Fonctions numériques: limites et continuité

Rania RAIS

Première année licence informatique de gestion

Octobre 2020

ISG
BIZERTE
INSTITUT SUPÉRIEUR DE GESTION

I) Généralités

Définition

Soit D une partie de $\mathbb{R}$. On appelle fonction réelle d'une variable réelle à valeurs réelles, toute application f définie sur une partie D de $\mathbb{R}$ à valeur dans $\mathbb{R}$. D est appelé domaine de définition de f et est notée D_f.

$$D_f = \{x \in \mathbb{R}, f(x)\,\text{existe}\}.$$

Exemples :

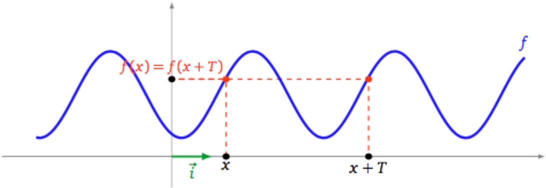
- $f(x) = \sin \dfrac{1}{x}; \quad D_f(x) = \mathbb{R}^*.$
- $g(x) = \sqrt{x^2 - 1}; \quad D_g(x) =]\infty, -1] \cup [1, +\infty[.$

Définition

Soit $f : D_f \mapsto \mathbb{R}$, f est dite périodique et de période T si

a) $\forall x \in D_f \quad (x+T) \in D_f$,

b) $f(x) = f(x+T)$.



Exemples :

- Soit $f(x) = \sin(x)$; $D_f = \mathbb{R}$. f est périodique de période 2π.

Définitions

Soit $f : D_f \mapsto \mathbb{R}$.

1. *On dit que la fonction* f *est symétrique par rapport à l'axe vertical* $x = a$, *si et seulement si :*
   $\forall x \in D_f \quad (a - x) \in D_f, \quad (a + x) \in D_f \quad \text{on a :}$
   $$f(a - x) = f(a + x).$$
2. *On dit que la fonction* f *est symétrique par rapport au point* $M(a, f(a))$, *si et seulement si :*
   $\forall x \in D_f \quad (a - x) \in D_f, \quad (a + x) \in D_f \quad \text{on a :}$
   $$f(a + x) + f(a - x) = 2f(a).$$

Définition

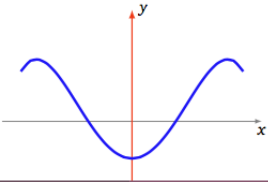
Soit $f : D_f \mapsto \mathbb{R}$

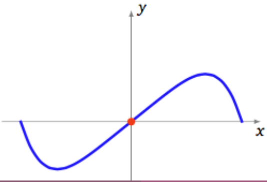
1. f *est dite paire si* $\forall x \in D_f, (-x) \in D_f$ *et* $f(-x) = f(x)$.
2. f *est dite impaire si* $\forall x \in D_f, (-x) \in D_f$ *et* $f(-x) = -f(x)$.

Exemples : La fonction cosinus est paire.

Interprétation graphique :

- f est paire si et seulement si son graphe est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées (figure de gauche).
- f est impaire si et seulement si son graphe est symétrique par rapport à l'origine (figure de droite).





Remarque :

Si la fonction f est paire ou impaire et/ou périodique et/ou possède un axe ou un point de symétrie, alors on peut grâce à ces éléments de symétrie, réduire le domaine de définition de f à un domaine plus petit qu'on l'appelle domaine d'étude.

Exemple :

Soit $f(x) = \sin(x)$; $D_f = \mathbb{R}$. f est impaire et 2π périodique donc le domaine d'étude de f se ramène à $D_E = [0, \pi]$.

Définition

Soit $f : D_f \mapsto \mathbb{R}$.

- *f est dite majorée (resp.minorée) si $f(D_f)$ est une partie majorée (resp. minorée) de $\mathbb{R}$. C'est à dire*

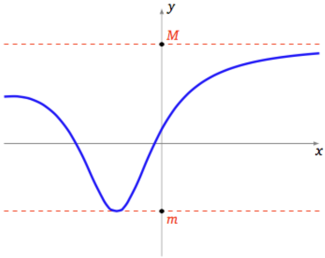
$$\exists\, M \in \mathbb{R} \quad \forall x \in D_f, f(x) \leq M. \quad (\text{resp.} \,\exists\, m \in \mathbb{R} \quad \forall x \in D_f, f(x) \geq m).$$

Définition

Soit $f : D_f \mapsto \mathbb{R}$.

- f *est dite bornée si* $f(D_f)$ *est une partie bornée de* $\mathbb{R}$. *C'est à dire*

$$\exists\, m \in \mathbb{R}, \exists\, M \in \mathbb{R} \quad \forall x \in D_f, \quad m \leq f(x) \leq M.$$



Exemple : $f(x) = \sin(x)$, f est bornée car $\forall x \in \mathbb{R} \quad -1 \leq f(x) \leq 1$.

Définitions

1. *Soit* x_0 *est un réel, on appelle voisinage de* x_0 *toute partie* V *de* $\mathbb{R}$ *contenant un intervalle ouvert centré en* x_0*, c'est à dire qu'il existe* $h > 0$ *tel que* $]x_0 - h, x_0 + h[\subset V$.

2. *Si* $x_0 = +\infty$*, on appelle voisinage de* $+\infty$ *toute partie* V *de* $\mathbb{R}$ *contenant un intervalle de la forme* $]y_0, +\infty[$.

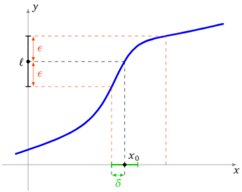
3. *Si* $x_0 = -\infty$*, on appelle voisinage de* $-\infty$ *toute partie* V *de* $\mathbb{R}$ *contenant un intervalle de la forme* $]-\infty, y_0[$.

Dans tous les cas, on note $V(x_0)$ *un voisinage de* x_0.

Définition

Soit $f : D_f \mapsto \mathbb{R}$. On suppose que f est définie sur un voisinage $V(x_0)$ de x_0 ; $(x_0 \in \mathbb{R})$, sauf peut être en x_0. On dit que f admet la limite l; $(l \in \mathbb{R})$ au point x_0 si et seulement si : $\forall \varepsilon > 0 \, \exists \, \delta > 0 \, \forall x \in D_f$ *tel que* $|x - x_0| < \delta$

$$\Rightarrow |f(x) - l| < \varepsilon.$$



On écrit : $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = l$.

Proposition

Si une fonction admet une limite alors cette limite est unique.

Définition

On dit qu'une fonction f définie à droite de x_0 a une limite l à droite de x_0 si et seulement si : $\forall \varepsilon > 0 \, \exists \, \delta > 0 \, \forall x \in D_f$ *tel que* $0 < x - x_0 < \delta$

$$\Rightarrow |f(x) - l| < \varepsilon.$$

On écrit :

$$\lim_{x \to x_0^+} f(x) = l \quad \text{ou} \quad \lim_{\substack{x \to x_0 \\ x > x_0}} f(x) = l.$$

Définition

De même f, définie à gauche de x_0, a une limite à gauche au point x_0 si et seulement si : $\forall \varepsilon > 0 \, \exists \, \delta > 0$ *tel que* $-\delta < x - x_0 < 0$

$$\Rightarrow |f(x) - l| < \varepsilon.$$

On écrit :

$$\lim_{x \to x_0^-} f(x) = l \quad \text{ou} \quad \lim_{\substack{x \to x_0 \\ x < x_0}} f(x) = l.$$

Remarques :

1. Si $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x) = l_1$ et $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x) = l_2$ avec $l_1 \neq l_2$ alors f n'admet pas de limite en x_0.
2. $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = l \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to x_0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to x_0^-} f(x) = l$.

Théorème

Etant donné deux fonctions f et g ayant chacune une limite en x_0 et un nombre réel λ, les fonctions $f+g$, λf et fg ont une limite en x_0 et on a :

1. $\lim\limits_{x\to x_0} (f+g)(x) = \lim\limits_{x\to x_0} f(x) + \lim\limits_{x\to x_0} g(x)$.
2. $\lim\limits_{x\to x_0} (\lambda f)(x) = \lambda \lim\limits_{x\to x_0} f(x)$.
3. $\lim\limits_{x\to x_0} (fg)(x) = \lim\limits_{x\to x_0} f(x) \cdot \lim\limits_{x\to x_0} g(x)$.

Théorème

Soient f et g deux fonctions numériques réelles.
On suppose que $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = l$ et $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = l'$ où $x_0, l, l' \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$.
On a les tableaux suivants :

- *Somme*

$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$	$l \in \mathbb{R}$	$l \in \mathbb{R}$	$l \in \mathbb{R}$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$
$\lim\limits_{x\to x_0} g(x)$	$l' \in \mathbb{R}$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
$\lim\limits_{x\to x_0} (f+g)(x)$	$l + l'$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	*F.I*

- *Produit*

$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$	$l \in \mathbb{R}$	$l \in \mathbb{R}_+^*$	$l \in \mathbb{R}_-^*$	$+\infty$	$-\infty$	0
$\lim\limits_{x\to x_0} g(x)$	$l' \in \mathbb{R}$	$\pm\infty$	$\pm\infty$	$\pm\infty$	$\pm\infty$	$\pm\infty$
$\lim\limits_{x\to x_0} (f \times g)(x)$	$l.l'$	$\pm\infty$	$\mp\infty$	$\pm\infty$	$\mp\infty$	*F.I*

Théorème

Soient f et g deux fonctions numériques réelles.
On suppose que $\lim_{x\to x_0} f(x) = l$ *et* $\lim_{x\to x_0} g(x) = l'$ *où* $x_0, l, l' \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$.
On a le tableau suivant :

- *Quotient*

$\lim_{x\to x_0} f(x)$	$l \in \mathbb{R}$	$l \in \mathbb{R}_+^*$	$l \in \mathbb{R}_-^*$	$l \in \mathbb{R}^*$	$l \in \mathbb{R}^*$	0	∞
$\lim_{x\to x_0} g(x)$	$l' \in \mathbb{R}^*$	$\pm\infty$	$\pm\infty$	0^+	0^-	0	∞
$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$	$\frac{l}{l'}$	$0^{\pm}$	$0^{\mp}$	$+\infty$ *si* $l>0$ $-\infty$ *si* $l<0$	$-\infty$ *si* $l>0$ $+\infty$ *si* $l<0$	*F.I*	*F.I*

Remarque : Le résultat de l'étude d'une des formes indéterminées :
$+\infty - \infty, \quad 0 \times \infty, \quad \frac{\infty}{\infty}, \quad \frac{0}{0}$ dépend des fonctions.

Corollaire

Soient $f, g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ *deux fonctions polynômes*

$$f(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n, \quad a_n \neq 0;$$
$$g(x) = b_0 + b_1 x + \ldots + b_m x^m, \quad b_m \neq 0;$$

1. $\forall x_0 \in \mathbb{R} \quad \lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0) = a_0 + a_1 x_0 + \ldots + a_n x_0^n.$
2. $\lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to \pm\infty} a_n x^n$
$$\lim_{x \to +\infty} a_n x^n = \begin{cases} +\infty & \text{si} \quad a_n > 0, \\ -\infty & \text{si} \quad a_n < 0. \end{cases}$$
$$\lim_{x \to -\infty} a_n x^n = \begin{cases} +\infty & \text{si} \quad a_n > 0 \text{ et } n \text{ pair}, \\ -\infty & \text{si} \quad a_n < 0 \text{ et } n \text{ pair}, \\ -\infty & \text{si} \quad a_n > 0 \text{ et } n \text{ impair}, \\ +\infty & \text{si} \quad a_n < 0 \text{ et } n \text{ impair}. \end{cases}$$
3. $\forall x_0 \in \mathbb{R}$ *tel que* $g(x_0) \neq 0 \quad \lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{f(x_0)}{g(x_0)}.$
$$\lim_{x \to \pm\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{a_n x^n}{b_m x^m}.$$

Application : Déterminer les limites aux bornes de l'ensemble de définition des fonctions suivantes :

$$1) f(x) = \frac{3x+1}{x+5}; \qquad 2) f(x) = \frac{x-7}{(2x-1)^2};$$

$$3) f(x) = \frac{x^2+x+1}{x^2+x-2}; \qquad 4) f(x) = \frac{(2x+1)^4}{x^3+27};$$

$$5) f(x) = \frac{x}{\sqrt{x}+2}; \qquad 6) f(x) = \frac{1+2|x|}{1-|x|};$$

$$7) f(x) = \sqrt{x+4} - \sqrt{x}; \quad 8) f(x) = \sqrt{\frac{1-x^3}{1+x^3}}.$$

Proposition

- *Si* $f \leq g$ *et si* $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = l \in \mathbb{R}$ *et* $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = l' \in \mathbb{R}$ *alors* $l \leq l'$.
- *Si* $f \leq g$ *et si* $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = +\infty$ *alors* $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = +\infty$.
- *Si* $f \leq g \leq h$ *et si* $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \lim\limits_{x \to x_0} h(x) = l \in \mathbb{R}$ *alors* g *a une limite en* x_0 *et* $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = l$.

III)Continuité

Définitions

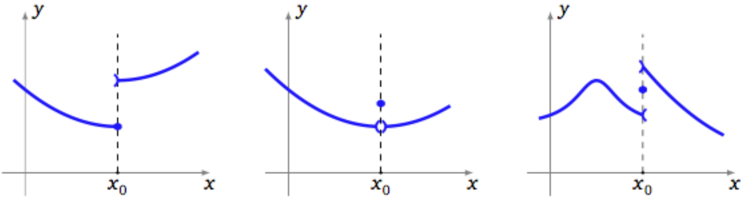
Une fonction f définie sur un intervalle I est continue en $x_0 \in I$ si et seulement si $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 \ \forall x \in I$ *tel que* $|x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$.

$$\Leftrightarrow \lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0).$$

- *On dit f est continue à droite en x_0 si et seulement* $\lim_{x \to x_0^+} f(x) = f(x_0)$.
- *On dit f est continue à gauche en x_0 si et seulement* $\lim_{x \to x_0^-} f(x) = f(x_0)$.
- *On dit f est continue dans l'intervalle $[a, b]$ si elle est continue en tout point x de $]a, b[$ et est continue à droite de a et à gauche de b.*

Remarques :

- Si f est continue à droite et à gauche en x_0 alors elle est continue en x_0.
- Intuitivement, une fonction est continue sur un intervalle si sa courbe représentative n'admet pas de saut. Voici des fonctions qui ne sont pas continues en x_0 :



Théorème

Soient f et g deux fonctions continues en x_0, alors

1. $f+g$ *et* fg *sont continues en* x_0.
2. *Si* $g(x) \neq 0$ *au voisinage de* x_0 *et* $g(x_0) \neq 0$ *alors* $\dfrac{f}{g}$ *est continue en* x_0.
3. *Si* f *est continue en* x_0 *et* g *est continue en* $f(x_0)$ *alors* $g \circ f$ *est continue en* x_0.

Exemples

1. Toute fonction constante $x \longmapsto \lambda$ $(\lambda \in \mathbb{R})$ est continue sur $\mathbb{R}$.
2. Toute fonction polynômiale est continue sur $\mathbb{R}$.
3. Toute fonction rationnelle est continue sur son domaine de définition.
4. Les fonctions cosinus et sinus sont continues sur $\mathbb{R}$.

Proposition

Soit f une fonction définie sur un intervalle ouvert I et x_0 un réel de I. Si f est positive sur I et f est continue en x_0, alors la fonction $\sqrt{f}$ est continue en x_0.

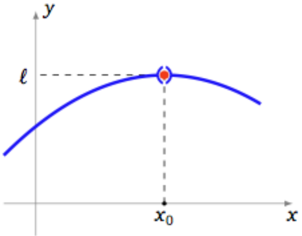
Définitions

Soit I un intervalle et soit $x_0 \in I$. Soit f une fonction définie et continue sur $I \backslash \{x_0\}$. On dit que f est prolongeable par continuité en x_0 si et seulement si

$$\lim_{x \to x_0^+} f(x) = \lim_{x \to x_0^-} f(x) = l \ \ (l \in \mathbb{R}).$$

Le prolongement par continuité de la fonction f en x_0 est alors la fonction définie et continue sur I par :

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } x \in I \backslash \{x_0\}, \\ l & \text{si } x = x_0. \end{cases}$$



Proposition

Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ *une fonction et* x_0 *un point de* I*. Alors :*

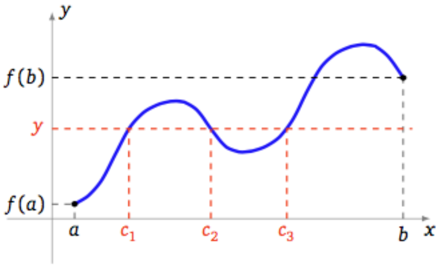
f *est continue en* $x_0 \quad \Leftrightarrow \quad$ *pour toute suite* (U_n) *qui converge vers* x_0 *la suite* $(f(U_n))$ *converge vers* $f(x_0)$*.*

Remarque

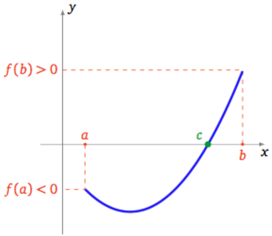
- On retiendra surtout l'implication : si f est continue sur I et si (U_n) est une suite convergente de limite l, alors $(f(U_n))$ converge vers $f(l)$.
- On l'utilisera intensivement pour l'étude des suites récurrentes $U_{n+1} = f(U_n)$: si f est continue et $U_n \to l$ alors $f(l) = l$.

Théorème

“Théorème des valeurs intermédiaires”
Soit f *une fonction continue sur un intervalle* I *de* $\mathbb{R}$. *Soient* $a, b \in I$ *tel que* $a < b$. *Alors pour tout* y *compris entre* $f(a)$ *et* $f(b)$, *il existe* $c \in [a, b]$ *tel que* $f(c) = y$.



Conséquence :
Soient I un intervalle et $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction continue sur I. Soient $a, b \in I$ tel que $f(a).f(b) < 0$ alors il existe $c \in]a, b[$ tel que $f(c) = 0$.



Exemple :$f(x) = \cos(x) - x$; $I = [0, \pi]$.
On a $f(0) = 1$ et $f(\pi) = -1 - \pi$ donc $f(0).f(\pi) < 0 \Rightarrow\ \exists\, c \in]0, \pi[$ tel que $f(c) = 0$ c.a.d $\cos(c) = c$.

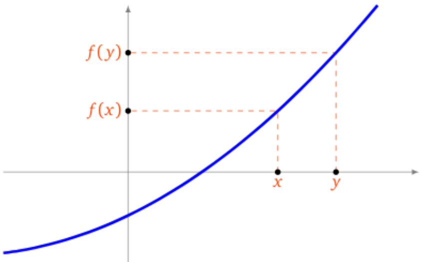
Théorème

L'image d'un intervalle par une fonction continue est un intervalle.

Définitions

Soit f une fonction définie sur un intervalle I, on dit que

1. *f est croissante sur I si* $\forall\, x, y \in I \quad x \leq y \Rightarrow f(x) \leq f(y)$.
2. *f est strictement croissante sur I si* $\forall\, x, y \in I \; x < y \Rightarrow f(x) < f(y)$.
3. *f est décroissante sur I si* $\forall\, x, y \in I \quad x \leq y \Rightarrow f(x) \geq f(y)$.
4. *f est strictement décroissante sur I si* $\forall\, x, y \in I \; x < y \Rightarrow f(x) > f(y)$.
5. *f est monotone (resp. strictement monotone) sur I si f est croissante ou décroissante (resp. strictement croissante ou strictement décroissante) sur I.*



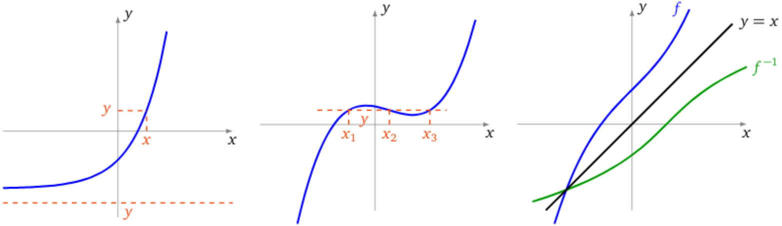
Définition

Soit $f : E \longrightarrow F$ une fonction , où E et F sont des parties de $\mathbb{R}$.

- *f est* **injective** *si $\forall x, x' \in E \; f(x) = f(x') \Rightarrow x = x'$;*
- *f est* **surjective** *si $\forall y \in F \, \exists \, x \in E \; y = f(x)$;*
- *f est* **bijective** *si f est à la fois injective et surjective, c'est à dire $\forall y \in F \, \exists! x \in E \; y = f(x)$;*

Proposition

$f : E \longrightarrow F$ est une fonction bijective alors il existe une unique application $g : F \longrightarrow E$ telle que $g \circ f = \mathrm{id}_\mathrm{E}$ et $f \circ g = \mathrm{id}_\mathrm{F}$. La fonction g est la **bijection réciproque** *de f et se note f^{-1}.*



Remarques :

- On rappelle que l'**identité**, $\mathrm{id}_{\mathrm{E}} : \mathrm{E} \longrightarrow \mathrm{E}$ est simplement définie par $x \mapsto x$.
- La courbe de f et celle de f^{-1} sont symétriques par rapport à la première bissectrice (la droite d'équation $y = x$).

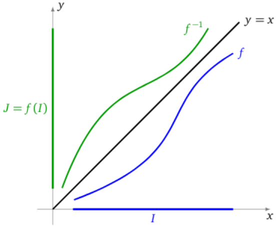
Théorème

Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$. Si f est continue et strictement monotone sur I, alors

1. *f établit une bijection de l'intervalle I dans l'intervalle image $J = f(I)$.*
2. *La fonction réciproque $f^{-1} : J \to I$ est continue et strictement monotone sur J et elle a le même sens de variation que f .*

Propriété de f^{-1} :

$$\forall\, x \in I, \forall\, y \in f(I); \quad f(x) = y \Leftrightarrow x = f^{-1}(y).$$



Proposition

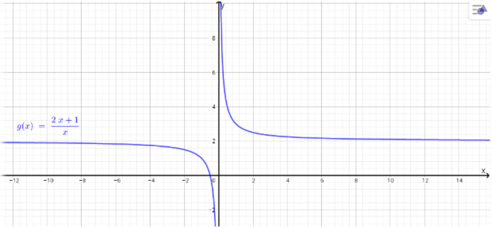
I	f *continue et strictement croissante alors* $f(I) =$	f *continue et strictement décroissante alors* $f(I) =$
$[a,b]$	$[f(a), f(b)]$	$[f(b), f(a)]$
$[a,b[$	$[f(a), \lim\limits_{x\to b^-} f(x)[$	$]\lim\limits_{x\to b^-} f(x), f(a)]$
$]a,b[$	$]\lim\limits_{x\to a^+} f(x), \lim\limits_{x\to b^-} f(x)[$	$]\lim\limits_{x\to b^-} f(x), \lim\limits_{x\to a^+} f(x)[$
$]-\infty,a]$	$]\lim\limits_{x\to -\infty} f(x), f(a)]$	$[f(a), \lim\limits_{x\to -\infty} f(x)[$
$]a,+\infty[$	$]\lim\limits_{x\to a^+} f(x), \lim\limits_{x\to +\infty} f(x)[$	$]\lim\limits_{x\to +\infty} f(x), \lim\limits_{x\to a^+} f(x)[$
$]-\infty,+\infty[$	$]\lim\limits_{x\to -\infty} f(x), \lim\limits_{x\to +\infty} f(x)[$	$]\lim\limits_{x\to +\infty} f(x), \lim\limits_{x\to -\infty} f(x)[$

L'étude des branches infinies d'une fonction donnée a pour objetif de comprendre en détails le comportement de $f(x)$ quand x tend vers ∞.

Remarque : Içi, on travaillera autour de $+\infty$, mais l'on pourrait faire exactement la même chose autour de $-\infty$.

1) Calcul de $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$

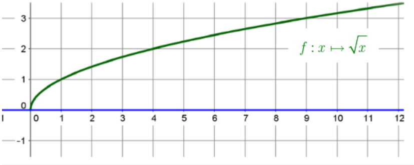
- Si c'est un réel l, la courbe admet une asymptote horizontale d'équation $y = l$ en $+\infty$.



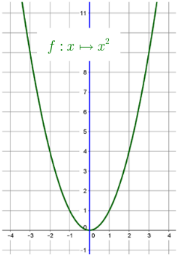
- Si cette limite est l'infinie, on passe à l'étape 2.

2) Calcul de $\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x}$

- Si c'est 0, on dit que la courbe de f admet une branche parabolique d'axe (OX).



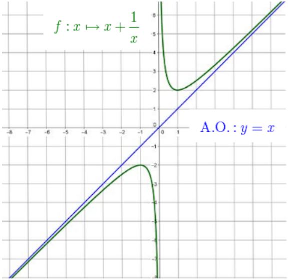
- Si c'est $+\infty$, on dit que la courbe de f admet une branche parabolique d'axe (OY).



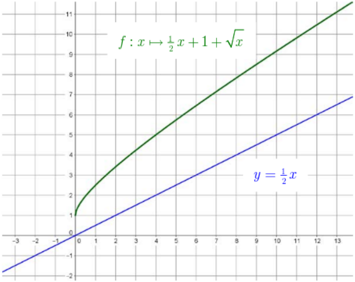
- Si c'est une réel a non nul, on passe à l'étape 3.

3) Calcul de $\lim_{x \to +\infty} f(x) - ax$

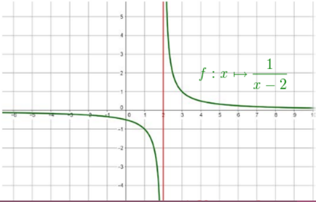
- Si c'est un réel b , la droite d'équation $y = ax + b$ est alors une asymptote oblique à la courbe de f.



- Si c'est $+\infty$, pas d'asymptote mais une branche parabolique de direction $y = ax$.



Remarque : Si $\lim_{x \to x_0} f(x) = \infty$ alors la droite d'équation $x = x_0$ est une asymptote verticale à la coube de f.



Merci pour votre attention

Dérivée d'une fonction

Rania RAIS

Première année licence en sciences de gestion

Novembre 2020

I) Généralités

Définition

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$, $f : I \mapsto \mathbb{R}$ une fonction et $x_0 \in I$.

- *On dit que f est dérivable en x_0 si $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ existe.*
  Lorsque cette limite existe, elle est notée $f'(x_0)$. Elle est appelée nombre dérivée de f en x_0.
- *On dit que f est dérivable à droite (resp. à gauche) en x_0 si $\lim\limits_{x \to x_0^+} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ (resp. $\lim\limits_{x \to x_0^-} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$) existe. On la note par $f'_d(x_0)$ (resp. $f'_g(x_0)$).*

Proposition

Pour que f soit dérivable au point x_0 il faut et il suffit que f admette une dérivée à droite et une dérivée à gauche au point x_0 qui soient égales.

Exemple : Soit $f(x) = x^2 + |x|$. f n'est pas dérivable en 0.

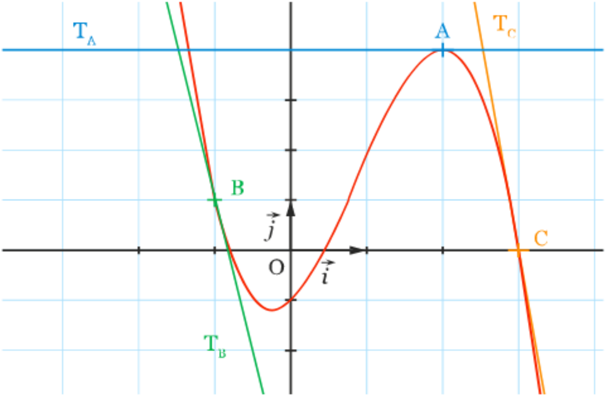
Remarque : La réciproque du théorème est fausse.

Interprétation géométrique du nombre dérivé :

Soit f une fonction et $\mathcal{C}_f$ sa courbe représentative. Si f est dérivable en x_0 alors $\mathcal{C}_f$ admet au point $M(x_0, f(x_0))$ une tangente d'équation :

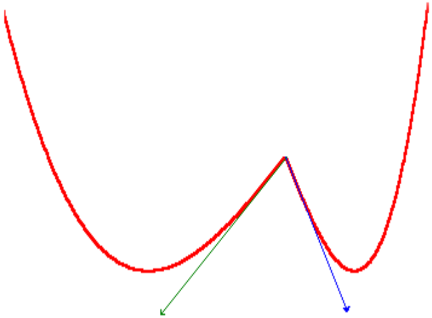
$$y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0).$$

- Si le coefficient directeur $f'(x_0) = 0$ alors $\mathcal{C}_f$ admet au point M une tangente horizontale.

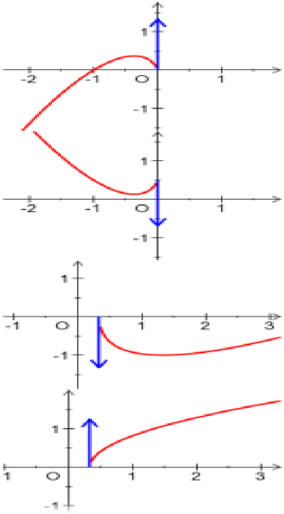


T_A
A
T_C
B
$\vec{j}$
C
O
$\vec{i}$
T_B

- Si $f'_d(x_0)$ et $f'_g(x_0)$ existent mais sont différents alors la courbe admet deux demis tangentes en M et fait un "angle" en ce point.



- Si $\lim_{x \to x_0} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \pm\infty$ alors $\mathcal{C}_f$ admet au point M une tangente verticale



Définition

On dit que f est dérivable sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ si f est dérivable en tout point de I. On appelle dérivée de f la fonction notée f' et définie par :

$$\begin{aligned} f' : \quad I &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto f'(x). \end{aligned}$$

Exemples :

- Toute fonction polynôme est dérivable sur $\mathbb{R}$.
- Toute fonction rationnelle est dérivable sur son ensemble de définition

Proposition

Si f et g sont dérivables sur I alors $f+g$, $f\times g$ et $\lambda f (\lambda \in \mathbb{R})$ sont dérivables sur I, si de plus $\forall x \in I, g(x) \neq 0$ alors $\dfrac{1}{g}$ et $\dfrac{f}{g}$ sont dérivables sur I et on a :

1. $(f+g)' = f' + g'$.
2. $(\lambda f)' = \lambda f'$.
3. $(f \times g)' = f' \times g + f \times g'$.
4. $\left(\dfrac{1}{g}\right)' = -\dfrac{g'}{g^2}$.
5. $\left(\dfrac{f}{g}\right)' = \dfrac{f' \times g - f \times g'}{g^2}$.

Proposition

Soit f une fonction dérivable et strictement positive sur un intervalle I. Alors la fonction $\sqrt{f}$ est dérivable sur I et on a :

$$\left(\sqrt{f}\right)' = \frac{f'}{2\sqrt{f}}.$$

Proposition

Si f est dérivable sur I et g est dérivable sur J et $\forall x \in I, f(x) \in J$ alors $g \circ f$ est dérivable sur I et

$$(g \circ f)' = f' \times (g' \circ f).$$

Fonction	Dérivée
x^n	$nx^{n-1} \quad (n \in \mathbb{Z})$
$\frac{1}{x}$	$-\frac{1}{x^2}$
$\sqrt{x}$	$\frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{x}}$
x^α	$\alpha x^{\alpha-1} \quad (\alpha \in \mathbb{R})$
e^x	e^x
$\ln x$	$\frac{1}{x}$
$\cos x$	$-\sin x$
$\sin x$	$\cos x$
$\tan x$	$1+\tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$

Fonction	Dérivée
u^n	$nu'u^{n-1} \quad (n \in \mathbb{Z})$
$\frac{1}{u}$	$-\frac{u'}{u^2}$
$\sqrt{u}$	$\frac{1}{2}\frac{u'}{\sqrt{u}}$
u^α	$\alpha u'u^{\alpha-1} \quad (\alpha \in \mathbb{R})$
e^u	$u'e^u$
$\ln u$	$\frac{u'}{u}$
$\cos u$	$-u'\sin u$
$\sin u$	$u'\cos u$
$\tan u$	$u'(1+\tan^2 u) = \frac{u'}{\cos^2 u}$

Application

1. Donner le domaine de dérivalité des fonctions suivantes et calculer les fonctions dérivées correspondantes :
   - $f(x) = \sqrt{x^2 - x + 1} + x + \dfrac{1}{2}$,
   - $g(x) = \dfrac{3\ln(2x)}{\sqrt{x}}$,
   - $h(x) = \dfrac{\mathrm{e}^{\mathrm{x}} - \mathrm{e}^{-\mathrm{x}}}{2}$.
2. On considère la fonction

$$u : \begin{array}{rcl} \mathbb{R}_+ & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \sin(x\sqrt{x}). \end{array}$$

Montrer que $v : x \longmapsto x\sqrt{x}$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+$ puis en déduire la dérivée de u.

Proposition

Si f est une fonction dérivable et strictement monotone sur un intervalle I de $\mathbb{R}$, et si sa dérivée f' ne s'annule pas sur I, alors sa fonction réciproque f^{-1} est dérivable sur $f(I)$ et on a :

$$\left(f^{-1}\right)' = \frac{1}{f' \circ f^{-1}}.$$

Application : On considère la fonction

$$f: \begin{array}{rcl} \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \mathrm{tg}(x). \end{array}$$

Montrer que f^{-1} est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\forall x \in \mathbb{R}\ \left(f^{-1}\right)'(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$.

Suites numériques

Rania RAIS

Première année licence informatique de gestion

Octobre 2020

ISG BIZERTE
INSTITUT SUPÉRIEUR DE GESTION

I) Généralités

Définition

Une suite numérique est une application

$$U : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R} \textit{ ou } \mathbb{C}$$

L'image par U d'un entier $n \in \mathbb{N}$ *est notée* U_n *au lieu de* $U(n)$*. Pour* $n \in \mathbb{N}$*, le nombre* U_n *est appelé le terme d'indice* n *de la suite* U*. La suite* U *est aussi notée* $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *ou* $(U_n)_{n\geq 0}$ *ou tout simplement* (U_n)*.*

Exemples :

- $(\sqrt{n})_{n\geq 0}$ est la suite de termes :0, 1, $\sqrt{2}, \sqrt{3}, \ldots$.
- $((-1)^n)_{n\geq 0}$ est la suite qui alterne 1,-1,1,-1,. . .

Remarque : Ne pas confondre la suite (U_n) et le terme général U_n de la suite qui est un nombre réel ou complexe.

Définition

Soit $(U_n)_{n\geq 0}$ *une suite numérique*

1. *On dit que* (U_n) *une suite stationnaire si elle est constante à partir d'un certain rang :*

$$\exists n_0 \in \mathbb{N}, U_n = U_{n_0} \quad \textit{pour tout } \; n \geq n_0$$

Autrement dit : $(U_n) = (U_0, U_1, U_2, \ldots, U_{n_0}, U_{n_0}, U_{n_0}, \ldots)$

Remarque : Si en particulier, on $U_n = U_0$, pour tout $n \in N$. On dit alors que la suite $(U_n)_{n\geq 0}$ est constante.

Définition

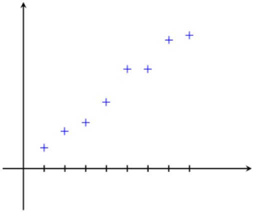
Soit $(U_n)_{n\geq 0}$ *une suite numérique. On dit que* (U_n) *est réelle (resp. positive, négative) si on a* $U_n \in \mathbb{R}$ *(resp.* $U_n \geq 0$*, resp.* $U_n \leq 0$*)* $\forall n \in \mathbb{N}$.

Définitions

Soit $(U_n)_{n\geq 0}$ *une suite numérique*

1. (U_n) *est croissante si* $\forall n \in \mathbb{N} \;\; U_{n+1} \geq U_n$.
2. (U_n) *est strictement croissante si* $\forall n \in \mathbb{N} \;\; U_{n+1} > U_n$.
3. (U_n) *est décroissante si* $\forall n \in \mathbb{N} \;\; U_{n+1} \leq U_n$.
4. (U_n) *est strictement décroissante si* $\forall n \in \mathbb{N} \;\; U_{n+1} < U_n$.
5. (U_n) *est monotone si elle est croissante ou décroissante.*
6. (U_n) *est strictement monotone si elle strictement croissante ou strictement décroissante.*

Exemple d'une suite croissante (mais pas strictement croissante) :



Définition

On appelle somme (resp. produit) de deux suites numériques la suite numérique $(S_n)_{n\geq 0}$ *(resp.* $(P_n)_{n\geq 0}$ *) définie par :*

$$S_n = U_n + V_n \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad (\textit{resp. } P_n = U_n.V_n \quad \forall n \in \mathbb{N}).$$

Définition

Le produit d'un scalaire $\lambda \in \mathbb{R}$ *par une suite numérique* $(U_n)_{n\geq 0}$ *est la suite numérique de terme général* λU_n, $n \in \mathbb{N}$. *On écrit* $(\lambda U_n)_n$.

Exemple : Soient $U_n = (-1)^n$ et $V_n = (-1)^{n+1}$.

$(U_n)_n + (V_n)_n = (0, 0, \cdots, 0, \cdots)$

$(U_n)_n.(V_n)_n = (-1, -1, \cdots, -1, \cdots)$

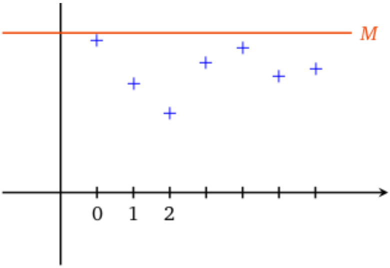
$2(U_n)_n = (2U_n)_n = (2, -2, 2, -2, \cdots)$

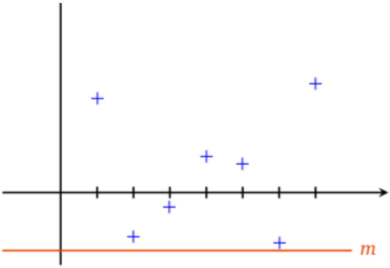
Définitions

Soit $(U_n)_{n\geq 0}$ *une suite numérique*

1. (U_n) *est* ***majorée*** *si* $\exists M \in \mathbb{R}$ *tel que* $\forall n \in \mathbb{N} \quad U_n \leq M$.
2. (U_n) *est* ***minorée*** *si* $\exists m \in \mathbb{R}$ *tel que* $\forall n \in \mathbb{N} \quad U_n \geq m$.
3. (U_n) *est* ***bornée*** *si elle est majorée et minorée, ce qui revient à dire :*

$$\exists M \in \mathbb{R} \text{ tel que } \forall n \in \mathbb{N} \quad |U_n| \leq M.$$





II) Convergence et divergence

Définition

La suite $(U_n)_{n\geq 0}$ a pour limite $l \in \mathbb{R}$ si : pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un entier n_0 tel que si $n \geq n_0$ alors $|U_n - l| \leq \varepsilon$:

$$\forall \varepsilon > 0 \;\; \exists n_0 \in \mathbb{N} \;\; \forall n \in \mathbb{N} \quad (n \geq n_0 \Rightarrow |U_n - l| \leq \varepsilon)\,.$$

On dit aussi que la suite $(U_n)_{n\geq 0}$ tend vers l. Autrement dit : U_n est proche d'aussi près que l'on veut de l, à partir d'un certain rang.

Définition

Une suite $(U_n)_{n\geq 0}$ est convergente si elle admet une limite finie l quand n tend vers $+\infty$.

Exemple

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} = 0.$$

Proposition

Si une suite est convergente, sa limite est unique.

Définition

- *La suite* $(U_n)_{n\geq 0}$ *tend vers* $+\infty$ *si*

$$\forall A > 0 \ \exists n_0 \in \mathbb{N} \ \forall n \in \mathbb{N} \quad (n \geq n_0 \Rightarrow U_n \geq A)\,.$$

- *La suite* $(U_n)_{n\geq 0}$ *tend vers* $-\infty$ *si*

$$\forall A > 0 \ \exists n_0 \in \mathbb{N} \ \forall n \in \mathbb{N} \quad (n \geq n_0 \Rightarrow U_n \leq -A)\,.$$

Définition

Une suite est divergente si et seulement si elle n'est pas convergente c'est à dire $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n$ *est l'infini où n'existe pas.*

Exemple

Pour k fixé ; $k \geq 1 \quad \lim\limits_{n\to+\infty} n^k = +\infty$.

Proposition

- $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n = l \Leftrightarrow \lim\limits_{n\to+\infty} (U_n - l) = 0 \Leftrightarrow \lim\limits_{n\to+\infty} |U_n - l| = 0.$
- $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n = l \Rightarrow \lim\limits_{n\to+\infty} |U_n| = |l|.$

Proposition

Soient (U_n) et (V_n) deux suites numériques réelles convergentes.

- *Si $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n = l$, où $l \in \mathbb{R}$, alors pour $\lambda \in \mathbb{R}$ on a $\lim\limits_{n\to+\infty} \lambda U_n = \lambda l$.*
- *Si $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n = l$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} V_n = l'$, où $l, l' \in \mathbb{R}$, alors*

$$\lim_{n\to+\infty} (U_n + V_n) = l + l',$$

$$\lim_{n\to+\infty} (U_n \times V_n) = l \times l'.$$

- *Si $\lim\limits_{n\to+\infty} (U_n) = l$ où $l \in \mathbb{R}^*$ alors $U_n \neq 0$ pour n assez grand et $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\dfrac{1}{U_n}\right) = \dfrac{1}{l}$.*

Théorème

Soient (U_n) *et* (V_n) *deux suites numériques réelles.*
On suppose que $\lim\limits_{n \to +\infty} U_n = l$ *et* $\lim\limits_{n \to +\infty} V_n = l'$ *où* $l, l' \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$.
On a les tableaux suivants :

- *Somme*

$\lim\limits_{n \to +\infty} U_n$	$l \in \mathbb{R}$	$l \in \mathbb{R}$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$
$\lim\limits_{n \to +\infty} V_n$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
$\lim\limits_{n \to +\infty} (U_n + V_n)$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	*F.I*

- *Produit*

$\lim\limits_{n \to +\infty} U_n$	$l \in \mathbb{R}_+^*$	$l \in \mathbb{R}_-^*$	$+\infty$	$-\infty$	0
$\lim\limits_{n \to +\infty} V_n$	$\pm\infty$	$\pm\infty$	$\pm\infty$	$\pm\infty$	$\pm\infty$
$\lim\limits_{n \to +\infty} (U_n \times V_n)$	$\pm\infty$	$\mp\infty$	$\pm\infty$	$\mp\infty$	*F.I*

Théorème

Soient (U_n) *et* (V_n) *deux suites numériques réelles.*
On suppose que $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n = l$ *et* $\lim\limits_{n\to+\infty} V_n = l'$ *où* $l, l' \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$.
On a le tableau suivant :

- *Quotient*

$\lim\limits_{n\to+\infty} U_n$	$l \in \mathbb{R}_+^*$	$l \in \mathbb{R}_-^*$	$l \in \mathbb{R}^*$	$l \in \mathbb{R}^*$	0	∞
$\lim\limits_{n\to+\infty} V_n$	$\pm\infty$	$\pm\infty$	0^+	0^-	0	∞
$\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{U_n}{V_n}$	$0^{\pm}$	$0^{\mp}$	$+\infty$ *si* $l>0$ $-\infty$ *si* $l<0$	$-\infty$ *si* $l>0$ $+\infty$ *si* $l<0$	*F.I*	*F.I*

Remarque : Les cas qu'on a pas présenté dans les tableaux précédents sont des cas où on ne peut pas conclure au préalable. Ces cas correspond à ce qu'on appelle formes indéterminées qui sont :

$$+\infty - \infty, \quad 0 \times \infty, \quad \frac{\infty}{\infty}, \quad \frac{0}{0}.$$

Exemples :

- $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(n - 3n^2\right) = -\infty.$
- $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{1}{n} \times (n+1) = 1.$
- $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{5n^2+1}{n+3} = +\infty.$
- $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(\left(n + \dfrac{1}{n}\right) - n\right) = 0.$
- $\lim\limits_{n \to +\infty} \sqrt{n+2} - \sqrt{n} = 0.$
- $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{1}{n} \times \ln n = 0.$
- $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{\mathrm{e^n}}{\ln n} = +\infty.$

Remarques

- Si (U_n) et (V_n) deux suites numériques telles que l'une soit convergente et l'autre soit divergente alors leur somme est divergente.

- Si (U_n) et (V_n) sont toutes deux divergentes on ne peut rien affirmer à propos de leur somme.

Exemple

La suite de terme $U_n = (-1)^n$ est divergente.

La suite de terme $V_n = (-1)^{n+1}$ est divergente.

La suite de terme $U_n + V_n$ converge vers 0.

Proposition

Soient (U_n), (V_n) et (W_n) trois suites et l un réel :
Si $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n = l = \lim\limits_{n\to+\infty} V_n$ *et* $U_n \leq W_n \leq V_n$ *alors* $\lim\limits_{n\to+\infty} W_n = l$

Exemple

On a $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\dfrac{-1}{2n^2} \leq \dfrac{(-1)^n}{2n^2} \leq \dfrac{1}{2n^2}$. On en déduit que $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{(-1)^n}{2n^2} = 0$.

Proposition

Soient (U_n) et (V_n) deux suites et à partir d'un certain rang

- *Si* $V_n \leq U_n$ *et* $\lim\limits_{n\to+\infty} V_n = +\infty$ *alors* $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n = +\infty$.
- *Si* $V_n \leq U_n$ *et* $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n = -\infty$ *alors* $\lim\limits_{n\to+\infty} V_n = -\infty$.

Exemple

On a $U_n = (3 + (-1)^n)n^2$ diverge vers $+\infty$. En effet , on a $3 + (-1)^n \geq 2$.
Donc $(3 + (-1)^n)n^2 \geq 2n^2$

Proposition

Toute suite convergente est bornée.

Remarque

La réciproque est fausse mais nous allons ajouter une hypothèse supplémentaire pour obtenir des résultats.

Théorème

- *Toute suite croissante et majorée est convergente.*
- *Toute suite décroissante et minorée est convergente.*

Remarques

- Une suite croissante et qui n'est pas majorée tend vers $+\infty$.
- Une suite décroissante et qui n'est pas minorée tend vers $-\infty$.

Définition

Les suites (U_n) et (V_n) sont dites adjacentes si

1. (U_n) *est croissante et* (V_n) *est décroissante,*
2. *Pour tout* $n \geq 0$, *on a* $U_n \leq V_n$,
3. $\lim\limits_{n \to +\infty} (V_n - U_n) = 0$

Théorème

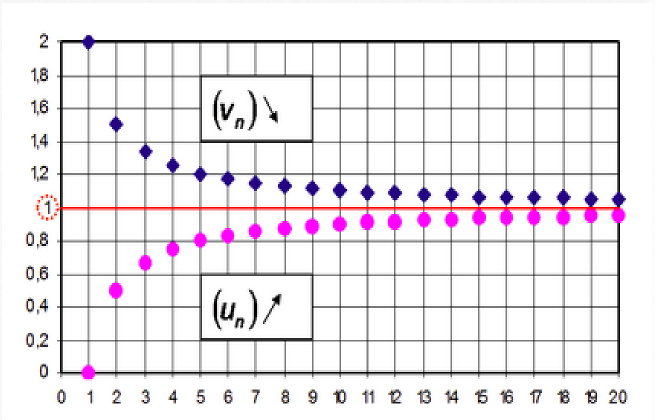
Si les suites (U_n) et (V_n) sont adjacentes, elles convergent vers la même limite.

Exemples : Soient les suites définies pour tout entier n non nul par :

$$U_n = 1 - \frac{1}{n} \qquad \text{et} \qquad V_n = 1 + \frac{1}{n}.$$

Montrons qu'elles sont adjacentes en justifiant qu'elles vérifient les 3 conditions.

1. (U_n) est suite croissante.
2. (V_n) est une suite décroissante.
3. $\lim_{n\to+\infty}(V_n - U_n) = \lim_{n\to+\infty}\frac{2}{n} = 0.$



1) Suite arithmétique

Définition	Il existe un réel r tel que pour tout n, $U_{n+1} = U_n + r$.
Terme général	$U_n = U_p + (n-p)r$.
Somme $S_n = \sum_{k=p}^{n} U_k ; (p \leq n)$	$S_n = \frac{n-p+1}{2}\left(U_p + U_n\right).$
Somme particulière	$\sum_{k=0}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$.

Le réel r s'appelle la raison de la suite arithmétique.

Exemple : Soit (U_n) la suite définie pour tout entier naturel n par

$$U_n = 7 + 4n.$$

2) Suite géométrique

Définition	Il existe un réel $q \neq 0$ tel que pour tout n, $U_{n+1} = q\,U_n$.
Terme général	$U_n = U_p\, q^{n-p}$.
Somme $S_n = \sum_{k=p}^{n} U_k; (p \leq n)$	$S_n = U_p \dfrac{1-q^{n-p+1}}{1-q}; \quad q \neq 1.$
Somme particulière	Si $a \neq 1, \quad \sum_{k=0}^{n} q^k = \dfrac{1-q^{n+1}}{1-q}.$

Le réel q s'appelle la raison de la suite géométrique.

Exemple : Soit la suite (U_n) définie par

$$U_n = \frac{3}{2^n}.$$

Proposition

Soit (U_n) *une suite géométrique de terme général :*

$$U_n = U_0\, q^n.$$

- *Si* $q > 1$, *alors* $\begin{cases} \lim\limits_{n\to+\infty} U_n = +\infty & \text{si } U_0 > 0. \\ \lim\limits_{n\to+\infty} U_n = -\infty & \text{si } U_0 < 0. \end{cases}$
- *Si* $-1 < q < 1$, *alors* $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n = 0$.
- *Si* $q = 1$, *on a* $\forall n \in \mathbb{N}\ U_n = U_0$.
- *Si* $q \leq -1$, *la suite* (U_n) *diverge.*

Exemple : La suite de terme général $\left(\frac{5}{6}\right)^n$ est une suite géométrique de raison $\frac{5}{6}$. Or $-1 < \frac{5}{6} < 1$ donc cette suite converge 0.

Merci pour votre attention

Développement limité

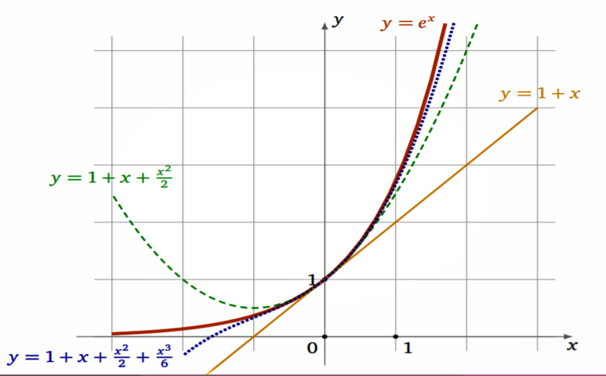
Rania RAIS

Première année licence informatique de gestion

Novembre 2020

Motivation

La meilleure droite pour approximer la fonction $\exp$ au voisinage de 0 est sa tangente au point 0. Mais si on veut rendre cette approximation plus fine, on peut l'approcher par la courbe d'équation $y = 1 + x + \frac{x^2}{2}$ et pourquoi pas par la courbe d'équation $y = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6}$. Cela nous permet d'avoir une meilleure vision sur le comportement local de $\exp$ au voisinage de 0 .



I)Définitions et premières propriétés

Définition

Soient f une fonction définie sur D contenant 0 et soit $n \in \mathbb{N}$
On dit que f admet un ***développement limité à l'ordre*** n ***au voisinage de*** 0 *(abrégé en $DL_n(0)$), s'il existe un polynôme P de degré inférieur ou égal à n tel que :*

$$f(x)=P(x)+x^n\varepsilon(x),$$

ou sous forme développée :

$$f(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_nx^n+x^n\varepsilon(x).$$

- $\varepsilon : D \to \mathbb{R}$ *telle que* $\lim\limits_{x\to 0} \varepsilon(x)=0$.
- n *est l'ordre du développement limité.*
- $P(x)$ *est la partie régulière à l'ordre n du $DL_n(0)$ de f.*
- $f(x)-P(x)=x^n\varepsilon(x)$ *est le reste à l'ordre n du $DL_n(0)$ de f. Il se note également $o(x^n)$.*

Remarques

- Le DL consiste, en gros, à trouver une approximation polynômiale à une fonction plus compliquée au voisinage d'un point.
- C'est le o qui indique l'ordre du DL. Plus n est grand, plus l'erreur $o(x^n)$ est petite, et donc plus l'approximation est fine.

Théorème

• *Si f possède un $DL_n(0)$, alors celui-ci est* ***unique*** *(i.e les coefficients a_k sont uniques).*

Par conséquent :
• *Si f est paire alors tous les coefficients de rang impair sont nuls (i.e $a_{2k+1} = 0$).*
• *Si f est impaire alors tous les coefficients de rang pair sont nuls (i.e $a_{2k} = 0$).*

Exemple

La partie régulière du développement limité de la fonction $\sin$ ne contient que des puissances impaires.

Théorème

Si f admet un $DL_n(0)$: $f(x) \underset{0}{=} \sum_{k=0}^{n} a_k x^k + o(x^n)$, alors f admet un $DL_p(0)$ pour tout $p \in \{0, ..., n\}$.

Ce $DL_p(0)$ s'écrit : $$f(x) = \sum_{k=0}^{p} a_k x^k + o(x^p).$$

*On dit qu'on a **tronqué** la partie régulière à l'ordre p.*

Exercice :

Soit $f(x) = 2 + 3x + x^4 + o(x^5)$, donner les $DL_n(0)$ de f pour $n \in \{0, \ldots, 5\}$.

Remarque :

Si f possède un $DL_n(0)$, cela n'implique pas qu'elle possède un $DL(0)$ à un ordre plus grand.

Proposition

*f admet une limite finie l en 0 **ssi** f admet un $DL_0(0)$. Ce développement s'écrit $f(x)=l+o(1)$.*
En particulier si f est continue en 0 alors f admet un $DL_0(0)$ qui s'écrit : $f(x)=f(0)+o(1)$.

Exemple :

La fonction $x \mapsto \dfrac{1}{x}$ ne possède pas de $DL(0)$.

Proposition

Soit f continue en 0, alors :
f est dérivable en 0 ***ssi*** *f admet un $DL_1(0)$. Ce développement s'écrit $f(x) = f(0) + f'(0)x + o(x)$.*

Remarque

A partir de $n \geq 2$, cette équivalence n'est plus valable. On a seulement un résultat dans un seul sens.

Formule de Taylor-Young et développements usuels

Théorème

Soit f une fonction définie sur D , $a \in D$ et $n \geq 1$. On suppose que f est n fois dérivable en a. Alors :

$$f(x)=\sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + o\left((x-a)^n\right)$$

La formule au point $a = 0$ s'écrit :

$$f(x)=\sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k + o(x^n).$$

Celà est équivalent à dire que f possède un $DL_n(0)$, avec $a_k = \dfrac{f^{(k)}(0)}{k!}$.

Exemples :

Les fonctions usuelles $(\exp, \ln(1+x), \sin, \cos, ..)$ étant de classe $\mathcal{C}^\infty$ en 0, elles possèdent alors des $DL_n(0)$, pour tout $n \in \mathbb{N}$.

On obtient ainsi un paquet de développements limités usuels au voisinage de 0.

$$\mathrm{e}^t = 1 + t + \frac{t^2}{2!} + \frac{t^3}{3!} + \frac{t^4}{4!} + \frac{t^5}{5!} + \cdots + \frac{t^n}{n!} + o(t^n).$$

$$\cos(t) = 1 - \frac{t^2}{2!} + \frac{t^4}{4!} - \frac{t^6}{6!} + \frac{t^8}{8!} + \cdots + (-1)^n \frac{t^{2n}}{(2n)!} + o(t^{2n}).$$

$$\sin(t) = t - \frac{t^3}{3!} + \frac{t^5}{5!} - \frac{t^7}{7!} + \cdots + (-1)^n \frac{t^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(t^{2n+1}).$$

$$\ln(1+t) = t - \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{3} - \frac{t^4}{4} + \cdots + (-1)^{n-1}\frac{t^n}{n} + o(t^n).$$

$$\frac{1}{1+t} = 1 - t + t^2 - t^3 + t^4 - t^5 + \cdots + (-1)^n t^n + o(t^n).$$

$$\frac{1}{1-t} = 1 + t + t^2 + t^3 + t^4 + t^5 + \cdots + t^n + o(t^n).$$

$$(1+t)^\alpha = 1 + \alpha t + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2}t^2 + \cdots$$

$$+ \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}t^n + o(t^n).$$

Remarque

- Le théorème précédent assure l'existence de $DL_n(0)$, pour toutes les fonctions qui sont n fois dérivable sur un intervalle contenant 0.
- Inversement, **existe-t-il des fonctions admettant un $DL_n(0)$, mais qui ne sont pas n fois dérivable en 0 ?**
- La réponse est oui. Les DLs ne viennent pas tous de la Formule de Taylor-Young. L'exercice qui suit confirme cette idée.

Exercice :

Soit $f(x) = \begin{cases} x^3 \sin(\dfrac{1}{x}) & \text{si } x \neq 0, \\ 0 & \text{si } x = 0. \end{cases}$.

1. Montrer que f admet un $DL_2(0)$.
2. Montrer que f n'est pas deus fois dérivable en 0.

Théorème

Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. *Et soient* f *et* g *deux fonctions admettant des* $DL_n(0)$ *de parties régulières respectives* P *et* Q *:*

$$f(x) = P(x) + o(x^n) \quad \text{et} \quad g(x) = Q(x) + o(x^n).$$

Alors :

- $\lambda f + g$ *admet un* $DL_n(0)$ *:* $(\lambda f + g)(x) = (\lambda P + Q)(x) + o(x^n)$.
- $f.g$ *admet un* $DL_n(0)$ *:* $(f.g)(x) = (P.Q)_{(n)}(x) + o(x^n)$.

  où $(P.Q)_{(n)}$ *est la troncature à l'ordre* n *du polynôme* $P.Q$.
- *Si* $\lim\limits_{0} g = 0$, $f \circ g$ *admet un* $DL_n(0)$ *qui s'écrit :*
  $(f \circ g)(x) = (P \circ Q)_{(n)}(x) + o(x^n)$.

  où $(P \circ Q)_{(n)}$ *est la troncature à l'ordre* n *du polynôme* $P \circ Q$.
- *Si* $\lim\limits_{0} g \neq 0$, $\dfrac{f}{g}$ *admet un* $DL_n(0)$ *qui s'écrit :*
  $(f/g)(x) = R(x) + o(x^n)$.

  où R *est le quotient de la division suivant les puissances croissantes de* P *par* Q *à l'ordre* n.

Remarque
Pour le produit et la composée, si les premiers coefficients des polynômes sont nuls, on peut parfois être économe et développer f ou g à un ordre inférieur. Les exemples suivants nous montrent comment être plus rapide et efficace dans le calcul.

Exemple 1 : Pour avoir un $DL_6(0)$ de $\sin(x^2)$, pas besoin de développer $\sin$ à l'ordre 6, développer à l'ordre 3 est suffisant.

Exemple 2 : Pour trouver un $DL_4(0)$ de $\ln(1+x)\sin(x)$, pas besoin de développer $\sin$ et $\ln(1+x)$ à l'ordre 4, développer à l'ordre 3 est suffisant.

Exercice :
Donner le $DL_4(0)$ de $x \mapsto \cos(x)\ln(1+x)$ et le $DL_5(0)$ de $\tan x$, le $DL_3(0)$ de $x \mapsto \mathrm{e}^{\sin \mathrm{x}}$.

Théorème

Soit f une fonction qui admet un $DL_n(0)$ qui s'écrit :

$f(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n + o(x^n)$.

• *Si f possède une primitive F sur un intervalle I contenant 0, alors :*

F admet un $DL_{n+1}(0)$ qui s'écrit :

$$F(x) = F(0) + a_0 x + \frac{a_1}{2} x^2 + \cdots + \frac{a_n}{n+1} x^{n+1} + o(x^{n+1}).$$

• *Si f est dérivable sur un intervalle I contenant 0 **ET** f' **possède** un $DL_{n-1}(0)$, alors :*

Le $DL_{n-1}(0)$ de f' s'écrit :

$f'(x) = a_1 x + 2a_2 x + \cdots + a_{n-1} x^{n-1} + o(x^{n-1})$.

Exercice :

Donner le $DL_4(0)$ de $x \mapsto \dfrac{1}{\cos^2(x)}$ et en déduire le $DL_5(0)$ de $\tan(x)$.

Définition

Soit f une fonction définie sur D contenant a et $n \in \mathbb{N}$.

*On dit que f admet un **développement limité à l'ordre** n **au voisinage de** a (abrégé en $DL_n(a)$), s' il existe $(a_k)_{0 \leq k \leq n} \in \mathbb{R}$ vérifiant :*

$$f(x) = a_0 + a_1(x-a) + a_2(x-a)^2 + \cdots + a_n(x-a)^n + o((x-a)^n).$$

Proposition

f admet un $DL_n(a) \Longleftrightarrow g(h) = f(a+h)$ admet $DL_n(0)$.

Plus précisément, si $g(h) = a_0 + a_1 h + \cdots + a_n h^n + o(h^n)$, *alors*

$$f(x) = a_0 + a_1(x-a) + a_2(x-a)^2 + \cdots + a_n(x-a)^n + o((x-a)^n).$$

Remarque

• En pratique, x étant au voisinage de a :

$$\left[\begin{array}{l} \text{1- On pose } \ h = x - a. \\ \text{2- On développe } \ g(h) = f(a+h), \text{par rapport à } h \text{ qui est au voisinage de} \\ \text{3- On remplace dans le développement } h \text{ par } \ x - a. \end{array}\right.$$

• Il ne faut jamais développer $(x-a)^k$.

Exemple : Pour déterminer le $DL_2(1)$ de $f(x) = \mathrm{e^x}$.

1- On pose $h = x - 1$.

2- $f(x) = f(h+1) = \mathrm{e^{h+1}}$, or :
$g(h) = \mathrm{e^{h+1}} = \mathrm{e.e^h} \underset{0}{=} \mathrm{e + e\,h} + \frac{\mathrm{e}}{2}\mathrm{h^2} + \mathrm{o(h^2)}$.
3- On revient en x, on obtient :
$f(x) = \mathrm{e} + \mathrm{e(x-1)} + \mathrm{e}\frac{\mathrm{(x-1)^2}}{2} + \mathrm{o((x-1)^2)}$.

1)Calcul de limites

Les DL sont très efficaces pour calculer des limites ayant des formes indéterminés. Il suffit de remarquer que si

$$f(x) = a_0 + a_1(x-a) + a_2(x-a)^2 + \cdots + a_n(x-a)^n + o((x-a)^n)$$

alors $\lim\limits_{x \to a} f(x) = a_0$.

Exemple : Calculer $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{2\cos(x) - 2}{x^2}$.

Pour le calcul de cette limite, on a besoin du développement limite du cosinus à l'ordre 2.

$\cos(x) = 1 - \dfrac{x^2}{2} + x^2\varepsilon(x)$ avec $\lim\limits_{x \to 0} \varepsilon(x) = 0$.

$\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{2\cos(x) - 2}{x^2} = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{-x^2 + 2x^2\varepsilon(x)}{x^2} = -1.$

2)Position d'une courbe par rapport à sa tangente

Proposition

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ *une fonction admettant un DL en* a *:*
$f(x) = a_0 + a_1(x-a) + a_k(x-a)^k + o((x-a)^k$*, où* k *est le plus petit entier* ≥ 2 *tel que le cœfficient* a_k *soit non nul. Alors l'équation de la tangente à la courbe de* f *en* a *est*

$$y = a_0 + a_1(x-a)$$

et la position de la courbe par rapport à la tangente pour x *proche de* a *est donnée par le signe* $f(x) - y$*, c'est à dire le signe de* $a_k(x-a)^k$*.*

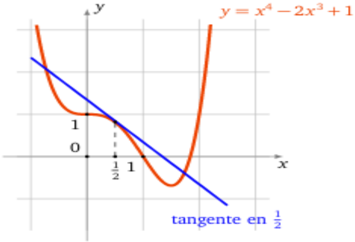
Exemples : Soit $f(x) = x^4 - 2x^3 + 1$

Déterminer la tangente en $\dfrac{1}{2}$ du graphe de f et préciser la position du graphe par rapport à la tangente. On a
$f'(x) = 4x^3 - 6x^2, f''(x) = 12x^2 - 12x$ donc $f''(\dfrac{1}{2}) = -3 \neq 0$ et $k = 2$.

Par la formule de Taylor-Young :

$$\begin{aligned} f(x) &= f(\frac{1}{2}) + f'(\frac{1}{2})(x-\frac{1}{2}) + \frac{f''(\frac{1}{2})}{2!}(x-\frac{1}{2})^2 + o((x-\frac{1}{2})^2) \\ &= \frac{13}{16} - (x-\frac{1}{2}) - \frac{3}{2}(x-\frac{1}{2})^2 + o((x-\frac{1}{2})^2) \end{aligned} .$$

Donc la tangente en $\frac{1}{2}$ est $y = \frac{13}{16} - (x-\frac{1}{2})$ et le graphe de f est en dessous de la tangente car $f(x) - y$ est négatif autour de $x = \frac{1}{2}$.



3)Développement limité en $+\infty$

Soit f une fonction définie sur un intervalle $I=]x_0,+\infty[$. On dit que f admet un DL en $+\infty$ à l'ordre n s'il existe des réels $a_0, a_1, \ldots, a_n$ tels que

$$f(x) = a_0 + \frac{a_1}{x} + \ldots + \frac{a_n}{x^n} + o\left(\left(\frac{1}{x^n}\right)\right).$$

Exemple : Soit $f(x) = \ln(2+\frac{1}{x})$. Déterminer $\mathrm{DL}_3(+\infty)$.

$$\begin{aligned} f(x) &= \ln(2) + \ln(1+\frac{1}{2x}) \\ &= \ln(2) + \frac{1}{2x} - \frac{1}{8x^2} + \frac{1}{24x^3} + o(\frac{1}{x^3}). \end{aligned}$$

Remarques :

- Un DL en $+\infty$ s'appelle aussi un développement asymptotique.
- Dire que $x \mapsto f(x)$ admet un DL en $+\infty$ à l'ordre n est équivalent à dire que $x \mapsto f(\frac{1}{x})$ admet un DL en 0^+ à l'ordre n.
- On peut définir ce qu'est un DL en $-\infty$.

Merci pour votre attention