Análisis Matemático II

CLASE DE PRÁCTICA: VIERNES 04/09

Demian Nahuel Goos

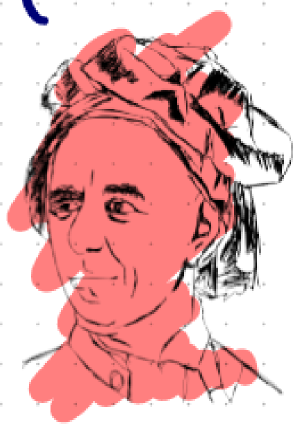
demian@fceia.unr.edu.ar

Historia inicial del Análisis

Gottfried Leibniz
1646 - 1716

Desarrolló el cálculo infinitesimal

Estableció con sus avances al análisis como una rama de la matemática

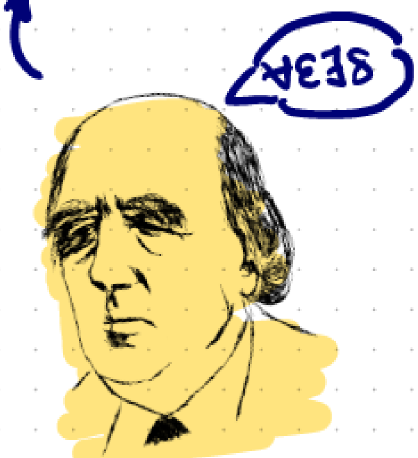


Leonhard Euler
1707 - 1783

Augustin-Louis Cauchy
1789 - 1857

Precisó los conceptos de función, límite y continuidad

Le inculcó al análisis el rigor matemático que hoy lo caracteriza



Karl Weierstraß
1815 - 1897

TRABAJO PRÁCTICO 1: CÁLCULO INTEGRAL.

EJERCICIO RESUELTO: INDUCCIÓN:

PROBAR QUE $\forall n \in \mathbb{N}$: $\sum_{i=1}^{n} 2i-1 = 1+3+5+\ldots+(2n-1) = n^2$

D)

(I) PASO BASE, $n=1$:

CUANDO $n=1$, $\sum_{i=1}^{n} 2i-1 = \sum_{i=1}^{1} 2i-1 = 2.1-1 = 1$. $(*)$

ADEMÁS, TENEMOS QUE $n^2 = 1^2 = 1$ $(**)$

DE $(*)$ Y $(**)$ CONCLUIMOS QUE ES VÁLIDO EL PASO BASE.

(II) PASO INDUCTIVO: SUPONEMOS QUE LA PROPOSICIÓN ES VÁLIDA PARA $n=k$ Y QUEREMOS CONCLUIR A PARTIR DE ESO QUE LA PROPOSICIÓN ES VÁLIDA PARA $n=k+1$. SUPONEMOS ENTONCES VÁLIDA LA HIPÓTESIS DE INDUCCIÓN:

(HI): $\sum_{i=1}^{k} i = \frac{k(k+1)}{2}$

Y QUEREMOS PROBAR A PARTIR DE ESTO QUE $\sum_{i=1}^{k+1}(2i-1)=(k+1)^2$:

$$\sum_{i=1}^{k+1}(2i-1) = \sum_{i=1}^{k}(2i-1) + 2(k+1) - 1 \underset{(HI)}{=} k^2 + 2k + 1 = (k+1)^2,$$

BUSCAMOS QUE APAREZCA LA (HI)

QUE ES LO QUE QUERÍAMOS PROBAR.

(III) AHORA, POR (I), POR (II) Y POR EL PRINCIPIO DE INDUCCIÓN MATEMÁTICA PODEMOS CONCLUIR QUE $\forall n \in \mathbb{N}$:

$$\sum_{i=1}^{n}(2i-1) = n^2.$$

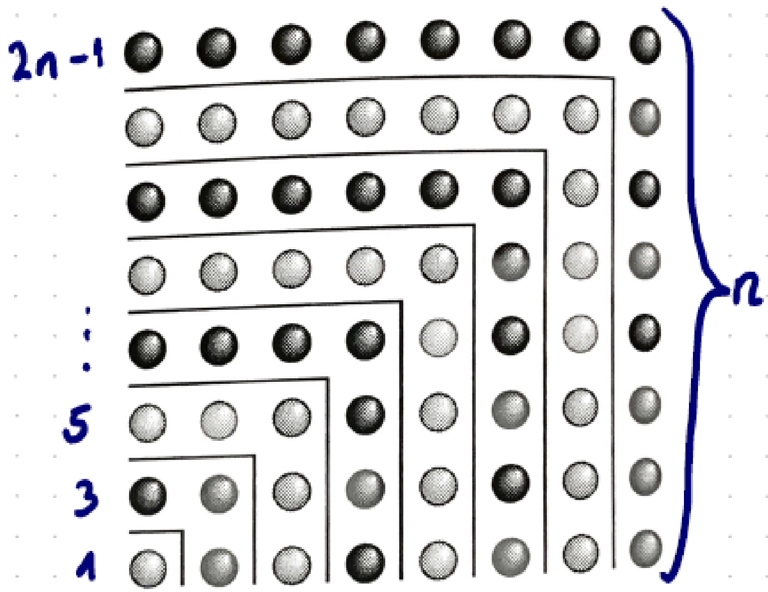
"PRUEBA COMPLETADA" ∎

OBSERVACIONES:

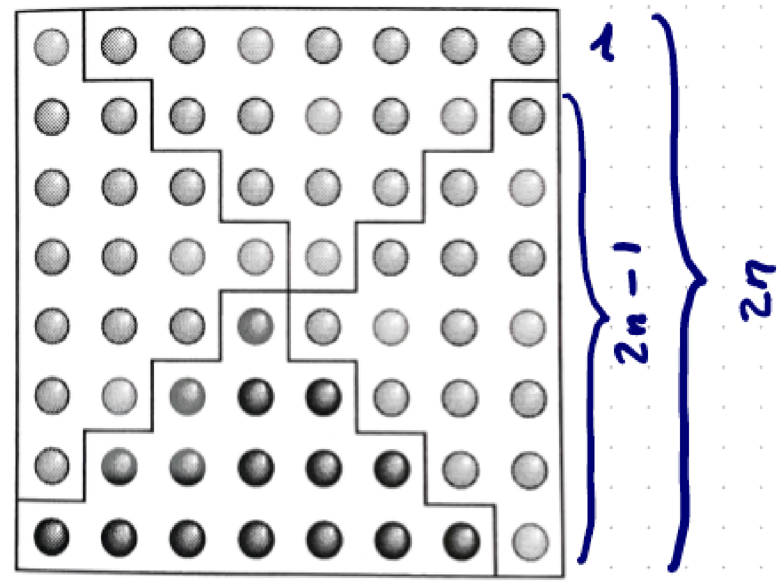
- TODA PRUEBA POR INDUCCIÓN DEBE INCLUIR LOS PASOS (I), (II) Y (III). SIEMPRE DEBE FIGURAR LA EXPRESIÓN "HIPÓTESIS INDUCTIVA".
- EL EJERCICIO 1 DEL TP 1 SE RESUELVE DE LA MISMA FORMA.

OBSERVACIÓN:

MUCHAS VECES HAY FORMAS INTUITIVAS DE VISUALIZAR LOS RESULTADOS DE ESTOS EJERCICIOS DE INDUCCIÓN. AQUÍ DOS FORMAS DE INTERPRETAR VISUALMENTE EL EJERCICIO ANTERIOR



$$1+3+\ldots+(2n-1)=n^2$$



$$1+3+\ldots+(2n-1)=\frac{1}{4}(2n)^2=n^2$$

ESTAS GRÁFICAS <u>NO</u> REEMPLAZAN LAS PRUEBAS RIGUROSAS, PERO AYUDAN A COMPRENDER LOS RESULTADOS

REPASO - Definiciones Preliminares. Sea $A \subseteq \mathbb{R}$

Definición: Se dice que x es máximo de A, lo notamos $x = \max A$, si y sólo si $x \in A \wedge x \geq y \ \forall y \in A$.

Definición: Se dice que x es mínimo de A, lo notamos $x = \min A$, si y sólo si $x \in A \wedge x \leq y \ \forall y \in A$.

Definición: Se dice que x es cota superior de A si y sólo si $x \geq y \ \forall y \in A$.

Definición: Se dice que x es cota inferior de A si y sólo si $x \leq y \ \forall y \in A$.

Definición: Se dice que x es supremo de A, lo notamos $x = \sup A$, si y sólo si x es cota superior de A y, $x \leq y$ para toda y cota superior de A.

Definición: Se dice que x es ínfimo de A, lo notamos $x = \inf A$, si y sólo si x es cota inferior de A y, $x \geq y$ para toda y cota inferior de A.

OBSERVACIONES:

- SI UN CONJUNTO $A \subseteq \mathbb{R}$ POSEE SUPREMO/ÍNFIMO, ENTONCES ES ÚNICO.

- $x = \max A \Rightarrow x$ ES COTA SUPERIOR DE A.
  $x = \min A \Rightarrow x$ ES COTA INFERIOR DE A.

- $x = \max A \Rightarrow x = \sup A$
  $x = \min A \Rightarrow x = \inf A$

- $\max A$ NO SIEMPRE EXISTE.
  $\min A$ NO SIEMPRE EXISTE.

- TODO CONJUNTO ACOTADO SUPERIORMENTE TIENE SUPREMO.
  TODO CONJUNTO ACOTADO INFERIORMENTE TIENE ÍNFIMO.

2.a) SEA $A \subseteq \mathbb{R}$ ACOTADO, $c \in \mathbb{R}^+$

$cA := \{c \cdot x \in \mathbb{R} : x \in A\}$. PROBAR QUE $\inf(c.A) = c \cdot \inf(A)$

D) SEA $\bar{x} = \inf A \Rightarrow$ (1) $\bar{x}$ ES COTA INFERIOR DE A $(\bar{x} \leq x \quad \forall x \in A)$

(2) $\bar{y}$ ES COTA INFERIOR DE A $\Rightarrow \bar{y} \leq \bar{x}$

QUEREMOS PROBAR QUE $c \cdot \bar{x} = \inf(c.A)$:

(I) ¿ $c \cdot \bar{x}$ ES COTA INFERIOR DE cA?

SEA $y \in cA \Rightarrow \exists x \in A / y = c \cdot x$. ADEMÁS $x \in A \overset{(1)}{\Longrightarrow} x \geq \bar{x} \Rightarrow y = cx \overset{c>0}{\geq} c\bar{x}$

ES DECIR $y \geq c\bar{x} \qquad \forall y \in cA$.

POR LO TANTO, $c\bar{x}$ ES COTA INFERIOR DE cA.

(II) ¿ $\bar{z}$ ES OTRA COTA INFERIOR DE $c.A \Rightarrow \bar{z} \leq c\bar{x}$?

SEA $\bar{y} \in \mathbb{R} / \bar{z} = c \cdot \bar{y} \quad (\bar{y} = \bar{z}/c)$

$\bar{z}$ ES COTA INFERIOR DE $c.A \Rightarrow \bar{z} \leq y \quad \forall y \in c.A$

$\overset{\bar{z} = c\bar{y}}{\Longrightarrow} c\bar{y} \leq y \quad \forall y \in cA \overset{y \in cA}{\Longrightarrow} c\bar{y} \leq cx \quad \forall x \in A \overset{c>0}{\Rightarrow} \bar{y} \leq x \quad \forall x \in A$.

ENTONCES $\bar{y}$ ES COTA INFERIOR DE $A \overset{(2)}{\Rightarrow} \bar{y} \leq \bar{x} \overset{c>0}{\Rightarrow} c\bar{y} \leq c\bar{x}$

$\therefore \quad \bar{z} \leq c\bar{x}$ QUE ES LO QUE QUERÍAMOS VER.

DE (I) Y (II) CONCLUIMOS QUE $c\bar{x} = \inf(cA)$

3. SEAN P Y P' DOS PARTICIONES DE $[a,b]$.

$P=\{t_0,t_1,\dots,t_n\}$ $t_0=a$, $t_n=b$, $t_i<t_{i+1}$ $\forall i=0,\dots,n-1$

$P'=\{s_0,s_1,\dots,s_m\}$ $s_0=a$, $s_m=b$, $s_i<s_{i+1}$ $\forall i=0,\dots,m-1$

BUSCAMOS P'' PARTICIÓN DE $[a,b]$ MÁS FINA QUE P Y P'.

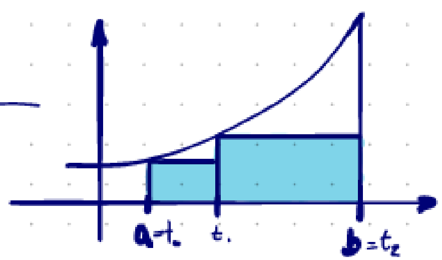
$P\subseteq P''$ $\quad$ $P'\subseteq P''$

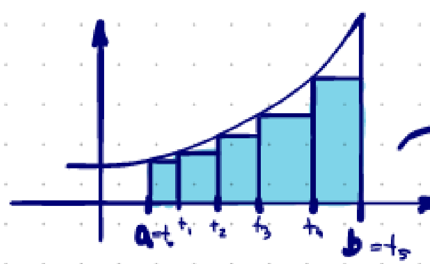
POSIBLE SOLUCIÓN: $P'':=P\cup P'$

↳ PROBAR QUE P'' ES MÁS FINA QUE P Y P'!

<u>OBSERVACIÓN</u>: CUANTO MÁS FINA UNA PARTICIÓN, MEJOR SE APROXIMAN LAS SUMAS INFERIORES Y SUPERIORES DE f PARA LA PARTICIÓN AL ÁREA DE LA REGIÓN COMPRENDIDA POR f EN EL INTERVALO DADO. EJEMPLO CON SUMA INFERIOR:

MENOS FINA





MÁS FINA

4a) SEA $f(x) = 3x^2 + 1$ EN $[0,1]$ TOMAMOS $n=3$

$\mathcal{P} = \{t_0, t_1, t_2, t_3\}$ PARA QUE SEA REGULAR, DEBE VALER $t_i - t_{i-1} = \frac{b-a}{n} = \frac{1-0}{3} = \frac{1}{3} \quad \forall i = 1, \dots, 3$

t_0 Y t_3 YA ESTÁN DEFINIDAS ($t_0 = 0$, $t_3 = 1$). VEAMOS t_1, t_2:

TOMAMOS $i=1$: $\frac{1}{3} = t_1 - t_0 = t_1 - 0 = t_1 \quad \therefore t_1 = \frac{1}{3}$

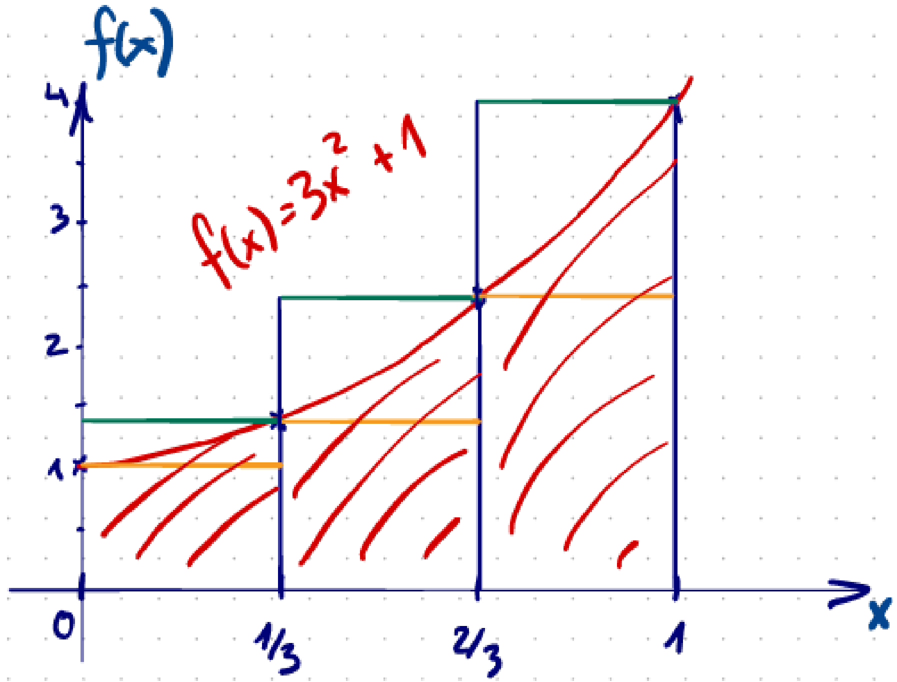
TOMAMOS $i=2$: $\frac{1}{3} = t_2 - t_1 = t_2 - \frac{1}{3} \quad \therefore t_2 = \frac{2}{3}$

CONCLUIMOS: $P = \{0, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, 1\}$

<u>OBSERVACIÓN:</u>

¿PARA QUÉ USAMOS PARTICIONES REGULARES? SI USAMOS PARTICIONES REGULARES, LAS CUENTAS EN LAS SUMAS INFERIORES Y SUPERIORES SE SIMPLIFICAN MUCHO!

$$L(f,P) = \sum_{i=1}^{n} \underbrace{(t_i - t_{i-1})}_{=1/n} m_i = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} m_i \qquad U(f,P) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} M_i$$



$$L(f,P)=\frac{1}{3}\sum_{i=1}^{3} m_i=\frac{1}{3}\left(\frac{3}{3}+\frac{4}{3}+\frac{7}{3}\right)=\frac{14}{9}$$

$$U(f,P)=\frac{1}{3}\sum_{i=1}^{3} M_i=\frac{1}{3}\left(\frac{4}{3}+\frac{7}{3}+\frac{12}{3}\right)=\frac{23}{9}$$

$$\frac{14}{9}\leq R(f)\leq\frac{23}{9}$$

OBSERVACIÓN:

SI LA FUNCIÓN ES CRECIENTE/DECRECIENTE, ES FÁCIL HALLAR m_i, M_i, YA QUE LOS EXTREMOS DE LOS SUBINTERVALOS SE ASUMEN EN SUS RESPECTIVOS EXTREMOS.