

ЧАСТЬ 1: АРИФМЕТИКА

Определение. Множеством надвещественных чисел называется множество упорядоченных пар вещественных чисел (a, b) с введенными на нем двумя операциями сложения (символ $+$) и умножения (символ \cdot), определенными следующим образом.

$$1. (a, b) + (c, d) = (a + b, c + d), \quad (1)$$

$$2. (a, b) \cdot (c, d) = (ac, ad + bc) \text{ (если } a, c \text{ не одновременно равны } 0). \quad (2)$$

Число a будем называть *вещественной* частью надвещественного числа и обозначать $\text{Re } \hat{a}$, число b – *малой* частью числа и обозначать $\text{Ab } \hat{a}$.

Множество надвещественных обозначим $\hat{\mathbb{R}}$.

Заметим, что

$$\begin{aligned} (a, 0) + (b, 0) &= (a + b, 0), \\ (a, 0) \cdot (b, 0) &= (ab, 0). \end{aligned}$$

Таким образом, имеет смысл писать a вместо $(a, 0)$ и считать множество вещественных чисел подмножеством множества надвещественных чисел:

$$\mathbb{R} \subset \hat{\mathbb{R}}.$$

Подробнее об этом написано в приложении 1.

Пример 1 Умножим вещественное число C на надвещественное $\hat{a} = (a, b)$:

$$C \cdot \hat{a} = (C, 0) \cdot (a, b) = (C \cdot a, C \cdot b + 0 \cdot a) = (Ca, Cb).$$

Пару $(0, 1)$ обозначим как \hat{o} . Таким образом,

$$C \cdot (0, 1) = (0, C) = C\hat{o},$$

отсюда

$$(a, b) = (a, 0) + (0, b) = a + b\hat{o}. \quad (3)$$

Такую запись надвещественного числа назовем *алгебраической*. Удобнее становится записывать сумму надвещественных чисел:

$$a + b\hat{o} + (c + d\hat{o}) = (a + c) + (b + d)\hat{o}. \quad (4)$$

Равенство. Надвещественные числа (a, b) и (c, d) равны тогда и только тогда, когда $a = c$, $b = d$. В других обозначениях:

$$\hat{a} = \hat{b} \Leftrightarrow \begin{cases} \text{Re } \hat{a} = \text{Re } \hat{b} \\ \text{Ab } \hat{a} = \text{Ab } \hat{b} \end{cases} \quad (5)$$

Из этого определения немедленно вытекают рефлексивность, симметричность и транзитивность равенства, а также следующие свойства:

1. $\hat{a} = \hat{b}, \hat{c} = \hat{d} \Rightarrow \hat{a} \cdot \hat{c} = \hat{b} \cdot \hat{d}$ (см. определение умножения).

2. $\hat{a} = \hat{b}, \hat{c} = \hat{d} \Rightarrow \hat{a} + \hat{c} = \hat{b} + \hat{d}$,

Разность. Разностью надвещественных чисел \hat{c}_1 и \hat{c}_2 является надвещественное число \hat{c} такое, что

$$\hat{c} + \hat{c}_2 = \hat{c}_1,$$

и обозначается

$$\hat{c} = \hat{c}_1 - \hat{c}_2.$$

Пусть $\hat{c} = (a, b)$, $\hat{c}_1 = (a_1, b_1)$, $\hat{c}_2 = (a_2, b_2)$. Тогда

$$\begin{cases} a + a_2 = a_1 \\ b + b_2 = b_1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = a_1 - a_2 \\ b = b_1 - b_2 \end{cases}$$

Следовательно, $a + b\hat{o} - (c + d\hat{o}) = (a - c) + (b - d)\hat{o}$. Позже аналогично определим корень n -ной степени надвещественного числа \hat{a} .

Свойства сложения и умножения. Перемножим числа в их алгебраической форме, как если бы они были действительными:

$$(a + b\hat{o}) \cdot (c + d\hat{o}) = ac + ad\hat{o} + cb\hat{o} + bd\hat{o}\hat{o} = ac + (ad + bc)\hat{o} + bd\hat{o}^2.$$

Но по определению

$$(a + b\hat{o}) \cdot (c + d\hat{o}) = ac + (ad + cb)\hat{o}.$$

Выходит, что чтобы перемножить два надвещественных числа в алгебраической форме, можно перемножить их как суммы действительных чисел, отбросив затем слагаемые вида \hat{o}^n , сделав вид, что вы их не видели.

Пример 2 Получить формулу для n -ной степени числа \hat{a} (a n -ной степенью надвещественного числа \hat{a} назовем произведение n множителей \hat{a}) можно с помощью бинома Ньютона:

$$(a + b\hat{o})^n = \sum_{k=0}^n C_n^k a^{n-k} (b\hat{o})^k = a^n + na^{n-1}b\hat{o} = a^{n-1}(a + nb\hat{o}).$$

Докажем полученное равенство средствами математической индукции. Возведем $\hat{a} = (a, b)$ в квадрат:

$$\hat{a}^2 = (a, b)^2 = (a^2, 2ab).$$

База индукции доказана. Предположим, что

$$\hat{a}^k = (a^k, na^{k-1}b),$$

тогда

$$\begin{aligned}\hat{a}^{k+1} &= \hat{a}^k \cdot \hat{a} = (a^k, na^{k-1}b) \cdot (a, b) = \\ &= (a^{k+1}, na^{k-1}b \cdot a + a^{k+1}b) = (a^{k+1}, (k+1)a^k b).\end{aligned}$$

Таким образом,

$$\hat{a}^n = (a^n, na^{n-1}b). \quad (6)$$

Пример 3 Найдем \hat{a}^0 :

$$\hat{a}^0 = (a, b)^0 = (a^0, 0 \cdot a^0 b) = (1, 0) = 1.$$

Пример 4 Может ли произведение надвещественных чисел быть вещественным числом? Да, пример – произведение чисел вида (a, b) и $(a, -b)$:

$$(a, b) \cdot (a, -b) = (aa, ab + a(-b)) = (a^2, 0) = a^2.$$

Их сумма, очевидно, также действительное число.

Приведем свойства сложения и умножения. Пусть \hat{a} , \hat{b} и \hat{c} – надвещественные числа. Тогда

1. $\hat{a} + \hat{b} = \hat{b} + \hat{a}$ (сложение коммутативно);
2. $\hat{a} \cdot \hat{b} = \hat{b} \cdot \hat{a}$ (умножение коммутативно);
3. $(\hat{a} + \hat{b}) + \hat{c} = \hat{a} + (\hat{b} + \hat{c})$ (сложение ассоциативно);
4. $(\hat{a} \cdot \hat{b}) \cdot \hat{c} = \hat{a} \cdot (\hat{b} \cdot \hat{c})$ (умножение ассоциативно);
5. $(\hat{a} + \hat{b}) \cdot \hat{c} = \hat{a} \cdot \hat{c} + \hat{b} \cdot \hat{c}$ (дистрибутивность сложения относительно умножения).

Докажем только последнее свойство. Пусть $\hat{a} = (a_1, b_1)$, $\hat{b} = (a_2, b_2)$, $\hat{c} = (a_3, b_3)$. Левая часть равенства равна

$$\begin{aligned}(\hat{a} + \hat{b}) \cdot \hat{c} &= ((a_1, b_1) + (a_2, b_2)) \cdot (a_3, b_3) = (a_1 + a_2, b_1 + b_2) \cdot (a_3, b_3) = \\ &= ((a_1 + a_2)a_3, (a_1 + a_2)b_3 + (b_1 + b_2)a_3) = \\ &= (a_1a_3 + a_2a_3, a_1b_3 + a_2b_2 + b_1a_3 + b_2a_3).\end{aligned}$$

Правая же равна

$$\begin{aligned}\hat{a} \cdot \hat{c} + \hat{b} \cdot \hat{c} &= (a_1, b_1) \cdot (a_3, b_3) + (a_2, b_2) \cdot (a_3, b_3) = \\ &= (a_1a_3, a_1b_3 + b_1a_3) + (a_2a_3, a_2b_3 + a_3b_2) = \\ &= (a_1a_3 + a_2a_3, a_1b_3 + b_1a_3 + a_2b_3 + a_3b_2).\end{aligned}$$

Свойство доказано.

Сравнение. Определим отношение “больше” ($>$) между элементами $\hat{\mathbb{R}}$:

$$\hat{a} > \hat{b} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \text{Re } \hat{a} > \text{Re } \hat{b} \\ \left\{ \begin{array}{l} \text{Re } \hat{a} = \text{Re } \hat{b} \\ \text{Ab } \hat{a} > \text{Ab } \hat{b} \end{array} \right. \end{array} \right. \quad (7)$$

Отсюда следует важное утверждение. Рассмотрим числа $n\hat{o}$ и a , $a > 0$, тогда $n\hat{o} < a$. Поскольку мы не указали n и a , то неравенство будет справедливо для любых n и a :

$$\forall a > 0 \quad \forall n \quad n\hat{o} < a,$$

или

$$\forall a > 0 \quad 0 < \hat{o} < a. \quad (8)$$

Утверждение является отрицанием аксиомы Архимеда, а его второй способ записи призван подчеркнуть природу объекта \hat{o} , меньшего любого действительного числа, который теперь мы будем называть бесконечно малой. Также введем отношение “больше или равно” \geq :

$$\hat{a} \geq \hat{b} \Leftrightarrow \hat{a} > \hat{b} \vee \hat{a} = \hat{b} \quad (9)$$

Частное. Частным надвещественных чисел \hat{c}_1 и \hat{c}_2 назовем надвещественное число \hat{c} такое, что

$$\hat{c} \cdot \hat{c}_2 = \hat{c}_1,$$

и обозначим

$$\hat{c} = \frac{\hat{c}_1}{\hat{c}_2}.$$

Найдем \hat{c} . Пусть $\hat{c} = (a, b)$, $\hat{c}_1 = (a_1, b_1)$, $\hat{c}_2 = (a_2, b_2)$. Тогда

$$\begin{cases} aa_2 = a_1 \\ ab_2 + ba_2 = b_1. \end{cases}$$

Видно, что при $a_2 = 0$, $a_1 \neq 0$ первое уравнение не имеет решения, а следовательно, частное не определено. Решение разбивается на два случая: при $a_1 = a_2 = 0$ и при $a_2 \neq 0$. В первом случае получаем систему

$$\begin{cases} 0 \cdot a = 0 \\ ab_2 + 0 \cdot b = b_1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b \in \mathbb{R} \\ a = \frac{b_1}{b_2}. \end{cases}$$

Из решения системы вытекает неопределенность: одинаково верны равенства $\frac{a\hat{o}}{b\hat{o}} = \frac{a}{b}$ и $\frac{a\hat{o}}{b\hat{o}} = \frac{a}{b} + 4\hat{o}$, поэтому будем считать малую часть частного равным 0.

Для второго случая получаем

$$\begin{cases} a = \frac{a_1}{a_2} \\ \frac{a_1}{a_2}b_2 + ba_2 = b_1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{a_1}{a_2} \\ b = \left(b_1 - \frac{a_1}{a_2}\right) \frac{1}{a_2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{a_1}{a_2} \\ b = \frac{a_2b_1 - a_1b_2}{a_2^2}. \end{cases}$$

Итак, $\hat{c} = \left(\frac{a_1}{a_2}, \frac{a_2b_1 - a_1b_2}{a_2^2}\right)$ при $a_2 \neq 0$, $\hat{c} = \frac{b_1}{b_2}$ при $a_1 = a_2 = 0$.

Найдем обратное к надвещественному $\hat{a} = (a, b)$ число \hat{a}^{-1} , т.е. такое число \hat{b} , что $\hat{a}\hat{b} = 1$. Как мы уже было показано, в случае, если $\operatorname{Re} \hat{a} = 0$, \hat{a}^{-1} не определен, поскольку $\operatorname{Re} 1 = 1 \neq 0$. Тогда, если $\operatorname{Re} \hat{a} \neq 0$, согласно формуле деления получаем

$$\hat{a}^{-1} = \left(\frac{1}{a}, -\frac{b}{a^2}\right). \quad (10)$$

Таким образом, равенство $\frac{a}{b} = ab^{-1}$ в общем случае неверно.

Корень n -ной степени. Корнем n -ной степени надвещественного числа \hat{a} назовем число \hat{b} такое, что

$$\hat{a} = \hat{b}^n,$$

и обозначим

$$\hat{b} = \sqrt[n]{\hat{a}}.$$

Пусть $\hat{a} = (a_1, b_1)$, $\hat{b} = (a_2, b_2)$. Тогда, согласно (6), получаем

$$\begin{cases} a_1 = a_2^n \\ b_1 = na_2^{n-1}b_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a_2 = a_1^{1/n} \\ b_2 = \frac{1}{n}a_1^{(1-n)/n}b_1 \end{cases}$$

Таким образом,

$$\sqrt[n]{\hat{a}} = \left(a_1^{1/n}, \frac{1}{n}a_1^{(1-n)/n}b_1\right). \quad (11)$$

Рациональную степень $\hat{\omega} = \hat{z}^{m/n}$, $m \in \mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{N}$, определим как $\hat{\omega} = \left(\sqrt[n]{\hat{z}}\right)^m$.

Пусть $\hat{z}^{1/n} = (a_1^{1/n}, \frac{1}{n}a_1^{(1-n)/n}b_1) = (a_1, b_1)$. Тогда

$$\hat{z}^{m/n} = (a_1^m, ma_1^{m-1}b_1) = (a_1^{m/n}, ma_1^{(m-1)/n} \cdot \frac{1}{n}a_1^{(1-n)/n}b_1) = (a_1^{m/n}, \frac{m}{n}a_1^{(m-n)/n}b_1).$$

Итак, если $\alpha \in \mathbb{Q}$, то

$$\hat{z}^\alpha = a^\alpha + \alpha a^{\alpha-1}b\hat{o}. \quad (12)$$

Приложение 1: о расширении действительных чисел

Покажем, что множество упорядоченных пар $\{(a, 0) \mid a \in \mathbb{R}\}$ с введенными на нем операциями сложения (1), умножения (2) и отношением порядка “больше или равно” $((a, 0) \geq (b, 0) \Leftrightarrow a \geq b)$ является множеством действительных чисел.

Определение множества действительных чисел и список аксиом см. в википедии. Покажем, что имеющееся множество удовлетворяет всем аксиомам. **Аксиомы поля.**

1. Сложение коммутативно. Для любых $(a, 0), (b, 0) \in \widehat{\mathbb{R}}$

$$(a, 0) + (b, 0) = (a + b, 0) = (b + a, 0) = (b, 0) + (a, 0).$$

2. Сложение ассоциативно. Для любых $(a, 0), (b, 0), (c, 0) \in \widehat{\mathbb{R}}$

$$\begin{aligned} (a, 0) + ((b, 0) + (c, 0)) &= (a, 0) + (b + c, 0) = (a + (b + c), 0) = \\ &= ((a + b) + c, 0) = (a + b, 0) + (c, 0) = ((a, 0) + (b, 0)) + (c, 0). \end{aligned}$$

3. Ноль существует. Для любых $(a, 0) \in \widehat{\mathbb{R}}$

$$(a, 0) + (0, 0) = (a + 0, 0) = (a, 0).$$

4. Противоположный элемент существует. Для любых $(a, 0) \in \widehat{\mathbb{R}}$

$$(a, 0) + (-a, 0) = (a + (-a), 0) = (0, 0).$$

5. Умножение коммутативно. Для любых $(a, 0), (b, 0) \in \widehat{\mathbb{R}}$

$$(a, 0) \cdot (b, 0) = (ab, 0) = (ba, 0) = (b, 0) \cdot (a, 0).$$

6. Умножение ассоциативно. Для любых $(a, 0), (b, 0), (c, 0) \in \widehat{\mathbb{R}}$

$$\begin{aligned} (a, 0) \cdot ((b, 0) \cdot (c, 0)) &= (a, 0) \cdot (bc, 0) = \\ &= (a(bc), 0) = ((ab)c, 0) = (ab, 0) \cdot (c, 0) = \\ &= ((a, 0) \cdot (b, 0)) \cdot (c, 0). \end{aligned}$$

7. Единица существует. Для любых $(a, 0) \in \widehat{\mathbb{R}}$

$$(a, 0) \cdot (1, 0) = (a \cdot 1, 0) = (a, 0).$$

8. Обратный элемент существует. Для любого $(a, 0) \neq (0, 0)$

$$(a, 0) \cdot (a^{-1}, 0) = (aa^{-1}, 0) = (1, 0).$$

9. Сложение дистрибутивно относительно умножения.

Для любых $(a, 0), (b, 0), (c, 0) \in \widehat{\mathbb{R}}$

$$\begin{aligned} (a, 0) \cdot ((b, 0) + (c, 0)) &= (a, 0) \cdot (b + c, 0) = \\ &= (a(b + c), 0) = (ab + bc, 0) = (ab, 0) + (ac, 0) = \\ &= (a, 0) \cdot (b, 0) + (a, 0) \cdot (c, 0). \end{aligned}$$

10. Единица и ноль не равны:

$$1 \neq 0 \Rightarrow (1, 0) \neq (0, 0).$$

Аксиомы порядка.

1. Отношение \geq рефлексивно. Для любых $(a, 0) \in \widehat{\mathbb{R}}$

$$a \geq a \Leftrightarrow (a, 0) \geq (a, 0).$$

2. Отношение \geq антисимметрично. Для любых $a, b \in \mathbb{R}$

$$(a, 0) \geq (b, 0) \wedge (b, 0) \geq (a, 0) \Leftrightarrow a \geq b \wedge b \geq a \Leftrightarrow a = b \Leftrightarrow (a, 0) = (b, 0).$$

3. Отношение \geq транзитивно. Для любых $(a, 0), (b, 0), (c, 0) \in \widehat{\mathbb{R}}$

$$(a, 0) \geq (b, 0) \wedge (b, 0) \geq (c, 0) \Leftrightarrow a \geq b \wedge b \geq c \Leftrightarrow a \geq c \Leftrightarrow (a, 0) \geq (c, 0).$$

4. $\{(a, 0) \mid a \in \mathbb{R}\}$ линейно упорядочено. Для любых $(a, 0), (b, 0) \in \widehat{\mathbb{R}}$

$$a \geq b \vee b \geq a \Leftrightarrow (a, 0) \geq (b, 0) \vee (b, 0) \geq (a, 0).$$

5. Для любых $(a, 0), (b, 0), (c, 0) \in \widehat{\mathbb{R}}$

$$(a, 0) \geq (b, 0) \Leftrightarrow a \geq b \Leftrightarrow a + c \geq b + c \Leftrightarrow (a + c, 0) \geq (b + c, 0).$$

6. Для любых $(a, 0), (b, 0) \in \widehat{\mathbb{R}}$

$$\begin{aligned} (a, 0) \geq (0, 0) \wedge (b, 0) \geq (0, 0) &\Leftrightarrow a \geq 0 \wedge b \geq 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow ab \geq 0 \Leftrightarrow (ab, 0) \geq 0 \Leftrightarrow (a, 0) \cdot (b, 0) \geq 0. \end{aligned}$$

Аксиома непрерывности. Каковы бы ни были непустые множества $A \subset \{(a, 0) \mid a \in \mathbb{R}\}$ и $B \subset \{(a, 0) \mid a \in \mathbb{R}\}$, такие что для любых двух элементов $(a, 0) \in A$ и $(b, 0) \in B$ выполняется неравенство $(a, 0) \geq (b, 0)$, существует такое число $(c, 0) \in \{(a, 0) \mid a \in \mathbb{R}\}$, что для всех $(a, 0) \in A$ и $(b, 0) \in B$ имеет место соотношение

$$(a, 0) \geq (c, 0) \geq (b, 0).$$

ЧАСТЬ 2: ФУНКЦИИ

Функции $f : \widehat{\mathbb{R}} \mapsto \widehat{\mathbb{R}}$ назовем *функциями надвещественного переменного*. Поскольку каждое надвещественное число $\hat{\omega}$ характеризуется парой вещественных чисел, то задание надвещественной функции $\hat{\omega} = u + v\hat{o}$ переменной $\hat{z} = x + y\hat{o}$ эквивалентно заданию двух вещественных функций от двух вещественных переменных:

$$f(\hat{z}) = u(x, y) + v(x, y)\hat{o}, \quad (13)$$

Такую запись будем называть алгебраической формой функции $f(\hat{z})$. Функции u и v назовем *вещественной* и *малой* частями функции f соответственно.

Пример 5 Запишем функцию $f(\hat{z}) = \hat{z}^3 + 2\hat{z}^2$ в алгебраической форме. Пусть $\hat{z} = x + y\hat{o}$, тогда:

$$\begin{aligned} f(\hat{z}) &= f(x + y\hat{o}) = (x + y\hat{o})^3 + 2(x + y\hat{o})^2 = x^3 + 3x^2y\hat{o} + 2x^2 + 4xy\hat{o} = \\ &= (x^3 + 2x^2) + (3x^2y + 4xy)\hat{o}. \end{aligned}$$

Пример 6 Найдём область определения этой же функции. Поскольку возведение в степень не определено для чисел $\hat{z} = b\hat{o}$, $b \neq 0$, то

$$D(f) = \widehat{\mathbb{R}} \setminus \{b\hat{o} \mid b \neq 0\}.$$

Попробуем теперь отыскать множество ее значений. Какие значения могут принимать $\text{Re } f$ и $\text{Ab } f$? В соответствии с (13) они зависят от $\text{Re } \hat{z} = x$ и $\text{Ab } \hat{z} = y$. При $x = y = 0$ $\text{Re } f = \text{Ab } f = 0$; при $x = 0$, $y \neq 0$ f не определена; при $x \neq 0$, $y \in \mathbb{R}$ $\text{Re } f$ принимает любые ненулевые значения, $\text{Ab } f$ принимает любые значения. Таким образом,

$$E(f) = \{0\} \cup \{(a, b) \mid a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, b \in \mathbb{R}\} = \widehat{\mathbb{R}} \setminus \{b\hat{o} \mid b \neq 0\}.$$

Многочлены. Надвещественными многочленами будем называть суммы вида

$$P_n(\hat{z}) = \sum_{i=0}^n \hat{c}_i \hat{z}^i, \quad (14)$$

где $\hat{c}_i = a_i + b_i\hat{o} \in \widehat{\mathbb{R}}$, $\hat{z} = x + y\hat{o} \in \widehat{\mathbb{R}}$. Представим многочлен в алгебраической форме:

$$\begin{aligned} P_n(\hat{z}) &= \sum_{i=0}^n \hat{c}_i \hat{z}^i = \sum_{i=0}^n (a_i + b_i\hat{o})(x + y\hat{o})^i = \sum_{i=0}^n (a_i + b_i\hat{o})(x^i + ix^{i-1}y\hat{o}) = \\ &= \sum_{i=0}^n (a_i x^i + (a_i i x^{i-1} y + b_i x^i) \hat{o}) = \sum_{i=0}^n a_i x^i + \left(\sum_{i=0}^n (a_i i x^{i-1} y + b_i x^i) \right) \hat{o}. \end{aligned}$$

$$P_n(\hat{z}) = \sum_{i=0}^n a_i x^i + \left(\sum_{i=0}^n (a_i i x^{i-1} y + b_i x^i) \right) \hat{o}. \quad (15)$$

Дифференциалы. Рассмотрим функцию $f(\hat{z})$. *Правым дифференциалом функции $f(\hat{z})$* назовем функцию надвещественного переменного $g(\hat{z}) = f(\hat{z} + \hat{o}) - f(\hat{z})$ и обозначим $d_+ f(\hat{z})$. *Левым дифференциалом функции $f(\hat{z})$* назовем функцию надвещественного переменного $g(\hat{z}) = f(\hat{z}) - f(\hat{z} - \hat{o})$ и обозначим $d_- f(\hat{z})$. Далее, если особо не уточняется, под *дифференциалом функции* будет подразумеваться ее правый дифференциал и обозначаться просто $df(\hat{z})$.

Пример 7 Найдем дифференциал функции $f(\hat{z}) = \hat{z}^2$:

$$df(\hat{z}) = f(\hat{z} + \hat{o}) - f(\hat{z}) = (\hat{z} + \hat{o})^2 - \hat{z}^2 = \hat{z}^2 + 2\hat{z}\hat{o} - \hat{z}^2 = 2\hat{z}\hat{o}.$$

Если $\hat{z} = x + y\hat{o}$, то

$$df = 2(x + y\hat{o})\hat{o} = 2x\hat{o}.$$

Пример 8 Найдем дифференциал функции $f(\hat{z}) = \hat{z}$:

$$df(\hat{z}) = f(\hat{z} + \hat{o}) - f(\hat{z}) = \hat{z} + \hat{o} - \hat{z} = \hat{o}.$$

Это же равенство запишем в виде

$$d\hat{z} = \hat{o}. \quad (16)$$

Пример 9 Найдем дифференциал функции $f(\hat{z}) = \frac{1}{\hat{z}}$:

$$df(\hat{z}) = f(\hat{z} + \hat{o}) - f(\hat{z}) = \frac{1}{\hat{z} + \hat{o}} - \frac{1}{\hat{z}} = \frac{\hat{z} - (\hat{z} + \hat{o})}{(\hat{z} + \hat{o})\hat{z}} = -\frac{\hat{o}}{\hat{z}^2 + \hat{z}\hat{o}}.$$

Представим \hat{z} в алгебраической форме:

$$df = -\frac{\hat{o}}{(x + y\hat{o})^2 + (x + y\hat{o})\hat{o}} = -\frac{\hat{o}}{x^2 + (2xy + x)\hat{o}}.$$

Представим функцию df в алгебраической форме, воспользовавшись формулой деления:

$$df = -\left(\frac{0}{x^2} + \frac{x^2 \cdot 1 - 0 \cdot (2xy + x)}{x^4} \hat{o} \right) = -\frac{\hat{o}}{x^2}.$$

Замечание. Попробуем найти дифференциал в том виде, в каком мы его понимали раньше:

$$df = f(x + dx) - f(x) = \frac{1}{x + dx} - \frac{1}{x} = -\frac{dx}{(x + dx)x}.$$

Если бы мы хотели найти производную функции f делением дифференциала на dx , то у нас бы ничего не вышло:

$$f' = \frac{df}{dx} = -\frac{1}{x^2 + xdx}.$$

Чтобы получить правильный ответ, приходится совершать предельный переход, отбрасывая слагаемое $x dx$, что мотивируется “малостью $x dx$ по сравнению с x^2 ”. Надвещественные числа не нуждаются в подобном обхождении, одерживая победу.

Пример 10 Обобщим полученные результаты и найдем дифференциал степенной функции $f(\hat{z}) = \hat{z}^\alpha$, $\alpha \in \mathbb{Q}$:

$$\begin{aligned} df &= (\hat{z} + \hat{o})^\alpha - \hat{z}^\alpha = (x + (y + 1)\hat{o})^\alpha - (x + y\hat{o})^\alpha = \\ &= x^\alpha + \alpha x^{\alpha-1}(y + 1)\hat{o} - (x^\alpha + \alpha x^{\alpha-1}y\hat{o}), \\ d\hat{z}^\alpha &= \alpha x^{\alpha-1}\hat{o}. \end{aligned} \tag{17}$$

Пример 11 Функция $\hat{\omega} = \text{sgn } \hat{z}$ для надвещественных чисел определяется так же, как и для вещественных:

$$\text{sgn } \hat{z} = \begin{cases} 1, & \hat{z} > 0 \\ 0, & \hat{z} = 0 \\ -1, & \hat{z} < 0. \end{cases}$$

Найдем ее правый дифференциал в точке $\hat{z} = 0$. Имеем:

$$d_+ \text{sgn } 0 = \text{sgn } \hat{o} - \text{sgn } 0 = 1 - 0 = 1.$$

Аналогично для левого дифференциала:

$$d_- \text{sgn } 0 = \text{sgn } 0 - \text{sgn } -\hat{o} = 0 - (-1) = 1.$$

Последний пример наталкивает на новое определение. Функция f называется дифференцируемой справа в точке \hat{z}_0 , если $\text{Re } d_+ f(\hat{z}_0) = 0$. Аналогично, функция f называется дифференцируемой слева в точке \hat{z}_0 , если $\text{Re } d_- f(\hat{z}_0) = 0$. Функция называется дифференцируемой в точке \hat{z}_0 , если она дифференцируема в ней и справа, и слева.

Таким образом, согласно (13) дифференциал такой функции может быть записан как $df(x + y\hat{o}) = u(x, y)\hat{o}$.

Свойства дифференциала Пусть f и g – функции надвещественного переменного. Тогда

1. $df(\hat{z}) = 0, f(\hat{z}) = \hat{z}_0 \in \widehat{\mathbb{R}};$
2. $d(f + g)(\hat{z}) = df(\hat{z}) + dg(\hat{z});$
3. $d(fg)(\hat{z}) = f(\hat{z} + \hat{o})dg(\hat{z}) + g(\hat{z})df(\hat{z}) = f(\hat{z})dg(\hat{z}) + g(\hat{z} + \hat{o})df(\hat{z});$
4. $d\left(\frac{f}{g}\right)(\hat{z}) = \frac{g(\hat{z})df(\hat{z}) - f(\hat{z})dg(\hat{z})}{g(\hat{z})g(\hat{z} + \hat{o})}.$

Докажем свойства дифференциала по порядку.

1. $df(\hat{z}) = f(\hat{z} + \hat{o}) - f(\hat{z}) = \hat{z}_0 - \hat{z}_0 = 0;$
2. $d(f + g)(\hat{z}) = (f + g)(\hat{z} + \hat{o}) - (f + g)(\hat{z}) = f(\hat{z} + \hat{o}) - f(\hat{z}) + g(\hat{z} + \hat{o}) - g(\hat{z}) = df + dg;$
 $d(fg)(\hat{z}) = (fg)(\hat{z} + \hat{o}) - (fg)(\hat{z}) =$
 $= f(\hat{z} + \hat{o})g(\hat{z} + \hat{o}) - f(\hat{z})g(\hat{z}) =$
3. $= f(\hat{z} + \hat{o})g(\hat{z} + \hat{o}) - f(\hat{z} + \hat{o})g(\hat{z}) + f(\hat{z} + \hat{o})g(\hat{z}) - f(\hat{z})g(\hat{z}) =;$
 $= f(\hat{z} + \hat{o})(g(\hat{z} + \hat{o}) - g(\hat{z})) + g(\hat{z})(f(\hat{z} + \hat{o}) - f(\hat{z})) =$
 $= f(\hat{z} + \hat{o})dg(\hat{z}) + g(\hat{z})df(\hat{z})$
4. $d\left(\frac{f}{g}\right) = \frac{f(\hat{z} + \hat{o})}{g(\hat{z} + \hat{o})} - \frac{f(\hat{z})}{g(\hat{z})} =$
 $= \frac{f(\hat{z} + \hat{o})g(\hat{z}) - f(\hat{z})g(\hat{z} + \hat{o})}{g(\hat{z})g(\hat{z} + \hat{o})} =$
 $= \frac{f(\hat{z} + \hat{o})g(\hat{z}) - f(\hat{z})g(\hat{z}) + f(\hat{z})g(\hat{z}) - f(\hat{z})g(\hat{z} + \hat{o})}{g(\hat{z})g(\hat{z} + \hat{o})} =$
 $= \frac{g(\hat{z})(f(\hat{z} + \hat{o}) - f(\hat{z})) - f(\hat{z})(g(\hat{z} + \hat{o}) - g(\hat{z}))}{g(\hat{z})g(\hat{z} + \hat{o})} = \frac{g(\hat{z})df(\hat{z}) - f(\hat{z})dg(\hat{z})}{g(\hat{z})g(\hat{z} + \hat{o})}.$