이론통계학2

Project #4. 삼성전자 Option Price 계산

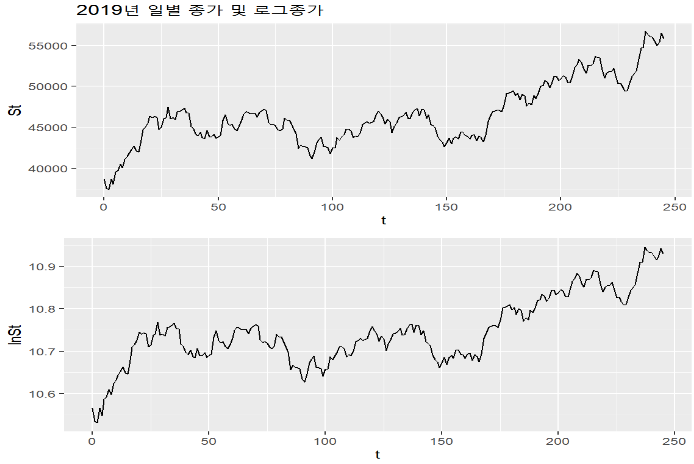
발표일 : 2021.10.06

1조

202STG26	박지윤
202STG27	이수현
212STG04	김이현
212STG12	박윤정

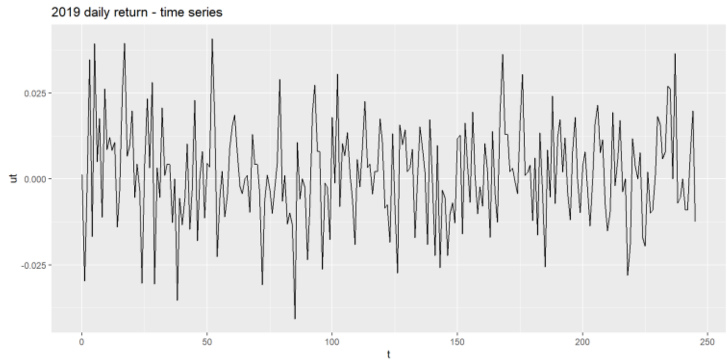
Part 1 : 연속시간 Stock Price Model

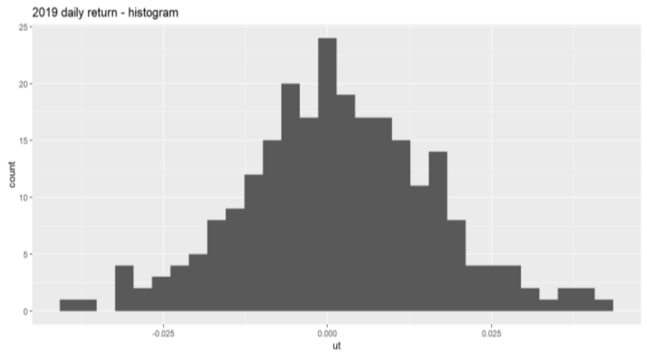
1. *2019년 한 해 동안 일별 종가 및 로그종가 St,$\ln St$에 대한 시계열 도표를 그리시오..*



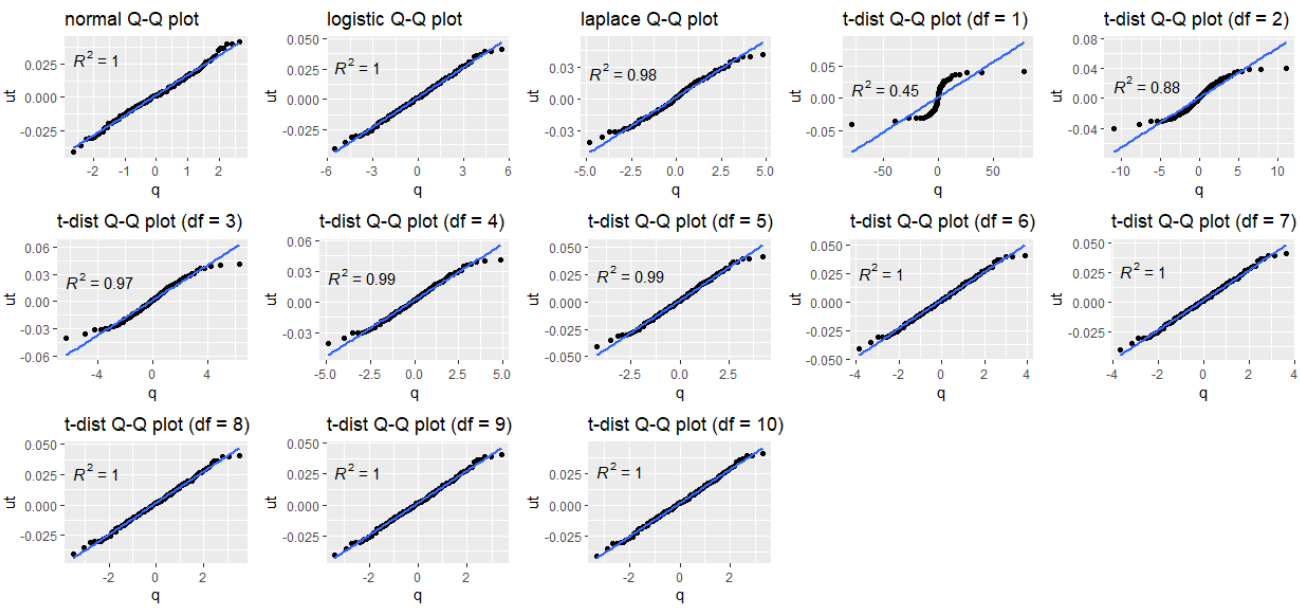
원계열 시계열 도표와 로그계열 시계열 도표 전체적으로 증가하는 추세를 보인다. 추세의 제거 및 정규분포 가정을 위해 차분이 필요함을 판단할 수 있다.

2. *일별수익률 : $u_t = \Delta St/St$,t=0,1,⋯,(n−1) 자료의 시계열 도표, 히스토그램 및 Normal ; Logistic ; Laplace ; t(k), k=0,⋯,10; 분포의 Q-Q plot 을 각각 그려보시오.*





로그계열의 차분 결과 추세가 사라졌고, 히스토그램을 보면 정규분포를 따르게 되었음을 예측할 수 있다. 이후 정확한 분포 추정을 위해 정규 분포, 로지스틱 분포, 라플라스 분포, 자유도 1⋯10의 t 분포의 q-q plot을 각각 그려보았다.

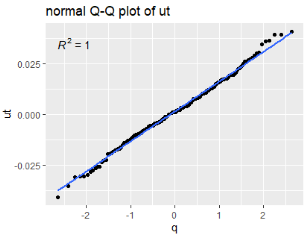


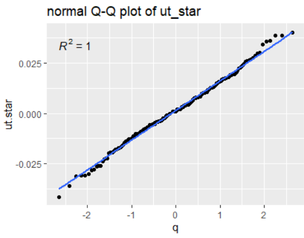
a) ***u_t에 대한 가장 적절한 분포를 찾고 정규성가정이 적절한지 검토 하시오.***

정규, 로지스틱, 라플라스의 q-q plot의 경우 세 경우 모두 R^2값이 1에 가깝게 나왔다. 하지만 로지스틱과 라플라스의 경우 오른쪽 끝부분이 잘 맞지 않음을 감안해 정규분포가 가장 적합한 분포라는 결론을 내렸고, 이는 앞서 히스토그램을 통해 예측한 결과와 상응했다. 또한 t- 분포의 경우 자유도가 6 이상부터 1에 가까운 R^2값을 가진다. 이중 가장 직선에 가까운 형태인 자유도 10일때의 t 분포도 적절한 분포라고 판단했다.

b) ***u_t 및 $u_t^* = ln\Delta St$ 의 평균과 분산을 각각 구하여 이들이 Ito 변환공식을 만족하는지 검토하시오.***

	u_t	u_t^*	Ito
Mean	0.0016	0.0015	0.0015
variance	0.0002	0.0002	0.0002





u_t의 평균과 분산은 0.0016 0.0002, u_t^*의 평균과 분산은 0.0015, 0.0002로 계산되었다. 이는 Ito변환 공식을 이용하여 구하 결과는 평균은 0.0016-0.0002/2 = 0.0015, 분산은 0.0002로 실제 값과 동일하였다. 또한, 정규성을 검토하기 위해 q-q plot을 그려보았다. q-q plot의 결과 R^2값이 두 경우 모두 1에 가깝게 나왔고 점들도 대체로 직선 위에 존재함을 확인할 수 있다. 따라서 $u_t^* = ln\Delta St$에 대한 Ito변환 공식이 만족함을 확인할 수 있다.

c) ***위에서 구한 분포를 이용하여 $p(u<u_\alpha) = \alpha; \alpha$ =0.05,0.01 조건을 만족하는 일별 VaR (Value at Risk) u_α 를 구하고 정규분포를 이용해 구한 VaR 값과 비교해 보시오.***

α	Normal	t(10)
0.050	-0.023	-0.023
0.010	-0.033	-0.035

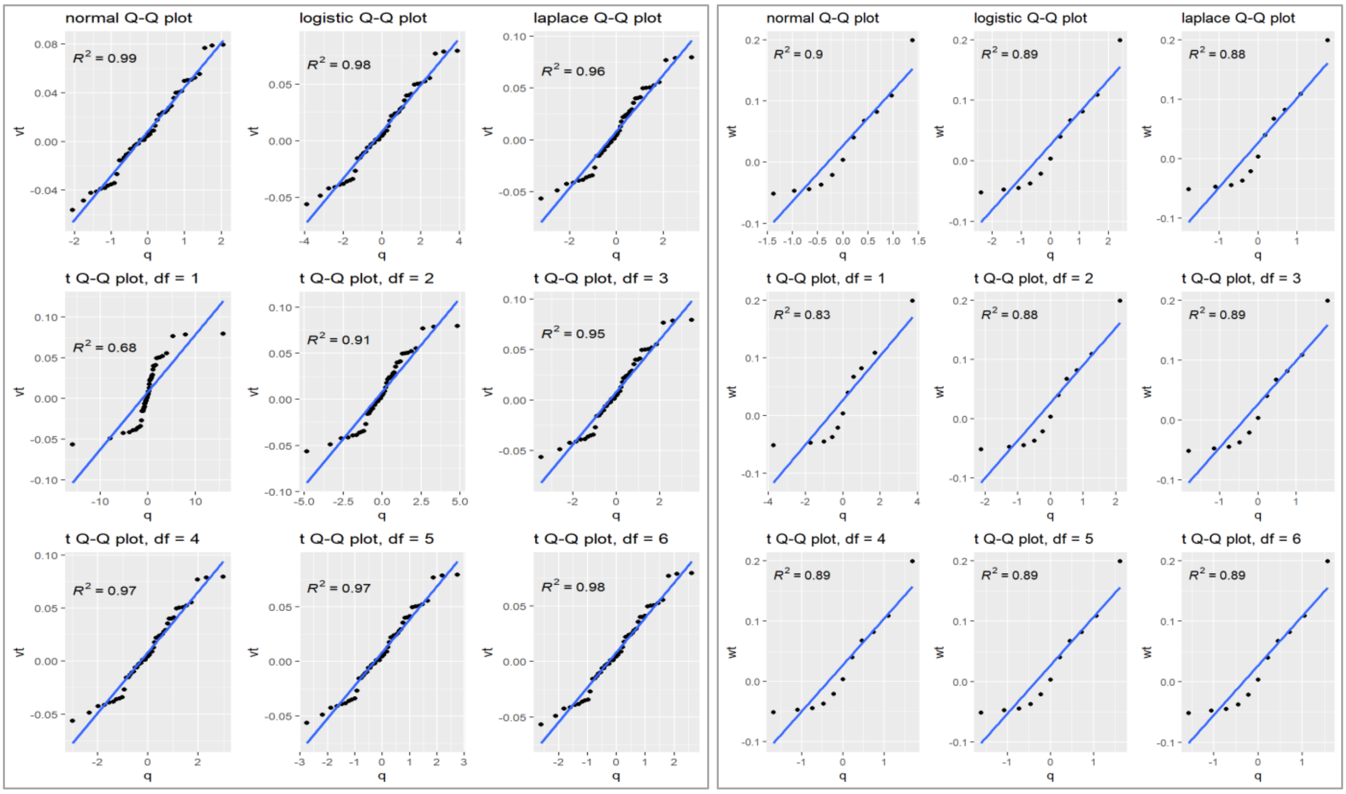
정규분포와 위해서 선택한 분포인 df=10인 t분포를 이용해 구한 VaR값은 $\alpha = 0.05$ 일 때 약 -2.3%, $\alpha = 0.01$일 때 약 -3.3%, -3.5%로 두 값에 큰 차이가 없다.

d) ***주별수익률(weekly return) 및 월별수익률(monthly return) 자료에 대해서 Q-Q plot을 이용하여 적절한 분포를 찾고 이를 이용하여 주별 및 월별 VaR 값을 구하여 u_α과 서로 비교해 보시오.***

주별수익률(v_t)와 월별수익률(w_t)의 분포를 파악하기위해 정규 분포, 로지스틱 분포, 라플라스 분포, 자유도 1~6인 t 분포의 Q-Q plot을 살펴보았다. 아래 그래프 중 왼쪽 9개 그래프는 주별수익률, 오른쪽 9개는 월별수익률에 대한 Q-Q plot이다.

그 결과 주별수익률은 정규 분포의 R^2값이 0.99로 높아 가장 적합하다고 판단해 이를 이용해 VaR 값을 구했고, 그때의 값은 $\alpha = 0.05$ 일 때 -5.1%, $\alpha = 0.01$일 때 -7.6%이다. 월별수익률도 R^2값이 0.9로 정규분포가 가장 컸다. 이를 이용한 VaR은 $\alpha = 0.05$ 일 때 -12.2%, $\alpha = 0.01$일 때 -18.4%이다. 두 경우 모두 c)에서 구한 u_α값보다 작음을 확인할 수 있다.

일별수익률과 주별수익률의 경우 R^2가 가장 큰 normal Q-Q plot에서 왼쪽 꼬리 부분이 크게 벗어나지 않으나 월별수익률의 경우 R^2는 크나 왼쪽 꼬리 부분이 직선에서 벗어났다. 일(daily), 주(weekly), 월(monthly)로 갈수록 데이터의 개수가 작아져 normal에서 벗어나는 문제가 발생한 것으로 보인다. 이와 같은 이유로 월별수익률 그래프를 보면 비대칭 분포를 보인다. Normal, logistic, laplace, t 분포 모두 대칭 분포이기에 삼성주식의 월별수익률의 경우 이외에 비대칭 분포를 고려해볼 필요가 있다.



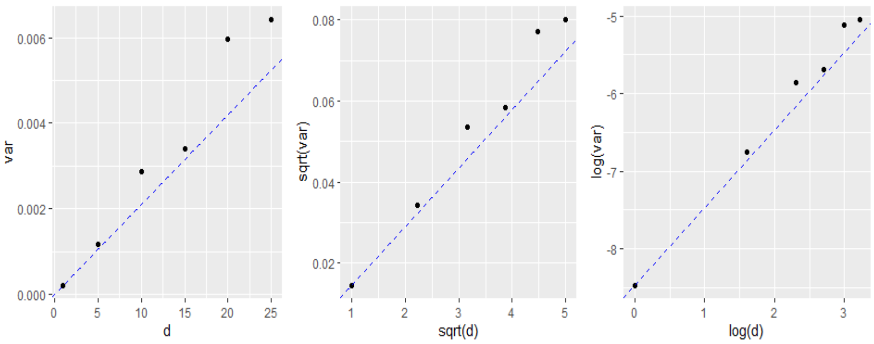
α \ return	v_t	w_t
0.050	-0.051	-0.122
0.010	-0.076	-0.184

e) {lnS(t)} 의 random walk 가설을 검정하기 위해 $\sigma^2_{d/n}$*=Var[*$\Delta_d \boldsymbol{lnS_t}$*]; d= 1,5,10,15,20,25 를 각각 추정 하여*

$$\boldsymbol{\sigma^2_{d/n} = d * \sigma^2_{1/n}}$$

$$\boldsymbol{\sigma_{d/n} = \sqrt{d} * \sigma_{1/n}}$$

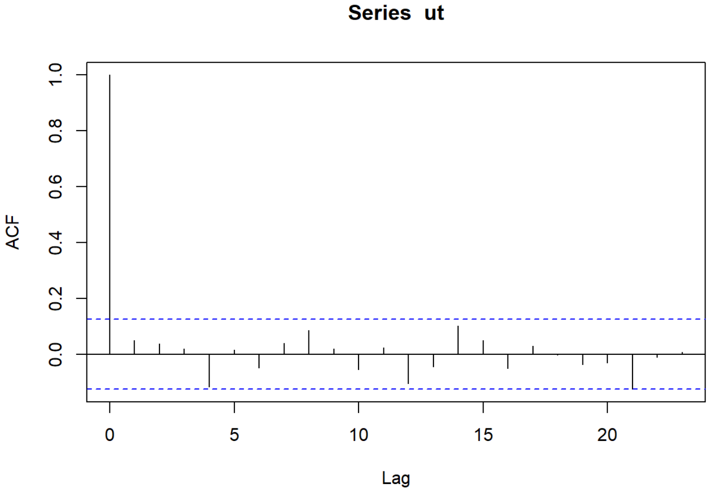
관계가 성립하는지 (d, $\sigma^2_{d/n}$*), (*$\sqrt{d}$*,* $\sigma_{d/n}$*),(lnd,ln* $\sigma^2_{d/n}$*) 그래프를 그려서 확인해 보시오.*



d	$\sigma^2_{d/n}$
1	0.0002
5	0.0012
10	0.0029
15	0.0034
20	0.0060
25	0.0064

그래프를 그려봤을 때 *(d,* $\sigma^2_{d/n}$*), (*$\sqrt{d}$*,* $\sigma_{d/n}$*)* 의 경우 직선에서 벗어나는 점들이 존재하나 로그를 취한 *(lnd,ln*$\sigma^2_{d/n}$*)* 의 경우 직선 위에 있으므로 주어진 관계식을 만족한다고 볼 수 있다. 따라서 random walk 가설이 성립하는 것으로 보인다.

3. *시계열자료 $\{u_t\}$ 의 자기상관계수 도표 $\rho_k = Corr(u_t, u_{t-k})$, k=1,2,⋯(coefficients of autoregression) 를 각각 그려보고 u_t 의 독립성가정이 정당한지 검토하시오.*



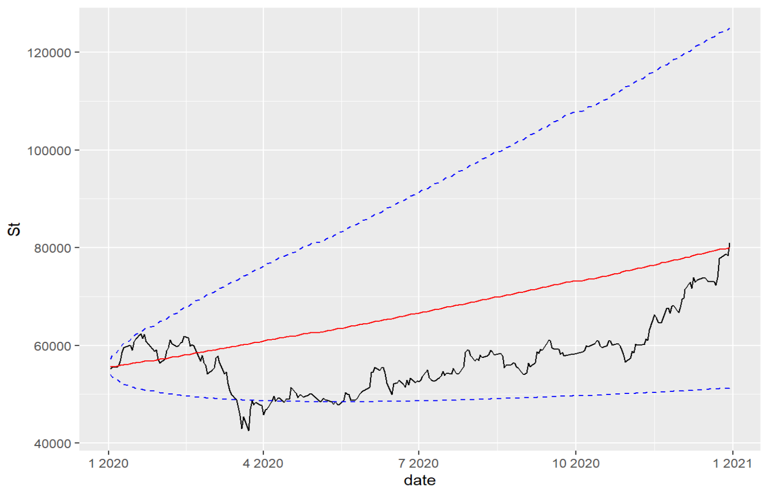
$\rho_k(k = 1,2,3,\dots)$ 값들이 모두 점선(CI) 안에 있으므로 u_t 의 독립성가정이 타당하다.

4. *2019년 일별 주가자료에서 $u_t^* = \Delta_d lnS_t = lnS_{i+1} - lnS_i$ 일 때 $u_t^* \sim N(\mu^* dt,\ \sigma^2 dt)$, t=0,1,⋯,(n-1), $\mu^* = \mu - \frac{\sigma^2}{2}$; dt=1/n 가정을 이용하여 순간 무위험 이자율 r 및 , μ Volatility σ 를 추정하시오.*

estimator	value
r	0.049
μ	0.392
σ	0.227

금리가 5%일 때 주어진 가정을 이용하여 구한 순간 무위험 이자율은 0.049, 평균 수익률(년) μ는 0.392, 수익률(년) 편차(Volatility) σ는 0.227이다.

5. *주가 S(t) 가 Geometric Brownian Motion Process를 따른다고 가정하자. 이 때 4)에서 추정된 μ ,σ 값과 2020년 1월 2일 시가 S_0 를 이용하여 2020년 미래시점 t=1/n,2/n,⋯,1 에서의 주식가격 S(t)에 대한 예측값 $\hat{S}(t)$ 및 95% 예측구간(prediction interval)을 구하여 이들 값들을 실제값 S(t)와 겹쳐서 시계열 도표를 그려 보고 위 가정이 적절한지 검토하시오.*



실제값 St와 예측값인 $\hat{S}(t)$와 그 신뢰구간을 그린 그래프이다. 예측값은 1년동안 우상향하는 반면, 실제 주가는 2~3월 부근에서 주가가 폭락했다. 이는 2020년 초 당시 코로나19 팬데믹으로 인해 세계적으로 경제 침체가 일어났던 시기이다. GBM모형은 이러한 이례적인 현상은 예측하지 못한 것으로 보인다. 또한, 같은 이유로 분산도 크게 추정되어 예측구간도 매우 크게 추정된 것으로 보인다. S0(초기값)를 주가가 다시 증가하기 시작하는 3월 말의 주가로 설정했다면 보다 정확한 예측을 할 수 있었을 것으로 보인다.

Part 2 : No Arbitrage 조건을 이용한 Option Price 계산

1. Black-Scholes Call/Put option 가격을 Monte-Carlo Simulation(방법1)과 Black-Scholes-Merton(방법2)를 이용하여 각각 계산하고 비교하시오.

$K = 55800, \quad S_0 = 55500, \quad t = 1/12, 1/4, 1/2, 3/4, 1$

t(만기)	Monte.Call	Monte.Put	Black.Call	Black.Put
1/12	1,416	1,492	1,417	1,491
1/4	2,693	2,327	2,699	2,323
1/2	4,069	3,024	4,069	3,024
3/4	5,196	3,488	5,191	3,486
1	6,174	3,828	6,183	3,826

M을 100,000으로 두었을 때 Montel Carlo Simulation을 이용하여 구한 결과와 Black Scholes Merton 공식을 이용하여 구한 결과가 서로 비슷함을 확인할 수 있다. 또한, M을 크게 지정할수록 두 방법 간의 차이가 줄어듦을 확인하였다.
만기가 1개월일때는 put option 가격이 call option 가격보다 큰 반면 만기가 3개월, 6개월, …, 1년으로 커질수록 call option이 put option보다 점점 더 비싸진다.

2. 2020년 1월, 3월, 6월, 9월, 12월말 옵션 만기일의 실제 주가자료를 이용하여 2020년 1월 2일에 위에서 계산한 call/put 옵션 가격으로 각 만기별로 아래와 같이 매입했을 때 각 포트폴리오에 대해 수익률을 계산하시오.

[Portfolio-a]

- Call option 150주 및 Put option 50주

t(만기)	150*ct	50*pt	150*(St-K)	50*(K-St)	순수입	옵션 수익률(%)	주식 수익률(%)
1/12	212,569	74,536	90,000	0	-197,104	-68.7	1.6
3/12	404,907	116,145	0	402,500	-118,551	-22.8	-14.0
1/2	610,281	151,188	0	150,000	-611,470	-80.3	-4.9
3/4	778,635	174,297	360,000	0	-592,932	-62.2	4.9
1	927,463	191,297	3,780,000	0	2,661,240	237.9	45.9

[Portfolio-b]

- Call option 100주 및 Put option 100주

t(만기)	100*ct	100*pt	100*(St-K)	100*(K-St)	순수입	옵션 수익률(%)	주식 수익률(%)
1/12	141,713	149,071	60,000	0	-230,784	-79.4	1.6
3/12	269,938	232,289	0	805,000	302,773	60.3	-14.0
1/2	406,854	302,377	0	300,000	-409,231	-57.7	-4.9
3/4	519,090	348,594	240,000	0	-627,684	-72.3	4.9
1	618,308	382,594	2,520,000	0	1,519,097	151.8	45.9

[Portfolio-c]

- Call option 50주 및 Put option 150주

t(만기)	50*ct	150*pt	50*(St-K)	150*(K-St)	순수입	옵션 수익률(%)	주식 수익률(%)
1/12	70,856	223,607	30,000	0	-264,463	-89.8	1.6
3/12	134,969	348,434	0	1,207,500	724,097	149.8	-14.0
1/2	203,427	453,565	0	450,000	-206,992	-31.5	-4.9
3/4	259,545	522,891	120,000	0	-662,436	-84.7	4.9
1	309,154	573,891	1,260,000	0	376,955	42.7	45.9

Black Scholes Merton 공식을 이용하여 세가지 경우에 대한 옵션 수익률과 실제 주식 수익률을 비교해보았다. 그 결과, 만기가 1월, 6월, 9월인 경우, 옵션을 매입하지 않고 주식에만 투자하는 것이 적합하다. 만기가 3월인 경우에는 call option을 150주에서 100주로, put option을 50주에서 100주로 바꿀 때 수익률이 음수에서 양수로 변화하므로 call option을 150주 미만, put option을 50주 이상으로 매입하는 것이 나을 것이다. 그 중 해당 월에 가장 큰 수익을 얻는 경우는 call option이 50주, put option이 150주일 때다. 만기가 12월인 경우에는 call option 150주, put option 50주를 매입할 때 가장 큰 수익을 얻을 수 있다. 또한, 만기가 3, 6월일 때, call option이 줄고 put option이 증가할 때 옵션 수익률이 증가함을 확인할 수 있다.

Part 3 : Asian option 가격계산 Application 개발