1.8. Derivada de la Función Inversa

Recordar!!!!!

Definición (Derivada).
Sea f una función definida en un intervalo abierto y a un punto cualquiera de dicho intervalo. Se dice que la función f tiene derivada en el punto a si y sólo existe el límite

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}.$$

De manera alternativa, proponiendo el cambio de variable $h=x-a$, f es derivable en el punto a, si y solamente si existe el límite

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}.$$

al límite, si existe, lo denominamos derivada de f en a

$$\boxed{\lim_{x \to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = f'(a).}$$

Ejemplo:

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} / x \to f(x) = \arctan(x)$$

Supongamos que queremos saber si f es derivable en 0. Deberíamos plantear

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x\to 0} \frac{\arctan(x) - \arctan(0)}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{\arctan(x)}{x}$$

y ver si existe dicho límite.

Ejemplo:

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} / x \to f(x) = \arctan(x)$$

Más aún, si que queremos saber si f es derivable en $a \in \mathbb{R}$, deberíamos plantear

$$f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{x \to a} \frac{\arctan(x) - \arctan(a)}{x - a}$$

Cómo lo resolvemos?

1.8. Derivada de la Función Inversa

Teorema 6. *[Derivada de la Función Inversa]*
Sea f una función biyectiva, definida en un intervalo abierto I y que es derivable en un punto $a \in I$, con $f'(a) \neq 0$.
Entonces, su función inversa, f^{-1}, es derivable en el punto $f(a)$, y vale

$$(f^{-1})'(f(a)) = \frac{1}{f'(a)} \ .$$

1.8. Derivada de la Función Inversa

Teorema 6. *[Derivada de la Función Inversa]*
Sea f una función biyectiva, definida en un intervalo abierto I y que es derivable en un punto $a \in I$, con $f'(a) \neq 0$.
Entonces, su función inversa, f^{-1}, es derivable en el punto $f(a)$, y vale

$$(f^{-1})'(f(a)) = \frac{1}{f'(a)}.$$

1.8. Derivada de la Función Inversa

Teorema 6. *[Derivada de la Función Inversa]*
Sea f una función biyectiva, definida en un intervalo abierto I y que es derivable en un punto $a \in I$, con $f'(a) \neq 0$.
Entonces, su función inversa, f^{-1}, es derivable en el punto $f(a)$, y vale

$$(f^{-1})'(f(a)) = \frac{1}{f'(a)} .$$

OBS: Si llamamos $b = f(a)$ entonces $a = f^{-1}(b)$ y queda $(f^{-1})'(b) = \frac{1}{f'(a)}$

Es decir que conociendo el valor de $f'(a)$

podemos hallar el valor de $(f^{-1})'(b)$

1.8. Derivada de la Función Inversa

Teorema 6. *[Derivada de la Función Inversa]*
Sea f una función biyectiva, definida en un intervalo abierto I y que es derivable en un punto $a \in I$, con $f'(a) \neq 0$.
Entonces, su función inversa, f^{-1}, es derivable en el punto $f(a)$, y vale

$$(f^{-1})'(f(a)) = \frac{1}{f'(a)} \ .$$

Demostración.

Para $x, a \in Dom(f)$ llamamos $y = f(x)$ y $b = f(a)$ entonces $x = f^{-1}(y)$ y $a = f^{-1}(b)$, con $y, b \in Im(f) = Dom(f^{-1})$.

Es decir

$$y = f(x) \iff x = f^{-1}(y)$$

$$b = f(a) \iff a = f^{-1}(b)$$

Escribiendo el límite del cociente incremental de la definición de derivabilidad para la función f^{-1} en el punto $b = f(a)$, tenemos

$$(f^{-1})'(f(a)) = \lim_{h \to 0} \frac{f^{-1}(f(a)+h) - f^{-1}(f(a))}{h} = \lim_{y \to f(a)} \frac{f^{-1}(y) - f^{-1}(f(a))}{y - f(a)}$$

Es decir

$$(f^{-1})'(f(a)) = \lim_{y \to f(a)} \frac{f^{-1}(y) - f^{-1}(f(a))}{y - f(a)} = \lim_{y \to f(a)} \frac{x - a}{f(x) - f(a)} = \lim_{y \to f(a)} \frac{1}{\frac{f(x)-f(a)}{x-a}}$$

Escribiendo el límite del cociente incremental de la definición de derivabilidad para la función f^{-1} en el punto $b = f(a)$, tenemos

$$(f^{-1})'(f(a)) = \lim_{h\to 0} \frac{f^{-1}(f(a)+h) - f^{-1}(f(a))}{h} = \lim_{y\to f(a)} \frac{f^{-1}(y) - f^{-1}(f(a))}{y - f(a)}$$

Es decir

$$(f^{-1})'(f(a)) = \lim_{y\to f(a)} \frac{f^{-1}(y) - f^{-1}(f(a))}{y - f(a)} = \lim_{y\to f(a)} \frac{x-a}{f(x)-f(a)} = \lim_{y\to f(a)} \frac{1}{\frac{f(x)-f(a)}{x-a}}$$

Escribiendo el límite del cociente incremental de la definición de derivabilidad para la función f^{-1} en el punto $b = f(a)$, tenemos

$$(f^{-1})'(f(a)) = \lim_{h\to 0} \frac{f^{-1}(f(a)+h) - f^{-1}(f(a))}{h} = \lim_{y\to f(a)} \frac{f^{-1}(y) - f^{-1}(f(a))}{y - f(a)}$$

Es decir

$$(f^{-1})'(f(a)) = \lim_{y\to f(a)} \frac{f^{-1}(y) - f^{-1}(f(a))}{y - f(a)} = \lim_{y\to f(a)} \frac{x-a}{f(x) - f(a)} = \lim_{y\to f(a)} \frac{1}{\frac{f(x)-f(a)}{x-a}}$$

Ahora bien, por hipótesis, sabemos que f es derivable en a, es decir que existe $f'(a)$ y por lo tanto, f es continua en a. Por el teorema de continuidad de la inversa entonces f^{-1} es continua en $f(a)$.

Por lo tanto

$$\lim_{y\to f(a)} f^{-1}(y) = f^{-1}(f(a))$$

Escribiendo el límite del cociente incremental de la definición de derivabilidad para la función f^{-1} en el punto $b = f(a)$, tenemos

$$(f^{-1})'(f(a)) = \lim_{h\to 0} \frac{f^{-1}(f(a)+h) - f^{-1}(f(a))}{h} = \lim_{y\to f(a)} \frac{f^{-1}(y) - f^{-1}(f(a))}{y - f(a)}$$

Es decir

$$(f^{-1})'(f(a)) = \lim_{y\to f(a)} \frac{f^{-1}(y) - f^{-1}(f(a))}{y - f(a)} = \lim_{y\to f(a)} \frac{x - a}{f(x) - f(a)} = \lim_{y\to f(a)} \frac{1}{\frac{f(x)-f(a)}{x-a}}$$

o dicho de otro modo

$$y \to f(a) \implies f^{-1}(y) \to f^{-1}(f(a)) \implies x \to a$$

Escribiendo el límite del cociente incremental de la definición de derivabilidad para la función f^{-1} en el punto $b = f(a)$, tenemos

$$(f^{-1})'(f(a)) = \lim_{h\to 0} \frac{f^{-1}(f(a)+h) - f^{-1}(f(a))}{h} = \lim_{y\to f(a)} \frac{f^{-1}(y) - f^{-1}(f(a))}{y - f(a)}$$

Es decir

$$(f^{-1})'(f(a)) = \lim_{y\to f(a)} \frac{f^{-1}(y) - f^{-1}(f(a))}{y - f(a)} = \lim_{y\to f(a)} \frac{x - a}{f(x) - f(a)} = \lim_{y\to f(a)} \frac{1}{\frac{f(x)-f(a)}{x-a}}$$

o dicho de otro modo

$$y \to f(a) \implies f^{-1}(y) \to f^{-1}(f(a)) \implies x \to a$$

Y entonces queda

$$(f^{-1})'(f(a)) = \lim_{y\to f(a)} \frac{1}{\frac{f(x)-f(a)}{x-a}} = \lim_{x\to a} \frac{1}{\frac{f(x)-f(a)}{x-a}}$$

Escribiendo el límite del cociente incremental de la definición de derivabilidad para la función f^{-1} en el punto $b = f(a)$, tenemos

$$(f^{-1})'(f(a)) = \lim_{h\to 0} \frac{f^{-1}(f(a)+h) - f^{-1}(f(a))}{h} = \lim_{y\to f(a)} \frac{f^{-1}(y) - f^{-1}(f(a))}{y - f(a)}$$

Es decir

$$(f^{-1})'(f(a)) = \lim_{y\to f(a)} \frac{f^{-1}(y) - f^{-1}(f(a))}{y - f(a)} = \lim_{y\to f(a)} \frac{x-a}{f(x) - f(a)} = \lim_{y\to f(a)} \frac{1}{\frac{f(x)-f(a)}{x-a}}$$

o dicho de otro modo

$$\Longrightarrow \quad x \to a$$

Y entonc

existe $f'(a)$

$f'(a) \neq 0$

puedo aplicar álgebra de límites!!

$$\lim_{x\to a} \frac{1}{\frac{f(x)-f(a)}{x-a}}$$

Escribiendo el límite del cociente incremental de la definición de derivabilidad para la función f^{-1} en el punto $b = f(a)$, tenemos

$$(f^{-1})'(f(a)) = \lim_{h\to 0} \frac{f^{-1}(f(a)+h) - f^{-1}(f(a))}{h} = \lim_{y\to f(a)} \frac{f^{-1}(y) - f^{-1}(f(a))}{y - f(a)}$$

Es decir

$$(f^{-1})'(f(a)) = \lim_{y\to f(a)} \frac{f^{-1}(y) - f^{-1}(f(a))}{y - f(a)} = \lim_{y\to f(a)} \frac{x-a}{f(x) - f(a)} = \lim_{y\to f(a)} \frac{1}{\frac{f(x)-f(a)}{x-a}}$$

o dicho de otro modo

$$y \to f(a) \implies f^{-1}(y) \to f^{-1}(f(a)) \implies x \to a$$

Y entonces queda

$$(f^{-1})'(f(a)) = \lim_{y\to f(a)} \frac{1}{\frac{f(x)-f(a)}{x-a}} = \lim_{x\to a} \frac{1}{\frac{f(x)-f(a)}{x-a}} = \frac{1}{f'(a)}$$

Escribiendo el límite del cociente incremental de la definición de derivabilidad para la función f^{-1} en el punto $b = f(a)$, tenemos

$$(f^{-1})'(f(a)) = \lim_{h\to 0} \frac{f^{-1}(f(a)+h) - f^{-1}(f(a))}{h} = \lim_{y\to f(a)} \frac{f^{-1}(y) - f^{-1}(f(a))}{y - f(a)}$$

Es decir

$$(f^{-1})'(f(a)) = \lim_{y\to f(a)} \frac{f^{-1}(y) - f^{-1}(f(a))}{y - f(a)} = \lim_{y\to f(a)} \frac{x-a}{f(x)-f(a)} = \lim_{y\to f(a)} \frac{1}{\frac{f(x)-f(a)}{x-a}}$$

o dicho de otro modo

$$y \to f(a) \implies f^{-1}(y) \to f^{-1}(f(a)) \implies x \to a$$

Y entonces queda

$$\boxed{(f^{-1})'(f(a)) =} \lim_{y\to f(a)} \frac{1}{\frac{f(x)-f(a)}{x-a}} = \lim_{x\to a} \frac{1}{\frac{f(x)-f(a)}{x-a}} = \boxed{\frac{1}{f'(a)}}$$

Derivada de Potencias de Exponente Racional

Proposición 6.

1. *Si* $n \in \mathbb{N}$ *entonces* $f(x) = x^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{x}$ *es derivable en todo* a *del dominio, con* $a \neq 0$ *y vale*

$$f'(a) = \frac{1}{n} a^{\frac{1}{n}-1}$$

Derivada de Potencias de Exponente Racional

Proposición 6.

1. *Si $n \in \mathbb{N}$ entonces $f(x) = x^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{x}$ es derivable en todo a del dominio, con $a \neq 0$ y vale*

$$f'(a) = \frac{1}{n} a^{\frac{1}{n}-1}$$

Demostración.

- Comencemos calculando, para $n \in \mathbb{N}$, la derivada de la función f, de ley

$$f(x) = \sqrt[n]{x} = x^{\dfrac{1}{n}},$$

  definida en el conjunto $\mathbb{R}$ si n es un natural impar, o $\mathbb{R}_0^+$ si n es un natural par, inversa de la función g tal que

$$g(x) = x^n.$$

Derivada de Potencias de Exponente Racional

Proposición 6.

1. *Si $n \in \mathbb{N}$ entonces $f(x) = x^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{x}$ es derivable en todo a del dominio, con $a \neq 0$ y vale*

$$f'(a) = \frac{1}{n} a^{\frac{1}{n}-1}$$

Demostración.

- Comencemos calculando, para $n \in \mathbb{N}$, la derivada de la función f, de ley

  $$f(x) = \sqrt[n]{x} = x^{\frac{1}{n}},$$

  definida en el conjunto $\mathbb{R}$ si n es un natural impar, o $\mathbb{R}_0^+$ si n es un natural par, inversa de la función g tal que

  $$g(x) = x^n.$$

El Teorema 6 nos dice que la función f es derivable en todo punto $b = g(a)$, donde sea $g'(a) \neq 0$. En nuestro caso queda entonces, con $g'(x) = nx^{n-1}$, f derivable en todo $b \neq 0$, y

Derivada de Potencias de Exponente Racional

Proposición 6.

1. *Si* $n \in \mathbb{N}$ *entonces* $f(x) = x^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{x}$ *es derivable en todo* a *del dominio, con* $a \neq 0$ *y vale*

$$f'(a) = \tfrac{1}{n} a^{\frac{1}{n}-1}$$

Demostración.

- Comencemos calculando, para $n \in \mathbb{N}$, la derivada de la función f, de ley

$$f(x) = \sqrt[n]{x} = x^{\frac{1}{n}},$$

definida en el conjunto $\mathbb{R}$ si n es un natural impar, o $\mathbb{R}_0^+$ si n es un natural par, inversa de la función g tal que

$$g(x) = x^n.$$

El Teorema 6 nos dice que la función f es derivable en todo punto $b = g(a)$, donde sea $g'(a) \neq 0$. En nuestro caso queda entonces, con $g'(x) = nx^{n-1}$, f derivable en todo $b \neq 0$, y allí vale

$$f'(b) = (g^{-1})'(g(a)) = \tfrac{1}{g'(a)}$$

Derivada de Potencias de Exponente Racional

Proposición 6.

1. *Si $n \in \mathbb{N}$ entonces $f(x) = x^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{x}$ es derivable en todo a del dominio, con $a \neq 0$ y vale*

$$f'(a) = \tfrac{1}{n} a^{\frac{1}{n}-1}$$

Demostración.

- Comencemos calculando, para $n \in \mathbb{N}$, la derivada de la función f, de ley

  $$f(x) = \sqrt[n]{x} = x^{\frac{1}{n}},$$

  definida en el conjunto $\mathbb{R}$ si n es un natural impar, o $\mathbb{R}_0^+$ si n es un natural par, inversa de la función g tal que

  $$g(x) = x^n.$$

El Teorema 6 nos dice que la función f es derivable en todo punto $b = g(a)$, donde sea $g'(a) \neq 0$. En nuestro caso queda entonces, con $g'(x) = nx^{n-1}$, f derivable en todo $b \neq 0$, y allí vale

$$f'(b) = (g^{-1})'(g(a)) = \frac{1}{g'(a)} = \frac{1}{n\,a^{n-1}} = \frac{1}{n\,(\sqrt[n]{b})^{n-1}} = \frac{1}{n\,b^{\frac{n-1}{n}}} = \frac{1}{n\,b^{1-\frac{1}{n}}} = \frac{1}{n}\,b^{\frac{1}{n}-1}.$$

Derivada de Potencias de Exponente Racional

Proposición 6.

1. *Si $n \in \mathbb{N}$ entonces $f(x) = x^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{x}$ es derivable en todo a del dominio, con $a \neq 0$ y vale*

$$f'(a) = \tfrac{1}{n} a^{\frac{1}{n}-1}$$

Demostración.

- Comencemos calculando, para $n \in \mathbb{N}$, la derivada de la función f, de ley

$$f(x) = \sqrt[n]{x} = x^{\frac{1}{n}},$$

  definida en el conjunto $\mathbb{R}$ si n es un natural impar, o $\mathbb{R}_0^+$ si n es un natural par, inversa de la función g tal que

$$g(x) = x^n.$$

El Teorema 6 nos dice que la función f es derivable en todo punto $b = g(a)$, donde sea $g'(a) \neq 0$. En nuestro caso queda entonces, con $g'(x) = nx^{n-1}$, f derivable en todo $b \neq 0$, y allí vale

$$f'(b) = (g^{-1})'(g(a)) = \frac{1}{g'(a)} = \frac{1}{na^{n-1}} = \frac{1}{n(\sqrt[n]{b})^{n-1}} = \frac{1}{nb^{\frac{n-1}{n}}} = \frac{1}{nb^{1-\frac{1}{n}}} = \frac{1}{n} b^{\frac{1}{n}-1}.$$

2. *Si* $n = \frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$ *entonces* $f(x) = x^{\frac{p}{q}} = (x^{\frac{1}{q}})^p$ *es derivable en todo* a *del dominio, con* $a \neq 0$ *y vale*

$$f'(a) = \frac{p}{q} a^{\frac{p}{q}-1}$$

2. Si $n = \frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$ entonces $f(x) = x^{\frac{p}{q}} = (x^{\frac{1}{q}})^p$ es derivable en todo a del dominio, con $a \neq 0$ y vale

$$f'(a) = \tfrac{p}{q} a^{\frac{p}{q}-1}$$

Demostración.

para $n = \dfrac{p}{q} \in \mathbb{Q}$, con $p \in \mathbb{Z}$ y $q \in \mathbb{N}$, si

$$f(x) = x^{\frac{p}{q}} = (x^{\frac{1}{q}})^p \ ,$$

2. *Si* $n = \frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$ *entonces* $f(x) = x^{\frac{p}{q}} = (x^{\frac{1}{q}})^p$ *es derivable en todo* a *del dominio, con* $a \neq 0$ *y vale*

$$f'(a) = \frac{p}{q} a^{\frac{p}{q}-1}$$

Demostración.

para $n = \dfrac{p}{q} \in \mathbb{Q}$, con $p \in \mathbb{Z}$ y $q \in \mathbb{N}$, si

$$f(x) = x^{\frac{p}{q}} = (x^{\frac{1}{q}})^p \ ,$$

f es derivable en todo a del dominio de la función, con $a \neq 0$, y por la Regla de la Cadena,

$$f'(a) = p\,(a^{\frac{1}{q}})^{p-1}\,\frac{1}{q}\,a^{\frac{1}{q}-1} = \frac{p}{q}\,a^{\frac{p-1}{q}+\frac{1}{q}-1} = \frac{p}{q}\,a^{\frac{p}{q}-\frac{1}{q}+\frac{1}{q}-1} = \frac{p}{q}\,a^{\frac{p}{q}-1}$$

$$\boxed{p.\left(a^{\frac{1}{q}}\right)^{(p-1)}\left(a^{\frac{1}{q}}\right)'}$$

Ejemplo.

1. La función $f(x) = x^{\frac{1}{2}} = \sqrt{x}$, es derivable en todo $a > 0$, y vale
$$f'(a) = \frac{1}{2} a^{\frac{1}{2}-1} = \frac{1}{2} a^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2\sqrt{a}}.$$

Ejemplo.

1. La función $f(x) = x^{\frac{1}{2}} = \sqrt{x}$, es derivable en todo $a > 0$, y vale
$$f'(a) = \frac{1}{2}\, a^{\frac{1}{2}-1} = \frac{1}{2}\, a^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2\sqrt{a}}.$$

2. La función $f(x) = x^{-\frac{3}{2}} = \dfrac{1}{(\sqrt{x})^3}$, es derivable en todo $a > 0$, con
$$f'(a) = -\frac{3}{2}\, a^{-\frac{3}{2}-1} = -\frac{3}{2}\, a^{-\frac{5}{2}} = -\frac{3}{2\,(\sqrt{a})^5}.$$

Ejemplo.

1. La función $f(x) = x^{\frac{1}{2}} = \sqrt{x}$, es derivable en todo $a > 0$, y vale

$$f'(a) = \frac{1}{2}\,a^{\frac{1}{2}-1} = \frac{1}{2}\,a^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2\sqrt{a}}.$$

2. La función $f(x) = x^{-\frac{3}{2}} = \dfrac{1}{(\sqrt{x})^3}$, es derivable en todo $a > 0$, con

$$f'(a) = -\frac{3}{2}\,a^{-\frac{3}{2}-1} = -\frac{3}{2}\,a^{-\frac{5}{2}} = -\frac{3}{2\,(\sqrt{a})^5}.$$

3. La función $f(x) = \sqrt{\operatorname{sen}(4-x^2)}$ es derivable para $a \in (-2,2)$, con

$$f'(a) = \frac{1}{2\sqrt{\operatorname{sen}(4-a^2)}}\,\cos(4-a^2)\,(-2a).$$

$$\boxed{\left(\sin(4-a^2)\right)'}$$

Volviendo al comienzo de la clase

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} / x \to f(x) = \arctan(x)$$

Supongamos que queremos saber si f es derivable en 0. Deberíamos plantear

$$\lim_{x \to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \to 0} \frac{\arctan(x) - \arctan(0)}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{\arctan(x)}{x}$$

y ver si existe dicho límite.

Puedo determinar si es derivable y hallar $f'(a)$ de otra manera?

Derivada de Funciones Trigonométricas Inversas

1. Sea la función

$$f : \left[-\tfrac{\pi}{2}, \tfrac{\pi}{2}\right] \to [-1, 1]$$

$$f(x) = \operatorname{sen} x,$$

con función inversa

$$f^{-1} : [-1, 1] \to \left[-\tfrac{\pi}{2}, \tfrac{\pi}{2}\right]$$

$$f^{-1}(x) = \operatorname{arc\,sen} x \ .$$

Derivada de Funciones Trigonométricas Inversas

1. Sea la función

$$f : \left[-\tfrac{\pi}{2}, \tfrac{\pi}{2}\right] \to [-1, 1]$$
$$f(x) = \operatorname{sen} x,$$

con función inversa

$$f^{-1} : [-1, 1] \to \left[-\tfrac{\pi}{2}, \tfrac{\pi}{2}\right]$$
$$f^{-1}(x) = \operatorname{arc\,sen} x \ .$$

Por el Teorema 6, para todos los puntos a donde sea $f'(a) = \cos a \neq 0$, o sea si $a \neq \pm\frac{\pi}{2}$, se tendrá que f^{-1} es derivable en $b = f(a)$, y será

$$\boxed{(f^{-1})'(b) = \frac{1}{f'(a)}}$$

Derivada de Funciones Trigonométricas Inversas

1. Sea la función

$$f : \left[-\tfrac{\pi}{2}, \tfrac{\pi}{2}\right] \to [-1, 1]$$

$$f(x) = \operatorname{sen} x,$$

con función inversa

$$f^{-1} : [-1, 1] \to \left[-\tfrac{\pi}{2}, \tfrac{\pi}{2}\right]$$

$$f^{-1}(x) = \operatorname{arc\,sen} x \ .$$

Por el Teorema 6, para todos los puntos a donde sea $f'(a) = \cos a \neq 0$, o sea si $a \neq \pm\frac{\pi}{2}$, se tendrá que f^{-1} es derivable en $b = f(a)$, y será

$$\boxed{(f^{-1})'(b) = \tfrac{1}{f'(a)}}$$

$$(f^{-1})'(f(a)) = \frac{1}{\cos a} = \frac{1}{\sqrt{1-\operatorname{sen}^2 a}} = \frac{1}{\sqrt{1-(f(a))^2}}.$$

para todo $b \neq \pm 1 = f(\pm\frac{\pi}{2})$, arco seno es derivable, y vale

$$\boxed{(\operatorname{arc\,sen})'(b) = \frac{1}{\sqrt{1-b^2}}.}$$

2. Sea ahora la función

$$g : [0, \pi] \to [-1, 1]$$
$$g(x) = \cos x,$$

con función inversa

$$g^{-1} : [-1, 1] \to [0, \pi]$$
$$g^{-1}(x) = \arccos x.$$

2. Sea ahora la función

$$g : [0, \pi] \to [-1, 1]$$
$$g(x) = \cos x,$$

con función inversa

$$g^{-1} : [-1, 1] \to [0, \pi]$$
$$g^{-1}(x) = \arccos x.$$

En este caso para los a donde sea $g'(a) = -\operatorname{sen}\ a \neq 0$, o sea si $a \neq 0$ y $a \neq \pi$, se tendrá que g^{-1} es derivable en $b = g(a)$, y

$$(g^{-1})'(g(a)) = \frac{1}{-\operatorname{sen} a} = -\frac{1}{\sqrt{1-\cos^2 a}} = -\frac{1}{\sqrt{1-(g(a))^2}},$$

2. Sea ahora la función

$$g : [0, \pi] \to [-1, 1]$$
$$g(x) = \cos x,$$

con función inversa

$$g^{-1} : [-1, 1] \to [0, \pi]$$
$$g^{-1}(x) = \arccos x.$$

En este caso para los a donde sea $g'(a) = -\operatorname{sen}\ a \neq 0$, o sea si $a \neq 0$ y $a \neq \pi$, se tendrá que g^{-1} es derivable en $b = g(a)$, y

$$(g^{-1})'(g(a)) = \frac{1}{-\operatorname{sen} a} = -\frac{1}{\sqrt{1-\cos^2 a}} = -\frac{1}{\sqrt{1-(g(a))^2}},$$

y entonces aquí, para $b \neq 1 = g(0)$ y $b \neq -1 = g(\pi)$, arco coseno es derivable, y vale

$$\boxed{(\arccos)'(b) = -\frac{1}{\sqrt{1-b^2}}.}$$

Ahora sí, para la función

$$h : \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \to \mathbb{R}$$
$$h(x) = \tan x,$$

de inversa

$$h^{-1} : \mathbb{R} \to \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$$
$$h^{-1}(x) = \arctan x,$$

Ahora sí, para la función

$$h : \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \to \mathbb{R}$$
$$h(x) = \tan x,$$

de inversa

$$h^{-1} : \mathbb{R} \to \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$$
$$h^{-1}(x) = \arctan x,$$

para a tal que $h'(a) = \dfrac{1}{\cos^2\ a} = \sec^2\ a \neq 0$ se tendrá que h^{-1} es derivable en $b = h(a)$

$$\frac{1}{\cos^2\ a} = \sec^2\ a \neq 0 \qquad \text{en todo } a \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$$

$\boxed{\text{entonces para todo } b \in \mathbb{R}, \text{ arco tangente es derivable}}$

$$(h^{-1})'(h(a)) = \frac{1}{\sec^2 a}$$

Ahora sí, para la función

$$h : \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \to \mathbb{R}$$
$$h(x) = \tan x,$$

de inversa

$$h^{-1} : \mathbb{R} \to \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$$
$$h^{-1}(x) = \arctan x,$$

para a tal que $h'(a) = \dfrac{1}{\cos^2\ a} = \sec^2\ a \neq 0$ se tendrá que h^{-1} es derivable en $b = h(a)$

$$\frac{1}{\cos^2\ a} = \sec^2\ a \neq 0 \qquad \text{en todo } a \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$$

entonces para todo $b \in \mathbb{R}$, arco tangente es derivable,

$$(h^{-1})'(h(a)) = \frac{1}{\sec^2 a}$$

Necesitamos escribirlo en términos de *h*(*a*)=*b*!!!

Ahora sí, para la función

$$h:\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)\to\mathbb{R}$$
$$h(x)=\tan x,$$

de inversa

$$h^{-1}:\mathbb{R}\to\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$$
$$h^{-1}(x)=\arctan x,$$

para a tal que $h'(a)=\dfrac{1}{\cos^2\ a}=\sec^2\ a\neq 0$ se tendrá que h^{-1} es derivable en $b=h(a)$

$$\boxed{\sec^2 x=\frac{1}{\cos^2 x}=\frac{\cos^2 x+\operatorname{sen}^2 x}{\cos^2 x}=\frac{\cos^2 x}{\cos^2 x}+\frac{\operatorname{sen}^2 x}{\cos^2 x}=1+\tan^2 x.}$$

$$(h^{-1})'(h(a))=\frac{1}{\sec^2 a}$$ → **Necesitamos escribirlo en términos de *h*(*a*)=*b*!!!**

Ahora sí, para la función

$$h : \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \to \mathbb{R}$$
$$h(x) = \tan x,$$

de inversa

$$h^{-1} : \mathbb{R} \to \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$$
$$h^{-1}(x) = \arctan x,$$

$$(h^{-1})'(h(a)) = \frac{1}{\sec^2 a} = \frac{1}{1+\tan^2 a} = \frac{1}{1+(h(a))^2},$$

y entonces para todo $b \in \mathbb{R}$, arco tangente es derivable, con

$$\boxed{(\arctan)'(b) = \frac{1}{1+b^2}.}$$