2021 - 2022

ALGÈBRE

CARLIER Pierre

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & \cdots & a_{1p} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & \cdots & a_{2p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & \cdots & a_{np} \end{pmatrix}$$

Examen d'algèbre

Durée de l'examen : 3h
Calculatrices et tous appareils électroniques interdits.

Question 1. Soit l'application $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3 : (x, y) \mapsto (3x + y, y - x, x + 2y)$.

(a) Montrer que f est une application linéaire.

(b) Déterminer une base de son noyau.

(c) Déterminer une base de son ensemble image.

(d) L'application est-elle injective, surjective ou bijective ? Justifier.

(e) Donner la matrice de f relativement aux bases canoniques de $\mathbb{R}^2$ et de $\mathbb{R}^3$.

Question 1. (Suite.)

Question 2. Soit $\mathcal{C} = \{u_1, u_2, u_3\}$ la famille de vecteurs de $\mathbb{R}^3$ définie par $u_1 = (-1, 4, 0)$, $u_2 = (2, 1, 3)$ et $u_3 = (1, -1, 1)$. Déterminer si $\mathcal{C}$ est une famille libre, une famille génératrice ou une base de $\mathbb{R}^3$. Justifier.

Question 3. Soient les matrices :

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -3 \\ 4 & 2 & -3 \\ -2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} -2 & 4 & 0 \\ 1 & 5 & -3 \end{pmatrix}$$

Calculer : $A \times B^{-1} \times C^t$.

Question 4. Résoudre le système d'équations linéaire suivant en fonction du paramètre réel $\lambda \in \mathbb{R}$.

$$\begin{cases} x + (\lambda + 2)y - z = 0 \\ 2y + \lambda z = 1 \\ (\lambda + 1)x + 2y - z = 0 \end{cases}$$

Question 4. (Suite.)

Question 5. Soit la matrice M suivante :

$$M = \begin{pmatrix} 7 & -6 & -4 \\ 5 & -4 & -4 \\ 5 & -6 & -2 \end{pmatrix}$$

(a) Déterminer les valeurs propres de M.

(b) Montrer que M est diagonalisable et déterminer une base de vecteurs propres de $\mathbb{R}^3$.

(c) Déterminer la matrice diagonale D équivalente à M et déterminer une matrice de changement de base P telle que $D = P^{-1}MP$.

(d) $\forall n \in \mathbb{N}_0$, calculer M^n.

Question 5. (Suite.)