Pregunta 1	Pregunta 2

UNIVERSIDAD DE CONCEPCIÓN
FACULTAD DE CIENCIAS
FÍSICAS Y MATEMÁTICAS
DEPARTAMENTO DE INGENIERÍA MATEMÁTICA

TEST 2 VERSIÓN 1 CÁLCULO NUMÉRICO 521230

Nombre: **Carrera:**

Ayudante: **Matrícula:**

Enviar los programas solicitados en el formato solicitado al correo informado por el ayudante de su sección y con copia a **numerico@ing-mat.udec.cl**.

1. Considere la integral

$$I = \int_{-1}^{1} e^{-x^2} \mathrm{d}x.$$

(*a*) **(10 puntos)** Calcule los polinomios de Legendre de tercer y cuarto grado.
De acuerdo a lo visto en clases, los polinomios de Legendre quedan definidos por: $p_0(x) = 1$, $p_1(x) = x$, $p_2(x) = \frac{3}{2}x^2 - \frac{1}{2}$, y

$$p_{n+1}(x) = \frac{2n+1}{n+1} x p_n(x) - \frac{n}{n+1} p_{n-1}(x).$$

Así, al hacer los cálculos, se obtiene

$$p_3(x) = \frac{5}{2}x^3 - \frac{3}{2}x \text{ y } p_4(x) = \frac{35}{8}x^4 - \frac{30}{8}x^2 + \frac{3}{8}.$$

(*b*) **(8 puntos)** Calcule los nodos de las reglas de Gauss–Legendre de 3 y 4 puntos.
Aquí, los nodos son las raíces de los respectivos polinomios. Pueden ser obtenidos analíticamente (es decir, resolviendo la ecuación $p_n(x) = 0$ para $n = 3, 4$), o bien, mediante el comando `roots` de Octave.

(*c*) **(7 puntos)** Utilizando las tablas de las diapositivas del curso, obtenga los pesos o coeficientes de estas reglas de integración y aproxime la integral I mediante ellas en un rutero Octave. Utilice 3 cifras decimales, sin aproximar. Por ejemplo, si dice 0.47862867..., entonces considere ese valor como 0.478. Escriba a continuación los valores obtenidos (I_n denota la aproximación de I obtenida con la regla de n puntos, $n = 3, 4$).

I_3	1.4972
I_4	1.4923

(*d*) **(5 puntos)** Mida el error de cada una de las aproximaciones obtenidas, considerando como valor exacto $I = 1.493648$.

$\lvert I - I_3\rvert$	0.0035329
$\lvert I - I_4\rvert$	0.0013864

¿Cómo nombró a su programa?

nombre programa	`Test2_v1_P1.m`

2. Dado $M > 0$, considere el problema de valores iniciales (PVI)

$$\begin{cases} u''(x) + M\,u'(x) = -M, & x \in (0,1), \\ u(0) = 0, \quad u'(0) = M - 1 + \dfrac{M}{\exp(M) - 1}. \end{cases} \tag{1}$$

Note que M aparece tanto en la ecuación diferencial de (1) como en su condición inicial para la derivada. Entonces, para distintos M, (1) admite distintas soluciones.

a) **(5 puntos)** Transforme el PVI escalar de segundo orden (1) para u en un PVI vectorial de primer orden para $\boldsymbol{z} = \begin{pmatrix} u & u' \end{pmatrix}^{\mathtt{t}}$ en el espacio disponible a continuación.

Introduciendo la variable vectorial $\boldsymbol{z}(x) = \begin{pmatrix} z_1(x) \\ z_2(x) \end{pmatrix}$, y realizando el procedimiento visto en clase, obtenemos:

$$\boldsymbol{z}'(x) = \begin{pmatrix} z_2(x) \\ -M\,z_2(x) - M \end{pmatrix}; \qquad \boldsymbol{z}(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ M - 1 + \frac{M}{\exp(M)-1} \end{pmatrix}$$

b) **(10 puntos)** Escriba una función que reciba un M, resuelva el PVI vectorial para $\boldsymbol{z}$ que obtuvo en la parte 2a con ese M mediante `[t,z] = ode45(...)` (reemplace los puntos suspensivos con lo que corresponda) y devuelva el vector `t` y la matriz de dos columnas `z`.

¿Cómo nombró a su función?

nombre función	`funcion_Test2_v1_P2.m`

c) **(15 puntos)** Escriba un rutero efectúe las siguientes tareas:

- Llame a la función escrita en la parte 2b con $M = 10$, $M = 44$ y $M = 200$ y grafique las aproximaciones obtenidas para u (no para u') para cada uno de estos M en una misma figura.
- Muestre los valores aproximados obtenidos para $u'(1)$ en cada caso.
- Muestre la longitud del vector de nodos (abscisas) que se obtuvo en cada caso.

Llene la siguiente tabla:

Con $M = 10$			
$u'(1)$	-0.99954	Longitud de vector de nodos	13
Con $M = 44$			
$u'(1)$	-0.99992	Longitud de vector de nodos	23
Con $M = 200$			
$u'(1)$	-0.99993	Longitud de vector de nodos	72

¿Cómo nombró a su rutero?

nombre rutero	`Test2_v1_P2.m`

UNIVERSIDAD DE CONCEPCIÓN
FACULTAD DE CIENCIAS
FÍSICAS Y MATEMÁTICAS
DEPARTAMENTO DE INGENIERÍA MATEMÁTICA

Pregunta 1	Pregunta 2

TEST 2 VERSIÓN 2 CÁLCULO NUMÉRICO 521230

Nombre: **Carrera:**

Ayudante: **Matrícula:**

Enviar los programas solicitados en el formato solicitado al correo informado por el ayudante de su sección y con copia a **numerico@ing-mat.udec.cl**.

1. La siguiente tabla muestra la cantidad N de personas contagiadas con una determinada enfermedad, al cabo de t semanas del brote de la misma:

t (semanas)	1	2	3	4	5	6	7
N (personas)	92	135	170	185	190	195	197

Escriba un programa Octave que

(*a*) **(15 puntos)** Ajuste los datos de la tabla al modelo

$$N(t) = \frac{200}{1 + ae^{-bt}},$$

en el sentido de los mínimos cuadrados.

(*b*) **(10 puntos)** Ajuste los datos de la tabla al modelo

$$N(t) = ct + d,$$

en el sentido de los mínimos cuadrados.

(*c*) **(5 puntos)** Grafique los datos y ambos modelos obtenidos. ¿Cuál de los dos modelos permite una mejor aproximación? Justifique.

¿Cómo nombró a su programa?

nombre programa	`Test2_v2_P1.m`

2. Se desea aproximar numéricamente el valor de la integral doble

$$\int_0^2 \int_{x^3-x}^{x^2+x} (x^3y^4 + xy^2)dydx$$

Para ello:

a) **(10 puntos)** Escriba un programa tipo `function` en OCTAVE que evalúe la función

$$g(x) = \int_{x^3-x}^{x^2+x} (x^3y^4 + xy^2)dy.$$

En esta parte use la función `quad` de OCTAVE para evaluar numéricamente la integral.
¿Cómo nombró a su programa?

nombre programa	`funcion_Test2_v2_P2a.m`

b) **(10 puntos)** Construya un archivo `.m` en OCTAVE que para la función $g(x)$, el intervalo $[0, 2]$ y una subdivisión en N partes, aproxime el valor de la integral de g en dicho intervalo usando la *Regla de los Trapecios*.
¿Cómo nombró a su programa?

nombre programa	`funcion_Test2_v2_P2b.m`

c) **(5 puntos)** Aproxime la integral doble para $N = 100, 1000, 10000$.
Escriba a continuación los resultados obtenidos:

$N = 100$	959.1
$N = 1000$	961.16
$N = 10000$	961.18

(Ver cálculos en el rutero `Test2_v2_P2.m`)

d) **(5 puntos)** Compare sus resultados con el valor exacto de la integral (hasta 4 cifras significativas) de 961.1809. ¿Qué opina de usar la regla de los Trapecios para evaluar una de las integrales? ¿Qué método usaría usted?
Se observa que los resultados obtenidos no son exactos, pero aceptables. Si se quiere obtener mejores resultados se puede utilizar una regla más precisa, como Simpson.

UNIVERSIDAD DE CONCEPCIÓN
FACULTAD DE CIENCIAS
FÍSICAS Y MATEMÁTICAS
DEPARTAMENTO DE INGENIERÍA MATEMÁTICA

Pregunta 1	Pregunta 2

TEST 2 VERSIÓN 3 CÁLCULO NUMÉRICO 521230

Nombre: **Carrera:**

Ayudante: **Matrícula:**

Enviar los programas solicitados en el formato solicitado al correo informado por el ayudante de su sección y con copia a **numerico@ing-mat.udec.cl**.

1. Considere la siguiente tabla de datos:

x	0.5	1	1.5	2	2.5
y	0.46	0.37	0.32	0.28	0.25

Se sabe que el modelo matemático que relaciona las variables x e y está dado por

$$y = \frac{1}{\sqrt{\alpha x^2 + \beta x + 4}},$$

donde α y β son constantes reales a determinar.

(a) **(10 puntos)** Linealice el modelo anterior.
Elevando al cuadrado, aplicando recíprocos y restando 4, se tiene que

$$\frac{1}{y^2} - 4 = \alpha x^2 + \beta x.$$

(b) Escriba un programa Octave que:

- **(15 puntos)** Determine los valores de $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ que mejor ajustan los datos de la tabla al modelo lineal obtenido en (a), en el sentido de los mínimos cuadrados. Escriba los valores obtenidos.

α	1.1225
β	2.0549

- **(5 puntos)** Usando los valores obtenidos en el ítem anterior, prediga el valor de y cuando $x = 5$. Escriba el valor en el recuadro.

$\boxed{\text{En } x = 5,\ y = 0.15369}$

¿Cómo nombró a su programa?

nombre programa	`Test2_v3_P1.m`

2. Considere la ecuación diferencial de segundo orden

$$\begin{cases} y''(x) + 2y'(x) - y(x) & = & 2 + 4x - x^2, \quad x \in [0,1] \\ y(0) & = & 0 \\ y'(0) & = & 0 \end{cases}$$

a) **(5 puntos)** En el espacio siguiente, transforme esta ecuación a un sistema de ecuaciones diferenciales de primer orden.

Introduciendo la variable vectorial $\boldsymbol{z} = \begin{pmatrix} y(x) \\ y'(x) \end{pmatrix}$, y siguiendo con el procedimiento usual en este tipo de problemas, se llega al sistema de ecuaciones diferenciales de primer orden

$$\boldsymbol{z}'(x) = \begin{pmatrix} z_2(x) \\ z_1(x) - 2z_2(x) + 2 + 4x - x^2 \end{pmatrix} = \boldsymbol{f}(x, \boldsymbol{z}(x)), \, \%boldsymbol z(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

b) **(15 puntos)** Cree un rutero en Octave que aproxime la solución del sistema obtenido en *a*), utilizando el método de *Euler Implícito* con una partición uniforme de N subintervalos. Explique cómo se procede en este caso.

El método de Euler Implícito queda dado por: Dado $\boldsymbol{z}_0$,

$$\boldsymbol{z}_{i+1} = \boldsymbol{z}_i + h\boldsymbol{f}(x_{i+1}, \boldsymbol{z}_{i+1}), \quad i = 0, \ldots, N.$$

El objetivo en cada paso es determinar el vector $\boldsymbol{z}_{i+1}$ usando el vector ya conocido $\boldsymbol{z}_i$. Supongamos que $\boldsymbol{z}_{i+1} = \begin{pmatrix} a_{i+1} \\ b_{i+1} \end{pmatrix}$ y que $\boldsymbol{z}_i = \begin{pmatrix} a_i \\ b_i \end{pmatrix}$. Entonces, el esquema de Euler Implícito puede ser escrito como

$$\begin{pmatrix} a_{i+1} \\ b_{i+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_i \\ b_i \end{pmatrix} + h \begin{pmatrix} b_{i+1} \\ a_{i+1} - 2b_{i+1} + 2 + 4x_{i+1} - x_{i+1}^2 \end{pmatrix}.$$

Enviando las incógnitas a_{i+1} y b_{i+1} hacia el lado izquierdo, reescribimos como

$$\begin{pmatrix} a_{i+1} - hb_{i+1} \\ -ha_{i+1} + (1 + 2h9b_{i+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_i \\ b_i + 2h + 4hx_{i+1} - hx_{i+1}^2 \end{pmatrix},$$

o bien, en forma de sistema de ecuaciones,

$$\begin{pmatrix} 1 & -h \\ -h & 1 + 2h \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{i+1} \\ b_{i+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_i \\ b_i + 2h + 4hx_{i+1} - hx_{i+1}^2 \end{pmatrix}.$$

Éste es el sistema de ecuaciones que hay que resolver en cada paso.

c) **(10 puntos)** Grafique, en un mismo gráfico, la solución exacta $y(x) = x^2$ y la solución obtenida en el punto previo con $N = 100$.

¿Cómo nombró a su programa?

nombre programa	`Test2_v3_P2.m`

UNIVERSIDAD DE CONCEPCIÓN
FACULTAD DE CIENCIAS
FÍSICAS Y MATEMÁTICAS
DEPARTAMENTO DE INGENIERÍA MATEMÁTICA

Pregunta 1	Pregunta 2

TEST 2 VERSIÓN 4 CÁLCULO NUMÉRICO 521230

Nombre: **Carrera:**

Ayudante: **Matrícula:**

Enviar los programas solicitados en el formato solicitado al correo informado por el ayudante de su sección y con copia a **numerico@ing-mat.udec.cl**.

1. Considere la función escalón $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0, \\ 1 & \text{si } x \geq 0. \end{cases}$

   a) Escriba una función en OCTAVE que reciba un $n \in \{2, 3, \dots\}$ y devuelva los siguientes dos vectores:

   1) **(5 puntos)** El vector $x \in \mathbb{R}^n$ cuyas componentes son los cosenos de n puntos equiespaciados entre 0 y π, inclusive.
   2) **(5 puntos)** El vector $y \in \mathbb{R}^n$ con las evaluaciones de f en las correspondientes entradas de x.

   Así, **por ejemplo**, cuando $n = 5$, las salidas deberían ser

$$x = \begin{pmatrix}\cos(0) & \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) & \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) & \cos\left(\frac{3\pi}{4}\right) & \cos(\pi)\end{pmatrix}^{\mathtt{t}}$$
$$= \begin{pmatrix}1 & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & -\frac{\sqrt{2}}{2} & -1\end{pmatrix}^{\mathtt{t}}$$

   e

$$y = \begin{pmatrix}1 & 1 & 1 & 0 & 0\end{pmatrix}^{\mathtt{t}},$$

   respectivamente.

   ¿Cómo nombró a su función?

nombre función	`funcion_Test2_v4_P1.m`

   b) Escriba un rutero en OCTAVE que realice las siguientes tareas:

   1) **(5 puntos)** Use su función escrita en la parte 1*a* y obtenga sus salidas x e y correspondientes al caso $n = 31$.
   2) **(5 puntos)** Calcule los coeficientes $a_{10}, a_9, \dots, a_1, a_0$ que ajustan por mínimos cuadrados los datos (x_i, y_i), $i \in \{1, \dots, 31\}$ recién obtenidos al modelo polinomial de grado ≤ 10

$$p(x) = a_{10}\,x^{10} + a_9\,x^9 + \cdots + a_1\,x + a_0.$$

      Note que, si respeta ese orden para los coeficientes, puede explotar la función `polyval` de OCTAVE.
   3) **(2 puntos)** Evalúe el p ajustado en -1 y en 1.
   4) **(5 puntos)** Grafique en una misma figura a la función escalón f y al polinomio ajustado p evaluados en 200 puntos uniformemente espaciados entre -1 y 1, inclusive.

Complete la siguiente tabla **(3 puntos)** :

a_{10}	-16.65041	a_0	0.68293
$p(-1)$	-0.033619	$p(1)$	1.0092

¿Cómo nombró a su rutero?

nombre rutero	`Test2_v4_P1.m`

2. Considere el siguiente PVI:

$$\begin{cases} y'(x) & = & x - \dfrac{y}{x\ln(x)}, \quad x \in [e, 4e] \\ y(e) & = & 0. \end{cases}$$

(*a*) **(20 puntos)** Escriba un programa Octave que resuelva el PVI anterior usando el Método de Euler Explícito, con $h = \dfrac{e}{4}$.

(*b*) **(10 puntos)** Usando la solución exacta

$$y(x) = \frac{1}{2}x^2 + \frac{e^2 - x^2}{4\ln(x)},$$

mida el error cometido por el Método en (*a*) al aproximar $y(2e)$, $y(4e)$.

¿Cómo nombró a su programa?

nombre programa	`Test2_v4_P2.m`

UNIVERSIDAD DE CONCEPCIÓN
FACULTAD DE CIENCIAS
FÍSICAS Y MATEMÁTICAS
DEPARTAMENTO DE INGENIERÍA MATEMÁTICA

Pregunta 1	Pregunta 2

TEST 2 VERSIÓN 5 CÁLCULO NUMÉRICO 521230

Nombre: **Carrera:**

Ayudante: **Matrícula:**

Enviar los programas solicitados en el formato solicitado al correo informado por el ayudante de su sección y con copia a **numerico@ing-mat.udec.cl**.

1. *a*) **(10 puntos)** Escriba una función que reciba un vector columna b y un vector columna x, y devuelva el vector columna

$$\begin{pmatrix} \sum_{n=1}^{\text{largo de } b} b_n \,\mathrm{sen}(n\,x_1) \\ \sum_{n=1}^{\text{largo de } b} b_n \,\mathrm{sen}(n\,x_2) \\ \vdots \\ \sum_{n=1}^{\text{largo de } b} b_n \,\mathrm{sen}(n\,x_{\text{largo de } x}) \end{pmatrix};$$

esto es, el vector con la *serie parcial de senos* con coeficientes dados por b evaluada en los miembros de x. Entonces, **por ejemplo**, llamando a su función con `b = [2 0 1 9]'` y `x = [0 pi/2 pi]'`, debería obtener el vector `[0 1 0]'`.

¿Cómo nombró a su función?

nombre función	`funcion_Test2_v5_P1a.m`

b) **(10 puntos)** Escriba una función que reciba un entero positivo N y una función f (por ejemplo, una función anónima) y devuelva el vector columna

$$\begin{pmatrix} \frac{2}{\pi}\int_0^\pi f(x)\,\mathrm{sen}(1\,x)\,\mathrm{d}x \\ \frac{2}{\pi}\int_0^\pi f(x)\,\mathrm{sen}(2\,x)\,\mathrm{d}x \\ \vdots \\ \frac{2}{\pi}\int_0^\pi f(x)\,\mathrm{sen}(N\,x)\,\mathrm{d}x \end{pmatrix}.$$

Use la función `quad` de OCTAVE para aproximar las integrales. Entonces, **por ejemplo**, llamando a su función con $N = 3$ y $f =$ `@(x) sin(3*x)`, debería obtener aproximadamente el vector `[0 0 1]'`.

¿Cómo nombró a su función?

nombre función	`funcion_Test2_v5_P1b.m`

c) Escriba un rutero que efectúe las siguientes tareas:

1) **(3 puntos)** Aplique la función escrita en la parte 1b al entero $N = 31$ y a la función $f(x) =$ `@(x) x.^2` y almacene el resultado en un vector llamado b.
2) **(3 puntos)** Aplique la función escrita en la parte 1a al vector b recién obtenido y al vector columna x que contiene 200 puntos equiespaciados entre 0 y π, inclusive, y almacene el resultado en un vector llamado y.

3) **(2 puntos)** Grafique en una misma figura a x versus $f(x)$ y a x versus y.

Complete la siguiente tabla **(2 puntos)** :

`b(5)`	1.2363	`b(21)`	0.29892
`y(40)`	0.43378	`y(160)`	6.1262

¿Cómo nombró a su rutero?

nombre rutero	`Test2_v5_P1.m`

2. Se desea ajustar por mínimos cuadrados los siguientes datos de una órbita periódica

x	0	30	60	90	120	150	180	210	240	270	300	330
y	408	89	-66	10	338	807	1238	1511	1583	1462	1183	804

Considere la siguiente función

$$f(x) = a_0 + a_1 \cos(\omega x) + b_1 \sin(\omega x) + a_2 \cos(2\omega x) + b_2 \sin(2\omega x)$$

donde $\omega = \pi/180$.

a) **(20 puntos)** Escriba un rutero en Octave que construya el sistema lineal rectangular asociado y encuentre los parámetros de la función que ajusten el conjunto de puntos en el sentido de mínimos cuadrados.

Escriba a continuación los parámetros obtenidos.

a_0	780.58
a_1	-411.01
b_1	-720.23
a_2	43.417
b_2	-2.1651

b) **(10 puntos)** Grafique, en una misma figura, la función ajustada y los datos.

¿Cómo nombró a su rutero?

nombre rutero	`Test2_v5_P2.m`