1. Матрицы

1. Вычислить:

1. $\begin{pmatrix}1&2&0&0\\3&4&0&0\\0&0&5&0\\0&0&0&5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}6&0&0&0\\0&6&0&0\\0&0&7&8\\0&0&9&0\end{pmatrix}$ 2. $\begin{pmatrix}0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\\1&0&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&0&0&1\\1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\end{pmatrix}$ 3. $\begin{pmatrix}0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\\1&0&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\\1&0&0&0\end{pmatrix}$

2. Вычислить в зависимости от N:

1. $\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}^N$ 2. $\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&2&0&0\\0&0&3&0\\0&0&0&4\end{pmatrix}^N$ 3. $\begin{pmatrix}0&1&0&0\\-1&0&0&0\\0&0&0&1\\0&0&-1&0\end{pmatrix}^N$ 4. $\begin{pmatrix}0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\\0&0&0&0\end{pmatrix}^N$ 5. $\begin{pmatrix}1&1&0&0\\0&1&1&0\\0&0&1&1\\0&0&0&1\end{pmatrix}^N$

3. Докажите, что существует **единственная** матрица E такая, что:

$$\forall A \;\; EA = A = AE$$

4. А верно ли следующее? ($\exists!$ означает "существует единственный")

$$\forall A \;\; \exists! E \;\; EA = A = AE$$

5 (К18.1а)**.** Решить систему уравнений:

$$\begin{cases} X + Y = \begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix} \\ 2X + 3Y = \begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}\end{cases}$$

6. Найти парочку матриц с действительными элементами, удовлетворяющих уравнению:

$$X^2 = -\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$$

7. За какую асимптотику работает перемножение матриц "по определению"?

8 (Быстрое возведение в степень)**.** Нетрудно придумать алгоритм, возводящий матрицу размера $N \times N$ в степень K за $O(N^3K)$. Предложите способ улучшить время до $O(N^3 \log K)$.
Что ещё можно возводить в степени таким алгоритмом?

Откуда вообще взялось такое странное правило умножения матриц? На этот вопрос мы дадим ответ ближе к концу семестра, а пока посмотрим, какие интересные задачи могут быть с ним связаны.

Графы

9. В стране N городов, некоторые из которых соединены дорогами (список пар соединённых городов дан). Предложите способ "быстро" посчитать количество путей из города 1 в город N таких, что:

- между 1 и N было посещено ровно K городов (необязательно различных или отличных от 1 и N[1].

[1] Т.е. если мы хотим доехать из города 1 в город 3, суммарно посетив 5 городов, то вполне годится путь 13213 (если есть все требуемые дороги)

- между 1 и N было посещено не более K городов (с той же оговоркой).

Работают ли предложенные алгоритмы в случае, если между какими-то двумя городами есть несколько дорог? А если дороги односторонние?

10. Посчитайте количество нулей в матрице:

$$\underset{(100\times 100)}{\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{99}}$$

Как можно было бы посчитать элемент с координатами i, j в этой матрице?

11. Дан граф на N вершинах. Построить его ***транзитивное замыкание*** (для начала попробуйте догадаться, что это). *Интересно, насколько быстро можно решать такую задачу? Оказывается, на разреженных графах можно управиться за $O(N^2)$ (возможно, Вы даже уже можете найти такое решение)! Из известных мне способов наиболее эффективен т.н. алгоритм Пурдома.*

Динамическое программирование

12. Предложите способ посчитать N-ое число Фибоначчи за $O(\log N)$.

13. Предложите способ найти a_n, где $a_0 = 1, a_1 = 2, a_n = 3a_{n-1} - 2a_{n-2}$, за $\mathbf{O(1)}$ **при условии, что битовый сдвиг работает за** $\mathbf{O(1)}$.
Эту задачу Вы ещё решите на ОКТЧ в этом семестре.

След

О. След (trace) матрицы A размера $N \times N$ - это сумма её диагональных элементов:

$$\mathbf{tr}A = \sum_{j=1}^{N} a_{jj}$$

14 (Одна из возможных мотиваций).
Текст ниже будет гораздо понятнее, когда Вы узнаете об определителях (второго порядка) на лекции.
В чём интерес следа, скорее всего, пока непонятно.
Такой довольно простой на первый взгляд объект обладает целым рядом интересных свойств. Он ещё возникнет в курсе, а пока заметим вот что: Наверное, Вы знаете, что такое производная. Покажите, что у следа

"есть вайбы" производной определителя второго порядка, а именно для H с "достаточно малыми" элементами верно:

$$\mathbf{det}(E+H) \approx 1 + \mathbf{tr}H$$

det *можно обобщить на квадратные матрицы больших размеров. И это свойство сохраняется! Выглядит довольно интригующе - хорошая причина взглянуть на другие свойства следа.*

15. Начнём с простого, но полезного свойства: убедитесь, что **tr** линеен, т.е. (греческие буквы - числа):

$$\mathbf{tr}(\alpha A + \beta B) = \alpha \mathbf{tr} A + \beta \mathbf{tr} B$$

Если Вы посещали математику в 7 классе, Вы должны были слышать о линейных функциях. Как школьное и вузовское определение линейной функции связаны?

16. Пусть A - матрица размера $N \times M$, а B - $M \times N$. Покажите, что:

$$\mathbf{tr} AB = \mathbf{tr} BA$$

Для квадратных матриц это свойство - следсвтие из более общей теоремы из второго семестра.

17 (Г7.12)**.** Опишите все матрицы A такие, что:

$$\forall X \ \ \mathbf{tr} AX = 0$$

18. Докажите, что матрица A - корень такого многочлена[2]:

$$x^2 - \mathbf{tr} A \cdot x + \mathbf{det} A$$

Этот многочлен называется "характеристическим для A". Во втором семестре мы определим характеристический многочлен для матриц произвольного размера. Также мы докажем обобщение этой задачи - теорему Гамильтона-Кэли (матрица произвольного размера - корень собственного характеристического многочлена).
Кстати, заметьте, что любая матрица 2×2 - обязательно корень квадратного уравнения. А можно ли найти среди матриц решения каких-нибудь линейных уравнений? (Этот вопрос связан с другим важным понятием из второго семестра - минимальным многочленом).

[2] Что? Матрица - корень многочлена?
Всё становится вполне прозрачно, если договориться, что скаляр α понимается как αE.
Это безусловно корректно. Но единственный ли это способ "подставить матрицу в многочлен"? Если бы это было не так, то перед нами встал бы ряд вопросов, берущих начало из "чем, если хоть чем-то, этот способ лучше остальных?"
Тем не менее в конце семестра мы узнаем, что он действительно единственен. Формально, мы покажем, что для каждой матрицы A существует единственная функция $eval_A$, принимающая многочлен и возвращаюшая матрицу-"значение многочлена на A".
Более того, мы выясним, "кого ещё можно подставлять в многочлены"...
...но об этом потом.

Алгоритм Штрассена

Как Вы видите, умножать матрицы *бывает небесполезно.* Пока что мы знаем только один алгоритм (aka определение), причём не очень быстрый. Хотелось бы найти что-то похитрее. Но как?
Впервые эту задачу решил Фолькер Штрассен в 1969 году. Давайте попробуем понять, что он придумал, а главное - как.
Ниже мы будем пользоваться т.н. мастер-теоремой для оценки времени работы рекурсивных алгоритмов. Если Вы с ней незнакомы, можете, например, посмотреть первую лекцию по алгоритмам Ильи Степанова (основной поток) или прочитать про неё на сайте ИТМОшных вики-конспектов.
Начнём с парочки вспомогательных фактов.

19. Пусть:

- D - матрица 2×2 такая, что:
  - $\mathbf{tr}D = -1$
  - $\mathbf{det}D = 1$

Тогда:

- $D^3 = E$

О. Пусть:

- D - матрица 2×2 из предыдущей задачи,
- u - вектор-столбец такой, что:
  - Du неколлинеарен u. $(*)$

Тогда:

- $u^\perp$ - это вектор-строка такая, что:
  - $u^\perp u = 0$
  - $u^\perp D u = 1$

20. Покажите, что $u^\perp$ существует и единственен $\iff$ u удовлетворяет $(*)$.

Дальше мы негласно предполагаем, что D и u обладают свойствами, оговоренными выше.

21. Покажите, что $(Du)^\perp = u^\perp D^2$.
Не забудьте убедиться, что Du удовлетворяет $(*)$.

Express in terms of u and D?

22. Покажите, что $u^\perp D^2 u = -1$.

23. Пусть:

- $M = uu^{\perp}$

Тогда:

- $\mathbf{tr} M = 0$
- $M^2 = 0$
- $MDM = M$
- $MD^2M = -M$

24.