



Universidad Nacional Autónoma de México

Facultad de Ciencias

Matemáticas para las Ciencias Aplicadas | Grupo  
7048

Tarea 3 Parte 1

Real Araiza Yamile

Rodríguez López Luis Fernando

Tenorio Reyes Ihebel Luro

23/10/2024



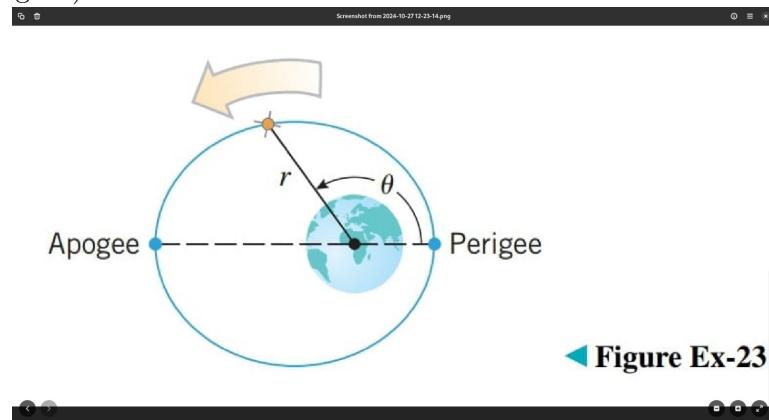
## 1 Ejercicio 23, sección 3.4 ABD

Un satélite se encuentra en una órbita elíptica alrededor de la Tierra. Su distancia  $r$ (en millas) desde el centro de la tierra está dada

$$r = \frac{4995}{1 + 0.12 \cos \theta}$$

donde  $R = 3960$  millas es el radio de la Tierra.

¿Dónde está el ángulo medido desde el punto de la órbita más cercano a la superficie de la Tierra (ver la figura)?



◀ Figure Ex-23

(a) Halla la altitud del satélite en el perigeo(el punto más cercano a la superficie de la Tierra) y en el apogeo (el punto más alejado de la superficie de la Tierra). Utiliza 3960 mi como el radio de la Tierra.

1. **Perigeo** (distancia mínima del satélite desde el centro de la Tierra): - En el perigeo, el satélite está en el punto más cercano a la superficie de la Tierra. Esto ocurre cuando  $\cos \theta = 1$ . - Sustituyendo  $\cos \theta = 1$  en la fórmula para  $r$ :

$$r_{\text{perigeo}} = \frac{4995}{1 + 0.12 \cdot 1} = \frac{4995}{1.12} \approx 4468.75 \text{ millas}$$

- La altitud en el perigeo (distancia desde la superficie de la Tierra) es:

$$\text{Altitudperigeo} = r_{\text{perigeo}} - R = 4468.75 - 3960 \approx 508.75 \text{ millas}$$

2. **Apogeo** (distancia máxima del satélite desde el centro de la Tierra): - En el apogeo, el satélite está en el punto más lejano de la superficie de la Tierra. Esto ocurre cuando  $\cos \theta = -1$ . - Sustituyendo

$\cos \theta = -1$  en la fórmula para  $r$ :

$$r_{\text{apogeo}} = \frac{4995}{1 + 0.12 \cdot (-1)} = \frac{4995}{1 - 0.12} = \frac{4995}{0.88} \approx 5676.14 \text{ millas}$$

- La altitud en el apogeo es:

$$\text{Altitudapogeo} = r_{\text{apogeo}} - R = 5676.14 - 3960 \approx 1716.14 \text{ millas}$$

(b) En el instante en que  $\theta$  es  $120^\circ$ , el ángulo aumenta  $\theta$  a una velocidad de  $2.7^\circ/\text{min}$ . Halla la altitud del satélite y la velocidad a la que cambia la altitud en ese instante. Expresa la velocidad en unidades de mi/min.

Dado: -  $\theta = 120^\circ$ , -  $\frac{d\theta}{dt} = 2.7^\circ/\text{min}$ .

1. **Calcular la altitud cuando  $\theta = 120^\circ$ :** - Convertimos  $\theta$  a radianes:  $\theta = 120^\circ = \frac{2\pi}{3}$  radianes. - Sustituyendo  $\cos 120^\circ = -0.5$  en la fórmula de  $r$ :

$$r = \frac{4995}{1 + 0.12 \cdot (-0.5)} = \frac{4995}{1 - 0.06} = \frac{4995}{0.94} \approx 5313.83 \text{ millas}$$

- La altitud cuando  $\theta = 120^\circ$  es:

$$\text{Altitud} = r - R = 5313.83 - 3960 \approx 1353.83 \text{ millas}$$

2. **Calcular la tasa de cambio de la altitud en este instante:** - Diferenciamos  $r$  con respecto al tiempo usando la regla de la cadena:

$$\frac{dr}{dt} = \frac{dr}{d\theta} \cdot \frac{d\theta}{dt}$$

- Calculamos  $\frac{dr}{d\theta}$ :

$$r = \frac{4995}{1 + 0.12 \cos \theta}$$

Diferenciando con respecto a  $\theta$ :

$$\frac{dr}{d\theta} = \frac{-4995 \cdot 0.12 \sin \theta}{(1 + 0.12 \cos \theta)^2}$$

- Sustituyendo  $\theta = 120^\circ$  (o  $\sin 120^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$  y  $\cos 120^\circ = -0.5$ ):

$$\frac{dr}{d\theta} = \frac{-4995 \cdot 0.12 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}}{(1 + 0.12 \cdot (-0.5))^2} = \frac{-299.7 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}}{0.94^2} \approx -275.07 \text{ millas/radian}$$

- Finalmente, usamos  $\frac{d\theta}{dt} = 2.7^\circ/\text{min} = \frac{2.7 \cdot \pi}{180} \approx 0.0471 \text{ rad/min}$ :

$$\frac{dr}{dt} \approx -275.07 \times 0.0471 \approx -12.96 \text{ millas/min}$$

## Respuestas finales

- (a) Altitud en el perigeo: aproximadamente 508.75 millas.
- (a) Altitud en el apogeo: aproximadamente 1716.14 millas.
- (b) Altitud cuando  $\theta = 120^\circ$ : aproximadamente 1353.83 millas.
- (b) Tasa de cambio de la altitud: aproximadamente  $-12.96 \text{ millas/min}$ .

---

## Ejercicio 29, sección 9.7 ABD

Encuentra los primeros 4 distintos polinomios de Taylor al rededor de  $x = x_0$  y grafica la función dada y los polinomios de Taylor al mismo tiempo.

$$f(x) = \cos(x), \quad x_0 = \pi$$

Recordamos que el polinomio de Taylor es dado por:

$$P_n(x) = f(a) + f'(a)(x - a) + \frac{f''(a)(x - a)^2}{2!} + \dots + \frac{f^{(n)}(a)(x - a)^n}{n!}$$

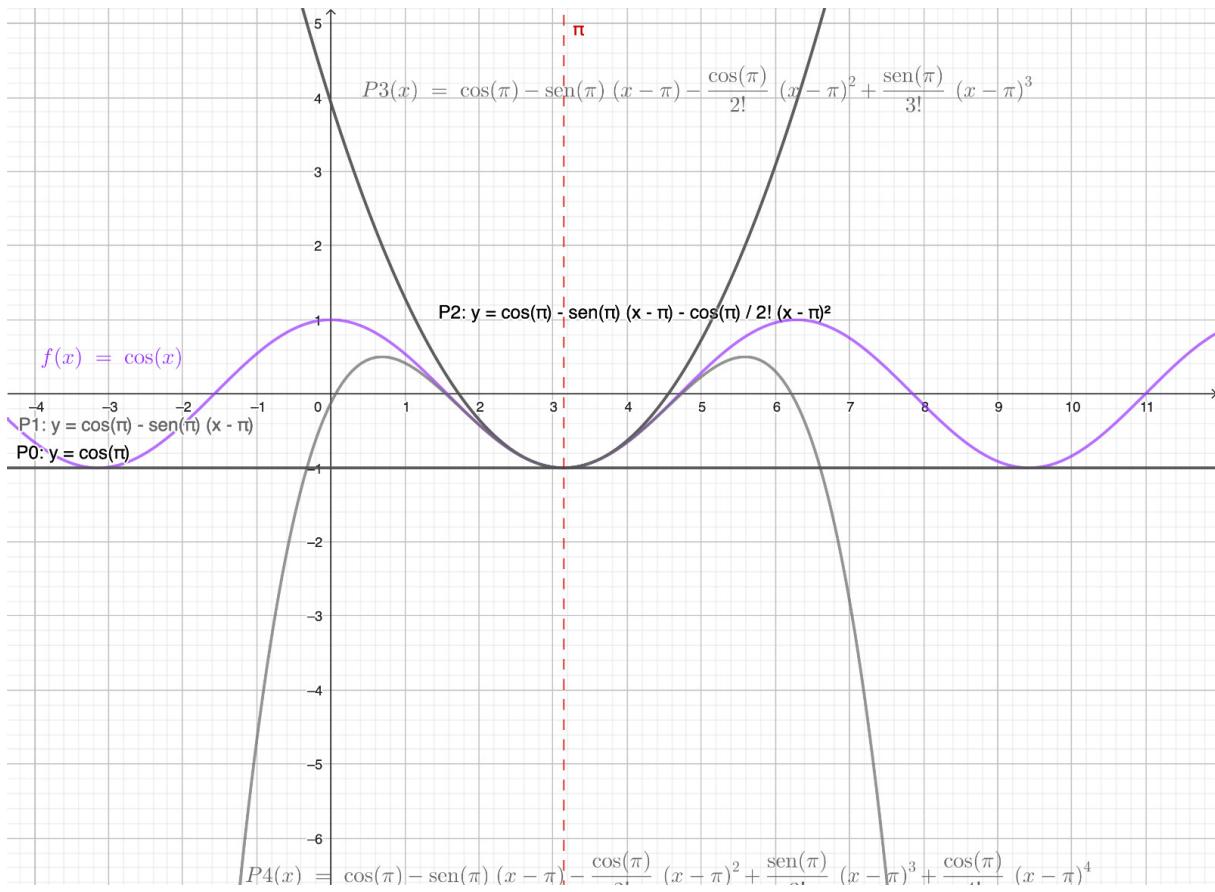
Comenzamos derivando la función.

$$\begin{aligned}f(x) &= \cos(x) \\f'(x) &= -\sin(x) \\f''(x) &= -\cos(x) \\f'''(x) &= \sin(x) \\f^{IV}(x) &= \cos(x)\end{aligned}$$

Luego obtenemos los primeros 4 polinomios de Taylor  $P_n$  sustituyendo.

$$\begin{aligned}P_0 &= \cos(\pi) \\P_1 &= P_0 - \sin(\pi)(x - \pi) \\P_2 &= P_1 - \frac{\cos(\pi)}{2!}(x - \pi)^2 \\P_3 &= P_2 + \frac{\sin(\pi)}{3!}(x - \pi)^3 \\P_4 &= P_3 + \frac{\cos(\pi)}{4!}(x - \pi)^4\end{aligned}$$

Ahora, graficando con geogebra:



### Ejercicio 30, sección 9.7 ABD

Encontrar los primeros cuatro polinomios de Taylor para  $f(x) = \ln(x + 1)$  alrededor de  $x_0 = 0$ .

#### Encontrar las derivadas

Primero, calculamos las primeras 4 derivadas de  $f(x) = \ln(x + 1)$ :

$$\begin{aligned}
 f(x) &= \ln(x + 1) \\
 f'(x) &= \frac{1}{x + 1} \\
 f''(x) &= -\frac{1}{(x + 1)^2} \\
 f'''(x) &= \frac{2}{(x + 1)^3} \\
 f^{IV}(x) &= -\frac{6}{(x + 1)^4}
 \end{aligned}$$

#### Evaluar las derivadas en $x_0 = 0$

Evaluamos cada derivada en el punto  $x_0 = 0$ :

$$\begin{aligned}
f(0) &= \ln(1) = 0 \\
f'(0) &= 1 \\
f''(0) &= -1 \\
f'''(0) &= 2 \\
f^{IV}(0) &= -6
\end{aligned}$$

## Construir los polinomios

Usando la fórmula del polinomio de Taylor:

$$P_n(x) = f(a) + f'(a)(x - a) + \frac{f''(a)}{2!}(x - a)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x - a)^n$$

Construimos cada polinomio:

$$P_0(x) = 0$$

$$P_1(x) = P_0(x) + x = x$$

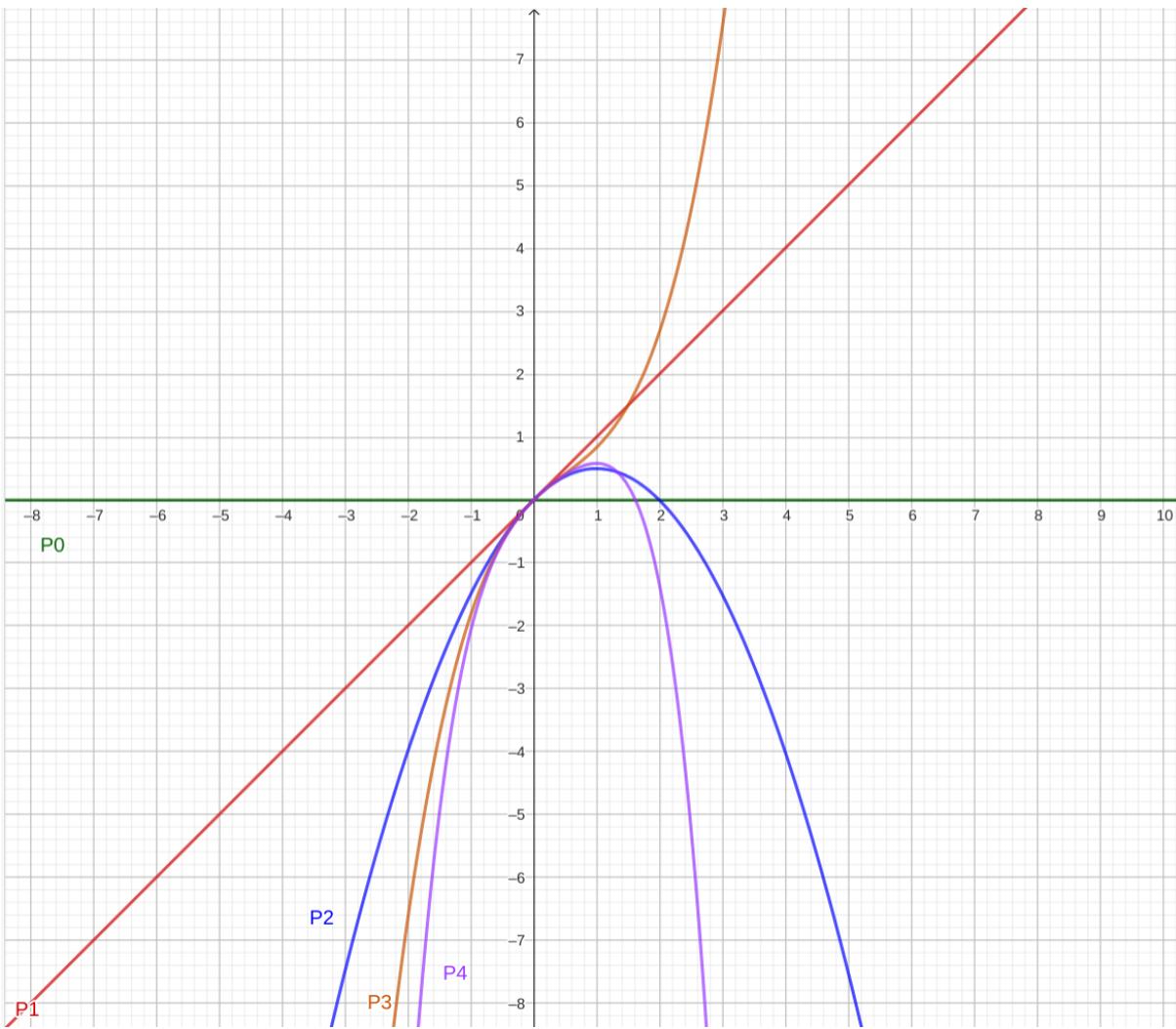
$$P_2(x) = P_1(x) - \frac{1}{2!}x^2 = x - \frac{1}{2}x^2$$

$$P_3(x) = P_2(x) + \frac{2}{3!}x^3 = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3$$

$$P_4(x) = P_3(x) - \frac{6}{4!}x^4 = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4$$

Por lo tanto, los primeros cuatro polinomios de Taylor para  $\ln(x + 1)$  alrededor de  $x_0 = 0$  son:

- $P_0(x) = 0$
- $P_1(x) = x$
- $P_2(x) = x - \frac{1}{2}x^2$
- $P_3(x) = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3$
- $P_4(x) = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4$



### Ejercicio 58, sección 3.6 ABD

Hay un mito que circula entre los principiantes estudiantes de cálculo que dice que todas las formas indeterminadas  $0^0 \infty^0$  y  $1^\infty$  tienen un valor de 1 por que "cualquier cosa a la potencia 0 es 1" y "1 a cualquier potencia es 1". La falacia es que dichas potencias no son potencias sino las descripciones de límites. Los siguientes ejemplos, los cuales fueron sugeridos por el profesor Jack Staib de la universidad de Drexel, muestran que dichas formas indeterminadas pueden tener cualquier valor real positivo:

$$(a) \lim_{x \rightarrow 0^+} x^{\frac{\ln(a)}{1+\ln(x)}}$$

$$(b) \lim_{x \rightarrow +\infty} x^{\frac{\ln(a)}{1+\ln(x)}}$$

$$(c) \lim_{x \rightarrow 0} (x+1)^{\frac{\ln(a)}{x}}$$

Verifica los resultados:

**Límite a), forma  $0^0$**

Considerando

$$y = \lim_{x \rightarrow 0^+} x^{\frac{\ln(a)}{1+\ln(x)}}$$

Entonces podemos aplicar logaritmo natural, donde:

$$f(x) = x$$

$$g(x) = \frac{\ln(a)}{1 + \ln(x)}$$

Entonces

$$\begin{aligned}\ln(y) &= \lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) \ln(f(x)) \\ &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln(a)}{1 + \ln(x)} \ln(x) \\ &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln(x) \ln(a)}{1 + \ln(x)}\end{aligned}$$

Ahora podemos aplicar la regla de L'hospital, donde

$$f(x) = \ln(x) \ln(a)$$

$$g(x) = 1 + \ln(x)$$

Derivamos las nuevas  $f(x)$  y  $g(x)$

$$\begin{aligned}f(x) &= \ln(x) \ln(a) \\ f'(x) &= \ln(x) \frac{d\ln(a)}{dx} + \ln(a) \frac{d\ln(x)}{dx} \\ &= \ln(a) \cdot \frac{1}{a} \cdot 0 + \ln(a) \frac{1}{x} \\ &= \frac{\ln(a)}{x} \\ g(x) &= 1 + \ln(x) \\ g'(x) &= \frac{1}{x}\end{aligned}$$

Entonces sustituimos en nuestro límite.

$$\begin{aligned}\ln(y) &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{\ln(a)}{x}}{\frac{1}{x}} \\ \ln(y) &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln(a)x}{x} \\ \ln(y) &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \ln(a)\end{aligned}$$

Aplicamos el límite sobre x

$$\ln(y) = \ln(a)$$

Quitamos el ln en ambos lados

$$y = a$$

Vemos que lo que nos restringe si a puede ser negativo o no es el hecho de que los logaritmos naturales solo están definidos en los reales positivos y por lo tanto, el valor del límite puede ser cualquier número que pertenezca a los reales siempre que sea positivo.

### Límite b), forma $\infty^0$

Este límite al ser prácticamente igual al anterior, lo que pasará es que de misma forma se terminará eliminando la  $x$  y como también tendremos un  $\ln(y) = \ln(a)$  también podemos concluir que a puede ser cualquier número real positivo.

---

### Límite c), forma $1^\infty$

Considerando

$$y = \lim_{x \rightarrow 0} (x+1)^{\frac{\ln(a)}{x}}$$

Aplicamos ln sobre ambos lados de la igualdad

$$\begin{aligned}f(x) &= (x+1) \\g(x) &= \frac{\ln(a)}{x}\end{aligned}$$

sustituimos

$$\begin{aligned}\ln(y) &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(a)}{x} \ln(x+1) \\&= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(a) \ln(x+1)}{x}\end{aligned}$$

Ahora aplicamos regla de L'hopital

$$\begin{aligned}f(x) &= \ln(a)(\ln(x+1)) \\f'(x) &= \ln(a) \cdot \frac{1}{x+1} \cdot 1 + \ln(x+1) \cdot \frac{1}{a} * 0 \\&= \frac{\ln(a)}{x+a} \\g(x) &= x \\&= 1\end{aligned}$$

Sustituimos

$$\begin{aligned}\ln(y) &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{\ln(a)}{x+1}}{\frac{1}{1}} \\&= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(a)}{x+1} \quad \text{Aplicamos límite} \\&= \frac{\ln(a)}{1} = \ln(a)\end{aligned}$$

Como volvemos a obtener

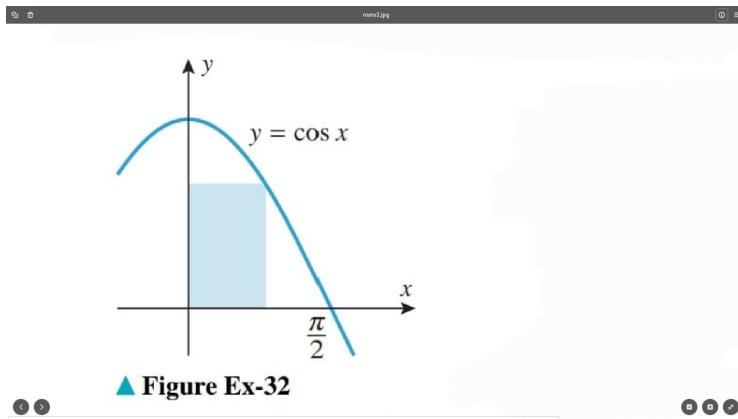
$$\begin{aligned}\ln(y) &= \ln(a) \\y &= a\end{aligned}$$

Podemos concluir que también el valor del límite c) puede ser cualquier real positivo.

Por lo tanto, podemos concluir que los valores de los 3 límites propuestos por Jack Staib pueden tomar el valor de cualquier real positivo.

## 2 Ejercicio 32, sección 4.7 ABD

Usa el Método de Newton para aproximar las dimensiones del rectángulo de mayor área que puede inscribirse debajo de la curva  $y = \cos x$  para  $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$  (ver la figura).



▲ Figure Ex-32

#### 1. Expresión del área:

La base del rectángulo es  $2x$  y la altura es  $y = \cos x$ . Entonces, el área  $A(x)$  del rectángulo es:

$$A(x) = 2x \cos x$$

#### 2. Derivada del área:

Para encontrar el máximo, derivamos  $A(x)$  respecto a  $x$ :

$$A'(x) = -2x \sin x + 2 \cos x$$

Queremos que  $A'(x) = 0$  para encontrar los valores críticos.

#### 3. Aplicación del Método de Newton:

Definimos  $f(x) = A'(x) = -2x \sin x + 2 \cos x$  y su derivada  $f'(x)$  para usar en el Método de Newton:

$$f'(x) = -2x \cos x - 4 \sin x$$

Usando un valor inicial  $x_0 = 0.5$  y aplicando el Método de Newton, obtenemos que la aproximación para el valor de  $x$  que maximiza el área es:

$$x \approx 0.8603$$

#### 4. Cálculo de las dimensiones del rectángulo:

Con  $x \approx 0.8603$ :

- La **altura** del rectángulo es  $y = \cos(0.8603) \approx 0.6522$ .
- El **ancho** del rectángulo es  $2x = 2 \cdot 0.8603 \approx 1.7207$ .

#### 5. Área máxima:

El área máxima del rectángulo es:

$$A \approx 1.1222$$

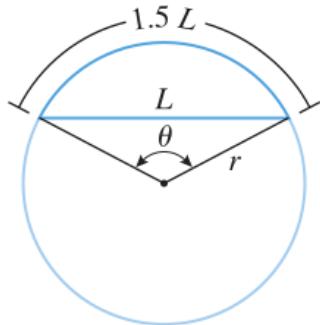
Por lo tanto, las dimensiones del rectángulo de mayor área que se puede inscribir bajo la curva  $y = \cos x$  para  $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$  son aproximadamente:

- **Altura:** 0.6522
- **Ancho:** 1.7207
- **Área máxima:** 1.1222

## Ejercicio 33 sección 4.7 ABD

### Demostración

Demostrar que en un círculo de radio  $r$ , el ángulo central  $\theta$  que subtienede un arco cuya longitud es 1.5 veces la longitud  $L$  de su cuerda satisface la ecuación  $\theta = 3 \sin(\theta/2)$ . Luego, usar el Método de Newton



▲ Figure Ex-33

para aproximar  $\theta$ .

1) Establecemos las relaciones fundamentales en un círculo de radio  $r$ :

- Longitud del arco:  $s = r\theta$
- Longitud de la cuerda:  $L = 2r \sin(\theta/2)$

2) Por el enunciado, sabemos que el arco es 1.5 veces la cuerda:

$$\begin{aligned}s &= 1.5L \\ r\theta &= 1.5(2r \sin(\theta/2)) \\ r\theta &= 3r \sin(\theta/2)\end{aligned}$$

3) Simplificando:

$$\theta = 3 \sin(\theta/2)$$

Por lo tanto queda demostrado.

### Método de Newton

Para resolver la ecuación  $\theta = 3 \sin(\theta/2)$ , definimos:

$$\begin{aligned}f(\theta) &= \theta - 3 \sin(\theta/2) \\ f'(\theta) &= 1 - \frac{3}{2} \cos(\theta/2)\end{aligned}$$

La fórmula iterativa de Newton es:

$$\theta_{n+1} = \theta_n - \frac{f(\theta_n)}{f'(\theta_n)} = \theta_n - \frac{\theta_n - 3 \sin(\theta_n/2)}{1 - \frac{3}{2} \cos(\theta_n/2)}$$

Tomando  $\theta_0 = 2$  como valor inicial:

Iteración	Valor de $\theta_n$ (radianes)
0	2
1	4.76667118856
2	3.47244868771
3	3.06074062731
4	2.99347087944
5	2.9915646674
6	2.99156313645
7	2.99156313644

El método converge a:

$$\theta = 2.99156313644 \text{ radianes} = 171.4039 \text{ grados}$$

### Ejercicio 48, Review Exercises Cap. 4 ABD

Usa derivación implícita para mostrar que la función definida como  $\sin(x) + \cos(y) = 2y$ , tiene puntos críticos siempre que  $\cos(x) = 0$ .

Entonces ya sea por la primera o segunda derivada determina si estos puntos críticos son máximos o mínimos.

Teniendo

$$\sin(x) + \cos(y) = 2y$$

Derivamos sobre x

$$\begin{aligned} \cos(x) - \sin(y)y' &= 2y' \\ \cos(x) &= 2y' + \sin(y)y' \\ \cos(x) &= y'(2 + \sin(y)) \\ y' &= \frac{\cos(x)}{2\sin(y)} \end{aligned}$$

Ahora, para obtener los puntos críticos, encontramos cuando es que  $f'(x) = 0$

$$\begin{aligned} \frac{\cos(x)}{2\sin(x)} &= 0 \\ \cos(x) &= 0 \end{aligned}$$

Y sabemos que el  $\cos(x)$  vale 0 siempre que x tome los siguientes valores:

$$x_1 = \frac{\pi}{2}, \quad x_2 = \frac{3\pi}{2}$$

Por, lo que ahora sustituimos en  $f(x)$  (la func. original)

**Sustituimos para  $x_1$**

$$\begin{aligned} \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) + \cos(y) &= 2y \\ 1 + \cos(y) &= 2y \\ 2y - \cos(y) &= 1 \end{aligned}$$

Sustituimos para  $x_2$

$$\begin{aligned}\operatorname{sen}\left(\frac{3\pi}{2}\right) + \cos(y) &= 2y \\ -1 + \cos(y) &= 2y \\ 2y - \cos(y) &= -1\end{aligned}$$

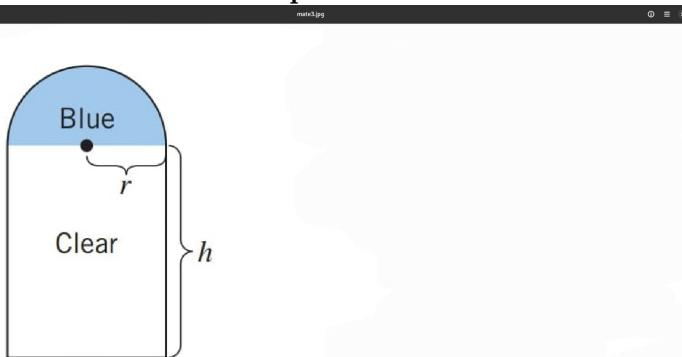
Como 1 y -1 son asignados a la misma asignación en y, tenemos que para  $x_1$  se trata de un punto máximo y para  $x_2$  un mínimo.

Por último, como cos y sen son funciones periódicas tales que no tienen ningún modificador  $w$ , estos puntos se repiten cada  $2\pi k$ , de tal forma que los valores de x son

$$\begin{aligned}x_1 + 2\pi k \\ x_2 + 2\pi k\end{aligned}$$

### 3 Problema 60, capítulo 4, ABD

Una ventana de iglesia consiste en una sección semicircular azul sobre una sección rectangular clara, como se muestra en la figura adjunta. El vidrio azul deja pasar la mitad de luz por unidad de área que el vidrio claro. Encuentra el radio  $r$  de la ventana que permita la mayor cantidad de luz si el perímetro de toda la ventana es  $P$  pies.



▲ Figure Ex-60

1. **Planteamiento del problema:** La ventana tiene dos secciones:

- Una parte semicircular azul con radio  $r$ .
- Una parte rectangular clara con altura  $h$  y ancho  $2r$  (porque coincide con el diámetro de la semicircunferencia).

2. **Perímetro de la ventana:** El perímetro total  $P$  de la ventana está dado por la suma de:

- La semicircunferencia azul de radio  $r$ :  $\pi r$ .
- Los dos lados verticales del rectángulo:  $2h$ .
- La base del rectángulo:  $2r$ .

Entonces, la ecuación para el perímetro es:

$$P = \pi r + 2h + 2r$$

3. **Área de la ventana (para maximizar la cantidad de luz):** La luz que pasa por la ventana depende del área de cada sección y de la cantidad de luz que permite pasar cada material:

- Área de la sección semicircular azul:  $\frac{1}{2}\pi r^2$ , pero sólo deja pasar la mitad de la luz, por lo que la luz efectiva es  $\frac{1}{4}\pi r^2$ .
- Área de la sección rectangular clara:  $2rh$ , y deja pasar toda la luz.

La luz total que pasa a través de la ventana es:

$$L = \frac{1}{4}\pi r^2 + 2rh$$

4. **Resolver para  $h$  en términos de  $r$ :** De la ecuación del perímetro, despejamos  $h$ :

$$h = \frac{P - \pi r - 2r}{2}$$

5. **Sustitución de  $h$  en la ecuación de la luz:** Sustituimos  $h$  en la ecuación de  $L$  para obtener una función de  $r$  solamente:

$$L(r) = \frac{1}{4}\pi r^2 + 2r \left( \frac{P - \pi r - 2r}{2} \right)$$

6. **Maximizar  $L$ :** Derivamos  $L$  con respecto a  $r$ , igualamos a cero y resolvemos para  $r$  para encontrar el valor que maximiza la cantidad de luz que pasa.

## Solución para encontrar el radio $r$

Para maximizar la cantidad de luz que pasa a través de la ventana, utilizamos la función de luz total  $L(r)$  en términos del radio  $r$ :

$$L(r) = \frac{1}{4}\pi r^2 + 2r \left( \frac{P - \pi r - 2r}{2} \right)$$

Simplificamos la segunda parte de la expresión:

$$\begin{aligned} L(r) &= \frac{1}{4}\pi r^2 + r(P - \pi r - 2r) \\ L(r) &= \frac{1}{4}\pi r^2 + Pr - \pi r^2 - 2r^2 \\ L(r) &= -\frac{3}{4}\pi r^2 - 2r^2 + Pr \end{aligned}$$

### Derivada de $L(r)$ respecto a $r$

Derivamos  $L(r)$  con respecto a  $r$ :

$$L'(r) = -\frac{3}{2}\pi r - 4r + P$$

Para encontrar el valor de  $r$  que maximiza la luz, igualamos  $L'(r)$  a cero:

$$-\frac{3}{2}\pi r - 4r + P = 0$$

---

## Resolver para $r$

Agrupamos los términos en  $r$ :

$$r \left( -\frac{3}{2}\pi - 4 \right) = -P$$

$$r = \frac{P}{\frac{3}{2}\pi + 4}$$

Este valor de  $r$  maximiza la cantidad de luz que pasa a través de la ventana. Si se da un valor específico para  $P$ , podemos sustituirlo y calcular el valor numérico de  $r$ .

## Problema 72 R.E. Cap. 4 ABD

Según la Ley de Kepler, los planetas en nuestro sistema solar se mueven en órbitas elípticas alrededor del Sol. Si el punto más cercano de un planeta al Sol ocurre en el tiempo  $t = 0$ , entonces la distancia  $r$  desde el centro del planeta al centro del Sol en algún tiempo posterior  $t$  puede determinarse mediante la ecuación:

$$r = a(1 - e \cos \phi)$$

donde  $a$  es la distancia promedio entre centros,  $e$  es una constante positiva que mide la "planitud" de la órbita elíptica, y  $\phi$  es la solución de la ecuación de Kepler:

$$\frac{2\pi t}{T} = \phi - e \sin \phi$$

donde  $T$  es el tiempo que toma una órbita completa del planeta.

### Datos

- $t = 90$  días
- $T = 365$  días
- $a = 150 \times 10^6$  km
- $e = 0.0167$

### Resolución de la Ecuación de Kepler

Sustituimos los valores en la ecuación de Kepler:

$$\frac{2\pi(90)}{365} = \phi - 0.0167 \sin \phi$$

$$1.5534 = \phi - 0.0167 \sin \phi$$

Para resolver esta ecuación transcendental, utilizamos el Método de Newton:

Definimos:

$$f(\phi) = \phi - 0.0167 \sin \phi - 1.5534$$

$$f'(\phi) = 1 - 0.0167 \cos \phi$$

---

La fórmula iterativa de Newton es:

$$\phi_{n+1} = \phi_n - \frac{f(\phi_n)}{f'(\phi_n)}$$

Comenzando con  $\phi_0 = 1.5534$ :

Iteración	Valor de $\phi_n$
0	1.5534
1	1.5701
2	1.5701

El método converge rápidamente a  $\phi = 1.5701$ .

## Cálculo de la Distancia

Ahora sustituimos  $\phi = 1.5701$  en la ecuación de la distancia:

$$\begin{aligned} r &= a(1 - e \cos \phi) \\ &= 150 \times 10^6 (1 - 0.0167 \cos(1.5701)) \\ &= 150 \times 10^6 (1 - 0.0167(0.000696)) \\ &= 150 \times 10^6 (1 - 0.000011623) \\ &= 149,998,256.55 \text{ km} \end{aligned}$$

## Conclusión

La distancia de la Tierra al Sol cuando  $t = 90$  días es aproximadamente 149,998,256.55 km.