

1. Матрицы

1. Вычислить:

$$1. \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^N \quad 2. \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}^N \quad 3. \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^N$$

2. Вычислить в зависимости от N :

$$1. \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^N \quad 2. \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}^N \quad 3. \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}^N \quad 4. \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}^N \quad 5. \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^N$$

3. Докажите, что существует **единственная** матрица E такая, что:

$$\forall A \quad EA = A = AE$$

4. А верно ли утверждать следующее? ($\exists!$ означает "существует единственный")

$$\forall A \quad \exists! E \quad EA = A = AE$$

5. [К 18.1а] Решить систему уравнений:

$$\begin{cases} X + Y = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ 2X + 3Y = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \end{cases}$$

6. Найти парочку матриц с действительными элементами, удовлетворяющих уравнению:

$$X^2 = - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Откуда вообще взялось такое странное правило умножения матриц? На этот вопрос мы дадим ответ ближе к концу семестра, а пока посмотрим, в каких задачах его можно применить

7. В стране N городов, некоторые из которых соединены дорогой (список пар соединённых дорогой городов дан). Предложите способ "быстро" посчитать количество способов доехать из города 1 в город N таких, что:

- между 1 и N было посещено ровно K городов (необязательно различных или отличных от 1 и N).
- между 1 и N было посещено не более K городов (с той же оговоркой).

Работают ли предложенные алгоритмы в случае, если между какими-то двумя городами есть несколько дорог?

8. Посчитайте количество нулей в матрицах:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{101}$$

(100×100)

Подумайте, как можно было бы посчитать элемент с координатами i, j в этой матрице.

¹Т.е. если мы хотим доехать из города 1 в город 3, суммарно посетив 5 городов, то вполне годится путь 13213 (если есть все требуемые дороги)