Universidad Nacional Autónoma de México
Facultad de Ciencias
Estructuras Discretas | Grupo 7020

Tarea 3: Circuitos y lógica de primer orden

Real Araiza Yamile
Tenorio Reyes Ihebel Luro

12/Oct/2024

1. Asumiendo los axiomas de un algebra booleana A = {{0,1},+,·} demostrar las siguientes propiedades:

Demostraciones

a) Idempotencia

Para la idempotencia de la suma: $x + x = x$ y $x \cdot x = x$.

Para $x + x = x$:

$$\begin{aligned} x + x &= x + x \cdot 1 && \text{(ya que 1 es el elemento neutro del producto)} \\ &= x + x \cdot \overline{x} && \text{(por el complemento: } x \cdot \overline{x} = 0\text{)} \\ &= x \cdot (1 + \overline{x}) && \text{(por distributividad)} \\ &= x \cdot 1 = x. \end{aligned}$$

Para $x \cdot x = x$:

$$\begin{aligned} x \cdot x &= x \cdot x + 0 && \text{(agregando el neutro aditivo)} \\ &= x \cdot x + x \cdot \overline{x} && \text{(ya que } x \cdot \overline{x} = 0\text{)} \\ &= x \cdot (x + \overline{x}) && \text{(por factorización usando la distributividad)} \\ &= x \cdot 1 && \text{(dado que } x + \overline{x} = 1\text{)} \\ &= x. \end{aligned}$$

b) Idempotencia del complemento

Para demostrar que $\overline{\overline{x}} = x$, usamos que el complemento satisface $x + \overline{x} = 1$ y $x \cdot \overline{x} = 0$.

$$\begin{aligned} \overline{\overline{x}} &= x + 0 && \text{(ya que 0 es el neutro de la suma)} \\ &= x + (x \cdot \overline{x}) && \text{(por el complemento: } x \cdot \overline{x} = 0\text{)} \\ &= x \cdot 1 = x. \end{aligned}$$

c) Elemento dominante

Para $x + 1 = 1$ y $x \cdot 0 = 0$:

Para $x + 1 = 1$:

$$\begin{aligned} x + 1 &= (x + 1) \cdot 1 && \text{(por el elemento neutro del producto)} \\ &= (x + 1) \cdot (x + \overline{x}) && \text{(por complemento: } x + \overline{x} = 1\text{)} \\ &= x + 1 = 1. \end{aligned}$$

Para $x \cdot 0 = 0$:

$$\begin{aligned}
x \cdot 0 &= x \cdot (x \cdot \overline{x}) && \text{(ya que } x \cdot \overline{x} = 0\text{)} \\
&= (x \cdot x) \cdot \overline{x} && \text{(por asociatividad)} \\
&= x \cdot \overline{x} && \text{(ya que } x \cdot x = x \text{ por idempotencia)} \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Esto es directo por la propiedad de absorción del producto con el elemento neutro 0.

d) Absorción

Para $x + x \cdot y = x$ y $x \cdot (x + y) = x$:

Para $x + x \cdot y = x$:

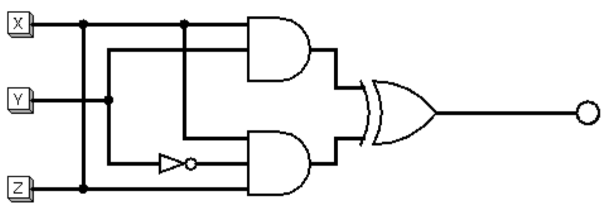
$$\begin{aligned}
x + x \cdot y &= x \cdot 1 + x \cdot y && \text{(por el elemento neutro de la suma)} \\
&= x \cdot (1 + y) && \text{(por distributividad)} \\
&= x.
\end{aligned}$$

Para $x \cdot (x + y) = x$:

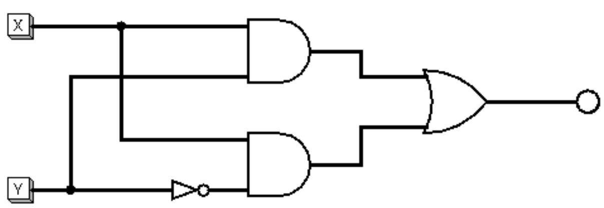
$$\begin{aligned}
x \cdot (x + y) &= x \cdot x + x \cdot y && \text{(por distributividad)} \\
&= x + x \cdot y = x. && \text{(por la propiedad de absorción)}
\end{aligned}$$

Dibuja los circuitos lógicos para las siguientes expresiones:

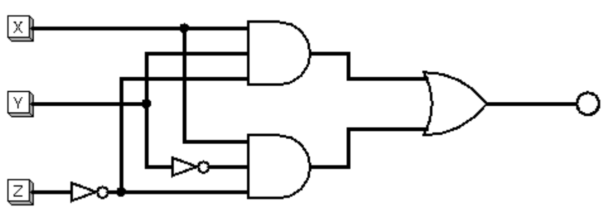
a) $xyz \oplus x\overline{y}z$



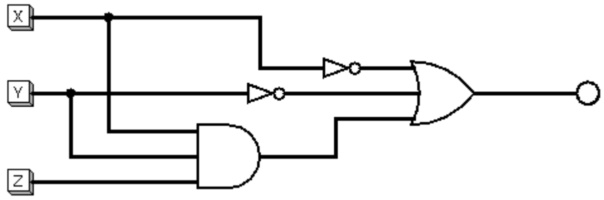
b) $xy + x\overline{y}$



c) $xy\overline{z} + x\overline{yz}$



d) $\overline{x} + \overline{y} + xyz$



3. Utilizando mapas de Karnaugh, reducir las siguientes expresiones y dibujar los circuitos reducidos:

a) Expresión: $xy + x\overline{y}$

Mapa de Karnaugh:

$x \setminus y$	0	1
0	0	0
1	1	1

Se observa que se pueden agrupar los unos en una fila, lo que reduce la expresión a:

$$x$$

Expresión reducida: x
Circuito lógico: Un solo cable que representa la variable x.

b) Expresión: $\overline{x}y + \overline{xy}$

Mapa de Karnaugh:

$x \setminus y$	0	1
0	1	1
1	0	0

Los términos se pueden agrupar en la columna de $\overline{x}$, resultando en:

$$\overline{x}$$

Expresión reducida: $\overline{x}$
Circuito lógico: Un inversor para la variable x.

c) Expresión: $xyz + \overline{x}yz$

Mapa de Karnaugh:

$x \setminus yz$	00	01	11	10
0	0	0	1	0
1	0	0	1	0

Agrupamos los términos xyz y $\overline{x}yz$, lo que da como resultado:

$$yz$$

Expresión reducida: yz
Circuito lógico: Un AND entre y y z.

d) Expresión: $xy\overline{z} + x\overline{yz} + \overline{x}y\overline{z} + \overline{xyz}$

Mapa de Karnaugh:

$x \setminus yz$	00	01	11	10
0	1	0	0	1
1	1	0	0	1

Se agrupan los unos en la fila de $\overline{z}$, obteniendo:

$$\overline{z}$$

Expresión reducida: $\overline{z}$
Circuito lógico: Un inversor para la variable z.

e) Expresión: $\overline{xy} + \overline{x}y + xy$

Mapa de Karnaugh:

$x \setminus y$	0	1
0	1	1
1	0	1

Agrupamos los términos en la columna de y, resultando en:

$$y$$

Expresión reducida: y
Circuito lógico: Un solo cable que representa la variable y.

f) Expresión: $\overline{xy} + \overline{x}y + x + y$

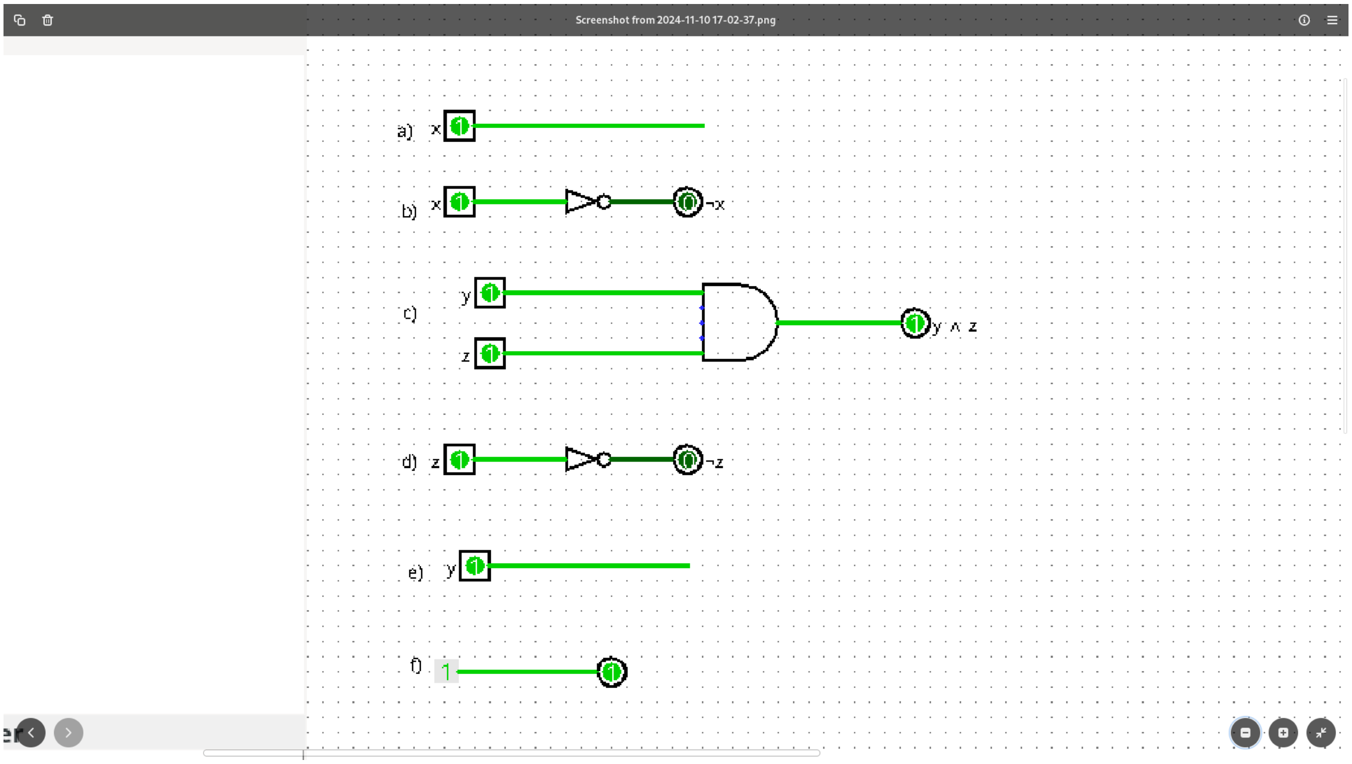
Mapa de Karnaugh:

$x \setminus y$	0	1
0	1	1
1	1	1

Todos los valores son 1, lo que significa que:

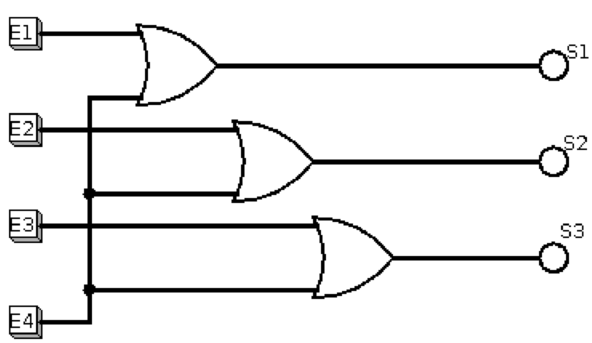
$$1$$

Expresión reducida: 1
Circuito lógico: Una constante lógica de 1.



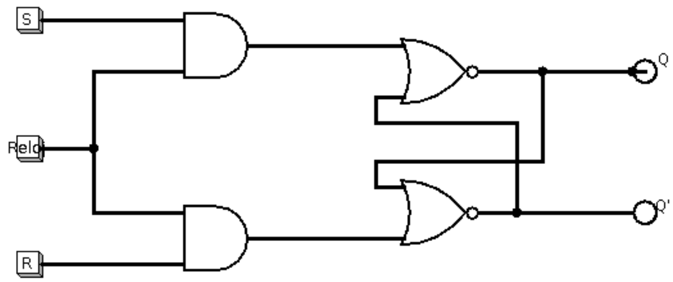
Diseñar un circuito decodificador con 4 etradas para la siguiente tabla de verdad, donde - denota cualquier valor, 0 o 1

Entradas				Salidas		
0	0	0	0	-	-	0
0	0	0	1	0	0	1
0	0	1	-	0	1	1
0	1	-	-	1	0	1
1	-	-	-	1	1	1
E_4	E_3	E_2	E_1	S_3	S_2	S_1

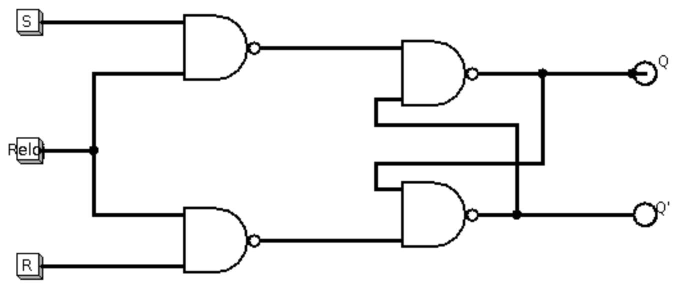


Diseñar un circuito secuencial flip-flop SR, pero utilizando circuitos NAND y verificar que el resultado es el mismo que con las compuertas NOR

Tenemos primero el circuito con NOR.



Entonces, el nuevo circuito con compuertas NAND es el siguiente



A pesar de las diferencias en el comportamiento de las compuertas:

- Ambos diseños pueden almacenar un bit de información, manteniendo el último estado cuando $S = R = 0$ (para NOR) o $S = R = 1$ (para NAND).
- Las condiciones para *Set* y *Reset* son equivalentes, aunque están invertidas:
  - En un flip-flop SR con **NAND**, un cero en S o R activa el *Set* o *Reset*.
  - En un flip-flop SR con **NOR**, un uno en S o R activa el *Set* o *Reset*.
- La diferencia en la lógica se compensa al aplicar las entradas de manera opuesta, logrando el mismo comportamiento general.

Por lo tanto, el flip-flop SR construido con compuertas **NAND** es funcionalmente equivalente al de compuertas **NOR**, ya que ambos implementan un circuito de memoria capaz de almacenar y cambiar su estado en función de las entradas S y R.

6. Expresar las siguientes oraciones como formulas de la lógica de predicados; indicar las constantes, las variables, los cuantificadores y su alcance:

a) "Hay algunos médicos que son odontólogos."

Constantes: Ninguna
Variables: x (representa personas)
Cuantificadores: Existencial ($\exists$)

Fórmula:

$$\exists x \, (M(x) \wedge O(x))$$

Interpretación: Existe al menos un x tal que x es médico ($M(x)$) y x es odontólogo ($O(x)$).

Alcance de $\exists x$: Toda la expresión $[M(x) \wedge O(x)]$. Esto significa que el cuantificador existencial $\exists x$ se aplica a la conjunción de $M(x)$ y $O(x)$, afirmando que existe al menos un x que es médico y odontólogo.

b) "Ninguna planta es mamífero o pez."

Constantes: Ninguna
Variables: x (representa seres vivos)
Cuantificadores: Universal ($\forall$)

Fórmula:

$$\forall x \, (P(x) \rightarrow \neg(M(x) \vee Z(x)))$$

Interpretación: Para todo x, si x es planta ($P(x)$), entonces x no es mamífero ($M(x)$) ni pez ($Z(x)$).

Alcance de $\forall x$: Toda la implicación $[P(x) \rightarrow \neg(M(x) \vee Z(x))]$. Aquí, el cuantificador universal $\forall x$ se aplica a toda la implicación, indicando que para cada x, si x es planta, entonces x no es mamífero ni pez.

c) "Cualquiera puede tomarle el pelo a la directora."

Constantes: Directora (D)
Variables: x (representa personas)
Cuantificadores: Universal ($\forall$)

Fórmula:

$$\forall x \, T(x, D)$$

Interpretación: Para todo x, x puede tomarle el pelo a la directora ($T(x, D)$).

Alcance de $\forall x$: La predicación $T(x, D)$. El cuantificador universal $\forall x$ se aplica directamente a $T(x, D)$, indicando que para cada x, x puede tomarle el pelo a la directora D.

d) "Hay un abogado a quien cualquiera le toma el pelo."

Constantes: Ninguna
Variables: x, y (representan personas)
Cuantificadores: Existencial ($\exists$) y Universal ($\forall$)

Fórmula:

$$\exists x \, (A(x) \wedge \forall y \, T(y, x))$$

Interpretación: Existe al menos un x tal que x es abogado ($A(x)$) y para todo y, y le toma el pelo a x ($T(y, x)$).

Alcance de $\exists x$: La conjunción $[A(x) \wedge \forall y \, T(y, x)]$. Esto significa que el cuantificador existencial $\exists x$ se aplica a toda la expresión dentro de los corchetes, afirmando que existe al menos un x que es abogado y para cualquier y, y le toma el pelo a x.

Alcance de $\forall y$: La predicación $T(y, x)$ dentro de la conjunción. El cuantificador universal $\forall y$ está contenido dentro del alcance de $\exists x$, aplicándose a la relación de y tomando el pelo a x.

e) "Cada uno de los estudiantes aprobó el examen con 10."

Constantes: Nota 10
Variables: x (representa personas)
Cuantificadores: Universal ($\forall$)

Fórmula:

$$\forall x\,(E(x) \to A(x, 10))$$

Interpretación: Para todo x, si x es estudiante ($E(x)$), entonces x aprobó con nota 10 ($A(x, 10)$).

Alcance de $\forall x$: La implicación $[E(x) \to A(x, 10)]$. El cuantificador universal $\forall x$ se aplica a toda la implicación, indicando que para cada x, si x es estudiante, entonces x aprobó el examen con nota 10.

f) Un estudiante reprobó el examen y abandonó el curso

Constantes: Examen y Curso
Variables: Estudiante
Cuantificadores: $\exists$ Estudiante

estudiante(x) := x es estudiante
reprobar(x) := x reprobó el examen
abandona(x) := x abandonó el curso

$$\exists x((estudiante(x) \land reprobar(x)) \to abandona(x))$$

g) Los gatos son mamíferos

Constantes: -
Variables: gatos
Cuantificadores: $\forall$ gatos

gato(x) := x es gato
mamifero(x) := x es mamifero

$$\forall x(gato(x) \to mamifero(x))$$

h) Un perro mordió a María

Constantes: Maria
Variables: perros
Cuantificadores: $\exists$ gato
perro(x):=x es perro
muerde(x,y):= x muerde a y

$$\exists x(perro(x) \land muerde(x, Maria))$$

i) Las novelas de Cervantes son buenas y divertidas

Constante:Cervantes
Variables: novelas

Cuantificadores: ∀ novelas

novela(x):=x es novela de cervantes byd(x):= x es buena y divertida

$$\forall x(novela(x) \to byd(x))$$

j) Si todos los gatos son felinos, entonces todos los gatos son mamiferos

Constante:-
Variable: gatos
Cuantificadores:∀ gatos

gato(x):= x es gato
felino(x):= x es felino
mamifero(x):= x es mamifero

$$\forall x((gato(x) \land felino(x)) \to mamifero(x))$$

7. Por cada formula: 1) Clasificar la presencia de variables en libres y ligadas; 2)Indicar el alcance del cuantificador:

a) $R(x, y) \land L(y)$

Clasificación de variables:

- Variables libres: x y y (ninguna está ligada por un cuantificador).
- Variables ligadas: Ninguna.

Alcance de cuantificadores: No hay cuantificadores en esta fórmula, por lo tanto, no hay alcance que indicar.

b) $\forall x\, R(x, f(x, y)) \land L(y)$

Clasificación de variables:

- Variables libres: y.
- Variables ligadas: x (está cuantificada por $\forall x$).

Alcance del cuantificador:

- El cuantificador $\forall x$ abarca $R(x, f(x, y))$. Es decir, su alcance es $R(x, f(x, y))$ únicamente.

c) $\exists x\, \exists y\, R(x, y) \land L(x, y)$

Clasificación de variables:

- Variables libres: Ninguna (todas las variables están cuantificadas).
- Variables ligadas: x y y (ambas están ligadas por los cuantificadores $\exists x$ y $\exists y$).

Alcance de los cuantificadores:

- El alcance de $\exists x$ es toda la expresión $\exists y\, (R(x, y) \land L(x, y))$.
- El alcance de $\exists y$ es $R(x, y) \land L(x, y)$.

d) $\exists y\, L(x, y) \vee \exists z\, R(x, z)$

Clasificación de variables:

- Variables libres: x.
- Variables ligadas: y y z (ambas están cuantificadas por $\exists y$ y $\exists z$).

Alcance de los cuantificadores:

- El alcance de $\exists y$ es $L(x, y)$.
- El alcance de $\exists z$ es $R(x, z)$.

e) $\exists y\, R(a, y) \vee L(a)$

Clasificación de variables:

- Variables libres: Ninguna (las constantes como a no se consideran variables libres o ligadas).
- Variables ligadas: y (está cuantificada por $\exists y$).

Alcance del cuantificador:

- El alcance de $x\exists y$ es $R(a, y)$.

f)$D(f(x, y) \vee \forall z R(z, r(y))$

Clasificacion de variables

- Variables libres: (x,y).
- Varaibles ligadas: (z) esta cuantificada por ($\forall$ z).

Alcance del cuantificador:

- El alcance de ($\forall$ z) es (R(z,r(y))).

g) $\forall x\ \big(L(x) \to R(a, x) \wedge C(x, a)\big)$

Clasificacion de variables:

- Variables Libres: (a).
- Variables Ligadas: (x) esta cuantificada por ($\forall$ x).

Alcance del cuantificador:

- El alcance de ($\forall$ x) es $(L(x) \to R(a, x) \wedge C(x, a))$.

h) $R(x, y, z) \wedge \exists y R(y, x, z) \to \forall w I(x, y)$

Clasificacion de variables:

- Variables Libres:(x,z).
- Variables Ligadas: (y,w) esta cuantificada por ($\exists y$ y $\forall w$).

Alcance del cuantificador:

- El alcance de ($\exists y$ y $\forall x$) es ($\exists R(y, x, z)$ y $\forall w I(x, y)$).

i) $\forall x(C(x,z) \wedge R(x,y)) \rightarrow C(y,z)$

Clasificacion de variables:

- Variables Libres: (y,z).
- Variables Ligadas: (x) esta cuantificada por ($\forall x$).

Alcance del cuantificador:

- El alcance de ($\forall x$) es $(C(x,z) \wedge R(x,y))$.

j) $\forall x \exists z I(x,z) \rightarrow C(z,y) \wedge D(y)$

Clasificacion de variables:

- Variables Libre:(y).
- Variables Ligadas:(x,z) esta cuantificada por ($\forall x$ y $\exists z$).

Alcance del cuantificador:

- El alcance de ($\forall x$ y $\exists z$) es ($\exists z I(x,z) \rightarrow C(z,y)$).