CHAPITRE 0

Introduction générale

- Processus d'aide à la décision
- Exemple application
- Diverses applications de la Recherche opérationnelle
- Objectifs et contenu du cours

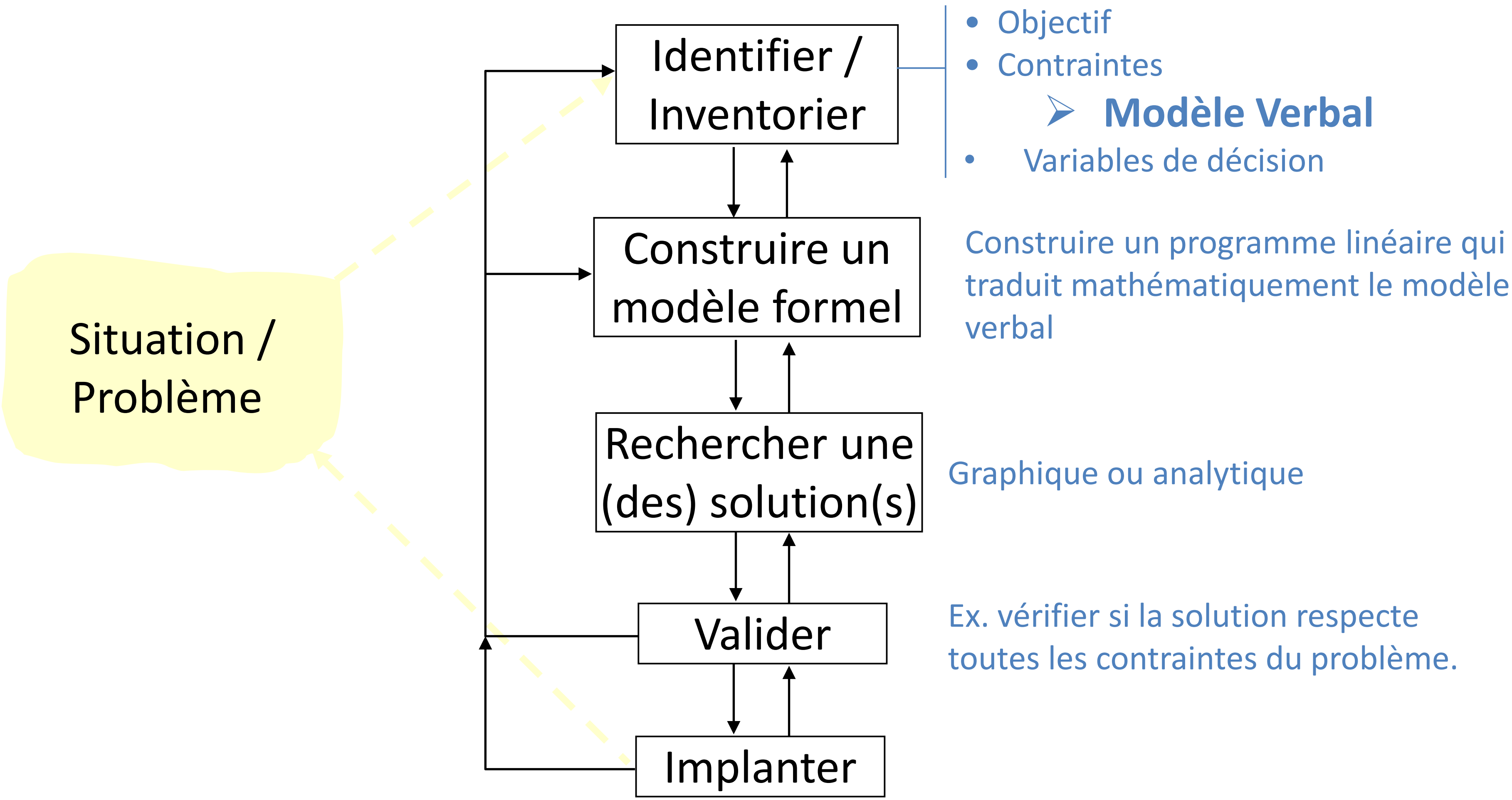
Plan

1. Processus d’aide à la décision
2. Exemple d’application
3. Diverses applications de la recherche opérationnelle
4. Objectifs et contenu du cours

Plan

1. Processus d'aide à la décision
2. Exemple d'application
3. Diverses applications de la recherche opérationnelle
4. Objectifs et contenu du cours

Processus d'aide à la décision



Plan

1. Processus d'aide à la décision
2. Exemple d'application
3. Diverses applications de la recherche opérationnelle
4. Objectifs et contenu du cours

Exemple d’application : Énoncé

Un fermier dispose de 35 hectares de terre et de 1000 heures de main-d’œuvre. Son objectif est de déterminer le nombre de tonnes qu'il doit produire pour chacune des cultures suivantes : Maïs, Blé et Fèves. Toutefois, ce fermier fait face à deux contraintes majeures : 1) Il doit produire au moins 20 tonnes de Blé pour nourrir son troupeau de vaches, et 2) au moins 40 tonnes de Maïs qu'il souhaite garder comme semence pour l’année prochaine. Le nombre d’hectares et de main-d’œuvre nécessaires pour produire une tonne de chaque culture sont donnés dans le tableau suivant:

	Maïs	**Blé**	**Fèves**
Hectares nécessaires pour produire une Tonne de la culture i	0.25	0.40	0.20
Heures de main-d’œuvre par tonne	6	5	7

Il est à noter que les prix du marché du Maïs, du Blé et des Fèves sont respectivement égale à 120D, 130D et 140D la tonne. Toutefois, le fermier affirme qu’il doit débourser 15 300 D pour couvrir les coûts de production et ce avant de recevoir l’argent de la récolte.

Formuler ce problème à l’aide d’un programme linéaire qui aidera le fermier à maximiser ses revenus de vente.

Exemple d'application : Modèle verbal

Objectif :

Maximiser les revenus de vente

Contraintes :

1- Contrainte sur la surface disponible

2- Contrainte sur la main d'œuvre disponible

3- Contrainte sur la production minimale de mais

4- Contrainte sur la production minimale de blé

Exemple d'application : Programme Linéaire

Soit les variables de décision suivantes : x_i : nombre de tonnes de la culture i ($i=1: Mais$, $i=2: Blé$, $i=3: Fèves$) produites.

$$Max \quad Z = 120x_1 + 130x_2 + 140x_3$$

$$sujet\ à \quad \begin{cases} 0.25x_1 + 0.40x_2 + 0.20x_3 \le 35 & \textbf{(contrainte sur la surface disponible)} \\ 6x_1 + 5x_2 + 7x_3 \le 1000 & \textbf{(contrainte sur la main-d'oeuvre disponible)} \\ x_1 \ge 40 & \textbf{(production minimale de Maïs)} \\ x_2 \ge 20 & \textbf{(production minimale de Blé)} \\ x_3 \ge 0 \end{cases}$$

Plan

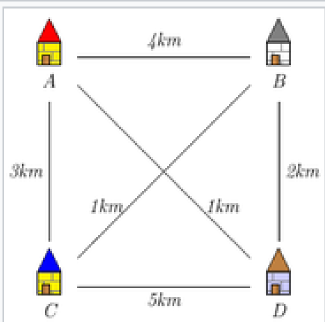
1. Processus d’aide à la décision
2. Exemple d’application
3. Diverses applications de la recherche opérationnelle
4. Objectifs et contenu du cours

Diverses applications de la RO

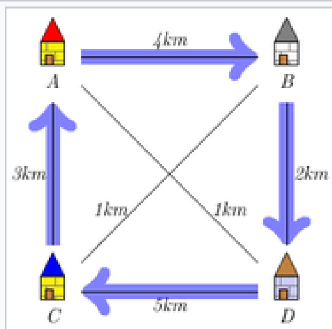
- Confection d'horaires de lignes aériennes
  - Choix de lignes
  - Affectation d'avions aux vols
  - Confection d'horaires pour le personnel
- Tarification de vols (lignes aériennes)
  - Selon la période de l'année / de la semaine…
  - Par classe de passager
  - Par type de réservation

Diverses applications de la RO …

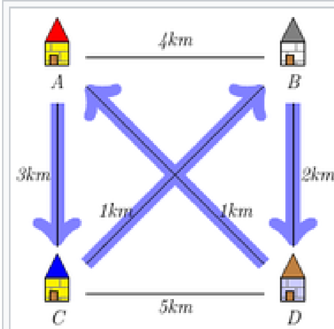
- Tournées de véhicules
  - Répondre à des besoins de transport et/ou de livraison
  - Confectionner des routes
  - Affecter des véhicules



Instance du problème du voyageur de commerce



Le chemin ABDCA de longueur 4+2+5+3 = 14 km.



Le chemin ACBDA est le chemin le plus court qui part de A, revient A et passe par toutes les villes. Il est de longueur 3+1+2+1=7 km.

Le **problème du voyageur de commerce**, ou **problème du commis voyageur** consiste à, étant donné une liste de villes, et des distances entre toutes les paires de villes, déterminer un plus court chemin qui visite chaque ville une et une seule fois et qui termine dans la ville de départ.

Nombre de chemins candidats en fonction du nombre de villes

Nombre de villes n	Nombre de chemins candidats $\frac{1}{2}(n-1)!$
3	1
4	3
5	12
6	60
7	360
8	2 520
9	20 160
10	181 440
15	43 589 145 600
20	$6{,}082 \times 10^{16}$
71	$5{,}989 \times 10^{99}$

Plan

1. Processus d'aide à la décision
2. Exemple d'application
3. Diverses applications de la recherche opérationnelle
4. Objectifs et contenu du cours

Objectifs et contenu du cours

Initiation à

- la modélisation
- la résolution

dans le cadre de la *programmation linéaire.*

Construire un modèle formel — Programme linéaire

Rechercher une (des) solution(s) — Résolution graphique, Algorithme du simplexe

Objectifs et contenu du cours …

- Apprendre à construire des modèles mathématiques.
- Connaître le fonctionnement de l'algorithme du simplexe
- Maîtriser un logiciel d’optimisation (TORA).
- Initiation à la théorie des graphes

Objectifs et contenu du cours …

Semaine(s)	Sujet
1	Introduction à la Recherche Opérationnelle
1-2	Résolution graphique d'un programme linéaire
3-4-5	Formulation d'un programme linéaire
6-7-8	Algorithme du simplexe (Introduction au logiciel TORA)
9-10-11	Introduction à la théorie des graphes

CHAPITRE 1

Programme linéaire : Forme générale

- Forme générale d’un programme linéaire

Plan

1. Forme générale d’un programme linéaire

Plan

1. Forme générale d'un programme linéaire

Forme générale d'un programme linéaire

Définitions préliminaires

- Une *variable* est une quantité
  - dont la valeur n'est pas fixée à l'avance, mais qu'on peut choisir (variable de *décision*)
  - qu'on convient de désigner par un nom (qui peut être quelconque).

Forme générale d'un programme linéaire

Définitions préliminaires …

- Étant donné plusieurs variables (par exemple u, v, x, y, z), une *fonction* de ces variables associe à chaque choix de valeurs pour u, v, x, y, z un nombre.

Exemple:

$$f(u,v,x,y,z) = 2uv^2 - 3xyz \quad \rightarrow$$

u	v	x	y	z	$f(u,v,x,y,z)$
2	1	1	0	5	4
0	3	1	–1	1	3

Forme générale d'un programme linéaire

Définitions préliminaires …

- Étant donné n variables $x_1, x_2, \ldots, x_n$,
  - une *fonction affine* de ces variables est une fonction de la forme:

    $$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n + b$$

    où: $a_1, a_2, \ldots, a_n$ sont des nombres connus appelés *coefficients et b* est un nombre connu appelé *ordonnée à l'origine* (ou *constante*)
  - une *fonction linéaire* de ces mêmes variables est de la forme:

    $$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n$$

    (où l'ordonnée à l'origine est nulle : $f(0, 0, \ldots, 0) = 0$).

Forme générale d'un programme linéaire

Définitions préliminaires …

- Remarques: une fonction linéaire est une somme de termes : coefficient numérique × variable. En particulier,
  - elle n'a pas de terme constant (ordonnée à l'origine);
  - les seules opérations sur les variables sont : multiplication par une coefficient numérique, et addition-soustraction; il n'y a pas sur les variables d'autres opérations (produit, division, puissance, etc.).

Forme générale d'un programme linéaire

Conventions d'écriture d'un Programme linéaire

- aucune variable n'est répétée;
- les coefficients numériques sont donnés (ce ne sont pas des variables ni des expressions à calculer);
- pour simplifier l'écriture, on prend différentes conventions : omettre les opérateurs « × »; effectuer les multiplications avant les additions; omettre les parenthèses; omettre les termes nuls; omettre les coefficients égaux à 1; écrire « –2… » au lieu de « +(–2)… », etc.

Forme générale d'un programme linéaire

Exemple

Soient les variables u, v, x, y, z. La fonction $f(u, v, x, y, z)$ est-elle linéaire ? Est-elle bien écrite ?

$$f(u,v,x,y,z) = \big((-1)\times u\big) + \big(0\times v\big) + \big(1\times x\big) + \big((-2)\times y\big) + \big(7\times z\big)$$

- elle est linéaire
- elle peut s'écrire: $f(u,v,x,y,z) = -u + x - 2y + 7z$

$$f(u,v,x,y,z) = u + x - 2y + 7z - 2u$$
$$f(u,v,x,y,z) = (1-2)u + x - 2y + 7z$$

devraient s'écrire: $f(u,v,x,y,z) = -u + x - 2y + 7z$

$$f(u,v,x,y,z) = -u + x - 2y + 7z - 10$$

affine mais pas linéaire

$f(u,v,x,y,z) = -u + x - 2y + 7z + 5xy$ non linéaire

$f(u,v,x,y,z) = -u^2 + x - 2y + 7z$ non linéaire

Forme générale d'un programme linéaire

Programme linéaire

- Un *programme linéaire* a pour ingrédients
  - des variables de décision,
  - un objectif, et
  - des contraintes.

- L'*objectif*
  - est une fonction linéaire des variables;
  - on doit spécifier dans quelle direction il s'améliore : il est à maximiser ou à minimiser.

- Les contraintes sont de deux sortes:
  - contraintes générales
  - contrainte particulière sur une variable

Forme générale d'un programme linéaire

Programme linéaire …

- Une *contrainte générale* est une égalité ou une inégalité linéaire.
  - Son membre de gauche (« côté gauche ») est une fonction linéaire des variables.
  - Son membre de droite (« côté droit ») est une constante.
  - Une relation $\leq$, $\geq$, ou $=$ est imposée entre ces deux membres.

- Une *contrainte particulière* ne s'applique qu'à une seule variable (plutôt qu'un groupe de variables).
  - Contraintes d'*intégralité*: $x_j \in \{0, 1, 2, 3\ldots\}$
  - Contraintes de *bornes*:
    - $x_j \geq$ constante (*borne inférieure*)
    - $x_j \leq$ constante (*borne supérieure*)
  - Cas particulier important: *restriction de signe* $x_j \geq 0$

Forme générale d'un programme linéaire

Programme linéaire …

- Une *décision* (ou *solution*) est un choix de valeur pour <u>toutes</u> les variables de décision.
- Une décision est *réalisable* si elle respecte <u>toutes</u> les contraintes. L'ensemble des décisions réalisables est le *domaine réalisable*.
- Une décision est *optimale* si
  - elle est réalisable, et
  - elle donne la meilleure valeur possible à l'objectif parmi toutes les décisions réalisables.
- « *Résoudre* » un programme linéaire, c'est tenter de trouver une décision optimale.

Forme générale d'un programme linéaire

Variables de décision: $x_1, x_2, \cdots, x_n$

Fonction objectif

$$\begin{cases} \text{Maximiser / Minimiser} \\ \quad Z = c_1 x_1 + c_2 x_2 + \cdots + c_n x_n \end{cases}$$

Coefficients de la fonction objectif

Sous les contraintes:

Contraintes générales

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n & \leq / = / \geq & b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n & \leq / = / \geq & b_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n & \leq / = / \geq & b_m \end{cases}$$

Coefficients des contraintes

Côtés droits des contraintes

Données du problème

Restrictions de signes

$$\begin{cases} x_1 & \geq & 0 \\ x_2 & \geq & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ x_n & \geq & 0 \end{cases}$$

Forme générale d'un programme linéaire

Programme linéaire: Variables de décision: x_1, x_2, x_3, x_4

$$\begin{array}{ll} \text{Max} & Z = x_1 - 2x_2 + 5x_4 \\ \text{S.l.c.:} & 2x_1 - 3x_2 + 5x_3 \leq 10 \\ & -x_2 + 2x_3 - 5x_4 = 18 \\ & x_3 - 9x_4 \geq 7 \\ & x_1 \geq 0 \\ & x_3 \geq 0 \end{array}$$

Mêmes données, même programme linéaire !

Variables de décision: *x*, *abc*, *longnomdevariable*, *chose25*
Programme linéaire:

$$\begin{array}{ll} \text{Max} & Z = x - 2abc + 5chose25 \\ \text{S.l.c.:} & 2x - 3abc + 5longnomdevariable \leq 10 \\ & -abc + 2longnomdevariable - 5chose25 = 18 \\ & longnomdevariable - 9chose25 \geq 7 \\ & x \geq 0 \\ & longnomdevariable \geq 0 \end{array}$$

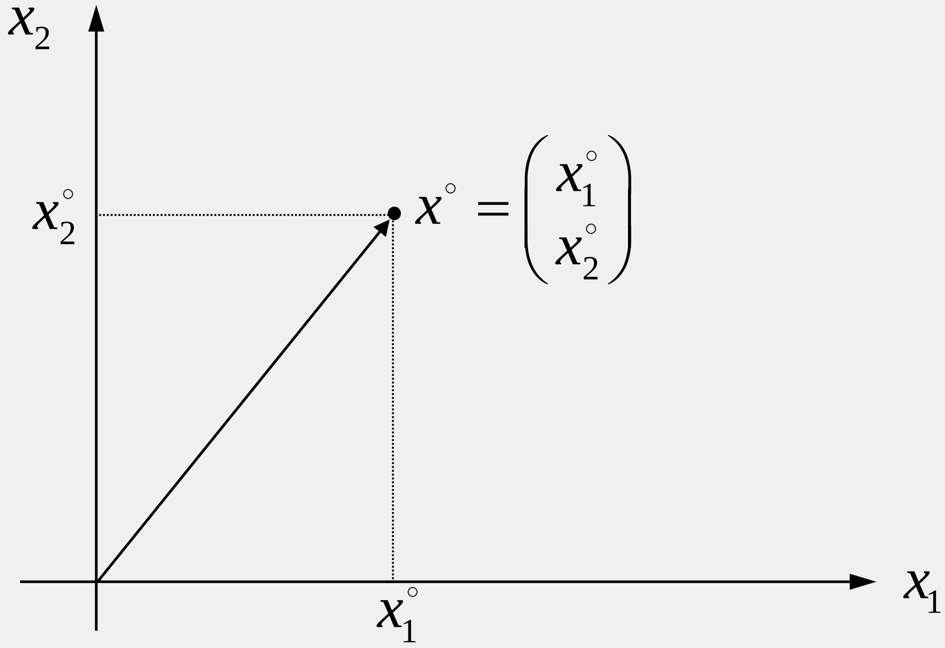
CHAPITRE 2

Résolution graphique d'un programme linéaire

- Représentation d'éléments
- Représentation d'un programme linéaire
- Exemples
- Propriétés des programmes linéaires

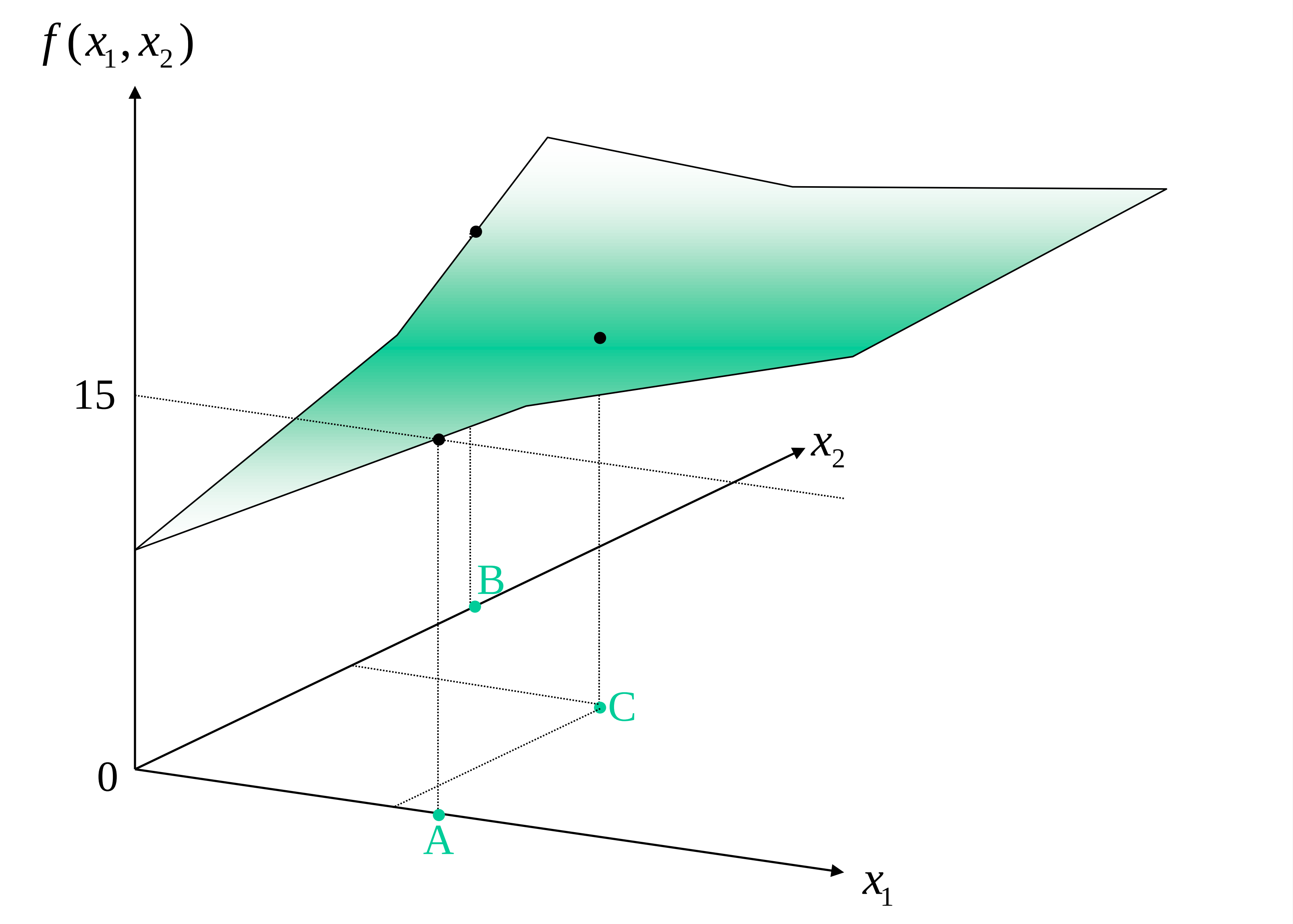
Représentation graphique d'un programme linéaire

- On peut représenter un programme linéaire graphiquement s'il a deux variables (ou moins…), par exemple x_1, x_2.
- Dans ce cas, chaque décision (choix de valeurs pour x_1, x_2) peut être représentée par un point ou un vecteur dans le plan cartésien

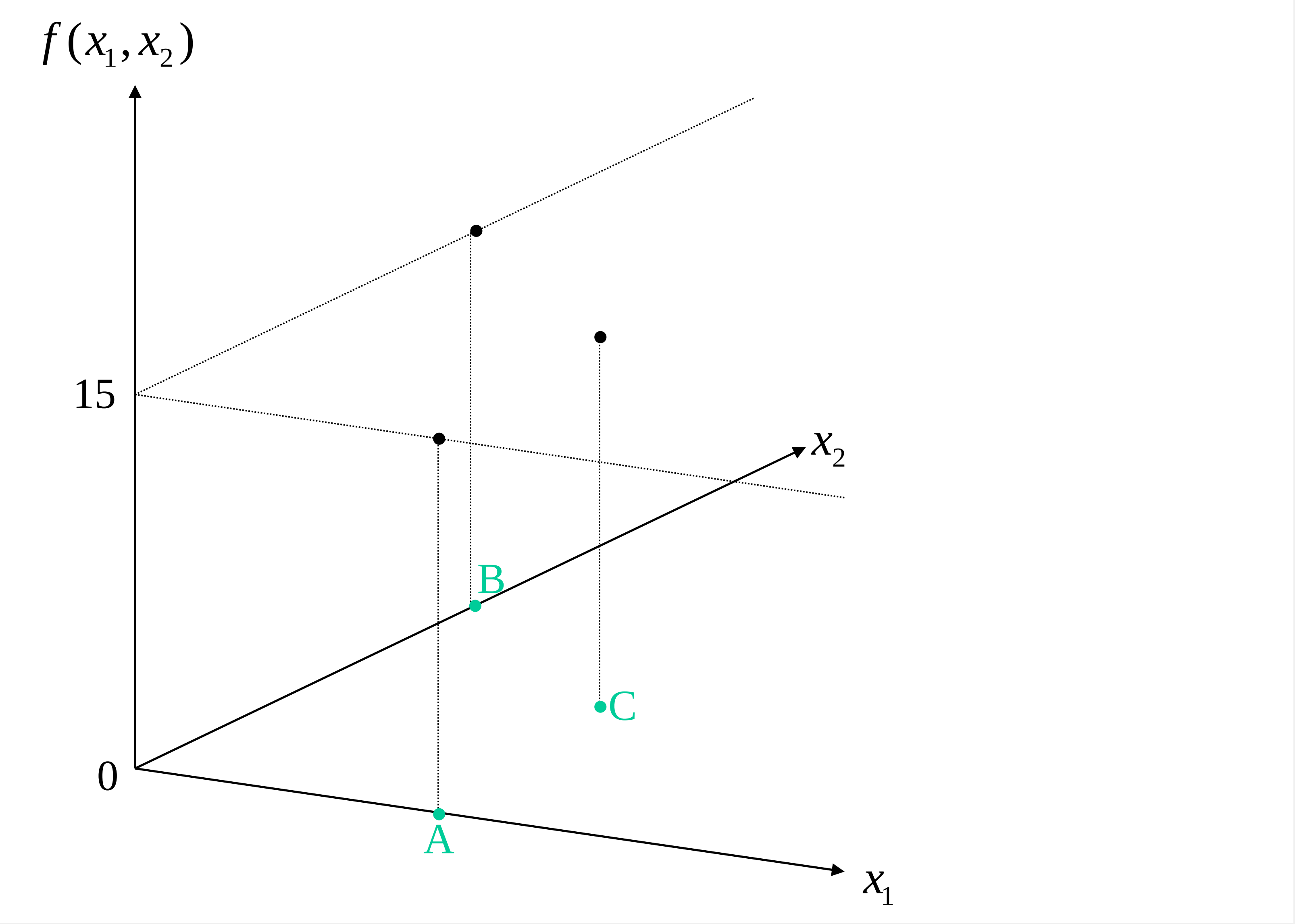


Graphe d'une fonction de 2 variables

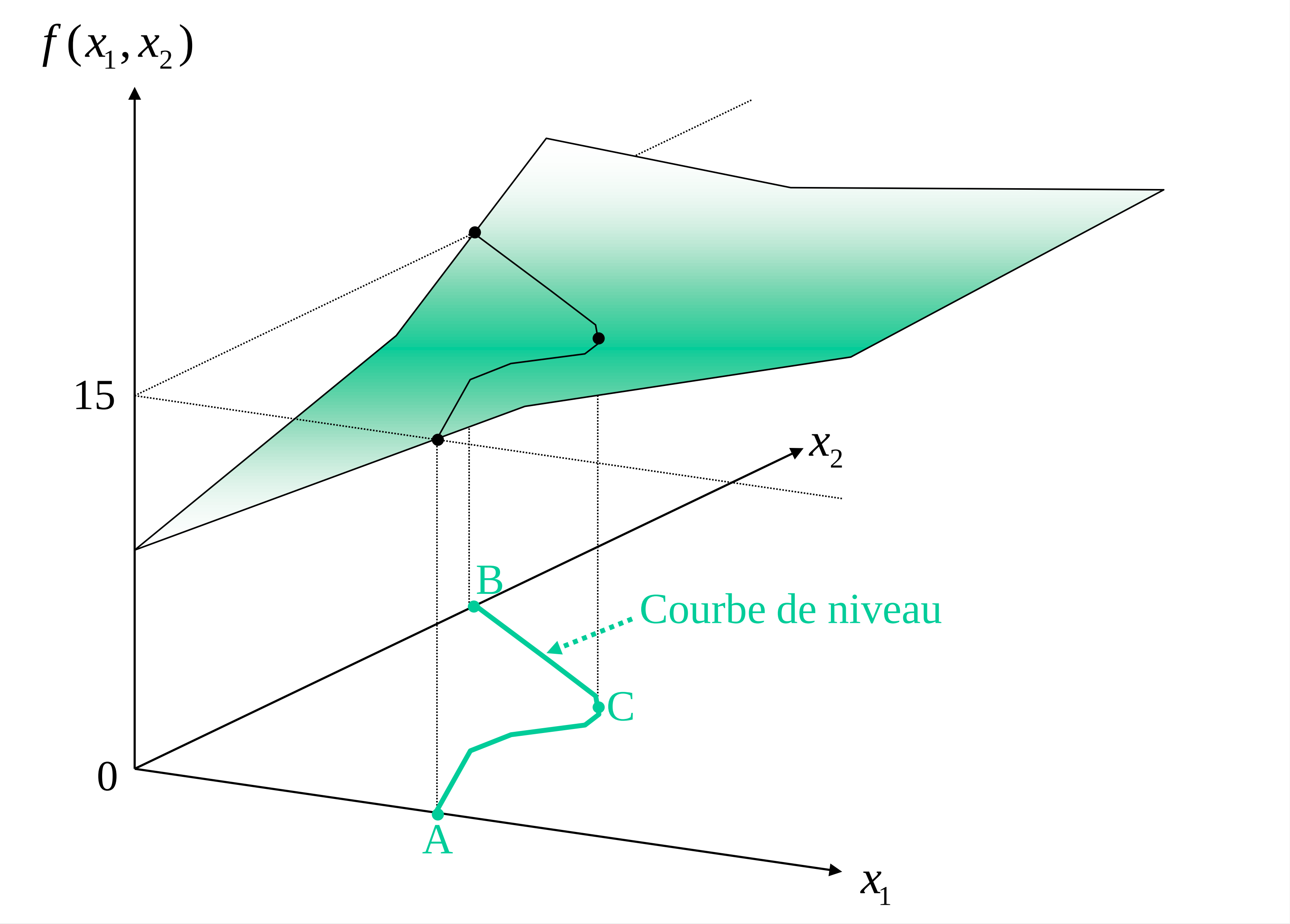
- Soit $f(x_1, x_2)$ une fonction de 2 variables x_1, x_2. Son graphe peut être vu comme une surface dans un espace à 3 dimensions:



Un *contour* ou une *courbe de niveau* du graphe est un ensemble de points x_1, x_2 sur lesquels la fonction garde une valeur constante.



Un *contour* ou une *courbe de niveau* du graphe est un ensemble de points x_1, x_2 sur lesquels la fonction garde une valeur constante.



Le *gradient* d'une fonction $f(x)$ en un point x^o est le vecteur formé par les dérivées partielles de f en ce point:

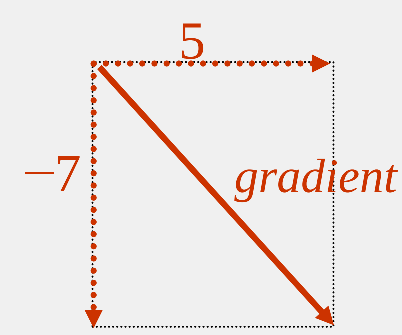
$$\nabla f\left(x^\circ\right)=\begin{pmatrix}\dfrac{\partial f\left(x^\circ\right)}{\partial x_1}\\ \vdots \\ \dfrac{\partial f\left(x^\circ\right)}{\partial x_n}\end{pmatrix}$$

Si la fonction $f(x)$ est affine, son gradient est constant (il est indépendant du point x^o) :

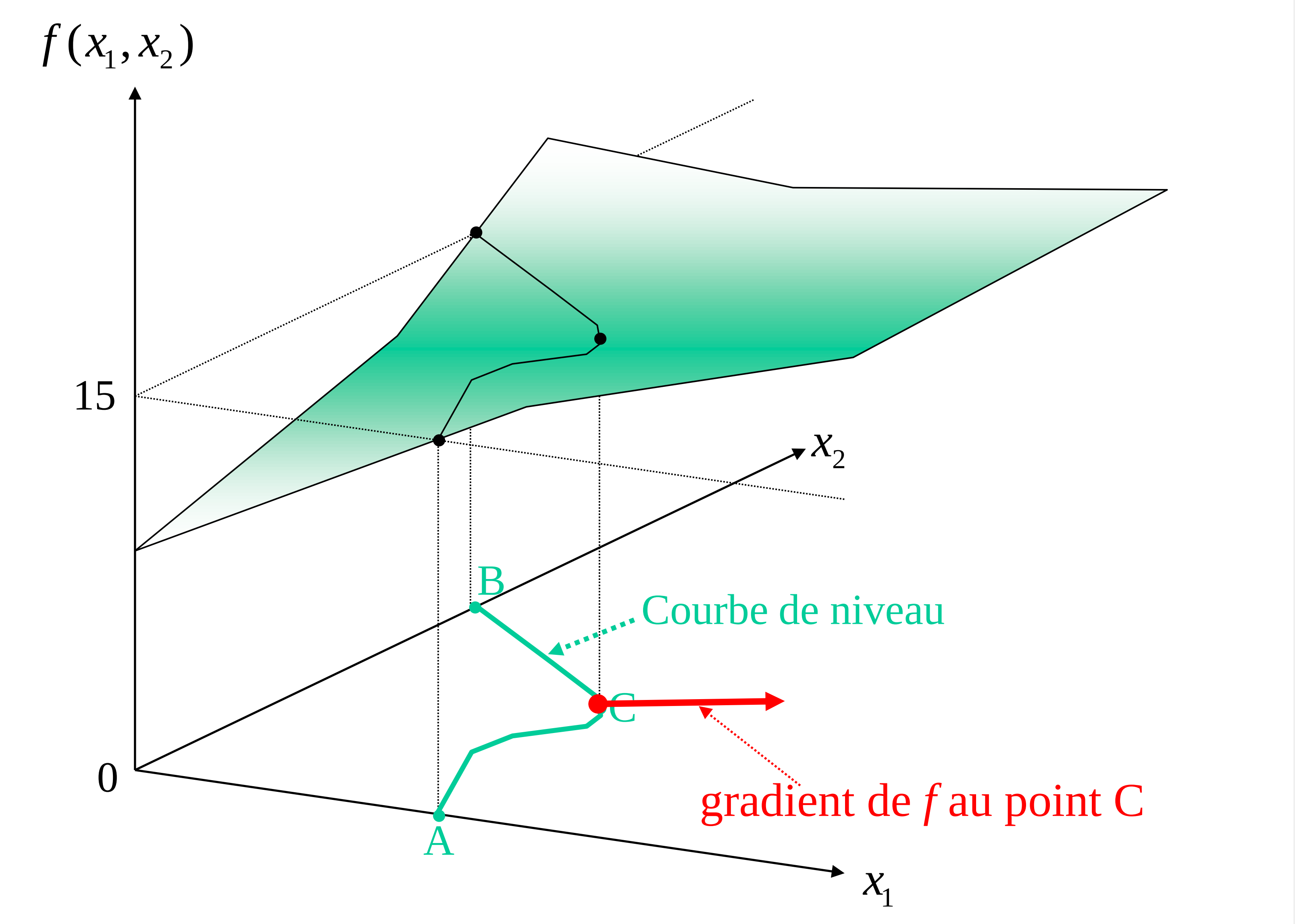
$$f\left(x\right)=a_1x_1+a_2x_2+\cdots+a_nx_n+b \quad \Rightarrow \quad \nabla f\left(x\right)=\begin{pmatrix}a_1\\ \vdots \\ a_n\end{pmatrix}$$

Exemple :

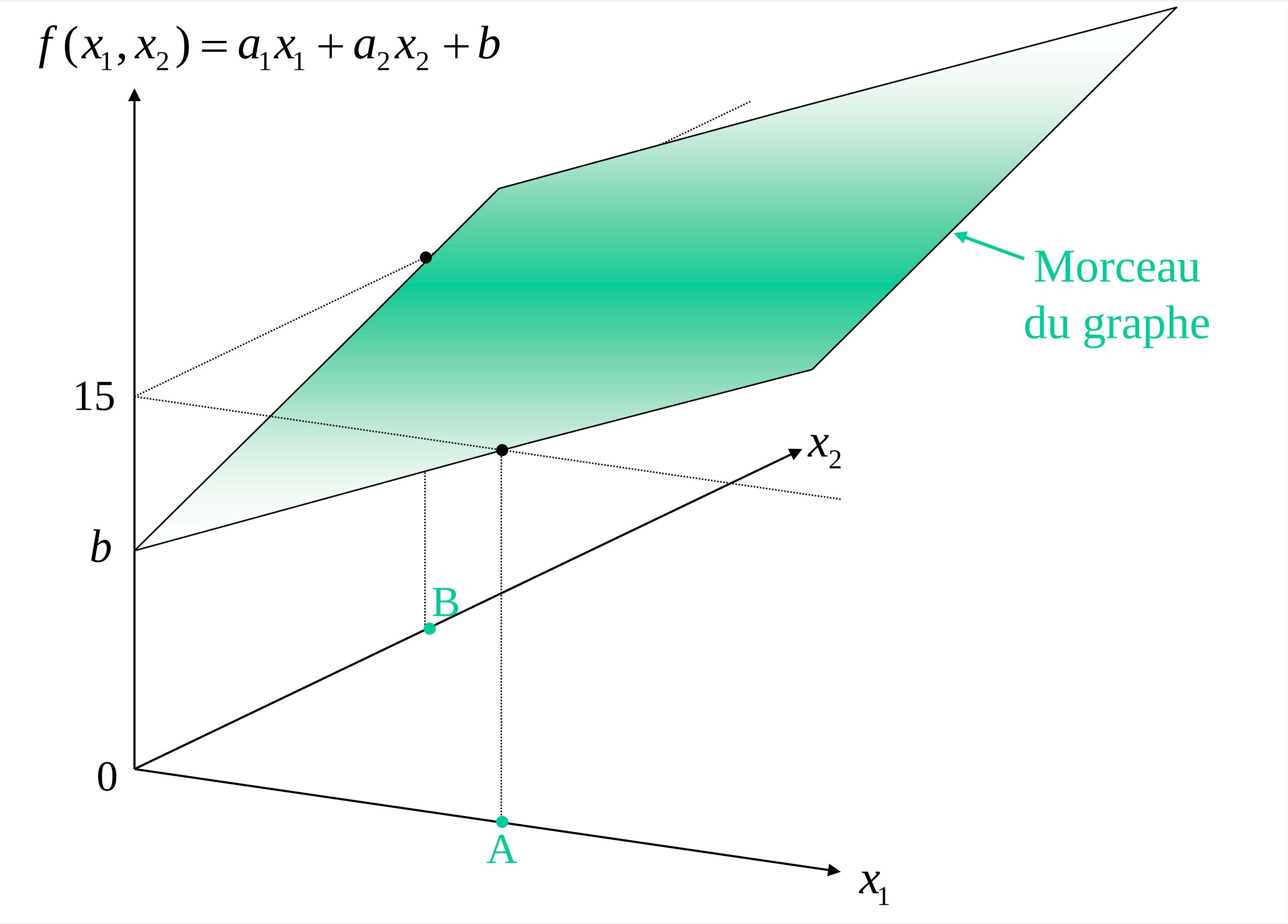
$$f\left(x_1,x_2\right)=5x_1-7x_2+3 \quad \Rightarrow \quad \nabla f\left(x_1,x_2\right)=\begin{pmatrix}5\\ -7\end{pmatrix}$$



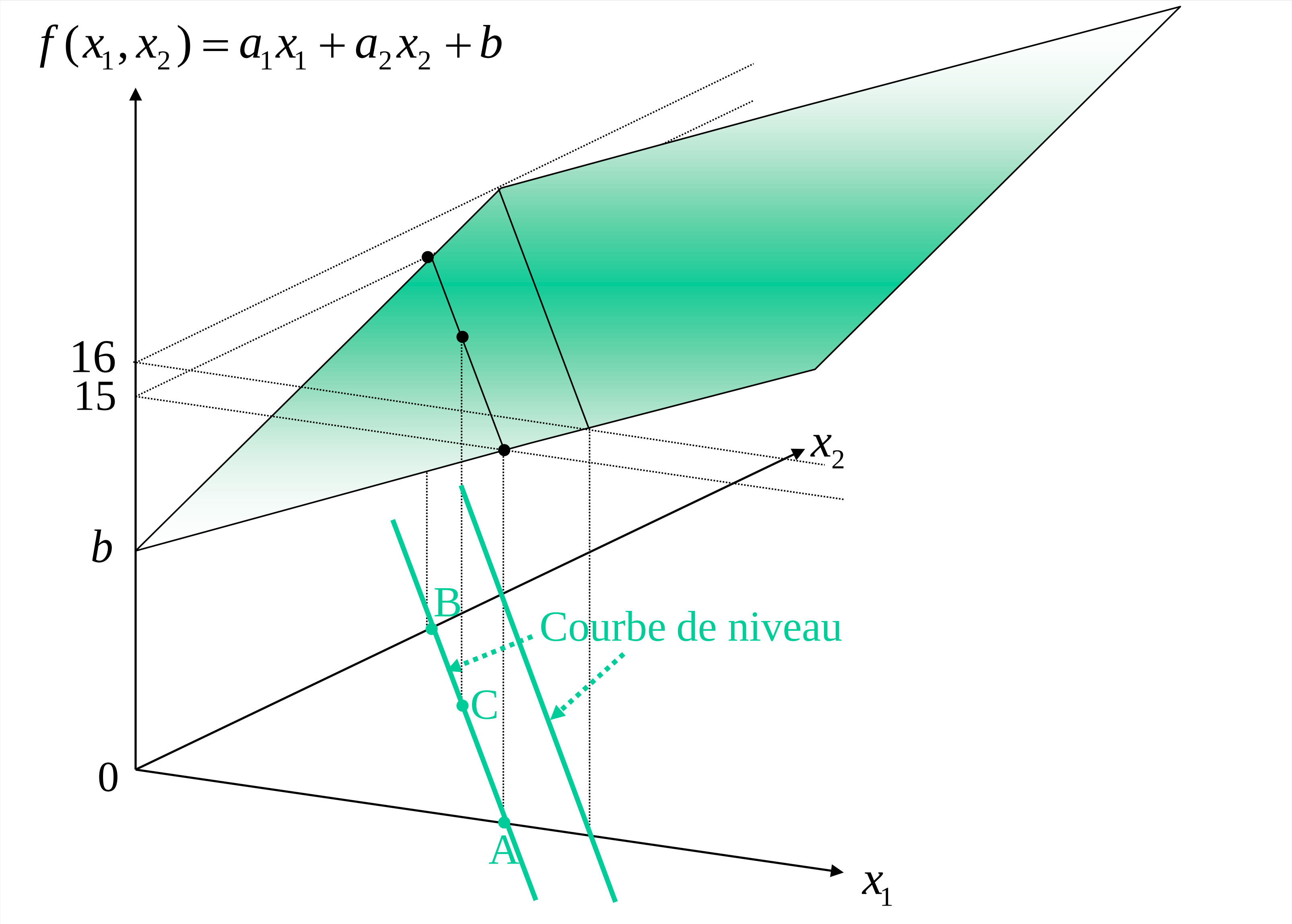
Le gradient de f en un point indique dans quelle direction la fonction s'accroît le plus vite. Il est toujours perpendiculaire au contour en ce point.



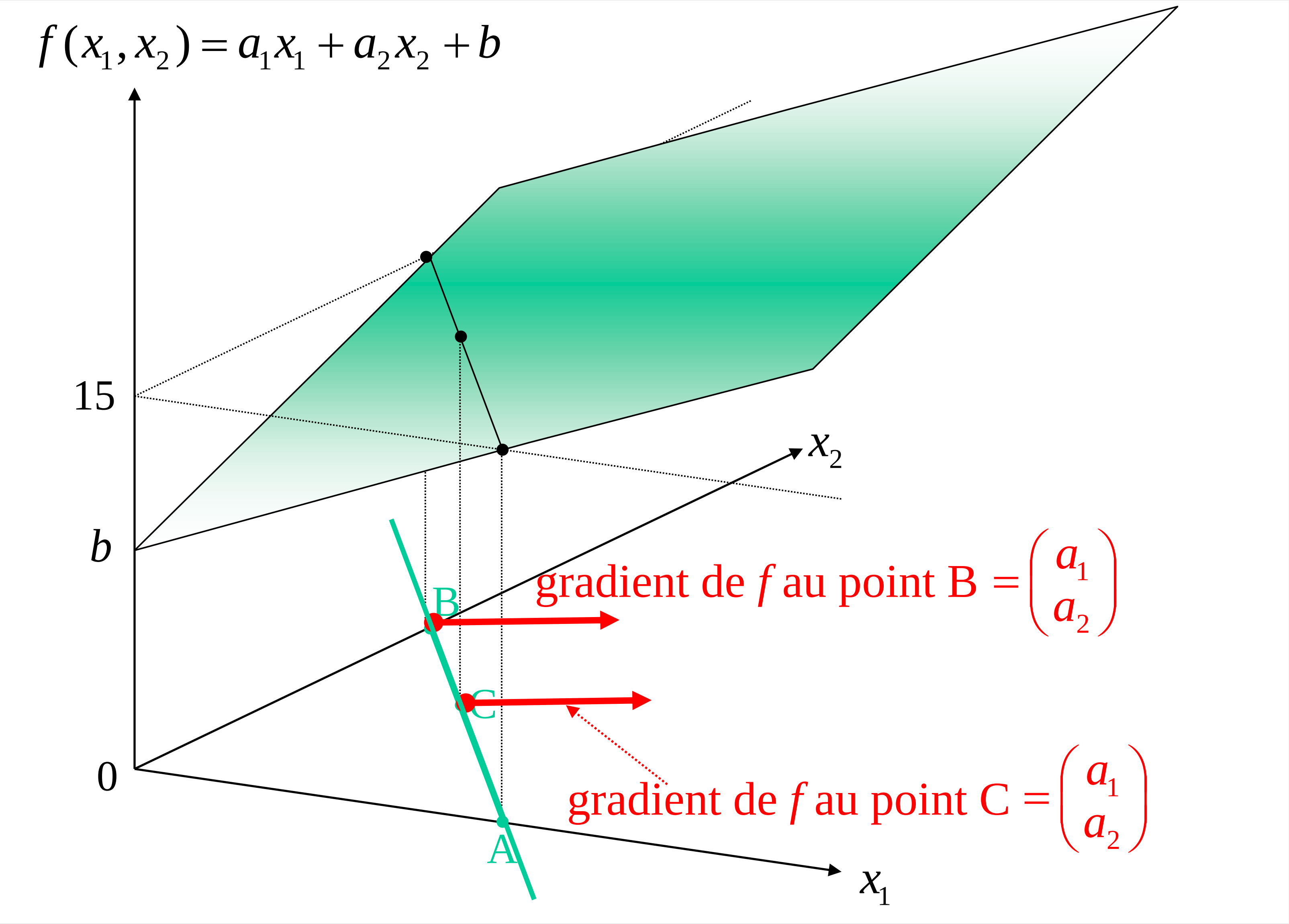
Fonction affine de 2 variables: son graphe est un plan.



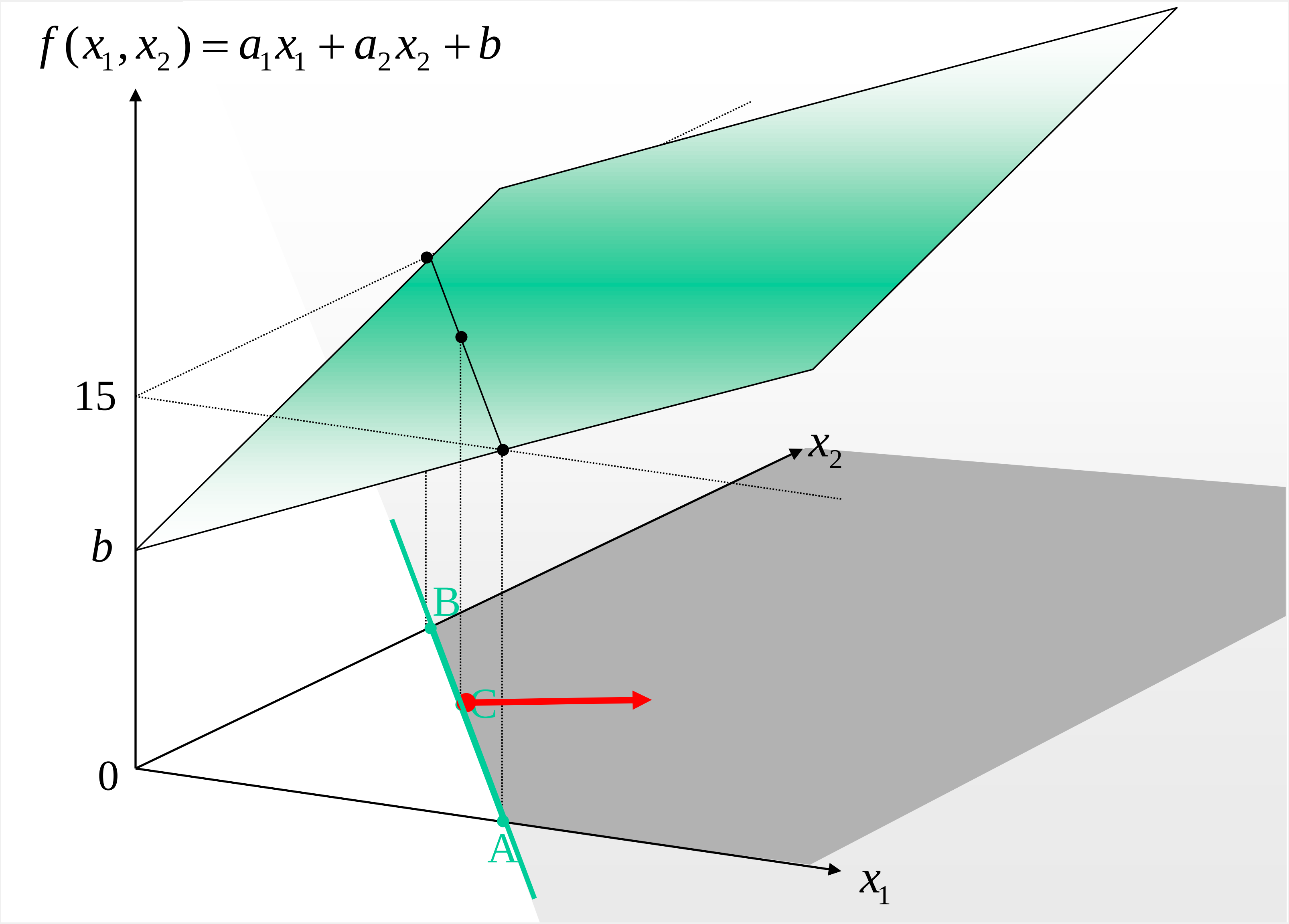
Ses courbes de niveau sont des droites parallèles entre elles



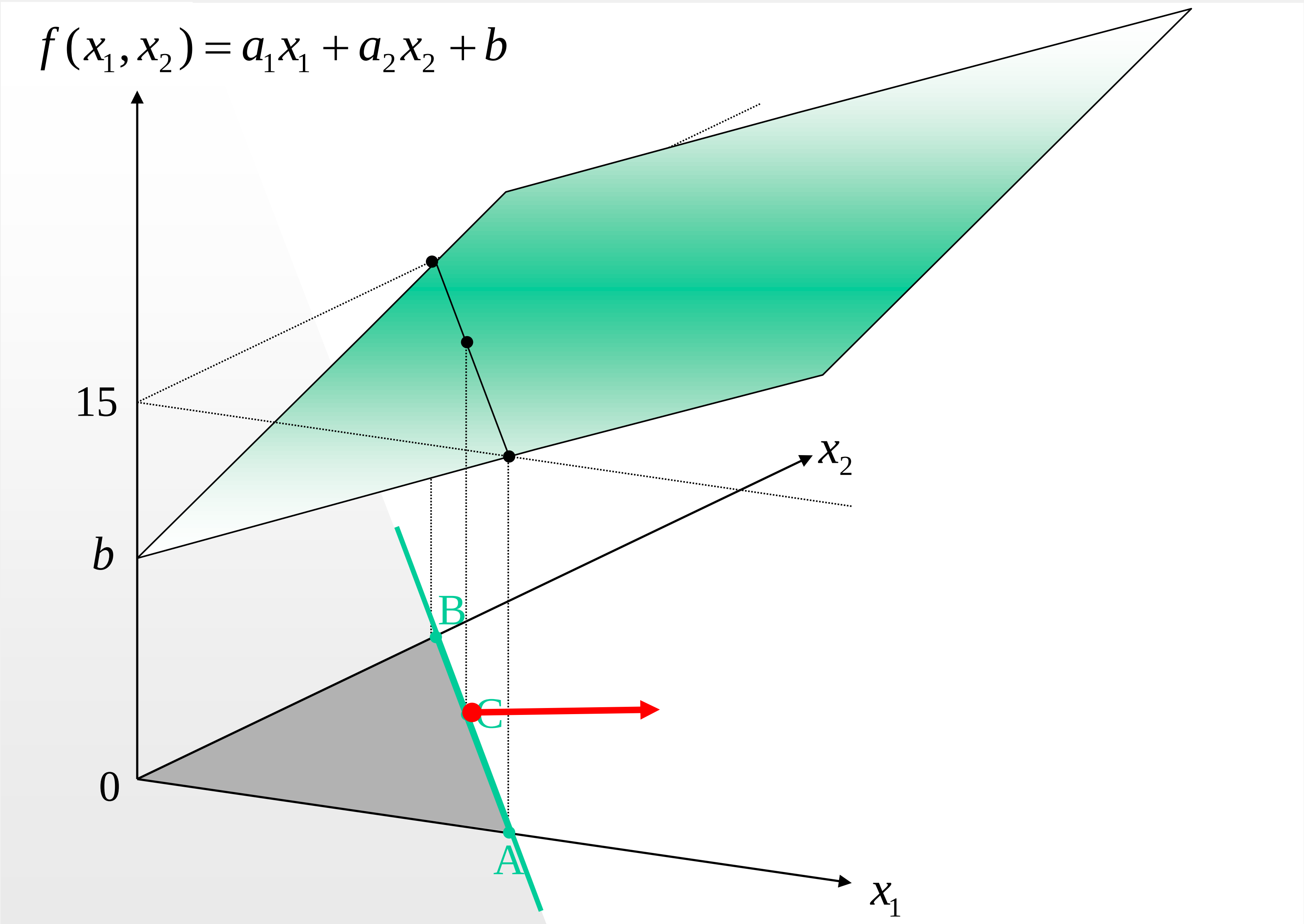
Son gradient est constant (et perpendiculaire aux courbes de niveau)



Soit c une constante. L'ensemble des points (x_1,x_2) tels que $f(x_1,x_2) \geq c$ est un *demi-plan*.



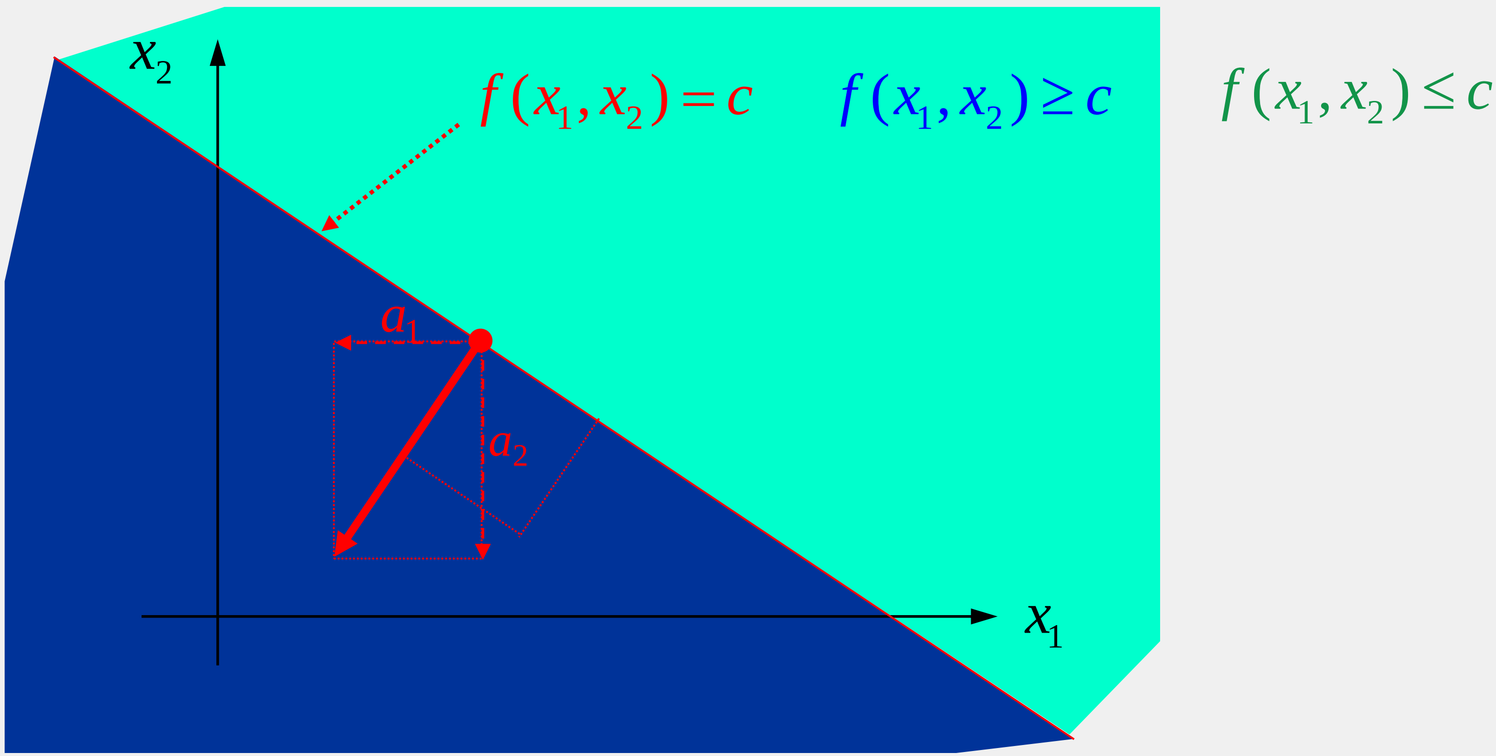
L'ensemble des points (x_1,x_2) tels que $f(x_1,x_2) \leq c$ est un demi-plan.



Égalités et inégalités linéaires

$$f(x_1, x_2) = a_1 x_1 + a_2 x_2$$

c une constante donnée



Programme linéaire: exemple 1

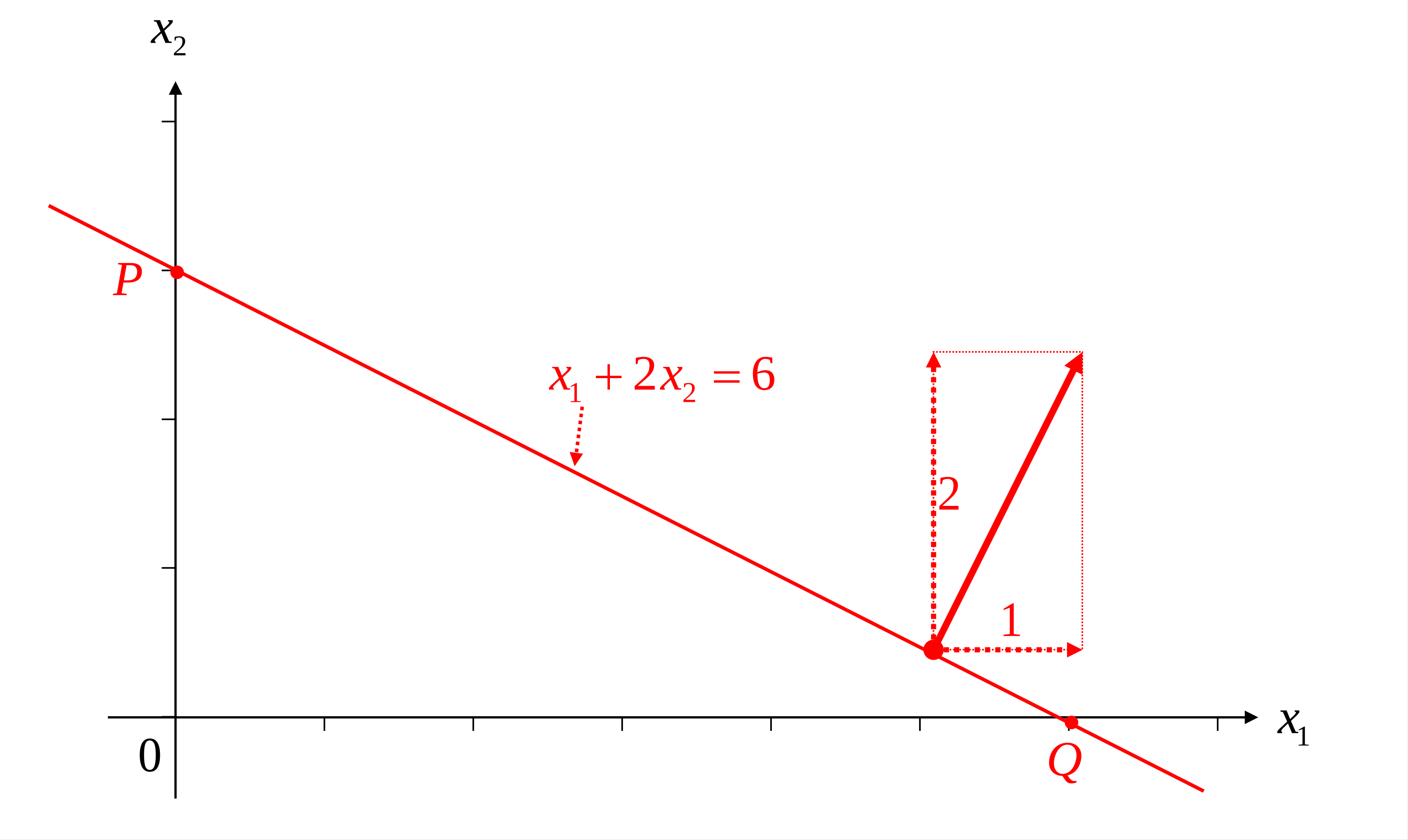
$$
\begin{aligned}
\text{Max} \quad & Z = x_1 + x_2 \\
\text{S.l.c.:} \quad & x_1 + 2x_2 \leq 6 \\
& x_1 \leq 4 \\
& x_2 \leq 2 \\
& x_1 \geq 0 \\
& x_2 \geq 0
\end{aligned}
$$

1. Dessiner les contraintes
2. Identifier le domaine réalisable
3. Examiner les valeurs de l'objectif dans le domaine réalisable
4. Trouver toutes les solutions optimales

Contrainte: $x_1+2x_2 \leq 6$

Frontière: $x_1+2x_2 = 6$ Droite: trouver 2 points

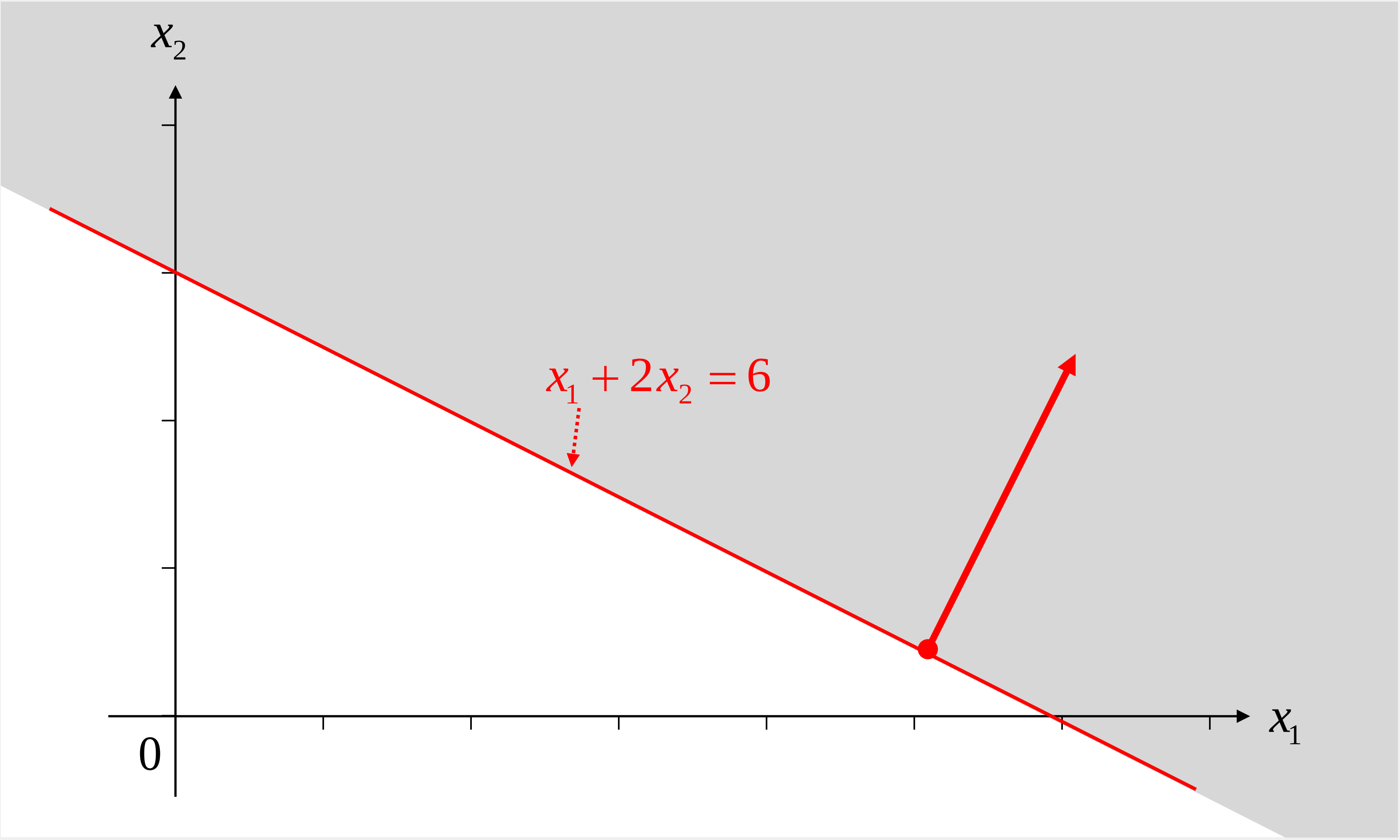
$$x_1 = 0 \Rightarrow x_2 = 3 \quad \rightarrow \quad P = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix} \qquad x_2 = 0 \Rightarrow x_1 = 6 \quad \rightarrow \quad Q = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \end{pmatrix}$$



Contrainte: $x_1+2x_2 \leq 6$

Inégalité: demi-plan

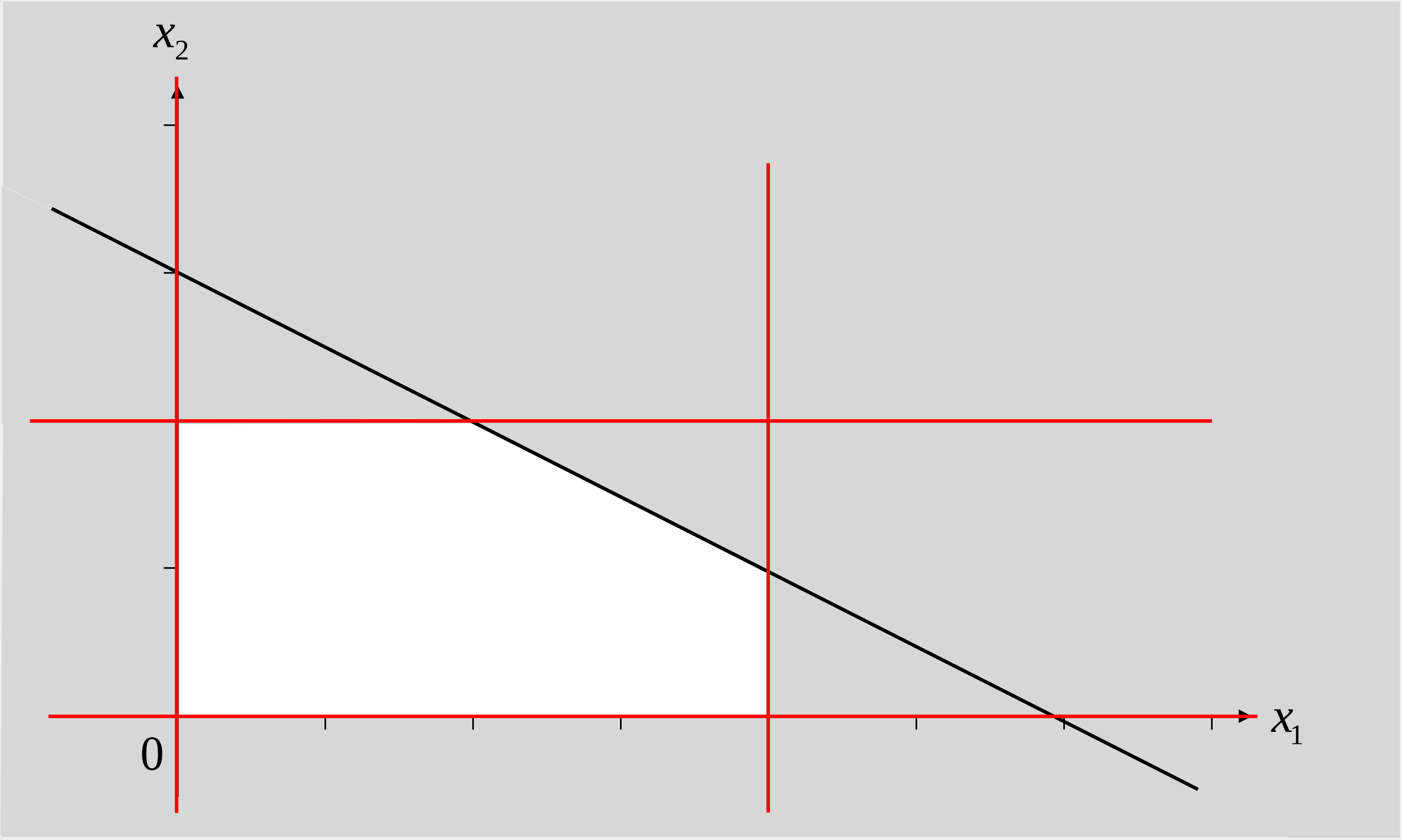
Zone interdite:



Autres contraintes

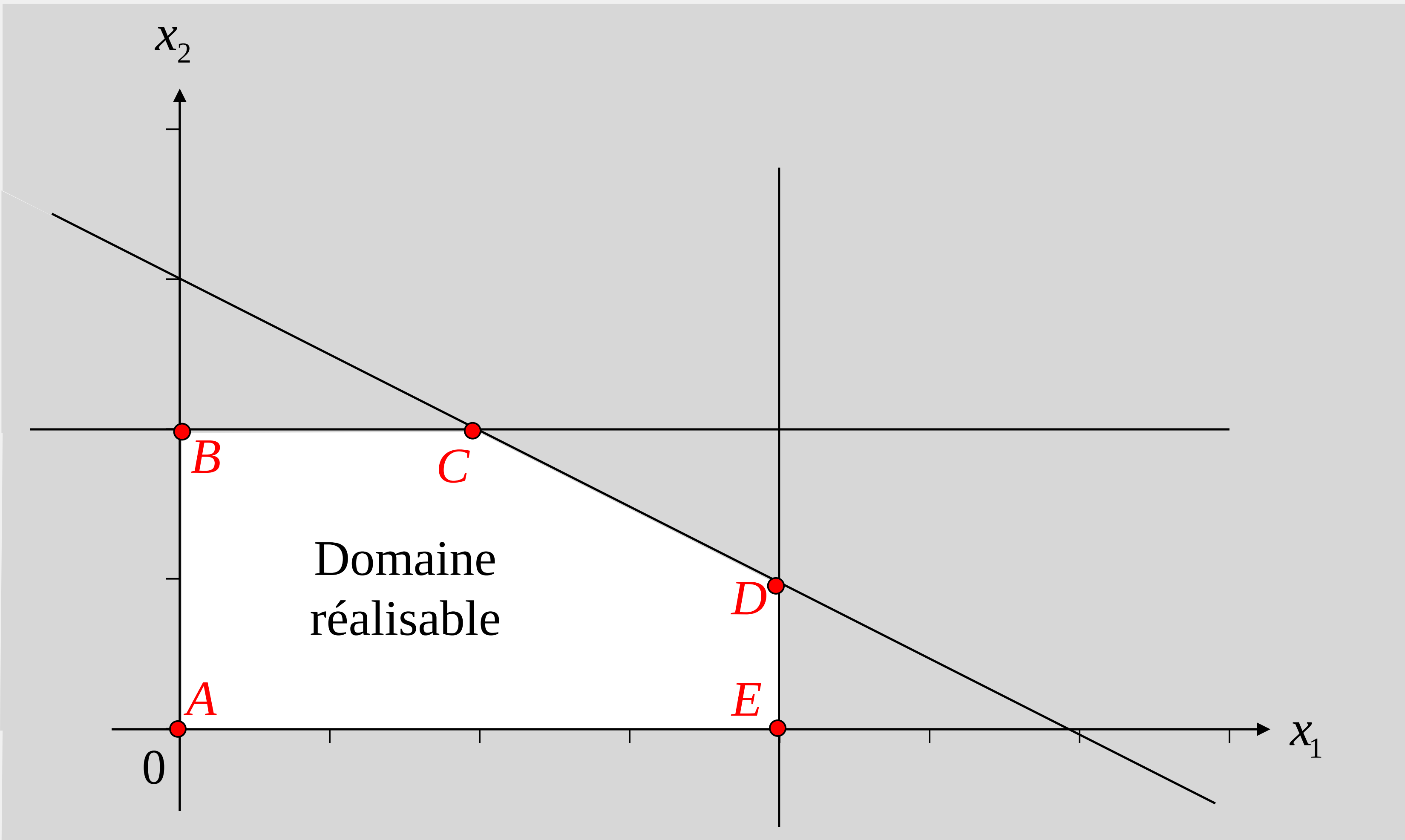
$x_1 = 4$ $\quad x_2 = 2$ $\quad x_1 = 0$ $\quad x_2 = 0$

$x_1 \leq 4$ $\quad x_2 \leq 2$ $\quad x_1 \geq 0$ $\quad x_2 \geq 0$



Domaine réalisable

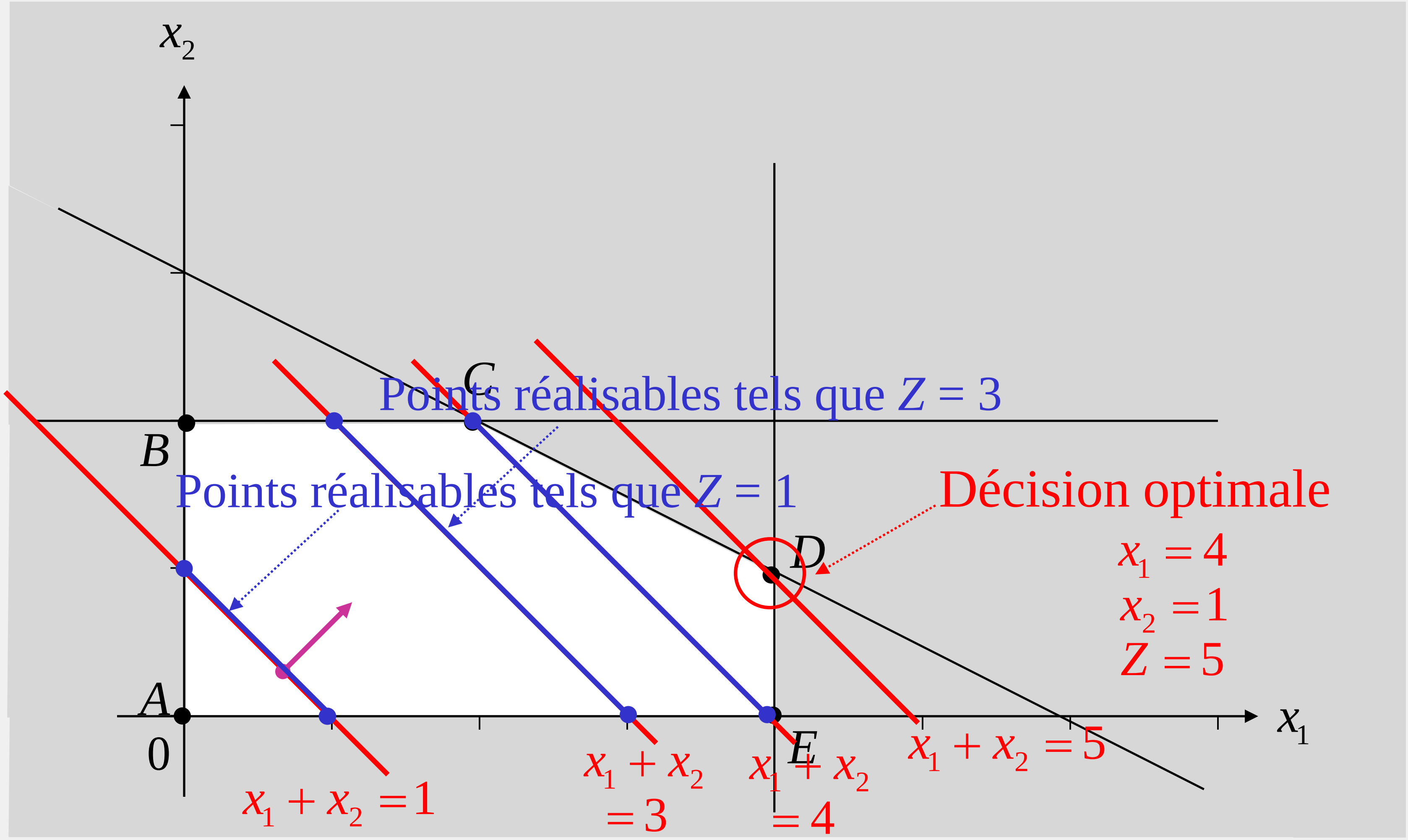
Points *A*, *B*, *C*, *D*, *E* situés aux « coins » du domaine réalisable = *points extrêmes*.



Valeurs possibles de la fonction objectif

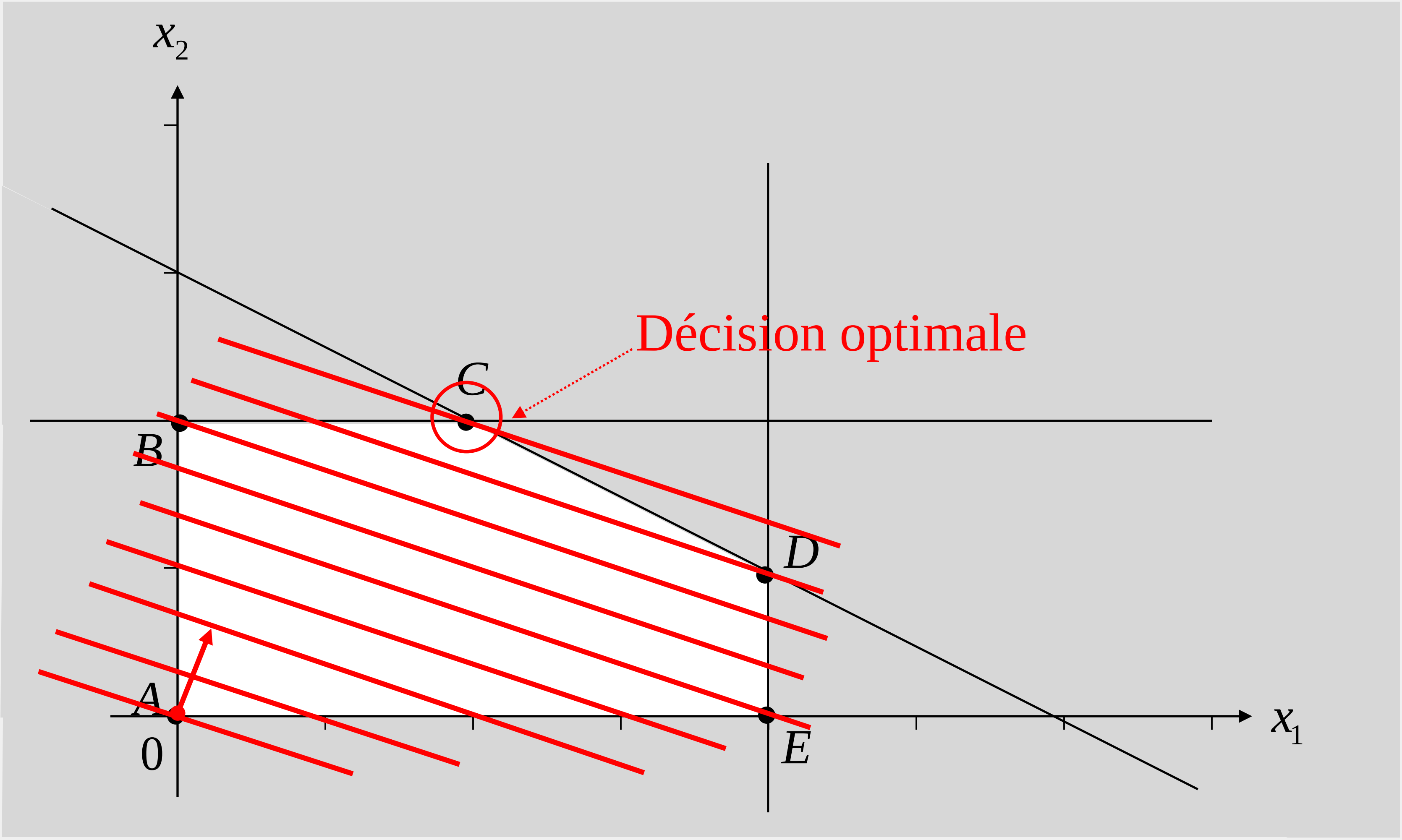
•Si on fixe l'objectif à une valeur *k*, on obtient une courbe de niveau = droite.

•Si la droite contient des points réalisables, la valeur *k* peut être atteinte par l'objectif.



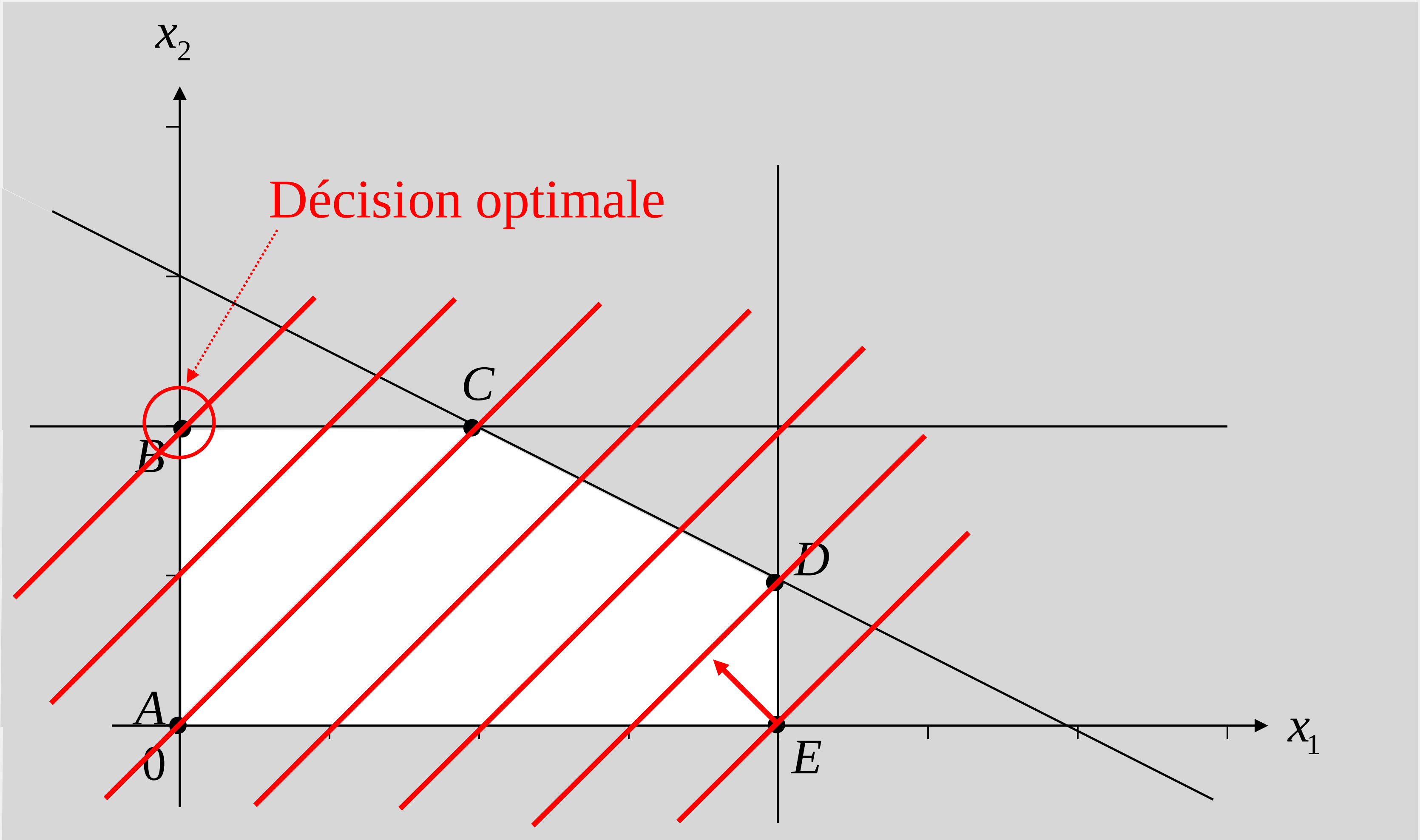
Si on change l'objectif…

…on change l'orientation des courbes de niveau et du gradient.



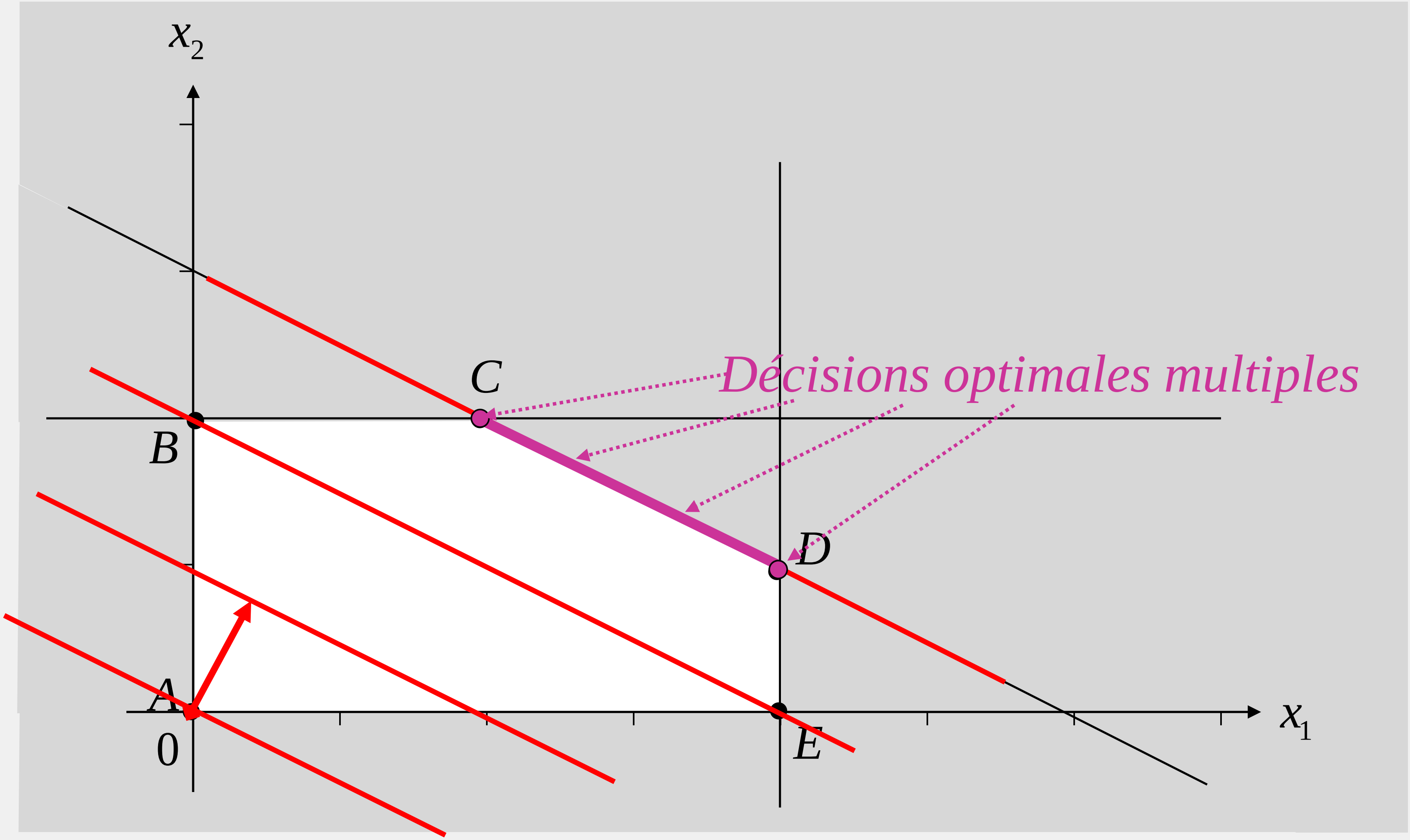
Si on change l'objectif…

…on change l'orientation des courbes de niveau et du gradient.



Cas particulier

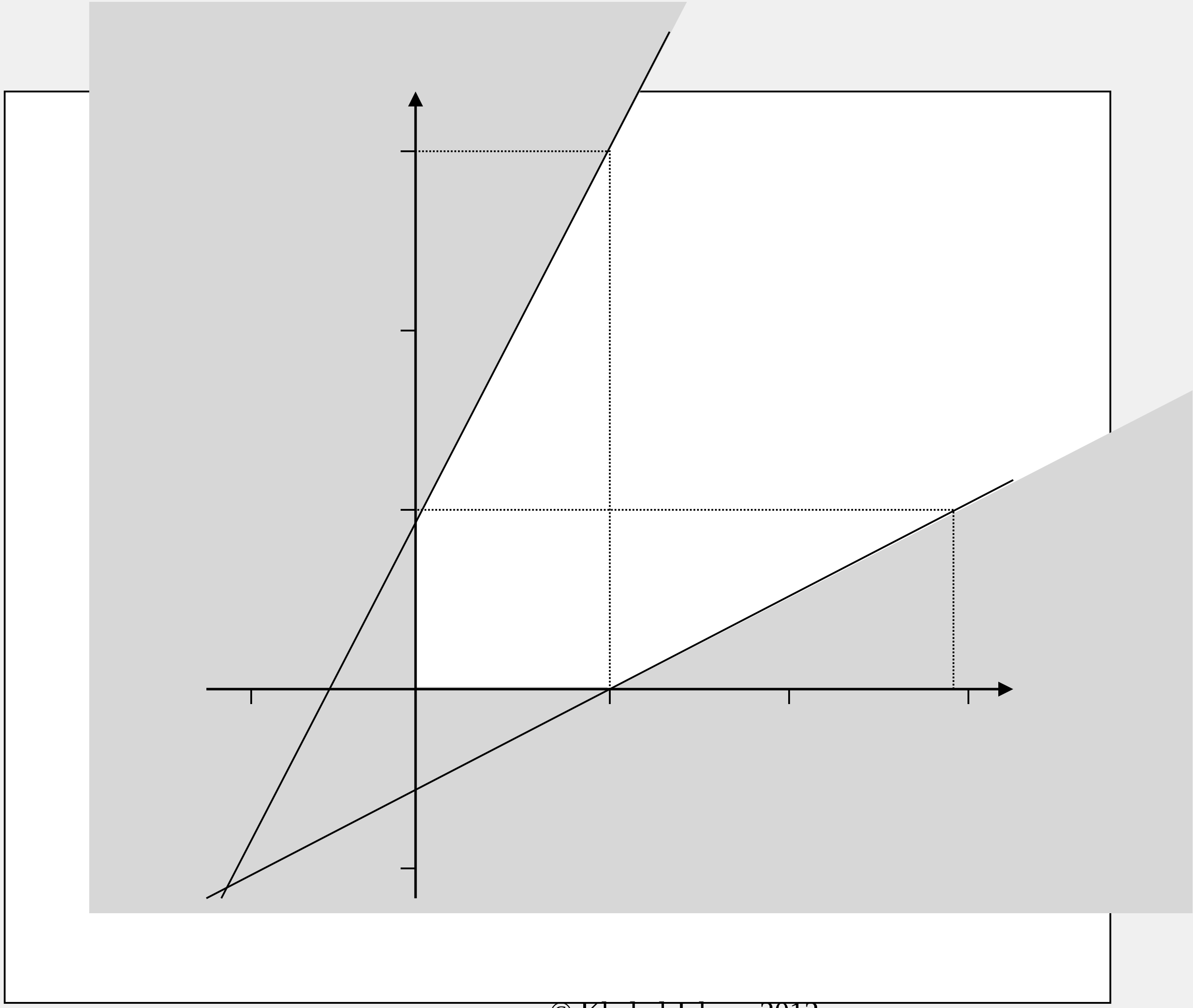
L'objectif est: $\text{Max } Z = x_1 + 2x_2$



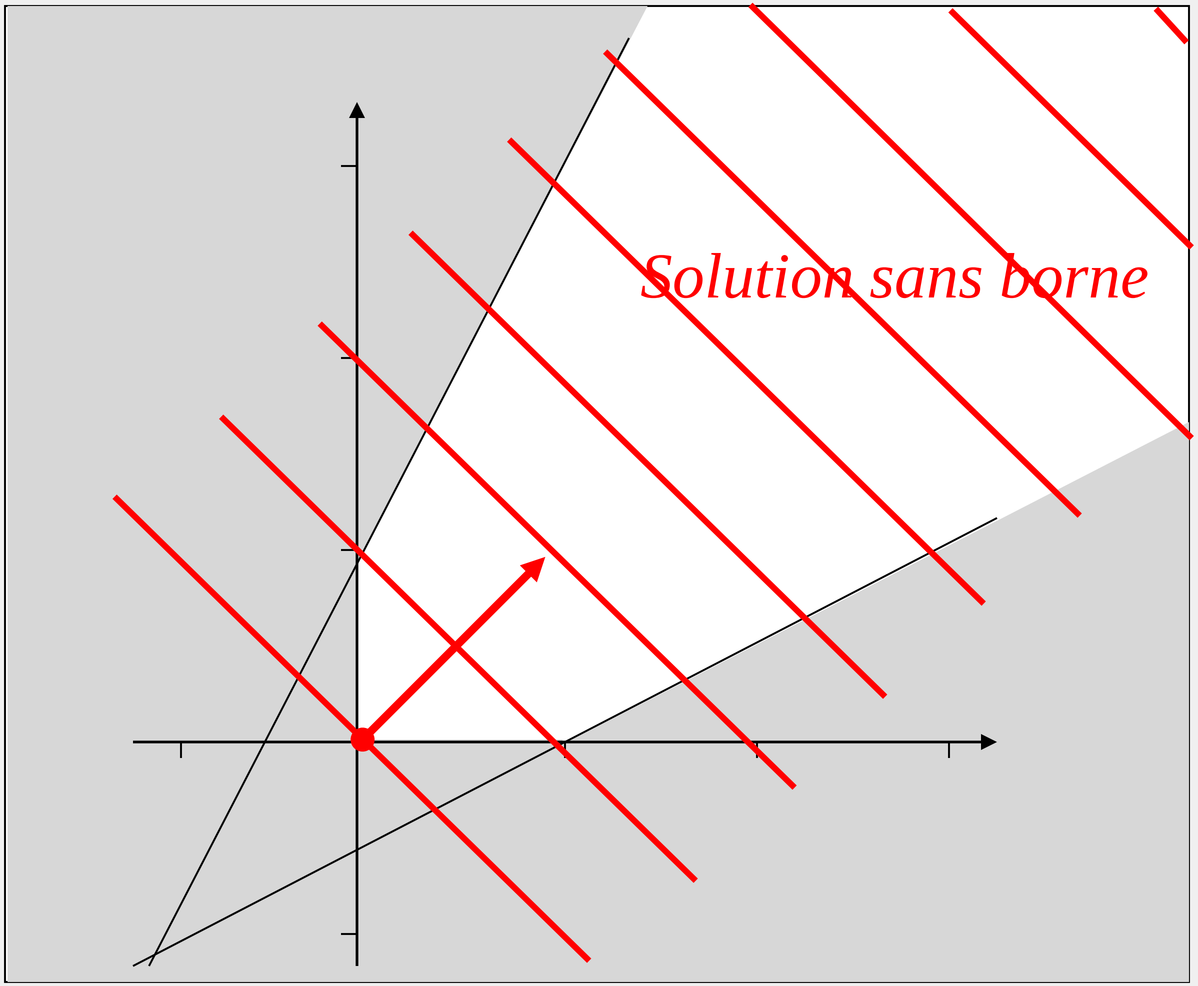
Exemple 2

$$\begin{array}{ll} \text{Max} & Z = x_1 + x_2 \\ \text{S.l.c.:} & -2x_1 + x_2 \leq 1 \\ & x_1 - 2x_2 \leq 1 \\ & x_1 \geq 0 \\ & x_2 \geq 0 \end{array}$$

$$-2x_1 + x_2 \le 1 \qquad x_1 - 2x_2 \le 1 \qquad x_1 \ge 0 \qquad x_2 \ge 0$$



$$\text{Max } Z = x_1 + x_2$$



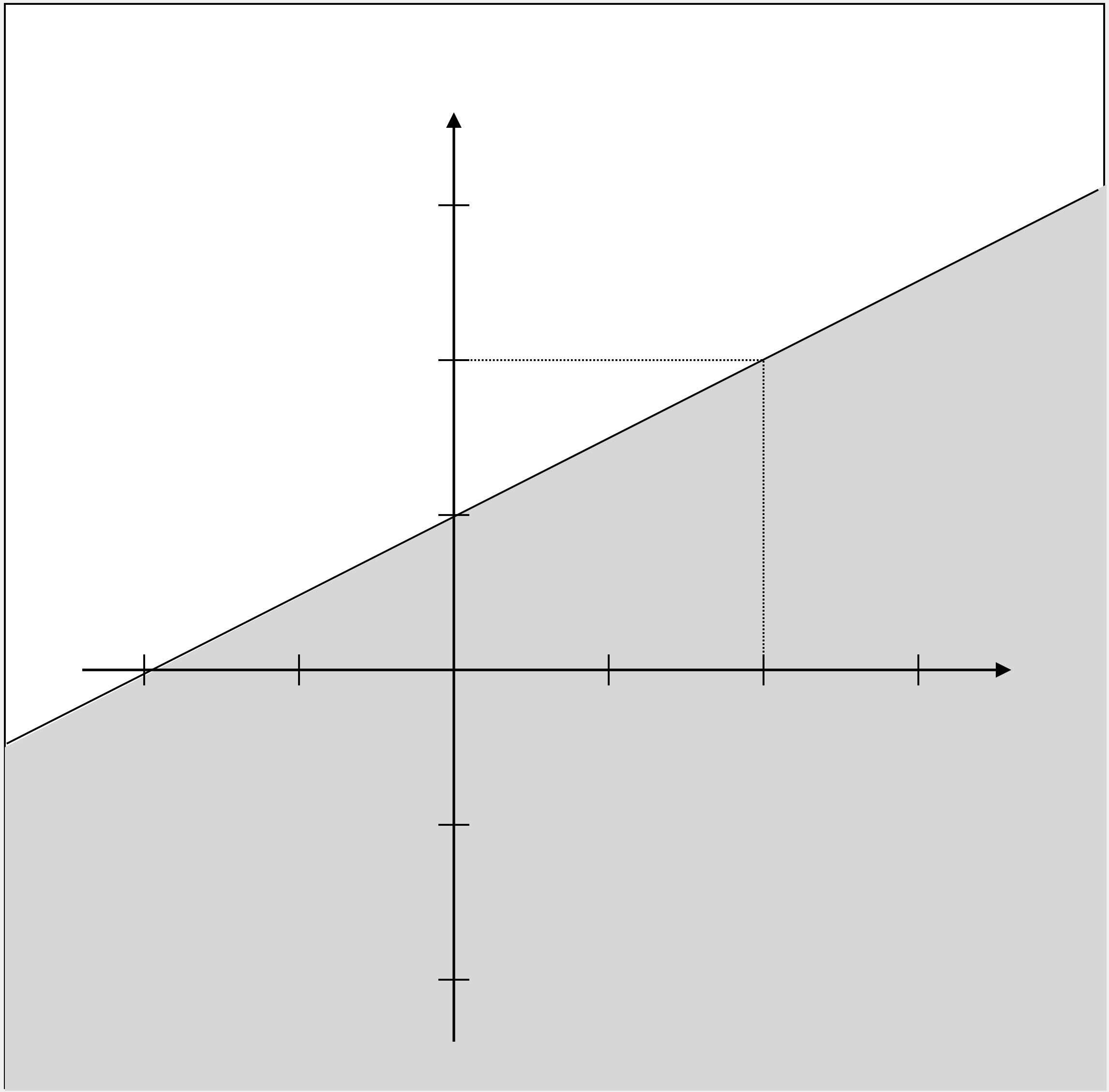
Exemple 3

$$\text{Max} \quad Z = x_1 + x_2$$

$$\text{S.l.c.:} \quad -x_1 + 2x_2 \geq 2$$

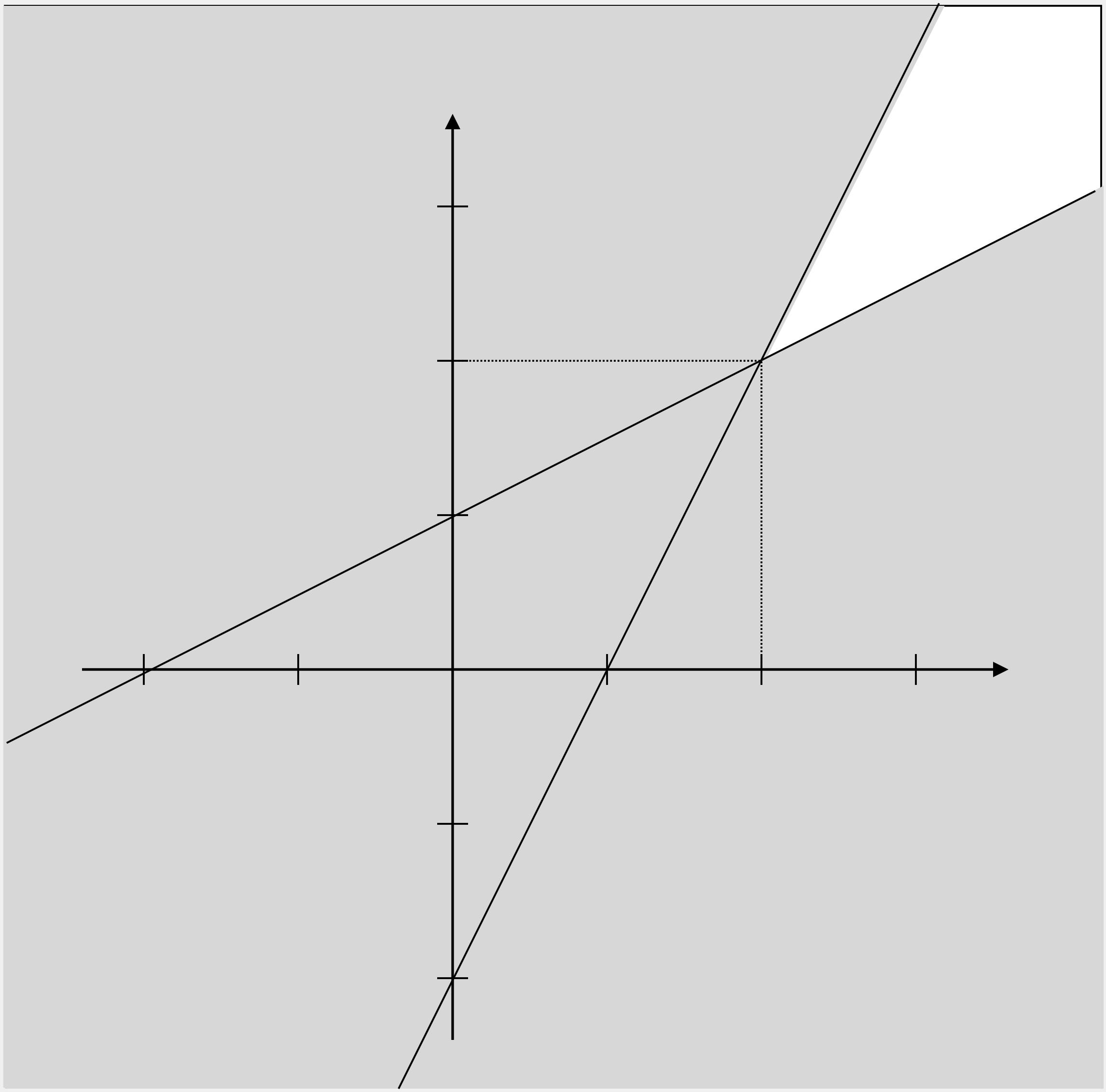
$$2x_1 - x_2 \geq 2$$

$$x_1 + x_2 \leq 2$$



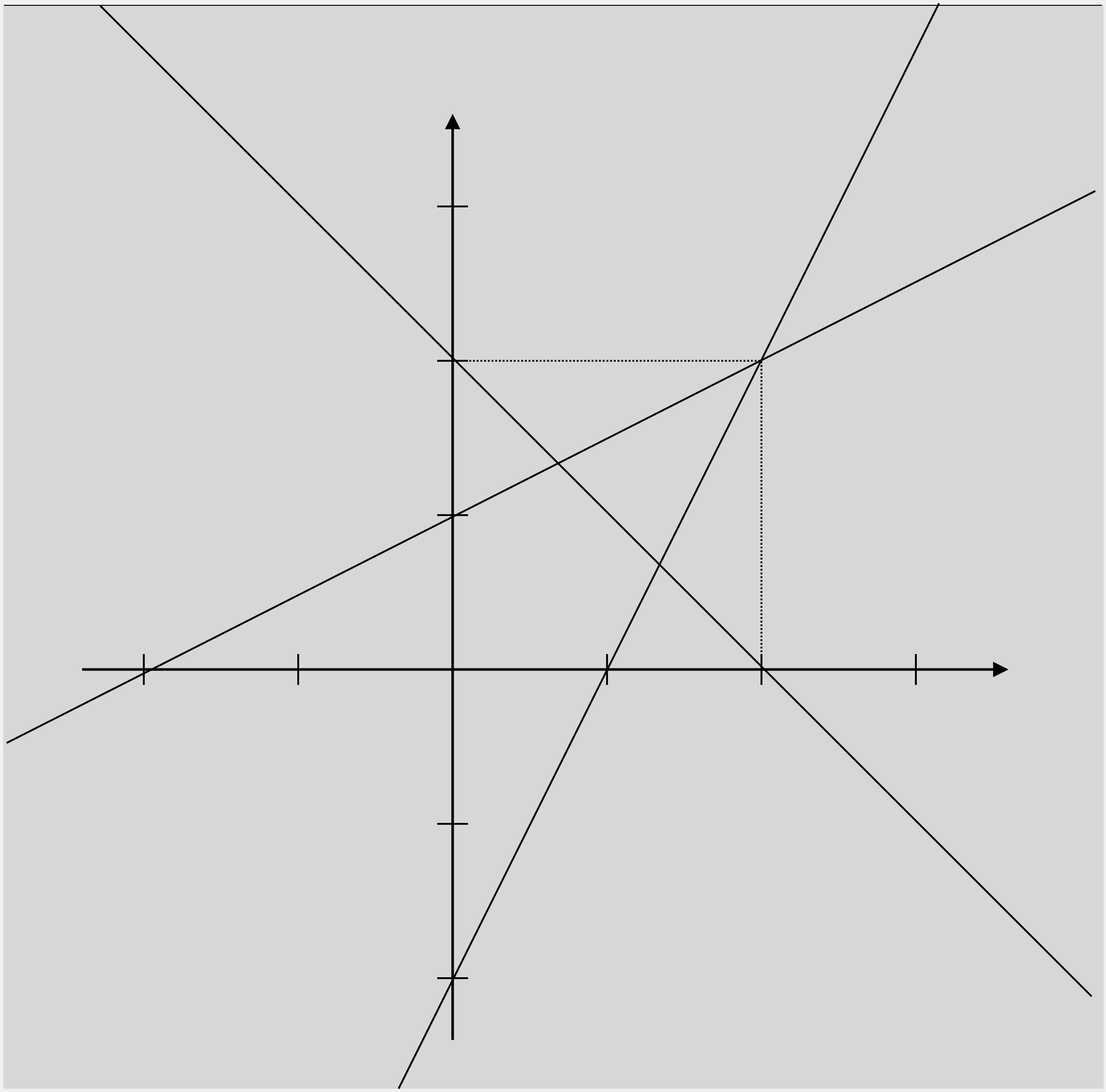
Exemple 3

$$\begin{aligned} \text{Max} \quad & Z = x_1 + x_2 \\ \text{S.l.c.:} \quad & -x_1 + 2x_2 \geq 2 \\ & 2x_1 - x_2 \geq 2 \\ & x_1 + x_2 \leq 2 \end{aligned}$$



Exemple 3

$$\begin{aligned}
&\text{Max} \quad Z = x_1 + x_2 \\
&\text{S.l.c.:} \quad -x_1 + 2x_2 \geq 2 \\
&\qquad\qquad 2x_1 - x_2 \geq 2 \\
&\qquad\qquad x_1 + x_2 \leq 2
\end{aligned}$$



Aucune décision n’est réalisable.
Le domaine réalisable est vide.

Programmes linéaires: cas possibles de solution

(« Solution » = décision)

1. Pas de solution réalisable
2. Solution(s) sans borne
3. Une ou plusieurs solution(s) optimales finies
   - 3.a Une
   - 3.b Plusieurs

Le problème n’est *pas réalisable.*

Le problème est *réalisable.*

Propriétés fondamentales

Propriété 1 (solutions optimales)

S'il existe une (ou plusieurs) solutions optimales finies (cas 3),
et si le domaine réalisable a (au moins) un point extrême,
alors il existe (au moins) un point extrême qui est optimal.

Propriété 2 (existence de points extrêmes)

Si le domaine réalisable est borné et non vide, alors il a au moins un point extrême.

Conséquence: si le domaine réalisable est borné et non vide, pour trouver une solution optimale, il suffit d'inspecter tous les points extrêmes.

Exemple 1:

Point extreme	Coordonnées (x_1, x_2)	$Z = x_1 + x_2$	
A	$(0,0)$	0	
B	$(0,2)$	2	
C	$(2,2)$	4	
D	$(4,1)$	5	Solution optimale unique
E	$(4,0)$	4	

Formulation d'un programme linéaire

Introduction

La modélisation: un art

- Pour un problème donné, plusieurs formulations équivalentes
- Pas de méthode universelle
- Apprentissage par: pratique et réflexion
- Procéder méthodiquement

Produit final

- Variables de décision
  - noms arbitraires
  - unités !
- Programme linéaire
  - formes linéaire (objectif et coté gauche des contraintes)
  - conventions d’écritures

Forme d'un programme linéaire

Variables de décision:	$x_1, x_2, \cdots, x_n$	
Objectif:	*Maximiser / Minimiser:*	$Z = c_1 x_1 + c_2 x_2 + \cdots + c_n x_n$
Contraintes générales	*Sous les contraintes:*	$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \leq / = / \geq b_1$ $a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n \leq / = / \geq b_2$ $\vdots$ $a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n \leq / = / \geq b_m$
Restrictions de signe		$x_1 \geq 0$ $\vdots$ $x_n \geq 0$

Conseils …

1. « Modèle verbal » = inventaire
   – objectif
   – contraintes
2. Variables de décision
   – unités
3. Modèle mathématique
   – cohérent …
   – pas nécessairement linéaire au départ
   – faire des hypothèses *si nécessaire*

Exemple 1

Un fermier a 200 hectares de terre et dispose de 18 000 heures de main-d'œuvre. Il désire déterminer le nombre d'hectares qu'il doit affecter à chacune des cultures suivantes: le maïs, le blé, les pois, les tomates et les fèves. Il doit produire au moins 250 tonnes de maïs pour nourrir ses moutons, et au moins 80 tonnes de blé qu'il a déjà promises par contrat. Le nombre de tonnes par hectare et le nombre d'heures de main-d'œuvre par hectare pour les différentes cultures sont donnés dans le tableau suivant:

	Maïs	Blé	Pois	Tomates	Fèves
Tonnes par hectare	10	4	4	8	6
Heures de main-d'œuvre par hectare	120	150	100	80	120

Sachant que le maïs, le blé, les pois, les tomates et les fèves peuvent être vendus aux prix respectifs de 120D, 150D, 60D, 80D et 55D la tonne, on demande la formulation mathématique de ce programme linéaire qui maximise le montant total du revenu des ventes.

Exemple 1

	Maïs	Blé	Pois	Tomates	Fèves	
Prix ($/tonne)	120	150	60	80	55	
Rendement (tonnes/hectare)	10	4	4	8	6	$\leq$ 200 hectares
Main-d'œuvre requise (heures/hectare)	120	150	100	80	120	$\leq 18000h$
	$\geq 250t$	$\geq 80t$				

Éléments

- Objectif:
  - Maximiser le revenu de la production
    - (Hypothèse: ce qui sera produit sera vendu)
- Contraintes:
  - Surface disponible
  - Heures de main d'œuvre disponibles
  - Production minimale de maïs
  - Production minimale de blé

Décisions

- Sur quoi portent les décisions à prendre dans cette situation ?
  - Que cultiver
  - Combien de chaque type.
- En quelles unités les variables seront-elles exprimées ?
  - Hectares
  - Tonnes

Formulation 1

- Variables de décision
  - x_i = nombre d'hectares réservés à la production de la culture i ($1 \leq i \leq 5$), où :

    $i = 1$: maïs

    $i = 2$: blé

    $i = 3$: pois

    $i = 4$: tomates

    $i = 5$: fèves

Programme linéaire

Objectif: Max: Revenu total ($) =

Revenu tiré du maïs + Revenu tiré du blé + Revenu tiré des pois + Revenu tiré des tomates + Revenu tiré des fèves

Prix de vente × Quantité produite

$$\underbrace{1200\ \frac{\$}{\text{hect mais}} \times x_1\ \text{hect mais}}_{\$} \qquad \underbrace{600\ \frac{\$}{\text{hect blé}}\ x_2\ \text{hect blé}}_{\$} \qquad 240x_3 \qquad \cdots$$

$$\text{Max } Z = 1200x_1 + 600x_2 + 240x_3 + 640x_4 + 330x_5$$

Contraintes:

1. Surface disponible:

Surface utilisée (hectares)	$\leq$	200 (hectares)

$$= \underbrace{\text{Surface utilisée pour le maïs}}_{x_1 \text{ (hectares)}} + \underbrace{\text{Surface utilisée pour le blé}}_{x_2 \text{ (hectares)}} + \underbrace{\text{Surface utilisée pour les pois}}_{\ldots} + \text{Surface utilisée pour les tomates} + \text{Surface utilisée pour les fèves}$$

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 \leq 200$$

2. Heures de main d'œuvre disponibles

$$\underbrace{\text{Heures de main d'œuvre utilisées (hres)}} \leq \text{18000 (hres)}$$

$$= \text{HMdo utilisées maïs} + \text{HMdo utilisées blé} + \text{HMdo utilisées pois} + \text{HMdo utilisées tomates} + \text{HMdo utilisées fèves}$$

$$\text{Hres utilisées par hect} \times \text{\# hect utilisés}$$

$$\underbrace{\underset{\frac{\text{hres mdo}}{\text{hect mais}}}{120} \times \underset{\text{hect mais}}{x_1}}_{\text{hres mdo}} \qquad \underbrace{\underset{\frac{\text{hres mdo}}{\text{hect blé}}}{150} \times \underset{\text{hect blé}}{x_2}}_{\text{hres mdo}} \qquad 100x_3 \qquad \cdots$$

$$120x_1 + 150x_2 + 100x_3 + 80x_4 + 120x_5 \leq 18000$$

3. Production minimale de maïs

$$x_1 \geq 25$$

hect hect

4. Production minimale de blé

$$x_2 \geq 20$$

hect hect

Programme linéaire 1 - récapitulation

$$
\begin{array}{ll}
\text{Max} & Z = 1200x_1 + 600x_2 + 240x_3 + 640x_4 + 330x_5 \\
\text{S.l.c.} & x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 \leq 200 \\
 & 120x_1 + 150x_2 + 100x_3 + 80x_4 + 120x_5 \leq 18000 \\
 & x_1 \geq 25 \\
 & x_2 \geq 20 \\
 & x_3, x_4, x_5 \geq 0
\end{array}
$$

Programme linéaire 1 - récapitulation

Max $\quad Z = 1200x_1 + 600x_2 + 240x_3 + 640x_4 + 330x_5$

S.l.c. $\quad x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 \leq 200$

$$120x_1 + 150x_2 + 100x_3 + 80x_4 + 120x_5 \leq 18000$$

$$x_1 \geq 25$$

$$x_2 \geq 20$$

$$x_3, x_4, x_5 \geq 0$$

Programme linéaire 1 - récapitulation

direction de l'objectif

coeffficients de l'objectif

relations

côtés droits

Max Z =	$1200x_1$	+	$600x_2$	+	$240x_3$	+	$640x_4$	+	$330x_5$			
S.l.c.:	$1x_1$	+	$1x_2$	+	$1x_3$	+	$1x_4$	+	$1x_5$		$\leq$	200
coeff contraintes générales	$120x_1$	+	$150x_2$	+	$100x_3$	+	$80x_4$	+	$120x_5$		$\leq$	18000
	$1x_1$	+	$0x_2$	+	$0x_3$	+	$0x_4$	+	$0x_5$		$\geq$	25
	$0x_1$	+	$1x_2$	+	$0x_3$	+	$0x_4$	+	$0x_5$		$\geq$	20
restrictions de signes					$x_3 \geq 0$							
							$x_4 \geq 0$					
									$x_5 \geq 0$			

Remarque

- 250 tonnes de maïs seront utilisées pour l'élevage, donc pas vendues.
- Dans le revenu total, on a compté 120 × 250 = 30 000 D en trop.
- Le vrai revenu est: $Z = 1200x_1 + 600x_2 + 240x_3 + 640x_4 + 330x_5 - 30000$
- *Mais:* ajouter ou retrancher une constante à l'objectif ne change pas la solution optimale.
- On n'écrira jamais de constante dans l'objectif.
- On retranchera les 30 000 $ après avoir résolu le programme linéaire.

Exemple 1: Formulation 2

- Variables de décision
  - x_i = nombre de tonnes de la culture i à produire $(1 \le i \le 5)$
- Programme linéaire:

$$\text{Max} \quad Z = 120x_1 + 150x_2 + 60x_3 + 80x_4 + 55x_5$$

$$\text{S.l.c.} \quad \underbrace{\boxed{\frac{1}{10}}}_{\text{hect/tonne}} \underbrace{\boxed{x_1}}_{\text{Tonnes}} + \frac{1}{4}x_2 + \frac{1}{4}x_3 + \frac{1}{8}x_4 + \frac{1}{6}x_5 \le \boxed{200} \text{ Hectares}$$

$$12x_1 + 37.5x_2 + 25x_3 + 10x_4 + 20x_5 \le 18000$$

$$x_1 \ge 250$$

$$x_2 \ge 80$$

$$x_3, x_4, x_5 \ge 0$$

Exemple 2

L'entreprise ProTek doit, dans son processus de fabrication de ses produits, utiliser trois phases successives d'opération : l'usinage des pièces, l'assemblage et la finition. Pour simplifier le problème, supposons que l'entreprise fabrique trois produits que nous noterons P1, P2 et P3. Les différentes phases d'opération ne peuvent toutefois fonctionner que pendant un certain nombre d'heures. La main d'œuvre actuelle limite le nombre d'heures disponibles pour l'usinage à 100 heures, pour l'assemblage à 120 heures et pour la finition à 200 heures. Le tableau ci-dessous nous indique les temps de fabrication requis, en heures/unité, aux différentes phases d'opération pour fabriquer les produits P1, P2 et P3, soit :

		Produits		
		P1	P2	P3
Phases d' opération	Usinage	1	2	1
	Assemblage	3	4	2
	Finition	2	6	4

Le département de comptabilité de l'entreprise a estimé les bénéfices unitaires des trois produits à 6 dinars pour P1, 7 dinars pour P2 et 8 dinars pour P3. On suppose ici qu'il n'existe aucune restriction de marché ; il peut absorber toute la production. De plus, vu la popularité du produit P2, il a été convenu que le nombre d'unités de ce produit doit constituer au moins 40% mais pas plus de 60% de la production totale de l'entreprise ProTek.

Formuler le programme linéaire qui permettra à l'entreprise ProTek de maximiser ses bénéfices.

Exemple 2 : Réponse

- Variables de décision

  x_i = nombre d'unités du produit i (i=1, 2, 3) à produire

$$Max\ Z = 6x_1 + 7x_2 + 8x_3$$

$$S.l.c$$

$$x_1 + 2x_2 + x_3 \leq 100$$

$$3x_1 + 4x_2 + 2x_3 \leq 120$$

$$2x_1 + 6x_2 + 4x_3 \leq 200$$

$$40\% \leq \frac{x_2}{x_1 + x_2 + x_3} \leq 60\%$$

$$x_1 \geq 0$$

$$x_2 \geq 0$$

$$x_3 \geq 0$$

Exemple 3

L'administrateur d'une firme de comptables doit déterminer, chaque semaine, le temps qu'il doit allouer à chacune des trois activités suivantes : la vérification, la comptabilité de gestion et la planification fiscale. Le but est de gérer, le mieux possible, les ressources humaines de la firme.

Pour chaque heure de vérification facturée, la firme doit faire 15 minutes de travail de comptabilité et 30 minutes de travail de bureau. Pour chaque heure de comptabilité de gestion facturée, la firme doit fournir 20 minutes de travail de comptabilité, 60 minutes de travail de bureau et elle doit, de plus, utiliser 6 minutes de temps d'ordinateur. Pour chaque heure de planification fiscale facturée, la firme doit prévoir 30 minutes de travail de comptabilité, 45 minutes de travail de bureau et 3 minutes de temps d'ordinateur. Le profit net pour une heure de vérification est de 40 dinars, tandis que les profits nets pour une heure de comptabilité de gestion et de planification fiscale sont respectivement de 100 dinars et de 60 dinars. Le personnel de la firme peut fournir la prochaine semaine, 80 heures de comptabilité, 180 heures de travail de bureau et 30 heures de traitement par ordinateur. Enfin, pour des raisons purement administratives, le nombre d'heures de vérification facturée ne doit pas dépasser 20% du volume horaire total facturé.

Formuler le programme linéaire qui permettra de maximiser le profit net de la firme pour la semaine à venir.

Exemple 3 : Réponse

- Variables de décision

x_i = nombre d'heures facturées pour l'activité i (i = vf, cg, pl)

$$Max\ Z = 40x_{vf} + 100x_{cg} + 60x_{pl}$$

$$S.l.c$$

$$\frac{1}{4}x_{vf} + \frac{1}{3}x_{cg} + \frac{1}{2}x_{pl} \leq 80$$

$$\frac{1}{2}x_{vf} + x_{cg} + \frac{3}{4}x_{pl} \leq 180$$

$$\frac{1}{10}x_{cg} + \frac{1}{20}x_{pl} \leq 30$$

$$\frac{x_{vf}}{x_{vf} + x_{cg} + x_{pl}} \leq 20\%$$

$$x_{vf} \geq 0$$

$$x_{cg} \geq 0$$

$$x_{pl} \geq 0$$

Exemple 4

Une entreprise dispose d'un budget de 10,000D pour la publicité. Avec ce budget, elle désire atteindre le nombre maximum de clients éventuels. Le tableau ci-après donne des renseignements que l'on suppose exacts et qui viennent des responsables des médias d'information suivants: le journal, la radio et la télévision.

	Journal	*Radio*	*Télévision*
Coût pour la publicité par unité d'information (u.i.)	250D	100D	2,500D
Nombre de personnes atteintes par unité d'information	10,000	3,000	75,000
Nombre de personnes à revenus moyen ou élevé atteintes par u.i.	7,000	1,000	50,000
Nombre d'hommes âgés de plus de 25 ans atteints par u.i.	5,000	500	25,000
Maximum d'unités d'information disponibles		100	20
Minimum d'unités d'information à payer		7	2

Le désir des responsables de l'entreprise est:

a) qu'au moins 50% des personnes atteintes soient à revenu moyen ou élevé;

b) qu'au moins 100,000 hommes âgés de 25 ans ou plus soient atteints.

Vous êtes dans l'administration et l'on vous demande de déterminer le programme d'information le plus efficace répondant aux aspirations des responsables. Sans résoudre le problème, donner une formulation mathématique.

Exemple 4

- Objectif
  - Max audience
- Contraintes
  - budget 10 000 D
  - a) personnes à revenu moy-élevé = au moins 50% audience
  - b) atteindre au moins 100 000 « hommes 25+ »
  - # min et max d'unités d'information: radio et TV
- Variables de décision

x_i = # d'unité d'information achetées sur le média i

(i = 1 : journal ; i = 2 : radio ; i = 3 : TV).

- Audience atteinte: $10000x_1 + 3000x_2 + 75000x_3$
- Contrainte de budget: $250x_1 + 100x_2 + 2500x_3 \leq 10000$
- Au moins 50% des personnes atteintes seront à revenu moyen ou élevé:

$$\frac{\text{\# personnes a revenu moy.-élevé atteintes}}{\text{\# total de personnes atteintes}} \geq 0,5$$

$$\frac{7000x_1 + 1000x_2 + 50000x_3}{10000x_1 + 3000x_2 + 75000x_3} \geq 0,5$$

$$7000x_1 + 1000x_2 + 50000x_3 \geq 5000x_1 + 1500x_2 + 37500x_3$$

$$-2000x_1 + 500x_2 - 12500x_3 \leq 0$$

- Atteindre ≥ 100 000 H25+: $5000x_1 + 500x_2 + 25000x_3 \geq 100000$
- Bornes radio: $7 \leq x_2 \leq 100$
- Bornes TV: $2 \leq x_3 \leq 20$

Programme linéaire: récapitulation

$$\text{Max} \quad Z = 10000x_1 + 3000x_2 + 75000x_3$$

$$\text{S.l.c.:} \quad 250x_1 + 100x_2 + 2500x_3 \le 10000$$

$$-2000x_1 + 500x_2 - 12500x_3 \le 0$$

$$5000x_1 + 500x_2 + 25000x_3 \ge 100000$$

$$x_2 \ge 7$$

$$x_2 \le 100$$

$$x_3 \ge 2$$

$$x_3 \le 20$$

$$x_1 \ge 0$$

Exemple 5

Un navire possède 3 compartiments dont les capacités limites sont comme suit:

	Tonnes	m^3
Avant	2,000	100,000
Centre	3,000	160,000
Arrière	1,700	60,000

Pour des raisons de sécurité (équilibre), les contraintes suivantes sont imposées:

- Le poids total transporté en avant doit exactement dépasser celui de l'arrière de 30%.
- Le poids total du centre doit être au moins 30% plus élevé que celui de l'arrière, au moins 30% plus élevé que celui de l'avant mais au plus égal à 90% du poids total transporté.

Les caractéristiques des produits à transporter sont:

Produit	Quantité totale disponible (tonnes)	Volume/tonne (m^3/tonne)	Profit/tonne (D/tonne)
A	5,000	60	8
B	3,000	50	7

La compagnie veut trouver la façon dont il faut charger ces produits afin d'avoir le maximum de profit. Il faut noter qu'on n'est pas obligé de transporter toutes les quantités disponibles. Formuler ce problème (variables de décision, fonction-objectif et contraintes).

Exemple 5

Objectif: Max profit total tiré du transport (D)

Contraintes:

Type	*Visant*	*Unités*
Quantités disponibles	A	Tonnes
	B	Tonnes
Capacité en poids	Av	Tonnes
	C	Tonnes
	Ar	Tonnes
Capacité en volume	Av	m3
	C	m3
	Ar	m3
Équilibrage	Av *vs*. Ar	Tonnes
	C *vs*. Av	Tonnes
	C *vs*. Ar	Tonnes
	C *vs*. Total	Tonnes

Exemple 5

- Décider quoi ?

  Combien transporter

  – De chaque produit

  – Dans chaque compartiment

  – $\rightarrow 2 \times 3 = 6$ variables

- Unités:

  Tonnes

- Variables de décision:

  x_{ij} = # de *tonnes* du produit i (i = 1 : A; i = 2 : B) transportées dans le compartiment j (j = 1 : avant; j = 2 : centre; j = 3 : arrière).

Exemple 5

Objectif: $\text{Max } Z = 8x_{11} + 8x_{12} + 8x_{13} + 7x_{21} + 7x_{22} + 7x_{23}$

Quantités disponibles: Quantité transportée ≤ quantité disponible

A: $x_{11} + x_{12} + x_{13} \le 5000$

B: $x_{21} + x_{22} + x_{23} \le 3000$

Capacité en poids: Poids transporté ≤ capacité en poids

Av: $x_{11} + x_{21} \le 2000$

C: $x_{12} + x_{22} \le 3000$

Ar: $x_{13} + x_{23} \le 1700$

Capacité en volume: Volume transporté ≤ capacité en volume

Av: $60x_{11} + 50x_{21} \le 100\,000$

C: $60x_{12} + 50x_{22} \le 160\,000$

Ar: $60x_{13} + 50x_{23} \le 60\,000$

Exemple 5

Équilibrage: Av *vs*. Ar.

$$\frac{\text{Poids Av}}{\text{Poids Ar}} = 1,3$$

$$\frac{x_{11} + x_{21}}{x_{13} + x_{23}} = 1,3$$

$$x_{11} + x_{21} = 1,3x_{13} + 1,3x_{23}$$

$$x_{11} + x_{21} - 1,3x_{13} - 1,3x_{23} = 0$$

Exemple 5

Équilibrage: C *vs*. Av.

$$\frac{\text{Poids C}}{\text{Poids Av}} \geq 1,3 \qquad \frac{x_{12}+x_{22}}{x_{11}+x_{21}} \geq 1,3$$

$$x_{12}+x_{22} \geq 1,3x_{11}+1,3x_{21} \qquad 1,3x_{11}+1,3x_{21}-x_{12}-x_{22} \leq 0$$

Équilibrage: C *vs*. Ar.

$$\frac{\text{Poids C}}{\text{Poids Ar}} \geq 1,3 \qquad \frac{x_{12}+x_{22}}{x_{13}+x_{23}} \geq 1,3$$

$$x_{12}+x_{22} \geq 1,3x_{13}+1,3x_{23} \qquad 1,3x_{13}+1,3x_{23}-x_{12}-x_{22} \leq 0$$

Exemple 5

Équilibrage: C *vs.* Total

$$\frac{\text{Poids C}}{\text{Poids total}} \leq 0,9$$

$$\frac{x_{12} + x_{22}}{x_{11} + x_{21} + x_{12} + x_{22} + x_{13} + x_{23}} \leq 0,9$$

$$x_{12} + x_{22} \leq 0,9x_{11} + 0,9x_{21} + 0,9x_{12} + 0,9x_{22} + 0,9x_{13} + 0,9x_{23}$$

$$-0,9x_{11} - 0,9x_{21} + 0,1x_{12} + 0,1x_{22} - 0,9x_{13} - 0,9x_{23} \leq 0$$

Non-négativité

$$x_{ij} \geq 0 \quad 1 \leq i \leq 2, \quad 1 \leq j \leq 3$$

Exemple 6

Un manufacturier d'automobiles signe un contrat pour exporter outre-mer 400 voitures d'un modèle A et 500 d'un modèle B. Le modèle A occupe un volume de 12 mètres cubes (m^3) et le modèle B, un volume de 15 m^3.

Trois navires sont disponibles pour le transport de ces voitures et ils arrivent à destination respectivement au début de janvier, à la mi-février et à la fin de mars. Le premier navire ne peut transporter que des voitures du modèle A au coût de 450$ par voiture, tandis que le deuxième et le troisième navire peuvent transporter les deux modèles de voiture A et B, aux coûts respectifs de 35$ le mètre cube pour le deuxième navire et de 40$ le mètre cube pour le troisième. Le premier navire ne peut transporter que 200 voitures du modèle A, tandis que le deuxième et le troisième navire qui peuvent transporter les deux modèles A et B ne disposent respectivement que de 4500 et 6000 m^3.

Si le manufacturier a promis de livrer à la mi-février au moins 250 voitures du type A et au moins 200 voitures du type B et le reste des voitures à la fin de mars, formulez un programme linéaire qui minimise le coût de transport de ces automobiles.

Exemple 6

	A	B	Date d'arrivée	Capacité	Coût/m^3
Navire 1		-	1/1	200 voit.A	-
Navire 2			14/2	4500 m^3	35 $
Navire 3			31/3	6000 m^3	40 $
Volume occupé (m^3/voit.)	12 m^3	15 m^3			
Livraisons totales (voitures)	400	500			
Livraisons minimales en février (voit.)	250	200			

Exemple 6

Coût unitaire ($/voit.)	A	B	Date d'arrivée	Capacité	Coût/m^3
Navire 1	450	-	1/1	200 voit.A	-
Navire 2	420	525	14/2	4500 m^3	35 $
Navire 3	480	600	31/3	6000 m^3	40 $
Volume occupé (m^3/voit.)	12 m^3	15 m^3			
Livraisons totales (voitures)	400	500			
Livraisons minimales en février (voit.)	250	300			

Exemple 6 : éléments

- Objectif

  Min coût total de transport ($).
- Contraintes
  - Demandes totales
    - A
    - B
  - Demandes de février
    - A
    - B
  - Capacités de transport
    - Navire 1
    - Navire 2
    - Navire 3
- Variables de décision

  x_{ij} = # de voitures du type i (i = 1: modèle A; i = 2: modèle B) transportées sur le navire j ($1 \leq j \leq 3$) ($i \leq j$).

Exemple 6 : Programme linéaire

Objectif:

$$\text{Min } Z = 450x_{11} + 420x_{12} + 480x_{13} + 525x_{22} + 600x_{23}$$

S.l.c:

Demande totale de A: $x_{11} + x_{12} + x_{13} = 400$

Demande totale de B: $x_{22} + x_{23} = 500$

Demande de A en février: $x_{11} + x_{12} \geq 250$

Demande de B en février: $x_{22} \geq 200$

Capacité du navire 1: $x_{11} \leq 200$

Capacité du navire 2: $12x_{12} + 15x_{22} \leq 4500$

Capacité du navire 3: $12x_{13} + 15x_{23} \leq 6000$

$$x_{ij} \geq 0 \quad 1 \leq i \leq 2, 1 \leq j \leq 3, i \leq j$$

Algorithme du Simplexe

1. Matrices et vecteurs
2. Systèmes d'égalités linéaires
3. Systèmes d'inégalités linéaires
4. Algorithme du simplexe

Matrices et vecteurs : Définitions

- **Matrice: tableau rectangulaire, ordonné, de nombres réels**

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \qquad F = \begin{bmatrix} 5 & 3.3 & 7 \\ 2 & 8.5 & 1 \end{bmatrix} \qquad G = \begin{bmatrix} 0 & -2 \\ 1 & 0 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}$$

- ***Dimensions:*** $A : m \times n \Leftrightarrow A$ a m lignes, n colonnes, mn éléments.

$$F : 2 \times 3 \qquad G : 3 \times 2$$

- ***Éléments:*** A_{ij} est l'élément (nombre) en ligne i et colonne j

$$F_{12} = 3.3 \qquad G_{21} = 1 \qquad F_{31} \text{ n'existe pas}$$

- *Transposée* : soit $A : m \times n$. Sa transposée est une matrice $A' : n \times m$ telle que: $(A')_{ij} = A_{ji} \quad \forall\ i = 1, \cdots, n,\ j = 1, \cdots, m$

$$F = \begin{bmatrix} 5 & 3.3 & 7 \\ 2 & 8.5 & 1 \end{bmatrix} \qquad F' = \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 3.3 & 8.5 \\ 7 & 1 \end{bmatrix}$$

- **Matrices particulières**

Matrice *nulle* $(m \times n)$: $\mathbf{0} = \begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}$

Matrice *carrée*: de dimension $k \times k$ (# lignes = # colonnes)

Matrice *identité* : matrice carrée $I = \begin{bmatrix} 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}$ $\begin{cases} I_{ii} = 1\ \forall i \\ I_{ij} = 0\ \forall i \neq j \end{cases}$

- **Vecteur:** matrice formée d'une ligne (vecteur-ligne) ou d'une colonne (vecteur-colonne)

$$a = \begin{pmatrix} 2 & 5 & -1 \end{pmatrix} \qquad a_3 = -1$$

Vecteur de variables: $x = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \cdots & x_n \end{pmatrix}'$

Vecteur *unitaire*: un "1" et des "0" $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Vecteur nul: $\begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$

$$x = 0 \iff x_1 = 0,\ x_2 = 0, \cdots,\ x_n = 0 \qquad (n \text{ égalités})$$

•Produit scalaire de 2 vecteurs

Si x est un vecteur ligne de dimension $1\text{x}n$, y un vecteur colonne de dimension $n\text{x}1$, leur produit scalaire est:

$$x \cdot y = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 5 \\ 8 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} = 1\times 5 + 0\times 8 + 2\times 1 + (-1)\times 2 = 5$$

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \qquad\qquad\vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} \Leftrightarrow \quad Ax = b$$

$$\text{avec} \quad A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} (m \times n), \quad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} (n \times 1)$$

$$et\ b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix} (m \times 1)$$

Systèmes d'égalités linéaires

- Un système de m égalités linéaires en n variables est de la forme

  $$\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$$

  où A (mxn) est une matrice de *coefficients*,
  $\boldsymbol{x}$ (nx1) est un vecteur de *variables*,
  $\boldsymbol{b}$ (mx1) un vecteur de *cotés droits*.
- Une ***solution*** du système est un choix de valeurs pour $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2,\ldots,x_n)'$ satisfaisant simultanément les m égalités.
- ***Opérations permises*** (ne modifiant pas l'ensemble des solutions):
  - permuter des équations
  - multiplier une équation par un nombre non nul
  - ajouter une équation à une autre
  - et toute combinaison des opérations précédentes (e.g. retrancher k fois une équation d'une autre).

Exemple 1

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 = 4 \\ 7x_1 + 5x_2 = 6 \end{cases} \qquad \left[\begin{array}{cc:c} 3 & 2 & 4 \\ 7 & 5 & 6 \end{array}\right] \rightarrow \left[\begin{array}{cc:c} 1 & 0 & ? \\ 0 & 1 & ? \end{array}\right]$$

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 = 4 \\ 7x_1 + 5x_2 = 6 \end{cases} \qquad \left[\begin{array}{cc:c} 3 & 2 & 4 \\ 7 & 5 & 6 \end{array}\right] \rightarrow \left[\begin{array}{cc:c} 1 & ? & ? \\ 7 & 5 & 6 \end{array}\right] \qquad \text{NL1 = AL1/3}$$

$$\begin{cases} x_1 + \frac{2}{3} x_2 = \frac{4}{3} \\ 7x_1 + 5x_2 = 6 \end{cases} \qquad \left[\begin{array}{cc:c} 1 & \frac{2}{3} & \frac{4}{3} \\ 7 & 5 & 6 \end{array}\right] \rightarrow \left[\begin{array}{cc:c} 1 & \frac{2}{3} & \frac{4}{3} \\ 0 & ? & ? \end{array}\right] \qquad \text{NL2 = AL2} - 7 \times \text{L1}$$

$$\begin{cases} x_1 + \frac{2}{3} x_2 = \frac{4}{3} \\ \frac{1}{3} x_2 = \frac{-10}{3} \end{cases} \qquad \left[\begin{array}{cc:c} 1 & \frac{2}{3} & \frac{4}{3} \\ 0 & \frac{1}{3} & \frac{-10}{3} \end{array}\right] \rightarrow \left[\begin{array}{cc:c} 1 & \frac{2}{3} & \frac{4}{3} \\ 0 & 1 & ? \end{array}\right] \qquad \text{NL2} = 3 \times \text{AL2}$$

$$\begin{cases} x_1 + \frac{2}{3} x_2 = \frac{4}{3} \\ x_2 = -10 \end{cases} \qquad \left[\begin{array}{cc:c} 1 & \frac{2}{3} & \frac{4}{3} \\ 0 & 1 & -10 \end{array}\right] \rightarrow \left[\begin{array}{cc:c} 1 & 0 & ? \\ 0 & 1 & -10 \end{array}\right] \qquad \text{NL1 = AL1} - (2/3) \times \text{L2}$$

$$\begin{cases} x_1 = 8 \\ x_2 = -10 \end{cases} \qquad \left[\begin{array}{cc:c} 1 & 0 & 8 \\ 0 & 1 & -10 \end{array}\right]$$

Exemple 2

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 4 \\ 7x_1 + 5x_2 + 4x_3 = 6 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x_1 = ? \\ x_2 = ? \end{cases}$$

$$\left[\begin{array}{ccc:c} 3 & 2 & 1 & 4 \\ 7 & 5 & 4 & 6 \end{array}\right] \rightarrow \left[\begin{array}{ccc:c} 1 & ? & ? & ? \\ 0 & ? & ? & ? \end{array}\right]$$

1) NL1 = AL1/3

2) NL2 = AL2 – 7×NL1

$$\left[\begin{array}{ccc:c} 1 & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{4}{3} \\ 0 & \frac{1}{3} & \frac{5}{3} & \frac{-10}{3} \end{array}\right] \rightarrow \left[\begin{array}{ccc:c} 1 & 0 & ? & ? \\ 0 & 1 & ? & ? \end{array}\right]$$

2) NL1 = AL1 – (2/3)×NL2

1) NL2 = 3 × AL2

$$\left[\begin{array}{ccc:c} 1 & 0 & -3 & 8 \\ 0 & 1 & 5 & -10 \end{array}\right] \qquad \begin{cases} x_1 = 8 + 3x_3 \\ x_2 = -10 - 5x_3 \end{cases}$$

Définitions

- Le système est sous ***forme canonique*** lorsque, par des opérations permises, on a obtenu le plus grand nombre possible de vecteurs unitaires ***distincts*** dans les colonnes de coefficients.

- Dans une forme canonique,
  - Les ***variables de base*** sont celles associées à des vecteurs unitaires (distincts). La *base* est l'ensemble des variables de base.
  - Les ***variables hors base*** sont les autres variables.

- Une forme canonique exprime les variables de base (dépendantes) comme des fonctions des variables hors base (indépendantes).

Exemple: $\begin{cases} x_1 = 8 + 3x_3 \\ x_2 = -10 - 5x_3 \end{cases}$

- On a
  - une ***solution générale*** lorsqu'on laisse les variables hors base à l'état de variables;
  - une ***solution de base*** lorsqu'on choisit la valeur 0 pour toutes les variables hors base.

	Solution générale		Solution de base
$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 8+3x_3 \\ -10-5x_3 \\ x_3 \end{pmatrix}$		$\begin{pmatrix} 8 \\ -10 \\ 0 \end{pmatrix}$

Exemple 2 (suite)

Trouver toutes les solutions de base du système précédent.

$$\left[\begin{array}{ccc:c} 1 & 0 & -3 & 8 \\ 0 & 1 & 5 & -10 \end{array}\right] \rightarrow \left[\begin{array}{ccc:c} ? & 0 & 1 & ? \\ ? & 1 & 0 & ? \end{array}\right]$$

1) NL1 = AL1/(–3)

2) NL2 = AL2 – 5×NL1

$$\left[\begin{array}{ccc:c} -\frac{1}{3} & 0 & 1 & -\frac{8}{3} \\ \frac{5}{3} & 1 & 0 & \frac{10}{3} \end{array}\right] \rightarrow \left[\begin{array}{ccc:c} 0 & ? & 1 & ? \\ 1 & ? & 0 & ? \end{array}\right]$$

2) NL1 = AL1 + (1/3)×NL2

1) NL2 = (3/5) × AL2

$$\left[\begin{array}{ccc:c} 0 & \frac{1}{5} & 1 & -2 \\ 1 & \frac{3}{5} & 0 & 2 \end{array}\right]$$

Base	Solution générale (x_1, x_2, x_3)	Solution de base (x_1, x_2, x_3)
$\{x_1, x_2\}$	$(8+3x_3, -10-5x_3, x_3)$	$(8, -10, 0)$
$\{x_2, x_3\}$	$\left(x_1, \frac{10}{3}-\frac{5}{3}x_1, -\frac{8}{3}+\frac{1}{3}x_1\right)$	$\left(0, \frac{10}{3}, -\frac{8}{3}\right)$
$\{x_1, x_3\}$	$\left(2-\frac{3}{5}x_2, x_2, -2-\frac{1}{5}x_2\right)$	$(2, 0, -2)$

Trouver une forme canonique: mécanique de calcul

Exemple 2: Tableau de départ Tableau visé

$$\left[\begin{array}{ccc:c} 3 & 2 & 1 & 4 \\ 7 & 5 & 4 & 6 \end{array}\right] \qquad \left[\begin{array}{ccc:c} 1 & 0 & ? & ? \\ 0 & 1 & ? & ? \end{array}\right]$$

1er pivot: Départ But

$$\left[\begin{array}{ccc:c} 3 & 2 & 1 & 4 \\ 7 & 5 & 4 & 6 \end{array}\right] \qquad \left[\begin{array}{ccc:c} 1 & ? & ? & ? \\ 0 & ? & ? & ? \end{array}\right]$$

Étape 1: identifier l'élément « pivot » = celui qui deviendra le « 1 » du vecteur unitaire dans le prochain tableau (il ne peut pas être nul)

$$\left[\begin{array}{ccc:c} 1 & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{4}{3} \\ 7 & 5 & 4 & 6 \end{array}\right]$$

NL1 = AL1/3

Étape 2: diviser la ligne du pivot par le pivot

$$\left[\begin{array}{ccc:c} 1 & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{4}{3} \\ 0 & \frac{1}{3} & \frac{5}{3} & \frac{-10}{3} \end{array}\right] \quad \text{NL2} = \text{AL2} - 7\times\text{NL1}$$

Étape 3: dans toutes les autres lignes, ajouter ou retrancher des multiples de la ligne du pivot qu'il faut pour obtenir les zéros du vecteur unitaire

2ième pivot: Départ

$$\left[\begin{array}{ccc:c} 1 & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{4}{3} \\ 0 & \frac{1}{3} & \frac{5}{3} & \frac{-10}{3} \end{array}\right]$$

But

$$\left[\begin{array}{ccc:c} 1 & 0 & ? & ? \\ 0 & 1 & ? & ? \end{array}\right]$$

Étape 1: identifier l'élément « pivot » = celui qui deviendra le « 1 » du vecteur unitaire dans le prochain tableau

$$\left[\begin{array}{ccc:c} 1 & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{4}{3} \\ 0 & 1 & 5 & -10 \end{array}\right] \quad \text{NL2} = 3 \times \text{AL2}$$

Étape 2: diviser la ligne du pivot par le pivot

$$\left[\begin{array}{ccc:c} 1 & 0 & -3 & 8 \\ 0 & 1 & 5 & -10 \end{array}\right] \quad \text{NL1} = \text{AL1} - (2/3)\times\text{NL2}$$

Étape 3: dans toutes les autres lignes, ajouter ou retrancher les multiples de la ligne du pivot qu'il faut pour obtenir les zéros du vecteur unitaire

Finito !

$$\begin{cases} x_1 = 8 + 3x_3 \\ x_2 = -10 - 5x_3 \end{cases}$$

Exercice

Soit le système d'équations:

$$\begin{cases} -x_1 + 5x_2 + x_3 - 2x_4 + x_5 = 7 \\ 3x_1 - x_2 + x_3 + 2x_4 - x_5 = 9 \\ 2x_1 - 3x_2 - x_3 + 3x_4 + 2x_5 = 4 \end{cases}$$

1 - Trouver une solution générale ayant pour base $\{x_3, x_4, x_5\}$

2- Trouver, par pivots successifs, toutes les solutions de base

Exercice

Base	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	CD
–	–1	5	1	–2	1	7
–	3	–1	1	2	–1	9
–	2	–3	–1	3	2	4

Exercice

pivot

Base	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	CD
–	–1	5	1	–2	1	7
–	3	–1	1	2	–1	9
–	2	–3	–1	3	2	4
x_3	?	?	**1**	?	?	?
–	?	?	**0**	?	?	?
–	?	?	**0**	?	?	?

Exercice

Base	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	CD

–	–1	5	1	–2	1	7
–	3	–1	1	2	–1	9
–	2	–3	–1	3	2	4

	–1	5	**1**	–2	1	7	NL1 = AL1
–	?	?	**0**	?	?	?	
–	?	?	**0**	?	?	?	

Exercice

Base	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	CD
–	–1	5	1	–2	1	7
–	3	–1	1	2	–1	9
–	2	–3	–1	3	2	4

Base	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	CD	
x_3	–1	5	**1**	–2	1	7	
–	4	–6	**0**	4	–2	2	NL2 = AL2 – NL1
–	1	2	**0**	1	3	11	NL3 = AL3 + NL1

Remarque: toutes ces opérations sont faites sur des *lignes entières*

Exercice

Base	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	CD

–	–1	5	1	–2	1	7
–	3	–1	1	2	–1	9
–	2	–3	–1	3	2	4

pivot

x_3	–1	5	1	–2	1	7
–	4	–6	0	4	–2	2
–	1	2	0	1	3	11

x_3	?	?	1	**0**	?	?
x_4	?	?	0	**1**	?	?
–	?	?	0	**0**	?	?

Exercice

Base	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	CD
–	–1	5	1	–2	1	7
–	3	–1	1	2	–1	9
–	2	–3	–1	3	2	4

x_3	–1	5	1	–2	1	7
–	4	–6	0	4	–2	2
–	1	2	0	1	3	11

x_3	?	?	1	**0**	?	?
	1	–3/2	0	**1**	–1/2	1/2
–	?	?	0	**0**	?	?

NL2 = AL2 / 4

Exercice

Base	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	CD

–	–1	5	1	–2	1	7
–	3	–1	1	2	–1	9
–	2	–3	–1	3	2	4

x_3	–1	5	1	–2	1	7
–	4	–6	0	4	–2	2
–	1	2	0	1	3	11

x_3	1	2	1	**0**	0	8	NL1 = AL1 + 2NL2
x_4	1	–3/2	0	**1**	–1/2	1/2	
–	0	7/2	0	**0**	7/2	21/2	NL3 = AL3 – NL2

Exercice

Base	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	CD

–	–1	5	1	–2	1	7
–	3	–1	1	2	–1	9
–	2	–3	–1	3	2	4

x_3	–1	5	1	–2	1	7
–	4	–6	0	4	–2	2
–	1	2	0	1	3	11

x_3	1	2	1	0	0	8
x_4	1	–3/2	0	1	–1/2	1/2
–	0	7/2	0	0	7/2	21/2

pivot

x_3	?	?	1	0	**0**	?
x_4	?	?	0	1	**0**	?
x_5	?	?	0	0	**1**	?

Exercice

Base	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	CD
–	–1	5	1	–2	1	7
–	3	–1	1	2	–1	9
–	2	–3	–1	3	2	4

x_3	–1	5	1	–2	1	7
–	4	–6	0	4	–2	2
–	1	2	0	1	3	11

x_3	1	2	1	0	0	8
x_4	1	–3/2	0	1	–1/2	1/2
–	0	7/2	0	0	7/2	21/2

x_3	?	?	1	0	**0**	?
x_4	?	?	0	1	**0**	?
–	0	1	0	0	**1**	3

NL3 = AL3 / (7/2)

Exercice

Base	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	CD

–	–1	5	1	–2	1	7
–	3	–1	1	2	–1	9
–	2	–3	–1	3	2	4

x_3	–1	5	1	–2	1	7
–	4	–6	0	4	–2	2
–	1	2	0	1	3	11

x_3	1	2	1	0	0	8
x_4	1	–3/2	0	1	–1/2	1/2
–	0	7/2	0	0	7/2	21/2

x_3	1	2	1	0	**0**	8
x_4	1	–1	0	1	**0**	2
x_5	0	1	0	0	**1**	3

NL1 = AL1

NL2 = AL2 + (1/2)NL3

Exercice

Base	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	CD
x_3	1	2	1	0	0	8
x_4	1	–1	0	1	0	2
x_5	0	1	0	0	1	3

Solution générale: $\begin{cases} x_3 = 8 - x_1 - 2x_2 \\ x_4 = 2 - x_1 + x_2 \\ x_5 = 3 - x_2 \end{cases}$

FORME CANONIQUE

Base	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	CD
x_3	1	2	1	0	0	8
x_4	1	-1	0	1	0	2
x_5	0	1	0	0	1	3
x_3	3	0	1	2	0	12
$\boxed{x_2}$	-1	1	0	-1	0	-2
x_5	1	0	0	1	1	5

SOLUTION DE BASE

$(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)$

(0, 0, 8, 2, 3) **(A)**

(0, -2, 12, 0, 5) **(B)**

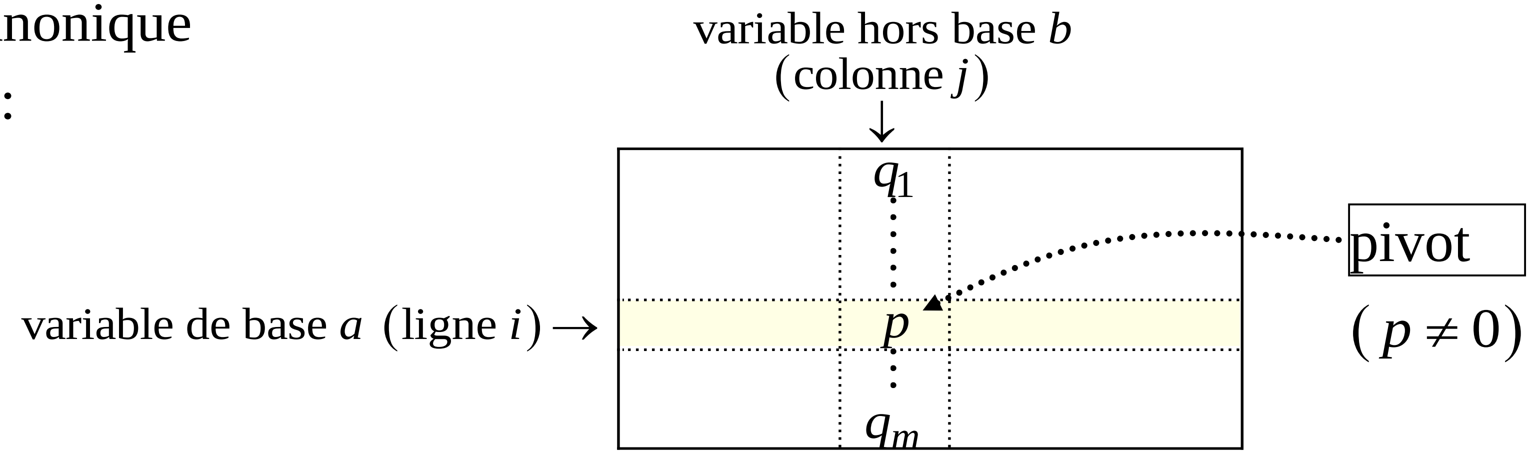
Définitions

- Deux bases sont *voisines* si elles ne diffèrent que par une variable.

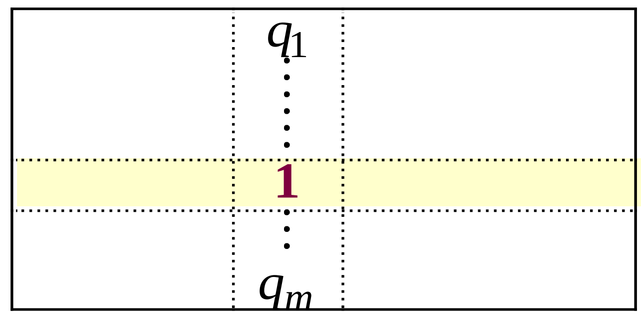
- Pour passer d'une base à une base voisine, on effectue. un ***pivot*** L'*élément pivot* est celui qui se trouve dans la ligne de la variable qui sortira de la base et dans la colonne de la variable qui entrera dans la base (cet élément deviendra un « 1 » dans la prochaine forme canonique).

Supposons qu'on veuille passer de la base $\{\cdots a \cdots\}$ à la base voisine $\{\cdots b \cdots\}$ (où la variable b remplacera la variable a dans la base).

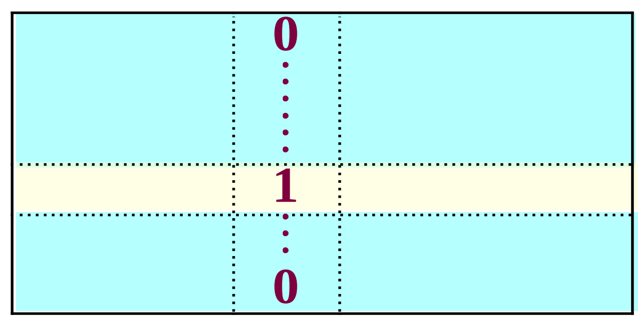
Forme canonique de départ:



Étape 1:
$NL_i = AL_i \,/\, p$



Étape 2: Pour toute autre ligne $k \neq i$:
$NL_k = AL_k - q_k \cdot NL_i$



Base	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	CD	SOLUTION DE BASE $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)$	
x_3	1	2	1	0	0	8		
x_4	1	-1	0	1	0	2	(0, 0, 8, 2, 3)	**(A)**
x_5	0	1	0	0	1	3		
x_3	3	0	1	2	0	12		
x_2	-1	1	0	-1	0	-2	(0, -2, 12, 0, 5)	**(B)**
x_5	1	0	0	1	1	5		
x_3	0	3	1	-1	0	6		
x_1	1	-1	0	1	0	2	(2, 0, 6, 0, 3)	**(C)**
x_5	0	1	0	0	1	3		
x_4	0	-3	-1	1	0	-6		
x_1	1	2	1	0	0	8	(8, 0, 0, -6, 3)	**(D)**
x_5	0	1	0	0	1	3		
x_2	0	1	1/3	-1/3	0	2		
x_1	1	0	1/3	2/3	0	4	(4, 2, 0, 0, 1)	**(E)**
x_5	0	0	-1/3	1/3	1	1		

FORME CANONIQUE

FORME CANONIQUE — SOLUTION DE BASE

							Solution de base	
x_2	0	1	0	0	1	3		
x_1	1	0	0	1	1	5	(5, 3,-3, 0, 0)	**(F)**
x_3	0	0	1	-1	-3	-3		

							Solution de base	
x_2	0	1	0	0	1	3		
x_1	1	0	1	0	-2	2	(2, 3, 0, 3, 0)	**(G)**
x_4	0	0	-1	1	3	3		

							Solution de base	
x_2	1/2	1	1/2	0	0	4		
x_5	-1/2	0	-1/2	0	1	-1	(0, 4, 0, 6, -1)	**(H)**
x_4	3/2	0	1/2	1	0	6		

							Solution de base	
x_2	0	1	0	0	1	3		
x_3	1	0	1	0	-2	2	(0, 3, 2, 5, 0)	**(I)**
x_4	1	0	0	1	1	5		

Systèmes d'inégalités linéaires

- Un système de m inégalités linéaires en n variables est de la forme

$Ax \leq b$, où A (mxn) est une matrice de *coefficients*, x (nx1) est un vecteur de *variables*, b (mx1) un vecteur de *cotés droits*.

- Une ***solution réalisable*** du système est un choix de valeurs pour $x = (x_1, x_2,\ldots,x_n)'$ satisfaisant simultanément les m inégalités. Le *domaine réalisable* est l'ensemble des solutions réalisables.

- ***Opérations permises*** (ne modifiant pas le domaine réalisable):
  - permuter des inégalités
  - multiplier une inégalité par un nombre strictement positif
  - multiplier une inégalité par un nombre strictement négatif en changeant le sens de l'inégalité
  - ***PAS*** ajouter ou retrancher une inégalité à une autre !

Forme standard d'égalité

- On appelle *forme standard d'égalité* un système d'égalités linéaires et de restrictions de signe:

$$\begin{cases} Ax = b \\ x_j \geq 0 \ \forall j \in \mathbb{J} \end{cases} \qquad (A : m \times n,\ \ x : n \times 1,\ \mathbb{J} \text{ un ensemble d'indices})$$

- Une ***solution*** du système est un choix de valeurs pour $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)'$ satisfaisant simultanément les m égalités. Par suite, les définitions de solution générale, solution particulière, et solution de base restent inchangées

- Toute solution (satisfaisant les égalités) est dite ***réalisable*** si de plus elle satisfait aussi les restrictions de signe. Le *domaine réalisable* est l'ensemble des solutions réalisables.

- Tout système d'inégalités peut se réécrire facilement sous forme standard d'égalité.

Exemple

$$\begin{cases} 3x_1 - x_2 + x_3 \leq 2 \\ x_1 + 2x_2 - x_3 \geq 5 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} 3x_1 - x_2 + x_3 + s_1 = 2 \\ x_1 + 2x_2 - x_3 - s_2 = 5 \\ s_1, s_2 \geq 0 \end{cases}$$

Posons: $s_1 = 2 - 3x_1 + x_2 - x_3$

L'inégalité $3x_1 - x_2 + x_3 \leq 2$ est vérifiée si et seulement si $s_1 \geq 0$.

Elle est donc équivalente a:

$$\begin{cases} 3x_1 - x_2 + x_3 + s_1 = 2 \\ s_1 \geq 0 \end{cases}$$

Posons: $s_2 = x_1 + 2x_2 - x_3 - 5$

L'inégalité $x_1 + 2x_2 - x_3 \geq 5$ est vérifiée si et seulement si $s_2 \geq 0$.

Elle est donc équivalente a:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 - s_2 = 5 \\ s_2 \geq 0 \end{cases}$$

s_1 et s_2 sont des *variables d'écart*.

Coûts réduits

Définition**:** on a des ***coûts réduits*** lorsque la fonction objectif est exprimée uniquement <u>en termes des variables hors base</u> (lorsque les coefficients des variables de base sont annulés).

Les coûts réduits indiquent l'effet net des variables hors base sur l'objectif. <u>Sans coûts réduits, on ne peut pas connaître ces effets</u>.

Algorithme du simplexe

- **Qu'est-ce que c'est ?**
  - Algorithme = règle/procédure de calcul
  - Méthode de résolution très répandue
  - Méthode itérative
- **Principes généraux**
  1. Examiner des points extrêmes…
     - Point extrême = solution de base réalisable
     - Pas tous les points extrêmes …
  2. … De voisin en voisin …

Forme d'un programme linéaire pour l'algorithme du Simplexe

Max/Min $\quad Z = cx \qquad c : 1 \times n$

S.l.c.: $\quad Ax = b \qquad A : m \times n \qquad b : m \times 1$

$\qquad x \geq 0 \qquad x : n \times 1$

1. Côtés droits $\boldsymbol{b} \geq \mathbf{0}$
2. Forme standard d'égalité
3. Toutes les variables ont une restriction de signe
4. On a une forme canonique dans $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$

$\Rightarrow$ on a une **solution de base réalisable** de départ.

5. Coûts réduits

Exemple 1

$$\begin{array}{ll} \text{Max} & Z = 2x_1 + 3x_2 \\ \text{S.l.c.:} & x_1 + 2x_2 \le 8 \\ & x_1 - x_2 \le 2 \\ & x_2 \le 3 \\ & x_1, x_2 \ge 0 \end{array}
\quad \Longrightarrow \quad
\begin{array}{ll} \text{Max} & Z = 2x_1 + 3x_2 \\ \text{S.l.c.:} & x_1 + 2x_2 + s_1 = 8 \\ & x_1 - x_2 + s_2 = 2 \\ & x_2 + s_3 = 3 \\ & x_1, x_2, s_1, s_2, s_3 \ge 0 \end{array}$$

(1) Coté droit est positif

(2) Forme standard d'égalité

(3) Toutes les variables ont une restriction de signe

(4) Forme canonique dans Ax = b

(5) Coûts réduits

Exemple 1

Base	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	CD
s_1	1	2	1	0	0	8
s_2	1	-1	0	1	0	2
s_3	0	1	0	0	1	3
Z	-2	-3	0	0	0	0

coûts réduits $Z - 2x_1 - 3x_2 = 0$

Contraintes implicites: $x_1, x_2, s_1, s_2, s_3 \geq 0$

On a une solution de base de départ **A** : $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 8 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ qui est réalisable

À ce point, on ne peut pas diminuer x_1 ni x_2; on peut les augmenter.

Choix d'une direction d'amélioration

- Partant d'une solution de base réalisable, une *direction d'amélioration* est un <u>déplacement extrême</u> qui améliore l'objectif.
- On n'augmentera donc qu'**une** des variables hors base, les autres étant maintenues à 0.
- Quelle variable hors base augmenter ?

  Règle intuitive (pas nécessairement la plus efficace, mais elle fonctionne): la variable qui produit le **meilleur taux d'amélioration** par unité sur l'objectif, tel qu'exprimé par son <u>coût réduit</u>.

- Dans notre exemple, on part de la solution de base actuelle (A). Ici, améliorer Z = l'augmenter.

$$\text{Max } Z = 2x_1 + 3x_2$$

plus grand taux d'augmentation:
augmenter x_2, garder $x_1 = 0$

Jusqu'où aller dans cette direction d'amélioration ?

	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	
s_1	1	2	1	0	0	8
s_2	1	-1	0	1	0	2
s_3	0	1	0	0	1	3
Z	-2	-3	0	0	0	0

Ratio
8/2 = 4
—
3/1 = 3

La plus grande valeur que peut prendre x_2 est le **ratio minimum** (3). Lorsque $x_2 = 3$, $s_3 = 0$ et on obtient une nouvelle solution de base réalisable, la solution **B**:

$$\begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = 3 \\ s_1 = 8 - 2x_2 \\ s_2 = 2 + x_2 \\ s_3 = 3 - x_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ s_1 \\ s_2 \\ s_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 2 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (B) \qquad \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ s_1 \\ s_2 \\ s_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 8 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \quad (A)$$

Base: $\{x_2, s_1, s_2\}$ ← Base: $\{s_1, s_2, s_3\}$

Bases voisines

Changement de base

	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	
s_1	1	2	1	0	0	8
s_2	1	-1	0	1	0	2
s_3	0	1	0	0	1	3
Z	-2	-3	0	0	0	0

Solution
A

La variable qui **rentre** dans la base est la variable hors base (x_2) qu'on a décidé d'augmenter au vu de son coût réduit.

La variable qui **sort** de la base est celle qui est rendue nulle par l'augmentation de la variable qui rentre dans la base, *i.e.* celle qui se trouve dans la ligne du ratio minimum.

On calcule la forme canonique correspondant à la nouvelle base. L'élément **pivot** est celui qui se trouve dans la colonne de la variable qui rentre dans la base et dans la ligne de la variable qui sort de la base.

On met à jour les coûts réduits.

Itérations…

Solution B

	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	
s_1	1	0	1	0	-2	2
s_2	1	0	0	1	1	5
x_2	0	1	0	0	1	3
Z	-2	0	0	0	3	9

Ratio b_i/a_i ($a_i > 0$)
2/1 = 2
5/1 = 5
—

Solution C

	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	
x_1	1	0	1	0	-2	2
s_2	0	0	-1	1	3	3
x_2	0	1	0	0	1	3
Z	0	0	2	0	-1	13

Ratio
—
3/3 = 1
3/1 = 3

Solution D

	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	
x_1	1	0	1/3	2/3	0	4
s_3	0	0	-1/3	1/3	1	1
x_2	0	1	1/3	-1/3	0	2
Z	0	0	5/3	1/3	0	14

$$Z = 14 - \frac{5}{3}s_1 - \frac{1}{3}s_2$$

Coûts réduits ≥ 0

Solution optimale:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ s_1 \\ s_2 \\ s_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{(E)} \qquad Z = 14$$

Exemple 2

$$\text{Min} \quad Z = 2x_1 - 4x_2$$

$$\text{S.l.c.:} \quad x_1 - x_2 \leq 3$$

$$-x_1 + 2x_2 \leq 4$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

Conditions à respecter:

- •Côtés droits $b \geq 0$
- •Forme standard d'égalité
- •Toutes les variables ont une restriction de signe
- •On a une forme canonique

$\Rightarrow$on a une solution de base réalisable de départ.

- •Coûts réduits

$$\begin{cases} x_1 - x_2 \leq 3 \\ -x_1 + 2x_2 \leq 4 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 - x_2 + s_1 = 3 \\ -x_1 + 2x_2 + s_2 = 4 \\ x_1, x_2, s_1, s_2 \geq 0 \end{cases}$$

	x_1	x_2	s_1	s_2	
s_1	1	-1	1	0	3
s_2	-1	2	0	1	4
Z	-2	4	0	0	0

Ratios
—
4/2 = 2

Base: $\{s_1, s_2\}$

Solution de base: $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ s_1 \\ s_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$

$$\text{Min } \ Z = 2x_1 - 4x_2$$

	x_1	x_2	s_1	s_2	
s_1	1/2	0	1	1/2	5
x_2	-1/2	1	0	1/2	2
Z	0	0	0	-2	-8

Solution de base: $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ s_1 \\ s_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix}$

$$\text{Min } \ Z = -8 + 0x_1 + 2s_2$$

coûts réduits ≤ 0: solution optimale

	x_1	x_2	s_1	s_2	
s_1	1/2	0	1	1/2	5
x_2	-1/2	1	0	1/2	2
Z	0	0	0	-2	-8

Ratios
5/(1/2) = 10
—

$$\text{Min } Z = -8 + 0x_1 + 2s_2$$

Si on augmente la variable hors base x_1, Z reste inchangée. Faisons-le pour voir …

	x_1	x_2	s_1	s_2	
x_1	1	0	2	1	10
x_2	0	1	1	1	7
Z	0	0	0	-2	-8

Solution de base:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ s_1 \\ s_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ 7 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

également optimale

Tous les points intermédiaires, de la forme (somme pondérée):

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ s_1 \\ s_2 \end{pmatrix} = p \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix} + (1-p) \begin{pmatrix} 10 \\ 7 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{avec} \quad 0 \le p \le 1 \quad \text{sont également optimaux}$$

Exemple 3

$$\text{Min} \quad Z = 3x_1 - x_2$$

$$\text{S.l.c.:} \quad x_1 - 2x_2 \le 4$$

$$3x_1 - x_2 \le 6$$

$$x_1, x_2 \ge 0$$

	x_1	x_2	s_1	s_2	
s_1	1	-2	1	0	4
s_2	3	-1	0	1	6
Z	-3	1	0	0	0

Solution de base:

Ratios
—
—

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ s_1 \\ s_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix}, Z = 0$$

$$\text{Max} \quad x_2$$

$$\text{S.l.c.:} \quad -2x_2 \le 4$$

$$-x_2 \le 6$$

Solution sans borne, de la forme:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ s_1 \\ s_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ x_2 \\ 4 + 2x_2 \\ 6 + x_2 \end{pmatrix} \qquad Z = -x_2$$

Algorithme
du simplexe,
version 1.0