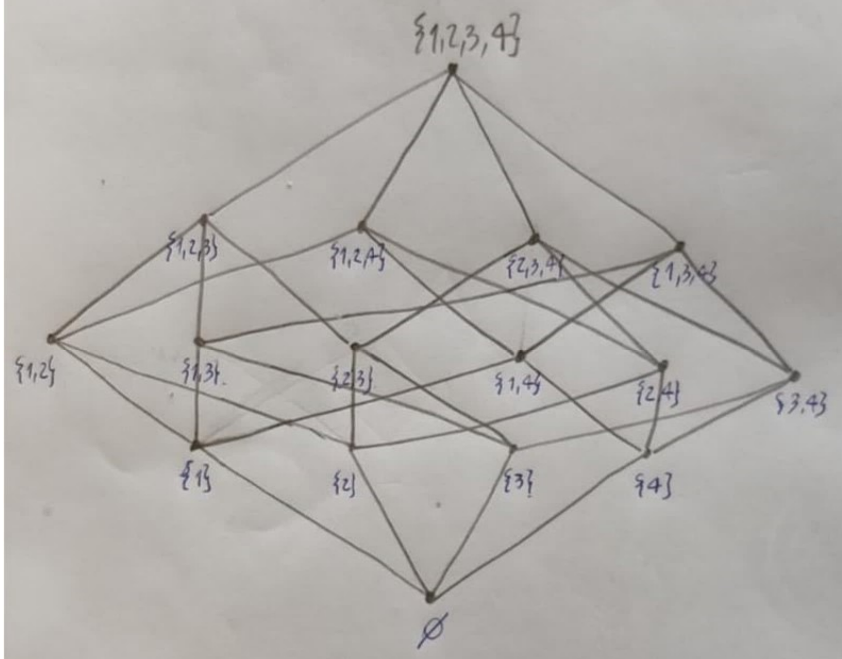
27) $(\mathcal{P}(X), \subseteq)$ ; $X = \{1,2,3,4\}$






28) $A = \{1,2,3,6,9,18\}$ $\quad xRy \iff x|y$ es de orden?

1) $x \in A$, $x = 1 \cdot x \Rightarrow x|x \Rightarrow xRx$ $\therefore$ $R$ reflexiva

2) sean $x, y \in A \,/\, x|y \wedge y|x$. Luego tenemos que existen $k, l \in \mathbb{Z}$ tales que

$$\left.\begin{cases} y = kx \\ x = ly \end{cases}\right] \Rightarrow y = k(ly) = (kl)y$$

Por lo tanto $kl = 1$, entonces $k = \frac{1}{l} \in \mathbb{Z}$. Sabemos que los únicos enteros tales que su inverso también es entero son $1$ o $-1$,

Caso 1: $k = -1$, luego $y = \underbrace{k}_{<0}\underbrace{x}_{>0} < 0$ pero $y \in A$ y por lo tanto $y > 0$. Concluimos que el caso 1 no puede darse

Caso 2: $k = 1 \Rightarrow y = 1 \cdot x = x$ $\therefore$ $R$ antisimétrica

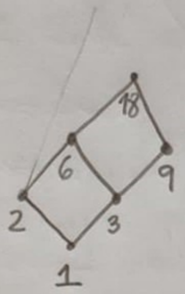
3) sean $x, y, z \in A \,/\, xRy \wedge yRz$, luego existen $k, l \in \mathbb{Z}$ tales que $y = kx$, $z = ly$

Luego $z = l(kx) = (lk)x$ donde $lk \in \mathbb{Z}$

$\therefore$ $xRz$ y resulta $R$ transitiva

Concluimos que $R$ es una relación de orden.

Diagrama de Hasse




29) a) $A = \{1,2,3,4,12\}$

$R = \{(1,1),(2,2),(3,3),(4,4),(12,12),(1,2),(1,3),(1,4),$
$(1,12),(2,4),(2,12),(3,12),(4,12)\}$

31) (para el ej. 28)

Minimales : 1
Maximales : 18
Minimos : 1
Máximos : 18



36) Sea $(X,R)$ conj. parc. ordenado y $B \subseteq X$

a) $R_B := (B \times B) \cap R$ define un orden parcial en $B$?

1) sea $b \in B$, luego $b \in X$ y como $R$ es reflexiva entonces $bRb$. Por lo tanto $(b,b) \in (B \times B) \cap R$ y resulta $b R_B b$ $\therefore$ $R_B$ reflexiva

2) sup. que $b, c \in B$ tales que $b R_B c$ y $c R_B b$ entonces $bRc$ y $cRb$ (pues $R_B \subseteq R$) y siendo $R$ antisimétrica, $b = c$
$\therefore$ $R_B$ antisimétrica

3) sup. que $b R_B c$ y $c R_B d$ con $b,c,d \in B$. luego $bRc$ y $cRd$ y como $R$ es transitiva, $bRd$. siendo $b, d \in B$ resulta $b R_B d$ $\therefore$ $R_B$ transitiva

Concluimos que $R_B$ es una relación de orden

36) b) Sup que $(X,R)$ totalmente ordenado.
Sean $b, c \in B$ luego $b, c \in X$ y como $R$ es de orden total, $b R c$ o $c R b$.
Siendo $b, c \in B$ tenemos que $b R_B c$ o $c R_B b$
$\therefore$ $R_B$ es de orden total.

c) si $(\mathcal{P}(X), \subseteq)$ con $X = \{1,2\}$, sabemos que no es totalmente ordenado, pero si $B = \{\{1\}\} \subseteq \mathcal{P}(X)$ se puede ver (ejercicio) que $(B, \subseteq_B)$ es totalmente ordenado.

37) a) Para las tres relaciones $(\mathbb{R}, \leq)$, $(\mathbb{Q}, \leq)$, $(\mathbb{N}, \leq)$, resulta que

$$\sup\{x,y\} = \max\{x,y\}$$
$$\inf\{x,y\} = \min\{x,y\} \quad \text{si } x,y \in \mathbb{R}, \mathbb{Q} \text{ o } \mathbb{N}.$$

resultan entonces las tres un retículo

b) si $X \neq \emptyset$, $(\mathcal{P}(X), \subseteq)$ es un retículo?
si $A, B \in \mathcal{P}(X)$, resulta que

$$\sup\{A,B\} = A \cup B \in \mathcal{P}(X)$$
$$\inf\{A,B\} = A \cap B \in \mathcal{P}(X)$$

resulta entonces un retículo.



38) a) Si $x_0$ es maximal para $(X_1, R_1)$ y $y_0$ " " " $(X_2, R_2)$, será $(x_0, y_0)$ maximal para $(X_1 \times X_2, R)$ ?

Verdadero Demostración:
por el absurdo suponemos que $(x_0, y_0)$ no es maximal, luego existe $(x,y) \in X_1 \times X_2$ tal que $(x_0, y_0) R (x,y)$.
Entonces $x_0 R_1 x$ y $y_0 R_2 y$ donde $x_0$ es maximal para $(X_1, R_1)$ y $y_0$ es maximal para $(X_2, R_2)$

ABSURDO Luego $(x_0, y_0)$ es maximal para $(X_1 \times X_2, R)$.
(analogamente se prueba para minimal)

c) Si $(X_1, R_1)$ y $(X_2, R_2)$ son totalmente ordenados entonces $(X_1 \times X_2, R)$ es totalmente ordenado

FALSO contraejemplo: $(\mathbb{R}, \leq)$, $(\mathbb{R}, \leq)$ son totalmente ordenados pero $(\mathbb{R} \times \mathbb{R}, R)$ no lo es, en efecto $(1,0)$ y $(0,1) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ no son comparables (verificarlo) según la relación $R$.

39) a) $(\mathbb{N}, \leq)$ está bien ordenado?

Sea $B \subseteq \mathbb{N}$ y $R_B = (B \times B) \cap \leq$.

sea b el mínimo valor según el orden usual del subconjunto B. Dicho b es tal que $b \leq c$ para todo $c \in B$. Por lo tanto $b R_B c$ para todo $c \in B$ y resulta entonces que $(B, R_B)$ tiene mínimo.

c) $(\mathbb{Q}, \leq)$ está bien ordenado?

Sea $B = \{q \in \mathbb{Q} \,/\, q > 0 \wedge q^2 > 2\}$.

Verificar que $(B, R_B)$ no tiene mínimo (donde $R_B = (B \times B) \cap \leq$).

Luego $(\mathbb{Q}, \leq)$ no está bien ordenado.