На этой лекции мы разберём ещё одну классическую задачу — задачу о рюкзаке.

Задача о рюкзаке
Вор пробрался на склад, на котором есть n предметов. Для каждого предмета известны его вес w_i и стоимость c_i. У вора есть рюкзак, который вмещает суммарный вес не более W. Вор хочет набрать в рюкзак предметы максимальной суммарной стоимости.

Какие предметы наиболее выгодно брать? Самые дорогие предметы могут быть невыгодны, если они имеют большой вес. Хорошая характеристика предмета — это отношение его стоимости к весу $\frac{c_i}{w_i}$, то есть цена за килограмм. Чем она больше, тем выгоднее брать предмет. Отсортируем предметы по убыванию этой величины. Дальше будем просматривать предметы по порядку и брать очередной предмет, если он всё ещё помещается в рюкзак. В этом и будет состоять наше жадное решение.

Упражнение 2.5.1
На каких из приведённых примеров жадное решение задачи о рюкзаке будет оптимальным?

1. $c = [10, 20, 30]$, $w = [2, 5, 10]$, $W = 10$.
2. $c = [10, 20, 30]$, $w = [2, 5, 10]$, $W = 12$.
3. $c = [12, 15, 18]$, $w = [3, 3, 9]$, $W = 10$.
4. $c = [10, 12]$, $w = [2, 3]$, $W = 4$.

Жадное решение задачи о рюкзаке не всегда оптимальное. Например, пусть у нас два предмета стоимостями 10, 12 и весами 2, 3. Вместимость рюкзака равна 4. Ясно, что оба предмета мы взять не можем. Посчитаем для предметов отношение стоимости к весу:

$$\frac{10}{2} = 5, \quad \frac{12}{3} = 4.$$

Это отношение больше у первого предмета, поэтому жадное решение возьмёт его. Но оптимально взять второй предмет, потому что у него больше стоимость. Получается, что даже на таком простом примере жадное решение выдает неправильный ответ.

Немного изменим задачу. Пусть теперь вор может делить предметы на части, причем стоимость каждой части пропорциональна стоимости предмета. Это избавит нас от проблемы, что какой-то предмет не умещается в рюкзак. Новая задача называется *непрерывной* задачей о рюкзаке, в то время как предыдущая задача — *дискретной*.

Решим непрерывную задачу о рюкзаке для того же примера $c = [10, 12]$, $w = [2, 3]$, $W = 4$. Жадное решение поместит в рюкзак первый предмет веса 2 целиком, и в рюкзаке останется место на 2 килограмма. Тогда вор отрежет $2/3$ от второго предмета (см. рис. 1). Эта часть будет стоить $12 \cdot 2/3 = 8$. Получим общую стоимость 18. Таким образом, жадный алгоритм набирает в рюкзак предметы с наибольшим отношением стоимости к весу, пока они помещаются в рюкзак. Возможно, от последнего предмета придётся отрезать часть.

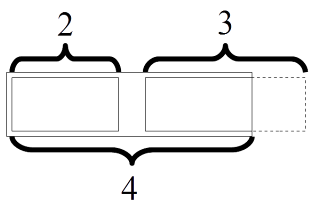

Рис. 1. Пример к непрерывной задаче о рюкзаке

> **Упражнение 2.5.2**
> Найдите решение непрерывной задачи о рюкзаке (наибольшую стоимость предметов, помещающихся в рюкзак), если $c = [10, 20, 30]$, $w = [2, 5, 10]$, $W = 12$.

Докажем, что для непрерывной задачи о рюкзаке жадное решение является оптимальным. Воспользуемся методом минимального контрпримера. Предположим, что существует пример, на котором жадное решение даёт меньший ответ, чем оптимальное, и выберем из таких примеров минимальный по количеству предметов. Рассмотрим самый «выгодный» предмет, то есть предмет с самым большим соотношением стоимости к весу. Жадное решение выберет его самым первым и постарается взять как можно б ольшую часть этого предмета (см. рис. 2). Если оптимальное решение не берёт этот предмет вообще или берёт его меньше, заменим какой-нибудь другой предмет в оптимальном решении на самый выгодный (см. рис. 3). Оптимальное решение от этого не ухудшится. Теперь жадное и оптимальное решение содержат одинаковое количество этого предмета. Удалим его, и получим пример с меньшим числом предметов, на котором жадное решение не совпадает с оптимальным. Но по предположению, наш контрпример был минимальным. Мы пришли к противоречию, которое доказывает утверждение. Таким образом, мы доказали, что для непрерывной задачи о рюкзаке жадный алгоритм всегда даёт оптимальный результат.

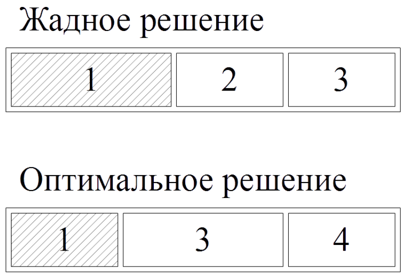

Рис. 2

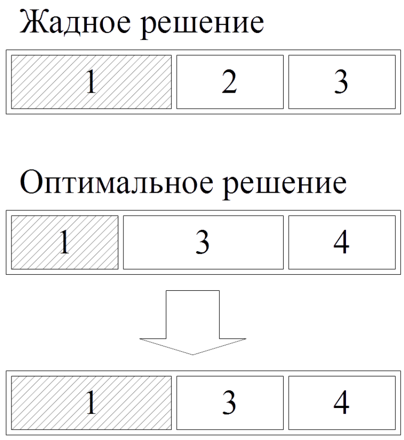

Рис. 3

Подведём итоги. Мы рассмотрели дискретную и непрерывную задачи о рюкзаке, разобрали жадные алгоритмы их решения. Для дискретной задачи жадный алгоритм не является оптимальным, мы привели контрпримеры. Однако для непрерывной задачи жадное решение оптимально, мы это доказали методом минимального контрпримера.

Таким образом, в этом модуле мы разобрали жадные алгоритмы на примерах нескольких задач. Жадное решение — это решение, оптимальное на каждом шаге. Такое решение не всегда оказывается оптимальным в общем. При решении олимпиадных задач важно обосновывать корректность жадных алгоритмов. Также бывает полезно подумать над контрпримером, на котором решение не работает. Если удалось найти такой пример, не стоит тратить время на реализацию решения.