

MÉTHODES NUMÉRIQUES AVANCÉES
MINI-PROJET

Pricing Des Options Via Différents Modèles
Discrets & Continus

Groupe 3

Élaboré par :

Mensi IHEB

Guemira MARWA

Morjane RIMÉL

Encadré par :

Mr. Mohamed Anis BEN LASMAR

2020- 2021

Table des matières

| | |
|--|-----------|
| Introduction Générale | 1 |
| 1 Modélisation numérique du modèle Cox Ross Runinstein | 2 |
| 1.1 Principe de modèle | 2 |
| 1.2 Application | 4 |
| 1.2.1 Création du modèle Cox Ross Runinstein (from scratch) | 4 |
| 1.2.2 Exemple d'option Call | 6 |
| 1.2.3 Exemple d'option Put | 7 |
| 1.2.4 Exemple d'option Strap | 8 |
| 1.2.5 Étude de l'effet de la volatilité σ | 9 |
| 1.2.6 Étude de l'effet du taux d'intérêt r | 9 |
| 1.2.7 Utilisation de la bibliothèque fOptions | 10 |
| 2 Modélisation numérique du modèle de Black & Scholes | 14 |
| 2.1 Principe de modèle | 14 |
| 2.1.1 Les bases de modèle | 14 |
| 2.1.2 La formule Black Scholes | 14 |
| 2.1.3 Les indicateurs de modèle black-scholes | 15 |
| 2.2 Application | 17 |
| 2.2.1 Création du modèle Black & scholes (from scratch) | 17 |
| 2.2.2 Utilisation de la bibliothèque qrmtools | 17 |
| 2.2.3 Exemple Grecques de modèle black-scholes | 18 |
| 3 Convergence de Cox-Rubinstein au vers le modèle Black Scholes | 19 |
| 3.1 Vérification de la limite du CRR | 19 |
| 3.1.1 Vitesse de convergence | 19 |
| 3.2 Application | 20 |
| Conclusion Générale | 23 |

Table des figures

| | | |
|------|--|----|
| 1.1 | Présentation de l'arbre binomiale d'actif risqué | 2 |
| 1.2 | Achat d'une option call | 3 |
| 1.3 | Achat d'une option put | 4 |
| 1.4 | Arbre de l'évolution du prix | 5 |
| 1.5 | La probabilité risque neutre Q | 5 |
| 1.6 | Présentation de l'arbre de l'évolution du prix | 5 |
| 1.7 | Résultat de la simulation de l'option call | 6 |
| 1.8 | Présentation de l'arbre de l'évolution de l'option Call | 6 |
| 1.9 | Résultat de la simulation de l'option put | 7 |
| 1.10 | Présentation de l'arbre de l'évolution de l'option Put | 7 |
| 1.11 | Résultat de la simulation de l'option Strap | 8 |
| 1.12 | Présentation de l'arbre de l'évolution de l'option Put | 8 |
| 1.13 | Étude de l'effet de la volatilité σ au modèle CRR | 9 |
| 1.14 | Étude de l'effet du taux d'intérêt r au modèle CRR | 9 |
| 1.15 | Présentation de l'arbre de l'évolution de l'option Put Américain | 10 |
| 1.16 | Présentation de l'arbre de l'évolution de l'option Call Américain | 11 |
| 1.17 | Présentation de l'arbre de l'évolution de l'option Put Européen | 12 |
| 1.18 | Présentation de l'arbre de l'évolution de l'option Call Européen | 13 |
| 2.1 | Valeur de l'option call avec le modèle Black-Scholes | 17 |
| 2.2 | Valeur de l'option put avec le modèle Black-Scholes | 17 |
| 2.3 | Valeur de l'option Call avec la commande BlackScholes | 17 |
| 2.4 | Valeur de l'option Put avec la commande BlackScholes | 18 |
| 2.5 | Exemple de Grecques de l'option call | 18 |
| 2.6 | Exemple de Grecques de l'option put | 18 |
| 3.1 | Tracé du prix Cox, Ross et Rubinstein $C_0(n)$ d'un Call Européen en fonction de n et de sa limite, le prix Black-Scholes. | 20 |
| 3.2 | Convergence modèle Cox Ross Runinstein vers le modèle Black & Scholes avec l'option Call . . . | 20 |
| 3.3 | Convergence modèle Cox Ross Runinstein vers le modèle Black & Scholes avec l'option Put . . . | 21 |
| 3.4 | Étude de la vitesse de convergence de modèle Cox Ross Runinstein vers le modèle Black & Scholes avec l'option call américain | 22 |

Introduction Générale

Ce projet s'inscrit dans le cadre de l'application du cours de méthodes numériques avancées et a pour objectif de nous familiariser davantage au modèle discrets et continus ainsi qu'au processus de pricing d'options à travers l'équation aux dérivées partielles satisfaite par le prix d'une option européenne ou une option américaine.

Dans ce rapport, nous allons présenter dans un premier temps le modèle Cox Ross Rubinstein qui est l'analogue en temps discret de celui du modèle de Black et Scholes. Ce modèle est couramment appelé le modèle binomial car on y représente l'évolution du sous-jacent sous forme d'un arbre-binaire où à chaque période le sous-jacent ne peut prendre que deux valeurs.

Dans le deuxième chapitre, nous allons introduire le modèle Black Scholes provient du travail de trois chercheurs ; Fischer Black, Myron Scholes et Bob Merton. Leurs recherches ont mérité le prix Nobel de l'économie en 1997.

Une troisième partie du rapport est consacrée à la convergence de Cox Ross Rubinstein vers le modèle Black Scholes en mettant en exergue la limite du CRR et la vitesse de cette convergence.

Durant chaque partie, nous allons appliquer le modèle discret ainsi que le modèle stochastique pour le calcul des différentes option européennes ou américaines ainsi que de bien vérifier numériquement la convergence des deux modèles en utilisant le logiciel RStudio.

Chapitre 1

Modélisation numérique du modèle Cox Ross Rubinstein

1.1 Principe de modèle

La méthode binomiale a été décrite par Cox, Ross et Rubinstein (CRR) en 1979. Elle permet de déterminer le prix d'une option (Call, put ...) à partir des différentes trajectoires que peut prendre le sous-jacent. Le marché financier que nous considérons est un marché financier très simple qui comporte 2 actifs dont un intervalle de temps $[0, T]$ divisé en n périodes $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_n = T$:

- **Un actif non risqué S_t^0 :**

Il vaut 1 en $t = 0$ et vaut $R = (1 + r)^i$ à chaque temps t où r représente le taux d'intérêt .

- **Un actif risqué S :**

il vaut S_0 en $t = 0$ et puis à chaque instant t , il peut avoir pris 2 valeurs différentes :

- soit il est monté tel que $S_t^u = uS_{t-1}$
- soit il est descendu tel que $S_t^d = dS_{t-1}$

La figure ci-dessous représente la généralisation de l'arbre binomiale :

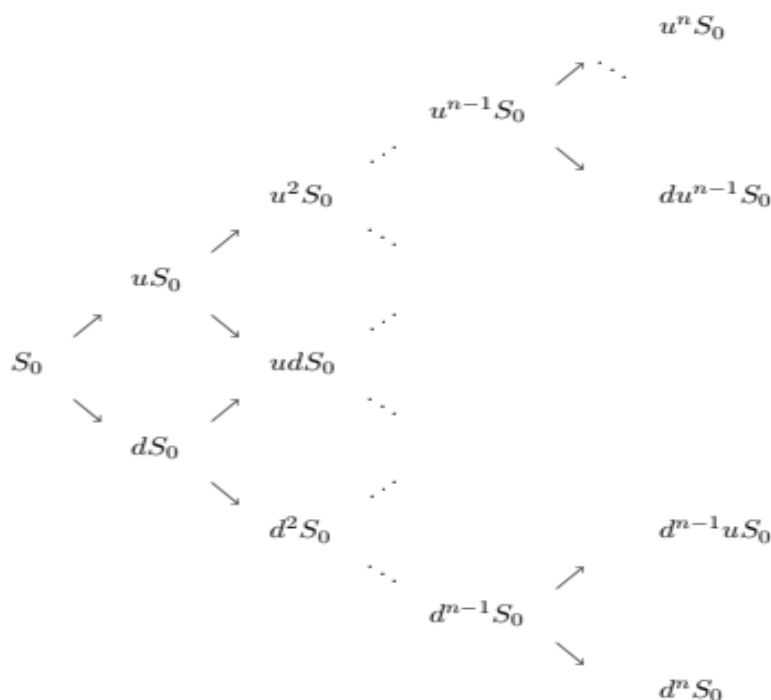


FIGURE 1.1 – Présentation de l'arbre binomiale d'actif risqué

Il faut qu'on respecte la condition suivante $d < u$ tel que :

$$U = e^{\sigma \sqrt{\Delta_t}}$$

et

$$D = e^{-\sigma \sqrt{\Delta_t}}$$

avec

— σ représente la volatilité

— $\Delta_t = \frac{T}{n}$ où Δ_t est la durée du temps représentée par chaque période.

Dans plusieurs mémoires, u et d sont représenté comme un mouvement brownien géométrique.

Afin de réaliser le pricing des différents options, il faut vérifier d'abord l'absence d'opportunité d'arbitrage AOA tel que :

$$d < 1 + r < u$$

De plus, il faut calculer la probabilité risque neutre q qu'elle sera utile pour le calcul de stratégie de couverture.

Elle est calculé comme :

$$q = \frac{R - d}{u - d}$$

Pour qu'on puisse réaliser le pricing via ce modèle discret, il faut spécifier l'option et la valeur de payoff. Dans le cas des options européens, les deux fameux options sont **call** et **put** :

● L'option Call :

L'achat d'une option call confère le droit d'acheter, à l'échéance, un actif à un prix déterminé, appelé prix d'exercice k , en contrepartie du versement immédiat d'une prime P au vendeur de l'option.

La graphe ci-dessous représente la variation de l'option call en point de vue acheteur :

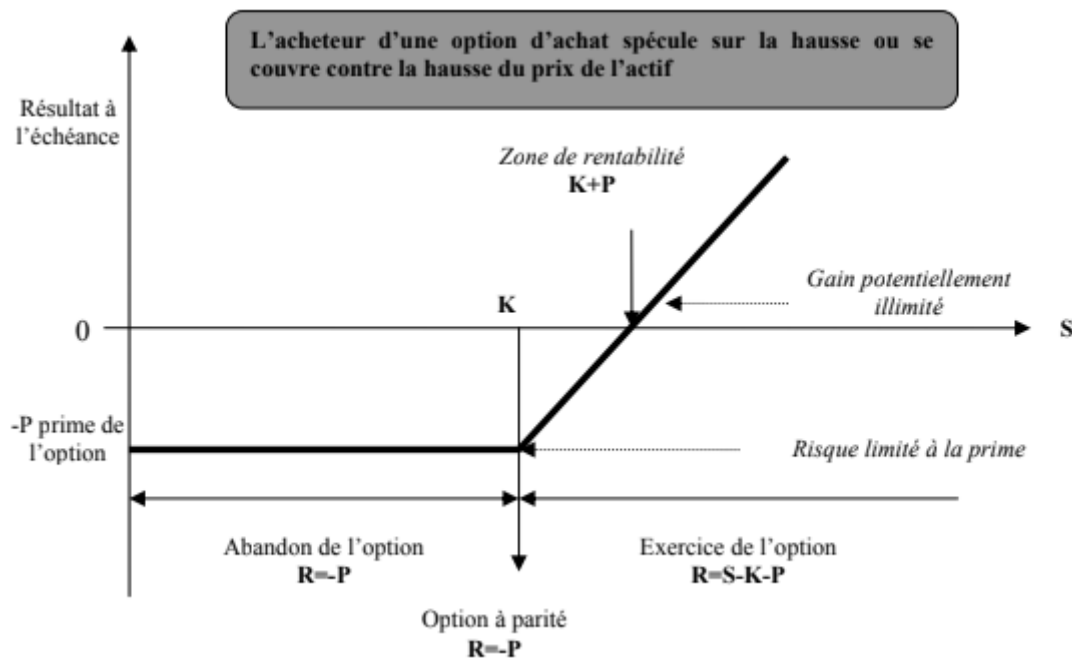


FIGURE 1.2 – Achat d'une option call

Le payoff de l'option call est calculé comme $\max(S_t - k, 0)$ où k est le prix d'exercice de l'option.

• L'option Put :

L'achat d'une option de put confère le droit de vendre, à l'échéance, un actif à un prix déterminé, appelé prix d'exercice, en contrepartie du versement immédiat d'une prime au vendeur de l'option. La graphe ci-dessous représente la variation de l'option put en point de vue acheteur :

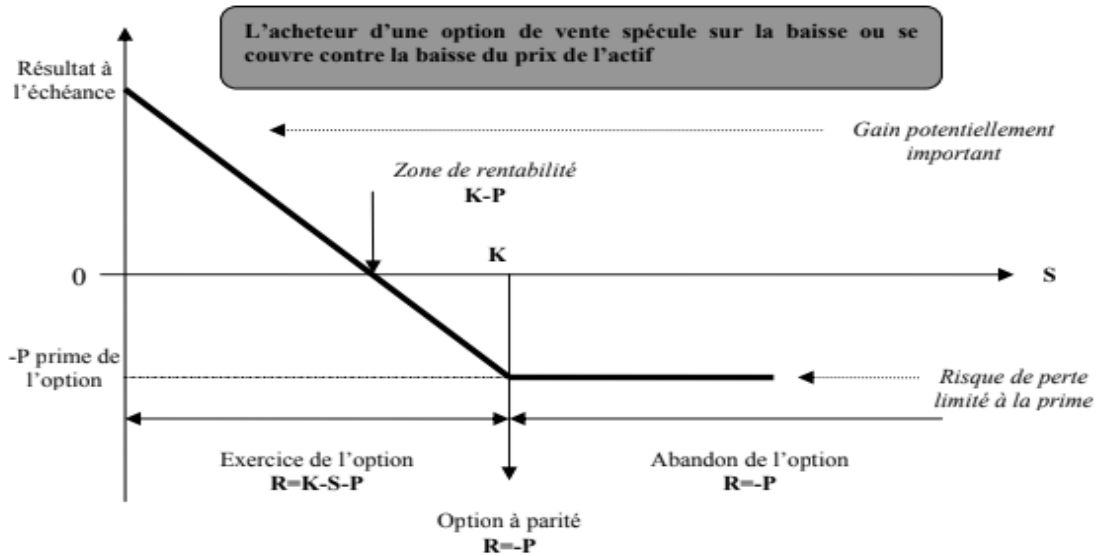


FIGURE 1.3 – Achat d'une option put

Le payoff de l'option put est calculé comme $\max(k - S_t, 0)$ où k est le prix d'exercice de l'option.

Après le choix de l'option, on peut appliquer la formule suivante pour le calcul de la valeur du portefeuille x d'un produit dérivé à la date t :

$$\pi_t = \frac{q\pi_{t+1}^u + (1-q)\pi_{t+1}^d}{1+r}$$

De plus, on peut calculer la quantité d'actif risqué Δ :

$$\Delta = \frac{\pi^u - \pi^d}{(u - d) * S_0}$$

Et finalement, on peut définir la stratégie de couverture à suivre :

- Achat ou vente de quantité d'actif risqué selon le signe Δ
- Placement de $x - \Delta S_0$ d'actif non risqué

Dans la partie suivante, nous allons présenter l'application numérique de modèle Cox Ross Runinstein

1.2 Application

Nous avons réalisé les différents modélisations numériques en utilisant R comme un langage de programmation puisqu'il admet plusieurs bibliothèques de calculs actuarielles et financières que nous allons utiliser certains d'eux dans les parties suivantes.

1.2.1 Création du modèle Cox Ross Runinstein (from scratch)

En utilisant les formules déjà mentionnées au-dessus, nous avons utilisé Δ_t avec la maturité $T=1$ et $N=3$. Nous avons aussi choisi la valeur de la volatilité $\sigma=0.2$, le taux d'intérêt $r=0.1$, le prix d'exercice

$k=10$ et le prix initial $S_0 = 10$.

Nous avons obtenu l'arbre de l'évolution du prix sous forme matriciel comme nous montre la figure suivante :

| | | | | |
|----------------------|-------------------|------------------|------------------|------------------|
| \$U | 1.12240090244567 | | | |
| \$D | 0.890947252288411 | | | |
| \$Tree_Action | 10 | 11.2240090244567 | 12.5978378581085 | 14.1398245808052 |
| | . | 8.90947252288411 | 10 | 11.2240090244567 |
| | . | | 7.93787006360269 | 8.90947252288411 |
| | . | . | | 7.07222352218925 |

FIGURE 1.4 – Arbre de l'évolution du prix

De plus, nous avons obtenu $u=1.12$ et $d=0.89$ ce qui respecte bien la condition d'absence d'opportunité d'arbitrage **AOA**

$$d = 0.89 < R = 1.01 < u = 1.12.$$

Nous avons aussi obtenu la probabilité risque neutre $Q=0.61$

$$Q = 0.617609016440398$$

FIGURE 1.5 – La probabilité risque neutre Q

Pour bien structuré l'évolution de l'arbre, nous avons présenté l'arbre dans la graphique suivante :

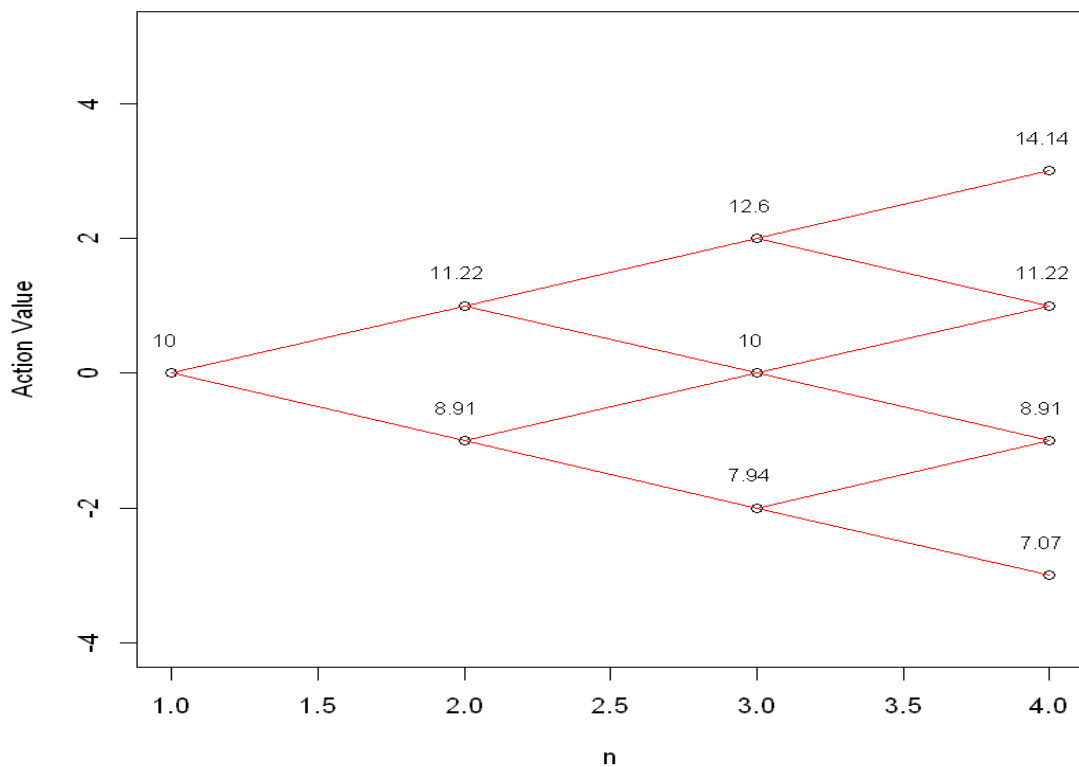


FIGURE 1.6 – Présentation de l'arbre de l'évolution du prix

1.2.2 Exemple d’option Call

En se basant sur l’arbre de l’évolution de prix, nous avons calculé le prix de l’option Call $C_0 = (S_t - K)^+$ et nous avons obtenu le résultat suivant :

| | | | | |
|---------------|-------------------|-------------------|------------------|------------------|
| \$Q | 0.617609016440398 | | | |
| \$U | 1.12240090244567 | | | |
| \$D | 0.890947252288411 | | | |
| \$Tree_Action | 10 | 11.2240090244567 | 12.5978378581085 | 14.1398245808052 |
| | . | 8.90947252288411 | 10 | 11.2240090244567 |
| | . | . | 7.93787006360269 | 8.90947252288411 |
| | . | . | . | 7.07222352218925 |
| \$Tree_Option | 0.509505706073843 | 1.1071545797887 | 2.26230937002727 | 4.13982458080516 |
| | . | 0.167435267857835 | 0.45270551009493 | 1.22400902445668 |
| | . | . | 0 | 0 |
| | . | . | . | 0 |
| \$price | 0.509505706073843 | | | |
| \$delta | 0.406007557578975 | | | |

FIGURE 1.7 – Résultat de la simulation de l’option call

Comme il est mentionné dans la figure ci-dessus la valeur de l’option call initial vaut 0.5 et $\Delta = 0.4$.

En effet, nous avons affiché aussi l’arbre de l’évolution de l’option call dans la figure ci-dessous :

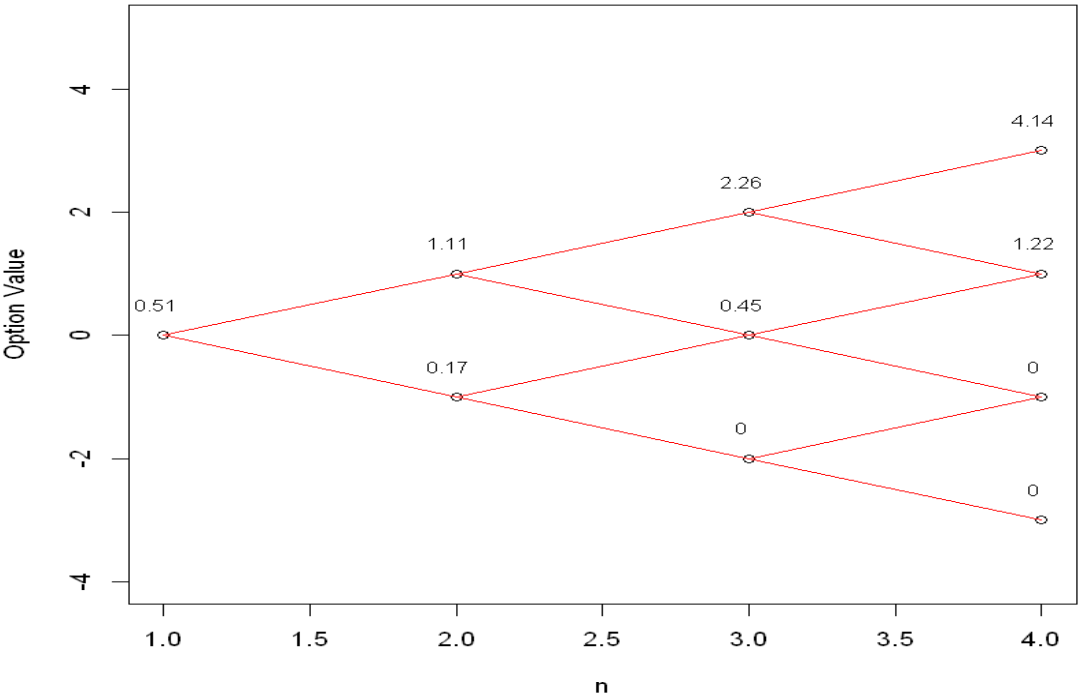


FIGURE 1.8 – Présentation de l’arbre de l’évolution de l’option Call

1.2.3 Exemple d’option Put

Comme l’exemple de l’option call, nous avons calculé le prix de l’option Put $P_0 = (K - S_t)^+$ et nous avons obtenu le résultat suivant :

| | | | | |
|---------------|-------------------|-------------------|-------------------|------------------|
| \$Q | 0.617609016440398 | | | |
| \$U | 1.12240090244567 | | | |
| \$D | 0.890947252288411 | | | |
| \$Tree_Action | 10 | 11.2240090244567 | 12.5978378581085 | 14.1398245808052 |
| | . | 8.90947252288411 | 10 | 11.2240090244567 |
| | . | . | 7.93787006360269 | 8.90947252288411 |
| | . | . | . | 7.07222352218925 |
| \$Tree_Option | 1.05587384940473 | 0.389144505092255 | 0 | 0 |
| | . | 1.52662515967052 | 0.651439003569612 | 0 |
| | . | . | 2.1522773406182 | 1.09052747711589 |
| | . | . | . | 2.92777647781075 |
| \$price | 1.05587384940473 | | | |
| \$delta | -0.49145073054818 | | | |

FIGURE 1.9 – Résultat de la simulation de l’option put

Comme il est mentionné dans la figure ci-dessus la valeur de l’option put initial vaut 1.055 et $\Delta = -0.49$.

En effet, nous avons affiché aussi l’arbre de l’évolution de l’option put dans la figure ci-dessous :

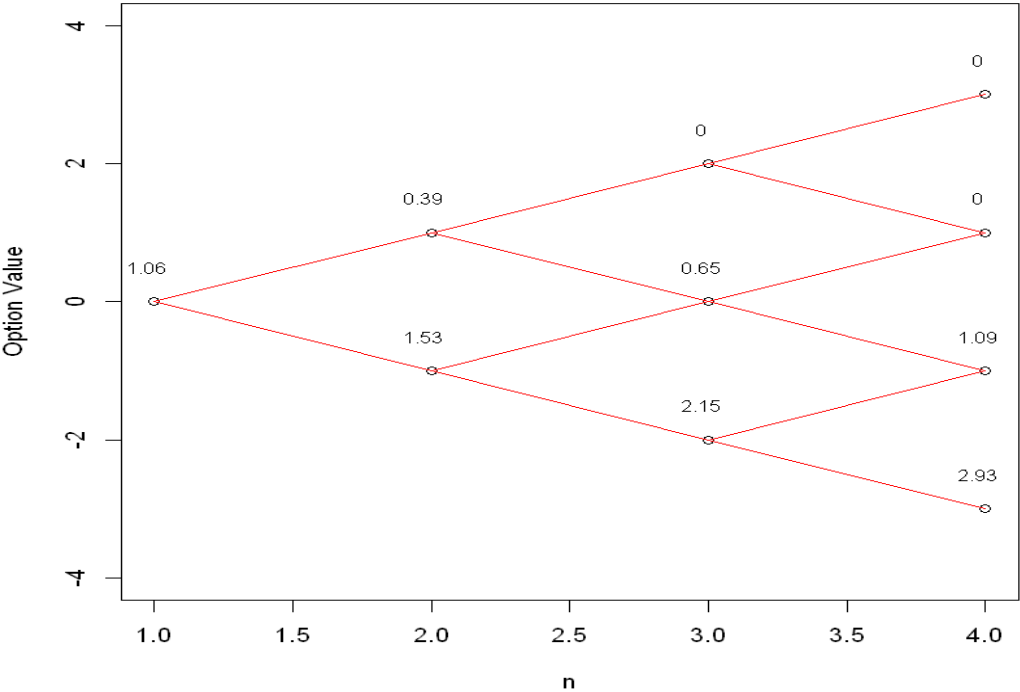


FIGURE 1.10 – Présentation de l’arbre de l’évolution de l’option Put

1.2.4 Exemple d’option Strap

Nous avons aussi calculé le prix de l’option Strap $Sr_0 = (2S_t - 2k)^+$ et nous avons obtenu le résultat suivant : Comme il est mentionné dans la figure ci-dessous la valeur de l’option strap initial vaut 1.019 et $\Delta = 0.81$.

| | | | | |
|---------------|-------------------|-------------------|------------------|------------------|
| \$Q | 0.617609016440398 | | | |
| \$U | 1.12240090244567 | | | |
| \$D | 0.890947252288411 | | | |
| \$Tree_Action | 10 | 11.2240090244567 | 12.5978378581085 | 14.1398245808052 |
| | . | 8.90947252288411 | 10 | 11.2240090244567 |
| | . | . | 7.93787006360269 | 8.90947252288411 |
| | . | . | . | 7.07222352218925 |
| \$Tree_Option | 1.01901141214769 | 2.21430915957739 | 4.52461874005454 | 8.27964916161033 |
| | . | 0.334870535715669 | 0.90541102018986 | 2.44801804891335 |
| | . | . | . | 0 |
| | . | . | . | 0 |
| \$price | 1.01901141214769 | | | |
| \$delta | 0.81201511515795 | | | |

FIGURE 1.11 – Résultat de la simulation de l’option Strap

En effet, nous avons affiché aussi l’arbre de l’évolution de l’option strap dans la figure ci-dessous :

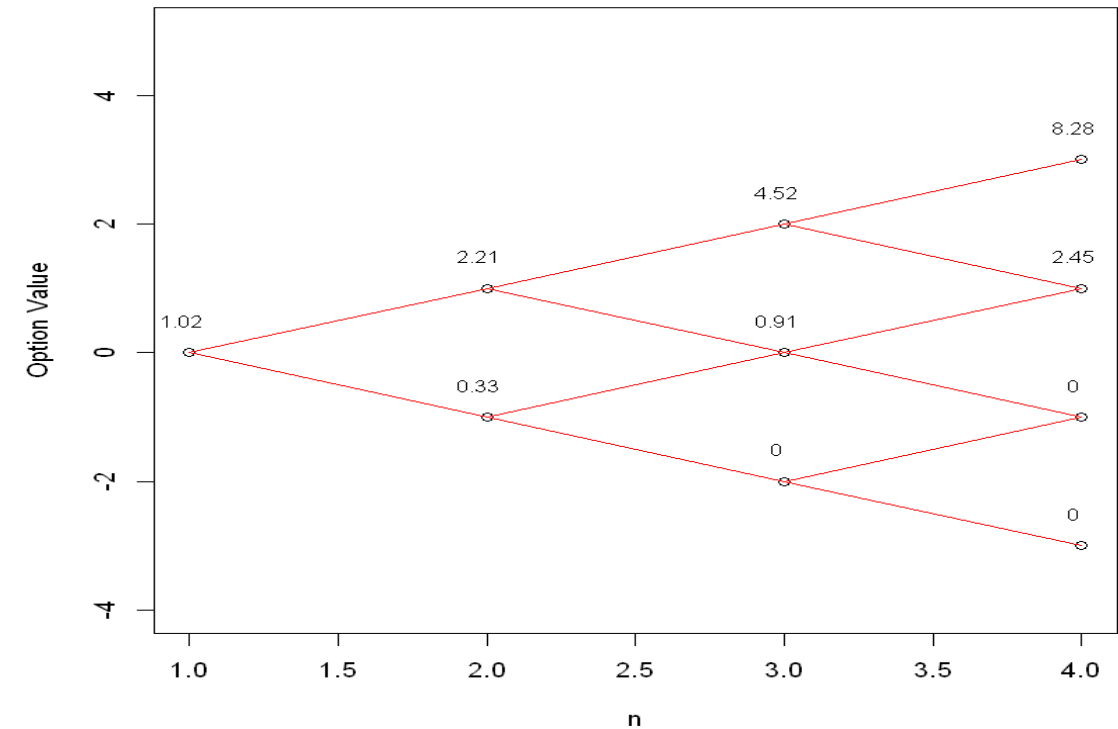


FIGURE 1.12 – Présentation de l’arbre de l’évolution de l’option Put

1.2.5 Étude de l'effet de la volatilité σ

En analysant l'influence de la volatilité σ sur le comportement des différents valeurs de l'option put sur le modèle de CRR, on remarque plus qu'on augmente la volatilité σ plus l'écart des valeurs au temps t entre la valeur maximal et minimal devient plus important. Ce qui nous montre la graphique suivante :

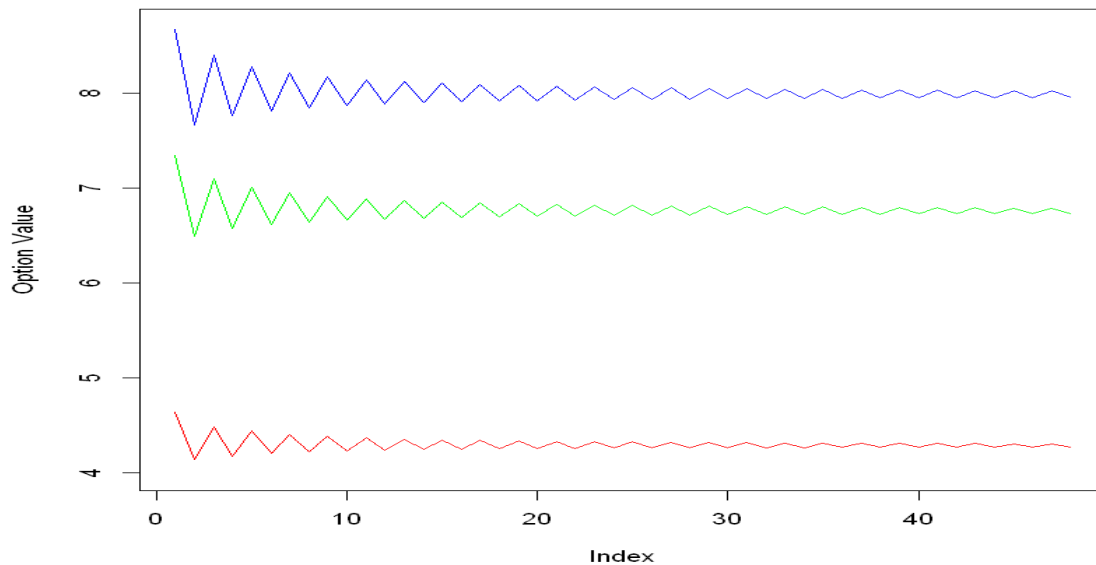


FIGURE 1.13 – Étude de l'effet de la volatilité σ au modèle CRR

D'après cette graphe on remarque que la courbe bleu a le plus moins écart avec volatilité $\sigma = 0.7$ or la courbe rouge a l'écart le plus important de $\sigma = 0.4$ donc on peut conclure que le prix de l'option est proportionnelle à la volatilité σ .

1.2.6 Étude de l'effet du taux d'intérêt r

En analysant l'influence du taux d'intérêt r sur le comportement des différents valeurs de l'option put sur le modèle de CRR, on remarque plus qu'on augmente le taux r plus l'écart des valeurs au temps t entre la valeur maximal et minimal devient assez important. Ce qui nous montre la graphique suivante :

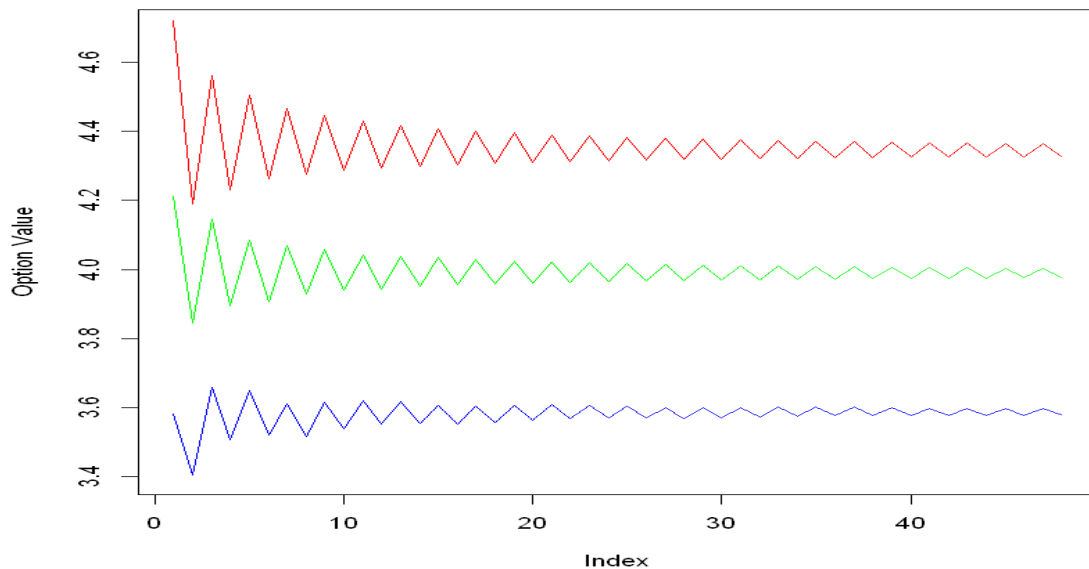


FIGURE 1.14 – Étude de l'effet du taux d'intérêt r au modèle CRR

D'après cette graphie on remarque que la courbe bleue a le plus moins écart avec taux intérêt $r = 0.9$ or la courbe rouge a l'écart le plus important avec $r=0.05$ donc on peut conclure que le prix de l'option est inversement proportionnelle au taux d'intérêt r .

1.2.7 Utilisation de la bibliothèque fOptions

Avec le code from scratch de la modèle binomiale que nous avons implémenté, nous avons utilisé aussi la bibliothèque **fOptions** qui nous permet de calculer la valeur de portefeuille et de dégager la stratégie de couverture à date t . La commande **BinomialTreeOption** permet de dégager l'évolution de l'actif risqué dans un dataframe et la commande **BinomialTreePlot** permet de représenter l'évolution de l'actif risqué dans un arbre.

A l'aide de cette bibliothèque on peut calculer les options européens ainsi que les options américains en donnant comme paramètre le type de l'option "ce", "pe", "ca", "pa" qui sont respectivement call européen ,put européen ,call américain et put américain.

Voici dans les graphes suivantes un exemple de l'affichage du commande "BinomialTreePlot" :

- exemple de l'option Put Américain :

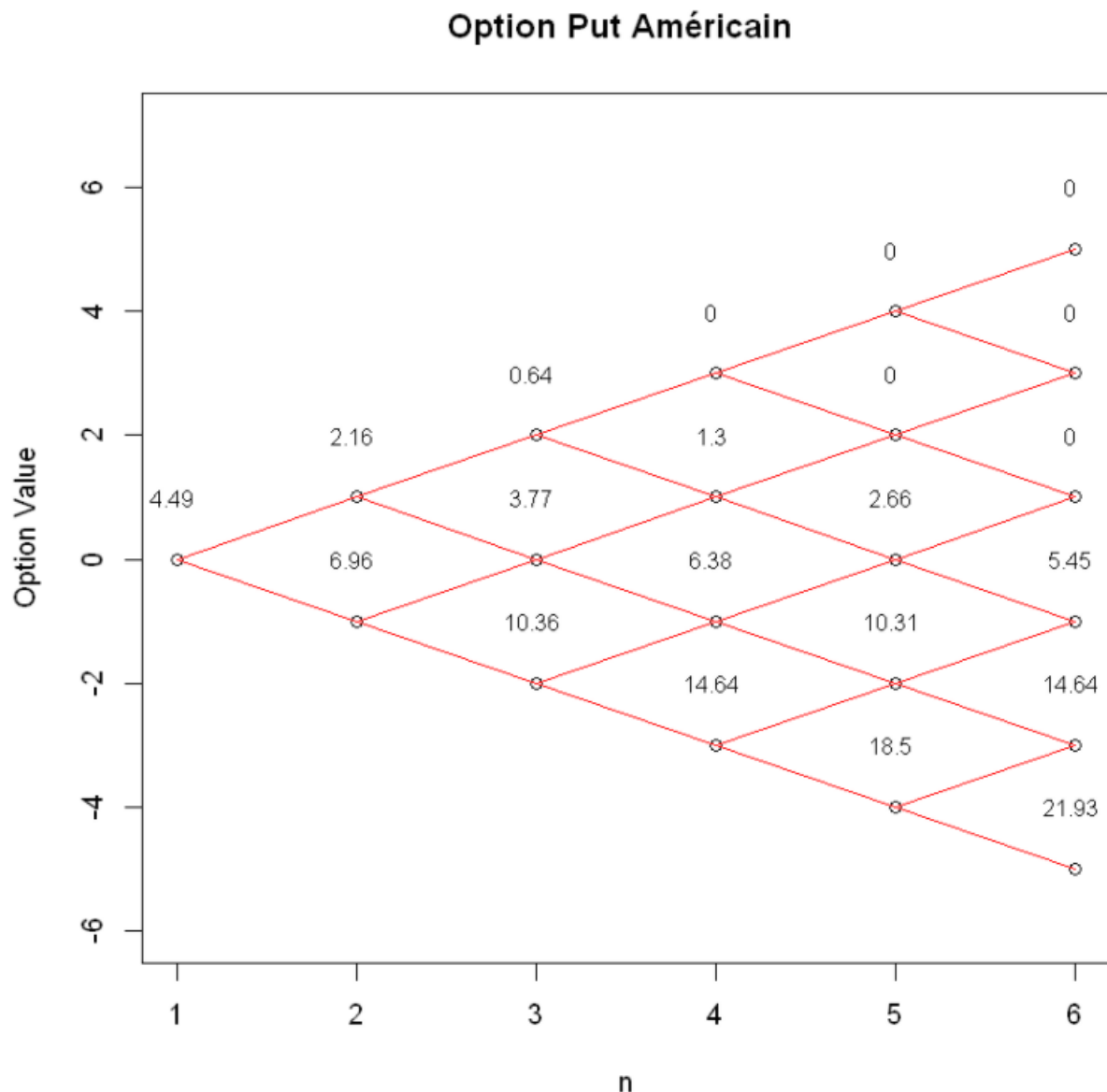


FIGURE 1.15 – Présentation de l'arbre de l'évolution de l'option Put Américain

- exemple de l'option Call Américain :

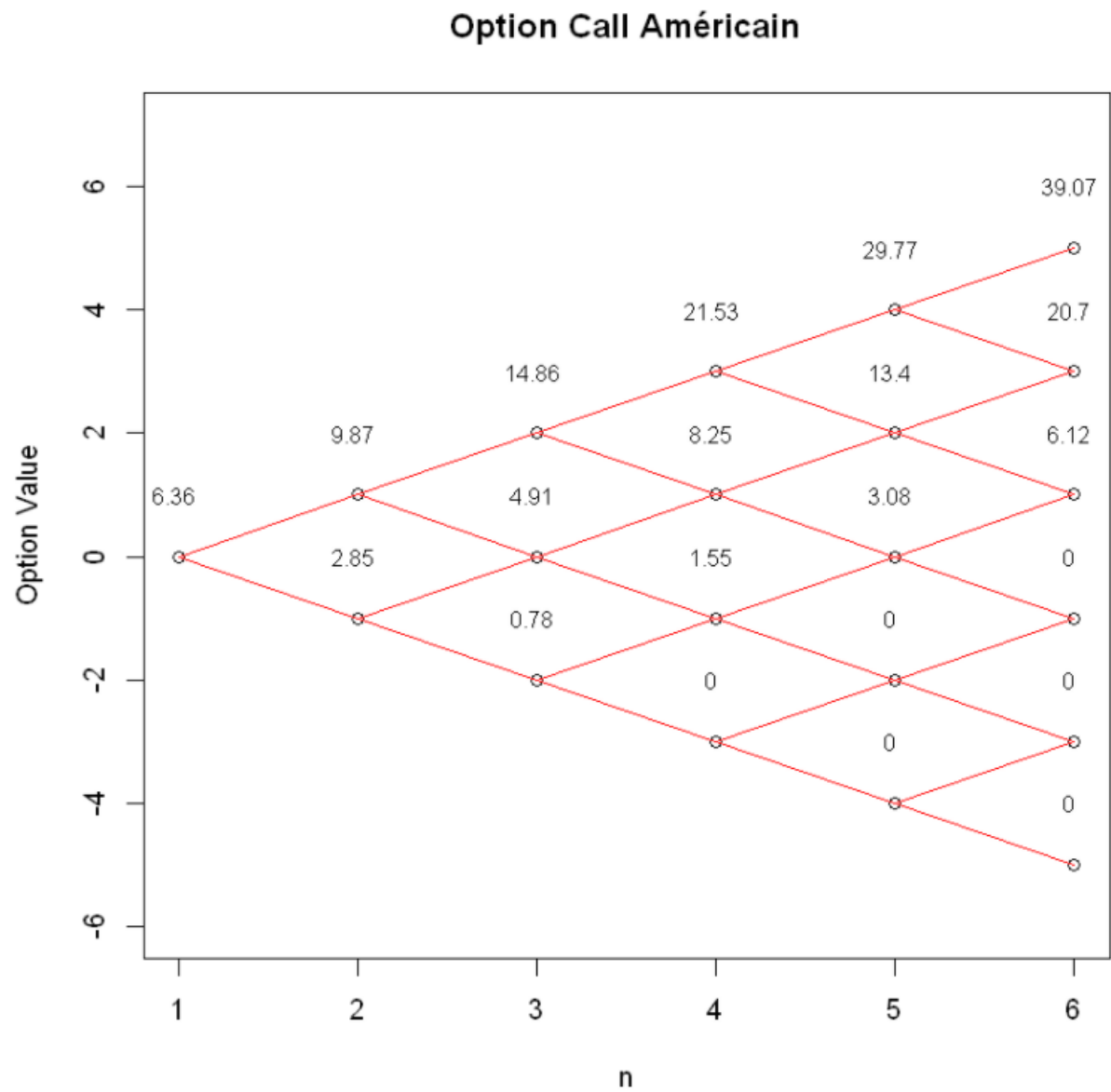


FIGURE 1.16 – Présentation de l'arbre de l'évolution de l'option Call Américain

- exemple de l'option Put Européen :

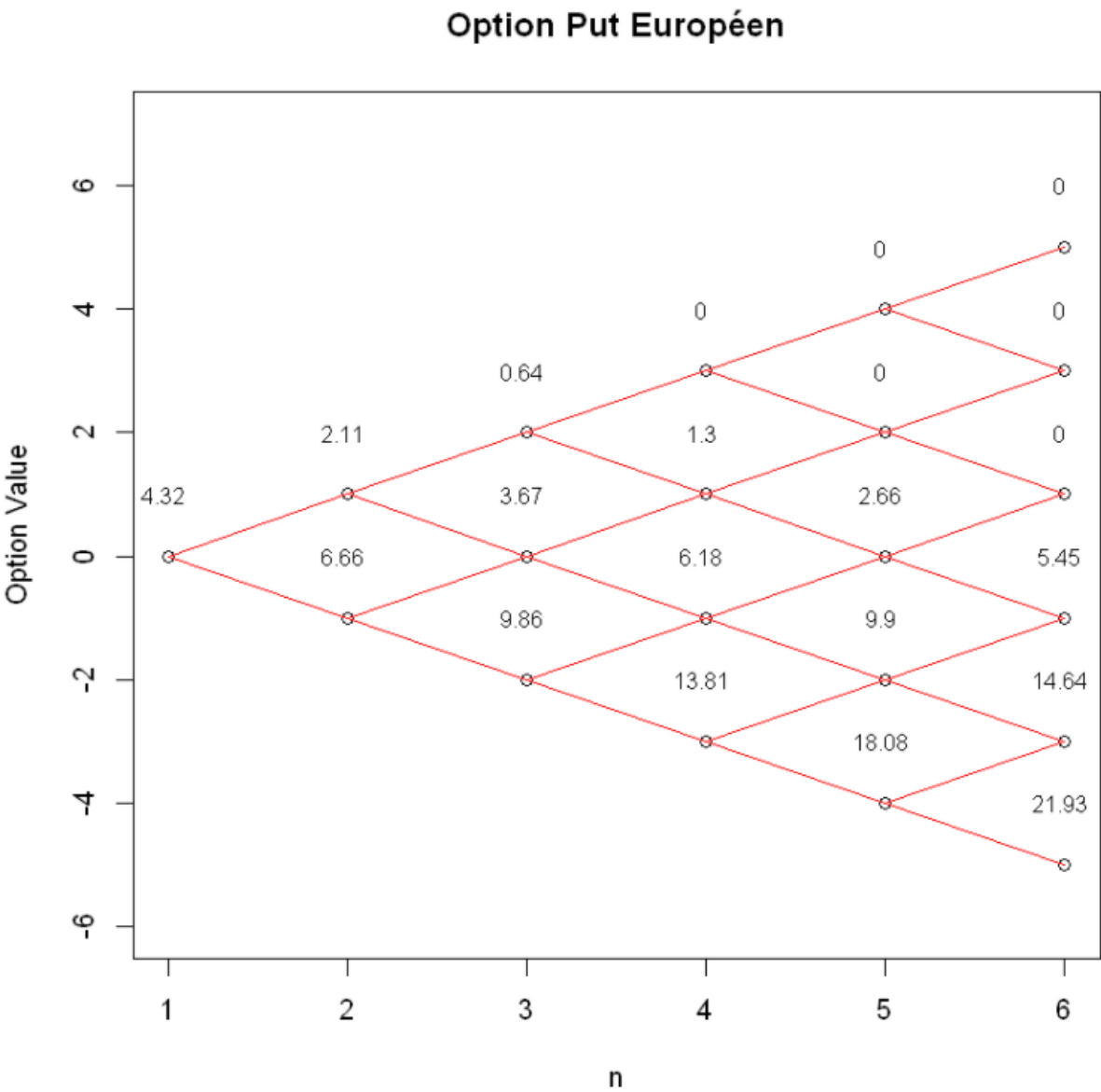


FIGURE 1.17 – Présentation de l'arbre de l'évolution de l'option Put Européen

- exemple de l'option Call Européen :

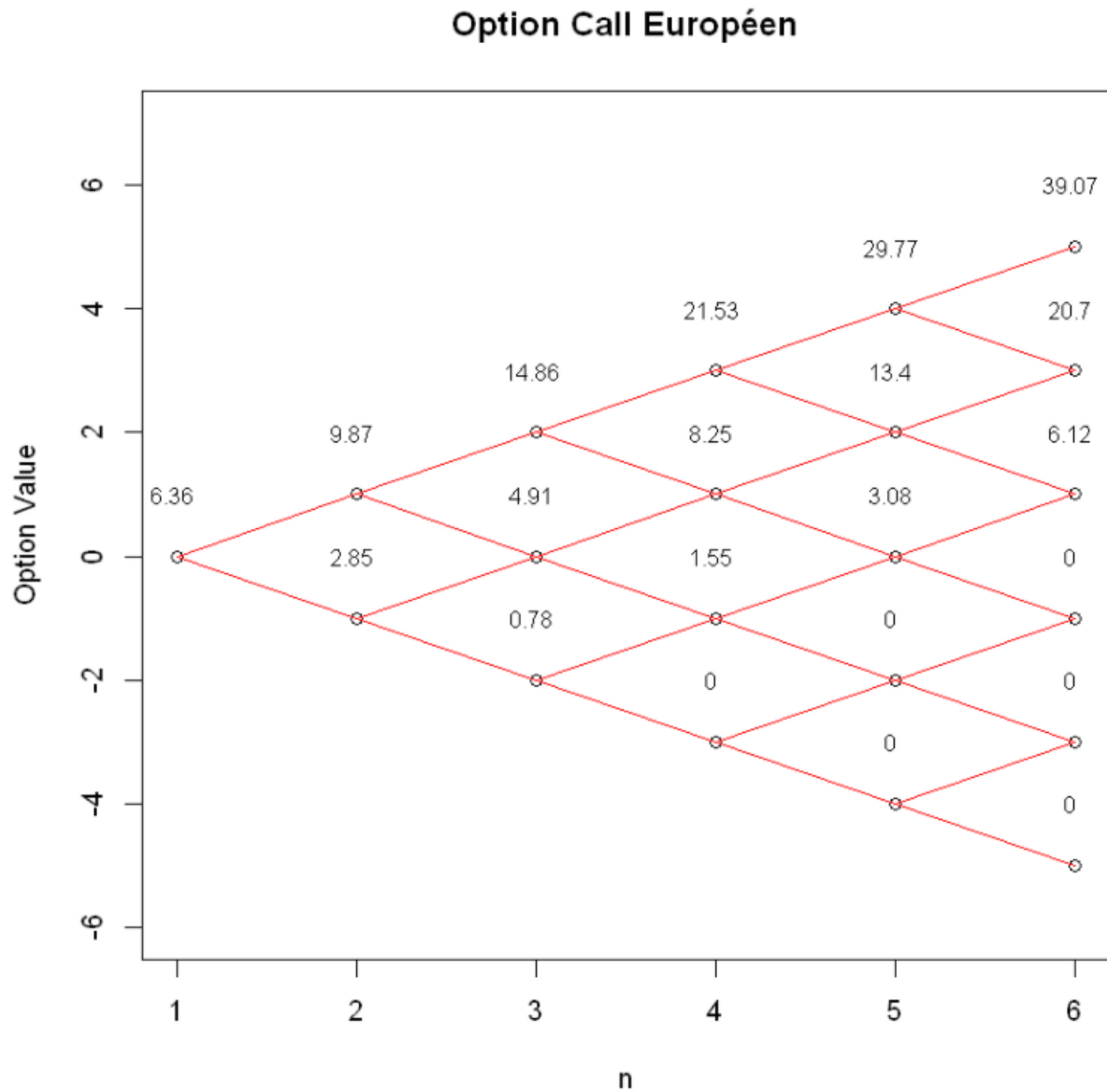


FIGURE 1.18 – Présentation de l'arbre de l'évolution de l'option Call Européen

Dans ces exemples, on remarque que le call européen égale au call américain au niveau de prix initial de l'option mais ce n'est pas le cas pour l'option put.

Chapitre 2

Modélisation numérique du modèle de Black & Scholes

2.1 Principe de modèle

Le modèle Black Scholes, également connu sous le nom de modèle Black-Scholes-Merton (BSM), est un modèle mathématique de tarification d'un contrat d'options. En particulier, le modèle estime la variation dans le temps des instruments financiers. Il suppose que ces instruments (comme les actions ou les contrats à terme) auront une distribution log-normale des prix. En utilisant cette hypothèse et en tenant compte d'autres variables importantes, l'équation dérive le prix d'une option d'achat.

- **Points clés :**

- Le modèle Black-Scholes Merton (BSM) est une équation différentielle utilisée pour résoudre les prix des options.
- Le modèle a remporté le prix Nobel d'économie.
- Le modèle BSM standard n'est utilisé que pour évaluer les options européennes et ne prend pas en compte le fait que les options américaines pourraient être exercées avant la date d'expiration.

2.1.1 Les bases de modèle

Le modèle suppose que le prix des actifs fortement négociés suit un mouvement brownien géométrique avec une dérive et une volatilité constantes. Lorsqu'il est appliqué à une option d'achat d'actions, le modèle incorpore la variation constante du prix de l'action, la valeur temps de l'argent, le prix d'exercice de l'option et le délai d'expiration de l'option.

La formule, développée par trois économistes - Fischer Black, Myron Scholes et Robert Merton - est peut-être le modèle de tarification des options le plus connu au monde. L'équation initiale a été introduite dans l'article de Black et Scholes de 1973, «The Pricing of Options and Corporate Liabilities».

Le modèle Black-Scholes fait certaines hypothèses :

- L'option est européenne et ne peut être exercée qu'à l'expiration.
- Aucun dividende n'est versé pendant la durée de l'option.
- Les marchés sont efficaces (c'est-à-dire que les mouvements du marché ne peuvent être prédits).
- Il n'y a pas de frais de transaction lors de l'achat de l'option.
- Le taux sans risque et la volatilité du sous-jacent sont connus et constants.
- Les rendements de l'actif sous-jacent sont normalement distribués.

2.1.2 La formule Black Scholes

Nous considérons un marché constitué d'un actif sans risque S_0 et d'un actif risqué S sur la période $[0, T]$.

- **L'actif sans risque :**

La dynamique retenue pour l'évaluation de l'actifs sans risque en continu est :

$$dS_t^0 = rS_t^0 dt$$

Il aura la dynamique donnée par l'EDS de Black-Scholes où $\sigma > 0$

$$dS_t = S_t(\mu dt + \sigma dW_t)$$

Cette dynamique de l'actif risqué a comme solution :

$$S_t = S_0 e^{(\mu - \frac{\sigma^2}{2})t + \sigma W_t}$$

On peut calculer la valeur de portefeuille en utilisant les formules suivantes :

- **Le cas de l'option Call :**

$$C_0 = S_0 \mathcal{N}(d_1) - ke^{-rT} \mathcal{N}(d_2)$$

- **Le cas de l'option Put :**

$$P_0 = ke^{-rT} \mathcal{N}(-d_2) - S_0 \mathcal{N}(-d_1)$$

avec les variables d_1 ainsi que d_2 possèdent leur propre formule dans ce modèle :

$$d_1 = \frac{\ln \frac{S}{k} + (r + \frac{\sigma^2}{2})T}{\sigma \sqrt{T}}$$
$$d_2 = \frac{\ln \frac{S}{k} + (r - \frac{\sigma^2}{2})T}{\sigma \sqrt{T}} = d_1 - \sigma \sqrt{T}$$

De plus, les variables sont respectivement :

- S = Prix actuel de l'action
- k = Prix d'exercice de l'option
- T = Temps restant avant l'expiration de l'option, en pourcentage d'une année
- r = Taux d'intérêt sans risque
- σ = volatilité implicite du prix de l'action, mesurée par un décimal

2.1.3 Les indicateurs de modèle black-scholes

Indicateurs de base de la gestion financière des options, les grecques ou lettres grecques proviennent des principaux modèles d'évaluation dont celui de Black and Scholes. Très utilisés dans les activités de Trading, ces outils calculent l'impact d'un paramètre donné sur le prix de l'option analysée.

- **Le delta :**

Le delta mesure la sensibilité du prix d'une option à une variation donnée du cours du sous-jacent. C'est la dérivée de la prime (P) en fonction du prix du sous-jacent (S).

$$\delta = \frac{\partial P}{\partial S}$$
$$\delta_{call} = \mathcal{N}(d_1)$$
$$\delta_{put} = \delta_{call} - 1 = \mathcal{N}(d_1) - 1$$

En effet, la prime d'un call (resp. put) est une fonction croissante (resp. décroissante) du prix du sous-jacent. Autrement dit, plus le cours d'un actif sera élevé, plus la probabilité que l'option attachée soit dans la monnaie sera grande. La prime d'un call étant une fonction croissance, son delta (sa dérivée) est positif. Inversement, la prime d'un put étant une fonction décroissante, son delta est négatif.

La valeur du delta ne pourra jamais dépasser 1, et le delta d'un portefeuille d'options est égal à la somme des deltas des options qui le composent.

• Le gamma :

Le gamma mesure la convexité du prix d'une option en fonction du cours du sous-jacent. C'est la dérivée seconde de la prime (P) en fonction du prix du sous-jacent (S).

$$\gamma_{call} = \gamma_{put} = \frac{\partial^2 P}{\partial S^2} = \frac{N'(d_1)}{S\sigma\sqrt{T}}$$

Il indique si le prix de l'option évolue plus ou moins vite que le prix du sous-jacent. En résumé, si le delta représente la vitesse, le gamma représente l'accélération. Un acheteur de call ou de put sera long gamma. Inversement, un vendeur sera short gamma.

Le gamma d'un portefeuille d'options est égal à la somme des gammas des options qui le composent, c'est une fonction décroissante de la maturité.

• Le thêta :

Le thêta est le coût du temps (T) qui passe sur un portefeuille d'options. Ainsi, une position longue (gamma positif) aura un thêta négatif.

$$\begin{aligned}\theta &= -\frac{\partial P}{\partial T} \\ \theta_{call} &= -\frac{SN'(d_1)\sigma}{2\sqrt{T}} - rKe^{-rT}N(d_2) \\ \theta_{put} &= -\frac{SN'(d_1)\sigma}{2\sqrt{T}} + rKe^{-rT}N(d_2)\end{aligned}$$

• Le rhô :

Le rhô est le taux de variation de la valeur de la prime en fonction du taux d'intérêt sans risque (r).

$$\begin{aligned}\rho &= \frac{\partial P}{\partial r} \\ \rho_{call} &= KTe^{-rT}N(d_2) \\ \rho_{put} &= -KTe^{-rT}N(-d_2)\end{aligned}$$

• Le véga :

Le véga mesure la sensibilité à la volatilité implicite.

Un acheteur de call ou de put sera long véga. Inversement, un vendeur sera short véga.

Pris individuellement, ces indicateurs détaillent les risques pris par le Trader en fonction de leur origine (prix du sous-jacent, temps, taux d'intérêt...) et permettent donc une gestion plus précise du risque d'un portefeuille. Si il est impossible en pratique de supprimer tout risque, la gestion des grecques permet au Trader d'affiner sa stratégie. En effet ce dernier, pourra par exemple choisir de neutraliser le delta de son portefeuille, son exposition aux variations des sous-jacents sera donc supprimée, et la valeur de son portefeuille d'options dépendra principalement de la volatilité implicite.

2.2 Application

2.2.1 Création du modèle Black & scholes (from scratch)

Afin de calculer les valeurs de l'option call ou put de modèle black-scholes, nous avons utilisé les formules déjà mentionné dans la partie précédente et implémenté le modèle from scratch.

Nous avons précisé la valeur de prix initial $S=110$, le prix de l'exercice $k=100$, le taux d'intérêt $r=0.04$, $\sigma=0.2$ et nous avons mentionné le type de l'option "C" et "P" qui signifie respectivement Call ou Put.

Voici les résultats que nous avons obtenu :

- Exemple de l'option Call européen :

```
call <- BlackScholes(110,100,0.04,1,0.2,"C")
call
16.9686780305039
```

FIGURE 2.1 – Valeur de l'option call avec le modèle Black-Scholes

- Exemple de l'option Put européen :

```
Put <- BlackScholes(110,100,0.04,1,0.2,"P")
Put
3.0476219457362
```

FIGURE 2.2 – Valeur de l'option put avec le modèle Black-Scholes

2.2.2 Utilisation de la bibliothèque qrmtools

A l'aide de la bibliothèque **qrmtools** (Tools for Quantitative Risk Management) sous R, nous pouvons facilement calculer le pris de l'actif de l'option put ou call en utilisant la commande prédéfinie **Black_Scholes**.

- Exemple de l'option Call européen :

```
Black_Scholes(0, 110, 0.01, 0.2, 100, 1, "call")
14.9447040235354
```

FIGURE 2.3 – Valeur de l'option Call avec la commande BlackScholes

- Exemple de l'option Put européen :

```
Black_Scholes(0, 110, 0.01, 0.2, 100, 1, "put")
3.94968739845218
```

FIGURE 2.4 – Valeur de l'option Put avec la commande BlackScholes

2.2.3 Exemple Grecques de modèle black-scholes

Comme nous avons mentionnées que les grecques sont des indicateurs importants pour qu'un trader puisse bien diminuer le risque et d'affiner son stratégie, la bibliothèque **qrmtools** fournit une autre méthode **Black_Scholes_Greeks** pour les options call et put.

Les figures suivantes présente les résultats obtenus :

- Exemple de Grecques de l'option call européen :

```
Black_Scholes_Greeks(0, 110, 0.01, 0.2, 100, 1, "call")

delta  0.734523168689171
theta  -4.26479746396733
rho     65.8528445322734
vega    36.062690186446
gamma   0.0149019380935727
vanna   -0.699207860007584
vomma   48.1898244619812
```

FIGURE 2.5 – Exemple de Grecques de l'option call

- Exemple de Grecques de l'option put européen :

```
Black_Scholes_Greeks(0, 110, 0.01, 0.2, 100, 1, "put")

delta  -0.265476831310829
theta  -3.27474763021817
rho    -33.1521388426434
vega    36.062690186446
gamma   0.0149019380935727
vanna   -0.699207860007584
vomma   48.1898244619812
```

FIGURE 2.6 – Exemple de Grecques de l'option put

Chapitre 3

Convergence de Cox-Rubinstein vers le modèle Black Scholes

3.1 Vérification de la limite du CRR

Sous le modèle Cox, Ross et Rubinstein, la prime d'un Put européen tout comme celle d'un Call est égale à l'espérance du payoff actualisé sous la probabilité risque neutre :

$$C_0 = P_0 = e^{-rT} \mathbb{E}_\pi(S_T)$$

où π désigne ce payoff qui est dans le cas du call vaut $\pi(S) = (S_T - K)^+$.

D'après les formules théoriques, il est bien Vérifié que la limite de $P_0(n)$ et de $P_0(n)$ existe et qu'elle est précisément égale au prix de l'option selon la formule de Black-Scholes lorsque on tend n vers l'infini avec n est le nombre de pas de discrétisations de l'intervalle du temps vers la maturité T .

- Le cas de l'option Call :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} e^{-rT} (S_T - K)^+ = S_0 \mathcal{N}(d_1) - K e^{-rT} \mathcal{N}(d_2)$$

- Le cas de l'option Put :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} e^{-rT} (K - S_T)^+ = K e^{-rT} \mathcal{N}(-d_2) - S_0 \mathcal{N}(-d_1)$$

L'intérêt d'étudier la convergence de modèle discret CRR vers le modèle stochastique Black-Scholes est d'assurer la solidité et la crédibilité de ces deux modèles mathématiques. En effet, sans convergence, l'un sûrement est erroné.

3.1.1 Vitesse de convergence

Sachant que la limite du prix Cox, Ross et Rubinstein est égale au prix Black-Scholes, on peut se demander comment se comporte le premier tend vers le second lorsque n tend vers l'infini. La convergence est-elle monotone, ou non, et surtout est-elle rapide ?

Si l'on représente sur un graphe du prix $C_0(n)$ comme une fonction de n , on s'aperçoit que la convergence est très irrégulière et qu'elle ne semble pas particulièrement rapide.

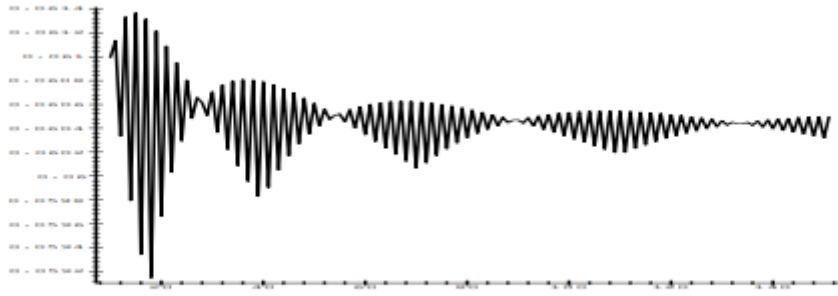


FIGURE 3.1 – Tracé du prix Cox, Ross et Rubinstein $C_0(n)$ d'un Call Européen en fonction de n et de sa limite, le prix Black-Scholes.

En réalité, on peut montrer que :

$$C_0(n) - C_{BS} = \epsilon\left(\frac{1}{n}\right)$$

c'est-à-dire que cet écart tend vers zéro comme $\frac{1}{n}$, ce qui est assez rapide.

3.2 Application

Dans cette partie, nous avons confirmé l'étude théorique de la convergence du modèle Cox Ross Runinstein vers le modèle black & scholes.

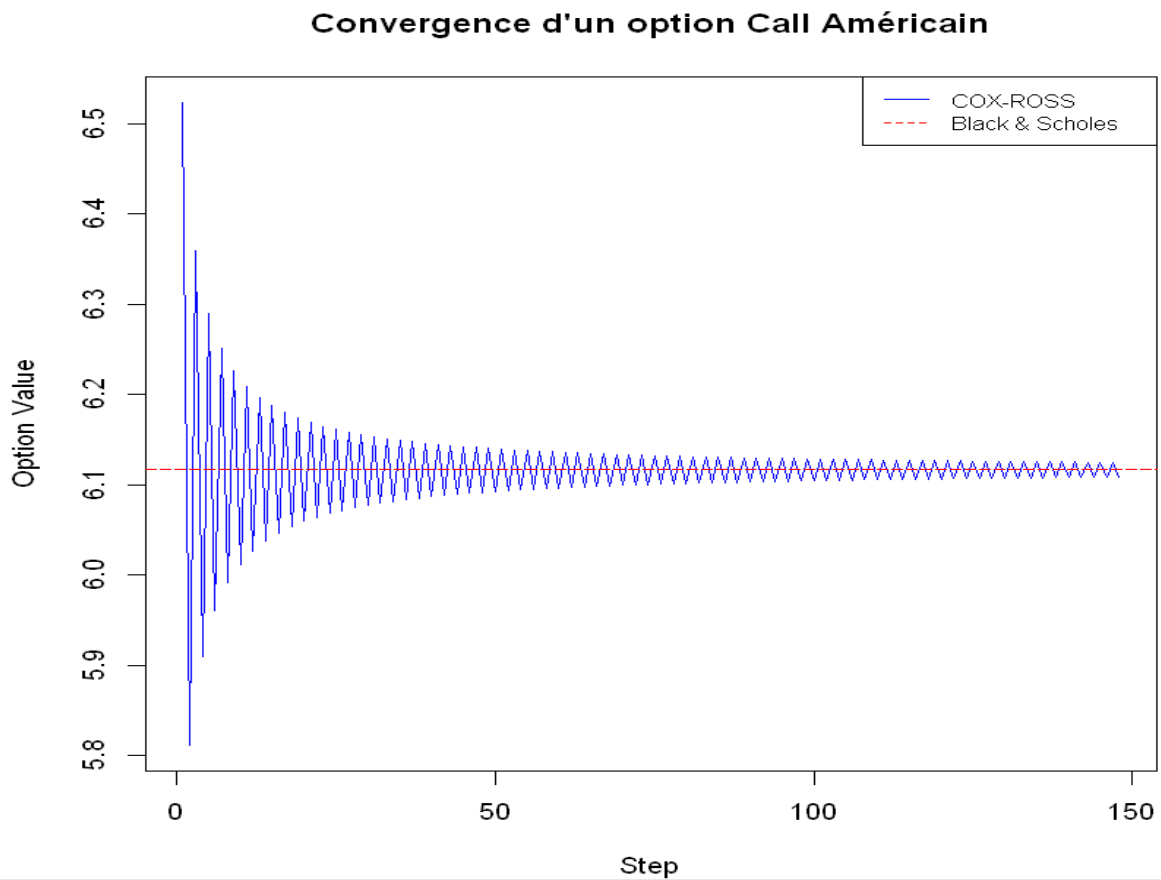


FIGURE 3.2 – Convergence modèle Cox Ross Runinstein vers le modèle Black & Scholes avec l'option Call

Pour l'option call, on tend n vers l'infinie en augmentant le nombre de pas. La figure ci-dessus montre le résultat obtenu avec nombre de pas vaut 150. On remarque qu'à l'ordre 120 steps s'approche plus eu modèle Black & Scholes.

De plus, nous avons réalisé la même expérience avec l'option put avec un nombre de pas de 200 pas et voici le résultat obtenu :

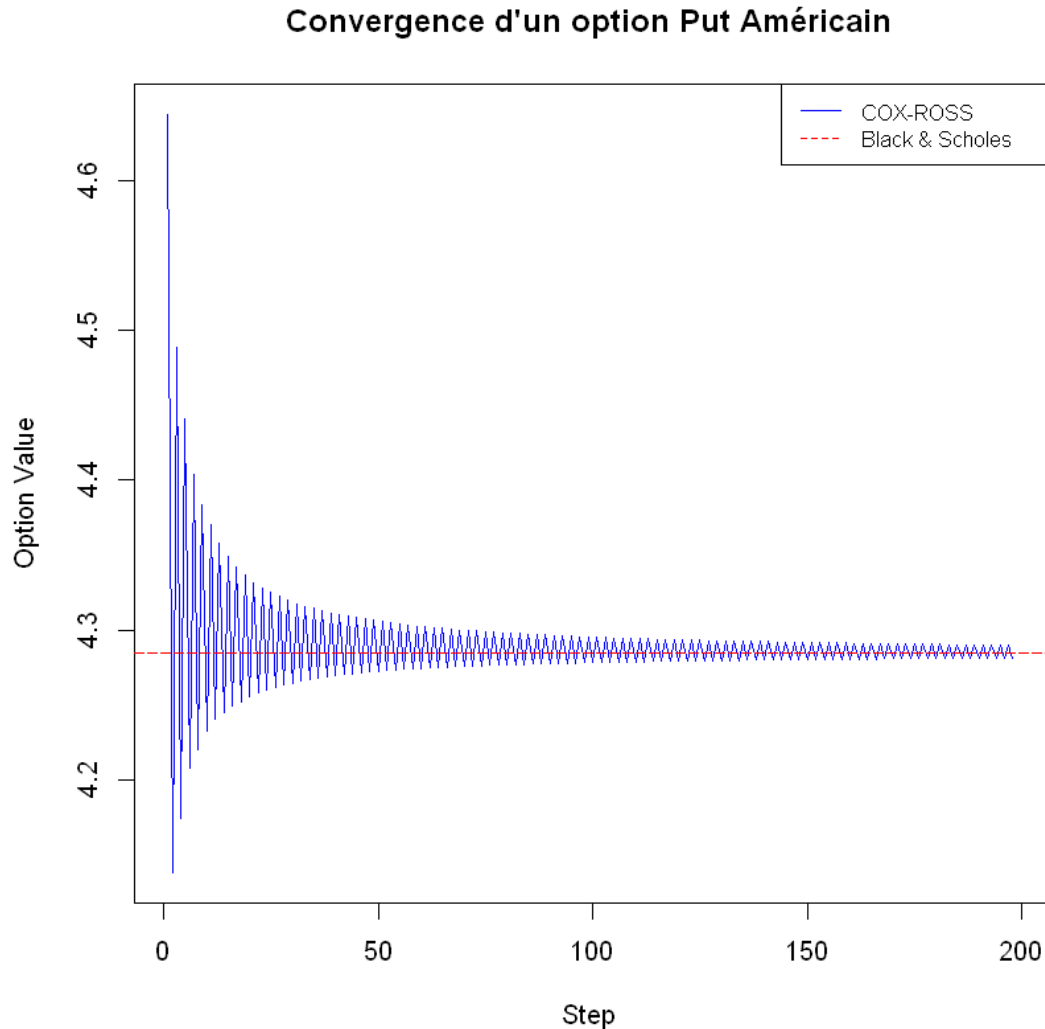


FIGURE 3.3 – Convergence modèle Cox Ross Runinstein vers le modèle Black & Scholes avec l'option Put

Afin d'étudier la vitesse de convergence, nous avons essayé d'augmenter le nombre de pas avec des valeurs différentes pour une option Call américain comme nous montre cette figure.

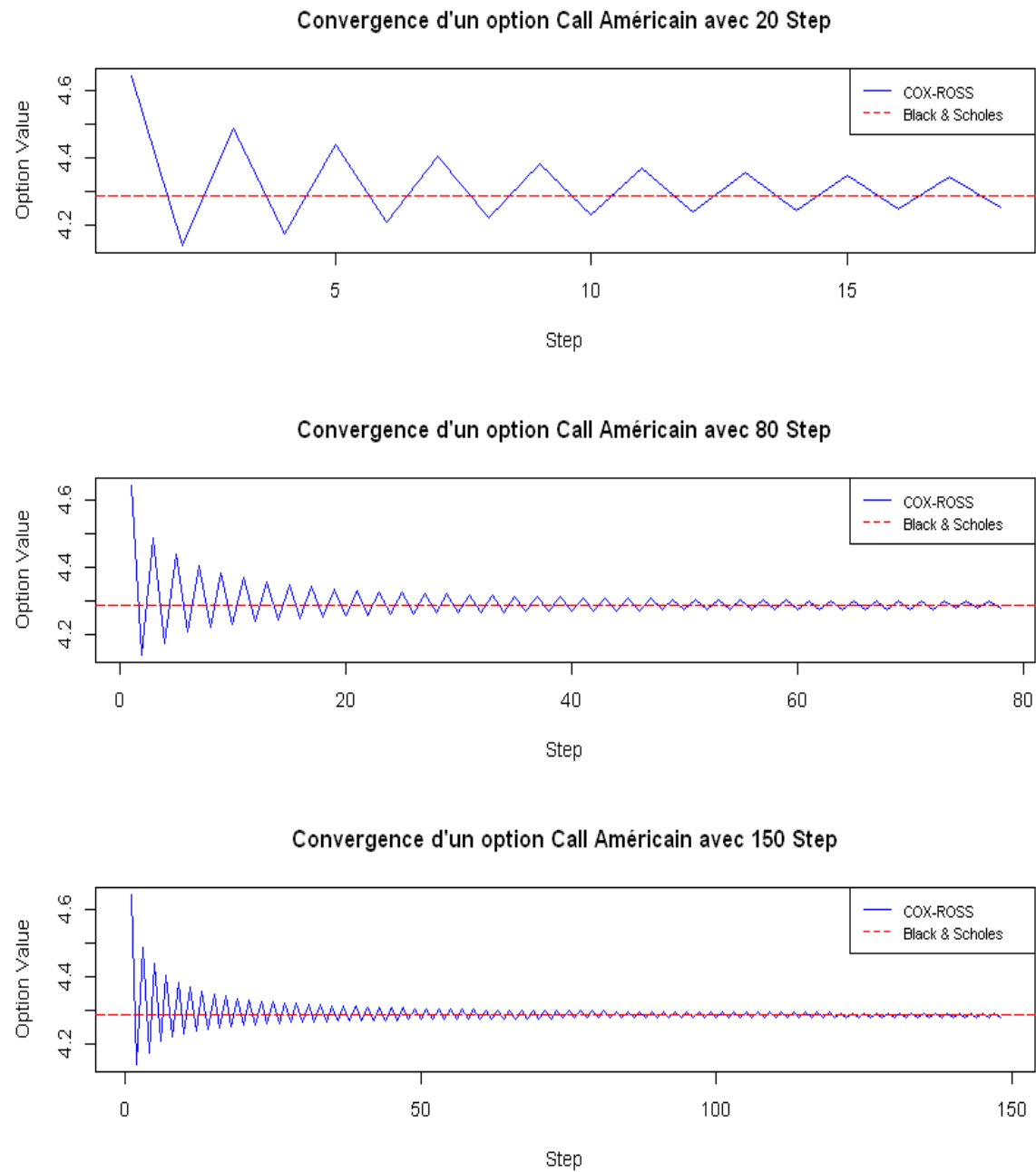


FIGURE 3.4 – Étude de la vitesse de convergence de modèle Cox Ross Runinstein vers le modèle Black & Scholes avec l'option call américain

On remarque d'après cette figure que si on augmente le nombre de pas le modelé CRR converge plus rapide au modèle de Black & Scholes et ses oscillations deviennent plus régulières.

Conclusion Générale

Dans le cadre de travail d'actualisation et de connaître la valeur de portefeuille de différents types des options ainsi que de bien préparer les stratégies de couvertures pour un trader dans une bourse, il existe plusieurs modèles qui ont pour objectif de répondre à ces besoins.

Parmi les modèles les plus utilisés, nous avons focalisé ce rapport sur le modèle discret Cox Ross Rubinstein et le modèle stochastique de Black & Scholes.

Dans un premier temps, nous avons étudié le modèle de Cox Ross Rubinstein, son principe de fonctionnement, les conditions qu'il faut être vérifiées tel que l'absence d'opportunité d'arbitrage ainsi que de définir l'arbre binomiale pour l'évolution de prix et de l'actif des différentes options. En outre, nous avons appliqué ce modèle numériquement en utilisant le langage R. Nous avons présenté l'arbre de prix ainsi que celui de l'actif pour les différentes options tel que call européenne, put américaine, option straddle De plus, nous avons étudié l'influence des différents facteurs sur le comportement du modèle CRR comme l'influence du taux d'intérêt r et la volatilité σ sur ce modèle discret.

Ensuite, nous avons étudié le modèle discret de Black & Scholes son dynamisme de fonction, les bases de ce modèle, la solution de ses équations et les différents indicateurs grecs qui sont très utiles pour une gestion plus précise du risque d'un portefeuille. Après, nous avons implémenté ce modèle dans R et essayé différents exemples des options tel que Call et Put.

Finalement, nous avons étudié la convergence de modèle Cox Ross Rubinstein en modèle de Black & Scholes en théorie et en pratique. Nous avons conclu que lorsque n augmente vers l'infini le modèle discret de CRR converge en le modèle stochastique de Black & Scholes.

En guise de conclusion, cette étude a nous permis de renforcer davantage nos connaissances dans ce domaine de modèles aléatoires pour l'actuariat et la finance et de les appliquer numériquement.