Unidad 1: Presentación Axiomatica de los Números Reales
Analisis Matemático I

Iker M. Canut

15 de julio de 2020

1. Axiomas de Cuerpo

- Propiedad **Conmutativa**: $a+b=b+a$ y $a\cdot b=b\cdot a$
- Propiedad **Asociativa**: $a+(b+c)=(a+b)+c$ y $a\cdot(b\cdot c)=(a\cdot b)\cdot c$
- Propiedad **Distributiva**: $a\cdot(b+c)=a\cdot b+a\cdot c$
- Existencia de **Elementos Neutros**: $\forall a\in\mathbb{R}, a+0=a$ y $a\cdot 1=a$
- Existencia de **Elementos Opuestos**: $\forall a\in\mathbb{R}\ \exists b: a+b=b+a=0$
- Existencia de **Elementos Recíprocos**: $\forall a\neq 0,\ \exists b: a\cdot b=b\cdot a=1$

. . . .

$a=a$ $\qquad$ $a=b\Rightarrow b=a$ $\qquad$ $a=b\wedge b=c\Rightarrow a=c$

Teorema 1: Propiedad Cancelativa de la Suma: $a+b=a+c\Rightarrow b=c$
Corolario 1: Unicidad del Elemento Neutro de la Suma. $a+0'=0'+a=a\Rightarrow 0'=0$
Corolario 2: Unicidad del Elemento Opuesto. $a+b=a+b'=0\Rightarrow b=b'$
Teorema 2:

- $-(-a)=a$
- $-0=0$
- $0\cdot a=0$
- $a\cdot(-b)=(-a)\cdot b=-(a\cdot b)$
- $(-a)\cdot(-b)=a\cdot b$
- $a\cdot(b-c)=a\cdot c$

Teorema 3: Propiedad Cancelativa del Producto: $a\cdot b=a\cdot c\wedge a\neq 0\Rightarrow b=c$
Corolario 3: Unicidad del Elemento Neutro del Producto. $a+0'=0'+a=a\Rightarrow 0'=0$
Corolario 4: Unicidad del Recíproco. $\forall a\neq 0$, existe un único $b: a\cdot b=b\cdot a=1$
Teorema 4:

- 0 no tiene recíproco.
- $1^{-1}=1$
- $\dfrac{a}{1}=a$, si $a\neq 0$, $\dfrac{1}{a}=a^{-1}$
- $a\cdot b=0\Rightarrow a=0\vee b=0$
- $-a=(-1)\cdot a$
- $a\neq 0, b\neq 0, \left(\dfrac{a}{b}\right)^{-1}=\dfrac{a^{-1}}{b^{-1}}$
- $b\neq 0\wedge d\neq 0$:
  - $(b\cdot d)^{-1}=b^{-1}\cdot d^{-1}$
  - $\dfrac{a}{b}+\dfrac{c}{d}=\dfrac{a\cdot d+b\cdot c}{b\cdot d}$
  - $\dfrac{a}{b}\cdot\dfrac{c}{d}=\dfrac{a\cdot c}{b\cdot d}$

2. Axiomas de Orden

- Si $a,b\in\mathbb{R}_0^+\Rightarrow\ a+b\in\mathbb{R}_0^+$ y $a\cdot b\in\mathbb{R}_0^+$
- $\forall a\in\mathbb{R}: a\neq 0\Rightarrow$ o bien $a\in\mathbb{R}^+$ o $-a\in\mathbb{R}^+$
- $0\notin\mathbb{R}$

. . . .

- $a<b\Rightarrow b-a\in\mathbb{R}^+$
- $a>b\Rightarrow a-b\in\mathbb{R}^+$
- $a\leq b\Rightarrow$ o bien $b-a\in\mathbb{R}^+$ o $a=b$
- $a\geq b\Rightarrow$ o bien $a-b\in\mathbb{R}^+$ o $a=b$
- $a>0\iff a\in\mathbb{R}^+$

Teorema 5: Propiedad de Tricotomía: Dados $a,b\in\mathbb{R}$ sucede solo una de las siguientes proposiciones:

$a < b$ $\qquad$ $a > b$ $\qquad$ $a = b$

Teorema 6: Propiedad Transitiva de la Relación Menor: Si $a < b \wedge b < c \Rightarrow a < c$

Teorema 7:

- $a < b \Rightarrow a + c < b + c$
- $a < b \wedge c < d \Rightarrow a + c < b + d$
- $a < b \wedge c > 0 \Rightarrow a \cdot c < b \cdot c$
- $a < b \wedge c < 0 \Rightarrow a \cdot c > b \cdot c$
- $a \neq 0 \Rightarrow a^2 > 0$
- $1 > 0$
- $a < b \Rightarrow -b < -a$
- $a \cdot b > 0 \iff a$ y b son los dos positivos o los dos negativos.
- $a \cdot b < 0 \iff a$ positivo y b negativo, o a negativo y b positivo.
- $a > 0 \iff \dfrac{1}{a} > 0$
- $0 < a < b \Rightarrow 0 < \dfrac{1}{b} < \dfrac{1}{a}$

2.1. Números Naturales, Enteros, Racionales e Irracionales

Números Naturales: $\mathbb{N}$. El conjuntos inductivo más pequeño:

1. El número 1 pertenece al conjunto.
2. Si a pertenece al conjunto, $a + 1$ también pertenece.

Destacamos que 1 es el primer elemento de $\mathbb{N}$, i.e es el menor. Ergo, si $a < 1 \Rightarrow a \notin \mathbb{N}$

Números Enteros: $\mathbb{Z} = \{x \in \mathbb{R} : x \in \mathbb{N} \vee -x \in \mathbb{N} \vee x = 0\}$
La suma, la diferencia y el producto son operaciones cerradas en $\mathbb{Z}$.

Números Racionales: $\mathbb{Q} = \left\{x \in \mathbb{R} : \exists p, q \in \mathbb{Z}, q \neq 0 : x = \dfrac{p}{q}\right\}$

....

Observaciones: • $\mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$ • Dados $a, b \in \mathbb{R}, c, d \in \mathbb{R} - \{0\}$, $\dfrac{a}{c} = \dfrac{b}{d} \iff ad = bc$

2.2. Representación Geometrica de los numeros reales: la recta real

En una recta se elige un punto para representar al 0 y otro punto distinto para representar al 1 (esta elección fija la escala). Cada punto de la recta representa a un único número real y cada número real está representado por un único punto de la recta.

1. Si los puntos A y B representan los números reales a y b, A está a la izquierda de $B \iff a < b$.
2. Si los puntos A, B, C, D representan a los números reales a, b, c, d. con $a < b$ y $c < d$, entonces $\overline{AB}$ y $\overline{CD}$ son congruentes $\iff b - a = d - c$.

Además, los números positivos quedan a la derecha del 0, y los negativos a la izquierda del mismo.

2.3. Intervalos Reales

- $(a, b) = \{x \in \mathbb{R} : a < x < b\}$
- $[a, b) = \{x \in \mathbb{R} : a \leq x < b\}$
- $(a, b] = \{x \in \mathbb{R} : a < x \leq b\}$
- $[a, b] = \{x \in \mathbb{R} : a \leq x \leq b\}$
- $(a, +\infty) = \{x \in \mathbb{R} : a < x\}$
- $[a, +\infty) = \{x \in \mathbb{R} : a \leq x\}$
- $(-\infty, b) = \{x \in \mathbb{R} : x < b\}$
- $(-\infty, b] = \{x \in \mathbb{R} : x \leq b\}$

2.4. Valor absoluto de un número

Dado $x \in \mathbb{R}$, su valor absoluto es el número real $|x|$:

$$|x| = \begin{cases} x & , \text{si } x \geq 0 \\ -x & , \text{si } x < 0 \end{cases}$$

Geométricamente, $|x|$ es la distancia en la recta real entre los puntos 0 y x. También puede verse que la distancia entre dos puntos cualesquiera $x, y \in \mathbb{R}$ está dada por el valor $|x-y| = |y-x|$.

Proposición:

- $|x| \geq 0$
- $|x| = 0 \iff x = 0$
- $|x| = |-x|$
- $-|x| \leq x \leq |x|$
- Sea $a > 0$: $|x| < a \iff -a < x < a$
- Sea $a > 0$: $|x| > a \iff x < -a \veebar a < x$
- $|x+y| \leq |x| + |y|$
- $|x \cdot y| = |x| \cdot |y|$
- Sea $y \neq 0$, $\left|\frac{x}{y}\right| = \frac{|x|}{|y|}$

3. Introducción A10

Sea A un subconjunto no vacio de $\mathbb{R}$

- **Cota Superior**: Sea $b \in \mathbb{R}$, b es una cota superior de A si $a \leq b \ \forall a \in A$.
- **Cota Inferior**: Sea $b \in \mathbb{R}$, b es una cota inferior de A si $a \geq b \ \forall a \in A$.

- **Supremo**: b es supremo de $A \iff (a \leq b \ \forall a \in A) \wedge (c < b \Rightarrow c$ no es una cota superior de $A)$.
- **Ínfimo**: b es ínfimo de $A \iff (b \leq a \ \forall a \in A) \wedge (b < c \Rightarrow c$ no es una cota inferior de $A)$.

- **Máximo**: b es máximo de A si $a \leq b \ \forall a \in A \wedge b \in A$.
- **Mínimo**: b es mínimo de A si $b \leq a \ \forall a \in A \wedge b \in A$.

....

Teorema 8: Unicidad del supremo: Dos números distintos no pueden ser supremos de un mismo conjunto. Por esto tenemos una notación: $b = sup(A)$.
Teorema 9: Caracterización del Supremo: $b = sup(A) \iff b$ es una cota superior de A tal que $\forall \epsilon > 0$ existe algun elemento $a \in A$ tal que $b - \epsilon < a$.
Demostración:
$\Rightarrow$) Supongamos que no ocurre, entonces $a \leq b - \epsilon$ y es cota superior de A, pero contradice que b es supremo de A, porque $a \leq b - \epsilon < b$.
$\Leftarrow$) Queremos demostrar que $c < b$ no es cota superior de A. Sea $\epsilon_c = b - c > 0$ y como $\exists a \in A$: $b - \epsilon_c < a$, entonces $a > b - \epsilon_c = b - (b - c) = c$ i.e c no es cota superior de A. Luego, $b = sup(A)$.
Proposición 3: $b = max(A) \iff b \in A \wedge b = sup(A)$.
Proposición 4: $b = min(A) \iff b \in A \wedge b = inf(A)$.

3.1. Axioma del Supremo

Todo conjunto no vacío de números reales que sea acotado superiormente tiene un supremo.

Teorema 10: Existencia de Raices Cuadradas: Dado $a \geq 0$, existe un único $x \in \mathbb{R} : x \geq 0$ y $x^2 = a$. Si $a = 0$ es trivial. Si $a > 0$, sabemos que tiene dos soluciones (solo una es positiva). Se define el conjunto $S_a = \{x \in \mathbb{R} : x^2 \leq a\}$. Vemos que $S_a \neq \emptyset$ y que está acotado superiormente. Luego existe $b = sup(A)$. Luego, por tricotomía sacamos que $b^2 = a$.

Teorema 11: Propiedad Arquimediana de los Reales: Sean $x, y \in \mathbb{R}, x > 0 \Rightarrow \exists n \in \mathbb{N} : y < n \cdot x$. Va por absurdo, suponiendo $n \cdot x \leq y \ \forall n \in \mathbb{N}$. Definimos $S = \{n \cdot x : n \in \mathbb{N}\}$. S no es vacio, ergo existe $b = sup(S)$. Luego $\exists a \in S : b - x < a$ (Caracterización). Y se podria escribir como $a = m \cdot x$, $m \in \mathbb{N}$. Es decir, $b < mx + x = (m+1) \cdot x$. Pero $(m+1) \cdot x \in S$, y b no es cota superior de S, lo que contradice que $b = sup(S)$. Se contradice por suponer S acotado superiormente. Luego $\exists n \in \mathbb{N} : y < n \cdot x$.

Corolario 5:

- $\forall y \in \mathbb{R}, \exists n \in \mathbb{N} : y < N$.
- $\mathbb{N}$ no está acotado superiormente.
- Sea $x > 0$, $\exists n \in \mathbb{N} : \dfrac{1}{n} < x$
- $x, y, z \in \mathbb{R}, z > 0$, si $x \leq y < x + \dfrac{z}{n} \ \forall n \in \mathbb{N}$ entonces $x = y$.

Teorema 12: Si A está acotado inferiormente, entonces posee ínfimo.

....

Dado $x \in \mathbb{R}$, existe un único número p entero tal que $p \leq x < p + 1$. Demostracion:

- Si $x \in \mathbb{Z}$, $p = x$ verifica.
- Sino, si $0 < x < 1$, entonces $p = 0$ verifica.
- Sino, sea $S = \{n \in \mathbb{N} : x < n\}$ es distinto de $\emptyset$. Está acotado inferiormente por x, y por la propiedad arquimediana, existe $n_0 > x$ y $n_0 \in S$. Luego existe un minimo m y $m - 1 \leq x < m$ $\notin S$. Luego, llamando $p = m - 1$, tenemos que $p \leq x < p + 1$, siendo p único.
- Si $x < 0 \Rightarrow -x > 0$ y es análogo.

Y queda demostrado que cuaquiera sea $x \in \mathbb{R}$, existe un unico $p \in \mathbb{Z}$:

$$p \leq x < p + 1$$

que suele notarse como $[x]$ y se denomina **parte entera** de x:

$$[x] \leq x < [x] + 1$$