

Modèle de Cairns Blake Dowd

Groupe 8 :
Iheb Mensi

encadré par :
Mr.Anis Matoussi

11 mai 2020

Plan

1. Introduction
2. Étude de la population Britannique
3. Modèle Lee Carter
4. Modèle Cairns Blake Dowd
5. Projection des taux de mortalité et simulations des modèles
6. Comparaison de la Valeur Actuelle Probable d'une rente viagère à termes anticipés
7. Conclusion

Introduction

Les pays développés ont connu une augmentation de l'espérance de vie, ce qui pose un défi aux assureurs-vie en raison de son impact sur les coûts de santé.

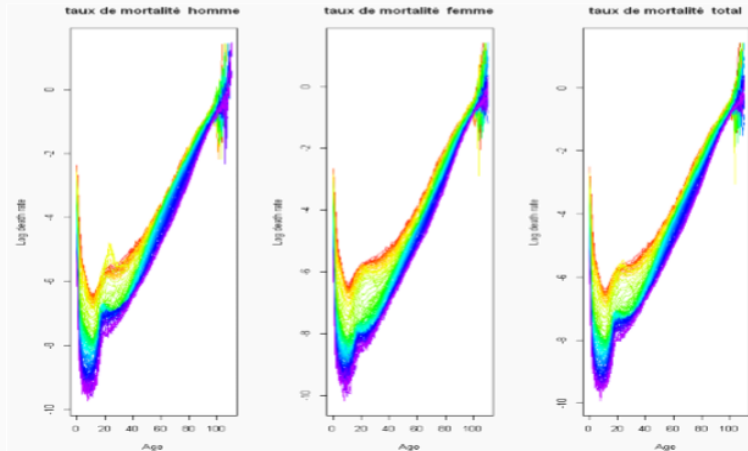
Les actuaires ont reconnu les problèmes causés par le vieillissement de la population et ont donc développé des techniques statistiques pour la modélisation et la projection des taux de mortalité.

Cette modélisation est définie par un ensemble de modèles stochastiques de mortalité qui forment une famille de modèles d'un intérêt particulier dans un cadre de gestion du risque.

Étude de la population Britanique

Étude de la population britannique

En utilisant les packages "StMoMo" et "Demography", on peut afficher et analyser le taux de mortalité de la population britannique importé de la base de données de mortalité humaine (HMD).



Modèle Lee Carter

Présentation du Modèle Lee Carter

Le modèle de Lee-Carter s'écrit sous la forme de :

$$\ln(\mu_{x,t}) = a_x + b_x * k_t + \epsilon_{x,t}$$

pour $t=1,..,n$ et $x = x_{min}, .., x_{max}$

Dans le but de rendre le modèle identifiable, il faut ajouter des contraintes sur les paramètres :

- $\sum_{k=1}^n k_t = 0$
- $\sum_{x=x_{min}}^{x_{max}} b_x = 1$

On obtient seulement $2m + n - 2$ paramètres avec $m = x_{max} - x_{min} + 1$ et n la dernière année étudiée.

Estimation des paramètres de Lee Carter

Le modèle Lee carter utilise la méthode des moindres carrées afin d'estimer les paramètres a_x , b_x et k_t en minimisant :

$$\min_{a_x, b_x, k_t} = \sum_{t=1}^n \sum_{x=x_{\min}}^{x_{\max}} (\ln(\mu_{x,t}) - a_x - b_x k_t)^2$$

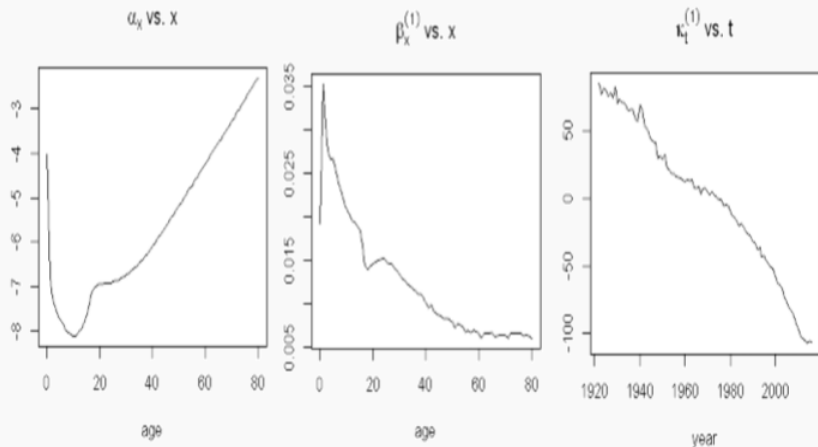
Le résultat des paramètres estimés :

- $\hat{a}_x = \frac{1}{n} \sum_{t=1}^n \ln(\mu_{x,t})$
- $\hat{b} = \frac{1}{\sum_{i=1}^m v_{1,i}} v_1 \in \mathbb{R}^m$
- $\hat{k} = \left(\lambda_1 \sum_{i=1}^m v_{1,i} \right) (u_1 - \bar{u}_{1n}) \in \mathbb{R}^n, \bar{u}_{1n} = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n u_{1j}$

- La nécessité d'appliquer la méthode de fermeture de table comme celle de Coale-Kisker
- Le modèle de Lee Carter ne vérifie pas l'hypothèse d'homoscédasticité des résidus en appliquant les moindres carrés pour le calcul des paramètres à estimer.

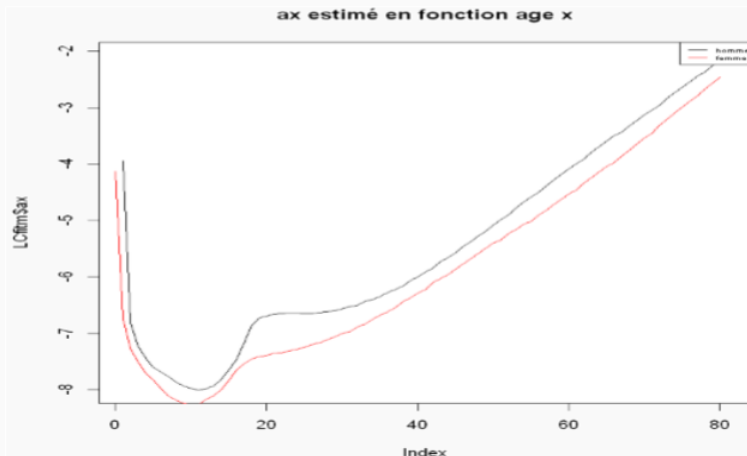
Application du modèle Lee Carter

En utilisant le package StMoMo, nous avons appliqué le modèle Lee Carter sur la population britannique. Voici les résultats obtenues :



Application du modèle Lee Carter

Comparaison de taux moyen de mortalité a_x entre les femmes et les hommes de la population britannique :



Modèle Cairns Blake Dowd

Présentation du modèle Cairns-Blake-Dowd

Le modèle à deux facteurs CBD présenté par Cairns et al est l'un des variantes les plus importantes du modèle Lee-Carter.

Il repose sur la linéarité du logit des probabilités de décès à un an aux âges plus avancés.

Le modèle s'écrit sous la forme :

$$\log(q_{x,t}) = \kappa_t^{(1)} + (x - \bar{x}) \kappa_t^{(2)}$$

avec les paramètres de modulation de l'âge prédéfinis β :

$$\beta_x^{(1)} = 1 \text{ et } \beta_x^{(2)} = (x - \bar{x})$$

L'interprétation des paramètres est la suivante :

- $\kappa_t^{(1)}$, est la tendance dans le temps du niveau de la mortalité pour l'âge moyen des données.
- $\kappa_t^{(2)}$, considère l'évolution du taux d'accroissement de la mortalité avec l'âge.

- Le modèle CBD met à notre disposition des facteurs qui, par construction, ne varient pas quand nous ajoutons des observations, contrairement aux facteurs du modèle Lee Carter.
- Le modèle CBD utilise des mesures des probabilités de survie (q) plutôt que des mesures du taux de mortalité (m) comme dans les modèles de la famille Lee-Carter.

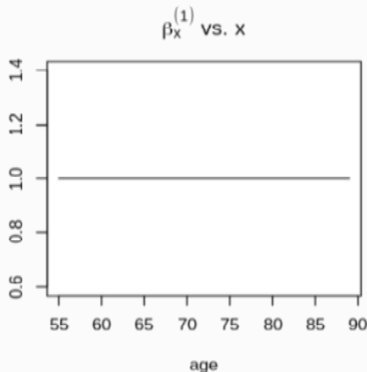
Le choix de la plage d'âge à partir de laquelle on doit générer les prévisions :

- Le modèle CBD est utile lorsqu'on s'intéresse aux prédictions de mortalité des populations qui ont atteint l'âge normal de la retraite

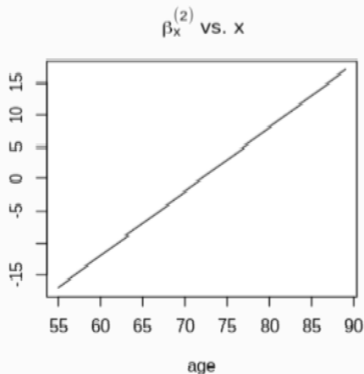
Nous nous concentrons sur l'intervalle du 55 ans à 89 ans, comme le modèle CBD a été spécialement conçu pour s'adapter aux âges supérieurs.

Application du modèle Cairns Blake Dowd

Les deux paramètres de modulation de l'âge prédéfini $\beta_x^{(1)}$ et $\beta_x^{(2)}$



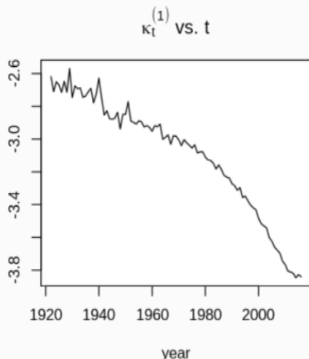
Premier paramètre de modulation de l'âge prédéfini $\beta_x^{(1)}$



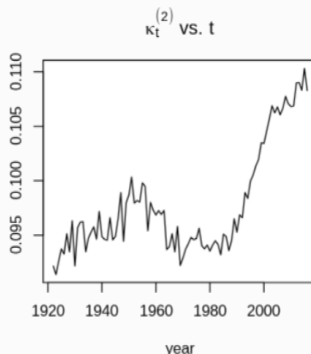
Deuxième paramètres de modulation de l'âge prédéfini $\beta_x^{(2)}$

Application du modèle Cairns Blake Dowd

l'évolution dans le temps des deux facteurs $\kappa_t^{(1)}$ et $\kappa_t^{(2)}$ du modèle CBD pour les hommes de la population Britannique entre 1922 et 2016



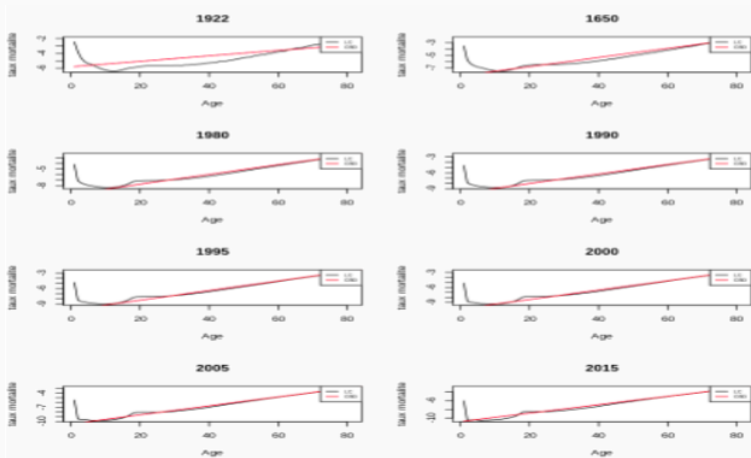
l'évolution dans le temps du facteur $\kappa_t^{(1)}$ du modèle CBD pour les Hommes de la population britannique entre 1922 et 2016



l'évolution dans le temps du facteur $\kappa_t^{(2)}$ du modèle CBD pour les Hommes de la population britannique entre 1922 et 2016

log taux de mortalité

log taux de mortalité en fonction d'âge pour les deux modèles
lee-Carter et Cairns Blake-Dowd pour les années
1922,1950,1980,1990,1995,2000,2005 et 2015



Projection des taux de mortalité et simulations des modèles

Projection des taux de mortalité

PROJECTION TAUX DE MORTALITÉ PAR LE MODÈLE LEE-CARTER

Les deux paramètres a_x et b_x des modèles dépendent seulement de l'âge des individus. L'évolution de la mortalité dans le temps est modélisée par la série temporelle k_t . la projection est faite par une modélisation ARIMA à l'aide de la fonction *forecast()*

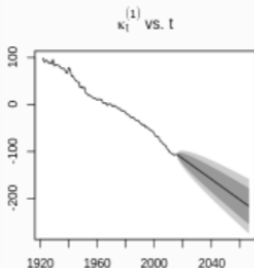


FIGURE 1 – Trajectoires de k_t estimé par le modèle Lee-Carter modélisées par ARIMA pour la population féminine

Projection des taux de mortalité

PROJECTION TAUX DE MORTALITÉ PAR LE MODÈLE CAIRNS BLAKE DOWD

la projection est faite par une modélisation ARIMA des deux facteurs $\kappa_t^{(1)}$ et $\kappa_t^{(2)}$ du modèle CBD pour les femmes.

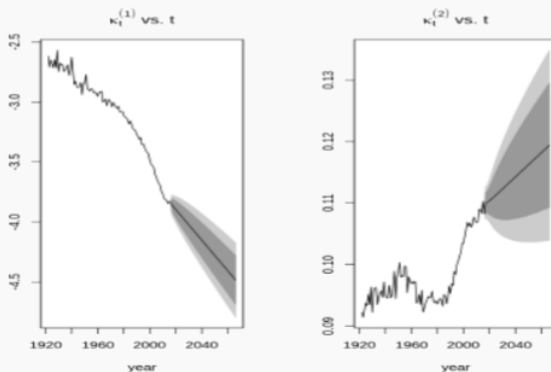
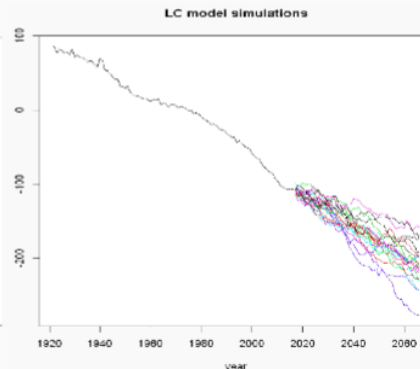
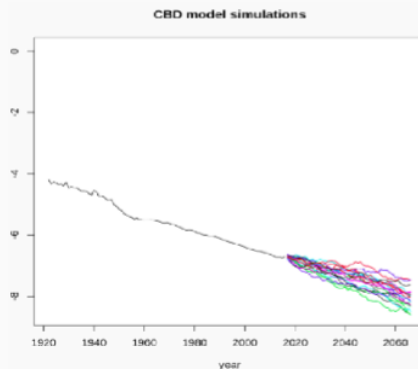


FIGURE 2 – Trajectoires de k_t estimé par le modèle CBD modélisées par ARIMA pour la population féminine

Simulations

simulation de 20 trajectoires selon les modèles **Lee-carter** et **CBD** des femmes âgées entre 55 et 89 pour les prochaines 50 années.



Comparaison de la Valeur Actuelle Probable d'une rente viagère à termes anticipés

La Valeur Actuelle Probable d'une rente viagère à termes anticipés à l'aide de Lee Carter

- Pour une série de flux connus F_0, F_1, \dots une série de conditions de paiements aléatoires C_0, C_1, \dots et un facteur d'actualisation $0 < v < 1$, la **valeur actuelle Probable** est

$$VAP = \mathbb{E}(\mathbb{V}\mathbb{A}) = \sum_{k=0}^{\infty} F_k v^k P(C_k)$$

- **La rente viagère à termes anticipés** se définit comme une série annuelle de flux de 1 euro jusqu'au décès de l'individu à commencer d'aujourd'hui. Sa valeur est

$$VAP(\text{rente}) = \sum_{k=0}^{\infty} v^k {}_k p_x = \ddot{a}_k$$

La Valeur Actuelle Probable d'une rente viagère à termes anticipés à l'aide de Lee Carter

Pour une rente viagère à termes anticipés contractée en 2020 par un assuré de 65 ans la cohorte est 2020- 65=1955.

- Pour calculer la valeur probable d'une rente on va se servir des fonctions **mx2qx** et **probs2lifetable** implémentées dans le package **lifecontingencies**.
- En implémentant la fonction **axn()**, on a obtenus les résultats suivants pour les différents cas :
 - **Total** : VAP =11.2899
 - **Femme** : VAP =11.9191
 - **Homme** : VAP =10.5147

La Valeur Actuelle Probable d'une rente viagère à termes anticipés à l'aide de Cairns Blake Dowd

- La cohorte est la même est 2020-65=1955.
- En procédant de la même manière, nous avons obtenus les résultats suivants à l'aide de Cairns blake :
 - Cas serie Totale : $VAP=1.905670$
 - Cas serie Femme : $VAP=11.905$
 - Cas serie Homme : $VAP=10.596$

Comparaison entre les deux modèles

- On trouve presque les mêmes valeurs avec une différence négligeable.
- En se référant à la comparaison du comportement de log taux moyen de mortalité de chaque modèle pour les différentes années on peut conclure qu'ils ont des valeurs similaires pour les personnes qui ont atteint l'âge de la retraite.
- La VAP des femmes est toujours supérieure à celle des hommes.

Conclusion

Le présent projet représente une occasion pour étudier et mettre en valeur les deux modèles les plus adoptés par les acteurs dans le domaine, pour l'estimation du taux de mortalité.

Le travail a été reparté en deux grandes parties, qui définissent les deux modèles utilisés pour estimer et projeter le taux de mortalité de la population Britannique, ainsi que leurs champs d'application. Ce travail nous a permis de mieux comprendre les notions théoriques et le calcul de l'actuariat vie à travers les études faites à ce sujet.

Merci pour votre attention