1. Матрицы

1. Вычислить в зависимости от N:

1. $\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}^N$ 2. $\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&2&0&0\\0&0&3&0\\0&0&0&4\end{pmatrix}^N$ 3. $\begin{pmatrix}0&1&0&0\\-1&0&0&0\\0&0&0&1\\0&0&-1&0\end{pmatrix}^N$ 4. $\begin{pmatrix}0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\\0&0&0&0\end{pmatrix}^N$ 5. $\begin{pmatrix}1&1&0&0\\0&1&1&0\\0&0&1&1\\0&0&0&1\end{pmatrix}^N$

2. Докажите, что существует **единственная** матрица E такая, что:

$$\forall A \ \ EA = A = AE$$

3. А верно ли следующее? ($\exists!$ означает "существует единственный")

$$\forall A \ \ \exists! E \ \ EA = A = AE$$

4. [К 18.1а] Решить систему уравнений:

$$\begin{cases} X + Y & = \begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix} \\ 2X + 3Y & = \begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}\end{cases}$$

5. Найти парочку матриц с действительными элементами, удовлетворяющих уравнению:

$$X^2 = -\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$$

Откуда вообще взялось такое странное правило умножения матриц? На этот вопрос мы дадим ответ ближе к концу семестра, а пока посмотрим, в каких задачах его можно применить

6. В стране N городов, некоторые из которых соединены дорогами (список пар соединённых городов дан). Предложите способ "быстро" посчитать количество путей из города 1 в город N таких, что:

- между 1 и N было посещено ровно K городов (необязательно различных или отличных от 1 и N[1].
- между 1 и N было посещено не более K городов (с той же оговоркой).

Работают ли предложенные алгоритмы в случае, если между какими-то двумя городами есть несколько дорог? А если дороги односторонние?

7. Посчитайте количество нулей в матрице:

$$\underbrace{\begin{pmatrix}1&1&0&\cdots&0&0&0\\0&1&1&\cdots&0&0&0\\0&0&1&\cdots&0&0&0\\\vdots&\vdots&\vdots&\ddots&\vdots&\vdots&\vdots\\0&0&0&\cdots&1&1&0\\0&0&0&\cdots&0&1&1\\1&0&0&\cdots&0&0&1\end{pmatrix}^{99}}_{(100\times100)}$$

Как можно было бы посчитать элемент с координатами i, j в этой матрице?

8. Предложите способ посчитать N-ое число Фибоначчи за $O(\log N)$.

9. Предложите способ найти a_n, где $a_0 = 1, a_1 = 2, a_n = 3a_{n-1} - 2a_{n-2}$, за $\mathbf{O(1)}$ **при условии, что битовый сдвиг работает за** $\mathbf{O(1)}$.
Эту задачу вы ещё решите на ОКТЧ в этом семестре.

[1] Т.е. если мы хотим доехать из города 1 в город 3, суммарно посетив 5 городов, то вполне годится путь 13213 (если есть все требуемые дороги)