1. Derivada

1.1 Motivaciones

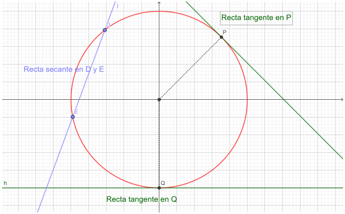
Para introducir el concepto de derivada, recurriremos a dos problemas, uno geométrico y uno físico.

1. Derivada

1.1 Motivaciones

Para introducir el concepto de derivada, recurriremos a dos problemas, uno geométrico y uno físico.

Motivación Geométrica: Recta Tangente

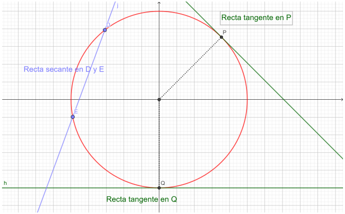


1. Derivada

1.1 Motivaciones

Para introducir el concepto de derivada, recurriremos a dos problemas, uno geométrico y uno físico.

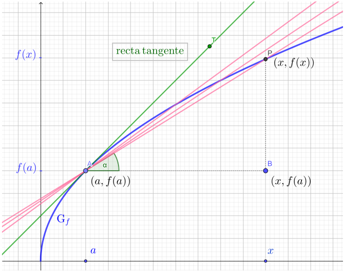
Motivación Geométrica: Recta Tangente



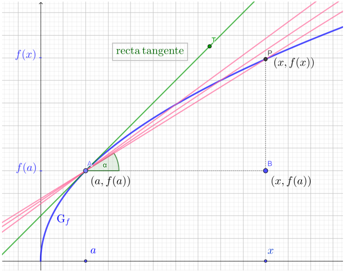
En Geometría, dado un punto P de una circunferencia, se define como *recta tangente a la circunferencia en* P a la recta que pasa por dicho punto y es perpendicular al radio –por P– de la circunferencia. Con esta definición, una recta que sea tangente es la única que corta a la circunferencia en un único punto; además la circunferencia se ubica enteramente en uno de los semiplanos definidos que define la recta. Por último, la recta tangente a una circunferencia es la que, *localmente* –en las inmediaciones de P–, más se asemeja a ella.

Para generalizar la definición de recta tangente a una curva en general, no podemos usar el concepto de radio; pero podríamos apelar a la propiedad, ¿cuál de las rectas que cortan a la gráfica de una función en un punto, se parece más a la gráfica, localmente?. Consideremos el gráfico de la Figura.

Para generalizar la definición de recta tangente a una curva en general, no podemos usar el concepto de radio; pero podríamos apelar a la propiedad, ¿cuál de las rectas que cortan a la gráfica de una función en un punto, se parece más a la gráfica, localmente?. Consideremos el gráfico de la Figura.



Para generalizar la definición de recta tangente a una curva en general, no podemos usar el concepto de radio; pero podríamos apelar a la propiedad, ¿cuál de las rectas que cortan a la gráfica de una función en un punto, se parece más a la gráfica, localmente?. Consideremos el gráfico de la Figura.

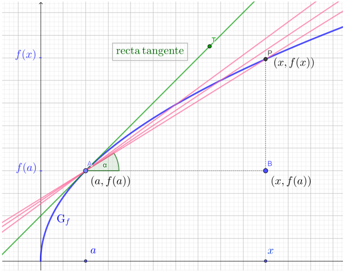


Fijemos A sobre la curva y consideremos $P \neq A$. La recta AP es secante a la curva y su pendiente es la tangente de $\widehat{\alpha} = B\widehat{A}P$,

$$\text{pendiente de } AP \;=\; \tan(B\widehat{A}P) \;=\; \frac{f(x)-f(a)}{x-a}.$$

Si P se acerca a A sobre la curva, la recta AP tiende a una posición límite, que es la recta tangente a la curva en el punto A.

Para generalizar la definición de recta tangente a una curva en general, no podemos usar el concepto de radio; pero podríamos apelar a la propiedad, ¿cuál de las rectas que cortan a la gráfica de una función en un punto, se parece más a la gráfica, localmente?. Consideremos el gráfico de la Figura.



Fijemos A sobre la curva y consideremos $P \neq A$. La recta AP es secante a la curva y su pendiente es la tangente de $\widehat{\alpha} = B\widehat{A}P$,

$$\text{pendiente de } AP \;=\; \tan(B\widehat{A}P) \;=\; \frac{f(x)-f(a)}{x-a}.$$

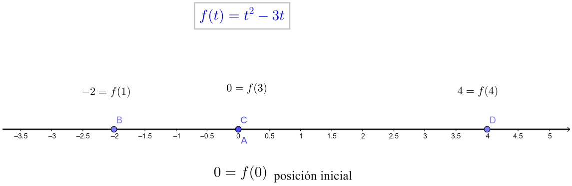
Si P se acerca a A sobre la curva, la recta AP tiende a una posición límite, que es la recta tangente a la curva en el punto A. La pendiente de esta recta "límite" es

$$\text{pendiente de } AT \;=\; \tan(B\widehat{A}T) \;=\; \lim_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}.$$

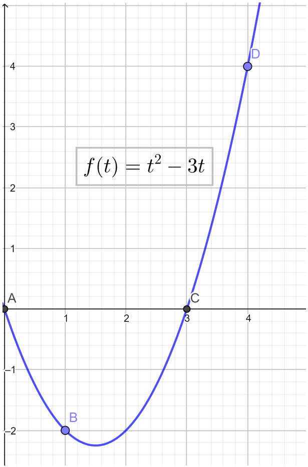
Motivación Física: Velocidad Instantánea

Consideremos una partícula P que se mueve sobre el eje x (movimiento rectilíneo), y que en cada instante se encuentra en una posición $x = f(t)$. A $f(t)$ se la llama ley de movimiento de la partícula.

Por ejemplo, para la ley de movimiento $f(t) = t^2 - 3t$, en $t = 0$, $f(0) = 0$ nos dice que la partícula se encuentra en el origen, en $t = 1$, $f(1) = -2$, que se encuentra 2 unidades a la izquierda del origen, en $t = 3$, $f(3) = 0$, la partícula se encuentra nuevamente en el origen y en $t = 4$, $f(4) = 4$, está 4 unidades a la derecha.

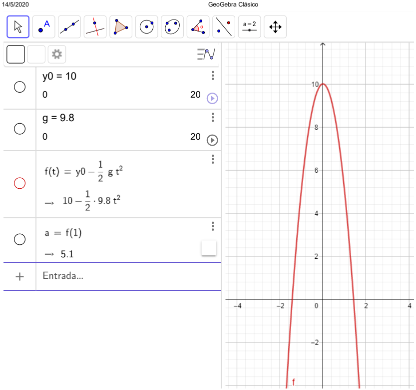


Observemos en este caso que, aunque el móvil se desplaza sobre una recta, si se quiere hacer el gráfico de la ley de movimiento, se obtiene una parábola.

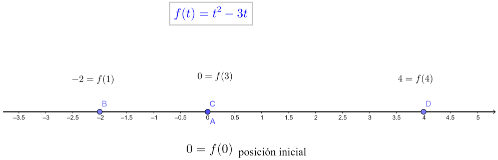


Lo mismo pasa, por ejemplo, con la caida libre, desde el estado de reposo, de un cuerpo en un medio sin roce. La ecuación correspondiente (usando la variable y para notar “verticalidad”) es:

$$y = f(t) = y_0 - \frac{1}{2} g t^2.$$

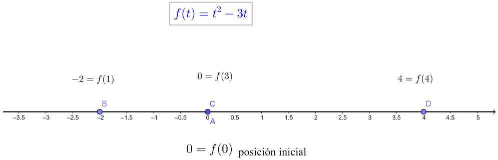


Volviendo al ejemplo anterior, la partícula pasa de la posición C en $f(3)$ a la posición D en $f(4)$, luego de $4-3=1$ segundo.



Así, el cociente $v_m = \dfrac{f(4)-f(3)}{4-3}$ representa la velocidad media del móvil en el intervalo $[3,4]$.

Volviendo al ejemplo anterior, la partícula pasa de la posición C en $f(3)$ a la posición D en $f(4)$, luego de $4-3=1$ segundo.



Así, el cociente $\quad v_m = \dfrac{f(4)-f(3)}{4-3} \quad$ representa la velocidad media del móvil en el intervalo $[3,4]$.

Si quisiéramos tener una idea de la velocidad en un instante determinado, por ejemplo, para $t=3$, podemos considerar intervalos de tiempo cada vez más pequeños que contengan al punto $t=3$.

Se define así, la velocidad instantánea en el tiempo $t=a$, como el límite

$$v(a) = \lim_{t \to a} \frac{f(t)-f(a)}{t-a}.$$

4.2 Definición de Derivada

Definición (Derivada)

Sea f una función definida en un intervalo abierto y a un punto cualquiera de dicho intervalo. Se dice que la función f tiene derivada en el punto a si y sólo existe el límite

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}.$$

4.2 Definición de Derivada

Definición (Derivada)

Sea f una función definida en un intervalo abierto y a un punto cualquiera de dicho intervalo. Se dice que la función f tiene derivada en el punto a si y sólo existe el límite

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}.$$

De manera alternativa, proponiendo el cambio de variable $h = x - a$, f es derivable en el punto a, si y solamente si existe el límite

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}.$$

4.2 Definición de Derivada

Definición (Derivada)

Sea f una función definida en un intervalo abierto y a un punto cualquiera de dicho intervalo. Se dice que la función f tiene derivada en el punto a si y sólo existe el límite

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}.$$

De manera alternativa, proponiendo el cambio de variable $h = x - a$, f es derivable en el punto a, si y solamente si existe el límite

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}.$$

Llamamos cociente incremental a cualquiera de las expresiones

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a} \quad \text{o} \quad \frac{f(a+h) - f(a)}{h},$$

4.2 Definición de Derivada

DEFINICIÓN (DERIVADA)

Sea f una función definida en un intervalo abierto y a un punto cualquiera de dicho intervalo. Se dice que la función f tiene derivada en el punto a si y sólo existe el límite

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}.$$

De manera alternativa, proponiendo el cambio de variable $h = x - a$, f es derivable en el punto a, si y solamente si existe el límite

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}.$$

Llamamos cociente incremental a cualquiera de las expresiones

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a} \quad \text{o} \quad \frac{f(a+h) - f(a)}{h},$$

y al límite, si existe, lo denominamos derivada de f en a y notamos $f'(a)$.

EJEMPLO

1. Sea la función $f(x) = 2$ (función constante). Veamos si f es derivable en el punto $a = 1$. Por definición, planteamos el límite del cociente incremental

$$\lim_{x\to 1} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim_{x\to 1} \frac{2-2}{x-1}$$
$$= \lim_{x\to 1} \frac{0}{x-1} \underbrace{=}_{CLL} \lim_{x\to 1} 0 = 0.$$

Entonces f es derivable en $a = 1$ y la derivada de f en 1 vale $f'(1) = 0$.

Ejemplo

2. Para la función $f(x) = 5x + 1$, analicemos la derivabilidad de f en el punto $a = -1$. Nuevamente, calculamos el límite del cociente incremental

$$\lim_{x \to -1} \frac{f(x) - f(-1)}{x - (-1)} = \lim_{x \to -1} \frac{(5x+1) - (-4)}{x+1} =$$

$$= \lim_{x \to -1} \frac{5x+5}{x+1} = \lim_{x \to -1} \frac{5(x+1)}{x+1} \underbrace{=}_{CLL} \lim_{x \to -1} 5 = 5,$$

luego f es derivable en $a = -1$ y la derivada de f en -1 vale $f'(-1) = 5$.

Ejemplo

3. Veamos la derivabilidad de la función $h(x) = \frac{1}{4}x^2 + 1$ en el punto $a = 1$, planteamos el límite del cociente incremental

$$\lim_{x \to 1} \frac{h(x) - h(1)}{x - 1} = \lim_{x \to 1} \frac{\left(\frac{1}{4}x^2 + 1\right) - \frac{5}{4}}{x - 1} = \lim_{x \to 1} \frac{\frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{4}}{x - 1} =$$

$$= \lim_{x \to 1} \frac{\frac{1}{4}(x^2 - 1)}{x - 1} = \lim_{x \to 1} \frac{\frac{1}{4}(x - 1)(x + 1)}{x - 1} \underbrace{=}_{CLL} \lim_{x \to 1} \frac{1}{4}(x + 1) = \frac{1}{2},$$

y entonces h es derivable en $a = 1$ y la derivada de h en 1 vale $h'(1) = \frac{1}{2}$.

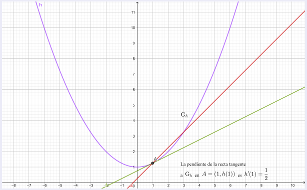
EJEMPLO

3. Veamos la derivabilidad de la función $h(x) = \frac{1}{4}x^2 + 1$ en el punto $a = 1$, planteamos el límite del cociente incremental

$$\lim_{x \to 1} \frac{h(x) - h(1)}{x - 1} = \lim_{x \to 1} \frac{\left(\frac{1}{4}x^2 + 1\right) - \frac{5}{4}}{x - 1} = \lim_{x \to 1} \frac{\frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{4}}{x - 1} =$$

$$= \lim_{x \to 1} \frac{\frac{1}{4}(x^2 - 1)}{x - 1} = \lim_{x \to 1} \frac{\frac{1}{4}(x - 1)(x + 1)}{x - 1} \underbrace{=}_{CLL} \lim_{x \to 1} \frac{1}{4}(x + 1) = \frac{1}{2},$$

y entonces h es derivable en $a = 1$ y la derivada de h en 1 vale $h'(1) = \frac{1}{2}$.



También graficamos una recta secante a la G_h en los puntos $(1, h(1))$ y $(3, h(3))$.

Ejemplo

4. La derivada de la función $g(x) = \frac{1}{2}x^3$ en el punto $a = 2$, si existe

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 2} \frac{g(x)-g(2)}{x-2} &= \lim_{x\to 2} \frac{\frac{1}{2}x^3-4}{x-2} = \lim_{x\to 2} \frac{\frac{1}{2}(x^3-8)}{x-2} \\ &= \lim_{x\to 2} \frac{1}{2}\frac{(x-2)(x^2+2x+4)}{x-2} \underbrace{=}_{CLL} \lim_{x\to 2} \frac{1}{2}(x^2+2x+4) = 6,\end{aligned}$$

luego podemos afirmar que g es derivable en 2 y vale $g'(2) = 6$.

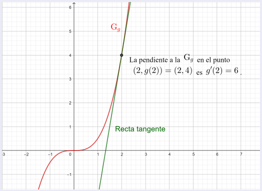
EJEMPLO

4. La derivada de la función $g(x) = \frac{1}{2}x^3$ en el punto $a = 2$, si existe

$$\lim_{x\to 2} \frac{g(x)-g(2)}{x-2} = \lim_{x\to 2} \frac{\frac{1}{2}x^3 - 4}{x-2} = \lim_{x\to 2} \frac{\frac{1}{2}(x^3-8)}{x-2}$$

$$= \lim_{x\to 2} \frac{1}{2}\frac{(x-2)(x^2+2x+4)}{x-2} \underbrace{=}_{CLL} \lim_{x\to 2} \frac{1}{2}(x^2+2x+4) = 6,$$

luego podemos afirmar que g es derivable en 2 y vale $g'(2) = 6$.



Ejemplo

5. Sea $h(x) = |x|$, consideremos el punto $a = 0$, planteamos el límite del cociente incremental en 0,

$$\lim_{x \to 0} \frac{h(x) - h(0)}{x - 0} = \lim_{x \to 0} \frac{|x| - |0|}{x - 0} = \lim_{x \to 0} \frac{|x|}{x}$$

pero este límite no existe. Luego $|x|$ no es derivable en $a = 0$.

EJEMPLO

5. Sea $h(x) = |x|$, consideremos el punto $a = 0$, planteamos el límite del cociente incremental en 0,

$$\lim_{x \to 0} \frac{h(x) - h(0)}{x - 0} = \lim_{x \to 0} \frac{|x| - |0|}{x - 0} = \lim_{x \to 0} \frac{|x|}{x}$$

pero este límite no existe. Luego $|x|$ no es derivable en $a = 0$. Sin embargo, sí es derivable en $a \neq 0$.

Ejemplo

5. Sea $h(x)=|x|$, consideremos el punto $a=0$, planteamos el límite del cociente incremental en 0,

$$\lim_{x\to 0}\frac{h(x)-h(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0}\frac{|x|-|0|}{x-0}=\lim_{x\to 0}\frac{|x|}{x}$$

pero este límite no existe. Luego $|x|$ no es derivable en $a=0$. Sin embargo, sí es derivable en $a\neq 0$. En efecto,

• Si $a>0$, existe un entorno reducido de a donde todos los x de ese entorno son positivos,

$$\lim_{x\to a}\frac{h(x)-h(a)}{x-a}=\lim_{x\to a}\frac{|x|-|a|}{x-a}=\lim_{x\to a}\frac{x-a}{x-a}=1$$

resulta h derivable en $a>0$ y vale $h'(a)=1$.

Ejemplo

5. Sea $h(x) = |x|$, consideremos el punto $a = 0$, planteamos el límite del cociente incremental en 0,

$$\lim_{x\to 0} \frac{h(x)-h(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0} \frac{|x|-|0|}{x-0} = \lim_{x\to 0} \frac{|x|}{x}$$

pero este límite no existe. Luego $|x|$ no es derivable en $a = 0$. Sin embargo, sí es derivable en $a \neq 0$. En efecto,

• Si $a > 0$, existe un entorno reducido de a donde todos los x de ese entorno son positivos,

$$\lim_{x\to a} \frac{h(x)-h(a)}{x-a} = \lim_{x\to a} \frac{|x|-|a|}{x-a} = \lim_{x\to a} \frac{x-a}{x-a} = 1$$

resulta h derivable en $a > 0$ y vale $h'(a) = 1$.

• Si $a < 0$, existe un entorno reducido de a donde todos los x de ese entorno son negativos,

$$\lim_{x\to a} \frac{h(x)-h(a)}{x-a} = \lim_{x\to a} \frac{|x|-|a|}{x-a} = \lim_{x\to a} \frac{-x-(-a)}{x-a} = -1$$

así, h es derivable en $a < 0$ y se tiene $h'(a) = -1$.

EJEMPLO

5. Sea $h(x) = |x|$, consideremos el punto $a = 0$, planteamos el límite del cociente incremental en 0,

$$\lim_{x\to 0} \frac{h(x)-h(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0} \frac{|x|-|0|}{x-0} = \lim_{x\to 0} \frac{|x|}{x}$$

pero este límite no existe. Luego $|x|$ no es derivable en $a = 0$. Sin embargo, sí es derivable en $a \neq 0$. En efecto,

• Si $a > 0$, existe un entorno reducido de a donde todos los x de ese entorno son positivos,

$$\lim_{x\to a} \frac{h(x)-h(a)}{x-a} = \lim_{x\to a} \frac{|x|-|a|}{x-a} = \lim_{x\to a} \frac{x-a}{x-a} = 1$$

resulta h derivable en $a > 0$ y vale $h'(a) = 1$.

• Si $a < 0$, existe un entorno reducido de a donde todos los x de ese entorno son negativos,

$$\lim_{x\to a} \frac{h(x)-h(a)}{x-a} = \lim_{x\to a} \frac{|x|-|a|}{x-a} = \lim_{x\to a} \frac{-x-(-a)}{x-a} = -1$$

así, h es derivable en $a < 0$ y se tiene $h'(a) = -1$.
Concluimos, que $|x|$ es derivable en $\mathbb{R} - \{0\}$, siendo $h'(a) = -1$ si $a < 0$ y $h'(a) = 1$ si $a > 0$.

NOTA

Algunas notaciones para referir a la derivada de la función f en un punto a, son

$$f'(a), \quad Df(a), \quad \frac{df}{dx}(a), \quad \frac{dy}{dx}(a), \text{ donde } y = f(x).$$

Cuando la variable independiente se interpreta como temporal, esto es, si una función $x = x(t)$ representa el valor de una cantidad al transcurrir la variable temporal t, suele notarse a la derivada de la función x en el punto t_0 como

$$\dot{x}(t_0).$$

Nota

Algunas notaciones para referir a la derivada de la función f en un punto a, son

$$f'(a), \quad Df(a), \quad \frac{df}{dx}(a), \quad \frac{dy}{dx}(a), \text{ donde } y = f(x).$$

Cuando la variable independiente se interpreta como temporal, esto es, si una función $x = x(t)$ representa el valor de una cantidad al transcurrir la variable temporal t, suele notarse a la derivada de la función x en el punto t_0 como

$$\dot{x}(t_0).$$

Ejemplo

Si $x(t)$ representa la posición de un móvil en el tiempo t, $\dot{x}(t)$ representa la velocidad del móvil en el tiempo t. También indicamos $\dot{x}(t) = v(t)$.

Función Derivada

Para los valores $x \in \mathrm{Dom}(f)$ donde f es derivable, existe el valor $f'(x)$ (derivada de f en x), para esos puntos es posible definir una función f' llamada función derivada (o función derivada primera) de f.

Función Derivada

Para los valores $x \in \mathrm{Dom}(f)$ donde f es derivable, existe el valor $f'(x)$ (derivada de f en x), para esos puntos es posible definir una función f' llamada función derivada (o función derivada primera) de f.

El dominio de f' está formado por todos los puntos x del dominio de f, en los cuales existe $f'(x)$, es decir,

$$\mathrm{Dom}(f') = \{x \in \mathrm{Dom}(f) : f \text{ es derivable en } x\} \subseteq \mathrm{Dom}(f).$$

Función Derivada

Para los valores $x \in \text{Dom}(f)$ donde f es derivable, existe el valor $f'(x)$ (derivada de f en x), para esos puntos es posible definir una función f' llamada función derivada (o función derivada primera) de f.

El dominio de f' está formado por todos los puntos x del dominio de f, en los cuales existe $f'(x)$, es decir,

$$\text{Dom}(f') = \{x \in \text{Dom}(f) : f \text{ es derivable en } x\} \subseteq \text{Dom}(f).$$

DEFINICIÓN

En el conjunto $\{x \in \text{Dom}(f) : f \text{ es derivable en } x\}$, definimos, la función f' derivada de f (o función derivada primera de f) como

$$\begin{aligned} f' : \text{Dom}(f') &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longrightarrow f'(x) \end{aligned}$$

Ejemplo

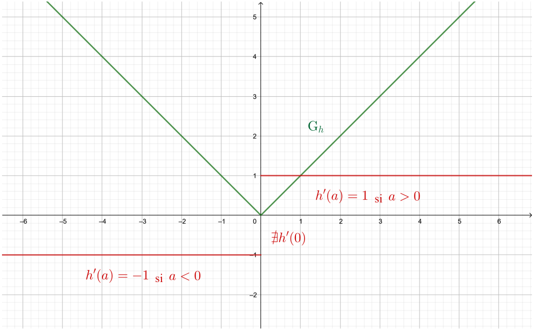
Por ejemplo la función $h(x) = |x|$ cuyo $\mathrm{Dom}(h) = \mathbb{R}$ es derivable en $\mathbb{R} - \{0\}$, luego para los $x \neq 0$ podemos definir la función h' derivada de la función h, con dominio $\mathrm{Dom}(h') = \mathbb{R} - \{0\}$ como

$$h'(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x > 0 \\ -1 & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

Ejemplo

Por ejemplo la función $h(x) = |x|$ cuyo $\mathrm{Dom}(h) = \mathbb{R}$ es derivable en $\mathbb{R} - \{0\}$, luego para los $x \neq 0$ podemos definir la función h' derivada de la función h, con dominio $\mathrm{Dom}(h') = \mathbb{R} - \{0\}$ como

$$h'(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x > 0 \\ -1 & \text{si } x < 0 \end{cases}$$



Derivadas Sucesivas

Ahora bien, como f' es una función, podemos pensar en los puntos x en donde f' sea derivable, es decir, para los valores $x \in \mathrm{Dom}(f')$ donde f' es derivable, existe el valor $(f')'(x)$, para esos puntos es posible definir una función $(f')'$ llamada función derivada de f', o derivada segunda de f, que notamos $(f')' = f''$.

Derivadas Sucesivas

Ahora bien, como f' es una función, podemos pensar en los puntos x en donde f' sea derivable, es decir, para los valores $x \in \mathrm{Dom}(f')$ donde f' es derivable, existe el valor $(f')'(x)$, para esos puntos es posible definir una función $(f')'$ llamada función derivada de f', o derivada segunda de f, que notamos $(f')' = f''$.

El dominio de $(f')' = f''$ es

$$\mathrm{Dom}((f')') = \mathrm{Dom}(f'') = \{x \in \mathrm{Dom}(f') : f' \text{es derivable en } x\} \subseteq \mathrm{Dom}(f').$$

Derivadas Sucesivas

Ahora bien, como f' es una función, podemos pensar en los puntos x en donde f' sea derivable, es decir, para los valores $x \in \mathrm{Dom}(f')$ donde f' es derivable, existe el valor $(f')'(x)$, para esos puntos es posible definir una función $(f')'$ llamada función derivada de f', o derivada segunda de f, que notamos $(f')' = f''$.

El dominio de $(f')' = f''$ es

$$\mathrm{Dom}((f')') = \mathrm{Dom}(f'') = \{x \in \mathrm{Dom}(f') : f' \text{es derivable en } x\} \subseteq \mathrm{Dom}(f').$$

Definición

En el conjunto $\{x \in \mathrm{Dom}(f') : f' \text{es derivable en } x\}$, definimos la función $(f')' = f''$ derivada de f' (o función derivada segunda de f) como

$$\begin{aligned} f'' : \mathrm{Dom}(f'') &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longrightarrow f''(x) = (f')'(x) \end{aligned}$$

En general,

Definición

Dada la función derivada $(n-1)$-ésima de la función f, se llama derivada n-ésima de la función f (o de derivada de orden n de f) a la función derivada primera de la función $f^{(n-1)}$, y se la nota $f^{(n)} = (f^{(n-1)})'$.

En general,

Definición

Dada la función derivada $(n-1)$-ésima de la función f, se llama derivada n-ésima de la función f (o de derivada de orden n de f) a la función derivada primera de la función $f^{(n-1)}$, y se la nota $f^{(n)} = (f^{(n-1)})'$.

Notación: para las funciones derivadas de orden n,

$$f^{(n)}, \quad D^n f, \quad \frac{d^n f}{dx^n}, \quad \frac{d^n y}{dx^n}, \text{ donde } y = f(x).$$

Por ejemplo, la derivada segunda

$$f^{(2)} = f'' = (f')',$$

la derivada tercera

$$f^{(3)} = f''' = (f'')' = ((f')')'.$$

También se suele indicar a las derivadas de orden superior con números romanos

$$f^{(4)} = f^{IV}.$$