UNIVERSIDAD DE CONCEPCIÓN
FACULTAD DE CIENCIAS
FÍSICAS Y MATEMÁTICAS
DEPARTAMENTO DE INGENIERÍA MATEMÁTICA

Pregunta 1	Pregunta 2

TEST 1 VERSIÓN 1 CÁLCULO NUMÉRICO 521230

Nombre: **Carrera:**

Ayudante: **Matrícula:**

Enviar los programas solicitados en el formato solicitado al correo informado por el ayudante de su sección y con copia a **numerico@ing-mat.udec.cl**.

1. **(20 puntos)** Considere el conjunto de matrices de orden 4

$$V = \left\{ \begin{bmatrix} 1/i & 2i^{-2} \\ 2i+1 & 3i \end{bmatrix} \right\}_{i=1}^{100}$$

La función `rank` de MATLAB retorna el rango de una matriz, esto es el mayor número de columnas linealmente independientes de una matriz.

Mediante un programa de MATLAB y usando la función `rank` decida si las matrices del conjunto V son o no todas invertibles.

Luego determine la dimensión del espacio generado por V.

Adjunte el programa al correo.

Desarrollo: El programa debe construir y calcular el rango de todas las matrices del conjunto. Si alguno de estos es distinto de 2, entonces existe una matriz no invertible.

```
clear all; close all; clc;
for i=1:100
        A{i}=[1/i,2*i^(-2);2*i+1,3*i];
    if(rank(A{i})~=2)
        disp('Las matrices no son todas invertibles');
    end
end
```

$\boxed{15 \text{ pt}}$

y luego ensamblamos una matriz que contengana todas estas matrices y vemos el rango de ella.

```
B=[];
for i=1:100
    B(1,i)=[A{i}(1,1)];
    B(2,i)=[A{i}(1,2)];
    B(3,i)=[A{i}(1,3)];
    B(4,i)=[A{i}(1,4)];
end
rank(B)
```

$\boxed{5 \text{ pt}}$

2. **(40 puntos)** Los resultados de cierto experimento relacionan las variables x e y, mediante el modelo:

$$y = \beta x^{\alpha x}.$$

Estos resultados se muestran en la siguiente tabla:

x	1	1.5	2	3	4
y	85	60	15	3	1

Escriba un rutero en MATLAB que realice las siguientes tareas:

a) Proponga una transformación que linealice el modelo

b) Calcule y muestre los parámetros α y β que ajustan el modelo a los datos de la tabla en el sentido de los mínimos cuadrados.

c) En un mismo gráfico dibuje los puntos de la tabla (círculos) y el modelo ajustado anteriormente (linea continua).

d) Estime y muestre el valor de y cuando $x = 5$.

Desarrollo: El rutero está dado por:

Se observa que mediante una función logaritmo

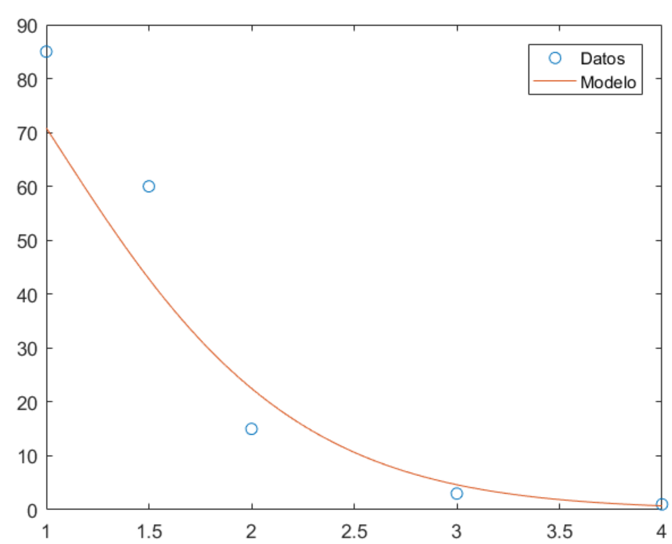
$$y = \beta x^{\alpha x} \leftrightarrow ln(y) = ln(\beta) + \alpha x ln(x)$$

10pt

con lo cual se hace un programa parecido a

```
x=[1 1.5 2 3 4]';
y=[85 60 15 3 1]';
A = [ones(5,1) x.*log(x)];
B = log(y);
X = A\B                                        %15 PUNTOS
alpha = X(2);
beta = exp(X(1));
xx = 1:0.01:4;
yy = beta*xx.^(alpha*xx);
plot(x,y,'o',xx,yy,'-')
legend('Datos','Modelo')               %10 PUNTOS
x5=5;
y5 = beta*x5.^(alpha*x5)               %5 PUNTOS
```

mientras que el gráfico está dado por:



UNIVERSIDAD DE CONCEPCIÓN
FACULTAD DE CIENCIAS
FÍSICAS Y MATEMÁTICAS
DEPARTAMENTO DE INGENIERÍA MATEMÁTICA

Pregunta 1

TEST 1 VERSIÓN 2 CÁLCULO NUMÉRICO 521230

Nombre: **Carrera:**

Ayudante: **Matrícula:**

Enviar los programas solicitados en el formato solicitado al correo informado por el ayudante de su sección y con copia a **numerico@ing-mat.udec.cl**.

1. **(60 puntos)** Descargue el archivo disponible en

   `https://goo.gl/K2fZZZ`

   este archivo contiene una matriz que en su primera columna tiene el precio diario, durante los últimos 22 días, de la acción de `Cencosud S.A.` y en su segunda columna la cantidad de acciones transadas de esta empresa en cada día.

   En un rutero de MATLAB llamado `acciones.m`

   a) Calcule el promedio de transacciones diarias para estos días.

   b) Grafique el precio diario de la acción de `Cencosud S.A.` versus el día.

   c) Calcule y grafique el polinomio interpolante del precio diario de acción de `Cencosud S.A.` ¿Qué observa? ¿Es confiable este interpolante para preveer futuros valores de esta acción?

   d) Usando la función de MATLAB `spline`, calcule y grafique un spline cúbico que interpola el precio diario de la acción de `Cencosud S.A.`

   Desarrollo: El programa `cencosud.m` debe tener instrucciones similares a las siguientes

```
clear all; close all; clc;
load('cencosud.mat');
media=mean(cencosud(:,2));                 %10 PUNTOS
plot(cencosud(:,1),'+'); hold on;
pol=polyfit(1:22,cencosud(:,1)',21);
xvec=1:0.1:22;
plot(xvec,polyval(pol,xvec))               %20 PUNTOS

figure(2)
sp=spline(1:22,cencosud(:,1));
plot(xvec,ppval(sp,xvec),1:22,cencosud(:,1)','+') %20 PUNTOS
```

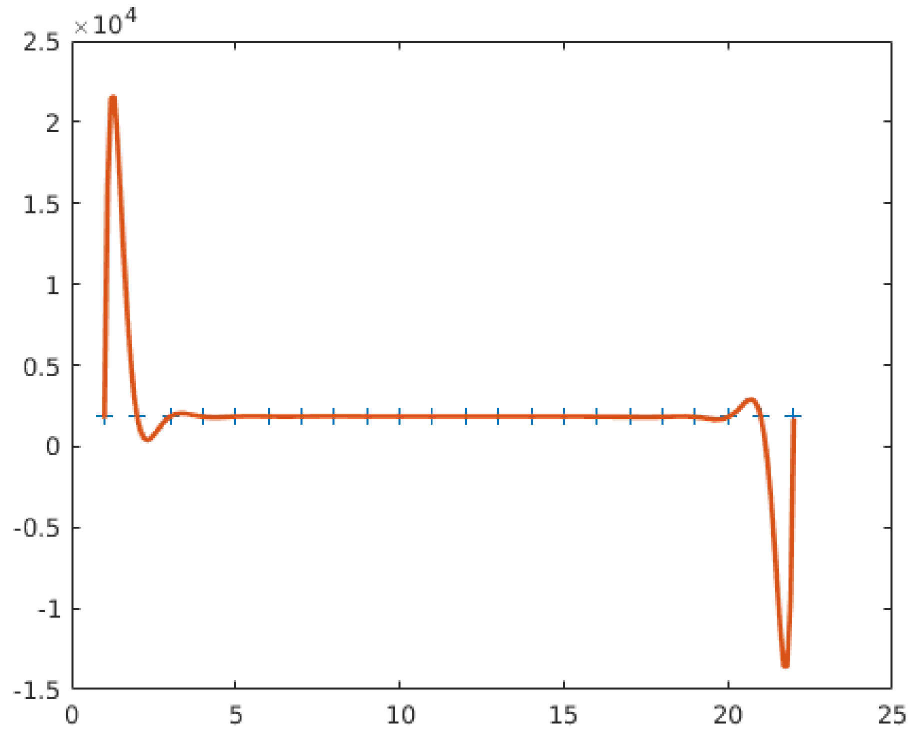
   con lo que se tiene que

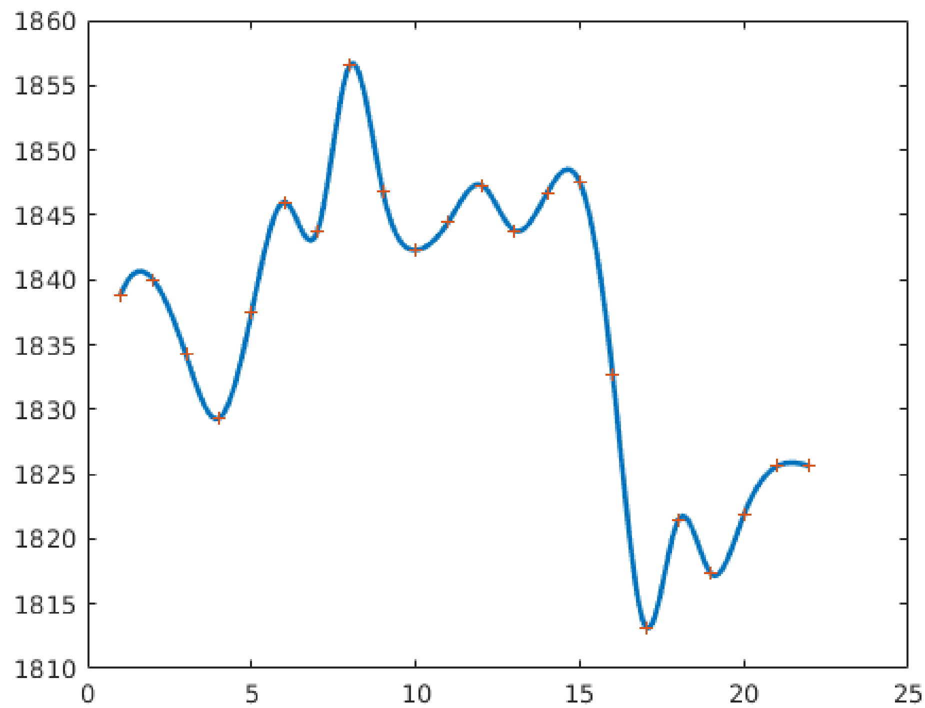
```
>> media=mean(cencosud(:,2))

media =

   2.5957e+06
```

   y se generan gráficas como





de donde se responde que, el fenómeno de Runge hace poco confiable el interpolante polinomial.

$\boxed{\text{10 puntos}}$

UNIVERSIDAD DE CONCEPCIÓN
FACULTAD DE CIENCIAS
FÍSICAS Y MATEMÁTICAS
DEPARTAMENTO DE INGENIERÍA MATEMÁTICA

Pregunta 1

TEST 1 VERSIÓN 3 CÁLCULO NUMÉRICO 521230

Nombre: **Carrera:**

Ayudante: **Matrícula:**

Enviar los programas solicitados en el formato solicitado al correo informado por el ayudante de su sección y con copia a **numerico@ing-mat.udec.cl**.

1. **(60 puntos)** Sean $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ y $\{c_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ las sucesiones definidas por

$$(\forall\, n \in \mathbb{N}) \quad a_n := \frac{n}{2n-1} \quad \text{y} \quad c_n := \frac{n-1}{2n-1}.$$

a) Escriba una función MATLAB que reciba un $N \in \mathbb{N}$ y devuelva la matriz $\boldsymbol{A}_N \in \mathbb{R}^{N\times N}$ definida por

$$\boldsymbol{A}_N := \begin{pmatrix} 0 & a_1 & & & \\ c_2 & \ddots & \ddots & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & a_{N-1} \\ & & & c_N & 0 \end{pmatrix},$$

donde las posiciones sin llenar (arriba de la diagonal 1 y debajo de la diagonal -1) contienen ceros.

b) El comando `eig` de MATLAB aplicado a una matriz calcula y devuelve sus autovalores (recolectados en un vector). Escriba un rutero que grafique en forma de círculos todos los pares ordenados del conjunto

$$\{(\lambda, N) \in \mathbb{R}^2 : N \in \{2,3,\cdots,25\} \text{ y } \lambda \text{ es autovalor de } \boldsymbol{A}_N\}.$$

Solución: Para la parte 1*a*,

```
function A = matriz(N)
va = (1:N-1)./(2*(1:N-1)-1);
vc = ((2:N)-1)./(2*(2:N)-1);
A = diag(va, 1) + diag(vc, -1);
```

o alternativamente,

```
function A = matriz(N)
A = zeros(N);
for n = 1:N-1
    A(n,n+1) = n/(2*n-1);
end
for n = 2:N
    A(n,n-1) = (n-1)/(2*n-1);
end
```

40 puntos

Para la parte 1*b*,

```
figure
hold on
for N = 2:25
    lambdas = eig(matriz(N));
    for i = 1:N
        plot(lambdas(i), N, 'o')
    end
end
```

20 puntos

UNIVERSIDAD DE CONCEPCIÓN
FACULTAD DE CIENCIAS
FÍSICAS Y MATEMÁTICAS
DEPARTAMENTO DE INGENIERÍA MATEMÁTICA

Pregunta 1

TEST 1 VERSIÓN 4 CÁLCULO NUMÉRICO 521230

Nombre: **Carrera:**

Ayudante: **Matrícula:**

Enviar los programas solicitados en el formato solicitado al correo informado por el ayudante de su sección y con copia a **numerico@ing-mat.udec.cl**.

1. **(60 puntos)** Considere la sucesión de Fibonacci, dada por:

$$f_{n+1} = f_n + f_{n-1}, \qquad n = 1, 2, 3, \ldots,$$

con $f_0 = 0$ y $f_1 = 1$.

a) Escriba una función en MATLAB que, dado un valor de entrada $n \in \mathbb{N}$, devuelva como salidas, el valor de f_{n+1}, el cuociente f_{n+1}/f_n y el valor $|f_{n+1}/f_n - \varphi|$, donde $\varphi = (1+\sqrt{5})/2$ es el número dorado.

Observación: Recuerde que $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, \cdots\}$.

b) Escriba un rutero en MATLAB que llame a la función anterior y muestre sus salidas, para cada valor $n \in \{1, 10, 100, 1000\}$.

c) ¿Qué relación existe entre el cuociente f_{n+1}/f_n y el número dorado φ? Justifique en base a los resultados obtenidos en el siguiente casillero.

Desarrollo: Cada programa viene dado por:

```
function [fnp1,cuociente,err] = fibonacci(n)
fnm1 = 0;
fn = 1;
for i=1:n
    fnp1 = fn + fnm1;
    cuociente = fnp1 / fn;
    fnm1 = fn;
    fn = fnp1;
end
phi = (1 + sqrt(5)) / 2;
err = abs(cuociente - phi);
```

$\boxed{\text{30 puntos}}$.

```
N = [1, 10, 100, 1000];
for i = 0:3;
    [fn, cuociente, err] = fibonacci(N(i+1))
end
```

$\boxed{\text{15 puntos}}$.

La relación entre el cuociente f_{n+1}/f_n y el número dorado φ está dada por $\lim_{n\to\infty} \dfrac{f_{n+1}}{f_n} = \varphi$. Esto puede ser notado en el decrecimiento de los errores $|f_{n+1}/f_n - \varphi|$ a medida que aumenta n

$\boxed{\text{15 puntos}}$.

UNIVERSIDAD DE CONCEPCIÓN
FACULTAD DE CIENCIAS
FÍSICAS Y MATEMÁTICAS
DEPARTAMENTO DE INGENIERÍA MATEMÁTICA

Pregunta 1

TEST 1 VERSIÓN 5 CÁLCULO NUMÉRICO 521230

Nombre: **Carrera:**

Ayudante: **Matrícula:**

Enviar los programas solicitados en el formato solicitado al correo informado por el ayudante de su sección y con copia a **numerico@ing-mat.udec.cl**.

1. **(60 puntos)** La interpolación polinomial de Newton consiste en utilizar la base de polinomios de Newton, dada por: $\{1, x - x_0, (x - x_0)(x - x_1), \ldots, (x - x_0)(x - x_1)\cdots(x - x_{n-1})\}$, para interpolar los puntos $(x_0, y_0), \ldots, (x_n, y_n)$. Así, el polinomio que interpola estos puntos está dado por:

$$p(x) = \alpha_0 + \alpha_1(x - x_0) + \alpha_2(x - x_0)(x - x_1) + \cdots + \alpha_n(x - x_0)(x - x_1)\cdots(x - x_{n-1}),$$

donde los coeficientes $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_n$ se obtienen al resolver el sistema $\boldsymbol{A\alpha} = \boldsymbol{y}$ que se obtiene al evaluar:

$$p(x_i) = y_i, \qquad \forall\, i = 0, \ldots, n.$$

Escriba un rutero en MATLAB que realice las siguientes tareas:

a) Construya la matriz $\boldsymbol{A}$ y el vector $\boldsymbol{y}$ mencionados anteriormente, considerando los puntos $x_i = -5, -4, \ldots, 4, 5$ e $y_i = 1/(1 + x_i^2)$.

b) Resuelva el sistema $\boldsymbol{A\alpha} = \boldsymbol{y}$ y muestre los coeficientes $a_0, \ldots, a_n$ del polinomio de interpolación de Newton.

c) Grafique en un mismo gráfico la función $f(x) = 1/(1 + x^2)$ (línea continua), el polinomio de interpolación de Newton $p(x)$ (línea discontinua) y los puntos a interpolar (círculos).

¿Qué fenómeno observa en la gráfica? ¿Se puede evitar este fenómeno utilizando el polinomio de interpolación de Lagrange? Justifique su respuesta.

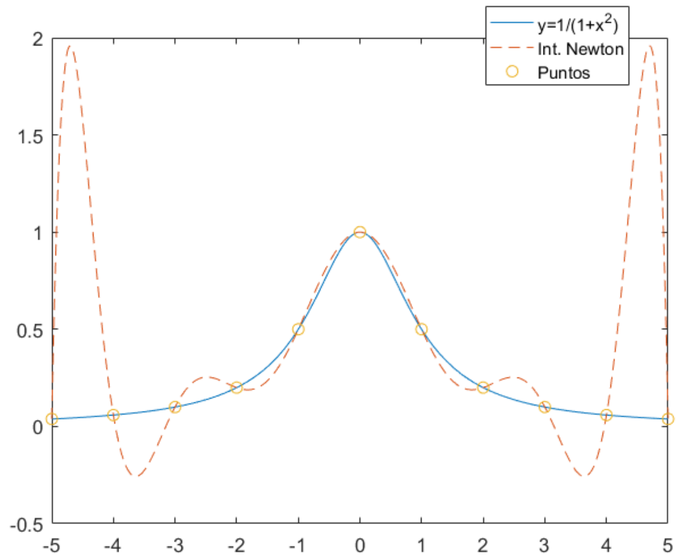
Desarrollo: El rutero está dado por:

```
x = [-5:5]';
y = 1./(1+x.^2);
n = length(x);
A = ones(n,1);
aux = x - x(1);
for i=2:n
    A = [A aux];
    aux = aux.*(x - x(i));
end                               %20 PUNTOS


alpha = A\y                       %5 PUNTOS
xx = [-5:0.01:5]';
yy = 1./(1+xx.^2);
nn = length(xx);
aux = ones(nn,1);
pp = zeros(nn,1);
for i=1:n;
    pp = pp + alpha(i)*aux;
    aux = aux.*(xx-x(i));
```

```
end
plot(xx,yy,'-',xx,pp,'--',x,y,'o')
legend('y=1/(1+x^2)','Int. Newton', 'Puntos')                   %25 PUNTOS
```

mientras que la gráfica está dada por:



El polinomio de interpolación de Newton presenta el fenómeno de Runge, el cual no puede ser evitado por la interpolación de Lagrange, debido a que el polinomio de interpolación es único, independiente de la base utilizada para calcularlo (canónica, Lagrange o Newton).

$\boxed{\text{10 puntos}}$