

# Равномерное распределение точек на сфере

И.Б.Рахимов  
Руководитель: О.Г.Корольков

Воронежский Государственный Университет

5 ноября 2023 г.



# Актуальность

- ▶ Как можно более равномерное распределение точек на сфере — невероятно важная задача в математике, науке и компьютерных системах, а наложение сетки Фибоначчи на поверхность сферы при помощи равновеликой проекции — чрезвычайно быстрый и эффективный метод аппроксимации для её решения. В данной работе будет показано, как благодаря незначительным изменениям его можно сделать ещё лучше.
- ▶ Задача равномерного распределения точек на сфере имеет очень долгую историю. Это одна из самых хорошо исследованных задач в математической литературе по сферической геометрии. Она имеет критическую важность во многих областях математики, физики, химии, в том числе в вычислительных методах, теории приближений, теории кодирования, кристаллографии, электростатике, компьютерной графике, морфологии вирусов и многих других..

Равномерное  
распределение  
точек на сфере

И.Б.Рахимов  
Руководитель:  
О.Г.Корольков

Актуальность

Цели и задачи

Оптимизация  
расстояния  
упаковки

Сетка Фибоначчи

Анализ  $d_N^*$  при  
разных  $\epsilon$

Выводы

Направления  
дальнейшей  
работы

# Цели и задачи

Равномерное  
распределение  
точек на сфере

И.Б.Рахимов  
Руководитель:  
О.Г.Корольков

## Цель:

- ▶ Изучить и улучшить алгоритм распределения точек на сфере - наложение сетки Фибоначчи.

## Задачи:

- ▶ Изучение современных подходов к решению задачи распределения точек на сфере;
- ▶ Изучения алгоритма наложения сетки Фибоначчи;
- ▶ Улучшение алгоритма наложения сетки Фибоначчи;
- ▶ Анализ разработанного алгоритма;
- ▶ Программная реализация алгоритма наложения сетки Фибоначчи.

Актуальность

Цели и задачи

Оптимизация  
расстояния  
упаковки

Сетка Фибоначчи

Анализ  $d_N^*$  при  
разных  $\epsilon$

Выводы

Направления  
дальнейшей  
работы

# Оптимизация расстояния упаковки

Равномерное  
распределение  
точек на сфере

И.Б.Рахимов  
Руководитель:  
О.Г.Корольков

Актуальность

Цели и задачи

Оптимизация  
расстояния  
упаковки

Сетка Фибоначчи

Анализ  $d_N^*$  при  
разных  $\epsilon$

Выводы

Направления  
дальнейшей  
работы

Часто эту задачу называют задачей Тэммса в честь ботаника Тэммса, искавшего объяснение структуры поверхности пыльцевых зёрен. Критерий упаковки требует от нас максимизировать наименьшее расстояние между соседями для  $N$  точек. То есть

$$d_N = \min_{i \neq j} \|x_i - x_j\|_2,$$

# Оптимизация расстояния упаковки

Равномерное  
распределение  
точек на сфере

И.Б.Рахимов  
Руководитель:  
О.Г.Корольков

Аналогичным образом эти множества точек можно перенести из единичного квадрата  $[0, 1]^2$  на сферу при помощи цилиндрической равновеликой проекции:

$$(x, y) \rightarrow (\theta, \phi) : \quad \left( \cos^{-1}(2x - 1) - \frac{\pi}{2}, 2\pi y \right),$$

$$(\theta, \phi) \rightarrow (x, y, z) : \quad (\cos \theta \cos \phi, \cos \theta \sin \phi, \sin \theta).$$

Актуальность

Цели и задачи

Оптимизация  
расстояния  
упаковки

Сетка Фибоначчи

Анализ  $d_N^*$  при  
разных  $\epsilon$

Выводы

Направления  
дальнейшей  
работы

# Сетка Фибоначчи

Равномерное  
распределение  
точек на сфере

И.Б.Рахимов  
Руководитель:  
О.Г.Корольков

Актуальность

Цели и задачи

Оптимизация  
расстояния  
упаковки

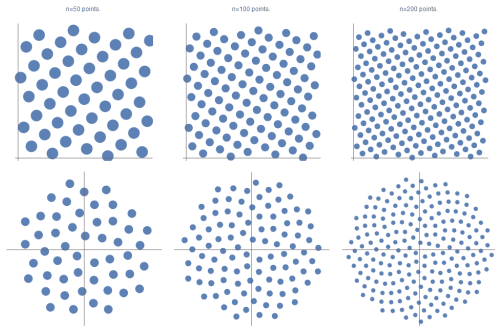
Сетка Фибоначчи

Анализ  $d_N^*$  при  
разных  $\epsilon$

Выводы

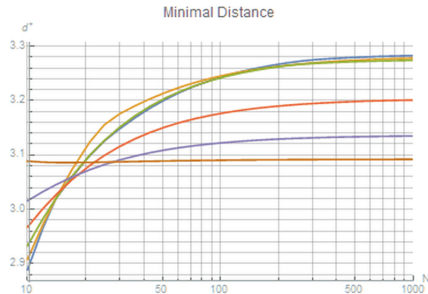
Направления  
дальнейшей  
работы

Одно очень элегантное решение моделирует узлы, встречающиеся в природе, например, распределение семян в подсолнухе или сосновой шишке. Это явление называется спиральным филлотаксисом. Коксетер показал, что такие структуры имеют фундаментальную связь с рядом Фибоначчи



# Анализ $d_N^*$ при разных $\epsilon$

Различные значения  $d_N^*$  при разных значениях  $\epsilon$ . Чем больше значение, тем оптимальнее конфигурации. Мы видим, что  $\epsilon \simeq 2.5$  обеспечивает решение, близкое к оптимальному.



Равномерное  
распределение  
точек на сфере

И.Б.Рахимов  
Руководитель:  
О.Г.Корольков

Актуальность

Цели и задачи

Оптимизация  
расстояния  
упаковки

Сетка Фибоначчи

Анализ  $d_N^*$  при  
разных  $\epsilon$

Выводы

Направления  
дальнейшей  
работы

# Выводы

Равномерное  
распределение  
точек на сфере

И.Б.Рахимов  
Руководитель:  
О.Г.Корольков

- ▶ Изучен и улучшен алгоритм распределения точек на сфере - наложение сетки Фибоначчи.
- ▶ Изучены современные подходы к решению задачи распределения точек на сфере;
- ▶ Изучен алгоритм наложения сетки Фибоначчи;
- ▶ Улучшен алгоритм наложения сетки Фибоначчи;
- ▶ Проведён анализ разработанного алгоритма;
- ▶ Алгоритм был программно реализован.

Актуальность

Цели и задачи

Оптимизация  
расстояния  
упаковки

Сетка Фибоначчи

Анализ  $d_N^*$  при  
разных  $\epsilon$

Выводы

Направления  
дальнейшей  
работы



# Направления дальнейшей работы

Равномерное  
распределение  
точек на сфере

И.Б.Рахимов  
Руководитель:  
О.Г.Корольков

Актуальность

Цели и задачи

Оптимизация  
расстояния  
упаковки

Сетка Фибоначчи

Анализ  $d_N^*$  при  
разных  $\epsilon$

Выводы

Направления  
дальнейшей  
работы

- ▶ Адаптировать данный алгоритм для естественного распределения объектов (деревьев, волос и т.д.) на геометрии

# Равномерное распределение точек на сфере

И.Б.Рахимов

Руководитель: О.Г.Корольков

Спасибо за внимание

Воронежский Государственный Университет

5 ноября 2023 г.

