

Равномерное распределение точек на сфере

И.Б.Рахимов
Руководитель: О.Г.Корольков

Воронежский Государственный Университет

5 ноября 2023 г.



Актуальность

- ▶ Как можно более равномерное распределение точек на сфере — невероятно важная задача в математике, науке и компьютерных системах, а наложение сетки Фибоначчи на поверхность сферы при помощи равновеликой проекции — чрезвычайно быстрый и эффективный метод аппроксимации для её решения. В данной работе будет показано, как благодаря незначительным изменениям его можно сделать ещё лучше.
- ▶ Задача равномерного распределения точек на сфере имеет очень долгую историю. Это одна из самых хорошо исследованных задач в математической литературе по сферической геометрии. Она имеет критическую важность во многих областях математики, физики, химии, в том числе в вычислительных методах, теории приближений, теории кодирования, кристаллографии, электростатике, компьютерной графике, морфологии вирусов и многих других..

Равномерное
распределение
точек на сфере

И.Б.Рахимов
Руководитель:
О.Г.Корольков

Актуальность

Цели и задачи

Оптимизация
расстояния
упаковки

Сетка Фибоначчи

Анализ d_N^* при
разных ϵ

Выводы

Направления
дальнейшей
работы

Цели и задачи

Равномерное
распределение
точек на сфере

И.Б.Рахимов
Руководитель:
О.Г.Корольков

Цель:

- ▶ Изучить и улучшить алгоритм распределения точек на сфере - наложение сетки Фибоначчи.

Задачи:

- ▶ Изучение современных подходов к решению задачи распределения точек на сфере;
- ▶ Изучения алгоритма наложения сетки Фибоначчи;
- ▶ Улучшение алгоритма наложения сетки Фибоначчи;
- ▶ Анализ разработанного алгоритма;
- ▶ Программная реализация алгоритма наложения сетки Фибоначчи.

Актуальность

Цели и задачи

Оптимизация
расстояния
упаковки

Сетка Фибоначчи

Анализ d_N^* при
разных ϵ

Выводы

Направления
дальнейшей
работы

Оптимизация расстояния упаковки

Равномерное
распределение
точек на сфере

И.Б.Рахимов
Руководитель:
О.Г.Корольков

Актуальность

Цели и задачи

Оптимизация
расстояния
упаковки

Сетка Фибоначчи

Анализ d_N^* при
разных ϵ

Выводы

Направления
дальнейшей
работы

Часто эту задачу называют задачей Тэммса в честь ботаника Тэммса, искавшего объяснение структуры поверхности пыльцевых зёрен. Критерий упаковки требует от нас максимизировать наименьшее расстояние между соседями для N точек. То есть

$$d_N = \min_{i \neq j} \|x_i - x_j\|_2,$$

Оптимизация расстояния упаковки

Равномерное
распределение
точек на сфере

И.Б.Рахимов
Руководитель:
О.Г.Корольков

Аналогичным образом эти множества точек можно перенести из единичного квадрата $[0, 1]^2$ на сферу при помощи цилиндрической равновеликой проекции:

$$(x, y) \rightarrow (\theta, \phi) : \quad \left(\cos^{-1}(2x - 1) - \frac{\pi}{2}, 2\pi y \right),$$

$$(\theta, \phi) \rightarrow (x, y, z) : \quad (\cos \theta \cos \phi, \cos \theta \sin \phi, \sin \theta).$$

Актуальность

Цели и задачи

Оптимизация
расстояния
упаковки

Сетка Фибоначчи

Анализ d_N^* при
разных ϵ

Выводы

Направления
дальнейшей
работы

Сетка Фибоначчи

Равномерное
распределение
точек на сфере

И.Б.Рахимов
Руководитель:
О.Г.Корольков

Одно очень элегантное решение
моделирует узлы, встречающиеся
в природе, например,
распределение семян в
подсолнухе или сосновой шишке.
Это явление называется
спиральным филлотаксисом.
Коксетер показал, что такие
структуры имеют
фундаментальную связь с рядом
Фибоначчи

Актуальность

Цели и задачи

Оптимизация
расстояния
упаковки

Сетка Фибоначчи

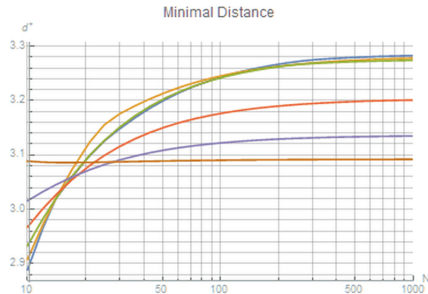
Анализ d_N^* при
разных ϵ

Выводы

Направления
дальнейшей
работы

Анализ d_N^* при разных ϵ

Различные значения d_N^* при разных значениях ϵ . Чем больше значение, тем оптимальнее конфигурации. Мы видим, что $\epsilon \simeq 2.5$ обеспечивает решение, близкое к оптимальному.



Равномерное
распределение
точек на сфере

И.Б.Рахимов
Руководитель:
О.Г.Корольков

Актуальность

Цели и задачи

Оптимизация
расстояния
упаковки

Сетка Фибоначчи

Анализ d_N^* при
разных ϵ

Выводы

Направления
дальнейшей
работы

Выводы

Равномерное
распределение
точек на сфере

И.Б.Рахимов
Руководитель:
О.Г.Корольков

- ▶ Изучен и улучшен алгоритм распределения точек на сфере - наложение сетки Фибоначчи.
- ▶ Изучены современные подходы к решению задачи распределения точек на сфере;
- ▶ Изучен алгоритм наложения сетки Фибоначчи;
- ▶ Улучшен алгоритм наложения сетки Фибоначчи;
- ▶ Проведён анализ разработанного алгоритма;
- ▶ Алгоритм был программно реализован.

Актуальность

Цели и задачи

Оптимизация
расстояния
упаковки

Сетка Фибоначчи

Анализ d_N^* при
разных ϵ

Выводы

Направления
дальнейшей
работы

Направления дальнейшей работы

Равномерное
распределение
точек на сфере

И.Б.Рахимов
Руководитель:
О.Г.Корольков

Актуальность

Цели и задачи

Оптимизация
расстояния
упаковки

Сетка Фибоначчи

Анализ d_N^* при
разных ϵ

Выводы

Направления
дальнейшей
работы

- ▶ Адаптировать данный алгоритм для естественного распределения объектов (деревьев, волос и т.д.) на геометрии

Равномерное распределение точек на сфере

И.Б.Рахимов

Руководитель: О.Г.Корольков

Спасибо за внимание

Воронежский Государственный Университет

5 ноября 2023 г.

