Álgebra y Geometría Analítica I

Conjuntos - Resolución de ejercicios selectos - página 2

5. Dado $A = \{1, \{1\}, 2\}$, determinar cuáles de las siguientes proposiciones son verdaderas, justificando la respuesta.

   (a) $\mathbb{N}$ es un universo para A

   (d) $\{1\} \subseteq A$

   (e) $\{\{1\}\} \subset A$.

Solución:

(a) **Falso**, ya que $\{1\} \notin \mathbb{N}$.

(d) **Verdadero**, ya que $1 \in A$.

(e) **Verdadero**, ya que $\{1\} \in A$.

6. Dados $V = \{a, b\}$, $X = \{d, b\}$, $Z = \{a, d, e\}$, $W = \{a, b, d, e\}$ y $Y = \{d, e\}$.

   (a) $V \subset W$

   (j) $X \subseteq Z$

Solución:

(a) **Verdadero** porque $V = \{a, b\}$, $a \in W$ y $b \in W$.

(j) **Falso**, ya que $d \in X$ y $d \notin Z$.

7. Determinar cuáles de las siguientes proposiciones son verdaderas, justificando la respuesta.

   (a) $\emptyset \in \emptyset$

   (e) $\emptyset \subset \{\emptyset\}$

Solución:

(a) **Falso**. Ya que el conjunto vacío no tiene elementos, $\emptyset \notin \emptyset$.

(e) **Verdadero**. Como se vio en el Teorema 3.2 del libro de Grimaldi, o en la Propiedad 1 de la sección 2.3.5 del libro de Rojo, el conjunto vacío está contenido en cualquier otro conjunto.
En este caso el conjunto $\{\emptyset\}$ no es un conjunto vacío, es un conjunto con un único elemento, el $\emptyset$. Es por eso que vale el símbolo de *subconjunto propio* '$\subset$' del teorema.

8. Sean $A,\ B,\ C,\ D,\ E \subset \mathbb{Z}$, $A = \{2n\colon n \in \mathbb{Z}\}$, $B = \{3n\colon n \in \mathbb{Z}\}$, $C = \{4n\colon n \in \mathbb{Z}\}$, $D = \{5n\colon n \in \mathbb{Z}\}$, $E = \{6n\colon n \in \mathbb{Z}\}$. Determinar cuáles de las siguientes proposiciones son verdaderas y cuáles falsas, justificando adecuadamente la respuesta.

(a) $E \subseteq C \subseteq A$ (c) $B \subseteq D$.

Solución:

(a) $E \subseteq C \subseteq A$

Observemos la definición de los conjuntos $A,\ C,\ E$. Cada uno de los conjuntos está formado por los múltiplos de 2, 4 y 8 respectivamente. Entonces debemos preguntarnos, ¿Los múltiplos de 8, son múltiplos de 4? ¿Los múltiplos de 4, son múltiplos de 2? En ambos casos, la respuesta es sí, entonces debemos demostrar la validez de la proposición. Para esto trabajaremos con las contenciones por separado.

$E \subseteq C$: Sabemos que E está contenido en C, si todo elemento de E pertenece a C. Entonces para demostrar la contención, tomaremos un elemento cualquiera en E y veremos que el elemento pertenece a C.

$$\begin{aligned} x \in E &\underset{Def.\ E}{\Leftrightarrow} x = 8 \cdot n \text{ para algún } n \in \mathbb{Z} \\ &\underset{8=4\cdot 2}{\Rightarrow} x = (4 \cdot 2) \cdot n \text{ para algún } n \in \mathbb{Z} \\ &\underset{Prop.\ Asoc.}{\Rightarrow} x = 4 \cdot (2 \cdot n) \text{ para algún } n \in \mathbb{Z} \\ &\underset{m=2\cdot n}{\Rightarrow} x = 4 \cdot m,\ m \in \mathbb{Z} \\ &\underset{Def.\ C}{\Rightarrow} x \in C. \end{aligned}$$

Como $x \in E$ es arbitrario, resulta $E \subseteq C$.

De la misma forma, mostraremos $C \subseteq A$:

$$\begin{aligned} y \in C &\underset{Def.\ C}{\Leftrightarrow} y = 4 \cdot n \text{ para algún } n \in \mathbb{Z} \\ &\underset{4=2\cdot 2}{\Rightarrow} y = (2 \cdot 2) \cdot n \text{ para algún } n \in \mathbb{Z} \\ &\underset{Prop.\ Asoc.}{\Rightarrow} y = 2 \cdot (2 \cdot n) \text{ para algún } n \in \mathbb{Z} \\ &\underset{m=2\cdot n}{\Rightarrow} y = 2 \cdot m,\ m \in \mathbb{Z} \\ &\underset{Def.\ A}{\Rightarrow} y \in A. \end{aligned}$$

Y como consideramos un elemento $y \in C$ cualquiera, tenemos que $C \subseteq A$.

Por lo tanto $E \subseteq C \subseteq A$, es decir que la proposición es verdadera.

(c) $B \subseteq D$.

Como mencionamos en el ítem anterior, B es el conjunto de múltiplos de 3 y D el conjunto de múltiplos de 6. Entonces podemos escribir coloquialmente la proposición como: "Todos los múltiplos de 3 son múltiplos de 6". Sabemos que la proposición es falsa, para mostrarlo debemos dar un ejemplo que no verifique la proposición. Es decir, debemos encontrar un elemento en B que no pertenezca a D.

$9 \in B$ porque $9 = 3 \cdot 3$ y $3 \in \mathbb{Z}$, pero $9 \notin D$ porque $9 = 6 \cdot \frac{3}{2}$ y $\frac{3}{2} \notin \mathbb{Z}$.

Por lo tanto $B \not\subseteq D$.

10. En cada caso, analizar si los conjuntos dados son iguales.

(b) $\{n \in \mathbb{N}\colon n \text{ es par}\}$ y $\{n \in \mathbb{N}\colon n = p + q,\ p, q \in \mathbb{N},\ p, q \text{ impares}\}$

(c) $\{2, 5\}$ y $\{\{2, 5\}\}$

Solución:

(b) $\{n \in \mathbb{N}\colon n \text{ es par}\}$ y $\{n \in \mathbb{N}\colon n = p + q,\ p, q \in \mathbb{N},\ p, q \text{ impares}\}$

Llamemos $A = \{n \in \mathbb{N}\colon n \text{ es par}\}$ y $B = \{n \in \mathbb{N}\colon n = p + q,\ p, q \in \mathbb{N},\ p, q \text{ impares}\}$.

Para demostrar la igualdad entre conjuntos, mostraremos la doble contención, es decir $A \subseteq B$ y $B \subseteq A$.

Comencemos con $A \subseteq B$, la idea es que si n es un número par, el anterior a n es impar. Entonces escribiremos a n como su anterior mas 1 (es decir, la suma de dos números impares).

$$\begin{aligned}
n \in A &\underset{Def.\ A}{\Leftrightarrow} n \in \mathbb{N} \text{ y } n \text{ es par} \\
&\underset{Def.\ par}{\Rightarrow} n = 2 \cdot a,\ a \in \mathbb{N} \\
&\underset{-1+1=0}{\Rightarrow} n = 2 \cdot a - 1 + 1,\ a \in \mathbb{N} \\
&\underset{Prop.\ Asoc.}{\Rightarrow} n = (2 \cdot a - 1) + 1,\ a \in \mathbb{N} \\
&\underset{p=2\cdot a-1,\ q=1}{\Rightarrow} n = p + q,\ p, q \in \mathbb{N},\ p, q \text{ impares} \\
&\underset{Def.B}{\Rightarrow} n \in B.
\end{aligned}$$

De la arbitrariedad de n resulta $A \subseteq B$.

Para mostrar que $B \subseteq A$, veremos que la suma de números impares es un número par.

$$
\begin{aligned}
m \in B \underset{Def.B}{\Leftrightarrow} \quad & m = p + q,\ p, q \in \mathbb{N},\ p, q \text{ impares} \\
\underset{Def.impar}{\Rightarrow} \quad & m = p + q,\ p = 2 \cdot r_1 - 1,\ q = 2 \cdot r_2 - 1,\ r_1, r_2 \in \mathbb{N} \\
\underset{Def.\ p,\ q}{\Rightarrow} \quad & m = (2 \cdot r_1 - 1) + (2 \cdot r_2 - 1),\ r_1, r_2 \in \mathbb{N} \\
\underset{Prop.\ Conmut.}{\Rightarrow} \quad & m = 2 \cdot r_1 + 2 \cdot r_2 - 1 - 1,\ r_1, r_2 \in \mathbb{N} \\
\underset{Prop.\ Asoc.}{\Rightarrow} \quad & m = 2 \cdot r_1 + 2 \cdot r_2 - 2,\ r_1, r_2 \in \mathbb{N} \\
\underset{Prop.Dist.}{\Rightarrow} \quad & m = 2 \cdot (r_1 + r_2 - 1),\ r_1, r_2 \in \mathbb{N} \\
\underset{b=r_1+r_2-1}{\Rightarrow} \quad & m = 2 \cdot b,\ b \in \mathbb{N} \\
\underset{Def.par}{\Rightarrow} \quad & m \in \mathbb{N},\ m \text{ es par} \\
\underset{Def.A}{\Rightarrow} \quad & m \in A.
\end{aligned}
$$

Y como m es arbitrario, $B \subseteq A$

Por lo tanto $A = B$.

(c) Identifiquemos a los conjuntos como $A = \{2, 5\}$ y $B = \{\{2, 5\}\}$

Podemos ver que $A \subseteq B$, de hecho, B=$\{A\}$.
Por otro lado, el elemento $\{2, 5\} \notin A$, por lo cual ($B \nsubseteq A$).

Por lo que podemos concluir que $A \neq B$.