Равномерное распределение точек на сфере

И.Б.Рахимов*
студент 2-го курса Магистратуры
кафедры Вычислительной математики и
прикладных информационных технологий
факультета Прикладной математики, информатики и механики
Воронежского Государственного Университета

8 октября 2023 г.

*Автор оригинальной статии Мартин Робертс

Аннотация

Как можно более равномерное распределение точек на сфере — невероятно важная задача в математике, науке и компьютерных системах, а наложение сетки Фибоначчи на поверхность сферы при помощи равновеликой проекции — чрезвычайно быстрый и эффективный метод аппроксимации для её решения. В данной работе будет показано, как благодаря незначительным изменениям его можно сделать ещё лучше.

Содержание

Введение

Задача равномерного распределения точек на сфере имеет очень долгую историю. Это одна из самых хорошо исследованных задач в математической литературе по сферической геометрии. Она имеет критическую важность во многих областях математики, физики, химии, в том числе в вычислительных методах, теории приближений, теории кодирования, кристаллографии, электростатике, компьютерной графике, морфологии вирусов и многих других.

К сожалению, за исключением нескольких особых случаев (а именно платоновых тел) невозможно идеально ровно распределить точки на сфере. Кроме того, решение задачи сильно зависит от критерия, который используется для оценки однородности. На практике используется множество критериев, в том числе:

- Упаковка и покрытие
- Выпуклые оболочки, ячейки Вороного и треугольники Делоне
- Ядра s-энергии Риса
- Кубатура и определители

Очень важно уяснить этот аспект: обычно не существует единственного оптимального решения этой задачи, потому что оптимальное решение, основанное на одном критерии, часто не является оптимальным распределением точек для других. Например, в данной работе будет показано, что оптимизация упаковки необязательно создаёт оптимальную выпуклую оболочку и наоборот.

Ради краткости в этой работе будет рассмотрено только два критерия:

1. Минимальное расстояние упаковки
2. Выпуклая оболочка/сетка Делоне (объём и площадь)

В главе 1 будет показано, как можно изменить каноническую сетку Фибоначчи для построения улучшенного распределения упаковки. В главе 2 будет показано, как можно изменить каноническую сетку Фибоначчи для построения улучшенных параметров выпуклых оболочек (объёма и площади поверхности).

1 Оптимизация расстояния упаковки

Часто эту задачу называют задачей Тэммса в честь ботаника Тэммса, искавшего объяснение структуры поверхности пыльцевых зёрен. Критерий упаковки требует от нас максимизировать наименьшее расстояние между соседями для N точек. То есть

$$d_N = \min_{i \neq j} d(x_i, x_j),$$

где

$$d(x, y) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + \ldots + (x_n - y_n)^2}.$$

Это значение уменьшается со скоростью $\frac{1}{\sqrt{N}}$, поэтому полезно будет определить нормализованное расстояние, а также асимптотический предел нормализованного расстояния как

$$d_N^* = \sqrt{N} d_N, \qquad d^* = \lim_{N \to \infty} d_N^*$$

1.1 Сетка Фибоначчи

Одно очень элегантное решение моделирует узлы, встречающиеся в природе, например, распределение семян в подсолнухе или сосновой шишке. Это явление называется спиральным филлотаксисом. Коксетер показал, что такие структуры имеют фундаментальную связь с рядом Фибоначчи - F_k и золотым сечением - ϕ.

$$F_k = \{1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, \ldots\}, \qquad \phi = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$$

В литературе встречается два схожих определения множества точек сферической сетки Фибоначчи. Исходное определено строго для N, равного одному из членов ряда Фибоначчи, F_m, и хорошо изучено в теории чисел.

$$t_i = \left(\frac{i}{F_m}, \frac{i \cdot F_{m-1}}{F_m} \right), \qquad 0 \leq i \leq N - 1$$

Второе определение обобщает формулу до произвольного количества N и используется в вычислениях чаще:

$$t_i = \left(\frac{i}{N}, \frac{i}{\phi} \right), \qquad 0 \leq i \leq N - 1$$

Ниже показан пример таки сеток Фибоначчи. Преобразованием можно превратить эти множества точек в хорошо известные нам спирали Фибоначчи

$$(r, \theta) = (\sqrt{x_1}, 2\pi x_2)$$

Аналогичным образом эти множества точек можно перенести из единичного квадрата $[0, 1]^2$ на сферу при помощи цилиндрической равновеликой проекции:

$$(x, y) \to (\theta, \phi) : \quad \left(\cos^{-1}(2x - 1) - \frac{\pi}{2}, 2\pi y\right)$$

$$(\theta, \phi) \to (x, y, z) : \quad (\cos\theta\cos\phi, \cos\theta\sin\phi, \sin\theta)$$

Даже несмотря на то, что сферические множества Фибоначчи глобально не являются наилучшим распределением сэмплов на сфере (потому что их решения не совпадают с решениями для платоновых тел при $n = 4, 6, 8, 12, 20$), они обладают превосходными свойствами сэмплирования и очень легки в построении по сравнению с другими, более сложными схемами сферического сэмплирования.

Так как перенос из единичного квадрата на поверхность сферы выполняется проекцией с сохранением площади, можно ожидать, что если исходные точки распределены равномерно, то они также будут достаточно хорошо распределены и на поверхности сферы. Однако это не означает, что распределение будет доказуемо оптимальным.

Такой перенос страдает от двух различных, но взаимосвязанных проблем.

Во-первых, это наложение выполняется с сохранением площади, а не расстояния. Учитывая то, что в нашем случае условием является максимизация минимального попарного расстояния между точками, то такие условия и взаимосвязи необязательно будут выполняться после проецирования.

Вторую проблему сложнее всего решить с точки зрения практики: наложение имеет на каждом полюсе две вырожденные точки. Рассмотрим две точки, находящиеся очень близко к полюсу, но отличающиеся на 180 градусов по долготе. На единичном квадрате (и на цилиндрической проекции) они будут соответствовать двум очень далёким друг от друга точкам, однако при наложении на поверхность сферы они могут быть соединены очень малой дугой, проходящей через северный полюс. Из-за этой конкретной проблемы многие спиральные наложения оказываются недостаточно оптимальными.

Первая формула сетки Фибоначчи

Более распространённая версия (особенно в компьютерных системах), создающая более хорошее значение $d^* = 3.09$, имеет вид:

$$t_i = \left(\frac{i + 0.5}{N}, \frac{i}{\phi}\right) \qquad 0 \le i \le N - 1 \tag{2}$$

Она располагает точки в средних точках интервалах (по правилу средней точки в квадратной формуле Гаусса), поэтому для $n = 100$, значения первой координаты будут такими:

$$\{\frac{0.5}{100}, \frac{1.5}{100}, \frac{2.5}{100}, \ldots, \frac{97.5}{100}, \frac{98.5}{100}, \frac{99.5}{100}\}$$

Вторая формула сетки Фибоначчи

Ключевым моментом для дальнейшего улучшения уравнения 2, является осознание того, что d_N^* всегда соответствует расстоянию между точками t_0 и t_3, которые находятся на полюсах. То есть для улучшения d_N точки рядом с полюсами должны быть разнесены ещё дальше.

Если мы определим следующее распределение:

$$t_i(\varepsilon) = \left(\frac{i + 1/2 + \varepsilon}{N + 2\varepsilon}, \frac{i}{\phi}\right) \quad 0 \le i \le N - 1$$

d_N^* — кривые для различных значений. $\varepsilon = 0$ (синяя); $\varepsilon = \frac{1}{2}$ (оранжевая); $\varepsilon = \frac{3}{2}$ (зелёная); и $\varepsilon = \frac{5}{2}$ (красная). Можно увидеть, что $\varepsilon = \frac{5}{2}$ даёт результаты ближе к асимптотическим результатам. То есть при $N > 20$ следующее простое выражение генерирует значительно более хорошие результаты $d^* = 3.29$ по сравнению с канонической сферической сеткой Фибоначчи:

$$t_i = \left(\frac{i + 3}{N + 5}, \frac{i}{\phi}\right) \quad 0 \le i \le N - 1 \tag{3}$$

То есть при $N = 100$ значения первой координаты будут равны:

$$\{\frac{3}{105}, \frac{4}{105}, \frac{5}{105}, \ldots, \frac{100}{105}, \frac{101}{105}, \frac{102}{105}\}$$

Третья формула сетки Фибоначчи

Список литературы

[1] http://web.archive.org/web/20120421191837/

[2] https://perswww.kuleuven.be/ u0017946/publications/Papers97/art97a-Saff-Kuijlaars-MI/Saff-Kuijlaars-MathIntel97.pdf

[3] https://maths-people.anu.edu.au/ leopardi/Leopardi-Sphere-PhD-Thesis.pdf

[4] https://arxiv.org/pdf/1407.8282.pdf

[5] https://maths-people.anu.edu.au/ leopardi/Macquarie-sphere-talk.pdf