

Universidade Federal de Sergipe Departamento de Sistemas de Informação SINF0007 — Estrutura de Dados II

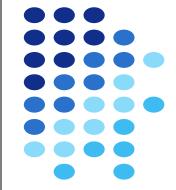
Backtracking





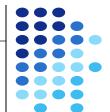


Introdução







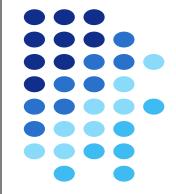


Introdução

- Dado um problema computacional, podemos resolvê-lo usando a força bruta
 - ex.: muitas vezes é mais fácil contar o número de vezes que um item aparece no array do que encontrar uma forma matemática
 - Ou seja, testar todas as soluções candidatas
- Em geral isso é pouco eficiente, pois: Verificar se uma solução é viável pode ser custoso
- O número de soluções candidatas costuma ser muito grande

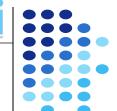


Backtracking







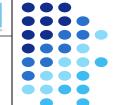


Backtracking

- Método sistemático para iterar em todas as possíveis configurações de um espaço de busca
- Precisa ser customizado para cada problema específico
- Ideia central é retroceder quando detectar que a solução candidata é inviável



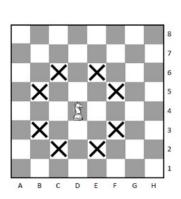


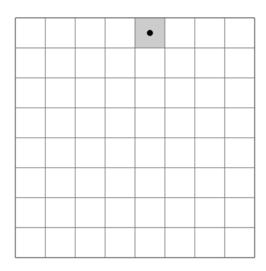


Backtracking – Exemplo

Problema: Passeio do Cavalo

Em um tabuleiro nXn, partindo da posição dada, encontrar, se existir, um passeio do cavalo que visita os todos os pontos do tabuleiro uma única vez

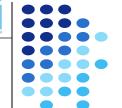




https://pt.wikipedia.org/wiki/Problema_do_cavalo



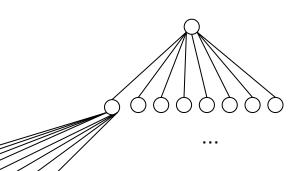




Backtracking – Exemplo: Possível Estratégia

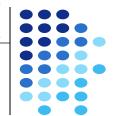
Problema: Passeio do Cavalo

- A partir da primeira posição: 8 possibilidades
- Identifica as válidas e Escolhe uma válida
- A partir da escolhida
 - Identifica as válidas e Escolhe mais uma
 - ... e assim por diante
- Deu errado?
 - Volta e tenta outro caminho (backtracking)
- Cada nó é uma casa do tabuleiro (Se o tabuleiro for 8x8, quando atingirmos o nó 64, encontramos uma solução)









Backtracking – Representação

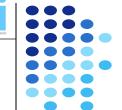
De forma geral, vemos a nossa solução como um array

$$a = (a_1, a_2, a_3 ... a_n)$$

- Esse array pode significar muitas coisas, dependendo do problema:
 - Cada a_i pode significar se o elemento está presente ou não na solução
 - A configuração de cada coluna do tabuleiro
 - A sequência de operações de uma pilha







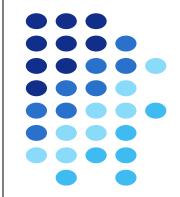
Backtracking – Algoritmo

- A cada passo do algoritmo, começamos com uma solução parcial, ex.:
 a = (a₁, a₂, a₃ ... a_k) e tentamos aumentar adicionando outro elemento no final da solução
- Depois de adicionar, devemos testar se já chegamos na solução procurada
- Se sim, imprima, conte, armazene, faça o que o problema pede
- Se não, temos que verificar se ainda é possível outra alternativa para a solução parcial chegar a solução completa
- Se sim, continua
- Se não, remova o último elemento de a e tente outra possibilidade

Backtracking – Algoritmo

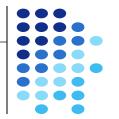
```
bool finished = false; // Já encontrou todas as soluções?
void backtrack(int a[], int k, data input){
  int c[MAXCANDIDATES]; // Candidatos para a próxima posição
  int nCandidates; // total de candidatos para próxima posição
  if(is a solution(a, k, input))
      process Solution(a, k, input); // Se for uma solução, imprima, quarde, ...
  else{
      k = k + 1; // Se ainda não cheqou na solução,
               //vamos tentar com mais um passo (desce na árvore, anda no array, ...)
      construct candidates(a, k, input, c, &nCandidates); // Tenta somente nos candidatos
                                                  // válidos (olhar restrições do problema)
      for (int i=0; i < nCandidates; i++){</pre>
          a[k] = c[i]; // considera que c[i] é uma possível solução
          backtrack(a, k, input);
          if (finished) return; // término antecipado
```







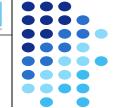




- Como imprimir todas as sequências de tamanho k de números entre
 1 e n?
- Exemplo: n = 4, k = 3





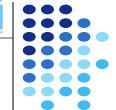


- Como imprimir todas as sequências de tamanho k de números entre
 1 e n?
- Exemplo: n = 4, k = 3

111	131	211	2 3 1	3 1 1	3 3 1	411	431
112	132	212	232	3 1 2	332	412	432
113	133	213	233	3 1 3	3 3 3	413	4 3 3
114	134	214	234	3 1 4	3 3 4	414	434
121	141	221	241	3 2 1	3 4 1	421	441
122	142	222	242	3 2 2	3 4 2	422	442
123	143	223	2 4 3	3 2 3	3 4 3	423	4 4 3
124	144	224	244	3 2 4	3 4 4	424	444



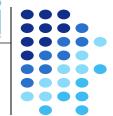




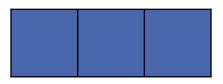
- Podemos resolver usando Recursão:
 - Armazenamos o prefixo da sequência que estamos construindo
 - Completamos com todos os possíveis sufixos recursivamente





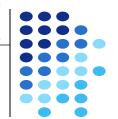


- Podemos resolver usando Recursão:
 - Armazenamos o prefixo da sequência que estamos construindo
 - > Completamos com todos os possíveis sufixos recursivamente
- Simulação para n = 4, k = 3:

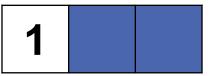






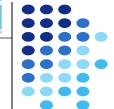


- Podemos resolver usando Recursão:
 - Armazenamos o prefixo da sequência que estamos construindo
 - > Completamos com todos os possíveis sufixos recursivamente
- Simulação para n = 4, k = 3:







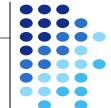


- Podemos resolver usando Recursão:
 - Armazenamos o prefixo da sequência que estamos construindo
 - > Completamos com todos os possíveis sufixos recursivamente
- Simulação para n = 4, k = 3:







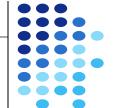


- Podemos resolver usando Recursão:
 - Armazenamos o prefixo da sequência que estamos construindo
 - > Completamos com todos os possíveis sufixos recursivamente
- Simulação para n = 4, k = 3:







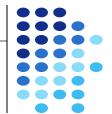


- Podemos resolver usando Recursão:
 - Armazenamos o prefixo da sequência que estamos construindo
 - > Completamos com todos os possíveis sufixos recursivamente
- Simulação para n = 4, k = 3:







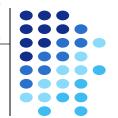


- Podemos resolver usando Recursão:
 - Armazenamos o prefixo da sequência que estamos construindo
 - Completamos com todos os possíveis sufixos recursivamente
- Simulação para n = 4, k = 3:







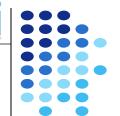


- Podemos resolver usando Recursão:
 - Armazenamos o prefixo da sequência que estamos construindo
 - > Completamos com todos os possíveis sufixos recursivamente
- Simulação para n = 4, k = 3:







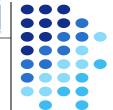


- Podemos resolver usando Recursão:
 - Armazenamos o prefixo da sequência que estamos construindo
 - > Completamos com todos os possíveis sufixos recursivamente
- Simulação para n = 4, k = 3:







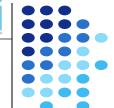


- Podemos resolver usando Recursão:
 - Armazenamos o prefixo da sequência que estamos construindo
 - > Completamos com todos os possíveis sufixos recursivamente
- Simulação para n = 4, k = 3:







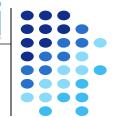


- Podemos resolver usando Recursão:
 - Armazenamos o prefixo da sequência que estamos construindo
 - > Completamos com todos os possíveis sufixos recursivamente
- Simulação para n = 4, k = 3:







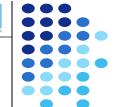


- Podemos resolver usando Recursão:
 - Armazenamos o prefixo da sequência que estamos construindo
 - > Completamos com todos os possíveis sufixos recursivamente
- Simulação para n = 4, k = 3:







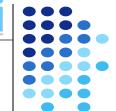


- Podemos resolver usando Recursão:
 - Armazenamos o prefixo da sequência que estamos construindo
 - > Completamos com todos os possíveis sufixos recursivamente
- Simulação para n = 4, k = 3:







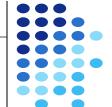


- Podemos resolver usando Recursão:
 - Armazenamos o prefixo da sequência que estamos construindo
 - Completamos com todos os possíveis sufixos recursivamente
- Simulação para n = 4, k = 3:







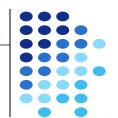


- Podemos resolver usando Recursão:
 - Armazenamos o prefixo da sequência que estamos construindo
 - > Completamos com todos os possíveis sufixos recursivamente
- Simulação para n = 4, k = 3:







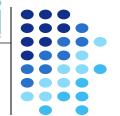


- Podemos resolver usando Recursão:
 - Armazenamos o prefixo da sequência que estamos construindo
 - > Completamos com todos os possíveis sufixos recursivamente
- Simulação para n = 4, k = 3:







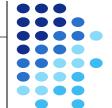


- Podemos resolver usando Recursão:
 - Armazenamos o prefixo da sequência que estamos construindo
 - > Completamos com todos os possíveis sufixos recursivamente
- Simulação para n = 4, k = 3:





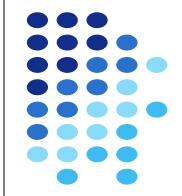




- Vamos tentar manter a lógica do algoritmo apresentado e implementar:
 - > Construct_candidates
 - > is a solution
 - > process_solution

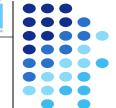
Ver código sequence.c







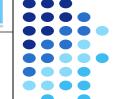




- Gere todos os subconjuntos de um conjunto
 - Entrada: um inteiro n, indicando o maior inteiro do conjunto de inteiros de 1 a n
 - Saída: todos os subconjuntos, um por linha, cada número separado por um espaço em branco. Cada subconjunto deve ser delimitado pelo caracteres {}. A saída deve ser ordenada por ordem lexicográfica.







Entrada

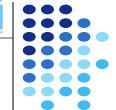
3

Saída

{ 1 2 3 } { 1 2 } { 1 3 } { 1 } { 2 3 } { 2 } { 3 }



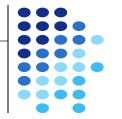




- Vamos tentar manter a lógica do algoritmo apresentado e implementar:
 - > Construct_candidates
 - > is a solution
 - > process_solution







- Uma ideia é representar a solução como um array
 - Para ilustrar o uso da árvore como forma de pensar no problema

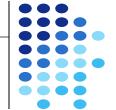
Exemplo: se $\mathbf{n} = 3$, podemos representar os conjuntos

```
{ 1 2 3 }, { 1 2 }, { 1 3 } e { 2 } pelos arrays:
```

- [0,1,1,1]
- [0,1,1,0]
- [0,1,0,1]
- [0,0,1,0]





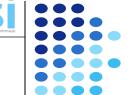


 Dessa forma, cada posição i do array, representa se o número i está ou não presente no conjunto

 Para soluções com backtracking o segredo é pensar em representar o problema de forma a construir a solução a cada passo

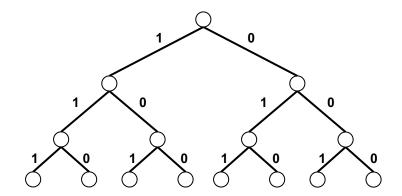






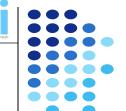
Representado o conjunto { 1 3 }

No 1º momento, teremos 2 opções (candidatos), o 1 fará (1) ou não (0) parte do conjunto? Suponha que sim (1).







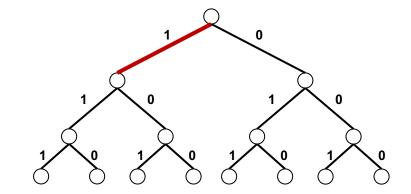


Representado o conjunto { 1 3 }

No 1º momento, teremos 2 opções (candidatos), o 1 fará (1) ou não (0) parte do conjunto? Suponha que sim (1).

Array de solução

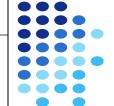
(índices do array) 0 1 2 3







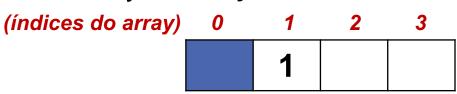


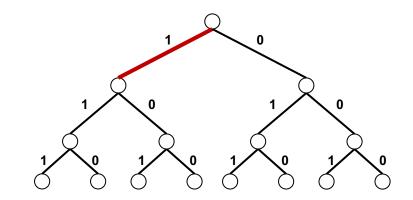


Representado o conjunto { 1 3 }

- No 1º momento, teremos 2 opções (candidatos), o 1 fará (1) ou não (0) parte do conjunto? Suponha que sim (1).
- Então, descemos na árvore. De novo, teríamos a mesma opção, o **2** fará ou não parte do conjunto? Suponha que não (0).

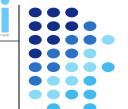
Array de solução







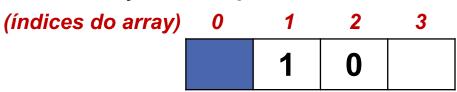


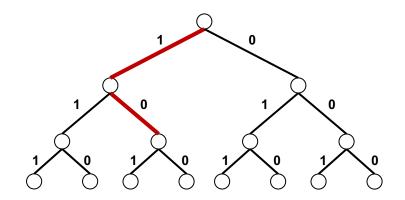


Representado o conjunto { 1 3 }

- No 1º momento, teremos 2 opções (candidatos), o 1 fará (1) ou não (0) parte do conjunto? Suponha que sim (1).
- Então, descemos na árvore. De novo, teríamos a mesma opção, o **2** fará ou não parte do conjunto? Suponha que não (0).

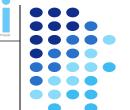
Array de solução





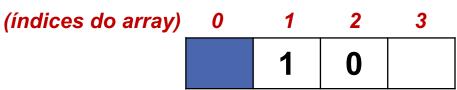


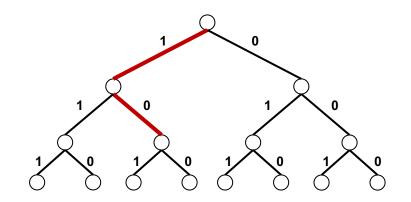




Representado o conjunto { 1 3 }

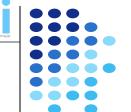
- No 1º momento, teremos 2 opções (candidatos), o 1 fará (1) ou não (0) parte do conjunto? Suponha que sim (1).
- Então, descemos na árvore. De novo, teríamos a mesma opção, o 2 fará ou não parte do conjunto? Suponha que não (0).
- Na próxima descida, o 3 fará parte ou não? Suponha que sim (1).
 - Array de solução







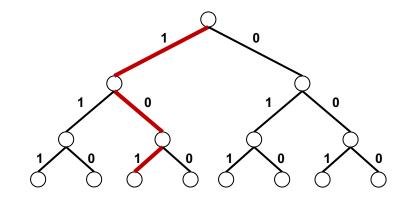




Representado o conjunto { 1 3 }

- No 1º momento, teremos 2 opções (candidatos), o 1 fará (1) ou não (0) parte do conjunto? Suponha que sim (1).
- Então, descemos na árvore. De novo, teríamos a mesma opção, o 2 fará ou não parte do conjunto? Suponha que não (0).
- Na próxima descida, o 3 fará parte ou não? Suponha que sim (1).
 - Array de solução

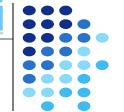
(índices do array)	0	1	2	3
		1	0	1





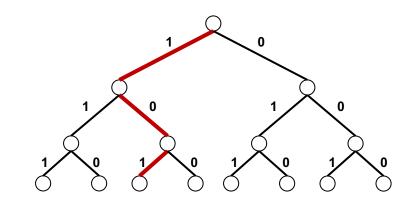






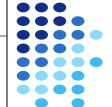
Representado o conjunto { 1 3 }

- No 1º momento, teremos 2 opções (candidatos), o 1 fará (1) ou não (0) parte do conjunto? Suponha que sim (1).
- Então, descemos na árvore. De novo, teríamos a mesma opção, o **2** fará ou não parte do conjunto? Suponha que não (0).
- Na próxima descida, o 3 fará parte ou não? Suponha que sim (1).
- Array de solução (índices do array) Esse array representa o conjunto





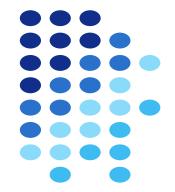




 Assim, tudo o que temos que fazer é andar na árvore e quando chegar nas folhas, imprimir o array de solução, que estará com 0's e 1's

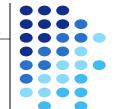
Ver código subSets.c

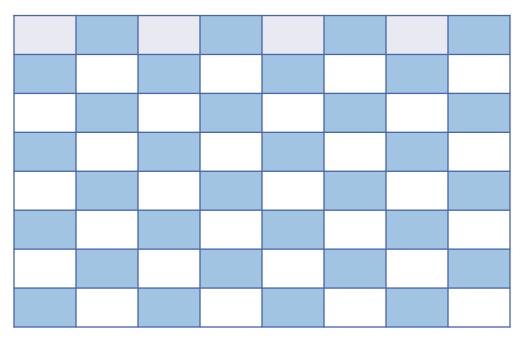






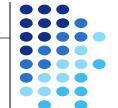


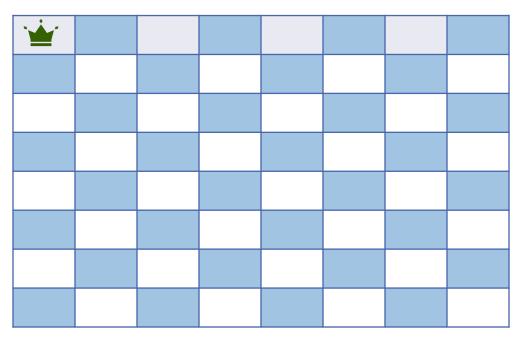






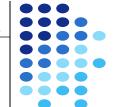


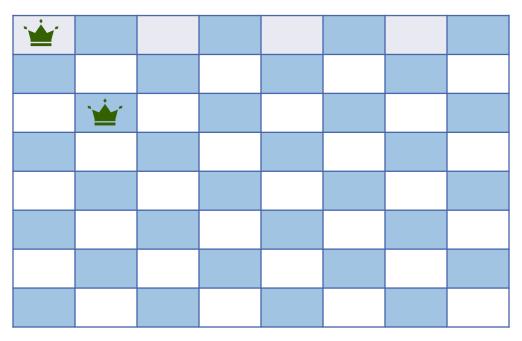






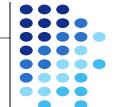


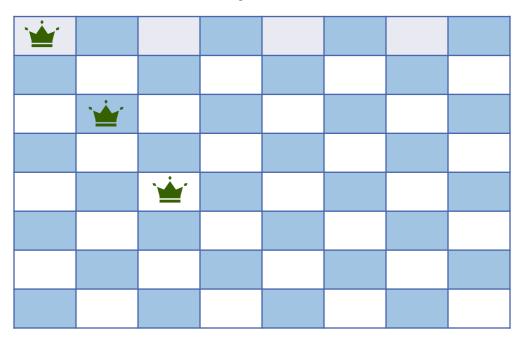






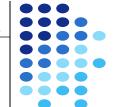


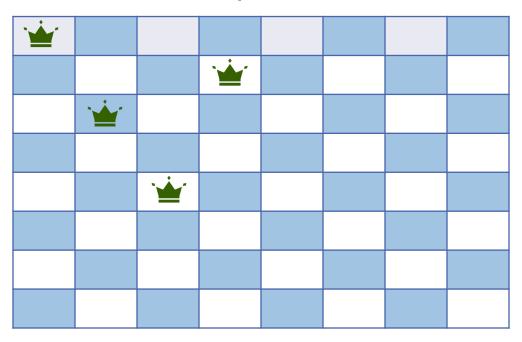






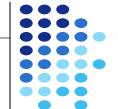


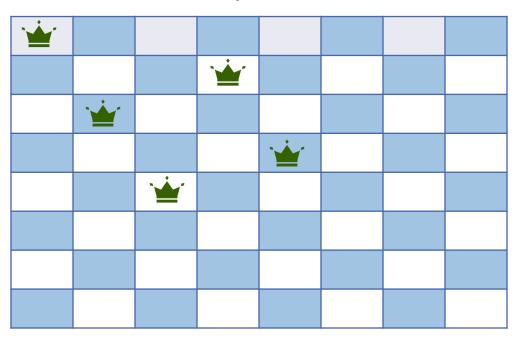






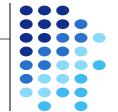


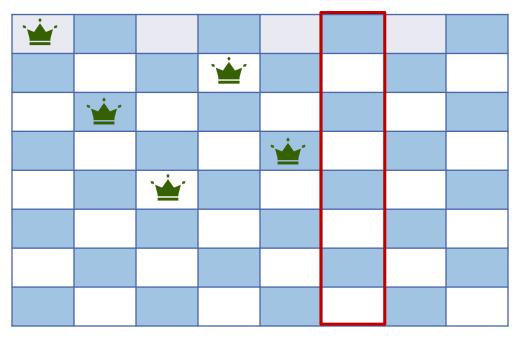






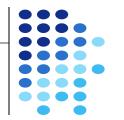




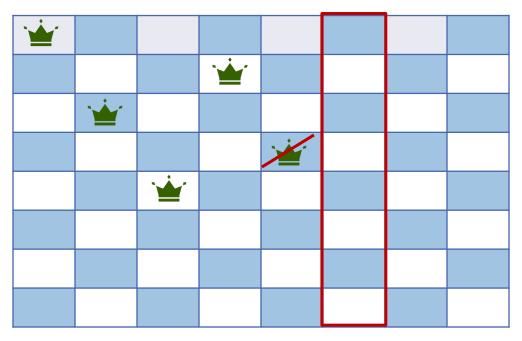








 No xadrez é possível colocar 8 rainhas no tabuleiro de tal forma que nenhuma rainha possa atacar a outra. Ex.:

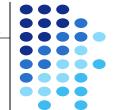


0 candidatos!

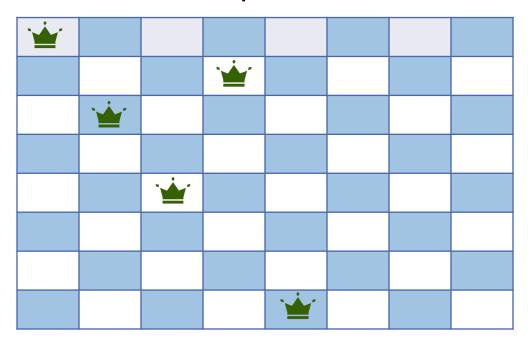
Temos que fazer o backtracking e mudar o candidato anterior!







 No xadrez é possível colocar 8 rainhas no tabuleiro de tal forma que nenhuma rainha possa atacar a outra. Ex.:



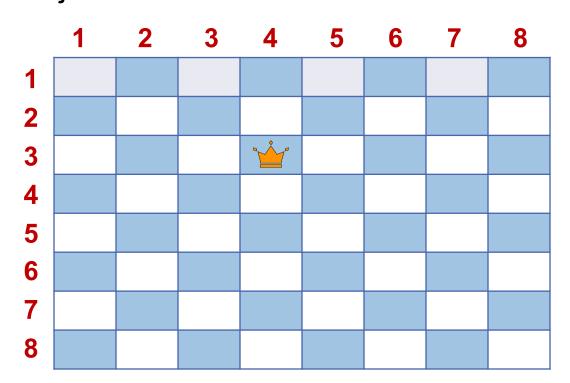
... E assim sucessivamente!





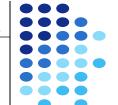


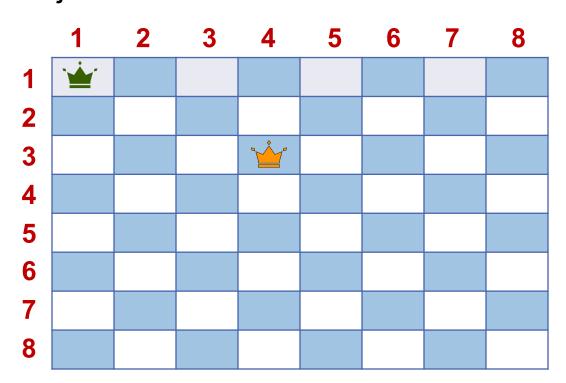
Contudo...





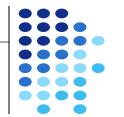


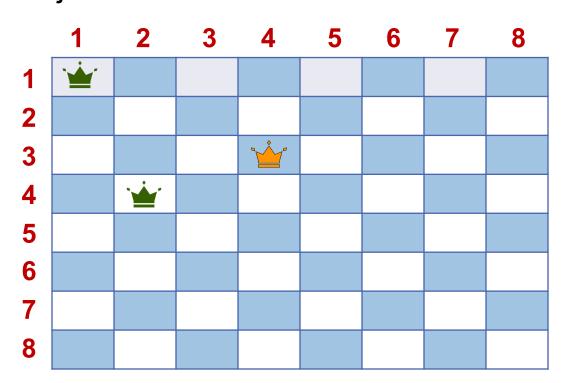






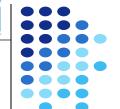


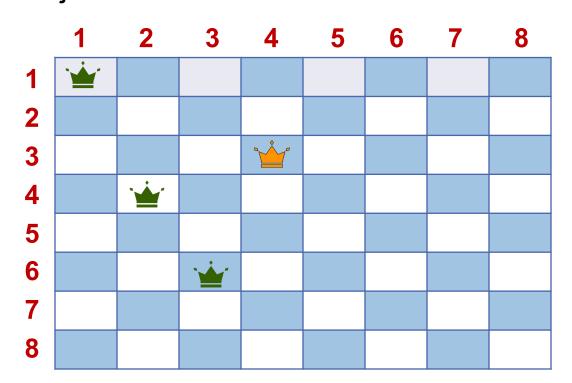






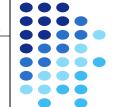




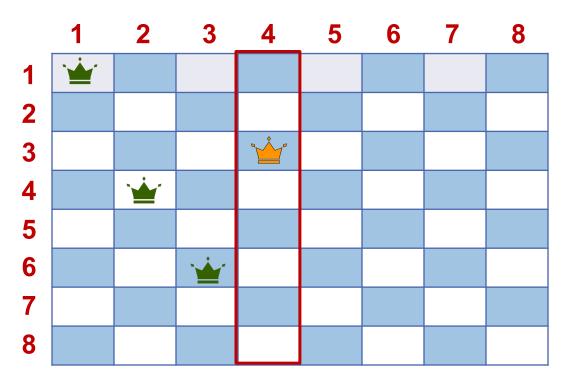








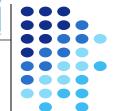
O problema já define o local de 1 rainha FIXA. Ex.:



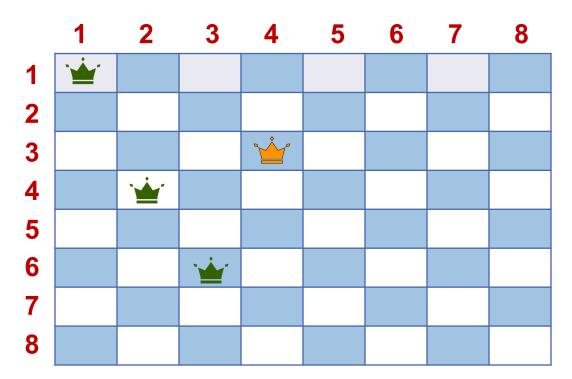
É a rainha FIXA, temos que pular!







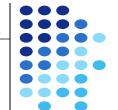
O problema já define o local de 1 rainha FIXA. Ex.:



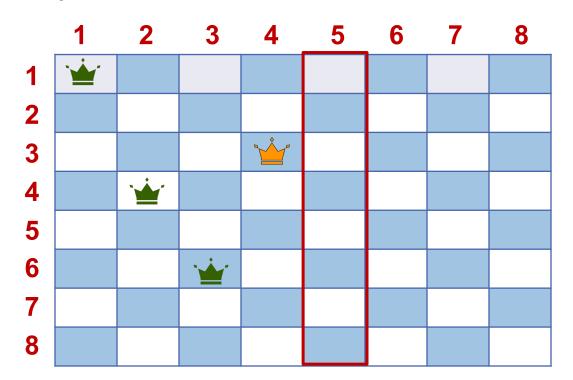
0 candidatos!







O problema já define o local de 1 rainha FIXA. Ex.:

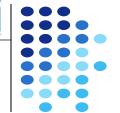


0 candidatos!

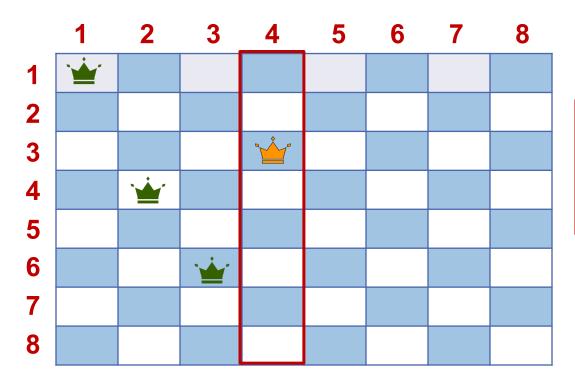
Temos que fazer o backtracking e mudar o candidato anterior!







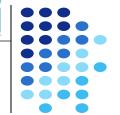
O problema já define o local de 1 rainha FIXA. Ex.:



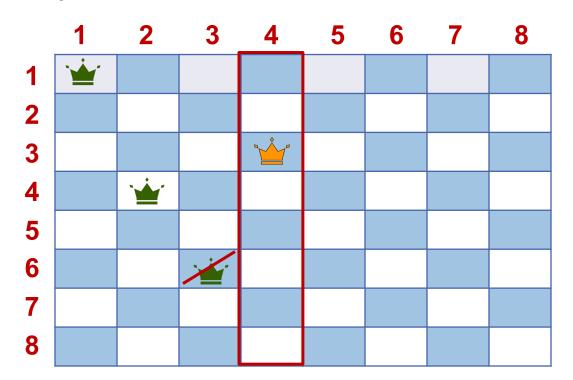
O candidato anterior é a rainha FIXA! Fazemos o **backtracking** mais uma vez!







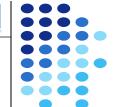
O problema já define o local de 1 rainha FIXA. Ex.:

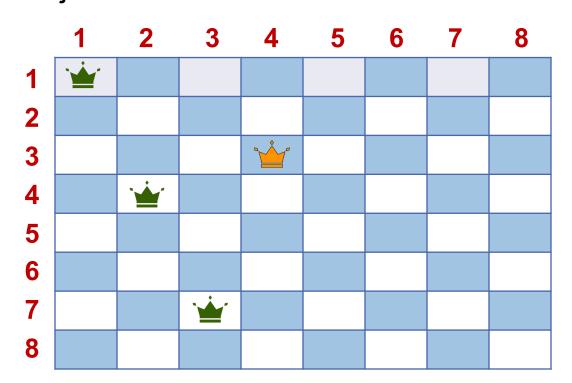


O candidato anterior é a rainha FIXA! Fazemos o backtracking mais uma vez!



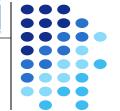




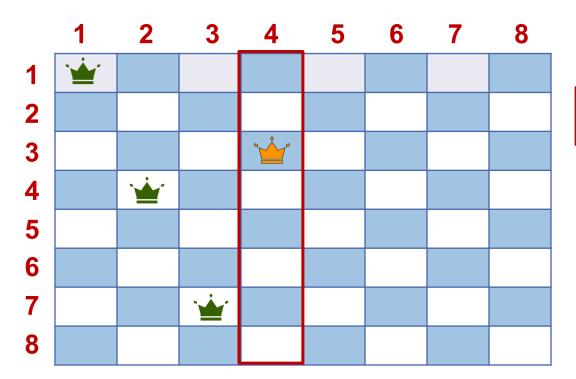








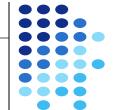
O problema já define o local de 1 rainha FIXA. Ex.:



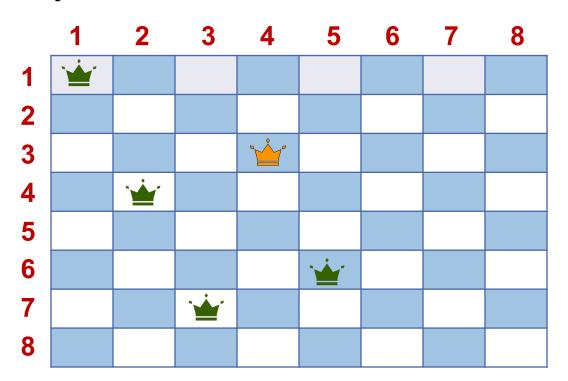
É a rainha FIXA, temos que pular!







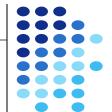
O problema já define o local de 1 rainha FIXA. Ex.:



... E assim sucessivamente!



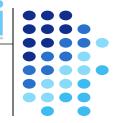




- Vamos tentar manter a lógica do algoritmo apresentado e implementar:
 - > Construct_candidates
 - > is_a_solution
 - > process_solution

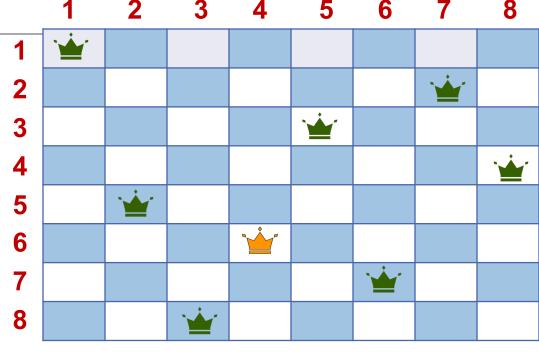






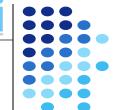
Vamos representar a solução como um array (e não uma matriz)

 Assim, por exemplo, o array para representar a solução ao lado será:





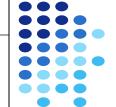




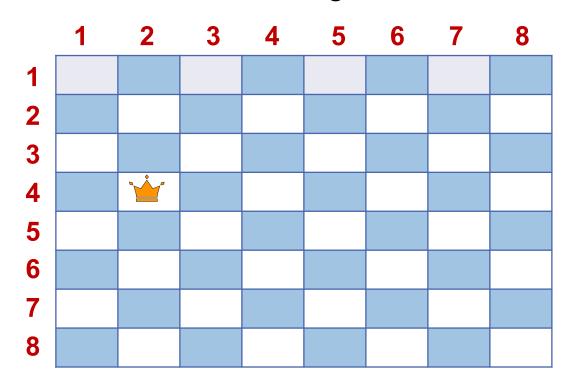
- Como descobrir o próximo candidato (k)?
 - Não pode atacar a rainha fixa
 - Não pode estar na mesma linha das anteriores
 - Não pode estar na mesma diagonal das anteriores
 - Como saber se estão na mesma diagonal?







Como saber as diagonais?



Por exemplo:

Rainha Diagonais

O módulo da diferença entre as linhas e colunas é igual!

$$(4-1, 2-5) = (|3|, |-3|) = (3, 3)$$

$$(4-3, 2-1) = (|1|, |1|) = (1, 1)$$

$$(4-6, 2-4) = (|-2|, |-2|) = (2, 2)$$

$$(4-8, 2-6) = (|-4|, |-4|) = (4, 4)$$

```
void constructCandidates(int a[], int k, int candidates[], int *n){
    int c, i;
    int passed = 1;
    for(c = 1; c \le 8; c++){// testar os 8 candidatos
        if (!checkFixedQueen(c, k)) //verificar se o candidato ataca a rainha fixa
            continue;
        passed = 1;
        for(i = 1; i < k; i++){//verificar se o candidato ataca as rainhas anteriores
           if (a[i] == c){//mesma linha}
              passed = 0;
              break;
           if (abs(a[i] - c) == abs(i - k)){//mesma diagonal}
               passed = 0;
               break;
           (passed) {
            candidates[*n] = c;
            *n += 1;
```

```
if (array[FIXED COL] == c)
        return 0;
    if (abs(array[FIXED COL] - c) == abs(FIXED COL - k))
        return 0;
    return 1;
void bt(int a[], int k, int depth){
    if (depth == 8){
        process Solution(a);
        return;
    }
    if (k == FIXED COL) {// se for a coluna da rainha fixa, pula para a próxima
        bt(a, k + 1, depth + 1);
        return;
    }
    //construir candidatos e chamar backtracking
    //...
```

int checkFixedQueen(int c, int k){







Referências

- Thomas H. Cormen, Charles E. Leiserson, Ronald L. Rivest, and Clifford Stein. 2009. Introduction to **Algorithms, Third Edition** (3rd. ed.). The MIT Press.
- Robert Sedgewick. 2002. Algorithms in C (3rd. ed.). Addison-Wesley Longman Publishing Co., Inc., USA.
- Material baseado nos slides de Rodrigo Paes, Programação Avançada. Instituto de Computação. Federal (UFAL), Maceió, Universidade de Alagoas Brasil. (https://sites.google.com/site/ldsicufal/disciplinas/programacao-avancada/backtracking)
- Material baseado nos slides de **Rafael C. S. Schouery**, Estrutura de Dados. Instituto de Computação. Universidade Estadual de (UNICAMP). Campinas Campinas, Brasil. (https://www.ic.unicamp.br/~rafael/cursos/2s2019/mc202/slides/unidade09-backtracking.pdf)
- Material baseado nos slides de **Túlio Toffolo** e **Marco Antônio Carvalho**, Algoritmos e Programação Avançada. Departamento de Computação. Universidade Federal de Ouro Preto (UFOP), Ouro Preto, Brasil. (http://www3.decom.ufop.br/toffolo/site_media/uploads/2011-1/bcc402/slides/10._backtracking.pdf)
- Material baseado nos slides de **Mário César San Felice**, Algoritmos e Estruturas de Dados 1. Departamento de Computação. Universidade Federal de São Carlos (UFSCar), São Carlos, Brasil. (https://www2.dc.ufscar.br/~mario/ensino/2019s1/aed1/aula25_slides.pdf)