Re} f(\hat z) = v(\operatorname{Re}\hat z)$, *то* $v(x) = f(x)$.

Доказательство. Найдем значение f в вещественной точке $x \in \mathbb{R}$:

$$f(x) = v(x) + u(x,0)\hat{o},$$

из чего немендленно следует, что $f(x) = v(x)$. $\square$

Итак, дифференцируемые функции представимы в виде

$$f(\hat{z}) = f(x + y\hat{o}) = f(x) + u(x,y)\hat{o}. \tag{19}$$