PRÁCTICA 2 COMPLEMENTARIA- Funciones reales

1. a. Expresar el área y el perímetro de un triángulo equilátero como una función de la longitud del lado del mismo.

   b. Expresar la longitud de la arista l de un cubo como función de la longitud d de la diagonal del mismo. Expresar el área de la superficie y el volumen del cubo en función de la longitud d de su diagonal.

   c. Un recipiente prismático de almacenamiento, sin tapa, tiene $10m^3$ de volumen. La longitud de su base es el doble del ancho. El material de la base cuesta $\$100$ por metro cuadrado, y el de los lados $\$60$ por metro cuadrado. Expresar el costo de los materiales en función del ancho de la base e indicar su dominio.

2. Describir el dominio y recorrido de las siguientes funciones. Calcular el valor de la función en los puntos indicados en cada caso:

   a. $\begin{array}{rccl} g: & [0,9] & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & g(x) = 2-4x, \end{array}$ $\qquad x=0, x=1, x=4.$

   b. $f(x) = \begin{cases} 1 & -4 \leq x \leq 1 \\ 3-x & 1 < x \leq 3, \end{cases}$ $\qquad x=-1, x=1, x=1+c(0<c<2).$

3. Dada la función
$$\begin{array}{rccl} g: & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & g(x) = |x+5| + |x-2|, \end{array}$$

   a. Calcular $g(0), g(1), g(4), g(-5), g(t+2), g(x-1)$.

   b. ¿Existe algún $a \in \mathbb{R}$ tal que $g(a)=0$?.

4. Dada la función $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R} / x \mapsto f(x) = x^3$, determinar para cada una de las siguientes igualdades el conjunto de números reales para el cual es válida:
$$-i- \;\; f(-x) = f(x), \qquad -ii- \;\; f(-x) = -f(x), \qquad -iii- \;\; f(2x) = 4f(x).$$

5. $a)$ Hallar el dominio y simplificar la expresión de la función
$$g(h) = \frac{f(3+h)-f(3)}{h},$$
siendo $f(x) = \dfrac{1}{x-2}, (x \neq 2)$.

   $b)$ Simplificar el valor de la expresión
$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h}.$$

6. Representar gráficamente las siguientes funciones:

   -I- $f_1(x) = 3 - x$. -II- $f_2(x) = 1 - 3x$.

7. Dada la función

$$\begin{array}{rccl} f: & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & f(x) = \begin{cases} 2x, & x \leq -1, \\ x - 1, & -1 < x \leq 3, \\ 1 & x > 3, \end{cases} \end{array}$$

   representarla gráficamente e indicar su dominio y recorrido. Analizar si f es una función monótona.

8. Para cada una de las siguientes funciones: Indicar dominio y recorrido, dar una expresión en la cual no intervenga el valor absoluto y representarlas gráficamente.

   I. $f_1(x) = |x| - 1$. II. $f_2(x) = |5 - 2x|$.

9. Determinar si la siguiente función es monótona, indicando si lo es en forma estricta.
   $h(x) = \begin{cases} 1 - x, & x < 1, \\ 2 - x, & x \geq 1. \end{cases}$

10. Determinar si cada una de las siguientes funciones tiene algún tipo de paridad:

    I. $f_1(x) = x^3 - x$. II. $f_2(x) = 1 - 2x$.

11. Dada la función $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que

$$f(x) = \begin{cases} 2x + 2 & \text{si } x \leq 1 \\ 4 - x & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

    se define la función $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ impar y tal que para todo $x \in \mathbb{R}^+$ sea $g(x) = f(x)$.

    I- Representar gráficamente las funciones f y g e indicar sus recorridos.
    II- Encontrar la ley de la función g.

12. En cada uno de los siguientes casos esbozar, de ser posible, la gráfica de una función que cumpla con las propiedades especificadas. En el caso de no ser posible, justifique el porqué.

    -a- h es una función par y periódica de período 2.
    -b- Dado $p > 0$, s es una función periódica de período p y creciente.
    -c- j es una función impar, creciente en $(0, 1)$ y en $[1, +\infty)$ pero que no es creciente en $(0, +\infty)$.

ESCUELA DE CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
Av. Pellegrini 250. Rosario
+54 0341 - 480 2649 internos 216 - 119

13. Dada la función $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, donde

$$x \in \mathbb{R} \quad \to \quad f(x) = \begin{cases} |x| & \text{si } |x| \leq 1 \\ 1 & \text{si } |x| > 1, \end{cases}$$

se pide representar gráficamente a f y a las funciones definidas de la siguiente manera:

I. $f_1(x) = f(2x)$.

II. $f_2(x) = 3f(x)$.

III. $f_3(x) = f(x+1) + f(x-1)$.

IV. $f_4(x) = |1 - f(x)|$.

14. A partir de la gráfica de la función cuadrática $f(x) = x^2$ se pide representar gráficamente las funciones definidas de la siguiente manera:

I. $f_1(x) = -x^2 + 1$.

II. $f_2(x) = 2x - 2x^2 - \frac{3}{2}$.

15. Dadas las funciones $f_1(x) = 3x - 1$ y $f_2(x) = (x-4)(2x+3)$, determinar los conjuntos $A = \{x \in \mathbb{R} : \ 8 \leq f_1(x) \leq 11\}$ y $B = \{x \in \mathbb{R} \colon f_2(x) \leq 0\}$.

16. Demostrar la siguiente proposición:

$$3 < m < 8 \Rightarrow x^2 - 6mx + 8m^2 + 11m - 24 > 0 \, \forall \, x \in \mathbb{R}.$$

17. Un campo petrolero que contiene 20 pozos ha estado produciendo 4.000 barriles diarios de petróleo. Por cada nuevo pozo que es perforado se sabe que la producción diaria de cada uno disminuye en 5 barriles.

a) Escriba la producción diaria P del campo petrolero en función del número x de pozos nuevos que se perforan e indique el dominio de dicha función.

b) Represente gráficamente la función $x \mapsto P(x)$ y encuentre la cantidad de pozos nuevos que se deben perforar para maximizar la producción.

18. Sea S un número real positivo. Pruebe que entre todos los pares de números reales positivos x e y tales que $x + y = S$, la suma $x^2 + y^2$ es mínima cuando $x = y$.

19. Dada la función:

$$f(x) = \frac{3x}{x+1},$$

se pide:

I- Representarla gráficamente a partir de la gráfica de la función recíproca $f(x) = \frac{1}{x}$, $x \neq 0$.

II- Determinar el conjunto:

$$A = \{x \in \mathbb{R} : f(x) \leq 1\} \quad .$$

ESCUELA DE CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
Av. Pellegrini 250. Rosario
+54 0341 - 480 2649 internos 216 - 119

20. I- Representar gráficamente las siguientes funciones:

$$h_1(x) = \frac{1}{2}(\cos\, x + |\cos\, x|), \qquad h_2(x) = \operatorname{sen}(2x) - 1, \qquad h_3(x) = 2\operatorname{sen}\left(2x - \frac{\pi}{4}\right).$$

II- Demostrar que la función $f(x) = a\sin x + b\cos x$ siendo $a \in \mathbb{R}$ y $b \in \mathbb{R}$, se puede expresar de la siguiente manera:

$$f(x) = c\,\sin(x + \alpha),$$

donde $c = \sqrt{a^2 + b^2}$ y $\tan\alpha = \dfrac{b}{a}$ si $a \neq 0$. Analizar el valor de α si $a = 0$.

III- Utilizando el resultado de la parte b), representar gráficamente las funciones:

$$i) f_1(x) = \sin x + \cos x \qquad ii) f_2(x) = \sqrt{3}\sin x + \cos x$$

21. Representar gráficamente las siguientes funciones, indicando en cada caso su dominio y su imagen:

I- $f_1(x) = \left|\dfrac{x+2}{x-1}\right|.$

II- $f_2(x) = \begin{cases} \cos x & \text{si } 0 < |x| \leq \pi, \\ 2 & \text{si } x = 0. \end{cases}$

22. Hallar el dominio y la ley de cada una de las funciones compuestas $h = f \circ g$ y $r = g \circ f$ si:

I- $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$, $g(x) = x^2 - 4x$.

II- $f(x) = \begin{cases} x\,\sin\frac{\pi}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases} \qquad g(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 2 & \text{si } x = 0 \end{cases}.$

23. Dada la siguiente función: $f(x) = \sqrt{1+x}$, se pide:

-a- Demostrar que la función f es inyectiva.

-b- Simbolizando con g la inversa de la función f, describir su dominio.

-c- Hallar una expresión para obtener $g(y)$ para todo y perteneciente al dominio de la función g.

-d- A partir de la gráfica de la función f, representar gráficamente la función g.

24. -a- Representar gráficamente las funciones $f(x) = \sqrt{x}$ y $g(x) = \sqrt[3]{x}$ indicando su dominio y recorrido.

-b- Para cada uno de los siguientes casos hallar la ley, dominio y recorrido de la función cuya gráfica se obtiene:

I- trasladando la gráfica de la función f tres unidades hacia arriba,

II- trasladando la gráfica de la función f una unidad hacia la derecha y dos unidades hacia abajo,

III- reflejando respecto del eje x la gráfica de la función f y trasladándola dos unidades hacia abajo.

25. -a- Graficar las siguientes funciones por corrimientos:

$$i) f_1(x) = 2^{|x|}, \qquad ii)\ f_2(x) = \log_2(x-1) - 2 \qquad iii)\ f_3(x) = \Big||\log_2(x-1)| - 1\Big|.$$

-b- Determinar dominio, recorrido y los intervalos de crecimiento y decrecimiento de las funciones obtenidas en a).

ESCUELA DE CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
Av. Pellegrini 250. Rosario
+54 0341 - 480 2649 internos 216 - 119

26. Representar gráficamente la siguiente función:

$$g(x)=\begin{cases}1-2^{-x} & \text{si } 0\leq x<1,\\ 1-\dfrac{x}{2} & \text{si } 1\leq x\leq 2,\end{cases}$$

sabiendo que g periódica de período 2.

27. Hallar dominio e imagen de la siguiente función y representarla gráficamente. Estudiar crecimiento y decrecimiento.

$$f(x)=|\operatorname{arc}\cos(2x+1)| \qquad .$$

28. Demostrar las siguientes "identidades hiperbólicas".

   a) $\cosh^2(x)-\operatorname{senh}^2(x)=1$

   b) $\operatorname{senh}(x+y)=\operatorname{senh}(x)\cosh(y)+\cosh(x)\operatorname{senh}(y)$

   c) $\cosh(x+y)=\cosh(x)\cosh(y)+\operatorname{senh}(x)\operatorname{senh}(y)$

   Con lo demostrado anteriormente deducir identidades hiperbólicas para $\operatorname{senh}(2x)$ y $cosh(2x)$.

29. Dadas las funciones $f(x)=\sin(x-\pi)$, $g(x)=\left|\dfrac{x}{3}\right|$ y $h(x)=\dfrac{1}{x-4}$. y $k=h\circ g$.

   -a- Indicar el dominio y el recorrido de f, g y h, justificando analíticamente.

   -b- Obtener los conjuntos $g^{-1}([-2,4])$, $h([1,2])$ y $f^{-1}(\{-1\})$.[1]

   -c- Indicar el dominio de la función $k=h\circ g$.

   -d- Dar la ley de k.

   -e- Analizar la paridad de la función k.

   -f- Graficar la función k.

30. Sea la función g definida por

$$g(x)=\begin{cases}-3-\sqrt{-x-3} & \text{si } x\leq -3\\ -x & \text{si } -3<x<2\\ 2+\left(\dfrac{x}{2}\right)^2 & \text{si } 2\leq x\end{cases}$$

   -a- Indicar el dominio de g.

   -b- A partir de las gráficas de la función cuadrática y la función raiz cuadrada, elegir adecuadas transformaciones y trazar la gráfica de la función g. De la gráfica obtenida, indicar el recorrido de g.

   -c- Mostrar, a partir de la gráfica, que g es inyectiva.

   -d- A partir de la gráfica de la función g, realizar la gráfica de la función inversa.

   -e- Dar el dominio y la ley de la función inversa a g.

[1] Aclaración: Si f es una función y A un conjunto, se define $f(A)=\{y\in\mathbb{R}/y=f(x) \text{ para algún } x\in A\}$ y $f^{-1}(A)=\{x\in Dom(f)/f(x)\in A\}$.