

1. Матрицы

1. Вычислить:

$$1. \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 3 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 7 & 8 \\ 0 & 0 & 9 & 0 \end{pmatrix} \quad 2. \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad 3. \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

2. Вычислить в зависимости от N :

$$1. \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^N \quad 2. \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}^N \quad 3. \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}^N \quad 4. \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}^N \quad 5. \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^N$$

3. Докажите, что существует **единственная** матрица E такая, что:

$$\forall A \quad EA = A = AE$$

4. А верно ли следующее? ($\exists!$ означает "существует единственный")

$$\forall A \quad \exists! E \quad EA = A = AE$$

5 (K18.1a). Решить систему уравнений:

$$\begin{cases} X + Y = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ 2X + 3Y = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \end{cases}$$

6. Найти парочку матриц с действительными элементами, удовлетворяющих уравнению:

$$X^2 = - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

7 (Быстрое возведение в степень). Нетрудно придумать алгоритм, возводящий матрицу размера $N \times N$ в степень K за $O(N^3 K)$. Предложите способ улучшить время до $O(N^3 \log K)$.

Что ещё можно возводить в степени таким алгоритмом?

Откуда вообще взялось такое странное правило умножения матриц? На этот вопрос мы дадим ответ ближе к концу семестра, а пока посмотрим, какие интересные задачи могут быть с ним связаны.

Графы

8. В стране N городов, некоторые из которых соединены дорогами (список пар соединённых городов дан). Предложите способ "быстро" посчитать количество путей из города 1 в город N таких, что:

- между 1 и N было посещено ровно K городов (необязательно различных или отличных от 1 и N).
- между 1 и N было посещено не более K городов (с той же оговоркой).

¹Т.е. если мы хотим доехать из города 1 в город 3, суммарно посетив 5 городов, то вполне годится путь 13213 (если есть все требуемые дороги)

Работают ли предложенные алгоритмы в случае, если между какими-то двумя городами есть несколько дорог? А если дороги односторонние?

9. Посчитайте количество нулей в матрице:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{99}$$

(100×100)

Как можно было бы посчитать элемент с координатами i, j в этой матрице?

10. Дан граф на N вершинах. Построить его **транзитивное замыкание** (для начала попробуйте догадаться, что это). Интересно, насколько быстро можно решать такую задачу? Оказывается, на разреженных графах можно управиться за $O(N^2)$ (возможно, Вы даже уже можете его найти)! Из известных мне алгоритмов эффективнее всего эту задачу решает т.н. алгоритм Пуэртома.

Динамическое программирование

11. Предложите способ посчитать N -ое число Фибоначчи за $O(\log N)$.

12. Предложите способ найти a_n , где $a_0 = 1, a_1 = 2, a_n = 3a_{n-1} - 2a_{n-2}$, за $O(1)$ при условии, что битовый сдвиг работает за $O(1)$.

Эту задачу Вы ещё решите на ОКТЧ в этом семестре.

След

О. След (trace) матрицы A размера $N \times N$ - это сумма её диагональных элементов:

$$\text{tr} A = \sum_{j=1}^N a_{jj}$$

13 (Одна из возможных мотиваций).

Текст ниже будет гораздо понятнее, когда Вы узнаете об определителях (второго порядка) на лекции.

В чём интерес следа, скорее всего, пока непонятно.

Такой довольно простой на первый взгляд объект обладает целым рядом интересных свойств. Он ещё возникнет в курсе, а пока заметим вот что:

Наверное, Вы знаете, что такое производная. Покажите, что у следа "есть вайбы" производной определителя второго порядка, а именно для H с "достаточно малыми" элементами верно:

$$\det(E + H) \approx 1 + \text{tr} H$$

det можно обобщить на квадратные матрицы больших размеров. И это свойство сохраняется! Выглядит довольно интригующе - хорошая причина взглянуть на другие свойства следа.

14. Пусть A - матрица размера $N \times M$, а B - $M \times N$. Покажите, что:

$$\operatorname{tr} AB = \operatorname{tr} BA$$

Для квадратных матриц это свойство - следствие из более общей теоремы из второго семестра.

15 (Г7.12). Опишите все матрицы A такие, что:

$$\forall X \quad \operatorname{tr} AX = 0$$

Алгоритм Штрассена