Unidades de Grandezas Físicas Escalares e Vetores

Nesta aula exploraremos os seguintes conceitos:

1. Unidades e sistemas de unidades;

2. Unidades Básicas em Mecânica;

3. Grandezas Escalares e Vetoriais

4. Álgebra Vetorial

Medição de um Parâmetro e a Lei Física

Em Física, realiza-se experiências nas quais são medidos padrões físicos. Com base nas medições, tenta-se deduzir uma relação entre as medições e um fenômeno físico natural de interesse. Em seguida, busca-se um modelo ou equação matemática que descreve o fenômeno quantitativamente e depois ser testado exaustivamente, chama o de "Lei Física" a qual descreve o fenômeno. Um exemplo familiar é a lei de Ohm. A experiência neste caso consiste em medir a diferença de tensão elétrica V aplicada entre os terminais de uma bateria e a corrente elétrica I que flui através do circuito condutor. Se traçarmos V contra I, obteremos uma linha reta cujo coeficiente angular é a chamada resistência elétrica R. Isso é expresso na forma abaixo:

$$R = \frac{V}{I} = \text{Constant}$$

A equação acima é conhecida como: "Lei de Ohm" onde R é conhecido como "resistência" do condutor.

Unidades Físicas e Sistemas de Unidades

Para cada parâmetro físico, define-se uma unidade apropriada definida por um processo de medição chamado de **PADRÃO**.

Em mecânica, define-se apenas três parâmetros físicos básicos: O **COMPRIMENTO**, **O TEMPO** e **MASSA** conhecidos como quantidades (Grande) básicas.

Nota: Para o restante dos parâmetros não mecânicos, define-se apenas mais uma unidade, a chamada **CORRENTE ELÉTRICA**.

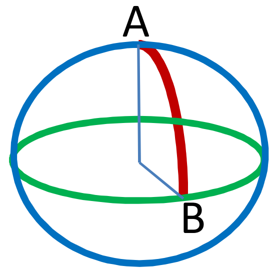
Neste curso, usa-se o Sistema Internacional de Unidades (SI) para indexar os parâmetros físicos.

Neste sistema, as unidades para as quantidades base são:

Comprimento dado em **metro** (***m***); Tempo dado em **segundo** (***s***) e a massa dada em **quilograma** (***kg***).

O METRO

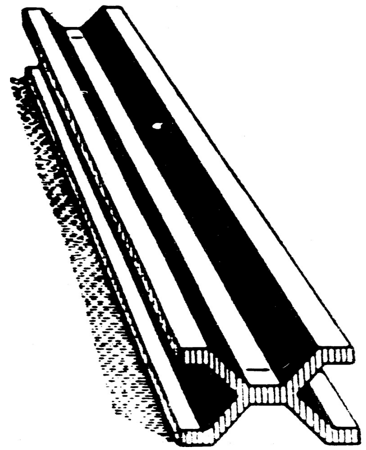
Terra



Em 1792, o **metro** foi definido como sendo um décimo milionésimo da distância do pólo norte ao equador.

$$1\ \text{m} \equiv \frac{AB}{10^7}$$

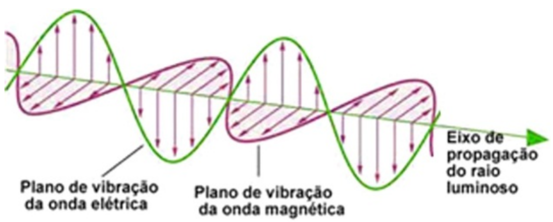
Platina-Irídio



Por razões práticas, o **metro** foi posteriormente definido como a distância entre duas linhas finas em uma barra de **metro** padrão feita de platina-irídio.

Desde 1983, o **metro** foi definido como o comprimento percorrido pela luz no vácuo durante o intervalo de tempo de **1/299792458** de segundo. A razão pela qual essa definição foi adaptada é que a medição da velocidade da luz no vácuo é uma constante Física.

Onda Eletromagnética : Luz

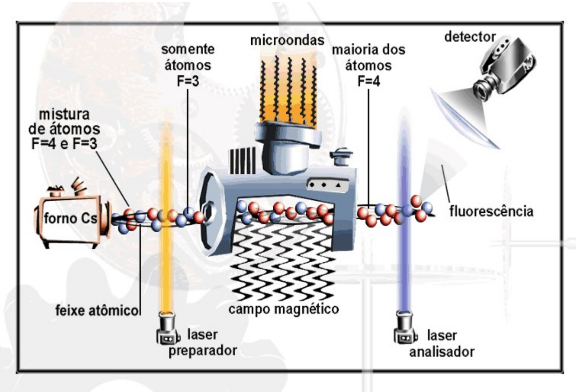


O SEGUNDO

Inicialmente, o segundo foi definido da seguinte forma:

$$Segundo = \frac{1}{24 \times 60 \times 60}\, do\ tempo\ que\ a\ Terra\ gasta\ para\ completar\ uma\ rotação\ em\ torno\ do\ próprio\ eixo.$$

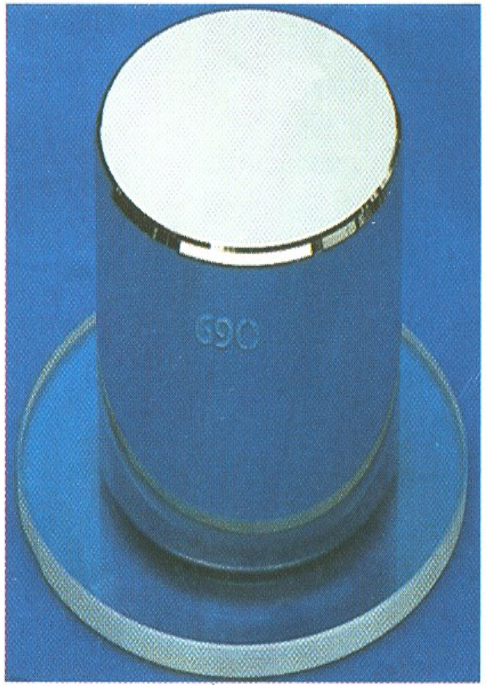
O problema com esta definição é que a duração do dia não é constante. Por esse motivo, desde 1967, o segundo é definido como o tempo gasto pelas oscilações da luz 9192631770 de um comprimento de onda específico emitido por um átomo de césio-133. Essa definição é tão precisa que seriam necessários dois relógios de césio 6.000 anos antes que suas leituras diferissem mais de 1 segundo.



Esquema ilustrativo de uma Relógio atômico.

O QUILOGRAMA

O padrão de massa no SI é **um cilindro de platina-irídio**, mostrado na Figura ao lado. O cilindro é mantido no Escritório Internacional de Pesos e Medidas perto de Paris e é postulado com a uma massa de 1 kg. Cópias precisas foram enviadas para outros países.



Padrão Massa para o Quilograma

DIFERENÇA ENTRE ESCALAR E VETOR

Em Física há dois tipos de grandezas; As grandezas **ESCALARES**, as quais podem ser descritas por um número acompanhado de uma unidade. Por exemplo: ***Temperatura***, ***massa***, ***tempo***, ***pressão energia***, ***volume***, etc. As grandezas **VETORIAIS** que além de ser descritas por um número acompanhado de uma unidade necessitam de informações adicionais tais como **direção** e **sentido**. Exemplos: ***Deslocamento***, ***velocidade***, ***aceleração***, ***momento***, ***força***, ***área***, ***campos***, etc.

Aqui apresenta-se as operações matemáticas básica entre vetores tais como: ***ADIÇÃO***, ***SUBTRAÇÃO*** e ***MULTIPLICAÇÃO***.

O VETOR

VETOR é uma grandeza Físico-Matemática descrita por um **MÓDULO**, uma **DIREÇÃO** e um **SENTIDO**. A representação geométrica de uma vetor é o ***segmento de reta orientado*** como mostrado na **Figura 1** abaixo. Os vetores são indicados como uma letra MAIÚSCULA em **negrito** ou por uma letra MAIÚSCULA sob uma seta (→). O módulo é a distância ou comprimento do segmento de reta, a direção é a da reta que contém o segmento de reta e o sentido é indicado por a seta de ponto **inicial** ao ponto **final** do segmento de reta.

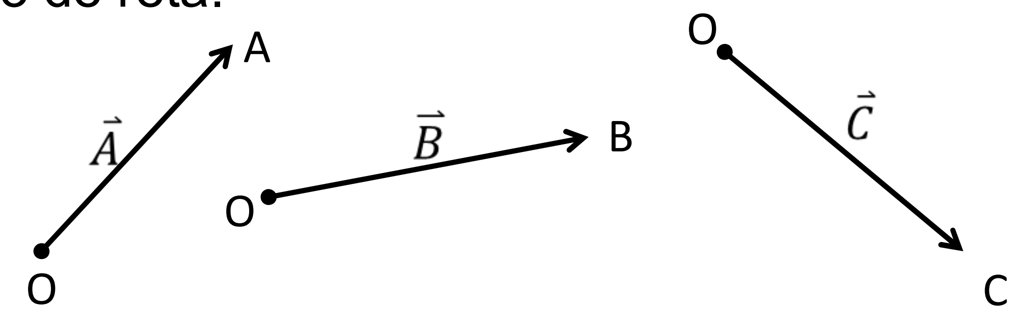


Figura 1: Representação geométrica de VETORES.

OPERAÇÃO COM VETORES: **SOMA**

***Método Geométrico do Paralelogramo*.**

Dados dois vetores **A** e **B** cujos os módulos são *A* ou |**A**| e *B* ou |**B**| e o ângulos entre eles é a medida da abertura indicada por ϕ a soma é dada por **S** = **A** + **B** com mostrado na **Figura 2** abaixo.

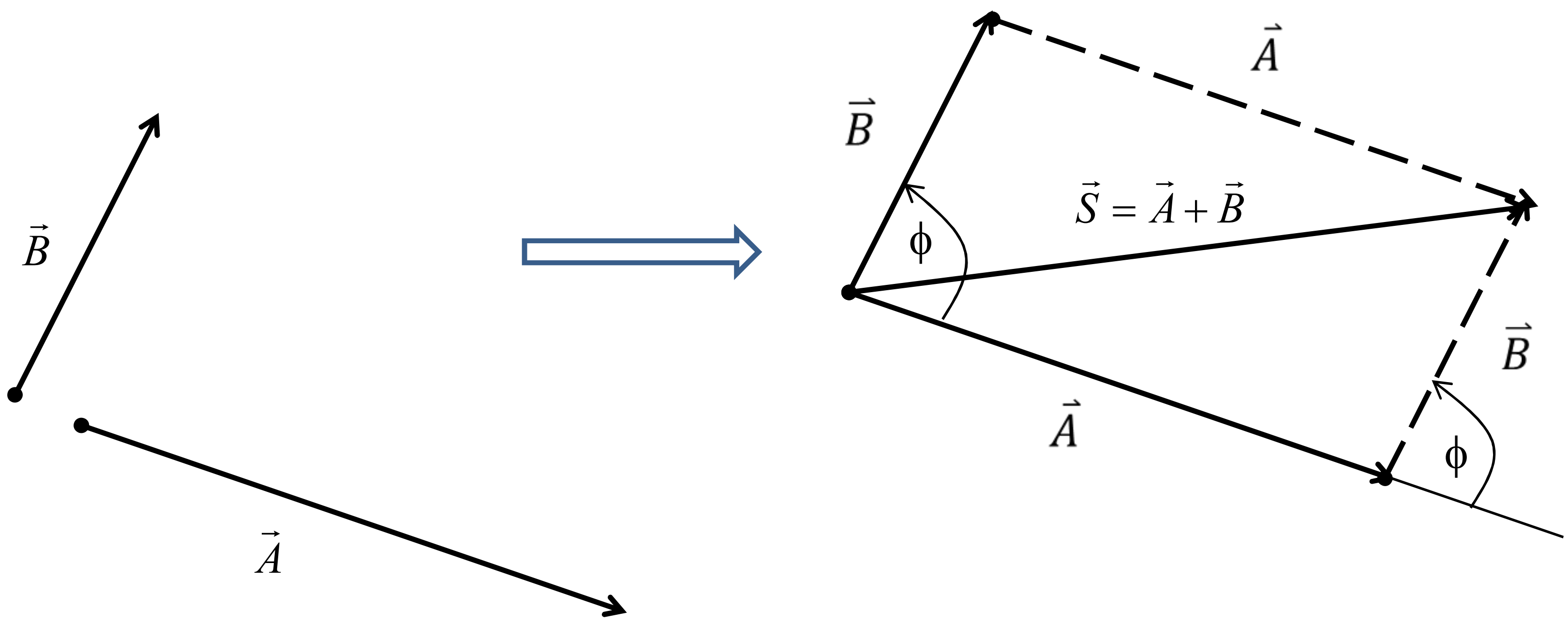
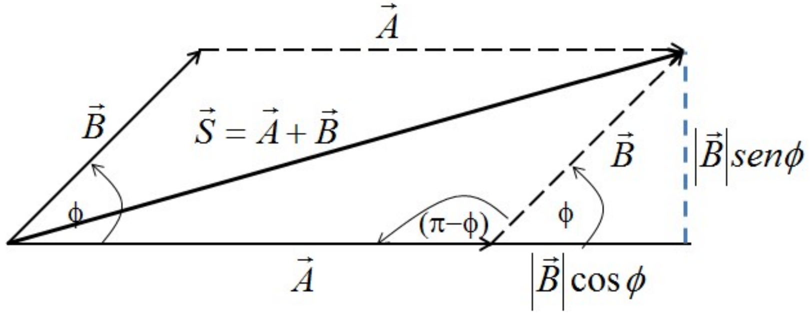


Figura 2: Representação geométrica da **SOMA** de VETORES; método do paralelogramo.

MÓDULO DA SOMA ENTRE VETORES

Método Geométrico do Paralelogramo.

Dados dois vetores **A** e **B** cujos os módulos são *A* ou |**A**| e *B* ou |**B**| e o ângulos entre eles é a medida da abertura indicada por ϕ a soma é dada por **S** = **A** + **B** com mostrado na **Figura** abaixo, o módulo da soma é calculado aplicando-se o teorema de Pitágoras ou a lei dos cossenos.



(ii) Aplicando a lei dos cossenos:

$$\left|\vec{S}\right|^2 = \left|\vec{A} + \vec{B}\right|^2 = A^2 + B^2 - 2AB\cos(\pi - \phi)$$

$$\Rightarrow \cos(\pi - \phi) = -\cos\phi$$

$$\left|\vec{S}\right| = \left|\vec{A} + \vec{B}\right| = \sqrt{A^2 + B^2 + 2AB\cos\phi}$$

(i) Aplicando o teorema de Pitágoras:

$$\left|\vec{S}\right|^2 = \left|\vec{A} + \vec{B}\right|^2 = (A + B\cos\phi)^2 + (Bsen\phi)^2 =$$

$$A^2 + B^2(\cos^2\phi + sen^2\phi) + 2AB\cos\phi \Rightarrow (\cos^2\phi + sen^2\phi) = 1$$

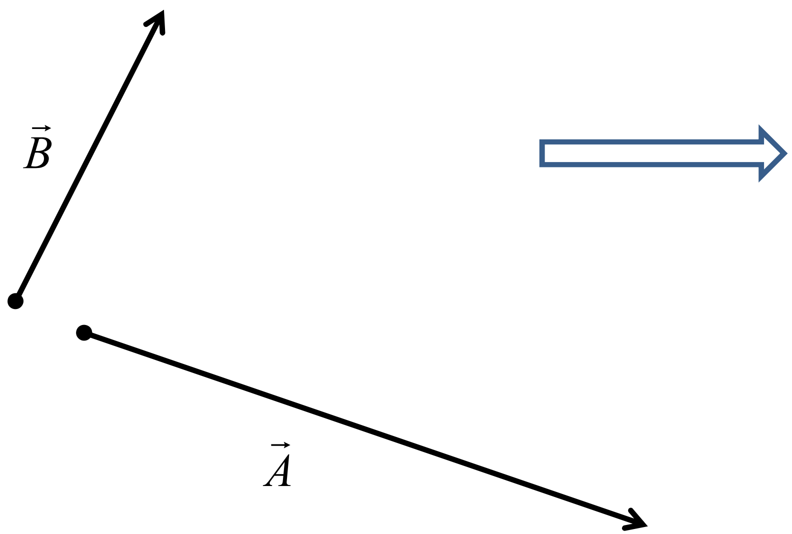
$$\Rightarrow \left|\vec{S}\right| = \left|\vec{A} + \vec{B}\right| = \sqrt{A^2 + B^2 + 2AB\cos\phi}$$

OPERAÇÃO COM VETORES: **SUBTRAÇÃO**

Método Geométrico do Paralelogramo.

Dados dois vetores **A** e **B** cujos os módulos são *A* ou |**A**| e *B* ou |**B**| e o ângulos entre eles é a medida da abertura indicada por ϕ a soma é dada por **D** = **A** - **B** com mostrado na **Figura 2** abaixo. Atenção: para todo vetor **A** existe um vetor (**-A**) tal que **A**+(**-A**)=**0 e analogamente, B**+(**-B**)=**0**

Aqui temos: D = (**A – B)=A+(-B) ou A=D+B**



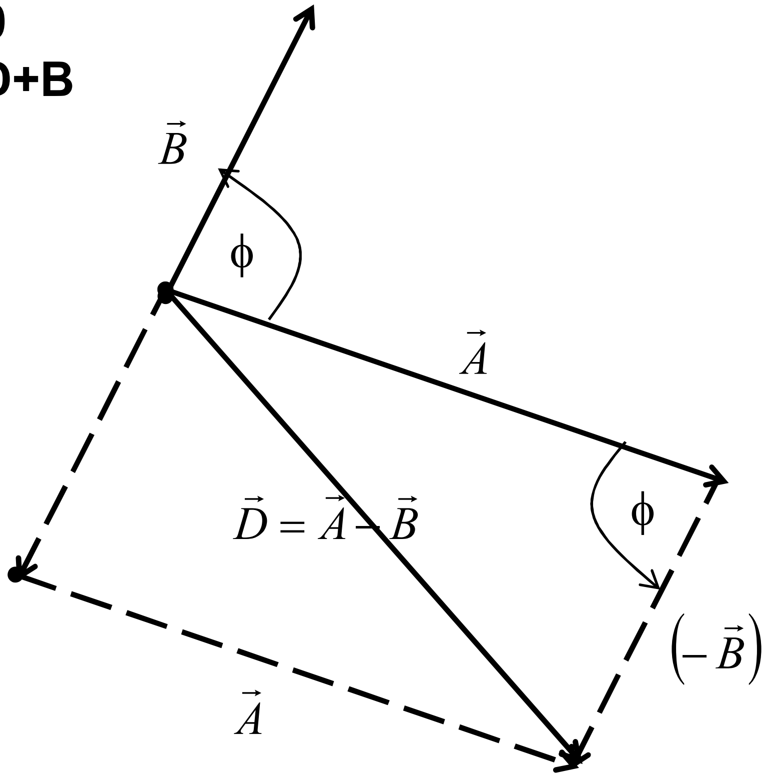


Figura 2: Representação geométrica da **SUBTRAÇÃO** de VETORES; método do paralelogramo.

SUBTRAÇÃO: Calculando o módulo do Vetor D

Método Geométrico do Paralelogramo.

Aplicando a lei dos cossenos:

$$\left|\vec{D}\right|^2 = \left|\vec{A} - \vec{B}\right|^2 = A^2 + B^2 - 2AB\cos(\phi) \rightarrow \left|-\vec{B}\right| = B$$

$$\left|\vec{D}\right| = \left|\vec{A} - \vec{B}\right| = \sqrt{A^2 + B^2 - 2AB\cos\phi}$$

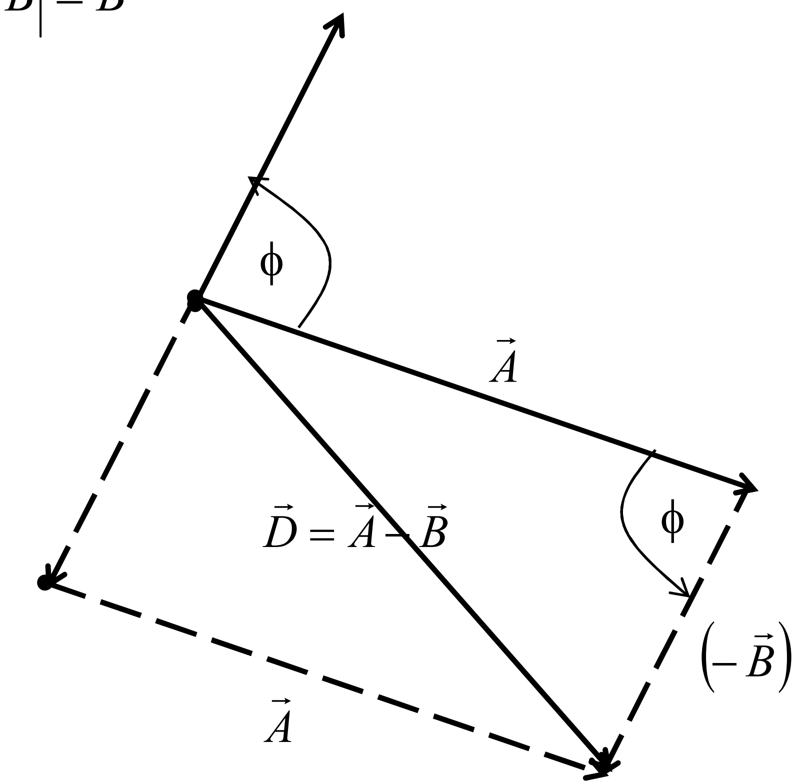
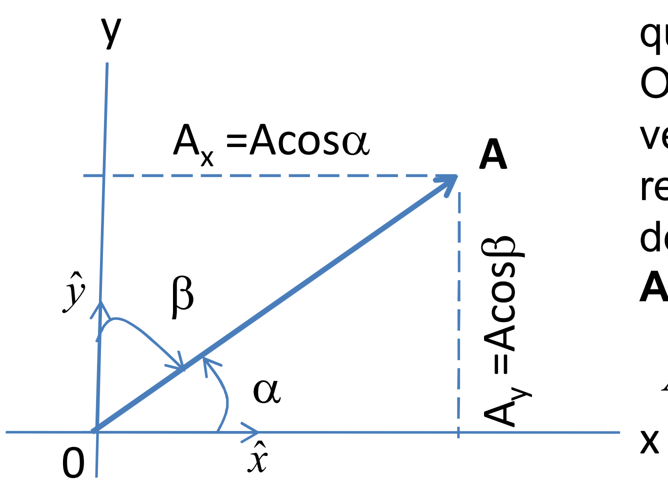


Figura 2: Representação geométrica da **SUBTRAÇÃO** de VETORES; método do paralelogramo.

O VETOR, SISTEMA DE COORDENADAS E COMPONENTES VETORIAIS

(i) <u>Sistema de Coordenadas BIDIMENSIONAL</u>.

Sistema construindo por meio de duas reta concorrentes e ortogonais entre si, gerando um ponto chamado de origem do sistema de coordenadas. Os eixos orientados (direção e sentido) são chamados de ABISCISSA (x) e ORDENADA (y), como mostrado na **Figura 3** abaixo. Um vetor descrito em este sistema de coordenadas possui duas componentes, as quais são as projeções ("sombra") do vetor nos eixos coordenados e são orientado por meio de dois ângulos chamados de ângulos diretores α e β.



Exemplo: O vetor **A** possui duas componentes A_x e A_y, as quais são as projeções do módulo do vetor **A** nos eixos x e y. Os ângulos α e β são chamados ângulos diretores do vetor do vetor **A**. O módulo do vetor **A** é o comprimento da diagonal do retângulo de lados A_x e A_y e é calculado aplicando o teorema de Pitágoras. Os vetores unitários que orientam o vetor **A=|A|a** é o vetor **a**.

$$A = \left|\vec{A}\right| = \sqrt{(A_x)^2 + (A_y)^2}$$

$$\vec{A} = A_x\hat{x} + A_y\hat{y} \Rightarrow \hat{a} = \frac{\vec{A}}{\left|\vec{A}\right|}$$

$$A_x = A\cos\alpha, \quad A_y = A\cos\beta = A sen\alpha$$

$$\cos\alpha = \frac{A_x}{A}, \quad \cos\beta = \frac{A_y}{A} = sen\alpha$$

o vetor **a** é um vetor de módulo **UM** e serve para orientar o vetor **A**.

EXEMPLOS

Ex#1: Dado o vetor **A** com componentes A_x =-5 e A_y=3. Calcule seu módulo, seus cossenos, seus ângulos diretores e o vetor **A**.

Solução: $A = \left|\vec{A}\right| = \sqrt{(A_x)^2 + (A_y)^2} = \sqrt{(-5)^2 + (3)^2} = \sqrt{34} \Rightarrow \cos\alpha = \frac{A_x}{A} = \frac{-5}{\sqrt{34}} \Rightarrow \alpha = 149{,}04^o,\ \cos\beta = \frac{3}{\sqrt{34}} \Rightarrow \beta = 30{,}96^o$

$\vec{A} = (-5)\hat{x} + 3\hat{y} = (-5;\ 3)$

Ex#2: Dado o vetor **A** com componentes A_x =-5 e módulo A=13. Calcule sua componente A_y, seus cossenos e ângulos diretores e o vetor **A**.

Solução: $A = \left|\vec{A}\right| = \sqrt{(A_x)^2 + (A_y)^2} \Rightarrow A_y = \sqrt{(13)^2 - (-5)^2} = \sqrt{144} = 12 \Rightarrow \cos\alpha = \frac{A_x}{A} = \frac{-5}{13} \Rightarrow \alpha = 122{,}62^o,\ \cos\beta = \frac{12}{13} \Rightarrow \beta = 22{,}62^o$

$\left|\vec{A}\right| = -5\hat{x} + 12\hat{y} = (-5;\ 12)$

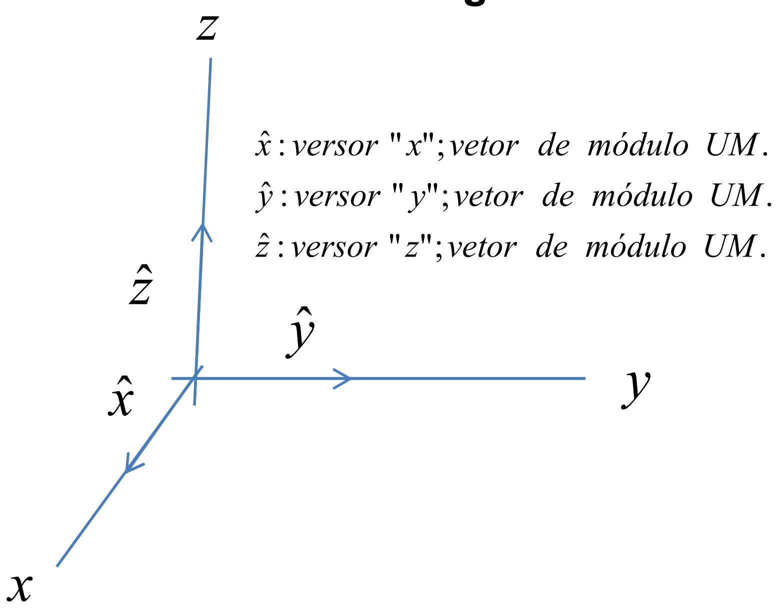
Ex#3: Dado o vetor **A** com módulo A=13 e α = 190^{o}. Calcule sua componentes A_x e A_y, seus cossenos e ângulos diretores.

Solução: $A_x = A\cos\alpha = 13\cos(190^o) = -12{,}80;\ A_y = \sqrt{(13)^2 - (-12{,}8)^2} = 2{,}26 \Rightarrow \cos\beta = \frac{2{,}26}{13} \Rightarrow \beta = 80^o$

$A = -12{,}8\hat{x} + 2{,}26\hat{y} = (-12{,}5;\ 2{,}26)$

VETORES, SISTEMA DE COORDENADAS, COMPONENTES VETORIAIS e ÂNGULOS DIRETORES

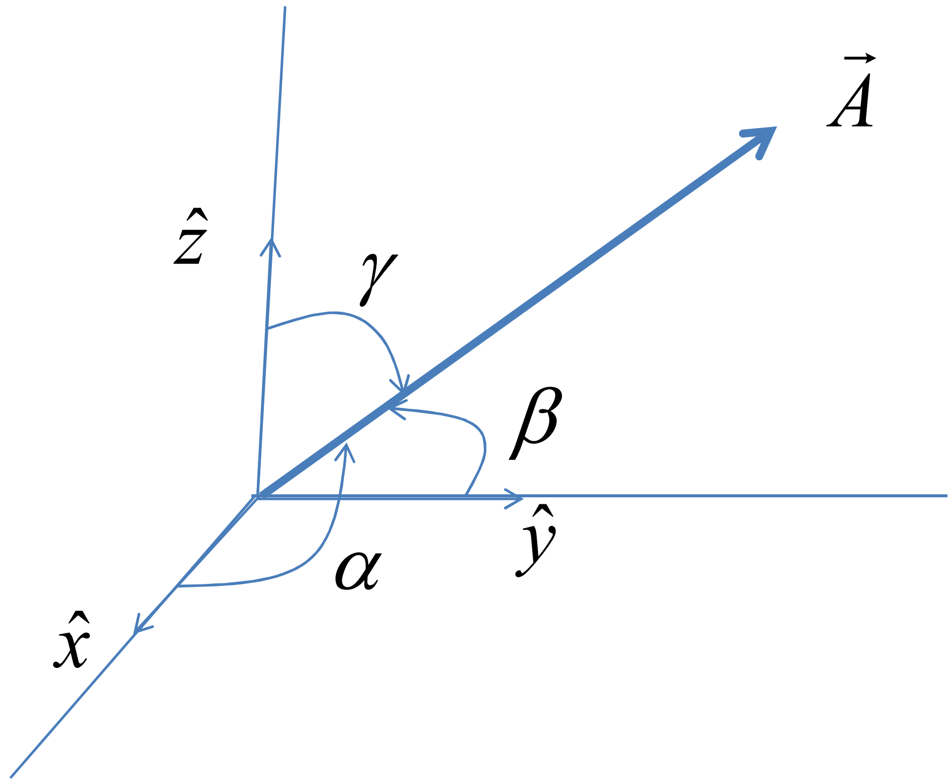
O melhor modo de operar com vetores é através de suas componentes. Assim, as operações de soma, subtração e multiplicação tais como o **produto escalar** e **o produto vetorial** são facilitados enormemente quando se opera vetores por meio de sua componentes. Para definir as componentes vetoriais é necessário adotar um sistema de coordenadas que facilite os cálculos. O sistema de coordenadas útil e fácil manipulação para efetuar operações vetoriais é o sistema de coordenadas retangular ou cartesiano. Ele é construindo por de três reta concorrentes, duas a duas ortogonais entre si, gerando um ponto chamado de origem do sistema de coordenadas. Os eixos orientados (direção e sentido) são chamados de ABISCISSA (eixo x), ORDENADA (eixo y) e COTA (eixo z). O eixo x é orientado por um vetor de módulo UM chamado "***versor x***", o eixo y é orientado por um vetor de módulo UM chamado "***versor y***" e o eixo z é orientado por um vetor de módulo UM chamado "***versor z***", como está mostrado na **Figura** abaixo.



A Figura ao lado mostra o sistema de coordenadas tridimensional retangular onde cada eixo é orientado por vetores de módulos **UNITÁRIOS** chamados de "***VERSORES***".

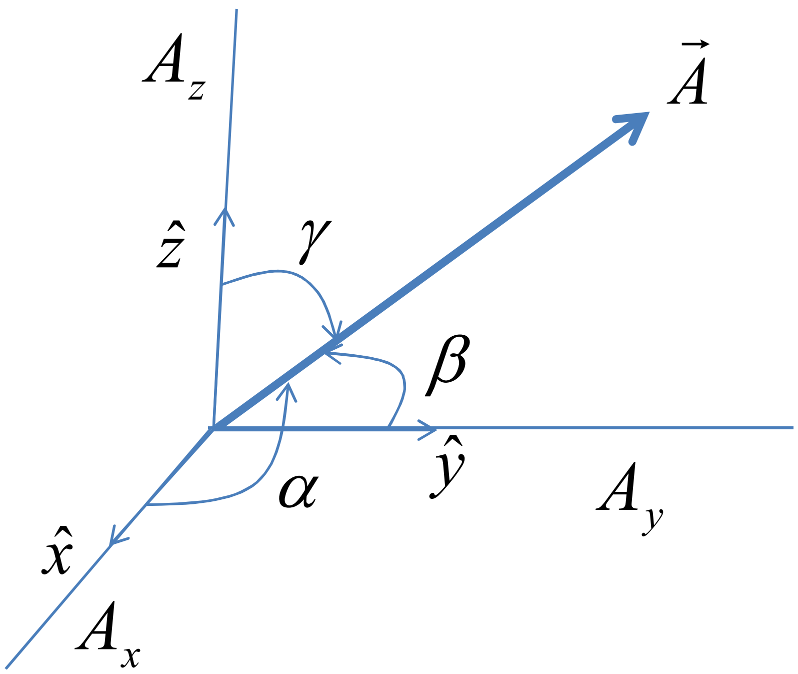
VETORES, SISTEMA DE COORDENADAS, COMPONENTES VETORIAIS e ÂNGULOS DIRETORES

Um vetor escrito em um sistema de coordenadas tridimensional possui três componentes, as quais são definidas como as projeções (“sombra”) do módulo de esse vetor nos eixos orientados. As componentes vetoriais estão diretamente relacionadas com o módulo do vetor por meio de três ângulos especiais chamados de **ângulos diretores** α, β e γ, como mostrado na **Figura** abaixo. Esses ângulos prover o sentido e a direção do vetor no sistema de coordenadas em que ele é escrito. Os ângulos diretores são medidos a partir de cada eixo orientado. A ideia por trás dos chamados ângulos diretores, é aquela em que se imagina que cada ângulo diretor mantém a inclinação do vetor no sistema de coordenada em relação ao eixo orientado a partir do qual é medido.



VETORES, SISTEMA DE COORDENADAS, COMPONENTES VETORIAIS e ÂNGULOS DIRETORES

As componente de um vetor são definidas como as projeções ("sombra") do módulo (comprimento) do vetor nos eixos orientados; elas são calculadas por meio dos chamados **cossenos diretores**. Para calcular cada componente, projeta-se o módulo do vetor em cada eixo orientado. Por exemplo, A_x é a componente do "**A**" projetado no eixo x, A_y é a componente do vetor "**A**" no eixo y e A_z é a componente do vetor "**A**" no eixo z (**Figura** abaixo). Cada uma dessas projeções é calculada como sendo o produto do módulo do vetor e o cosseno do ângulo diretor. Assim, define-se as componentes vetoriais como mostrado abaixo.



$$A_x = \left|\vec{A}\right| \cos\alpha, \quad A_y = \left|\vec{A}\right| \cos\beta \quad e \quad A_z = \left|\vec{A}\right| \cos\gamma$$

$$A = \left|\vec{A}\right| : Módulo \;\; do \;\; vetor \;\; \vec{A}.$$

$$\vec{A} = \left(A_x;\; A_y\;;A_z\right) = \left(A\cos\alpha; A\cos\beta; A\cos\gamma\right)$$

$$ou$$

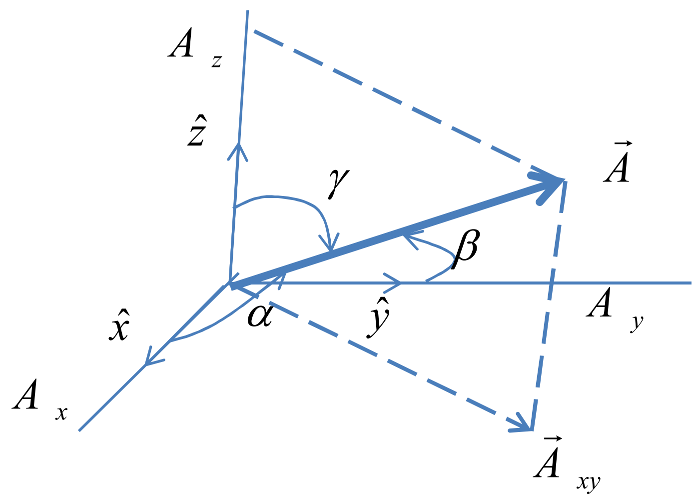
$$\vec{A} = A(\hat{x}\cos\alpha + \hat{y}\cos\beta + \hat{z}\cos\gamma) = A\hat{a}$$

$$\hat{a} = \left(\frac{\vec{A}}{A}\right) = (\hat{x}\cos\alpha + \hat{y}\cos\beta + \hat{z}\cos\gamma)$$

Em geral são dados as componentes do vetor e pede-se para calcular o módulo e os cossenos diretores.

VETORES, SISTEMA DE COORDENADAS, COMPONENTES VETORIAIS e ÂNGULOS DIRETORES

Uma vez dadas as componentes do vetor no sistema de coordenadas como por exemplo, A_x é a componente do "**A**" projetado no eixo x, A_y é a componente do vetor "**A**" no eixo y e A_z é a componente do vetor "**A**" no eixo z (**Figura**); define-se o chamado módulo do vetor. O módulo de um vetor nada mais é que o "comprimento" entre dois pontos de uma quantidade numérica acompanhada de uma unidade padrão. Para calcular o módulo de um vetor no sistema de coordenadas cartesianas, usa-se o teorema de ´Pitágoras entre as componentes dos vetor. Por exemplo, como ilustrado na **Figura**, projeta-se o vetor "**A**" no *plano xy*, essa projeção gera um novo vetor no plano chamado de vetor "$\mathbf{A_{xy}}$" cujas componentes são as componentes A_x e A_y. O módulo do vetor "$\mathbf{A_{xy}}$" é na verdade a hipotenusa do triângulo retângulo cujo catetes são A_x e A_y. Por outro lado, o módulo do vetor "**A**" é a hipotenusa do triângulo retângulo formando por o catetos módulo do vetor "$\mathbf{A_{xy}}$" e a componente A_z. Assim o módulo do vetor "**A**" é igual a raiz quadrada da soma das componentes do vetor "**A**" elevadas ao quadrado.



$$A_x = \left|\vec{A}\right|\cos\alpha,\quad A_y = \left|\vec{A}\right|\cos\beta \quad e \quad A_z = \left|\vec{A}\right|\cos\gamma$$

$$\vec{A} = \left(A_x;\ A_y\ ; A_z\right)$$

$$A = \left|\vec{A}\right| : Módulo \ \ do \ \ vetor \ \ \vec{A}.$$

$$\vec{A}_{xy} = \left(A_x;\ A_y\ \right)$$

$$\left|\vec{A}_{xy}\right| = A_{xy} : Módulo \ \ do \ \ vetor \ \ \vec{A}_{xy}.$$

$$\left|\vec{A}_{xy}\right| = \sqrt{A_x^2 + A_y^2}$$

$$\left|\vec{A}\right| = \sqrt{\left(\left|\vec{A}_{xy}\right|\right)^2 + A_z^2} = \sqrt{A_x^2 + A_y^2 + A_z^2}$$

$$\therefore \left|\vec{A}\right| = A = \sqrt{A_x^2 + A_y^2 + A_z^2}$$

VETORES, SISTEMA DE COORDENADAS, COMPONENTES VETORIAIS e ÂNGULOS DIRETORES:

Exemplo

Dados os vetores “**A**” com componentes (1;2;3) e “**B**” com componentes (5;6;7). (a) calcule os ângulos diretores dos vetores “**A**”, “**B**.

$$Solução : sejam\ os\ vetores\ \vec{A} = (1;2;3)\ e\ \vec{B} = (5;6;7); \left|\vec{A}\right| = \sqrt{1^2 + 2^2 + 3^2} = \sqrt{14}\ e \left|\vec{B}\right| = \sqrt{5^2 + 6^2 + 7^2} = \sqrt{110};$$

$$\cos\alpha_{\vec{A}} = \frac{1}{\sqrt{14}} \Rightarrow \alpha_{\vec{A}} = 74,5^o, \cos\beta_{\vec{A}} = \frac{2}{\sqrt{14}} \Rightarrow \beta_{\vec{A}} = 57,7^o\ e \cos\gamma_{\vec{A}} = \frac{3}{\sqrt{14}} \Rightarrow \gamma_{\vec{A}} = 36,7^o;$$

$$\cos\alpha_{\vec{B}} = \frac{5}{\sqrt{110}} \Rightarrow \alpha_{\vec{B}} = 61,5^o, \cos\beta_{\vec{B}} = \frac{6}{\sqrt{110}} \Rightarrow \beta_{\vec{B}} = 55,1^o\ e \cos\gamma_{\vec{B}} = \frac{7}{\sqrt{110}} \Rightarrow \gamma_{\vec{B}} = 48,1^o;$$

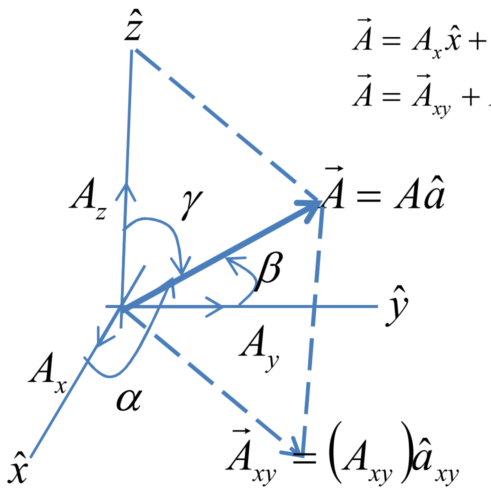
O VETOR, SISTEMA DE COORDENADAS E COMPONENTES VETORIAIS

(ii) <u>Sistema de Coordenadas TRIDIMENSIONAL</u>.

Sistema construindo por meio de três reta concorrentes, duas a duas ortogonais entre si, gerando um ponto chamado de origem do sistema de coordenadas. Os eixos orientados (direção e sentido) são chamados de ABISCISSA (x) e ORDENADA (y) e COTA (z), como mostrado na **Figura 4** abaixo. Um vetor descrito em este sistema de coordenadas possui três componentes, as quais são as projeções (“sombra”) do vetor nos eixos coordenados e são orientado por meio de três ângulos chamados de ângulos diretores α, β e γ.

$$\vec{A} = A_x\hat{x} + A_y\hat{y} + A_x\hat{z} \Rightarrow A = \left|\vec{A}\right| = \sqrt{(A_x)^2 + (A_y)^2 + (A_y)^2} \Rightarrow A_x = A\cos\alpha,\ \ A_y = A\cos\beta \ \ e\ \ A_z = A\cos\gamma$$

$$\vec{A} = \vec{A}_{xy} + A_z\hat{z} \Rightarrow \vec{A}_{xy} = \left(A_{xy}\right)\hat{a}_{xy} = A_x\hat{x} + A_y\hat{y} \Rightarrow A_{xy} = \left|\vec{A}_{xy}\right| = \sqrt{(A_x)^2 + (A_y)^2}$$



O vetor **A** possui três componentes A_x e A_y e A_z as quais são as projeções do módulo do vetor **A** nos eixos x, y e z. Os ângulos α, β e γ são chamados ângulos diretores do vetor do vetor **A**. O módulo do vetor **A** é o comprimento do ponto de origem 0 ao ponto (A) que localiza o vetor no espaço. Este ponto tem como coordenadas as componentes do **A** e é calculado aplicando o teorema de Pitágoras em três dimensões.

OPERAÇÃO COM VETORES POR MEIO DE SUA COMPONENTES: **SOMA E SUBTRAÇÃO**.

Dados dois vetores **A** e **B** escritos em um sistema de coordenadas tridimensional com suas respectivas componentes **A**= (A_x; A_y; A_z) e B= (B_x; B_y; B_z). A soma (**A** + **B**) e ou subtração (**A** - **B**) do vetor resultante é definida somando-se ou subtraindo-se componente a componente dos vetores **A** e **B** e o módulo é definido como a raiz quadrada da soma ou diferença das componentes ao quadrado do vetor soma (**A** + **B**) ou subtração (**A** - **B**) com descrito abaixo.

$$\vec{A} = \left(A_x; A_y; A_x\right) = A_x\hat{x} + A_y\hat{y} + A_x\hat{z} \quad e \quad \vec{B} = \left(B_x; B_y; B_z\right) = B_x\hat{x} + B_y\hat{y} + B_x\hat{z}$$

$$\Rightarrow \left(\vec{A} \pm \vec{B}\right) = \left(A_x; A_y; A_z\right) \pm \left(B_x; B_y; B_z\right) = \left[\left(A_x \pm B_x\right); \left(A_y \pm B_y\right); \left(A_z \pm B_z\right)\right]$$

$$ou$$

$$\Rightarrow \left(\vec{A} \pm \vec{B}\right) = \left(A_x\hat{x} + A_y\hat{y} + A_z\hat{z}\right) \pm \left(B_x\hat{x} + B_y\hat{y} + B_z\hat{z}\right) = \left(A_x \pm B_x\right)\hat{x} + \left(A_y \pm B_y\right)\hat{y} + \left(A_z \pm B_z\right)\hat{z}$$

$$\left|\left(\vec{A} \pm \vec{B}\right)\right| = \sqrt{\left(A_x \pm B_x\right)^2 + \left(A_y \pm B_y\right)^2 + \left(A_z \pm B_z\right)^2}$$

Este é o modo algébrico de operar soma e subtração de vetores. Note que o módulo do vetor resultante é obtido aplicando-se o teorema de Pitágoras em três dimensões.

OPERAÇÃO COM VETORES POR MEIO DE SUA COMPONENTES: **MULTIPLICAÇÃO DE VETORES**.

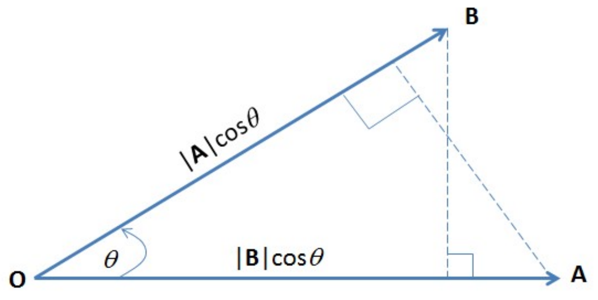
A multiplicação entre vetores tem como resultados dois produtos, a saber: o **PRODUTO ESCALAR** e o **PRODUTO VETORIAL**. No produto escalar, o resultado é um escalar; já no produto vetorial, o resultado é um novo vetor. Do ponto de vista prático, o produto escalar é definido como a "**sombra**" de um vetor projetada na direção do outro vetor vezes o módulo (comprimento) deste vetor. Já o produto vetorial pode ser pensado como o resultado da **rotação** (giro) de um vetor na direção do outro onde o eixo de rotação é o vetor resultante chamado de **vetor produto vetorial**, ou seja um vetor que é perpendicular aos dois vetores em operação cujo módulo é numericamente igual ao módulo da área do paralelogramo formado na operação de rotação dos vetores envolvidos.

MULTIPLICAÇÃO DE VETORES:

O PRODUTO ESCALAR

No produto escalar, o resultado é um escalar e o é definido como a "**sombra**" de um vetor projetada na direção do outro vetor vezes o módulo (comprimento) deste vetor. A **Figura** abaixo ilustra geometricamente as projeções de um vetor na direção do outro e pode ser usada para a definição matemática do **PRODUTO ESCALAR**.

Definição: Sejam os vetores **A** e **B** escritos em um sistema de coordenadas ortogonal, a definição do produto escalar é dado como (**A•B**)= |**A**||**B**|cosθ. Deste modo, a quantidade (**A•B**) vale (-1)(|**A**||**B**|) ≤ (**A•B**) ≤ (+1)(|**A**||**B**|) e zero quando θ=90°.



Como pode ser visto na **Figura** ao lado, a projeção do vetor **B** sobre o vetor **A** é dada por uma sombra |**B**|cosθ. Como o vetor **A** pode ser escrito como **A**=|**A**|**a**, onde |**A**| é o módulo do vetor **A** e **a** é o vetor unitário de módulo igual a **UM**, ou seja, |**a**|= **1**= |**A**|/ |**A**|. Assim tem-se:

$$proj_{\vec{A}}^{\vec{B}} = |\vec{B}|\cos\theta = \frac{|\vec{A}|}{|\vec{A}|}|\vec{B}|\cos\theta \Rightarrow |\vec{A}||\vec{B}|\cos\theta = (\vec{A} \bullet \vec{B}) = |\vec{A}| \times proj_{\vec{A}}^{\vec{B}}$$

O PRODUTO ESCALAR

Como a quantidade (**A•B**)= |**A**||**B**|cosθ, no sistema de coordenadas ortogonal tem-se: $(\hat{x}\bullet\hat{x})=(\hat{y}\bullet\hat{y})=(\hat{z}\bullet\hat{z})=1 \ \ e \ \ (\hat{x}\bullet\hat{y})=(\hat{y}\bullet\hat{z})=(\hat{z}\bullet\hat{x})=0$, pois $(\hat{x}\parallel\hat{x});\ (\hat{y}\parallel\hat{y})\ e\ (\hat{z}\parallel\hat{z})\ e\ \ (\hat{x}\perp\hat{y}),\ (\hat{y}\perp\hat{z})\ e\ (\hat{z}\perp\hat{x})$
Com base nisso, o produto escalar dos vetores **A**= (A_x; A_y; A_z) e **B**= (B_x; B_y; B_z), tem-se:

$$(\vec{A}\bullet\vec{B})=(A_x;A_y;A_z)\bullet(B_x;B_y;B_z)=A_xB_x(\hat{x}\bullet\hat{x})+A_xB_y(\hat{x}\bullet\hat{y})+A_xB_z(\hat{x}\bullet\hat{z})+A_yB_x(\hat{y}\bullet\hat{x})+A_yB_y(\hat{y}\bullet\hat{y})+A_yB_z(\hat{y}\bullet\hat{z})+$$

$$A_zB_x(\hat{z}\bullet\hat{x})+A_zB_y(\hat{z}\bullet\hat{y})+A_zB_z(\hat{z}\bullet\hat{z})$$

$$(\hat{x}\bullet\hat{x})=(\hat{y}\bullet\hat{y})=(\hat{z}\bullet\hat{z})=1 \ \ e \ \ (\hat{x}\bullet\hat{y})=(\hat{y}\bullet\hat{z})=(\hat{z}\bullet\hat{x})=0$$

$$\Rightarrow (\vec{A}\bullet\vec{B})=A_xB_x+A_yB_y+A_zB_z$$

$$(\vec{A}\bullet\vec{B})=A_xB_x+A_yB_y+A_zB_z=\left|\vec{A}\right|\left|\vec{B}\right|\cos\theta$$

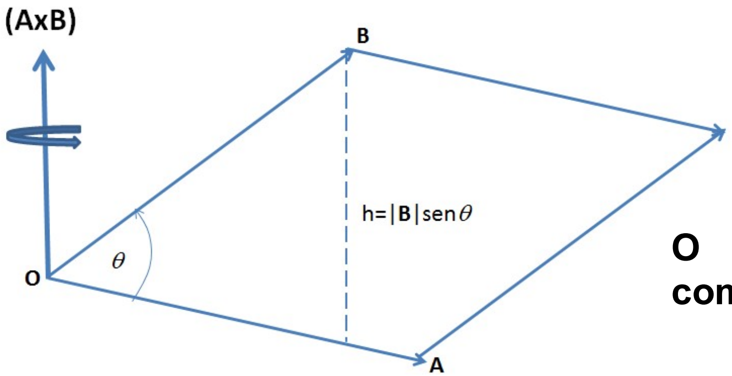
$$\Rightarrow \left|\vec{A}\right|=\sqrt{(A_x)^2+(A_y)^2+(A_z)^2} \quad e \quad \left|\vec{B}\right|=\sqrt{(B_x)^2+(B_y)^2+(B_z)^2}$$

O produto escalar é útil para se calcular o ângulo entre dois vetores sabendo-se de suas componentes.

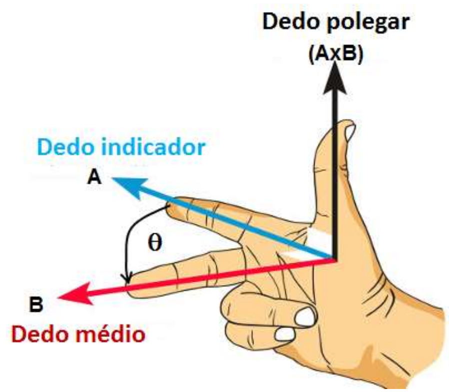
MULTIPLICAÇÃO DE VETORES:

O PRODUTO VETORIAL

O produto vetorial pode ser interpretado como o resultado da **rotação** (giro) de um vetor na direção do outro onde o eixo de rotação é o **vetor resultante** chamado de **vetor produto vetorial**. Esse vetor é perpendicular aos dois vetores em operação e seu módulo é numericamente igual ao valor da área do paralelogramo formado na operação de rotação entre os dois vetores envolvidos. A **Figura** abaixo ilustra geometricamente a rotação do vetor na A na direção do B e pode ser usada para a definição matemática do **PRODUTO VETORIAL** (**A**x**B**) e seu módulo: | (**A**x**B**) |=h• |**A**|=(|**B**|senθ)|**A**|= |**A**||**B**|senθ.



O produto vetorial é conhecido como a REGRA da MÃO DIREITA



O PRODUTO VETORIAL

Como a quantidade |(**A**x**B**)|= |**A**||**B**|senθ, no sistema de coordenadas ortogonal tem-se: $(\hat{x}\otimes\hat{x})=(\hat{y}\otimes\hat{y})=(\hat{z}\otimes\hat{z})=\hat{0}\ \ e\ \ (\hat{x}\otimes\hat{y})=\hat{z}=-(\hat{y}\otimes\hat{x}),\ (\hat{y}\otimes\hat{z})=\hat{x}=-(\hat{z}\otimes\hat{y})\ e\ (\hat{z}\bullet\hat{x})=\hat{y}=-(\hat{x}\bullet\hat{z})$, pois $(\hat{x}\,||\,\hat{x});\ (\hat{y}\,||\,\hat{y})\ e\ (\hat{z}\,||\,\hat{z})\ e\ \ (\hat{x}\perp\hat{y}),\ (\hat{y}\perp\hat{z})\ e\ (\hat{z}\perp\hat{x})$

Com base nisso, o produto vetorial dos vetores **A**= (A_x; A_y; A_z) e **B**= (B_x; B_y; B_z), tem-se:

$$(\vec{A}\otimes\vec{B})=(A_x;A_y;A_z)\otimes(B_x;B_y;B_z)=A_xB_x(\hat{x}\otimes\hat{x})+A_xB_y(\hat{x}\otimes\hat{y})+A_xB_z(\hat{x}\otimes\hat{z})+A_yB_x(\hat{y}\otimes\hat{x})+A_yB_y(\hat{y}\otimes\hat{y})+A_yB_z(\hat{y}\otimes\hat{z})+A_zB_x(\hat{z}\otimes\hat{x})+A_zB_y(\hat{z}\otimes\hat{y})+A_zB_z(\hat{z}\otimes\hat{z}).$$

$$\Rightarrow(\vec{A}\otimes\vec{B})=(A_yB_z-A_zB_y)\hat{x}-(A_xB_z-A_zB_x)\hat{y}+(A_xB_y-A_yB_x)\hat{z}$$

Outro modo de se expressar o produto vetorial é como segue:

$$(\vec{A}\otimes\vec{B})=(A_yB_z-A_zB_y)\hat{x}-(A_zB_z-A_zB_x)\hat{y}+(A_xB_y-A_yB_x)\hat{z}\equiv\begin{vmatrix}\hat{x}&\hat{y}&\hat{z}\\A_x&A_y&A_z\\B_x&B_y&B_z\end{vmatrix}$$

O módulo do produto vetorial é dado como:

$$\left|(\vec{A}\otimes\vec{B})\right|=\sqrt{(A_yB_z-A_zB_y)^2+(A_zB_z-A_zB_x)^3+(A_xB_y-A_yB_x)^2}\equiv\left|\vec{A}\right|\left|\vec{B}\right|sen\,\theta$$

RESUMO

OPERAÇÃO COM VETORES: **Soma ou Subtração**

Um vetor descrito em este sistema de coordenadas possui três componentes, as quais são as projeções ("sombra") do vetor nos eixos coordenados e são orientado por meio de dois ângulos chamados de ângulos diretores α, β e γ. Para o vetor **A**= (A_x; A_y; A_z), tem-se o módulo, os cossenos e ângulos diretores como descritos abaixo.

$$\vec{A} = A_x\hat{x} + A_y\hat{y} + A_x\hat{z} \Rightarrow A = \left|\vec{A}\right| = \sqrt{(A_x)^2 + (A_y)^2 + (A_y)^2} \Rightarrow A_x = A\cos\alpha,\;\; A_y = A\cos\beta \;\; e \;\; A_z = A\cos\gamma$$

$$\vec{A} = \vec{A}_{xy} + A_z\hat{z} \Rightarrow \vec{A}_{xy} = \left(A_{xy}\right)\hat{a}_{xy} = A_x\hat{x} + A_y\hat{y} \Rightarrow A_{xy} = \left|\vec{A}_{xy}\right| = \sqrt{(A_x)^2 + (A_y)^2}$$

Dados dois vetores **A** e **B** escritos em um sistema de coordenadas tridimensional com suas respectivas componentes **A**= (A_x; A_y; A_z) e B= (B_x; B_y; B_z). A soma ou subtração entre os vetores são dados por:

$$\left(\vec{A} \pm \vec{B}\right) = \left(A_x; A_y; A_z\right) \pm \left(B_x; B_y; B_z\right) = \left[\left(A_x \pm B_x\right); \left(A_y \pm B_y\right); \left(A_z \pm B_z\right)\right]$$

ou

$$\left(\vec{A} \pm \vec{B}\right) = \left(A_x\hat{x} + A_y\hat{y} + A_z\hat{z}\right) \pm \left(B_x\hat{x} + B_y\hat{y} + B_z\hat{z}\right) = \left(A_x \pm B_x\right)\hat{x} + \left(A_y \pm B_y\right)\hat{y} + \left(A_z \pm B_z\right)\hat{z}$$

$$\left|\left(\vec{A} \pm \vec{B}\right)\right| = \sqrt{\left(A_x \pm B_x\right)^2 + \left(A_y \pm B_y\right)^2 + \left(A_z \pm B_z\right)^2}$$

RESUMO

OPERAÇÃO COM VETORES: **Produto Escalar**

$$(\vec{A} \bullet \vec{B}) = (A_x; A_y; A_z) \bullet (B_x; B_y; B_z) = A_x B_x (\hat{x} \bullet \hat{x}) + A_x B_y (\hat{x} \bullet \hat{y}) + A_x B_z (\hat{x} \bullet \hat{z}) + A_y B_x (\hat{y} \bullet \hat{x}) + A_y B_y (\hat{y} \bullet \hat{y}) + A_y B_z (\hat{y} \bullet \hat{z}) +$$

$$A_z B_x (\hat{z} \bullet \hat{x}) + A_z B_y (\hat{z} \bullet \hat{y}) + A_z B_z (\hat{z} \bullet \hat{z})$$

$$(\hat{x} \bullet \hat{x}) = (\hat{y} \bullet \hat{y}) = (\hat{z} \bullet \hat{z}) = 1 \;\; e \;\; (\hat{x} \bullet \hat{y}) = (\hat{y} \bullet \hat{z}) = (\hat{z} \bullet \hat{x}) = 0$$

$$\Rightarrow (\vec{A} \bullet \vec{B}) = A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z$$

$$(\vec{A} \bullet \vec{B}) = A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z = \left|\vec{A}\right| \left|\vec{B}\right| \cos\theta$$

$$\Rightarrow \left|\vec{A}\right| = \sqrt{(A_x)^2 + (A_y)^2 + (A_z)^2} \;\; e \;\; \left|\vec{B}\right| = \sqrt{(B_x)^2 + (B_y)^2 + (B_z)^2}$$

RESUMO

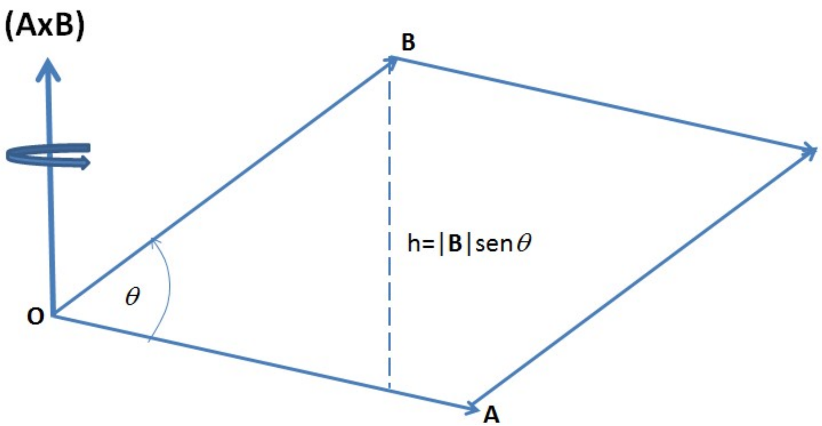
OPERAÇÃO COM VETORES: **Produto Vetorial**

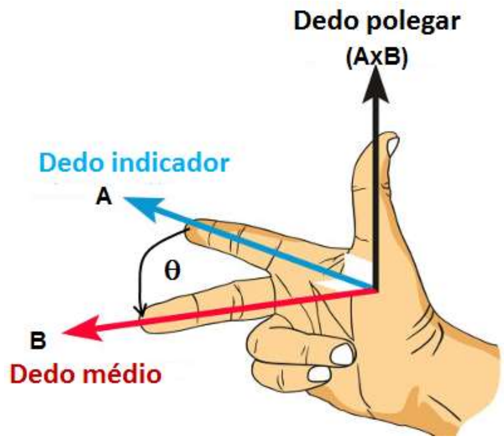
$$(\vec{A}\otimes\vec{B}) = (A_x;A_y;A_z)\otimes(B_x;B_y;B_z) = A_xB_x(\hat{x}\otimes\hat{x}) + A_xB_y(\hat{x}\otimes\hat{y}) + A_xB_z(\hat{x}\otimes\hat{z}) + A_yB_x(\hat{y}\otimes\hat{x}) + A_yB_y(\hat{y}\otimes\hat{y}) + A_yB_z(\hat{y}\otimes\hat{z}) + A_zB_x(\hat{z}\otimes\hat{x}) + A_zB_y(\hat{z}\otimes\hat{y}) + A_zB_z(\hat{z}\otimes\hat{z}).$$

$$\Rightarrow (\vec{A}\otimes\vec{B}) = (A_yB_z - A_zB_y)\hat{x} - (A_xB_z - A_zB_x)\hat{y} + (A_xB_y - A_yB_x)\hat{z}$$

$$(\vec{A}\otimes\vec{B}) = (A_yB_z - A_zB_y)\hat{x} - (A_zB_z - A_zB_x)\hat{y} + (A_xB_y - A_yB_x)\hat{z} \equiv \begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix}$$

$$\left|(\vec{A}\otimes\vec{B})\right| = \sqrt{(A_yB_z - A_zB_y)^2 + (A_zB_z - A_zB_x)^3 + (A_xB_y - A_yB_x)^2} \equiv \left|\vec{A}\right|\left|\vec{B}\right| sen\,\theta$$





VETORES, SISTEMA DE COORDENADAS, COMPONENTES VETORIAIS e ÂNGULOS DIRETORES:

Exemplo

Dados os vetores “**A**” com componentes (1;2;3) e “**B**” com componentes (5;6;7). (a) calcule o vetor soma “**S**” igual a “(**A** +**B**)”; (b) Calcule o vetor subtração “(**B**-**A**)”; (c) calcule os ângulos diretores dos vetores “**A**”, “**B**”, “(**A**+**B**)” e “(**B**-**A**)”; (d) Calcule o ângulos entre os vetores “**A**” e “**B**”; (e) Calcule o ângulo entre os vetores “(**A**+**B**)” e “(**B**-**A**)”; (f) Calcule o produto vetorial entre os vetores “**A**” e “**B**” e (g) Calcule o produto vetorial entre os vetores “(**A**+**B**)” e “(**B**-**A**)”.

$$Solução: \text{ sejam os vetores } \vec{A} = (1;2;3) \; e \; \vec{B} = (5;6;7); \left|\vec{A}\right| = \sqrt{1^2+2^2+3^2} = \sqrt{14} \; e \left|\vec{B}\right| = \sqrt{5^2+6^2+7^2} = \sqrt{110};$$

$$(a)\, \vec{S} = \vec{A}+\vec{B} = (1;2;3)+(5;6;7) = (6;8;10) = 6\hat{x}+8\hat{y}+10\hat{z} \; e \left|\vec{A}+\vec{B}\right| = \sqrt{6^2+8^2+10^2} = \sqrt{200};$$

$$(b)\, \vec{D} = (-\vec{A}+\vec{B}) = (\vec{B}+(-\vec{A})) = (\vec{B}-\vec{A}) = (5;6;7)-(1;2;3) = (4;4;4) \; e \left|\vec{B}-\vec{A}\right| = \sqrt{4^2+4^2+4^2} = \sqrt{48};$$

(c)

$$\cos\alpha_{\vec{A}} = \frac{1}{\sqrt{14}} \Rightarrow \alpha_{\vec{A}} = 74{,}5^o, \cos\beta_{\vec{A}} = \frac{2}{\sqrt{14}} \Rightarrow \beta_{\vec{A}} = 57{,}7^o \; e \cos\gamma_{\vec{A}} = \frac{3}{\sqrt{14}} \Rightarrow \gamma_{\vec{A}} = 36{,}7^o;$$

$$\cos\alpha_{\vec{B}} = \frac{5}{\sqrt{110}} \Rightarrow \alpha_{\vec{B}} = 61{,}5^o, \cos\beta_{\vec{B}} = \frac{6}{\sqrt{110}} \Rightarrow \beta_{\vec{B}} = 55{,}1^o \; e \cos\gamma_{\vec{B}} = \frac{7}{\sqrt{110}} \Rightarrow \gamma_{\vec{B}} = 48{,}1^o;$$

$$\cos\alpha_{\vec{S}} = \frac{6}{\sqrt{200}} \Rightarrow \alpha_{\vec{S}} = 64{,}9^o, \cos\beta_{\vec{S}} = \frac{8}{\sqrt{200}} \Rightarrow \beta_{\vec{S}} = 55{,}6^o \; e \cos\gamma_{\vec{S}} = \frac{10}{\sqrt{200}} \Rightarrow \gamma_{\vec{S}} = 45{,}0^o;$$

$$\cos\alpha_{\vec{D}} = \frac{4}{\sqrt{48}} \Rightarrow \alpha_{\vec{D}} = 54{,}7^o, \cos\beta_{\vec{D}} = \frac{4}{\sqrt{48}} \Rightarrow \beta_{\vec{D}} = 54{,}7^o \; e \cos\gamma_{\vec{D}} = \frac{4}{\sqrt{48}} \Rightarrow \gamma_{\vec{D}} = 54{,}7^o;$$

Continuação do

Exemplo

$$\textit{Solução : sejam os vetores } \vec{A}=(1;2;3) \ e \ \vec{B}=(5;6;7), \left|\vec{A}\right|=\sqrt{1^2+2^2+3^2}=\sqrt{14} \ e \left|\vec{B}\right|=\sqrt{5^2+6^2+7^2}=\sqrt{110};$$

$$\vec{S}=\vec{A}+\vec{B}=(1;2;3)+(5;6;7)=(6;8;10)=6\hat{x}+8\hat{y}+10\hat{z} \ e \left|\vec{A}+\vec{B}\right|=\sqrt{6^2+8^2+10^2}=\sqrt{200};$$

$$\vec{D}=(-\vec{A}+\vec{B})=(\vec{B}+(-\vec{A}))=(\vec{B}-\vec{A})=(5;6;7)-(1;2;3)=(4;4;4) \ e \left|\vec{B}-\vec{A}\right|=\sqrt{4^2+4^2+4^2}=\sqrt{48};$$

(d)

$$\left(\vec{A}\bullet\vec{B}\right)=(1;2;3)\bullet(5;6;7)=\left|\vec{A}\right|\left|\vec{B}\right|\cos\phi \Rightarrow \left(5+12+21\right)=\sqrt{14}\sqrt{110}\cos\phi \Rightarrow \cos\phi=\frac{38}{\sqrt{14}\sqrt{110}} \Rightarrow \phi=14{,}5^o;$$

(e)

$$\left(\vec{S}\bullet\vec{D}\right)=(6;8;10)\bullet(4;4;4)=\left|\vec{S}\right|\left|\vec{D}\right|\cos\theta \Rightarrow \left(24+32+40\right)=\sqrt{200}\sqrt{48}\cos\theta \Rightarrow \cos\theta=\frac{96}{\sqrt{200}\sqrt{48}} \Rightarrow \phi=11{,}5^o;$$

(f)

$$\left(\vec{A}\otimes\vec{B}\right)=\begin{vmatrix}\hat{x} & \hat{y} & \hat{z}\\ 1 & 2 & 3\\ 5 & 6 & 7\end{vmatrix}=(14-18)\hat{x}-(7-15)\hat{y}+(6-10)\hat{z}=(-4;8;-4)\Rightarrow\left|\left(\vec{A}\otimes\vec{B}\right)\right|=\sqrt{96}=\left(96\right)^{\frac{1}{2}}$$

(g)

$$\left(\vec{S}\otimes\vec{D}\right)=\begin{vmatrix}\hat{x} & \hat{y} & \hat{z}\\ 6 & 8 & 10\\ 4 & 4 & 4\end{vmatrix}=(32-40)\hat{x}-(24-40)\hat{y}+(24-32)\hat{z}=(-8;16;-8)\Rightarrow\left|\left(\vec{A}\otimes\vec{B}\right)\right|=\sqrt{384}=\left(384\right)^{\frac{1}{2}}$$