

ESPRIT - LE MANS UNIVERSITÉ

---

## Modèle de Cairns Blake Dowd

---

*Groupe 8*

*Élaboré par :*

Iheb MENSI

*Enseignant :*

Mr. Anis Matoussi

# Table des matières

<b>1</b>	<b>Modèle Lee Carter</b>	<b>1</b>
1.1	Introduction	1
1.2	Présentation du modèle lee carter	1
1.3	Estimation des paramètres de Lee Carter	2
1.4	Limite du modèle lee carter	3
1.5	Conclusion	3
<b>2</b>	<b>Le modèle de Cairns Blake Dowd</b>	<b>4</b>
2.1	Introduction	4
2.2	Présentation du modèle Cairns-Blake-Dowd	4
2.3	Les indices de mortalité CBD :	4
2.3.1	Les propriétés des indices de mortalité CBD	5
2.4	Les avantages du modèle CBD	5
2.5	Conclusion	6
<b>3</b>	<b>Estimation et projection de la mortalité de la population britannique à l'aide des deux modèles : Lee-Carter et Cairns Blake Dowd</b>	<b>7</b>
3.1	Introduction	7
3.2	La Base de données de mortalité humaine	7
3.3	Étude de la population britannique	8
3.3.1	le package demography	8
3.3.2	Analyse de la mortalité de la population britannique	8
3.4	Application du modèle Lee carter	10
3.5	Application du modèle Cairns Blake Dowd (CBD)	12
3.5.1	Interprétation des deux facteurs $\kappa_t^{(1)}$ et $\kappa_t^{(2)}$ du modèle CBD	14
3.5.2	Log taux de mortalité estimés par les modèles Lee-carter et CBD	15
3.6	projection des taux mortalité implémentée dans StMoMo pour les deux modèles	16
3.6.1	Projection selon une marche aléatoire avec dérive	16
3.6.2	Projection par une modélisation ARIMA	18
3.7	Simulations	19
3.8	Comparaison de la Valeur Actuelle Probable d'une rente viagère à termes anticipés	20
3.8.1	la Valeur Actuelle Probable d'une rente viagère à termes anticipés à l'aide de Lee Carter	20
3.8.2	la Valeur Actuelle Probable d'une rente viagère à termes anticipés à l'aide de Cairns Blake Dowd	21
3.9	Conclusion	22

# Introduction générale

De nos jours, l'enjeu du taux de mortalité a une immense importance pour les assureurs et le calcul actuariel surtout que depuis la fin de la seconde guerre mondiale, la durée de vie des hommes et des femmes augmente progressivement. Ce phénomène est à cause de plusieurs facteurs tel que l'amélioration de la service de la santé. Il est vrai que ce fait démographique est un signe de progrès. Cependant, il pose une problématique d'assurance majeure, celle de la prévision à long terme de la longévité humaine ainsi que estimer le taux de mortalité afin que les sociétés d'assurance puissent tarifier la rente de ses portefeuilles, évaluer des titres liés à la mortalité ainsi que calculer la valeur actuelle probable pour une rente viagère.

Après étude, les actuaires et les démographes ont consacré une grande attention au développement de techniques statistiques pour la modélisation et la projection des taux de mortalité.

Cette modélisation des taux de mortalité est définie par un ensemble de modèles stochastiques de mortalité qui forment une famille de modèles d'un intérêt particulier dans un cadre de gestion du risque. Les dits modèles reposent notamment sur l'hypothèse d'une continuité entre l'évolution passée de la mortalité et son évolution future. De ce fait, il est possible de produire une distribution de prévisions, et pas uniquement une valeur déterministe. Par conséquent, il est possible d'avoir une certaine mesure du risque de longévité en regardant la distribution de la longévité future au moyen de simulations de Monte-Carlo.

Le présent rapport a pour objet de définir les deux modèles CBD et Lee Carter utilisés dans le cadre de l'estimation et la projection de la mortalité de la population Britannique.

Le travail sera reparté en trois grands chapitres.

Dans le premier chapitre, nous allons présenter le modèle Lee Carter, l'estimation de ses paramètres et ses limites.

Dans le deuxième chapitre, nous allons présenter le modèle Cairns Blake Dowd, ses indices de mortalité ainsi que ses avantages.

Concernant le troisième chapitre, nous allons faire une estimation et une projection de la mortalité de la population Britannique à l'aide des deux modèles définis ci-haut.

Ce dernier chapitre sera composé de plusieurs sous-chapitres plus détaillés, faisant allusion à la présentation de la base de données de mortalité humaine, à l'étude de la population Britannique, ensuite, à l'application du modèle Lee Carter et celui de Cairns Blake Dowd, puis, à la projection des taux de mortalité, et enfin, à une simulation et une comparaison de la valeur actuelle probable d'une rente viagère à termes anticipés.

# Chapitre 1

## Modèle Lee Carter

### 1.1 Introduction

Les données sur la mortalité montrent que la mortalité diminue à tous les âges avec un comportement différent selon les âges et les pays. En effet, la mortalité à tous les âges montre une baisse continue à travers le monde.

De plus, La prévision de la mortalité apparaît en effet comme un facteur principal dans différents domaines des marchés financiers et d'assurance comme la tarification de la rente, l'évaluation des titres liés à la mortalité et le calcul de la valeur actuelle probable.

Dans ce contexte, Lee-Carter a proposé en 1992 un modèle qui devient largement utilisé pour prévoir le taux de mortalité et de construire une table de mortalité précisément pour chaque cohorte spécifique.

Ce premier chapitre est consacré pour définir le modèle du Lee carter, l'estimation des paramètres de ce modèle et de présenter les limites du modèle Lee Carter.

### 1.2 Présentation du modèle lee carter

Le modèle Lee Carter a été proposé en 1992 dans le but de la prévision du taux de mortalité  $\mu_{x,t}$ . Il a été utilisée initialement sur des données américaines, qui est devenue rapidement un standard. La modélisation retenue de Lee Carter pour le taux instantané de mortalité est la suivante [5] :

$$\ln(\mu_{x,t}) = a_x + b_x * k_t + \epsilon_{x,t}$$

pour  $t=1, \dots, n$  et  $x = x_{min}, \dots, x_{max}$

où :

- $\ln(\mu_{x,t})$  représente le taux instantané de mortalité à la date  $t$  ( en année ) pour l'âge  $x$ .
- $a_x$  est la composante spécifique à l'âge  $x$ , elle s'interprète comme la valeur moyenne de  $\ln(\mu_{x,t})$  au cours du temps.
- $b_x$  est la composante traduisant la sensibilité de la mortalité instantanée par rapport à l'évolution temporelle  $k_t$  avec :

$$b_x = \frac{\partial \ln(\mu_{x,t})}{\partial t} = \frac{b_x * \partial k_t}{\partial t}$$

- $k_t$  décrit l'évolution générale de la mortalité en fonction de la date  $t$
- $\epsilon_{x,t}$  représente une variable aléatoire aléatoire indépendants et identiquement distribués centrés et de variance commune  $\sigma^2$ .

Dans le but de rendre le modèle identifiable, il faut ajouter des contraintes sur les paramètres .En général, on retient les contraintes suivantes [5] :

$$\sum_{k=1}^n k_t = 0$$

et

$$\sum_{x=x_{min}}^{x_{max}} b_x = 1$$

De plus, on obtient seulement  $2m + n - 2$  paramètres avec  $m = x_{max} - x_{min} + 1$  et  $n$  la dernière année étudiée [5].

### 1.3 Estimation des paramètres de Lee Carter

Le modèle Lee carter utilise la méthode des moindres carrées afin d'estimer les paramètres  $a_x$ ,  $b_x$  et  $k_t$  en minimisant [5] :

$$\min_{a_x, b_x, k_t} = \sum_{t=1}^n \sum_{x=x_{min}}^{x_{max}} (\ln(\mu_{x,t}) - a_x - b_x k_t)^2$$

**Étape 1 :**

En utilisant la condition  $\sum_{k=1}^n k_t = 0$ , la valeur de  $a_x$  à estimer devient [5] :

$$\hat{a}_x = \frac{1}{n} \sum_{t=1}^n \ln(\mu_{x,t})$$

**Étape 2 :**

Afin d'estimer les paramètres  $k_t$  et  $b_x$ , on construit la matrice  $Z = (z_{x,t})$  définie par [5] :

$$z_{x,t} = \ln(\hat{\mu}_{x,t}) - \hat{a}_x$$

Pour chercher les valeurs de  $b_x$  et  $k_t$ , on utilise aussi la méthode des moindres carrées minimisant donc :

$$\Delta(b_x, k_t) = \sum_{t=1}^n \sum_{x=x_{min}}^{x_{max}} (z_{x,t} - b_x k_t)^2$$

La résolution passe par la décomposition en valeurs propres (SVD) de la matrice  $Z$  pour l'exprimer sous la forme [5] :

$$Z = \sum_{i=1}^d \sqrt{\lambda_i} v_i u_i^T$$

avec :

- $d$  est le nombre de valeurs propres distincts.
- $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots$  les valeurs propres ordonnées de  $Z^T \times Z \in R^{n \times n}$
- $u_i \in R^n$  les vecteurs propres unitaires de  $Z^T \times Z \in R^{n \times n}$
- $v_i$  les vecteurs propres de  $Z^T Z \in R^{m \times m}$

En utilisant les contraintes  $\sum_{k=1}^n k_t = 0$  et  $\sum_{x=x_{min}}^{x_{max}} b_x = 1$ , on obtient [5] :

$$\hat{b} = \frac{1}{\sum_{i=1}^m v_{1,i}} v_1 \in R^m$$

$$\hat{k} = \left( \lambda_1 \sum_{i=1}^m v_{1,i} \right) (u_1 - \bar{u}_{1n}) \in R^n, \bar{u}_{1n} = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n u_{1j}$$

**Étape 3 :**

On peut considérer cette étape comme une étape facultative. On peut en effet ajuster  $k_t$  pour que le nombre total de décès enregistrés chaque année corresponde à celui prédit par le modèle, étant donnés les  $a_x$  et  $b_x$ . [8]

Ainsi, on cherche les  $\hat{k}_t$  vérifiant :

$$\Delta_t(k) = \sum_{x=x_{min}}^{x_{max}} d_{x,t} - \sum_{x=x_{min}}^{x_{max}} E_{x,t} \exp(\hat{a}_x + \hat{b}_x k)$$

avec  $\forall t = 1, \dots, n$  :

$$\sum_{x=x_{min}}^{x_{max}} d_{x,t} = \sum_{x=x_{min}}^{x_{max}} E_{x,t} \exp(\hat{a}_x + \hat{b}_x k)$$

On peut facilement obtenir une nouvelle estimation des paramètres à l'aide de méthodes de Newton ou quasi-Newton. Afin de vérifier les contraintes du modèle de Lee-Carter, les estimations retenues pour les paramètres  $k_t$  et  $a_x$  sont [8] :

$$k_t^* = \hat{k}_t - \bar{k} \quad a_x^* = \hat{a}_x + \hat{b}_x * \bar{k}$$

où  $\bar{k}$  désigne la moyenne des  $\hat{k}_t$  dans le temps.

## 1.4 Limite du modèle lee carter

On remarque que les taux de mortalité lissés à partir des données brutes sont directement obtenus par la méthode de lissage de Lee-Carter, mais uniquement pour les âges inférieurs à 80 ans même si on essaye avec d'autres méthodes de lissage tel que Spline. En effet, pour les âges supérieurs ou égaux à 80 ans, comme l'échantillonnage n'est pas assez conséquent, on ne peut pas les obtenir directement par le modèle de Lee-Carter. [8]

On peut alors faire recours à une méthode de fermeture des tables, telle que celle proposée par Coale et Kisker. C'est une méthode d'extrapolation de Coale-Kisker pour obtenir les taux de mortalité aux âges avancés. Le principe est de construire les taux de mortalité aux grands âges à partir des taux lissés par Lee-Carter aux âges de 65 et 80 ans.

Cette méthode consiste à extrapoler les taux de mortalité aux grands âges (jusqu'à  $x = 110$  ans par exemple) en se basant sur la formule [5] :

$$\hat{\mu}_x = \hat{\mu}_{65} * \exp(g_x(x - 65))$$

Coale et Kisker ont remarqué empiriquement que les courbes des  $g_x$  possèdent en général un pic aux alentours de 80 ans avant de décroître linéairement. Ils ont par conséquent proposé l'équation ci-dessous [5] :

$$g_x = g_{80} + s(x - 80), x \geq 80$$

Afin d'extrapoler au-delà de 80 ans les taux instantanés de mortalité, on peut alors utiliser la formule suivante :

$$\hat{\mu}_x = \hat{\mu}_{x-1} * \exp(g_{80} + s(x - 65))$$

De plus, Le modèle repose sur les moindres carrés ordinaires pour estimer ses paramètres, ce qui nécessite que les résidus vérifient l'hypothèse d'homoscédasticité. Or, le modèle de Lee-Carter ne prend pas en compte l'hétéroscédasticité des résidus. [8]

## 1.5 Conclusion

Tout au long de ce chapitre, nous avons essayé en premier temps de présenter le modèle de Lee-Carter et ensuite nous avons développé le calcul de ses paramètres et nous avons terminé ce chapitre par une description du limite du modèle de Lee-Carter.

Dans le chapitre suivant, nous allons présenter le modèle de Cairns Blake Dowd et d'annoncer ses avantages par rapport au Lee-Carter.

## Chapitre 2

# Le modèle de Cairns Blake Dowd

### 2.1 Introduction

L'intérêt pour la modélisation de l'espérance de vie d'une population ne constitue pas une affaire récente. Ce qui est plus récent toutefois est l'intérêt de modéliser l'espérance de vie à un âge relativement avancé, en particulier à l'âge normal de la retraite.

La modélisation des taux de mortalité, et leur importance pour la santé financière des régimes de retraite publics et privés, était à l'origine d'une nouvelle littérature en économie financière, en assurance et en démographie.

Pour y arriver, un modèle de mortalité qui sort du paradigme Lee-Carter est celui de Cairns Blake et Dowd (ou modèle CBD ci-après), est utilisé pour prévoir le taux de mortalité et construire une table de mortalité.

A travers de ce chapitre, nous allons présenter le modèle CBD, ses indices de mortalité et les avantages y relatives.

### 2.2 Présentation du modèle Cairns-Blake-Dowd

Le modèle à deux facteurs Cairns-Blake-Dowd (CBD) présenté par Cairns et al est l'un des variantes les plus importantes du modèle Lee-Carter. Le modèle CBD repose sur la linéarité du logit des probabilités de décès à un an aux âges plus avancés. Plus précisément, il suppose que, pour une année, le logit de la probabilité de décès d'un an est une fonction linéaire de l'âge, et traite les paramètres d'interception et de pente sur plusieurs années comme des processus stochastiques. [13] Cairns et al proposent une structure prédictive à deux termes âge-période (N=2) avec paramètres de modulation de l'âge prédéfinis  $\beta$  :

$$\beta_x^{(1)} = 1 \text{ et } \beta_x^{(2)} = (x - \bar{x})$$

Ainsi, le prédicteur du modèle CBD est donné par :

$$\log(q_{x,t}) = \kappa_t^{(1)} + (x - \bar{x}) \kappa_t^{(2)}$$

La fonction de lien  $\text{logit}(x)$  est le log du rapport de cote,  $\log(\frac{x}{1-x})$  et  $\text{logit}(q_x)$  est linéaire pour les âges supérieurs à 50-60 ans environ.

On constate que les paramètres estimés sont ceux d'une tendance linéaire sur l'âge. Cela revient à l'idée d'une loi de Gompertz, mais sur le  $\text{logit}(q_{x,t})$ . Ceci distingue singulièrement le modèle CBD du modèle LC puisque ce dernier n'impose pas de valeurs à  $\beta_x^{(2)}$  contrairement au premier. [12]

Le modèle CBD ne présente pas de problèmes d'identification, par conséquent, l'ensemble des contraintes des paramètres est vide. Dans l'objectif d'estimer le paramètre du modèle CBD, nous pouvons supposer une distribution binomiale des décès à l'aide d'une fonction de lien logit ciblant les probabilités de décès d'un an  $q_{x,t}$ .

[13]

### 2.3 Les indices de mortalité CBD :

Il existe deux indices de mortalité CBD : [4]

- Le premier indice de mortalité CBD,  $\kappa_t^{(1)}$ , représente le niveau de la courbe de mortalité (la courbe de  $q_{x,t}$  en année  $t$ ) après une transformation logit. Une réduction de  $\kappa_t^{(1)}$ , signifie un décalage de la courbe de

mortalité transformée par logit, représente une amélioration globale de la mortalité.

- Le deuxième indice de mortalité CBD,  $\kappa_t^{(2)}$ , représente la pente de la mortalité transformée par logit. Une augmentation de  $\kappa_t^{(2)}$ , c'est à dire, une augmentation de la pente de mortalité transformée par logit, signifie que la mortalité (en échelle logit) aux âges plus jeunes (en dessous de l'âge moyen) s'améliore plus rapidement qu'à des âges plus avancés (au-dessus de l'âge moyen).

Une courbe de mortalité transformée en logit avec n'importe quelle pente et niveau sera représentée probablement par les dits indices de mortalité CBD.

### 2.3.1 Les propriétés des indices de mortalité CBD

Les indices de mortalité CBD satisfont aux deux critères suivants pour les indices de mortalité basés sur un modèle : [4]

1. Ils peuvent représenter le modèle d'âge variable de l'amélioration de la mortalité, plutôt que le niveau global de mortalité uniquement.
2. Ils sont aussi facilement interprétables.

Outre ces deux critères, il existe d'autres critères souhaitables, que les indices de mortalité, devraient remplir.

- Sans ambiguïté :

La population sur laquelle sont basés les indices de mortalité doit être définie en détail. Ce critère sera facile à remplir si les indices de mortalité CBD sont basés sur les principales populations qui contiennent des compositions bien documentées.

- Mesurable :

L'expérience de mortalité de la population de référence doit pouvoir être mesurée.

Le critère est par défaut satisfait, si les indices de mortalité CBD sont basés sur des populations nationales.

- Stable et spécifié à l'avance :

Les indices doivent être stables et définis préalablement.

Ce critère est rempli par les indices de mortalité CBD, à moins qu'un changement de données n'est intervenu à l'avenir.

- Rapide et régulier :

Les données de mortalité pour la population de référence devraient être disponibles en temps opportun, pour que les valeurs puissent être mises à disposition selon un calendrier préétabli.

Ce critère est lié plus au fournisseur de données, que la façon dont les indices de mortalité sont construits.

## 2.4 Les avantages du modèle CBD

Parmi les avantages du modèle CBD, on cite principalement : [1]

- Le modèle CBD met à notre disposition des facteurs qui, par construction, ne varient pas quand nous ajoutons des observations.

Ce modèle est différent aux modèles de type Lee-Carter dont la valeur des facteurs change à chaque fois que nous ajoutons une année de données.

- Le modèle CBD utilise des mesures des probabilités de survie ( $q$ ) plutôt que des mesures du taux de mortalité ( $m$ ) comme dans les modèles de la famille Lee-Carter.

Par conséquent, le modèle CBD est particulièrement utile si on s'intéresse aux prédictions de mortalité des



populations qui ont atteint l'âge normal de la retraite.

Pour ces populations, le modèle est assez performant si on s'intéresse aux projections des taux de survie pour les 10 prochaines années.

La performance du modèle diminue rapidement lorsqu'on tente de projeter encore plus loin les probabilités de décès à cause d'un risque de modèle. [\[1\]](#)

## 2.5 Conclusion

À travers de ce chapitre, nous avons présenté le modèle de Cairns Blake Dowd, développé le calcul de ses paramètres.

Nous avons aussi défini les indices de mortalité relatifs à ce modèle, ainsi que leurs propriétés.

Pour achever, nous avons soulevé les avantages y relatifs.

En ce qui concerne le chapitre suivant, une présentation sera faite sur le travail à notre charge qui consiste à estimer et projeter la mortalité de la population Britannique à l'aide des deux modèles Lee-Carter et Cairns Blake Dowd.

## Chapitre 3

# Estimation et projection de la mortalité de la population britannique à l'aide des deux modèles : Lee-Carter et Cairns Blake Dowd

### 3.1 Introduction

Après avoir présenter les notions théoriques de modèle Lee Carter et Cairns Blake Dowd, ce dernier chapitre a pour objectif d'exposer le travail réalisé en présentant les réponses et les interprétations concernant ce projet : la présentation de la base de données de mortalité humaine, l'estimation des paramètres de Lee Carter et Cairns Blake Dowd pour la population britannique, la projection dans les prochaines années du taux de mortalité pour la population britannique ainsi que le calcul de la valeur actuelle probable d'une rente viagère

### 3.2 La Base de données de mortalité humaine

La base de données de mortalité humaine est une base prédéfinies destinées aux chercheurs, étudiants et pour tous personnes intéressées à étudier l'histoire de la longévité humaine. Cette base de HMD contient des calculs originaux des taux de mortalité et des tables de mortalité pour les populations nationales selon les pays ou les régions.

En effet, les données de cette base d'entrée sont les chiffres de décès tirés des statistiques de l'état civil, les chiffres de naissance, les chiffres du recensement ainsi que les estimations de la population provenant de diverses sources. Les tables de mortalité sont calculées à l'aide d'expositions de population harmonisées ajustées [6].

Le calcul du taux de mortalité se fait en suivant cette formule :

$$\mu_{x,t} = \frac{d_{x,t}}{E_{x,t}}$$

avec :

- $d_{x,t}$  est le nombre de décès à l'âge  $x$  et année  $t$ .
- $E_{x,t}$  est le nombre total de vies vécues entre les âges  $x$  et  $x + 1$ .

Jusqu'à présent, la base de données de mortalité humaine contient des données détaillées sur la population et la mortalité pour les 41 pays [6].

Pour ce projet, on s'intéresse pour étudier, estimer et projeter la mortalité de la population britannique (hommes et femmes).

## 3.3 Étude de la population britannique

### 3.3.1 le package demography

Afin d'accéder aux données de la base de données de mortalité humaine pour la population britannique, nous avons utilisé le package "demography".

Demography est une package R qui permet de fournir des fonctions pour l'analyse démographique tels que les calculs de la durée de vie, la modélisation de Lee-Carter, l'analyse des données fonctionnelles des taux de mortalité et la prévision stochastique de la population [7].

En utilisant la commande "**hmd.mx**", nous avons obtenus les données de la population britannique. Il faut noter qu'il faut avoir une compte de l'organisation "mortality.org" afin de télécharger ces données.

Après télécharger ces données de la population britannique, nous avons remarqué qu'elles contiennent 3 séries : hommes , femme et la population totale. Les années de l'étude dans cette base est entre l'intervalle t de 1922 jusqu'à 2016 pour les âges x de 0 à 110 comme la figure ci-dessous montre :

```
Mortality data for U.K  
Series: female male total  
Years: 1922 - 2016  
Ages: 0 - 110
```

FIGURE 3.1 – Données de la mortalité de la population britannique

### 3.3.2 Analyse de la mortalité de la population britannique

Le package "Demography" permet aussi de réaliser des graphiques pour le taux de mortalité en fonction d'âge pour chaque type de série (homme, femme ou total) :

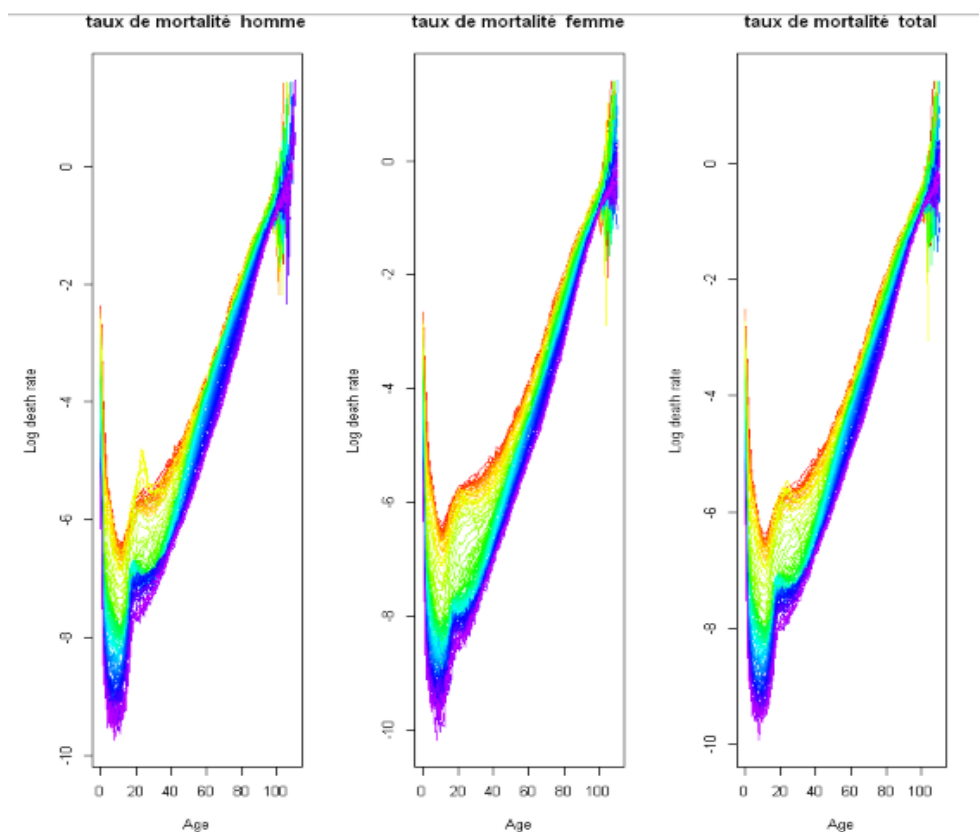


FIGURE 3.2 – taux de mortalité en fonction d'âge (hommes,femmes,total)

On note que les courbes en rouge présentent les années les plus anciens et les courbes en violet présentent les années les plus récent étudié dans la base de donnée britannique [7]. On peut conclure alors que le taux de mortalité à une tendance de se baisser pour tous les âges et cela peut être le résultat de l'amélioration des services de la santé durant ses années.

En visualisant le taux de mortalité pour la population britannique, on remarque que le taux de mortalité des hommes de la population britannique présente des petites pics pour les âges entre 20-40 et cela peut être expliqué par la mortalité fort pendant les périodes du guerre mondial comme nous montre la figure ci-dessous :

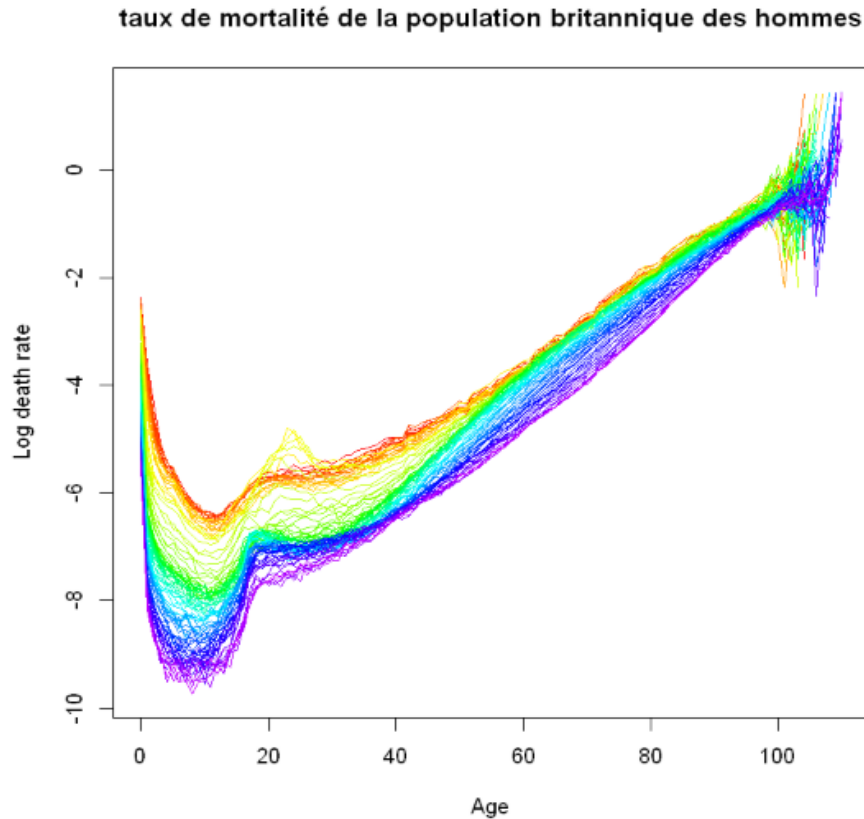


FIGURE 3.3 – taux de mortalité de la population britannique des hommes

De plus, on peut afficher le taux de mortalité en fonctions des années pour tous les âges comme nous avons présenté dans la figure ci-dessous ( les courbes en violet représentent la population moins âgées) [7] :

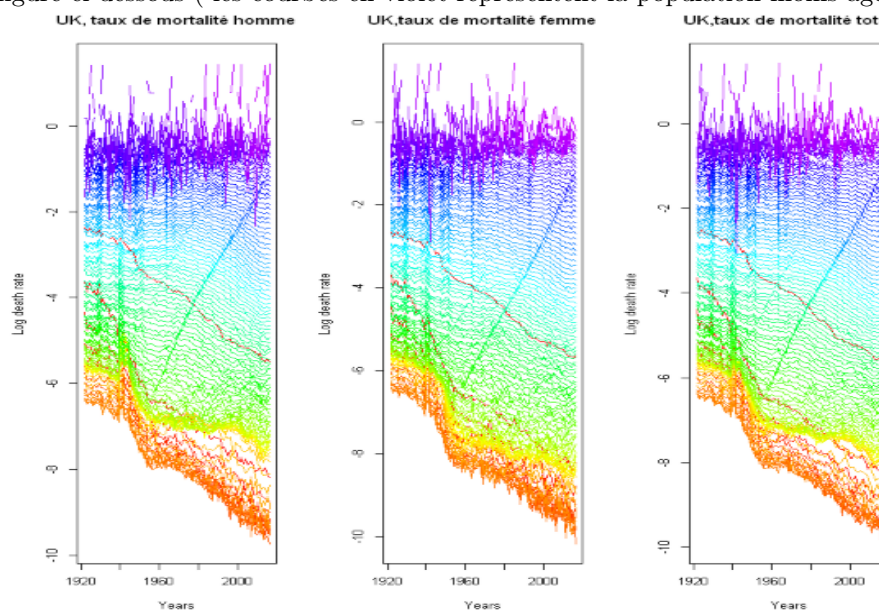


FIGURE 3.4 – taux de mortalité en fonction d'année pour la population britannique (hommes,femmes,total)

### 3.4 Application du modèle Lee carter

Dans cette partie, nous allons appliquer les notions théoriques de modèle Lee carter cité dans le premier chapitre pour estimer la valeur de taux de mortalité dans les prochaines années. Nous rappelons que le modèle Lee Carter s'écrit sous la forme suivante [5] :

$$\ln(\mu_{x,t}) = a_x + b_x * k_t + \epsilon_{x,t}$$

Afin de prévoir les paramètres  $a_x, b_x, k_t$  du modèle Lee Carter, nous avons utilisé le package "StMoMo" et nous avons suivi les étapes suivantes :

1. Charger les données britanniques de la population "homme", "femme" et "total" à l'aide du package StMoMo
2. Transformer les données StMoMo des expositions centrales en expositions initiales afin d'avoir un meilleur résultat d'apprentissage ( Les expositions initiales sont calculées en ajoutant la moitié des décès aux expositions centrales. )
3. Générer une matrice de pondération en fonction d'un groupe d'âges et d'années ( dans cette étape on précise l'intervalle d'âge et la période à estimer pour le modèle)
4. Finalement, on applique le modèle lee carter à l'aide de la commande prédéfinie de du package StMoMo " `fit()` "

Le choix de la plage d'âges et de la plage d'années à partir desquelles on doit générer les prévisions sont important dans la mesure où les estimations des paramètres dépendent sensiblement de ce choix.

En effet, il est possible que ces différences, si elles existent, engendrent des prévisions différentes.

En ce qui concerne les estimations des âges le choix de la plage d'âges ne doit pas avoir d'incidence notable sur les estimations.

Ainsi si l'on retient par exemple la plage [50 ans-70 ans] et la plage [60 ans-80 ans] les âges communs (de 60 à 70 ans) doivent avoir des estimations voisines. Cela n'est pas le cas dans le modèle de Lee-Carter.

Pour les modèles qui tiennent compte conjointement de tous les âges constituant une plage (Comme le modèle de Lee-Carter), on peut craindre que les estimations des paramètres dépendent (plus ou moins fortement) de la plage d'étude choisie.

En outre, il faut bien respecter la condition de fermeture des tables pour qu'on ne considère pas les personnes qui sont âgées plus de 80 ans.

C'est pour ces raisons, on a choisi de prendre la plage d'âge allant de 0 à 80 ans pour faire la bonne estimation.

Voici ci-dessous la visualisation des résultats obtenues après l'estimation des paramètres du Lee Carter :

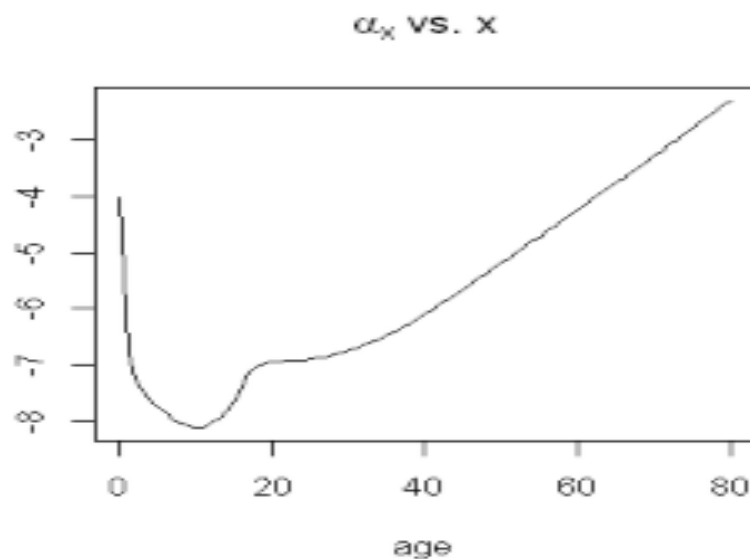


FIGURE 3.5 – Log taux moyen de mortalité  $a_x$  en fonction d'âge  $x$

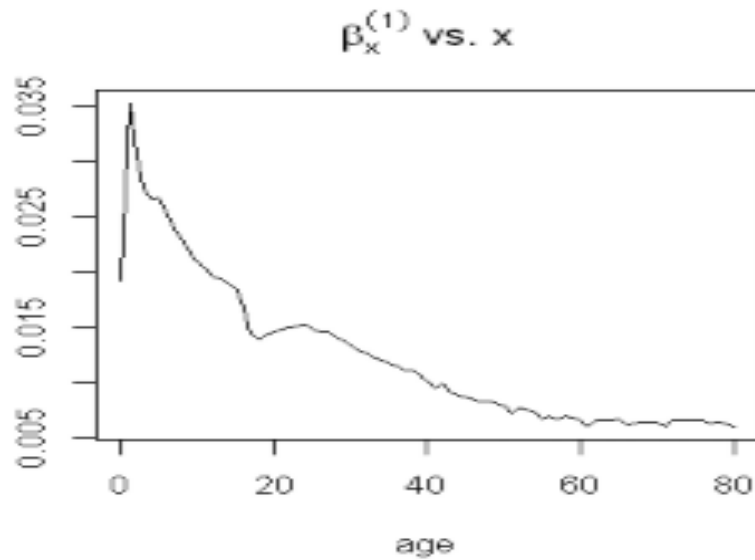


FIGURE 3.6 – Vitesse de réduction de la mortalité  $b_x$  en fonction d'âge  $x$

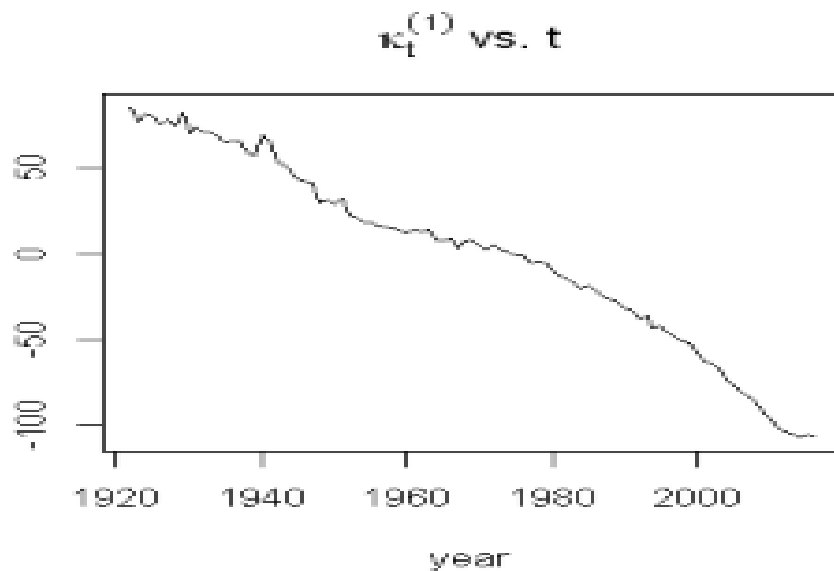


FIGURE 3.7 – Évolution temporelle du taux de mortalité  $k_t$  en fonction d'année  $t$

En observant les paramètres estimés, la mortalité moyenne augmente lorsque l'âge augmente ce qui est vérifié dans le schéma de  $a_x$  estimé. On remarque aussi la présence d'une faible pic entre l'âge de 19-30. On peut expliquer ce comportement en raison de décès inattendus.

$b_x$  montre plutôt une plus grande valeur pour les jeunes âges de 0-20 ans et une faible amélioration pour la tranche d'âge (60-80).

Enfin, comme il est prévu,  $k_t$  qui représente l'évolution du taux de mortalité a une tendance à la baisse avec l'augmentation du temps. On peut expliquer ce comportement par l'évolution des services de la santé et l'absence des guerres pendant ces dernières années .

La figure ci-dessous montre une comparaison entre le taux moyen de mortalité  $a_x$  en fonction d'âge pour les hommes et les femmes :

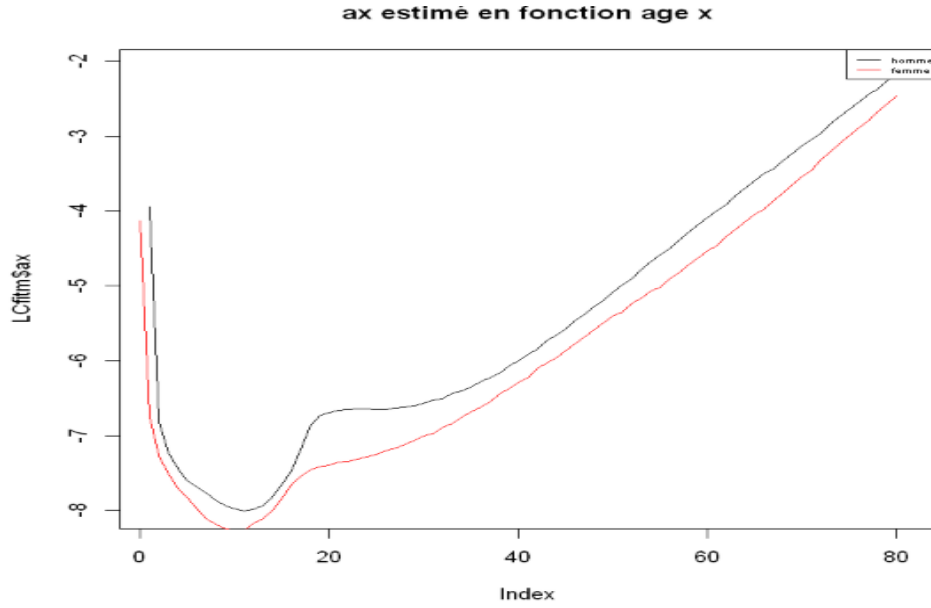


FIGURE 3.8 – Comparaison entre les  $a_x$  femmes et hommes

On remarque que le taux de mortalité chez les hommes est plus fort que chez les femmes puisque la courbe des hommes est toujours au dessus de celle des femmes. On remarque aussi la présence de courbure à l'âge de 17-18 ans chez les femmes et la présence de cette courbure à l'âge de 20-23 ans.

selon les trajectoires obtenues pour le modèle Lee Carter, on peut conclure que la projection avec la méthode ARIMA nous a donné un intervalle de confiance plus fiable.

### 3.5 Application du modèle Cairns Blake Dowd (CBD)

Dans la partie du modèle Cairns Blake Dowd, nous allons suivre la même démarche que celle du modèle Lee Carter, et nous allons appliquer les notions théoriques du modèle CBD citées dans le deuxième chapitre, et ce afin d'estimer la valeur de taux de mortalité dans les prochaines années.

Nous rappelons que le modèle CBD s'écrit sous la forme suivante : [12]

$$\log(q_{x,t}) = \kappa_t^{(1)} + (x - \bar{x}) \kappa_t^{(2)}$$

avec ;  $\beta_x^{(1)} = 1$  et  $\beta_x^{(2)} = (x - \bar{x})$

L'interprétation des paramètres est la suivante :

- $\kappa_t^{(1)}$ , est la tendance dans le temps du niveau de la mortalité pour l'âge moyen des données.
- $\kappa_t^{(2)}$ , montre l'évolution du taux d'accroissement de la mortalité avec l'âge.

Dans le but de prévoir les paramètres  $\kappa_t^{(1)}$  et  $\kappa_t^{(2)}$  du modèle CBD, nous avons utilisé le package "StMoMo" et nous avons suivi les mêmes étapes que celles mentionnées dans la partie de l'application du modèle Lee Carter.

A rappeler que les étapes sont :

1. Charger les données Britannique de la population "Hommes" et celle "Femmes" dans le package StMoMo.
2. Transformer les données StMoMo des expositions centrales en expositions initiales afin d'avoir un meilleur résultat d'apprentissage ( Les expositions initiales sont calculées en ajoutant la moitié des décès aux expositions centrales).
3. Générer une matrice de pondération en fonction d'un groupe d'âges et d'années ( dans cette étape en précise l'intervalle d'âge et la période à estimer pour le modèle).
4. Finalement, on applique le modèle CBD à l'aide de la commande prédéfinie du package StMoMo "fit()".

A rappeler que le choix de la plage d'âges et celle d'années à partir desquelles on doit générer les prévisions est important dans la mesure où les estimations des paramètres dépendent sensiblement de ce choix. [1]

Le modèle CBD est utile lorsqu'on s'intéresse aux prédictions de mortalité des populations qui ont atteint l'âge normal de la retraite.

Pour ces populations, le modèle est performant lorsqu'on s'intéresse aux projections des taux de survie pour les 10 prochaines années.

La performance du modèle diminue lorsqu'on tente de projeter encore plus loin les probabilités de décès, et ce à cause d'un risque de modèle. [2]

Cependant, dans notre exemple, nous nous concentrons sur l'intervalle du 55 ans à 89 ans comme le modèle CBD qui a été spécialement conçu pour s'adapter aux âges supérieurs.

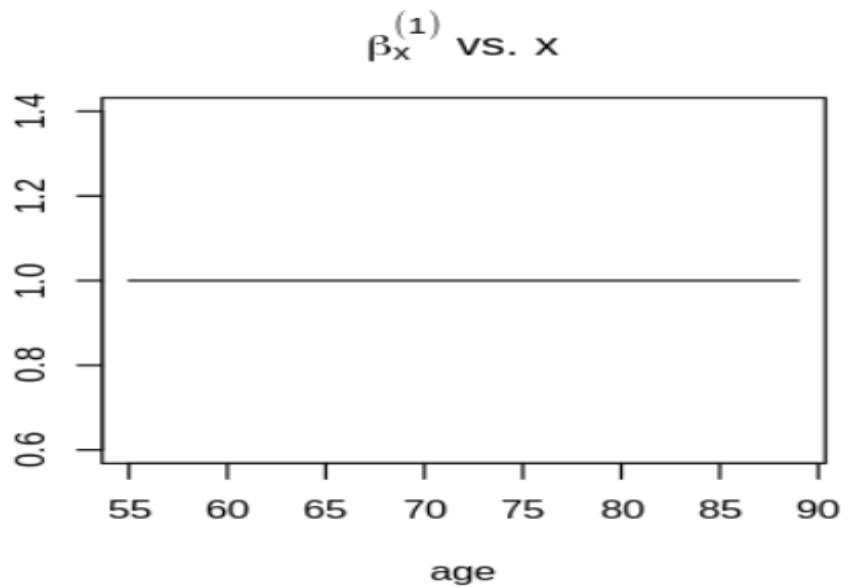


FIGURE 3.9 – Premier paramètre de modulation de l'âge prédéfini  $\beta_x^{(1)}$

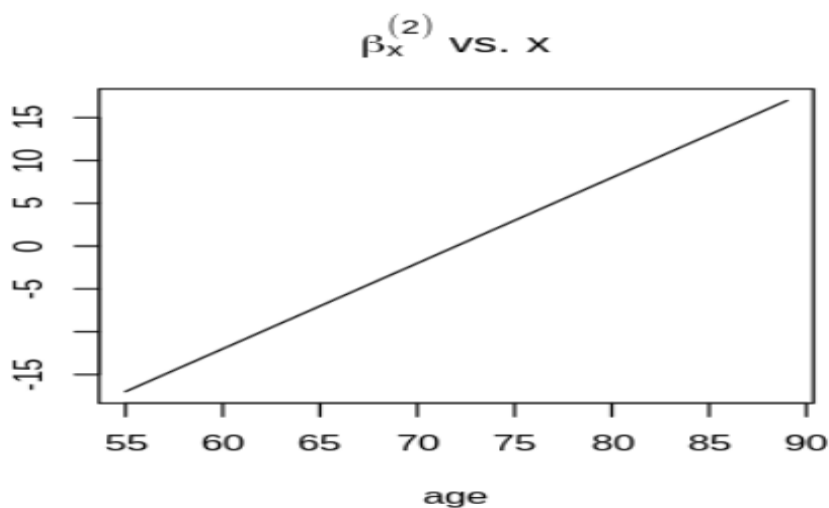


FIGURE 3.10 – Deuxième paramètres de modulation de l'âge prédéfini  $\beta_x^{(2)}$



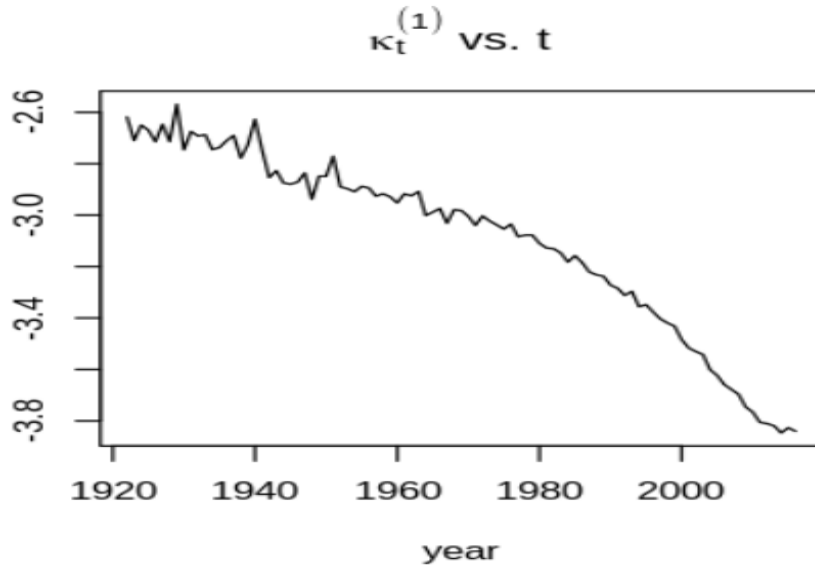


FIGURE 3.11 – L'évolution dans le temps du facteur  $\kappa_t^{(1)}$  du modèle CBD pour les Hommes de la population Britannique entre 1922 et 2016

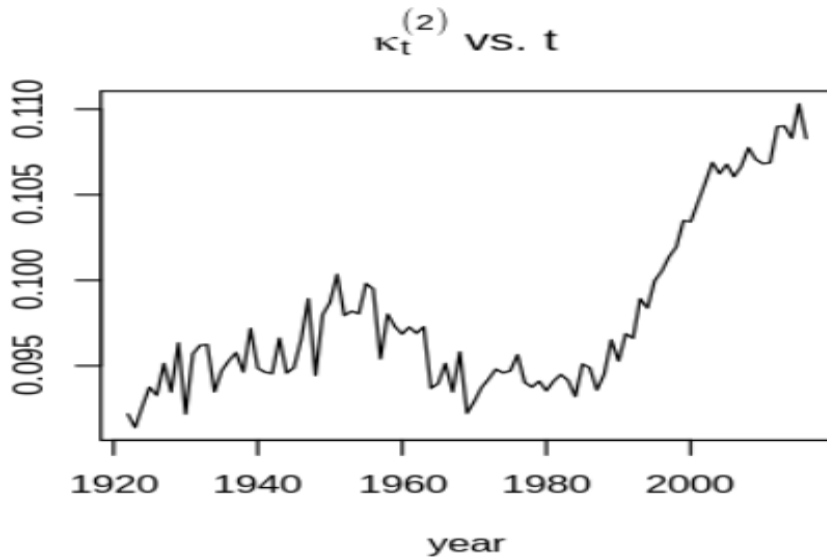


FIGURE 3.12 – L'évolution dans le temps du facteur  $\kappa_t^{(2)}$  du modèle CBD pour les Hommes de la population Britannique entre 1922 et 2016

### 3.5.1 Interprétation des deux facteurs $\kappa_t^{(1)}$ et $\kappa_t^{(2)}$ du modèle CBD

Que nous mettions l'accent sur  $\kappa_t^{(1)}$ , nous remarquons un déclin marqué des probabilités de décès, ce qui met en évidence l'amélioration significative de l'espérance de vie au cours du dernier siècle. [\[1\]](#)

D'autre part, le second facteur CBD,  $\kappa_t^{(2)}$ , met en évidence le fait que l'espérance de vie des jeunes retraités, ceux qui toucheront des rentes pour une plus grande période, s'améliore plus rapidement que celle des retraités les plus âgés. Cette interprétation du second facteur CBD découle directement de la structure imposée aux facteurs de ce modèle. [\[1\]](#)

Pour conclure, Des valeurs décroissantes pour  $\kappa_t^{(1)}$  signifient une diminution parallèle de la courbe de mortalité, donc que l'espérance de vie augmente grâce à une réduction de la mortalité à tous les âges.

Une tendance croissante pour  $\kappa_t^{(2)}$  signifie que la diminution des taux de mortalité est plus importante pour les

plus jeunes âges.

Ainsi, lorsque  $\kappa_t^{(1)}$  décroît et  $\kappa_t^{(2)}$  croît, comme ce que nous observons pour plusieurs années, la courbe de mortalité baisse et sa pente augmente.

### 3.5.2 Log taux de mortalité estimés par les modèles Lee-carter et CBD

Pour chaque population on va générer les taux de mortalité sous forme d'un tableau pour chaque année entre 1922 et 2016 pour ce faire on va utiliser la fonction `fitted()` du package `stats` en indiquant `type="rates"` pour avoir en sortie les résultats sous forme des taux. Puis on va visualiser les graphes log taux de mortalité pour les années 1922,1950,1980,1990,1995,2000,2005,2015 toujours pour les deux modèles.

Pour avoir des résultats bien lisibles et comparables entre les deux modèles on a altéré la plage d'âge, en prenant les âges entre 0 et 89.

A matrix: 6 × 95 of type dbl								
1928	1929	1930	1931	...	2007	2008	2009	2010
0.070155000	0.081878259	0.065706196	0.069182425	...	3.595533e-03	3.446826e-03	3.046081e-03	2.838969e-03
0.015886407	0.021452716	0.013995478	0.015462672	...	6.184628e-05	5.722968e-05	4.560975e-05	4.007944e-05
0.006984507	0.009083905	0.006253065	0.006821534	...	5.692516e-05	5.322798e-05	4.373437e-05	3.910491e-05
0.004501999	0.005714060	0.004072382	0.004406644	...	5.797663e-05	5.455993e-05	4.567770e-05	4.128127e-05
0.003501134	0.004407975	0.003177873	0.003429477	...	5.246287e-05	4.947618e-05	4.167998e-05	3.780198e-05
0.003175840	0.004001938	0.002881565	0.003110598	...	4.688902e-05	4.421070e-05	3.722218e-05	3.374757e-05

FIGURE 3.13 – Extrait du tableau des taux de mortalité hommes estimé par le modèle Lee-Carter

A matrix: 6 × 95 of type dbl								
1928	1929	1930	1931	...	2007	2008	2009	2010
0.001899191	0.002030861	0.001659938	0.001611888	...	3.097063e-05	3.008011e-05	2.949547e-05	2.805537e-05
0.001985588	0.002125649	0.001738726	0.001691019	...	3.402238e-05	3.305257e-05	3.239672e-05	3.082639e-05
0.002075907	0.002224851	0.001821247	0.001774028	...	3.737483e-05	3.631876e-05	3.558332e-05	3.387109e-05
0.002170326	0.002328672	0.001907677	0.001861104	...	4.105761e-05	3.990768e-05	3.908335e-05	3.721651e-05
0.002269029	0.002437326	0.001998200	0.001952446	...	4.510326e-05	4.385125e-05	4.292764e-05	4.089233e-05
0.002372211	0.002551037	0.002093010	0.002048262	...	4.954752e-05	4.818448e-05	4.715004e-05	4.493120e-05

FIGURE 3.14 – Extrait du tableau des taux de mortalité hommes estimé par le modèle Cairns Blake Dowd

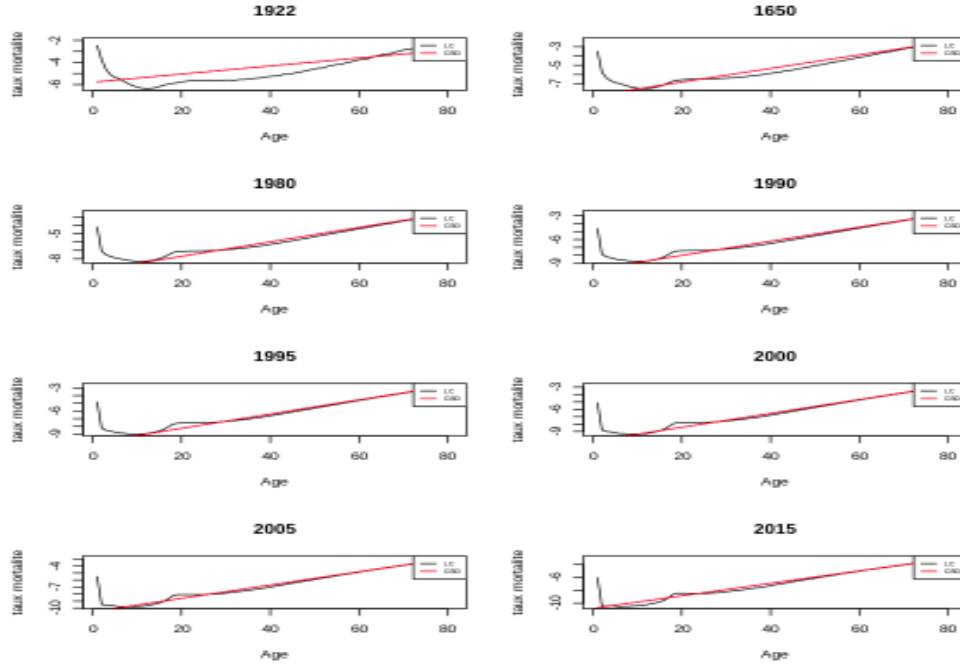


FIGURE 3.15 – log taux de mortalité en fonction d'âge pour les deux modèles lee carter et Cairns Blake Dowd pour les années 1922,1950,1980,1990,1995,2000,2005,2015

En comparant le log taux de mortalité pour les deux modèles LC et CBD , on remarque que les deux modèles ont un comportement différent sur l'intervalle d'âges entre 0 et 20 ans : Lee-carter présente une décroissance forte et rapide de l'âge 0 à 2-3 ans puis il commence à croître lentement jusqu'à 20 ans Cairns Blake Dowd présente une relation linéaire entre l'âge et le log taux de mortalité plus, l'âge augmente le comportement moyen du taux de mortalité augmente pour tous les âges.

Cela est expliqué par l'hypothèse de Cairns Blake Dowd que le taux de mortalité moyen est constant chaque année d'âge c'est-à-dire de l'âge  $x$  à  $x + 1$ .

De plus, on remarque qu'à partir l'âge de 20 ans les deux modèles deviennent de plus en plus proche de comportement et de valeur de taux de mortalité

## 3.6 projection des taux mortalité implémentée dans StMoMo pour les deux modèles

### 3.6.1 Projection selon une marche aléatoire avec dérive

Afin de projeter les taux de mortalité on va utiliser le package **R StMoMo** qui exploite le cadre unificateur de la cohorte âge-période généralisée pour fournir des outils pour ajuster les modèles de mortalité stochastique, évaluer leur qualité d'ajustement et de réaliser des projections de mortalité.

Après avoir modéliser le modèle et ajusté  $\kappa_t^{(1)}$  pour le modèle **LC** et  $\kappa_t^{(1)} \kappa_t^{(2)}$  pour le **CBD**, ces facteurs sont ensuite modélisé à l'aide des méthodes de séries chronologiques standard. Dans la plupart des applications à ce jour, il a été constaté qu'une marche aléatoire avec dérive s'adapte très bien, jugée nettement meilleure, il est conseillé d'utiliser la marche aléatoire avec dérive grâce à sa simplicité d'implémentation et d'interprétation. La marche aléatoire avec dérive est exprimé comme suit :

$$\kappa_t^{(1)} = \delta + \kappa_{t-1}^{(1)} + \xi_t, \quad \xi_t \sim N(0, \sigma_\kappa^2) \quad \text{i.i.d.},$$

la projection ce fait après avoir définie notre modèle avec la fonction **lc()** et en indiquant la plage d'âge dans les arguments, on termine avec la fonction **forecast()** qui comporte des méthodes et des outils d'affichage et d'analyse prédictive de séries chronologiques uni-variées, y compris le lissage exponentiel via des modèles d'espace d'état et la modélisation automatique **ARIMA**. on indique dans l'argument la méthode de projection dans notre cas c'est une marche aléatoire avec dérive, *method.kt="mrwd"*. Ci-dessous les sorties générée.

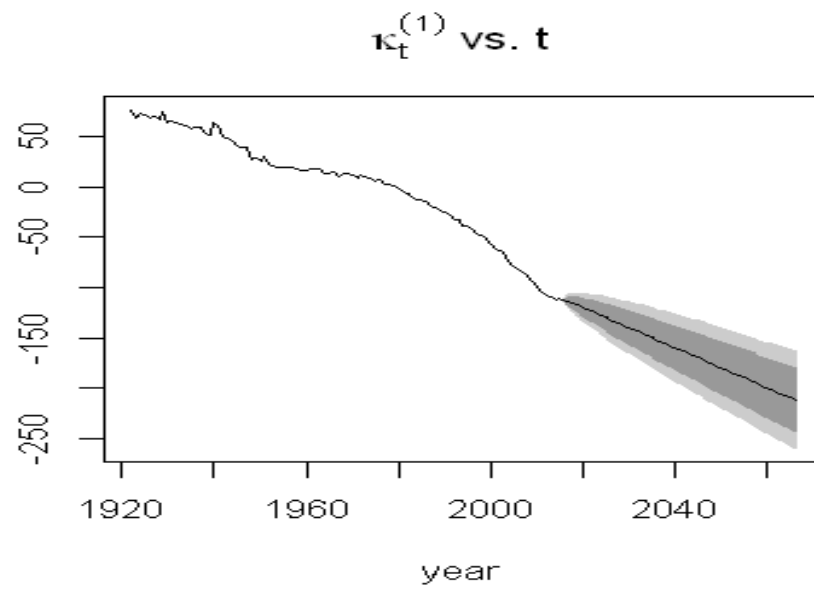


FIGURE 3.16 – Trajectoires de  $k_t$  estimé par le modèle Lee-Carter entre 1922 et 2016 modélisées par une marche aléatoire (80% en gris foncé, 95% en gris clair)

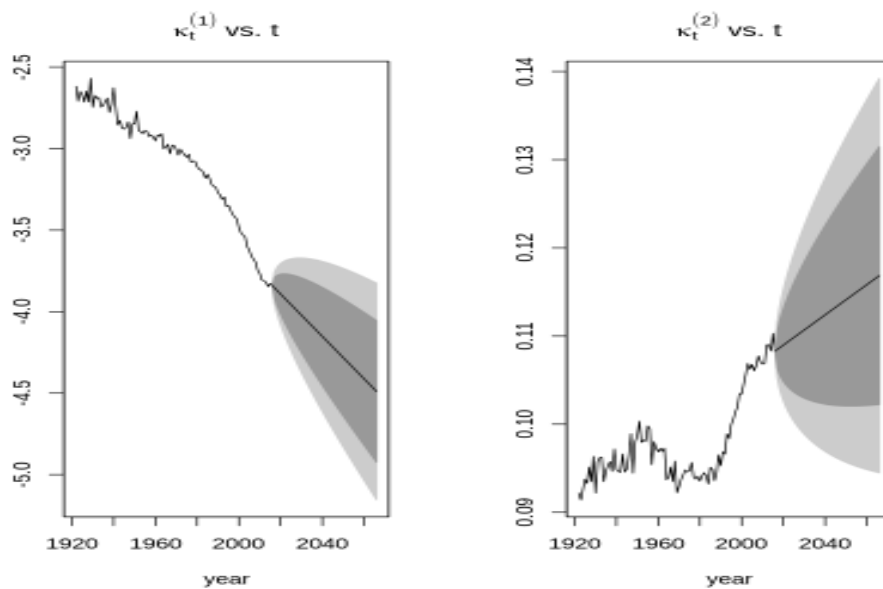


FIGURE 3.17 – Trajectoires des deux facteurs  $\kappa_t^{(1)}$  et  $\kappa_t^{(2)}$  estimé par le modèle CBD entre 1922 et 2016 modélisées par une marche aléatoire (80% en gris foncé, 95% en gris clair)

### 3.6.2 Projection par une modélisation ARIMA

Les deux paramètres  $a_x$  et  $b_x$  des deux modèles dépendent seulement de l'âge des individus. L'évolution de la mortalité dans le temps est modélisée par la série temporelle  $\kappa_t$ . L'extrapolation des taux de décès après 2016 (dernière année d'observation) est alors obtenue par projection de ce paramètre dans le futur. La méthode utilisée est une méthode par défaut. Elle consiste simplement à se baser sur le comportement des  $\kappa_t^{(1)}$  historiques pour estimer son comportement futur. Cela correspond à une modélisation du type ARIMA(p,d,q) (Auto Regressive Integrated Moving Average).

La méthode Box Jenkins sera utilisée pour modéliser ce paramètre par une série ARIMA(p,d,q). Les étapes de la méthodologie de Box Jenkins permettant de déterminer la meilleure modélisation ARIMA(p,d,q) décrivant la série temporelle sont les suivantes : [9].

1. Stationnarisation de la série : tester si la série  $\kappa_t$  est stationnaire.

Avant toute démarche de modélisation, il nous a semblé nécessaire de vérifier la stationnarité de notre série des  $\kappa_t$ . En utilisant `adf.test()` du package "aTSA" on a trouvé p-value  $> 5\%$  qui signifie que la série n'est pas stationnaire pour quelques séries et qu'il faut identifier le paramètre d du modèle ARIMA . [9]

2. L'identification du modèle : Une fois la série stationnaire, la seconde étape consiste à identifier les paramètres p, d et q du modèle ARIMA. d correspond au nombre de différentiations effectuées pour rendre la série stationnaire. En général  $d \leq 2$  suffit. L'identification de p et q passe par une analyse des graphes d'autocorrélations (autocorrélogramme simple, ACF) et d'autocorrélations partielles (autocorrélogramme partiel, Partial ACF) en fonction de l'ordre k appelée « lag ». [9]

Nous avons utilisé en appoint la fonction `forecast()` et `method.kt="iarima"` comme argument ce qui permet de renvoyer directement le meilleur modèle ARIMA. Pour le modèle Lee-Carter.

R nous conseille un modèle ARIMA(0,2,2) pour la population masculine et ARIMA(0,1,1) pour la population féminine .

Quant au CBD, `forecast()` a généré pour la population masculine  $\kappa_t^{(1)}$  : ARIMA(1,1,0) avec derive et  $\kappa_t^{(2)}$  : ARIMA(0,2,1). la population féminine a été modélisé par  $\kappa_t^{(1)}$  : ARIMA(1,1,0) avec dérive et  $\kappa_t^{(2)}$  : ARIMA(1,2,2)

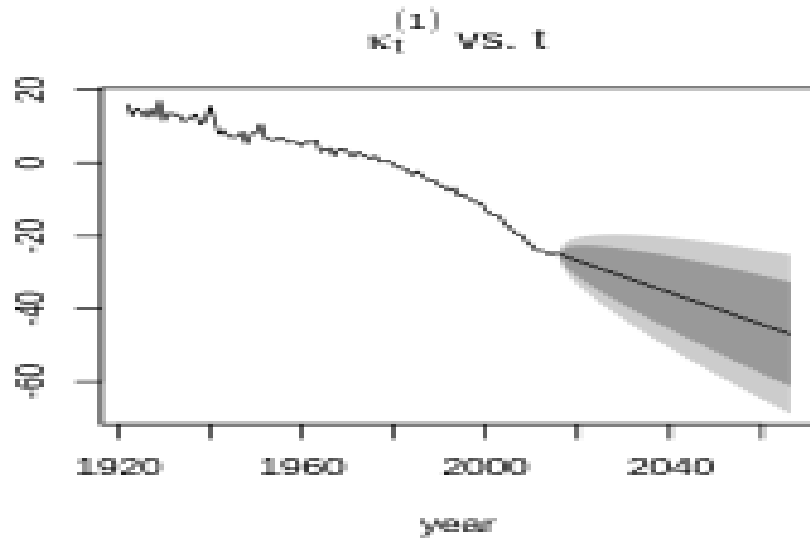


FIGURE 3.18 – Trajectoires estimé par le modèle Lee-Carter de  $\kappa_t$  entre 1922 et 2016 avec ARIMA

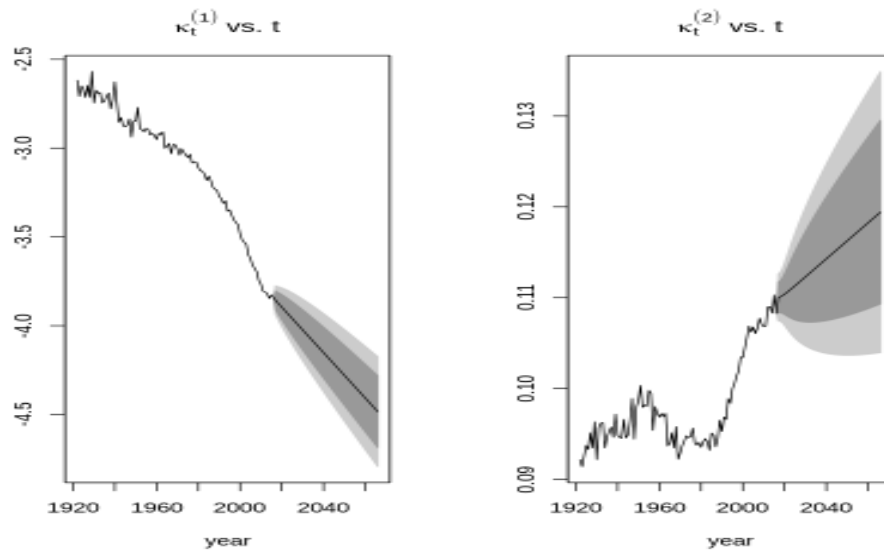


FIGURE 3.19 – Trajectoires estimé par le modèle CBD des deux facteurs  $\kappa_t^{(1)}$  et  $\kappa_t^{(2)}$  entre 1922 et 2016 avec ARIMA

### 3.7 Simulations

On a simuler 20 trajectoires selon le modèle Lee-carter déjà définie pour les deux populations concernés pour les âges 55-89 et pour toute la période des données qu'on a, qui sont ceux allons de 1922 jusqu'a 2016. et on a fait de même pour le modèle CBD.

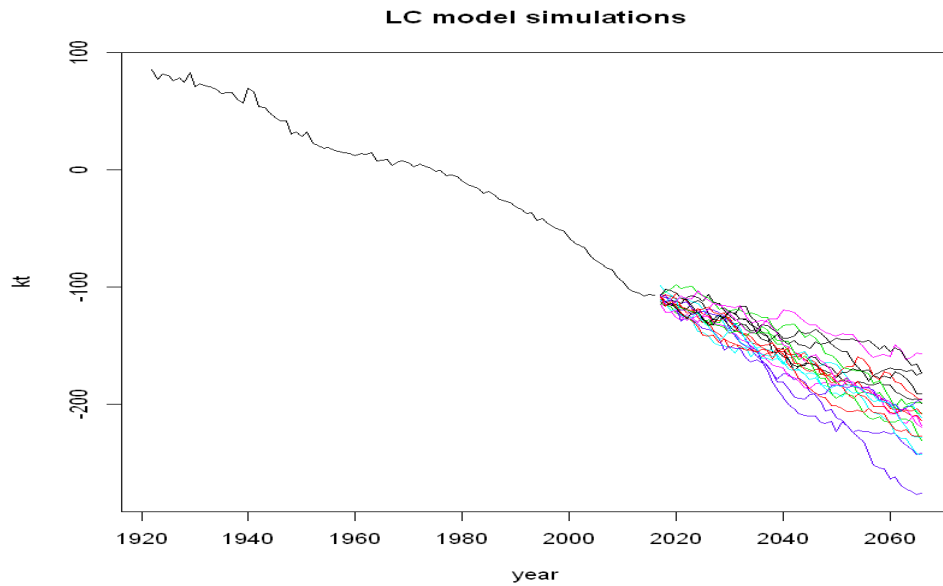


FIGURE 3.20 – simulations LC de 20 trajectoires (entre 2016 et 2060)

Le graphe ci-dessus montre un intervalle de confiance moins étroit que celui de la marche aléatoire.

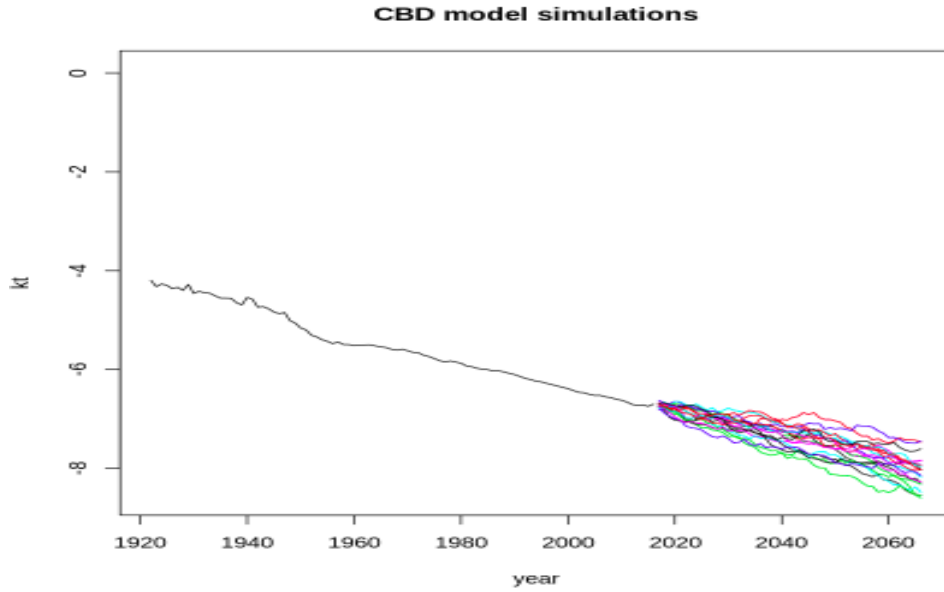


FIGURE 3.21 – simulations CBD de 20 trajectoires (entre 2016 et 2060)

Pour le modèle CBD les trajectoires tombes dans l'intervalle de confiance conçue par la méthode marche aléatoire avec dérive .

### 3.8 Comparaison de la Valeur Actuelle Probable d'une rente viagère à termes anticipés

#### 3.8.1 la Valeur Actuelle Probable d'une rente viagère à termes anticipés à l'aide de Lee Carter

##### la valeur actuelle Probable

Pour une série de flux connus  $F_0, F_1, \dots$ , une série de conditions de paiements aléatoires  $C_0, C_1, \dots$  et un facteur d'actualisation  $0 < v < 1$  (hypothèse de constance du taux d'intérêt), la valeur actuelle Probable est [5].

$$VAP = E(VA) = \sum_{k=0}^{\infty} F_k v^k P(C_k)$$

##### la rente viagère à termes anticipés

Elle se définit comme une série annuelle de flux de 1 euro jusqu'au décès de l'individu à commencer d'aujourd'hui. Ses valeurs actuelle et actuelle probable sont

$$VAP(rente) = \sum_{k=0}^{\infty} v^k {}_k p_x = \ddot{a}_k$$

[5]

Pour une rente viagère à termes anticipés contractée en 2020 par un assuré de 65 ans la cohorte est 2020-65=1955

*Cas d'une serie total*

Pour calculer le valeur probable d'une rente on va se servir des fonctions implémenter dans le package **lifecontingencies** dans sa version v1.3.6.

Premièrement il faut Convertir le taux de mortalité en probabilité de décès pour la cohorte 1995 en utilisant celle calculé par Lee Carter, pour ce faire on a utilisé la fonction **mx2qx()** . Puis à travers la fonction **probs2lifetable** on crée une nouvelle table de survie en utilisant ces probabilités pour obtenir une nouvelle table actuarielle avec un taux d'intérêt de 1.5%, ci-dessous le table actuarielle généré a travers la fonction **new()** [5].

Actuarial table LC interest rate 1.5 %							
	x	lx	Dx	Nx	Cx	Mx	Rx
1	0	10000.000	10000.0000	424037.7620	244.171596	3733.4321	233880.6854
2	1	9752.166	9608.0452	414037.7620	21.274039	3489.2605	230147.2533
3	2	9730.249	9444.7803	404429.7168	11.888485	3467.9865	226657.9928
4	3	9717.817	9293.3138	394984.9365	8.854320	3456.0980	223190.0063
5	4	9708.420	9147.1198	385691.6227	7.147870	3447.2436	219733.9084
6	5	9700.719	9004.7929	376544.5029	6.348912	3440.0958	216286.6647
7	6	9693.777	8865.3682	367539.7100	5.458440	3433.7469	212846.5689
8	7	9687.719	8728.8945	358674.3418	4.680670	3428.2884	209412.8221
9	8	9682.446	8595.2154	349945.4473	4.185960	3423.6078	205984.5336
10	9	9677.660	8464.0065	341350.2320	3.847334	3419.4218	202560.9259
11	10	9673.195	8335.0753	332886.2255	3.651253	3415.5745	199141.5041
12	11	9668.894	8208.2456	324551.1502	3.568048	3411.9232	195725.9296
13	12	9664.628	8083.3735	316342.9045	3.715450	3408.3552	192314.0064
14	13	9660.119	7960.1993	308259.5311	3.989215	3404.6397	188905.6513

FIGURE 3.22 – table actuarielle avec taux d'intérêt de 1.5% estimé par LC

il nous reste qu'à Calculer la valeur Actuelle Probable d'une rente viagère à termes anticipés avec la fonction `axn()` en indiquant la table actuarielle de l'année 1955 et l'âge 65.

**VAP=11.2899**

*cas serie Femme* **VAP=11.9191**

*cas serie homme* **VAP=10.5147**

### 3.8.2 la Valeur Actuelle Probable d'une rente viagère à termes anticipés à l'aide de Cairns Blake Dowd

La cohorte est la même qui est 2020-65=1955. On continue avec la démarche faite pour le modèle Lee-Carter

#### Cas d'une serie total

Premièrement il faut Convertir le taux de mortalité en probabilité de décès pour la cohorte 1995 en utilisant celle calculé par Cairns Blake Dowd. Puis on crée une nouvelle table de survie en utilisant ces probabilités pour obtenir une nouvelle table actuarielle avec le même taux d'intérêt de 1.5%, ci-dessous la table actuarielle.

Actuarial table CBD interest rate 1.5 %							
	x	lx	Dx	Nx	Cx	Mx	Rx
1	0	10000.0000	10000.0000	178824.7432	99.03069	7357.2698	146850.0421
2	1	9899.4838	9753.1861	168824.7432	106.55482	7258.2391	139492.7723
3	2	9789.7084	9502.4955	159071.5572	114.51179	7151.6843	132234.5331
4	3	9669.9659	9247.5527	149569.0617	122.89871	7037.1725	125082.8489
5	4	9539.5257	8987.9907	140321.5090	131.70592	6914.2738	118045.6764
6	5	9397.6410	8723.4573	131333.5183	140.91560	6782.5679	111131.4026
7	6	9243.5578	8453.6236	122610.0610	150.50026	6641.6523	104348.8347
8	7	9076.5258	8178.1929	114156.4374	160.42108	6491.1520	97707.1824
9	8	8895.8127	7896.9119	105978.2445	170.62620	6330.7309	91216.0304
10	9	8700.7204	7609.5825	98081.3326	181.04889	6160.1047	84885.2995
11	10	8490.6058	7316.0768	90471.7501	191.60586	5979.0558	78725.1948
12	11	8264.9038	7016.3515	83155.6733	202.19559	5787.4500	72746.1390

FIGURE 3.23 – table actuarielle avec taux d'interet de 1.5% estimé par CBD

il nous reste qu'à Calculer la valeur Actuelle Probable avec la fonction `axn()`

**VAP=11.905670**

*cas serie Femme* **VAP=11.905**

*cas serie homme* **VAP=10.596**



$$VAP = E(VA) = \sum_{k=0}^{\infty} F_k v^k P(C_k)$$

5

En comparant la valeur Actuelle Probable d'une rente viagère à termes anticipés pour l'âge 65 pour l'année 2020 en utilisant les deux modèles Lee-carter et Cairns Blake Dowd, on trouve presque les mêmes valeurs avec une différence négligeable. On peut expliquer ce résultat en se référant au comparaison du comportement de log taux moyen de mortalité de chaque modèle pour les différents années et on a conclu qu'ils ont des valeurs similaires pour les personnes qui atteint l'âge de la retraite.

On remarque aussi pour le calcul du vap en utilisant les deux modèles que la vap des femmes est toujours supérieure que celle des hommes.

### 3.9 Conclusion

Dans ce dernier chapitre, nous avons analysé la base de données de mortalité humaine de la population britannique en se focalisant sur le comportement du taux de mortalité des femmes et des hommes. De plus, nous avons estimé le taux de mortalité de cette population en utilisant les modèles de Lee Carter et Cairns Blake Dowd et nous avons montré les résultats obtenues des paramètres de chaque modèle. Nous avons aussi comparé le comportement moyen de la mortalité entre les femmes et les hommes en utilisant le modèle de Lee Carter. De surcroît, nous avons projeté les valeurs de taux de mortalité dans les 50 ans à venir et réalisé des simulation en se basent sur les deux modèles.

Et finalement, nous avons calculé la valeur actuelle probable d'une rente viagère à termes anticipés pour un assuré de 65 ans et contractée en 2020 donc d'une cohorte 1955. Pour le calcul de VAP, nous avons utilisé les taux de mortalité estimé par les deux modèles et pour les deux sexe ( homme et femme ).

# Conclusion générale

Le taux de mortalité joue un rôle important pour les assureurs et les calculs actuariels afin de tarifier leurs portefeuilles, évaluer des titres liés à la mortalité ainsi que calculer la valeur actuelle probable pour une rente viagère.

De ce fait, les assureurs adoptent des modèles et des techniques d'estimation pour le calcul du taux de mortalité en se basant sur des tables de mortalité déjà étudié dans un intervalle du temps bien déterminé comme les données présentées par la base de données de la table de mortalité ou de construire leur propres tables dites expérience. Parmi les modèles les plus utilisés afin d'estimer le taux de mortalité : le modèle de Lee Carter et le modèle de Cairns Blake Dowd.

La réalisation du présent projet a été une occasion pour mieux comprendre les modèles Lee Carter et le modèle de Cairns Blake Dowd et de les appliquer en pratique :

Le premier chapitre a été consacré dans le but de comprendre le modèle de Lee Carter, apprendre les étapes de la méthode des moindres carrés minimisant dans le but d'estimer ses paramètres  $a_x, b_x, k_t$ . En outre, nous avons présenté les limites de ce modèle :

- La nécessité d'appliquer la méthode de fermeture de table comme celle de Coale-Kisker afin d'obtenir les taux de mortalité aux âges avancés puisque la méthode de lissage de Lee Carter ne permet pas d'obtenir des valeurs pour les âges supérieurs à 80 ans.
- Le modèle de Lee Carter ne vérifie pas l'hypothèse d'homoscédasticité des résidus en appliquant les moindres carrés pour le calcul des paramètres à estimer.

Le deuxième chapitre a été abordé pour présenter le modèle de Cairns Blake Dowd et de citer ses avantages. Ce modèle se présente comme une amélioration de Lee Carter et se repose sur la linéarité du logit des probabilités de décès à un an aux âges plus avancés. De plus, ce modèle présente deux paramètres en fonction du temps :  $k_t^{(1)}$  qui présente l'évolution temporelle du taux de mortalité en fonction d'année  $t$  et  $k_t^{(2)}$  que son augmentation de la pente de mortalité en logit signifie que la mortalité aux âges plus jeunes s'améliore plus rapidement qu'aux âges plus avancés.

Ces deux paramètres de modèle Cairns Blake Dowd permettent d'avoir plus d'avantages et une meilleure estimation du taux de mortalité  $\mu_{x,t}$ .

Le dernier chapitre a été consacré pour présenter nos résultats après l'application de ses deux modèles sur la population britannique pendant les années 1922 jusqu'à 2016. Ces données sont importées à partir de la base de données de mortalité humaine. Après l'estimation des paramètres de Lee Carter et Cairns Blake Dowd, on remarque qu'ils présentent le même comportement surtout à partir de l'âge de 20 ans puisque le taux moyen de mortalité devient linéaire plus on augmente l'âge. De plus, nous avons conclu que le modèle CBD est plus efficace pour le calcul de la valeur actuelle probable puisque c'est un modèle qui se focalise sur le calcul du taux de mortalité pour les personnes retraitées (âge entre 55 - 80 ans). Nous avons remarqué aussi que la valeur actuelle probable pour les femmes est toujours supérieure aux hommes en utilisant les deux modèles pour la cohorte de 1955.

En guise de conclusion, ce projet nous permet de mieux comprendre les notions théoriques et le calcul de l'actuariat vie tel que le modèle de Lee Carter, le modèle de Cairns Blake Dowd ainsi que la valeur actuelle probable pour une rente viagère. Ces notions sont la base du calcul de la tarification et de la provision d'un contrat d'assurance vie ce que nous voulons l'apprendre dans les prochains cours et projet.

# Bibliographie

- [1] actualite-economique. [http://expertise.hec.ca/actualiteeconomique/wp-content/uploads/2017/03/ae\\_91\\_4\\_2015\\_boyer\\_dorion\\_stentoft\\_531\\_565.pdf](http://expertise.hec.ca/actualiteeconomique/wp-content/uploads/2017/03/ae_91_4_2015_boyer_dorion_stentoft_531_565.pdf).
- [2] Backtesting the lee-carter and the cairns-blake-dowd stochastic mortality models on italian death rates. [https://www.researchgate.net/publication/318214049\\_Backtesting\\_the\\_Lee-Carter\\_and\\_the\\_Cairns-Blake-Dowd\\_Stochastic\\_Mortality\\_Models\\_on\\_Italian\\_Death\\_Rates](https://www.researchgate.net/publication/318214049_Backtesting_the_Lee-Carter_and_the_Cairns-Blake-Dowd_Stochastic_Mortality_Models_on_Italian_Death_Rates).
- [3] Backtesting the lee-carter and the cairns-blake-dowd stochastic mortality models on italian death rates. [https://www.researchgate.net/publication/318214049\\_Backtesting\\_the\\_Lee-Carter\\_and\\_the\\_Cairns-Blake-Dowd\\_Stochastic\\_Mortality\\_Models\\_on\\_Italian\\_Death\\_Rates](https://www.researchgate.net/publication/318214049_Backtesting_the_Lee-Carter_and_the_Cairns-Blake-Dowd_Stochastic_Mortality_Models_on_Italian_Death_Rates).
- [4] center-of-actuarial-excellence. [https://uwaterloo.ca/center-of-actuarial-excellence/sites/ca.center-of-actuarial-excellence/files/uploads/files/9.\\_paper.pdf](https://uwaterloo.ca/center-of-actuarial-excellence/sites/ca.center-of-actuarial-excellence/files/uploads/files/9._paper.pdf).
- [5] Chapitre 2 - mortalité stochastique. <https://cran.r-project.org/web/packages/lifecontingencies/lifecontingencies.pdf>.
- [6] Human mortality database. [https://ec.europa.eu/knowledge4policy/dataset/ds00117\\_en](https://ec.europa.eu/knowledge4policy/dataset/ds00117_en).
- [7] mortality-projection. [https://cran.r-project.org/web/packages/lifecontingencies/vignettes/mortality\\_projection.pdf](https://cran.r-project.org/web/packages/lifecontingencies/vignettes/mortality_projection.pdf).
- [8] Mémoire de fin d'études : Construction d'une table de mortalité prospective à partir d'un échantillon réduit. [http://www.ressources-actuarielles.net/EXT/ISFA/1226-02.nsf/0/ff3077c1f701b9b0c1257705004878f7/\\$FILE/Namtchueng.pdf](http://www.ressources-actuarielles.net/EXT/ISFA/1226-02.nsf/0/ff3077c1f701b9b0c1257705004878f7/$FILE/Namtchueng.pdf).
- [9] Mémoire pour l'admission à l'institut des actuaires. [https://www.institutdesactuaires.com/global/gene/link.php?news\\_link=mem%2Fa223b58e4712a117f3299830fcd08f75.pdf&fg=1](https://www.institutdesactuaires.com/global/gene/link.php?news_link=mem%2Fa223b58e4712a117f3299830fcd08f75.pdf&fg=1).
- [10] Package 'lifecontingencies'. [http://www.ressources-actuarielles.net/EXT/ISFA/1226-02.nsf/0/ff3077c1f701b9b0c1257705004878f7/\\$FILE/Namtchueng.pdf](http://www.ressources-actuarielles.net/EXT/ISFA/1226-02.nsf/0/ff3077c1f701b9b0c1257705004878f7/$FILE/Namtchueng.pdf).
- [11] ressources-actuarielles. [http://www.ressources-actuarielles.net/EXT/ISFA/1226.nsf/0/849b45aff7ec15bec1257db70074e9be/\\$FILE/NT14-05\\_Boyer\\_Dorion\\_Stentoft\\_ENG.pdf](http://www.ressources-actuarielles.net/EXT/ISFA/1226.nsf/0/849b45aff7ec15bec1257db70074e9be/$FILE/NT14-05_Boyer_Dorion_Stentoft_ENG.pdf).
- [12] Risque de longévité. <https://corpus.ulaval.ca/jspui/bitstream/20.500.11794/37035/1/35503.pdf>.
- [13] Stmomo. [https://cran.r-project.org/web/packages/StMoMo/vignettes/StMoMoVignette.pdf?fbclid=IwAR2VdQvYqDLi0d\\_0YrtcxpP4S1ja\\_ZQ1\\_GJNm02ttFj-M8upJ4o0UTchWCI](https://cran.r-project.org/web/packages/StMoMo/vignettes/StMoMoVignette.pdf?fbclid=IwAR2VdQvYqDLi0d_0YrtcxpP4S1ja_ZQ1_GJNm02ttFj-M8upJ4o0UTchWCI).
- [14] Élaboration d'un mooc sur la construction d'une table de mortalité d'expérience. [https://euria.univ-brest.fr/digitalAssets/62/62050\\_RapportBE\\_groupe3.pdfÉlaborationd\T1\textquoterightunMOOCsurlaconstructiond\T1\textquoterightunetabledemortalitéd\T1\textquoterightexpérience](https://euria.univ-brest.fr/digitalAssets/62/62050_RapportBE_groupe3.pdfÉlaborationd\T1\textquoterightunMOOCsurlaconstructiond\T1\textquoterightunetabledemortalitéd\T1\textquoterightexpérience).