

Unidad 5 – Introducción al Cálculo Integral

1 Primitiva de una función

Unidad 5 – Introducción al Cálculo Integral

1 Primitiva de una función

Integración y derivación

Aunque el cálculo diferencial y el cálculo integral surgieron de problemas en apariencia no relacionados, el de la tangente y el del área, Isaac Barrow (1630-1677) descubrió que estos dos problemas estaban íntimamente relacionados. De hecho, se dió cuenta que la derivación y la integración son, de alguna forma, procesos inversos. Newton y Leibnitz explotaron esta relación y lograron transformar el cálculo en un método matemático sistemático.

1.1 Primitivas de funciones elementales

Unidad 5 – Introducción al Cálculo Integral

1 Primitiva de una función

Integración y derivación

Aunque el cálculo diferencial y el cálculo integral surgieron de problemas en apariencia no relacionados, el de la tangente y el del área, Isaac Barrow (1630-1677) descubrió que estos dos problemas estaban íntimamente relacionados. De hecho, se dió cuenta que la derivación y la integración son, de alguna forma, procesos inversos. Newton y Leibnitz explotaron esta relación y lograron transformar el cálculo en un método matemático sistemático.

1.1 Primitivas de funciones elementales

Definición. Decimos que F es una *primitiva* de f sobre el conjunto I si $F'(x) = f(x) \quad \forall x \in I$. También suele decirse que F es una *antiderivada* de f en I .

Unidad 5 – Introducción al Cálculo Integral

1 Primitiva de una función

1.1 Primitivas de funciones elementales

Definición. Decimos que F es una *primitiva* de f sobre el conjunto I si $F'(x) = f(x) \quad \forall x \in I$. También suele decirse que F es una *antiderivada* de f en I .

Ejemplo.

1) Si $f(x) = 1$ entonces $F(x) = x$ es una primitiva de $f(x)$

pues $F'(x) = (x)' = 1 = f(x)$.

Unidad 5 – Introducción al Cálculo Integral

1 Primitiva de una función

1.1 Primitivas de funciones elementales

Definición. Decimos que F es una *primitiva* de f sobre el conjunto I si $F'(x) = f(x) \quad \forall x \in I$. También suele decirse que F es una *antiderivada* de f en I .

Ejemplo.

1) Si $f(x) = 1$ entonces $F(x) = x$ es una primitiva de $f(x)$

$$\text{pues } F'(x) = (x)' = 1 = f(x).$$

2) Si $f(x) = 2x$ entonces $F(x) = x^2$ es una primitiva de $f(x)$

$$\text{pues } F'(x) = (x^2)' = 2x = f(x)$$

Unidad 5 – Introducción al Cálculo Integral

1 Primitiva de una función

1.1 Primitivas de funciones elementales

Definición. Decimos que F es una *primitiva* de f sobre el conjunto I si $F'(x) = f(x) \quad \forall x \in I$. También suele decirse que F es una *antiderivada* de f en I .

Ejemplo.

1) Si $f(x) = 1$ entonces $F(x) = x$ es una primitiva de $f(x)$

$$\text{pues } F'(x) = (x)' = 1 = f(x).$$

2) Si $f(x) = 2x$ entonces $F(x) = x^2$ es una primitiva de $f(x)$

$$\text{pues } F'(x) = (x^2)' = 2x = f(x)$$

3) Si $f(x) = \cos x$ entonces $F(x) = \sin x$ es una primitiva de $f(x)$

$$\text{pues } F'(x) = (\sin x)' = \cos x = f(x)$$

Unidad 5 – Introducción al Cálculo Integral

1 Primitiva de una función

1.1 Primitivas de funciones elementales

Definición. Decimos que F es una *primitiva* de f sobre el conjunto I si $F'(x) = f(x) \quad \forall x \in I$. También suele decirse que F es una *antiderivada* de f en I .

Observación.

- Si F es una primitiva de f y si c es una constante cualquiera, entonces $F + c$ también es una primitiva de f . En efecto $(F + c)' = F' + c' = f + 0 = f$.

Unidad 5 – Introducción al Cálculo Integral

1 Primitiva de una función

1.1 Primitivas de funciones elementales

Definición. Decimos que F es una *primitiva* de f sobre el conjunto I si $F'(x) = f(x) \quad \forall x \in I$. También suele decirse que F es una *antiderivada* de f en I .

Observación.

- Si F es una primitiva de f y si c es una constante cualquiera, entonces $F + c$ también es una primitiva de f . En efecto $(F + c)' = F' + c' = f + 0 = f$.
- Si F y G son dos primitivas cualesquiera de f , entonces dichas funciones difieren en una constante, es decir, $G - F = c$ o bien $G(x) = F(x) + c \quad \forall x \in I$.

Unidad 5 – Introducción al Cálculo Integral

1 Primitiva de una función

1.1 Primitivas de funciones elementales

Definición. Decimos que F es una *primitiva* de f sobre el conjunto I si $F'(x) = f(x) \quad \forall x \in I$. También suele decirse que F es una *antiderivada* de f en I .

Observación.

- Si F es una primitiva de f y si c es una constante cualquiera, entonces $F + c$ también es una primitiva de f . En efecto $(F + c)' = F' + c' = f + 0 = f$.
- Si F y G son dos primitivas cualesquiera de f , entonces dichas funciones difieren en una constante, es decir, $G - F = c$ o bien $G(x) = F(x) + c \quad \forall x \in I$.
- Por lo tanto, $F(x) + c$ (donde F es una primitiva particular de f y c es una constante arbitraria) describe la *familia de todas las primitivas* de f sobre I .

Definición. Llamamos *integral indefinida* de una función f al conjunto de todas las primitivas de f , y la notamos $\int f(x)dx$. Luego, si F es una primitiva de f

$$\int f(x)dx = F(x) + c$$

Definición. Llamamos *integral indefinida* de una función f al conjunto de todas las primitivas de f , y la notamos $\int f(x)dx$. Luego, si F es una primitiva de f

$$\int f(x)dx = F(x) + c$$

Es decir, $\int f(x)dx$ nos da una familia de funciones, todas ellas primitivas de f , que difieren entre sí en una constante.

The diagram illustrates the components of the indefinite integral notation $\int f(x)dx = F(x) + c$ using red curly braces and labels:

- integrando**: Points to the function $f(x)$.
- indica la variable de integración**: Points to the differential dx .
- Primitiva de f** : Points to the function $F(x)$.
- familia de funciones que constituyen la integral indefinida**: Points to the entire right-hand side expression $F(x) + c$.
- símbolo integral**: Points to the integral symbol \int .

Definición. Llamamos *integral indefinida* de una función f al conjunto de todas las primitivas de f , y la notamos $\int f(x)dx$. Luego, si F es una primitiva de f

$$\int f(x)dx = F(x) + c$$

Es decir, $\int f(x)dx$ nos da una familia de funciones, todas ellas primitivas de f , que difieren entre sí en una constante.

The diagram illustrates the components of the indefinite integral formula $\int f(x)dx = F(x) + c$. Red curly braces and labels are used to identify each part:

- integrando**: A brace above $f(x)$ identifies it as the integrand.
- símbolo integral**: A brace below the integral symbol \int identifies it as the integral symbol.
- indica la variable de integración**: A brace below dx identifies it as the variable of integration.
- Primitiva de f** : A brace above $F(x)$ identifies it as the primitive of f .
- familia de funciones que constituyen la integral indefinida**: A brace below $F(x) + c$ identifies the entire right-hand side as the family of functions that constitute the indefinite integral.

Ejemplo.

1) Si $f(x) = 1$ entonces $F(x) = x$ es una primitiva de $f(x)$ pues $F'(x) = (x)' = 1 = f(x)$, entonces la integral de f será,

$$\int 1 dx = x + c$$

Definición. Llamamos *integral indefinida* de una función f al conjunto de todas las primitivas de f , y la notamos $\int f(x)dx$. Luego, si F es una primitiva de f

$$\int f(x)dx = F(x) + c$$

Es decir, $\int f(x)dx$ nos da una familia de funciones, todas ellas primitivas de f , que difieren entre sí en una constante.

The diagram illustrates the components of the indefinite integral notation $\int f(x)dx = F(x) + c$. Red curly braces and labels are used to identify each part:

- integrando**: A brace above $f(x)$ identifies it as the integrand.
- indica la variable de integración**: A brace below dx identifies it as the integration variable.
- Primitiva de f** : A brace above $F(x)$ identifies it as the primitive of f .
- familia de funciones que constituyen la integral indefinida**: A brace below $F(x) + c$ identifies the entire expression as the family of functions that constitute the indefinite integral.
- símbolo integral**: A brace below the integral symbol \int identifies it as the integral symbol.

Ejemplo.

1) Si $f(x) = 1$ entonces $F(x) = x$ es una primitiva de $f(x)$ pues $F'(x) = (x)' = 1 = f(x)$, entonces la integral de f será,

$$\int 1 dx = x + c$$

2) Si $f(x) = 2x$ entonces $F(x) = x^2$ es una primitiva de $f(x)$ pues $F'(x) = (x^2)' = 2x = f(x)$, entonces la integral de f será,

$$\int 2x dx = x^2 + c$$

Definición. Llamamos *integral indefinida* de una función f al conjunto de todas las primitivas de f , y la notamos $\int f(x)dx$. Luego, si F es una primitiva de f

$$\int f(x)dx = F(x) + c$$

Es decir, $\int f(x)dx$ nos da una familia de funciones, todas ellas primitivas de f , que difieren entre sí en una constante.

$$\int \overbrace{f(x)}^{\text{integrando}} \underbrace{dx}_{\text{indica la variable de integración}} = \underbrace{F(x) + c}_{\text{familia de funciones que constituyen la integral indefinida}}$$

símbolo integral

Ejemplo.

1) Si $f(x) = 1$ entonces $F(x) = x$ es una primitiva de $f(x)$ pues $F'(x) = (x)' = 1 = f(x)$, entonces la integral de f será,

$$\int 1 dx = x + c$$

2) Si $f(x) = 2x$ entonces $F(x) = x^2$ es una primitiva de $f(x)$ pues $F'(x) = (x^2)' = 2x = f(x)$, entonces la integral de f será,

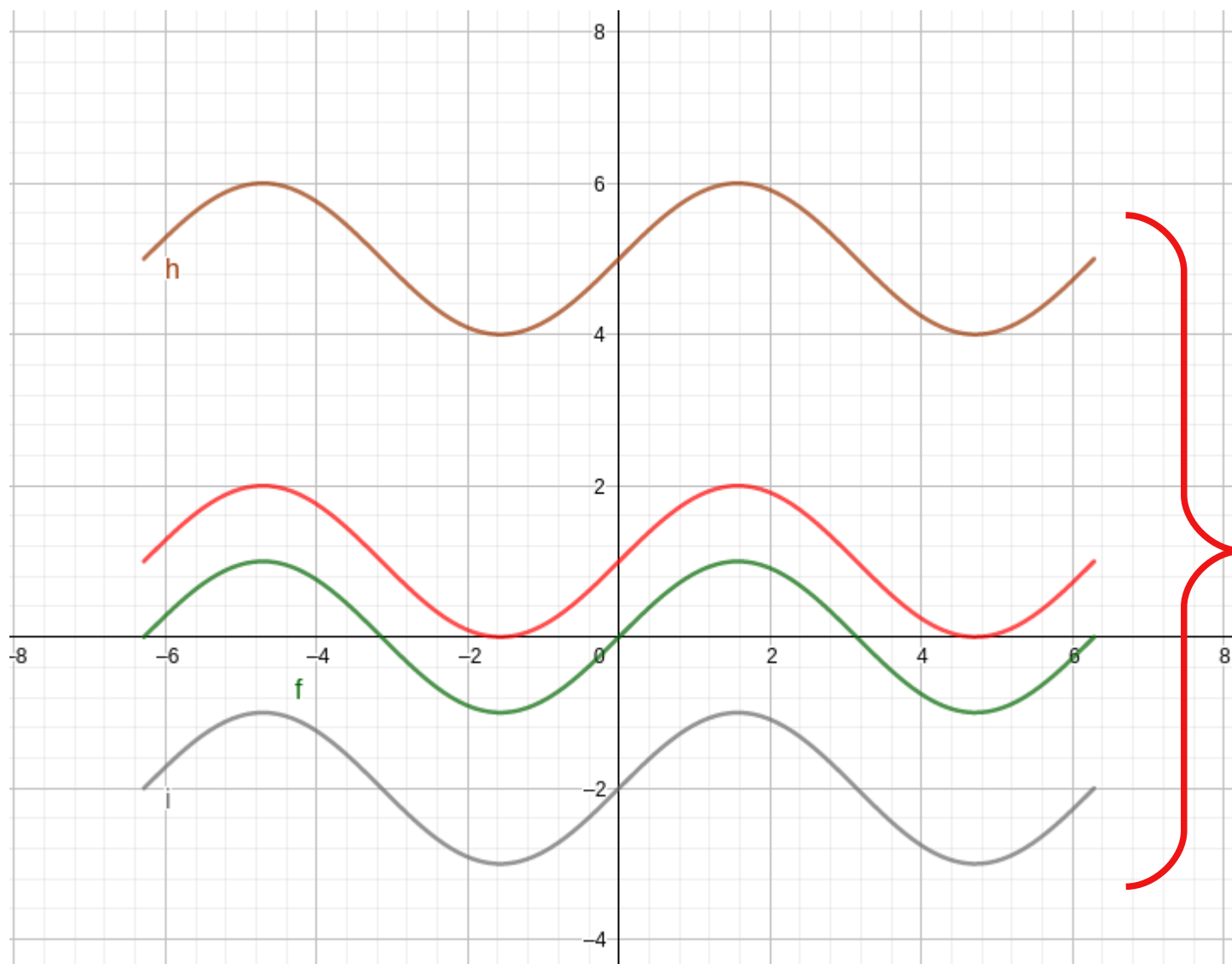
$$\int 2x dx = x^2 + c$$

3) Si $f(x) = \cos x$ entonces $F(x) = \sin x$ es una primitiva de $f(x)$ pues $F'(x) = (\sin x)' = \cos x = f(x)$, entonces la integral de f será,

$$\int \cos x dx = \sin x + c$$

Observación. Las gráficas de las funciones primitivas de una función dada, definida sobre I , son traslaciones verticales una de la otra.

Por ejemplo $\sin x$ y $\sin x + 5$ son primitivas de la función $\cos x$



**Familia de
primitivas
de $\cos(x)$**

De lo expuesto, conociendo las derivadas de algunas funciones elementales, podemos confeccionar una primera tabla de antiderivadas o integrales indefinidas.

Tabla de integrales inmediatas.

$$\int 1dx = x + c$$

$$\int x^{\alpha} dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + c, \text{ si } \alpha \neq -1$$

$$\int \sin x dx = -\cos x + c$$

$$\int \cos x dx = \sin x + c$$

$$\int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \tan x + c$$

$$\int \frac{1}{\sin^2 x} dx = \cotan x + c$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \arcsin x + c$$

$$\int \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \arccos x + c$$

$$\int \frac{1}{1+x^2} dx = \arctan x + c$$

$$\int \frac{1}{x} dx = \ln |x| + c$$

$$\int e^x dx = e^x + c$$

$$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + c$$

De lo expuesto, conociendo las derivadas de algunas funciones elementales, podemos confeccionar una primera tabla de antiderivadas o integrales indefinidas.

Tabla de integrales inmediatas.

$$\int 1dx = x + c$$

$$\int x^{\alpha} dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + c, \text{ si } \alpha \neq -1$$

$$(x)' = 1$$

$$(x^{\alpha+1})' = (\alpha + 1)x^{\alpha} \implies \frac{1}{(\alpha + 1)}(x^{\alpha+1})' = \left(\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha + 1}\right)' = x^{\alpha}$$

$$\int e^x dx = e^x + c$$

$$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + c$$

De lo expuesto, conociendo las derivadas de algunas funciones elementales, podemos confeccionar una primera tabla de antiderivadas o integrales indefinidas.

Tabla de integrales inmediatas.

$$\int 1 dx = x + c$$

$$\int x^{\alpha} dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + c, \text{ si } \alpha \neq -1$$

$$\int \sin x dx = -\cos x + c$$

$$\int \cos x dx = \sin x + c$$

$$(\cos x)' = -\sin x \implies (-\cos x)' = -(-\sin x) = \sin x$$

$$(\sin x)' = \cos x$$

$$\int e^x dx = e^x + c$$

$$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + c$$

De lo expuesto, conociendo las derivadas de algunas funciones elementales, podemos confeccionar una primera tabla de antiderivadas o integrales indefinidas.

Tabla de integrales inmediatas.

$$\int 1dx = x + c$$

$$\int x^{\alpha} dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + c, \text{ si } \alpha \neq -1$$

$$\int \sin x dx = -\cos x + c$$

$$\int \cos x dx = \sin x + c$$

$$\int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \tan x + c$$

$$\int \frac{1}{\sin^2 x} dx = \cotan x + c$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \arcsin x + c$$

$$\int \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \arccos x + c$$

$$\int \frac{1}{1+x^2} dx = \arctan x + c$$

$$\int \frac{1}{x} dx = \ln |x| + c$$

$$\int e^x dx = e^x + c$$

$$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + c$$

De lo expuesto, conociendo las derivadas de algunas funciones elementales, podemos confeccionar una primera tabla de antiderivadas o integrales indefinidas.

Tabla de integrales inmediatas.

$$\ln|x| = \begin{cases} \ln x & x > 0 \\ \ln(-x) & x < 0 \end{cases}$$

$$(\ln|x|)' = \begin{cases} \frac{1}{x} & x > 0 \\ \frac{1}{(-x)}(-1) & x < 0 \end{cases}$$

$$(\ln|x|)' = \frac{1}{x} \quad \forall x \neq 0$$

$$\int x^\alpha dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + c, \quad \text{si } \alpha \neq -1$$

$$\int \cos x dx = \sin x + c$$

$$\int \frac{1}{\sin^2 x} dx = \cotan x + c$$

$$\int \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \arccos x + c$$

$$\int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + c$$

$$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + c$$

De lo expuesto, conociendo las derivadas de algunas funciones elementales, podemos confeccionar una primera tabla de antiderivadas o integrales indefinidas.

Tabla de integrales inmediatas.

$$\int 1dx = x + c$$

$$\int x^{\alpha} dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + c, \text{ si } \alpha \neq -1$$

$$\int \sin x dx = -\cos x + c$$

$$\int \cos x dx = \sin x + c$$

$$\int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \tan x + c$$

$$\int \frac{1}{\sin^2 x} dx = \cotan x + c$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \arcsin x + c$$

$$\int \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \arccos x + c$$

$$\int \frac{1}{1+x^2} dx = \arctan x + c$$

$$\int \frac{1}{x} dx = \ln |x| + c$$

$$\int e^x dx = e^x + c$$

$$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + c$$

De lo expuesto, conociendo las derivadas de algunas funciones elementales, podemos confeccionar una primera tabla de antiderivadas o integrales indefinidas.

Tabla de integrales inmediatas.

$$\int 1 dx = x + c$$

$$\int x^{\alpha} dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + c, \text{ si } \alpha \neq -1$$

$$\int \sin x dx = -\cos x + c$$

$$\int \cos x dx = \sin x + c$$

$$a^x = e^{\ln(a^x)} = e^{x \ln a} \implies (a^x)' = \ln a e^{x \ln a} = \ln a a^x$$
$$\left(\frac{1}{\ln a} a^x \right)' = a^x$$

$$\int e^x dx = e^x + c$$

$$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + c$$

De lo expuesto, conociendo las derivadas de algunas funciones elementales, podemos confeccionar una primera tabla de antiderivadas o integrales indefinidas.

Tabla de integrales inmediatas.

$$\int 1dx = x + c$$

$$\int x^{\alpha} dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + c, \text{ si } \alpha \neq -1$$

$$\int \sin x dx = -\cos x + c$$

$$\int \cos x dx = \sin x + c$$

$$\int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \tan x + c$$

$$\int \frac{1}{\sin^2 x} dx = \cotan x + c$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \arcsin x + c$$

$$\int \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \arccos x + c$$

$$\int \frac{1}{1+x^2} dx = \arctan x + c$$

$$\int \frac{1}{x} dx = \ln |x| + c$$

$$\int e^x dx = e^x + c$$

$$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + c$$

Proposición 1. (*Linealidad*) Si F y G son primitivas de f y g respectivamente, y a es una constante real entonces

a) aF es una primitiva de af , es decir

$$\int af(x) dx = aF(x) + c$$

b) $F + G$ es una primitiva de $f + g$, es decir

$$\int (f(x) + g(x)) dx = F(x) + G(x) + c$$

Proposición 1. (*Linealidad*) Si F y G son primitivas de f y g respectivamente, y a es una constante real entonces

a) aF es una primitiva de af , es decir

$$\int af(x) dx = aF(x) + c$$

b) $F + G$ es una primitiva de $f + g$, es decir

$$\int (f(x) + g(x)) dx = F(x) + G(x) + c$$

Demostración:

a) Como F es una primitiva de f , es $F' = f$, luego $(aF)' = aF' = af$ y entonces aF es una primitiva de af .

Proposición 1. (*Linealidad*) Si F y G son primitivas de f y g respectivamente, y a es una constante real entonces

a) aF es una primitiva de af , es decir

$$\int af(x) dx = aF(x) + c$$

b) $F + G$ es una primitiva de $f + g$, es decir

$$\int (f(x) + g(x)) dx = F(x) + G(x) + c$$

Demostración:

- a) Como F es una primitiva de f , es $F' = f$, luego $(aF)' = aF' = af$ y entonces aF es una primitiva de af .
- b) Por ser F es una primitiva de f y G una primitiva de g , tenemos que $(F + G)' = F' + G' = f + g$, luego $F + G$ es una primitiva de $f + g$. \square

Proposición 1. (Linealidad) Si F y G son primitivas de f y g respectivamente, y a es una constante real entonces

a) aF es una primitiva de af , es decir

$$\int af(x) dx = aF(x) + c$$

b) $F + G$ es una primitiva de $f + g$, es decir

$$\int (f(x) + g(x)) dx = F(x) + G(x) + c$$

Demostración:

a) Como F es una primitiva de f , es $F' = f$, luego $(aF)' = aF' = af$ y entonces aF es una primitiva de af .

b) Por ser F es una primitiva de f y G una primitiva de g , tenemos que $(F + G)' = F' + G' = f + g$, luego $F + G$ es una primitiva de $f + g$. \square

En general es válido:

$$\int (af(x) + bg(x)) dx = a \int f(x) dx + b \int g(x) dx$$

Ejemplo.

$$1. \int (4x - 2)dx = 4 \int xdx - 2 \int dx = 4 \frac{x^2}{2} - 2x + c = 2x^2 - 2x + c$$

Ejemplo.

$$1. \int (4x - 2)dx = 4 \int xdx - 2 \int dx = 4 \frac{x^2}{2} - 2x + c = 2x^2 - 2x + c$$

$$2. \int \frac{x^3 + 4x - 2}{x^2} dx = \int \left(\frac{x^3}{x^2} + 4 \frac{x}{x^2} - \frac{2}{x^2} \right) dx = \int x dx + 4 \int \frac{1}{x} dx - 2 \int x^{-2} dx$$
$$= \frac{x^2}{2} + 4 \ln |x| + \frac{2}{x} + c$$

Ejemplo.

$$1. \int (4x - 2)dx = 4 \int xdx - 2 \int dx = 4\frac{x^2}{2} - 2x + c = 2x^2 - 2x + c$$

$$2. \int \frac{x^3+4x-2}{x^2}dx = \int \left(\frac{x^3}{x^2} + 4\frac{x}{x^2} - \frac{2}{x^2} \right) dx = \int xdx + 4 \int \frac{1}{x}dx - 2 \int x^{-2}dx$$
$$= \frac{x^2}{2} + 4 \ln |x| + \frac{2}{x} + c$$

$$3. \int \frac{3+x^2}{1+x^2}dx = \int \frac{1+x^2+2}{1+x^2}dx = x + 2 \arctan x + c$$

Ejemplo.

$$1. \int (4x - 2)dx = 4 \int xdx - 2 \int dx = 4 \frac{x^2}{2} - 2x + c = 2x^2 - 2x + c$$

$$2. \int \frac{x^3 + 4x - 2}{x^2} dx = \int \left(\frac{x^3}{x^2} + 4 \frac{x}{x^2} - \frac{2}{x^2} \right) dx = \int xdx + 4 \int \frac{1}{x} dx - 2 \int x^{-2} dx$$
$$= \frac{x^2}{2} + 4 \ln |x| + \frac{2}{x} + c$$

$$3. \int \frac{3+x^2}{1+x^2} dx = \int \frac{1+x^2+2}{1+x^2} dx = x + 2 \arctan x + c$$

$$4. \int \left(\frac{e^x}{2} + 3 \sin x \right) dx = \frac{1}{2} e^x - 3 \cos x + c$$

Ejemplo.

$$1. \int (4x - 2)dx = 4 \int xdx - 2 \int dx = 4 \frac{x^2}{2} - 2x + c = 2x^2 - 2x + c$$

$$2. \int \frac{x^3 + 4x - 2}{x^2} dx = \int \left(\frac{x^3}{x^2} + 4 \frac{x}{x^2} - \frac{2}{x^2} \right) dx = \int xdx + 4 \int \frac{1}{x} dx - 2 \int x^{-2} dx$$
$$= \frac{x^2}{2} + 4 \ln |x| + \frac{2}{x} + c$$

$$3. \int \frac{3+x^2}{1+x^2} dx = \int \frac{1+x^2+2}{1+x^2} dx = x + 2 \arctan x + c$$

$$4. \int \left(\frac{e^x}{2} + 3 \sin x \right) dx = \frac{1}{2} e^x - 3 \cos x + c$$

$$5. \int \tan^2 x dx = \int \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} dx = \int \frac{1 - \cos^2 x}{\cos^2 x} dx = \tan x - x + c$$