Unidad 3: Sistemas de Ecuaciones Lineales
Álgebra y Geometría Analítica II (R-121)
Licenciatura en Ciencias de la Computación

Iker M. Canut

2020

1. Definiciones

Una **ecuación lineal** en n variables $x_1, ..., x_n$ es una expresión de la forma $a_1x_1 + a_2x_2 + ... + a_nx_n = y$, donde $a_1, a_2, ..., a_n$ son los **coeficientes** de la ecuación e $y \in \mathbb{F}$ es el **término independiente**. Una **solución de la ecuación** es una n-upla de escalares que reemplazados en las incógnitas verifican la igualdad. El conjunto de todas las soluciones se llama **conjunto solución**.
Un **sistema** de m ecuaciones lineales con n incógnitas:

$$\begin{cases} A_{11}x_1 & + & A_{12}x_2 & + & ... & + & A_{1n}x_n & = & y_1 \\ A_{21}x_1 & + & A_{22}x_2 & + & ... & + & A_{2n}x_n & = & y_2 \\ & & & & & & & \vdots & \\ A_{m1}x_1 & + & A_{m2}x_2 & + & ... & + & A_{mn}x_n & = & y_m \end{cases}$$

Se puede representar matricialmente como $(S) \iff AX = Y$, donde

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \dots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & \dots & A_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{m1} & A_{m2} & \dots & A_{mn} \end{pmatrix} \text{ es la } \textbf{matriz de coeficientes}$$

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \text{ es el } \textbf{vector incógnita}, \qquad Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix} \text{ es el } \textbf{vector de términos independientes}$$

Una **solución del sistema** es una n-upla $(x_1, x_2, ..., x_n)$ tal que $AX = Y$.
Un sistema es **homogéneo** si $y_1 = y_2 = \ldots = y_m = 0$ y siempre admite la **solución trivial**: $x_1 = x_2 = \ldots = x_n = 0$. Puede tener otras soluciones.
Dos sistemas son **equivalentes** si tienen las mismas soluciones.

2. Operaciones Elementales

2.1. Operaciones elementales de Ecuaciones

Operaciones de Eliminación: Sumamos la i-ésima ecuación α veces a la k-ésima ecuación.
Operaciones de Escalamiento: Multiplicamos la i-ésima ecuación por un escalar $\alpha \neq 0$.
Operaciones de Intercambio: Intercambiamos dos ecuaciones.

2.2. Operaciones elementales por Filas (OEF)

Tipo I: Se multiplica la fila r por un escalar $\alpha \neq 0$: $e(A)_{ij} = \begin{cases} A_{ij}, & i \neq r \\ \alpha\ A_{rj}, & i = r \end{cases}$

Tipo II: Se suma la fila r α veces a la fila s: $e(A)_{ij} = \begin{cases} A_{ij}, & i \neq r \\ A_{rj} + \alpha\ A_{sj}, & i = r \end{cases}$

Tipo III: Se intercambia la fila r con la fila s: $e(A)_{ij} = \begin{cases} A_{ij}, & i \neq r, i \neq s \\ A_{sj}, & i = r \\ A_{rj}, & i = s \end{cases}$

Teorema 1: Sean $A \in \mathbb{F}^{m \times n}, Y \in \mathbb{F}^{m \times 1}$, y e es una operacion elemental por fila, entonces los sistemas $AX = Y$ y $e(A)X = e(Y)$ son equivalentes.

Sean $A, B \in \mathbb{F}^{m \times n}$, decimos que B es **equivalente por filas** a A si se puede pasar de A a B por una sucesión finita de OEF. Definiendo asi una relación de equivalencia en $\mathbb{F}^{m \times n}$.

Si B es equivalente por filas a A, entonces $AX = 0$ es equivalente a $BX = 0$, puesto que
$AX = 0 \Rightarrow e_k(\cdots(e_1(A))) = 0 \Rightarrow BX = 0$ y toda solución de $BX = 0$ es solución de $AX = 0$. ■

3. Matrices Elementales

Sea e una OEF que aplica sobre matrices con m filas, entonces la **matriz elemental asociada** a e es $E = e(I)$, donde I es la matriz identidad $m \times m$.
Teorema 2: Sea e una OEF, $E = e(I_m)$, entonces para toda $A \in \mathbb{F}^{m\times n}$ vale $e(A) = EA$.

T1. $e =$ "$f_r \to \alpha f_r$" , $\alpha \neq 0$

$$E_{ij} = e(I)_{ij} = \begin{cases} \delta_{ij}, & i \neq r \\ \alpha\delta_{rj}, & i = r \end{cases}$$

$$(EA)_{ij} = \sum_{k=1}^{m} E_{ik}A_{kj} \begin{cases} \sum_{k=1}^{m} \delta_{ik}A_{kj} = A_{ij}, & i \neq r \\ \sum_{k=1}^{m} \alpha\delta_{ik}A_{kj} = \alpha A_{ij}, & i = r \end{cases} \qquad \square$$

T2. $e =$ "$e = f_r \to f_r + \alpha f_s$"

$$E_{ij} = e(I)_{ij} = \begin{cases} \delta_{ij}, & i \neq r \\ \delta_{rj} + \alpha\delta_{sj}, & i = r \end{cases}$$

$$(EA)_{ij} = \sum_{k=1}^{m} E_{ik}A_{kj} = \begin{cases} \sum_{k=1}^{m} \delta_{ik}A_{kj} = A_{ij} & i \neq r \\ \sum_{k=1}^{m} (\delta_{rk} + \alpha\delta_{sk})A_{kj} = \sum_{k=1}^{m} \delta_{rk}A_{kj} + \alpha\delta_{sk}A_{kj} = A_{rj} + \alpha A_{sj}, & i = r \end{cases}$$

■

El determinante de una matriz elemental es siempre no nulo, por lo tanto resulta **invertible**:

T1. $e^{-1} =$ "$f_r \to \frac{1}{\alpha} f_r$"
T2. $e^{-1} =$ "$f_r \to f_r - \alpha f_s$"
T3. $e^{-1} = e$

Las matrices que son su propia inversa se llaman **involutivas**.

4. Matrices Escalón Reducidas por Filas

Una matriz $A \in \mathbb{F}^{m\times n}$ se dice **reducida por filas (RF)** si:

1. El primer elemento no nulo de cada fila no nula es igual a 1. El mismo es el **1 principal** y la posición del mismo se denomina **pivote**.
2. Toda columna que contenga el 1er elemento de una fila no nula tiene sus demás elementos $= 0$.

Una matriz $A \in \mathbb{F}^{m\times n}$ se dice **escalón reducida por filas (ERF)** si:

1. A es reducida por filas.
2. Toda fila nula de A está debajo de todas las filas no nulas.
3. Si $1, 2, ..., r$ son las filas no nulas de A y el primer elemento no nulo de la fila i está en la columna k_i, entonces $k_1 < k_2 < \ldots < k_r$

Un sistema lineal representado por una matriz ERF ya viene resuelto.

Al definir un conjunto solución, los **parametros libres** son los que se usan para describir al resto de parametros. Por ejemplo, en $Sol = \{(x_1, 2x_1 + x_3, x_3) : x_1, x_3 \in \mathbb{F}\}$, x_1 y x_3 son parametros libres.

Teorema 3: Toda matriz $A \in \mathbb{F}^{m\times n}$ es quivalente por filas a una matriz ERF. Es decir, existen matrices elementales $E_1, E_2, ..., E_k$ tales que $E_k E_{k-1} E_2 E_1 A$ es ERF.

Teorema 4: Si $A \in \mathbb{F}^{m\times n}$ con $m < n$, entonces $AX = 0$ admite una solución no trivial.
Dem/ Por T3, A es equivalente por filas a una matriz R ERF. Sean 1,...,r las filas no nulas de R, $r \leq m < n$ y sean $k_1, ..., k_r$ las columnas de R en donde aparece el primer elemento no nulo de las filas $1, ..., r$. Tenemos que $xk_1, ...xk_r$ se pueden escribir como combinación lineal de los otros parametros. Luego, para cada elección de x_i, con $i \neq k_1, ..., k_r$ se obtiene una solución de $AX = 0$. ■

5. Resolución de Sistemas No Homogéneos

Se aplican OEF para llevarla a su forma ERF. Para esto, conviene pasar a la **matriz ampliada** A' que se obtiene agregando a A la columna Y, y aplicar las OEF directamente sobre A'.

- Sistema **incompatible**: No existe solución.
- Sistema **compatible determinado**: Existe una única solución.
- Sistema **compatible indeterminado**: Existe mas de una solución (si $\mathbb{F} = \mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$ entonces el sistema tiene infinitas soluciones).

Teorema 5: Sea $AX = Y$ con $A \in \mathbb{F}^{m\times n}, Y \in \mathbb{F}^{m\times 1}$ y sea X_0 una solución de (S), es decir $AX_0 = Y$, entonces el conjunto de soluciones de (S) es:

$$Sol = \{X_0 + X_h : X_h \text{ es solución de AX=0}\}$$

Toda solución de (S) se escribe como una solución particular más una solución del sistema homogéneo.
Dem/ Sea X_h una solución del sistema homogéneo asociado: $AX_h = 0$, luego

$$A(X_0 + X_h) = AX_0 + AX_h = AX_0 + 0 = Y$$

que significa que $X_0 + X_h$ es solución de (S).
Reciprocamente, si $AX = Y$, escribimos $X = X_0 + (-X_0 + X)$. Y notamos que

$$A(-X_0 + X) = -AX_0 + AX = -Y + Y = 0$$

Luego, $X_h := -X_0 + X$ es solución del sistema homogéneo. ■

6. Sistemas Cuadrados

Teorema 6: Sea $A \in \mathbb{F}^{n\times n}$, son equivalentes:

- A es invertible.
- el sistema homogéneo $AX = 0$ tiene solución única (la solución trivial X=0).
- El sistema $AX = Y$ tiene solución única para cada $Y \in \mathbb{F}^{n\times 1}$.

(1) $\Rightarrow$ (2). Existe A^{-1} tal que $A^{-1}A = I$. Luego, considerando $AX = 0$, sigue que $X = IX = A^{-1}AX = A^{-1}0 = 0$ y es la única solución.
(1) $\Rightarrow$ (3). Existe A^{-1} tal que $A^{-1}A = I$. Considerando $AX = Y$, la única solución está dada por $X = A^{-1}Y$
(3) $\Rightarrow$ (2). Trivialmente tomando $Y = 0$.
(2) $\Rightarrow$ (1). Sea R la forma ERF de A, esa matriz es triangular superior. Como $AX = 0$ tiene solución única, entonces $RX = 0$ tiene solución única, de donde $R = I$. Esto significa que A es equivalente por filas a $R = I$, de modo que existen matrices elementales $E_1, E_2, ..., E_k$ tales que $E_k \dots E_2E_1A = I$ y A es invertible con $A^{-1} = E_k \dots E_2E_1$. ■

Y esto nos da un método eficiente para calcular la inversa de una matriz A tal que $det\ A \neq 0$:

- $det\ A \neq 0 \Rightarrow A$ es equivalente por filas a I.
- Sean $e_1, e_2, ..., e_k$ las OEF que aplicamos a A para llevarla a I y E_i la matriz identidad, entonces

$$A^{-1} = E_k \dots E_2E_1 = e_k(\dots e_2(e_1(I)))$$

- Es decir, si aplicamos a la matriz identidad las mismas OEF que aplicamos a A para llegar a I, lo que se obtiene es la inversa A^{-1}.

7. Eliminación Gaussiana

Es el método clasico para llevar una matriz $A \in \mathbb{F}^{n\times n}$ a su forma ERF.

1. Ir a la 1ra columna no nula de A. Si el primer elemento es 0, intercambiamos la 1ra fila con alguna fila que tenga un elemento no nulo en esa columna (si no, lo dejamos).
2. Se obtienen ceros debajo de ese elemento usando OEF de tipo II.
3. Mismo procedimiento a la submatriz que se obtiene quitando 1ra fila y la 1ra columna no nulas.
4. Hacer unos en los 1ros elementos no nulos de cada fila no nula usando OEF de tipo I, y ceros arriba de éstos usando OEF de tipo II.

8. Aplicacion a Determinantes

Una matriz $A \in \mathbb{F}^{n\times n}$ se dice:

- **no-singular** ($det \neq 0$): si el sistema homogéneo $AX = 0$ tiene solución única. $AX = 0 \Rightarrow X = 0$.
- **singular** ($det = 0$): si no es no-singular. O sea, existe $0 \neq X \in \mathbb{F}^{n\times 1}$ tal que $AX = 0$

Lema 1: Sea $E \in \mathbb{F}^{n\times n}$ una matriz elemental asociada a una OEF e, entonces:

- $e =$ "$f_r \longrightarrow \alpha f_r$" $\Longrightarrow det\ E = \alpha, \alpha \neq 0$.
- $e =$ "$f_r \longrightarrow f_r + \alpha f_s$" $\Longrightarrow det\ E = 1$.
- $e =$ "$f_r \longleftrightarrow f_s$" $\Longrightarrow det\ E = -1$. ■

Lema 2: Sea E una matriz elemental, entonces para toda $A \in \mathbb{F}^{n\times n}$ vale: $det(EA) = (det\ E)(det\ A)$.

T1. $e =$ "$f_r \longrightarrow \alpha f_r$". Luego, $det(EA) = det(e(A)) = \alpha \cdot (det\ A) = (det\ E)(det\ A)$
T2. $e =$ "$f_r \longrightarrow f_r + \alpha f_s$". Luego, $det(EA) = det(e(A)) = 1 \cdot (det\ A) = (det\ E)(det\ A)$
T3. $e =$ "$f_r \longleftrightarrow f_s$". Luego, $det(EA) = det(e(A)) = (-1) \cdot (det\ A) = (det\ E)(det\ A)$ ■

Teorema 7: Dadas $A, B \in \mathbb{F}^{n\times n}$, se tiene que $det(AB) = (det\ A)(det\ B)$.

- Sea A singular y B singular, entonces existe $X \neq 0 : BX = 0$. Luego, $ABX = 0$ y tenemos que AB es singular $\Rightarrow 0 = det(AB) = (det\ A) \cdot (det\ B) = 0 \cdot 0 = 0$
- Sea A singular y B no singular, entonces B es invertible. Como A es singular, aseguramos que existe $X \neq 0 : AX = 0$. Entonces, $AB(B^{-1}X) = 0$ con $B^{-1}X \neq 0$. Sigue que AB es singular y por ende $0 = det(AB) = det\ A \cdot det\ B = 0$
- Sea A no singular, de $AX = 0$ sigue que $X = 0$. Y como A es equivalente por filas a la matriz identidad, existen matrices elementales tales que $E_k \cdots E_2 E_1 A = I \Rightarrow A = E_1^{-1}E_2^{-1}\cdots E_k^{-1}$. Finalmente, $(det\ A) = (det\ E_1^{-1})(det\ E_2^{-1})\cdots(det\ E_k^{-1})$. Y al agregar a B en la ecuación, $det(AB) = (det\ E_1^{-1})(det\ E_2^{-1})\cdots(det\ E_k^{-1})(det\ B) = (det\ A)(det\ B)$ ■

9. Regla de Cramer

Sea $A \in \mathbb{F}^{n\times n}$ una matriz invertible, entonces la única solución de $AX = Y$ está dada por $x_i = \dfrac{det\ A_i}{det\ A}$ donde A_i es la matriz que se obtiene de A, reemplazando la i-esima columna por el vector Y.
Dem/ $X = A^{-1}Y$. Recordando que $A^{-1} = \frac{1}{det\ A} adj\ A$ y que $(adj\ A)_{ij} = (-1)^{i+j} det\ A(j|i)$, tenemos:

$$x_i = (A^{-1}Y)_i = \frac{1}{det\ A}((adj\ A)Y)_{i1} = \frac{1}{det\ A}\sum_{j=1}^{n}(adj\ A)_{ij}\ y_j$$
$$= \frac{1}{det\ A}\sum_{j=1}^{n}(-1)^{i+j} det\ A(j|i)\ y_j = \frac{1}{det\ A}\sum_{j=1}^{n}(-1)^{i+j} det\ A(j|i)\ (A_i)_{ji} = \frac{det\ A_i}{det\ A}$$

■