1. Матрицы

1. Вычислить:

1. $\begin{pmatrix}1&2&0&0\\3&4&0&0\\0&0&5&0\\0&0&0&5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}6&0&0&0\\0&6&0&0\\0&0&7&8\\0&0&9&0\end{pmatrix}$ 2. $\begin{pmatrix}0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\\1&0&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&0&0&1\\1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\end{pmatrix}$ 3. $\begin{pmatrix}0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\\1&0&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\\1&0&0&0\end{pmatrix}$

2. Вычислить в зависимости от N:

1. $\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}^N$ 2. $\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&2&0&0\\0&0&3&0\\0&0&0&4\end{pmatrix}^N$ 3. $\begin{pmatrix}0&1&0&0\\-1&0&0&0\\0&0&0&1\\0&0&-1&0\end{pmatrix}^N$ 4. $\begin{pmatrix}0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\\0&0&0&0\end{pmatrix}^N$ 5. $\begin{pmatrix}1&1&0&0\\0&1&1&0\\0&0&1&1\\0&0&0&1\end{pmatrix}^N$

3. Докажите, что существует **единственная** матрица E такая, что:

$$\forall A \;\; EA = A = AE$$

4. А верно ли следующее? ($\exists!$ означает "существует единственный")

$$\forall A \;\; \exists! E \;\; EA = A = AE$$

5 (K18.1a)**.** Решить систему уравнений:

$$\begin{cases} X + Y &= \begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix} \\ 2X + 3Y &= \begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}\end{cases}$$

6. Найти парочку матриц с действительными элементами, удовлетворяющих уравнению:

$$X^2 = -\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$$

7 (Быстрое возведение в степень)**.** Предложите способ возвести матрицу размера $N \times N$ в степень K за $O(N^3 \log K)$

Что ещё можно возводить в степени таким алгоритмом?

Откуда вообще взялось такое странное правило умножения матриц? На этот вопрос мы дадим ответ ближе к концу семестра, а пока посмотрим, в каких задачах его можно применить

Графы

8. В стране N городов, некоторые из которых соединены дорогами (список пар соединённых городов дан). Предложите способ "быстро" посчитать количество путей из города 1 в город N таких, что:

- между 1 и N было посещено ровно K городов (необязательно различных или отличных от 1 и N[1].
- между 1 и N было посещено не более K городов (с той же оговоркой).

[1] Т.е. если мы хотим доехать из города 1 в город 3, суммарно посетив 5 городов, то вполне годится путь 13213 (если есть все требуемые дороги)

Работают ли предложенные алгоритмы в случае, если между какими-то двумя городами есть несколько дорог? А если дороги односторонние?

9. Посчитайте количество нулей в матрице:

$$\underset{(100\times100)}{\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{99}}$$

Как можно было бы посчитать элемент с координатами i, j в этой матрице?

10. Дан граф на N вершинах. Построить его ***транзитивное замыкание*** (для начала попробуйте догадаться, что это). *Интересно, насколько быстро можно решать такую задачу? Оказывается, существует алгоритм работающий за $O(N^2 \log^2 N)$! Он интересный, но, возможно, легче его будет придумать уже где-то в середние второго семестра.*

Динамическое программирование

11. Предложите способ посчитать N-ое число Фибоначчи за $O(\log N)$.

12. Предложите способ найти a_n, где $a_0 = 1, a_1 = 2, a_n = 3a_{n-1} - 2a_{n-2}$, за $\mathbf{O(1)}$ **при условии, что битовый сдвиг работает за $\mathbf{O(1)}$.**
Эту задачу вы ещё решите на ОКТЧ в этом семестре.

След

О. След (trace) матрицы A размера $N \times N$ - это сумма её диагональных элементов:

$$\mathbf{tr}A = \sum_{j=1}^{N} a_{jj}$$

13 (Одна из возможных мотиваций).
Текст ниже будет гораздо понятнее, когда Вы узнаете об определителях (второго порядка) на лекции.
В чём интерес следа, скорее всего, пока непонятно.
Такой довольно простой на первый взгляд объект обладает целым рядом интересных свойств. Он ещё возникнет в курсе, а пока заметим вот что:
Наверное, Вы знаете, что такое производная. Покажите, что у следа "есть вайбы" производной определителя второго порядка, а именно для H с "достаточно малыми" элементами верно:

$$\mathbf{det}(E + H) \approx 1 + \mathbf{tr}H$$

det *можно обобщить на квадратные матрицы больших размеров. И это свойство сохраняется! Выглядит довольно интригующе - хорошая причина взглянуть на другие свойства следа.*

14. Пусть A - матрица размера $N \times M$, а B - $M \times N$. Покажите, что:

$$\mathbf{tr}AB = \mathbf{tr}BA$$

Для квадратных матриц это свойство - следсвтие из более общей теоремы из второго семестра.

15 (Г7.12)**.** Опишите все матрицы A такие, что:

$$\forall X \;\; \mathbf{tr}AX = 0$$