Unidad 4: Cálculo Diferencial
Analisis Matemático I (R-112)
Licenciatura en Ciencias de la Computación

Iker M. Canut

2020

1 Motivacion

Recta tangente: fijando el punto A sobre la curva de una función, y otro punto $P \neq A$, la recta AP es secante a la curva, y su pendiente es la tangente trigonométrica del ángulo $B\hat{A}P$:

$$\text{Pendiente de } AP = \tan(B\hat{A}P) = \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

Luego, la pendiente de la recta tangente, es la tangente trigonométrica del ángulo $B\hat{A}T$:

$$\text{Pendiente de } AT = \tan(B\hat{A}T) = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

Velocidad Instantánea: Se define la velociadd instantánea en el tiempo $t = a$ como:

$$v(a) = \lim_{t \to a} \frac{f(t) - f(a)}{t - a}$$

2 Definición de Derivada

Sea f una función definida en un intervalo abierto y a un punto cualquiera de dicho intervalo, se dice que la función f tiene **derivada** en el punto $a \iff$ existe el límite: $\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$.

Proponiendo el **cambio de variable** $h = x - a$, f es derivable en $a \iff \lim_{h \to 0} \frac{f(a + h) - f(a)}{h}$

Llamamos **cociente incremental** a cualquiera de las expresiones: $\frac{f(x) - f(a)}{x - a}$ o $\frac{f(a + h) - f(a)}{h}$, y al límite, si existe, lo denominamos derivada de f en a, y lo denotamos con $f'(a)$.

Algunas **notaciones** para referir a la derivada de la función f en un punto a son:

$$f'(a), \qquad Df(a), \qquad \frac{df}{dx}(a), \qquad \frac{dy}{dx}(a), \text{ donde } y = f(x)$$

3 Función Derivada y Derivadas Sucesivas

En el conjunto $\{x \in Dom(f) : f \text{ es derivable en } x\} \subseteq Dom(f)$ definimos la **función derivada primera** de f como $f' : Dom(f') \to \mathbb{R}, x \to f'(x)$.

Dada la función derivada $(n-1)$-ésima de la función f, se llama derivada n-ésima de f a la función derivada primera de la función $f^{(n-1)}$ y se lo nota $f^{(n)} = \left(f^{(n-1)}\right)'$.
Para las funciones derivadas de orden n, notamos:

$$f^{(n)}(a), \qquad D^n f(a), \qquad \frac{d^n f}{dx^n}(a), \qquad \frac{d^n y}{dx^n}(a), \text{ donde } y = f(x)$$

4 Interpretaciones de la Derivada

Si f es una función derivable en un punto a, la **recta tangente** a la gráfica de f en el punto $(a, f(a))$ es la recta que pasa por dicho punto, con pendiente $f'(a)$. O en forma explicita, $y = f'(a)(x-a) + f(a)$.

Si el cociente incremental no tiene limite en el punto, pero si tiene limites laterales diferentes, al punto se lo llama anguloso, y no cuenta con recta tangente allí.

La **recta normal** de una gráfica de una función f en el punto $(a, f(a))$ es la recta que pasa por dicho punto, con pendiente $\frac{-1}{f'(a)}$, si $f'(a) \neq 0$, de ecuación $-\frac{1}{f'(a)}(x - a) + f(a)$, o $x = a$ si $f'(a) = 0$.

Dada una función $y = f(x)$, el valor de la derivada $f'(a)$ se interpreta como la **razón de cambio** de la variable y, respecto de la variable x, cuando $x = a$. Es decir, $\dfrac{dy}{dx}(a) = f'(a)$, donde $y = f(x)$.

La razón de cambio de la **posición** es la **velocidad**, y su razón de cambio es la **aceleración**.

5 Algunas Derivadas

5.1 Función Lineal

La función lineal $f(x) = m \cdot x + h$ es derivable en todo $a \in \mathbb{R}$ y vale $f'(a) = m$.
Demostración: $f'(a) = \lim\limits_{x \to a} \dfrac{(mx + h) - (ma + h)}{x - a} = \lim\limits_{x \to a} \dfrac{m(x - a)}{x - a} = m$

5.2 Función Potencia

Recordamos que $(x + y)^n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k} \cdot y^k$, luego
Para $n \in \mathbb{N}$, la función $f(x) = x^n$ es derivable en todo $a \in \mathbb{R}$ y vale $f'(a) = n \cdot a^{n-1}$.
Demostración:

$$\begin{aligned}
f'(a) &= \lim_{h \to 0} \frac{(a + h)^n - a^n}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{\left(\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} \cdot h^k\right) - a^n}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{\left(a^n + \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} \cdot h^k\right) - a^n}{h} \\
&= \lim_{h \to 0} \frac{\sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} \cdot h^k}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{\binom{n}{1} a^{n-1} h + \sum_{k=2}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} \cdot h^k}{h} \\
&= \lim_{h \to 0} n \cdot a^{n-1} + \sum_{k=2}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} \cdot h^{k-1} = n \cdot a^{n-1} + 0 = n \cdot a^{n-1}
\end{aligned}$$

5.3 Funciones Trigonométricas

Recordando que:

$$\lim_{h \to 0} \frac{\sin h}{h} = 1 \qquad\qquad \lim_{h \to 0} \frac{\cos h - 1}{h} = 0$$

$$\sin(a + h) = \sin a \cdot \cos h + \cos a \cdot \sin h \qquad\qquad \cos(a + h) = \cos a \cdot \cos h - \sin a \cdot \sin h$$

$f(x) = \sin x$ y $g(x) = \cos x$ son derivables en todo $a \in \mathbb{R}$ y valen $f'(x) = \cos x$ y $g'(x) = -\sin x$
Demostración:

$$\begin{aligned}
f'(a) &= \lim_{h \to 0} \frac{\sin(a + h) - \sin a}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{(\sin a \cdot \cos h + \cos a \cdot \sin h) - \sin a}{h} \\
&= \lim_{h \to 0} \sin a \cdot \frac{\cos h - 1}{h} + \cos a \cdot \frac{\sin h}{h} = \sin a \cdot 0 \cos a \cdot 1 = \cos a
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
g'(a) &= \lim_{h \to 0} \frac{\cos(a + h) - \cos a}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{(\cos a \cdot \cos h - \sin a \cdot \sin h) - \cos a}{h} \\
&= \lim_{h \to 0} \cos a \cdot \frac{\cos h - 1}{h} - \sin a \cdot \frac{\sin h}{h} = \cos a \cdot 0 - \sin a \cdot 1 = -\sin a
\end{aligned}$$

6 Continuidad de las Funciones Derivables

Teorema 1: Si una fncion f es derivable en un punto, entonces es continua en dicho punto.
Demostración: Sea f derivable en un punto a y $x \neq a$, $f(x) - f(a) = \dfrac{f(x) - f(a)}{x - a} \cdot (x - a)$. Luego, $\lim\limits_{x \to a} f(x) - f(a) = \lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x) - f(a)}{x - a} \cdot \lim\limits_{x \to a} (x - a) = f'(a) \cdot 0 = 0 \therefore \lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$ y f continua en a.$\blacksquare$

7 Álgebra de Derivadas

Teorema 2: Sean f y g dos funciones derivables en un punto a y c una constante real:

- $(f+g)'(a) = \lim\limits_{x\to a} \dfrac{(f+g)(x)-(f+g)(a)}{x-a} = \lim\limits_{x\to a}\left(\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a} + \dfrac{g(x)-g(a)}{x-a}\right) = f'(a)+g'(a)$
- $(c\cdot f)'(a) = \lim\limits_{x\to a} \dfrac{(c\cdot f)(x)-(c\cdot f)(a)}{x-a} = \lim\limits_{x\to a} c\cdot \dfrac{f(x)-f(a)}{x-a} = c\cdot f'(a)$
- $(f-g)-(a) = f'(a)-g'(a)$ ■

Teorema 3: **Regla del Producto**

$$
\begin{aligned}
(f\cdot g)(a) &= \lim_{x\to a}\frac{f(x)\cdot g(x)-f(a)\cdot g(a)}{x-a} = \lim_{x\to a}\frac{f(x)\cdot g(x)-\overbrace{f(a)\cdot g(x)}+\overbrace{f(a)\cdot g(x)}-f(a)\cdot g(a)}{x-a}\\
&= \lim_{x\to a}\frac{(f(x)-f(a))\cdot g(x)+f(a)\cdot(g(x)-g(a))}{x-a}\\
&= \lim_{x\to a}\left(\frac{f(x)-f(a)}{x-a}\cdot g(x)+f(a)\cdot\frac{g(x)-g(a)}{x-a}\right) = f'(a)\cdot g(a)+f(a)\cdot g'(a)
\end{aligned}
$$

■

Proposición 4: **Derivada de una Potencia de Exponente Natural**:
Si $n\in\mathbb{N}$ entonces $f(x)=x^n$ es derivable en a y vale $f'(a)=n\cdot a^{n-1}$.
Demostración: Sea $n=1$, $f(a)=a$ y $f'(a)=1=1\cdot a^1-1$.
Para n, sea $f(x)=x^{n+1}$, se puede reescribir $f(x)=g(x)\cdot h(x)$, $g(x)=x^n$ y $h(x)=x$. Luego

$$f'(a)=g'(a)\cdot h(a)+g(a)\cdot h'(a)=n\cdot a^n\cdot a+a^n\cdot 1=n\cdot a^n+a^n=(n+1)\cdot a^n$$

y vale para $n+1$, luego vale para todo $n\in\mathbb{N}$ que $f(x)=x^n \Rightarrow f'(a)=(n+1)\cdot a^n,\ \forall a\in\mathbb{R}$ ■

Teorema 4: **Derivada del Cociente de dos Funciones**: Sea $g(a)\neq 0$

$$
\begin{aligned}
\left(\frac{f'}{g}\right)(a) &= \lim_{x\to a}\frac{\left(\frac{f}{g}\right)(x)-\left(\frac{f}{g}\right)(a)}{x-a} = \lim_{x\to a}\frac{f(x)\cdot g(a)+f(a)\cdot g(x)}{g(x)\cdot g(a)\cdot(x-a)}\\
&= \lim_{x\to a}\frac{f(x)\cdot g(a)-\overbrace{f(a)\cdot g(a)}+\overbrace{f(a)\cdot g(a)}+f(a)\cdot g(x)}{g(x)\cdot g(a)\cdot(x-a)}\\
&= \lim_{x\to a}\frac{(f(x)-f(a))\cdot g(a)+f(a)\cdot(g(a)+g(x))}{g(x)\cdot g(a)\cdot(x-a)}\\
&= \lim_{x\to a}\frac{\frac{f(x)-f(a)}{x-a}\cdot g(a)-f(a)\frac{g(x)-g(a)}{x-a}}{g(x)\cdot g(a)}\\
&= \frac{f'(a)\cdot g(a)-f(a)\cdot g'(a)}{(g(a))^2}
\end{aligned}
$$

■

Proposición 5: **Derivada de Potencias de Exponentes Enteros Negativos**:
Sea $n\in\mathbb{N}$, entonces $f(x)=x^{-n}=\dfrac{1}{x^n}$ es derivable en todo $a\neq 0$ y vale $f'(a)=-n\cdot a^{-n-1}$ Definimos $h(x)=1$ y $g(x)=x^n$, luego $f=\dfrac{h}{g}$, y como ambas son derivables en $a\neq 0$, y $g(a)\neq 0$,

$$f'(a)=\frac{0\cdot a^n-1\cdot n\cdot a^{n-1}}{a^{2n}}=-n\cdot a^{-n-1}$$

■

Combinando todos los resultados, concluimos que los polinomios son derivables en todo $\mathbb{R}$, al igual que las funciones racionales en todo su dominio.

Teorema 5: **Regla de la Cadena**: Sean dos funciones f y g tal que $Rec(g) \subseteq Dom(f)$, y un punto a tal que g es derivable en a y f derivable en $g(a)$, luego $(f \circ g)$ es derivable en a y vale:

$$(f \circ g)'(a) = f'(g(a)) \cdot g'(a)$$

Demostración: Si para un incremento de h unidades de a, notamos con la variable k al incremento de la función g, entonces $k = g(a+h) - g(a)$.

$$\begin{aligned}(f \circ g)'(a) &= \lim_{h\to 0} \frac{(f \circ g)(a+h) - (f \circ g)(a)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{f(g(a)+k) - (f(g(a))}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{f(g(a)+k) - (f(g(a))}{k} \cdot \frac{g(a+h) - g(a)}{h}\end{aligned}$$

Luego, tenemos que $h \to 0 \Rightarrow k = g(a+h) - g(a) \to 0$, y como f es derivable en $g(a)$,

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(g(a)+k) - (f(g(a))}{k} = \lim_{k\to 0} \frac{f(g(a)+k) - (f(g(a))}{k} = f'(g(a))$$

Por otro lado, como tenemos g derivable en a, $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{g(a+h) - g(a)}{h} = g'(a)$
Y finalmente llegamos a que $(f \circ g)'(a) = f'(g(a)) \cdot g'(a)$ ■

Nota: Si tenemos $(f \circ g \circ h)$, tenemos que es derivable en los puntos a tales que $(g \circ h)$ sea derivable en a y f sea derivable en $(g \circ h)'(a)$. Luego, vale $(f \circ (g \circ h))(a) = f'(g(h(a))) \cdot g'(h(a)) \cdot h'(a)$

Nota: Luego, cobra sentido la notación de Leibniz para la derivada. Si notamos $u = g(x)$,

$$\frac{d(f \circ g)}{dx} = \frac{df}{du} \cdot \frac{du}{dx}$$

8 Derivada de la Función Inversa

Teorema 6: **Derivada de la Función Inversa**: Sea f biyectiva, definida en el intervalo abierto I, derivable en $a \in I$, con $f'(a) \neq 0$, entonces su función inversa f^{-1} es derivable en $f(a)$ y vale:

$$(f^{-1})(f(a)) = \frac{1}{f'(a)}$$

Demostración: $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f^{-1}(f(a)+h) - f^{-1}(f(a))}{h} = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f^{-1}(f(a)+h) - a}{h}$
Y como todo punto $f(a)+h$ en el dominio de f^{-1} es un punto en el recorrido de f, puede ser reescrito como $f(a)+h = f(a+k)$, para un único k (por la biyectividad de f). Luego,

$$\lim_{h\to 0} \frac{f^{-1}(f(a)+h) - a}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{f^{-1}(f(a+k)) - a}{f(a+k) - f(a)} = \lim_{h\to 0} \frac{k}{f(a+k) - f(a)}$$

Y surge que $f(a)+h = f(a+k) \Rightarrow f^{-1}(f(a)+h) = a+k \Rightarrow k = f^{-1}(f(a)+h) - f^{-1}(f(a))$.
Por el Teorema de Continuidad de la Función Inversa, f^{-1} es continua en $f(a) \Rightarrow h \to 0 \Rightarrow k \to 0 \therefore$

$$\lim_{h\to 0} \frac{k}{f(a+k) - f(a)} = \lim_{k\to 0} \frac{k}{f(a+k) - f(a)} = \lim_{k\to 0} \frac{1}{\frac{f(a+k) - f(a)}{k}} = \lim_{k\to 0} \frac{1}{f'(a)}$$

■

Proposición 6: **Derivada de Potencias de Exponente Racional**:

1. Si $n \in \mathbb{N}$, entonces $x^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{x}$ es derivable en todo a del dominio con $a \neq 0$ y vale $f'(a) = \frac{1}{n} \cdot a^{\frac{1}{n}-1}$

Demostración: Sabemos que $f(x) = \sqrt[n]{x}$ es la inversa de $g(x) = x^n$. Luego, f es derivable en todo $b = g(a)$, donde $g'(a) \neq 0$, en este caso, $b \neq 0$. Y vale

$$f'(b) = \frac{1}{g'(a)} = \frac{1}{n \cdot a^{n-1}} = \frac{1}{n(\sqrt[n]{x})^{n-1}} = \frac{1}{n \cdot b^{1-\frac{1}{n}}} = \frac{1}{n} \cdot b^{\frac{1}{n}-1}$$

■

2. Si $n = \frac{p}{q} \in \mathbb{Q} \Rightarrow f(x) = x^{\frac{p}{q}}$ es derivable en todo a del dominio, $a \neq 0$, y vale: $f'(a) = \frac{p}{q} a^{\frac{p}{q}-1}$

Demostración: $f(x) = x^{\frac{p}{q}} = (x^{\frac{1}{q}})^p$. Por la regla de la cadena,

$$f'(a) = p(a^{\frac{1}{q}})^{p-1} \cdot \frac{1}{q} a^{\frac{1}{q}-1} = \frac{p}{q} a^{\frac{p}{q}} - 1$$

■

9 Derivada de Funciones Trigonométricas Inversas

9.1 Derivada del Arco Seno

Sea $f : [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \to [-1, 1],\ f(x) = \sin x$, con la inversa $f^{-1} : [-1, 1] \to [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}],\ f^{-1}(x) = \arcsin x$,
Para todos los puntos a donde $f'(a) = \cos a \neq 0$, es decir, $a \neq \pm\frac{\pi}{2}$, se tendrá que f^{-1} es derivable en $b = f(a)$ y será:

$$(f^{-1})(f(a)) = \frac{1}{\cos x} = \frac{1}{\sqrt{1 - \sin^2 a}} = \frac{1}{\sqrt{1 - (f(a))^2}}$$

9.2 Derivada del Arco Coseno

Sea $g : [0, \pi] \to [-1, 1],\ g(x) = \cos x$, con la inversa $g^{-1} : [-1, 1] \to [0, \pi],\ g^{-1}(x) = \arccos x$
Para todos los puntos a donde $g'(a) = -\sin a \neq 0$, es decir, $a \neq 0 \wedge a \neq \pi$, se tendrá que g^{-1} es derivable en $b = g(a)$ y será:

$$(g^{-1})(g(a)) = \frac{1}{-\sin x} = -\frac{1}{\sqrt{1 - \cos^2 a}} = -\frac{1}{\sqrt{1 - (g(a))^2}}$$

9.3 Derivada del Arco Tangente

Sea $h : (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \to \mathbb{R},\ h(x) = \tan x$, con la inversa $h^{-1} : \mathbb{R} \to (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}),\ h(x) = \arctan x$
Para todos los puntos a donde $h'(a) = \frac{1}{\cos^2 a} = \sec a \neq 0$, se tendrá que h^{-1} es derivable en $b = g(a)$ y será:

$$(h^{-1})(h(a)) = \frac{1}{\sec^2 a} = \frac{1}{\sqrt{1 + \tan^2 a}} = \frac{1}{\sqrt{1 + (h(a))^2}}$$

9.4 Pasando en Limpio

$$(\arcsin)'(b) = \frac{1}{\sqrt{1 - b^2}} \qquad (\arccos)'(b) = -\frac{1}{\sqrt{1 - b^2}} \qquad (\arctan)'(b) = \frac{1}{1 + b^2}$$

10 Diferenciabilidad y Aproximación de Primer Orden

Decimos que una función f es diferenciable en un punto a, si existe un real α y una función θ, definida en un entorno del punto a tales que, para $h > 0$:

$$f(a+h) = f(a) + \alpha \cdot h + h \cdot \theta(h), \qquad \text{donde } \lim_{h\to 0} \theta(h) = 0$$

Teorema 7: Una función es derivable en un punto $a \iff$ es diferenciable en a.
Demostración:
$\Rightarrow$) Tenemos que $f'(a) = \lim_{h\to 0} \dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$. Luego, definiendo θ como:

$$\theta(h) = \begin{cases} \dfrac{f(a+h)-f(a)}{h} & \text{si } h \neq 0 \\ 0 & \text{si } h = 0 \end{cases}$$

Junto a $\alpha = f'(a)$, verifican la condición: $f(a+h) = f(a) + f'(a) \cdot h + h \cdot \theta(h), \quad \lim_{h\to 0} \theta(h) = 0$
$\Leftarrow$) Empezando con que $f(a+h) = f(a) + \alpha \cdot h + h \cdot \theta(h), \quad \lim_{h\to 0} \theta(h) = 0$
Luego, para $\alpha \neq 0$, $\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h} = \alpha + \theta(h)$

Y cuando $\alpha \to 0$, $\lim_{h\to 0} \dfrac{f(a+h)-f(a)}{h} = \alpha + \lim_{h\to 0} \theta(h) = \alpha$

Y por lo tanto f es derivable en a y vale $f'(a) = \alpha$ ■

Nota: Cuando f es continua en un punto a, entonces para h chico, podemos aproximar el valor de $f(a+h)$ por el valor de $f(a)$, ya que: $f(a+h) = f(a) + (f(a+h) - f(a)) = f(a) + e_0(h)$, donde $\lim_{h\to 0} e_0(h) = 0$

Y como una función f es diferenciable/derivable en un punto a, entonces podemos afirmar que

$$f(a+h) = f(a) + f'(a) \cdot h + e_1(h)$$

donde $\lim_{h\to 0} e_1(h) = 0$, y se aproxima tan rápido a cero que $\lim_{h\to 0} \dfrac{e_1(h)}{h} = 0$, y la nueva aproximación resulta entonces mejor que la obtenida para funciones continuas. Se llama **aproximación de primer orden** o **aproximación por linealización**.

El caso de continuidad corresponde a aproximar los valores de la curva $y = f(x)$ por los de la recta horizontal $y = f(a)$, mientras que en el caso de la aproximación de primer orden, se aproximan, cerca del punto a, a los valores de la curva por los de la recta tangente a la gráfica de f en el punto a.

Y podemos aproximar el valor de

$$f(a+h) \approx f(a) + \alpha \cdot h$$

o siendo $x = a + h$,

$$f(x) \approx f(a) + \alpha \cdot (x - a)$$

11 Teoremas de Valor Medio

11.1 Extremos Relativos de una Función. Teorema de Fermat

Sean f una función y un número $x_0 \in Dom(f)$, diremos que:

1. f alcanza un **máximo relativo** en x_0 si $\exists\ E(x_0, \delta)$ tal que $\forall\ x \in E(x_0, \delta)$, $f(x) \leq f(x_0)$
2. f alcanza un **mínimo relativo** en x_0 si $\exists\ E(x_0, \delta)$ tal que $\forall\ x \in E(x_0, \delta)$, $f(x) \geq f(x_0)$
3. f tiene un **extremo relativo** en x_0 si tiene un máximo o un mínimo relativo en x_0.

Nota: Todo máximo absoluto es, en particular, un máximo relativo.

Teorema 8: **Teorema de Fermat**: Sea f definida en un entorno de un punto x_0, y supongamos que f tiene en x_0 un extremo relativo, entonces si f es derivable en x_0, se tiene que $f'(x_0) = 0$.
Demostración: Suponemos que $f'(x_0) > 0$, entonces $f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} > 0$. Luego, por el Teorema de Conservación del Signo, existe $E(x_0, \delta)$ donde $0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} > 0$.
Analizando las posiciones relativas de los valores x y x_0, tenemos que si:

- $x_0 - \delta < x < x_0 \wedge \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} > 0$ entonces $x - x_0 < 0 \wedge f(x) - f(x_0) < 0 \Rightarrow f(x) < f(x_0)$
- $x_0 < x < x_0 + \delta \wedge \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} > 0$ entonces $x - x_0 > 0 \wedge f(x) - f(x_0) > 0 \Rightarrow f(x) > f(x_0)$

Pero esto contradice la hipotesis del teorema, ya que f no podría tener un extremo relativo en x_0. Análogamente se concluye que $f'(x_0) \not< 0$. Por tricotomía se concluye que $f'(x_0) = 0$. ■

Nota: La reciproca no siempre es cierta. E.g $f(x) = x^3$.
Nota: Si f tiene un extremo relativo en x_0, o bien $f'(x_0) = 0$ o bien f no es derivable en x_0.

Decimos que $x_0 \in Dom(f)$ es un **punto critico** de f si $f'(x_0) = 0$ o si f no es derivable en x_0. Luego, si f tiene un extremo relativo en x_0, entonces x_0 es un punto critico de f.

Nota: El Teorema de Weierstrass nos asegura la existencia de máximo y mínimo absolutos para una función continua en $[a, b]$.

Es decir, para hallar los extremos absolutos, deberemos localizar los puntos criticos de f en (a, b) y comparar el valor de f en ellos con $f(a)$ y $f(b)$.

12 Teoremas de Valor Medio del Cálculo Diferencial

Teorema 9: **Teorema de Rolle**: Sea f definida en un intervalo cerrado y acotado $[a, b]$, tal que f es continua en $[a, b]$ y derivable en (a, b). Si además vale que $f(a) = f(b)$, entonces existe al menos un $c \in (a, b)$ tal que $f'(c) = 0$.
Entre 2 ceros de una función derivable se encuentra siempre al menos un cero de su derivada.
Demostración: Por ser f continua en $[a, b]$, el T. de Weierstrass, asegura la existencia de extremos en $[a, b]$, sean M y m los valores máximo y el mínimo, entonces $m \leq M$. Si $m = M$ entonces es una función constante y todos los puntos en el intervalo (a, b) tienen derivada 0.
Si $m < M$: al menos uno de los 2 extremos se asume en un punto interior $x \in (a, b)$, luego por el Teorema de Fermat (f es continua y derivable en (a, b)), tenemos que $f'(c) = 0$. ■

Teorema 10: **Teorema de Lagrange**: Sea f definida en un intervalo cerrado y acotado $[a, b]$, continua en $[a, b]$ y derivable (a, b), entonces al menos existe un $c \in (a, b)$ tal que $f'(c) = \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}$.
Dada la recta secante a la gráfica de f que pasa por los puntos $(a, f(a))$ y $(b, f(b))$, existe un c en el interior del intervalo (a, b) tal que la recta tangente a f en el punto $(c, f(c))$ tiene la misma pendiente.

Demostración: Definamos la función $F(x) = f(x) - \overbrace{\dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}}(x - a)$ en el intervalo $[a, b]$, la cual verifica las condiciones del Teorema de Rolle: es continua por Álgebra de Funciones Continuas, es derivable por Álgebra de Derivadas y $F(a) = F(b)$:

$$F(a) = f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(a - a) = f(a)$$

$$F(b) = f(b) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(b - a) = f(b) - f(b) + f(a) = f(a)$$

Entonces podemos asegurar que existe un valor $c \in (a, b)$ tal que $F'(c) = 0$. Luego, calculando $F'(x)$, vemos que para $x \in (a, b)$ es:

$$F'(x) = f'(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \Rightarrow 0 = F'(c) = f'(c) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \quad \therefore \quad f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

■

Corolario 1: Sea f una función contina en un intervalo $[a, b]$, y derivable en (a, b), tal que la derivada es nula, entonces f es constante en $[a, b]$. Considerando un intervalo $[x_1, x_2] \subseteq [a, b]$, entonces existe $c \in (x_1, x_2)$ donde $\dfrac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = f'(c) = 0 \Rightarrow f(x_2) - f(x_1) = 0 \Rightarrow f(x_2) = f(x_1)$
Luego, de la arbitrariedad de x_1 y x_2, $\forall\ x \in [a, b]$ debe ser $f(x) = f(x_1) = f(x_2) = k$ ■

Corolario 2: Sean f y g dos funciones continuas en un intervalo $[a, b]$ y derivables en (a, b), tal que $\forall\ x \in (a, b)\ f'(x) = g'(x)$, entonces existe $k \in \mathbb{R}$ tal que $\forall\ x \in [a, b]$:

$$f(x) = g(x) + k$$

Demostración: $\forall x \in [a, b]$ se tiene que $0 = f'(x) - g'(x) = (f - g)(x) = (f - g)'(x)$. Por el corolario 1, existe $k \in \mathbb{R}$ tal que $\forall\ x \in [a, b]$, $k = (f - g)(x) \ \therefore\ f(x) = g(x) + k$ ■

Teorema 11: **Teorema de Cauchy**: Sean f y g dos funciones definidas en un intervalo acotado $[a, b]$, tal que ambas son continuas en $[a, b]$ y derivables en (a, b), entonces existe $c \in (a, b)$ tal que

$$f'(c)(g(b) - g(a)) = g'(c)(f(b) - f(a))$$

Demostración: Sea $h(x) = f(x)(g(b) - g(a)) - g(x)(f(b) - f(a))$, basta encontrar $c \in (a, b) : h'(x) = 0$
Y como h es continua en $[a, b]$ y derivable en (a, b), viendo que

$$\left.\begin{array}{l} h(a) = f(a)(g(b) - g(a)) - g(a)(f(b) - f(a)) \\ h(b) = f(b)(g(b) - g(a)) - g(b)(f(b) - f(a)) \end{array}\right\} h(a) = h(b)$$

Luego, por el Teorema de Rolle, $\exists\ c \in (a, b) : h'(c) = 0$ ■

Observamos que el Teorema de Rolle es un caso particular del Teorema de Lagrange, que a su vez es un caso particular del teorema de Cauchy, cuando $g(x) = x$.

13 Propiedad de los Valores Intermedios para Derivadas

Teorema 12: Sea f una función derivable en un intervalo $[a, b]$, supongamos $f'(a) < f'(b)$, y sea z tal que $f'(a) < z < f'(b)$, entonces existe un valor $c \in (a, b)$ tal que $f'(c) = z$.
Demostración: Consideremos la función $g(x) = f(x) - zx$ definida en el intervalo $[a, b]$. f y g son continuas y derivables en el intervalo $[a, b]$. Por Weierstrass, existe $c \in [a, b]$ donde g alcanza su valor mínimo, y por el Teorema de Fermat, $g'(c) = 0$. Luego, $0 = g'(c) = f'(c) - z \quad \therefore \quad f'(c) = z$ ■

Dada una función f derivable en un conjunto A, y sea f' su derivada. Sabemos que f es continua, pero es f' continua? No necesariamente. Por ejemplo:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \cdot \cos\left(\dfrac{1}{x}\right) & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

Luego,

$$f'(x) = \begin{cases} 2x \cdot \cos\left(\dfrac{1}{x}\right) + \sin\left(\dfrac{1}{x}\right) & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

Y como $\lim_{x\to 0} 2x \cdot \cos\left(\dfrac{1}{x}\right) = 0$, entonces $\lim_{x\to 0} \sin\left(\dfrac{1}{x}\right)$ debería ser 0, pero no existe. Y tenemos que $f'(x)$ no es continua.

Corolario 3: Si f es derivable en un conjunto $[a, b]$, la función derivada f' no puede tener discontinuidades evitables ni de salto en $[a, b]$. Es decir, si las tiene son esenciales.