Extendiendo la noción de potencia

Si $a \in \mathbb{R}$ y n es un número natural, entonces

$$a^n = a \cdot \overset{n \text{ veces}}{\cdots} \cdot a.$$

Extendiendo la noción de potencia

Si $a \in \mathbb{R}$ y n es un número natural, entonces

$$a^n = a \cdot \overset{n \text{ veces}}{\cdots} \cdot a.$$

Si $k \in \mathbb{Z}$, $k < 0$ y $a \neq 0$, $a^k = (a^{-1})^{-k}$.

Extendiendo la noción de potencia

Si $a \in \mathbb{R}$ y n es un número natural, entonces

$$a^n = a \cdot \overset{n \text{ veces}}{\cdots} \cdot a.$$

Si $k \in \mathbb{Z}$, $k < 0$ y $a \neq 0$, $a^k = (a^{-1})^{-k}$. Incluso si $r = \frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$, a^r tiene sentido para ciertos valores de a, y en ese caso

$$a^r = \sqrt[q]{a^p}.$$

Extendiendo la noción de potencia

Si $a \in \mathbb{R}$ y n es un número natural, entonces

$$a^n = a \cdot \overset{n \text{ veces}}{\cdots} \cdot a.$$

Si $k \in \mathbb{Z}$, $k < 0$ y $a \neq 0$, $a^k = (a^{-1})^{-k}$. Incluso si $r = \frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$, a^r tiene sentido para ciertos valores de a, y en ese caso

$$a^r = \sqrt[q]{a^p}.$$

El problema aparece cuando pretendemos extender la noción de potencia a^x para cualquier valor $x \in \mathbb{R}$. **¿Qué significa por ejemplo hacer 10^π?**

Consideremos por ejemplo la función $f(x) = 10^x$. El dominio de f incluirá a $\mathbb{Q}$, pero por ahora f no está definida para valores no racionales. Recurriremos a las propiedades de la potencia para intentar extender la definición de f.

Consideremos por ejemplo la función $f(x) = 10^x$. El dominio de f incluirá a $\mathbb{Q}$, pero por ahora f no está definida para valores no racionales. Recurriremos a las propiedades de la potencia para intentar extender la definición de f.
La propidad fundamental que queremos que se verifique es que

$$10^{x+y} = 10^x 10^y.$$

o sea, $f(x+y) = f(x)f(y)$.

Consideremos por ejemplo la función $f(x) = 10^x$. El dominio de f incluirá a $\mathbb{Q}$, pero por ahora f no está definida para valores no racionales. Recurriremos a las propiedades de la potencia para intentar extender la definición de f.

La propidad fundamental que queremos que se verifique es que

$$10^{x+y} = 10^x 10^y.$$

o sea, $f(x+y) = f(x)f(y)$.

Supondremos que f es derivable, e intentaremos calcular la derivada de f a partir de esta propiedad. Si obtenemos una expresión sencilla para f', podremos expresar a f como una función integral de su derivada: $f(x) = \int_0^x f'(t)dt + f(0)$ (observemos que 10 no juega ningún rol particular, podría ser $f(x) = a^x$ para cualquier valor $a > 0$).

Derivamos formalmente:

$$\begin{aligned} \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} &= \lim_{h\to 0} \frac{f(x)f(h)-f(x)}{h} \\ &= f(x) \lim_{h\to 0} \frac{f(h)-1}{h} \end{aligned}$$

Derivamos formalmente:

$$\begin{aligned}\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} &= \lim_{h\to 0}\frac{f(x)f(h)-f(x)}{h}\\ &= f(x)\lim_{h\to 0}\frac{f(h)-1}{h}\end{aligned}$$

Dado que $f(0)=1$, concluimos que si f es derivable, entonces

$$f'(x)=f'(0)f(x)=cf(x) \tag{1}$$

donde c es una constante (justamente $f'(0)$).

Derivamos formalmente:

$$\begin{aligned}
\lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} &= \lim_{h\to 0} \frac{f(x)f(h)-f(x)}{h} \\
&= f(x) \lim_{h\to 0} \frac{f(h)-1}{h}
\end{aligned}$$

Dado que $f(0) = 1$, concluimos que si f es derivable, entonces

$$f'(x) = f'(0)f(x) = cf(x) \tag{1}$$

donde c es una constante (justamente $f'(0)$). No obtuvimos lo que buscábamos, aunque la ecuación (1) resultará muy importante.

Hagamos una suposición más: que f es invertible, e intentemos calcular la inversa de f.

Hacemos el mismo procedimiento, es decir, derivamos f^{-1} con la esperanza de encontrar una expresión explícita para $(f^{-1})'$.

Hagamos una suposición más: que f es invertible, e intentemos calcular la inversa de f.

Hacemos el mismo procedimiento, es decir, derivamos f^{-1} con la esperanza de encontrar una expresión explícita para $(f^{-1})'$. Tenemos:

$$(f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))} = \frac{1}{cf(f^{-1}(x))} = \frac{1}{cx}$$

Hagamos una suposición más: que f es invertible, e intentemos calcular la inversa de f.
Hacemos el mismo procedimiento, es decir, derivamos f^{-1} con la esperanza de encontrar una expresión explícita para $(f^{-1})'$. Tenemos:

$$(f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))} = \frac{1}{cf(f^{-1}(x))} = \frac{1}{cx}$$

Observemos que $\frac{1}{cx}$ está bien definida y es integrable en cualquier intervalo cerrado de $\mathbb{R}^+$. Por lo tanto, de existir f^{-1}, deberá ser $f^{-1}(1) = 0$ y por lo tanto

$$f^{-1}(x) = \int_1^x \frac{1}{ct}\,dt$$

Hagamos una suposición más: que f es invertible, e intentemos calcular la inversa de f.

Hacemos el mismo procedimiento, es decir, derivamos f^{-1} con la esperanza de encontrar una expresión explícita para $(f^{-1})'$. Tenemos:

$$(f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))} = \frac{1}{cf(f^{-1}(x))} = \frac{1}{cx}$$

Observemos que $\frac{1}{cx}$ está bien definida y es integrable en cualquier intervalo cerrado de $\mathbb{R}^+$. Por lo tanto, de existir f^{-1}, deberá ser $f^{-1}(1) = 0$ y por lo tanto

$$f^{-1}(x) = \int_1^x \frac{1}{ct}\, dt$$

Por el momento no podemos determinar la constante c. Comenzaremos considerando el caso más simple, $c = 1$.

El logaritmo natural

Definición 32. Si $x > 0$, se define

$$\ln(x) = \int_1^x \frac{1}{t} dt$$

y se denomina *logaritmo natural*.

El logaritmo natural

Definición 32. Si $x > 0$, se define

$$\ln(x) = \int_1^x \frac{1}{t}dt$$

y se denomina *logaritmo natural*.

Observemos que:

- ln es una función continua y derivable (pues es la función integral de una función continua) y $\ln'(x) = \frac{1}{x}$.

El logaritmo natural

Definición 32. Si $x > 0$, se define

$$\ln(x) = \int_1^x \frac{1}{t} dt$$

y se denomina *logaritmo natural*.

Observemos que:

- ln es una función continua y derivable (pues es la función integral de una función continua) y $\ln'(x) = \frac{1}{x}$.
- $\ln(1) = \int_1^1 \frac{1}{t} dt = 0$.

El logaritmo natural

Definición 32. Si $x > 0$, se define

$$\ln(x) = \int_1^x \frac{1}{t} dt$$

y se denomina *logaritmo natural*.

Observemos que:

- ln es una función continua y derivable (pues es la función integral de una función continua) y $\ln'(x) = \frac{1}{x}$.
- $\ln(1) = \int_1^1 \frac{1}{t} dt = 0$.
- La función $\frac{1}{t}$ es positiva para cada $t > 0$. Luego si $a < b$, $\int_a^b \frac{1}{t} dt > 0$ y por lo tanto:
    - si $x > 1$, $\ln(x) > 0$,

El logaritmo natural

Definición 32. Si $x > 0$, se define

$$\ln(x) = \int_1^x \frac{1}{t} dt$$

y se denomina *logaritmo natural*.

Observemos que:

- ln es una función continua y derivable (pues es la función integral de una función continua) y $\ln'(x) = \frac{1}{x}$.
- $\ln(1) = \int_1^1 \frac{1}{t} dt = 0$.
- La función $\frac{1}{t}$ es positiva para cada $t > 0$. Luego si $a < b$, $\int_a^b \frac{1}{t} dt > 0$ y por lo tanto:
  - si $x > 1$, $\ln(x) > 0$,
  - si $0 < x < 1$, $\ln(x) = \int_1^x \frac{1}{t} dt = -\int_x^1 \frac{1}{t} dt < 0$.

El logaritmo natural

Definición 32. Si $x > 0$, se define

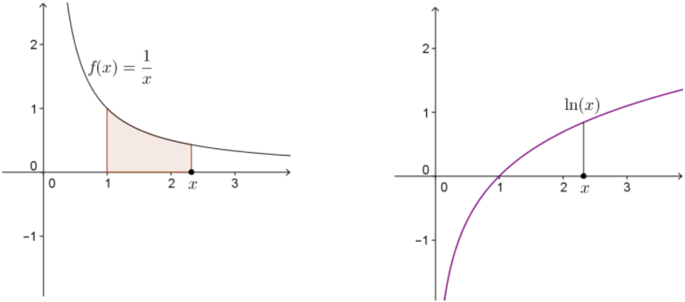
$$\ln(x) = \int_1^x \frac{1}{t} dt$$

y se denomina *logaritmo natural*.

Observemos que:

- ln es una función continua y derivable (pues es la función integral de una función continua) y $\ln'(x) = \frac{1}{x}$.
- $\ln(1) = \int_1^1 \frac{1}{t} dt = 0$.
- La función $\frac{1}{t}$ es positiva para cada $t > 0$. Luego si $a < b$, $\int_a^b \frac{1}{t} dt > 0$ y por lo tanto:
  - si $x > 1$, $\ln(x) > 0$,
  - si $0 < x < 1$, $\ln(x) = \int_1^x \frac{1}{t} dt = -\int_x^1 \frac{1}{t} dt < 0$.

Esbozamos a continuación la gráfica de ln:



Propiedades del logaritmo

Teorema 33. *Si* $x,\ y > 0$,

$$\ln(xy) = \ln(x) + \ln(y).$$

Propiedades del logaritmo

Teorema 33. *Si* $x, y > 0$,

$$\ln(xy) = \ln(x) + \ln(y).$$

<u>**Demostración:**</u> Fijemos $y > 0$ y tomemos x como variable para definir la función $f(x) = \ln(xy)$. Entonces

$$f'(x) = \ln'(xy) \cdot y = \frac{1}{xy} \cdot y = \frac{1}{x}.$$

Propiedades del logaritmo

Teorema 33. *Si* x, $y > 0$,

$$\ln(xy) = \ln(x) + \ln(y).$$

Demostración: Fijemos $y > 0$ y tomemos x como variable para definir la función $f(x) = \ln(xy)$. Entonces

$$f'(x) = \ln'(xy) \cdot y = \frac{1}{xy} \cdot y = \frac{1}{x}.$$

Luego f y ln tienen la misma derivada y por lo tanto debe existir una constante c tal que

$$f(x) = \ln(x) + c.$$

Propiedades del logaritmo

Teorema 33. *Si* $x, y > 0$,

$$\ln(xy) = \ln(x) + \ln(y).$$

Demostración: Fijemos $y > 0$ y tomemos x como variable para definir la función $f(x) = \ln(xy)$. Entonces

$$f'(x) = \ln'(xy) \cdot y = \frac{1}{xy} \cdot y = \frac{1}{x}.$$

Luego f y ln tienen la misma derivada y por lo tanto debe existir una constante c tal que

$$f(x) = \ln(x) + c.$$

Evaluando en $x = 1$, tenemos $f(1) = \ln(1) + c = c$. Concluimos que

$$\ln(xy) = f(x) = \ln(x) + f(1) = \ln(x) + \ln(y) \quad \square$$

Inductivamente puede probarse que:

Corolario 34. *Si n es un número natural y $x > 0$, entonces*

$$\ln(x^n) = n \ln(x).$$

Inductivamente puede probarse que:

Corolario 34. *Si n es un número natural y $x > 0$, entonces*

$$\ln(x^n) = n \ln(x).$$

Además vale:

Corolario 35. *Si $x, y > 0$ entonces*

$$\ln\left(\frac{x}{y}\right) = \ln(x) - \ln(y).$$

Inductivamente puede probarse que:

Corolario 34. *Si n es un número natural y $x > 0$, entonces*

$$\ln(x^n) = n \ln(x).$$

Además vale:

Corolario 35. *Si $x, y > 0$ entonces*

$$\ln\left(\frac{x}{y}\right) = \ln(x) - \ln(y).$$

Demostración: Basta observar que como $y > 0$, $x = \frac{x}{y} \cdot y$ y aplicar el Teorema 33. $\square$

Estas resultados muestran que la función ln verifica las propiedades que esperamos de un logaritmo.

Analicemos el comportamiento de la función ln:

Tenemos:

- Por como está definida, $\mathrm{Dom}(\ln) = \mathbb{R}^+$

Analicemos el comportamiento de la función ln:

Tenemos:

- Por como está definida, $\mathrm{Dom}(\ln) = \mathbb{R}^+$
- Como $2 > 1$, tenemos $\ln(2) > 0$. Fijemos $M > 0$ cualquiera. Por el principio de Arquímedes, existirá $n \in \mathbb{N}$ tal que

$$n \ln(2) > M,$$

o sea que $\ln(2^n) > M$ y por lo tanto ln no es acotada superiormente. De manera similar se prueba que ln no es acotada inferiormente.

Analicemos el comportamiento de la función ln:

Tenemos:

- Por como está definida, $\mathrm{Dom}(\ln) = \mathbb{R}^+$
- Como $2 > 1$, tenemos $\ln(2) > 0$. Fijemos $M > 0$ cualquiera. Por el principio de Arquímedes, existirá $n \in \mathbb{N}$ tal que

$$n \ln(2) > M,$$

  o sea que $\ln(2^n) > M$ y por lo tanto ln no es acotada superiormente. De manera similar se prueba que ln no es acotada inferiormente. Al ser ln continua concluimos que $\mathrm{Im}(\ln) = \mathbb{R}$.
- Si $y > x$, $y/x > 1$ y por el Corolario 35 tenemos

$$0 < \ln(y/x) = \ln(y) - \ln(x) \;\Rightarrow\; \ln(y) > \ln(x).$$

Analicemos el comportamiento de la función ln:

Tenemos:

- Por como está definida, $\mathrm{Dom}(\ln) = \mathbb{R}^+$
- Como $2 > 1$, tenemos $\ln(2) > 0$. Fijemos $M > 0$ cualquiera. Por el principio de Arquímedes, existirá $n \in \mathbb{N}$ tal que

$$n \ln(2) > M,$$

  o sea que $\ln(2^n) > M$ y por lo tanto ln no es acotada superiormente. De manera similar se prueba que ln no es acotada inferiormente. Al ser ln continua concluimos que $\mathrm{Im}(\ln) = \mathbb{R}$.
- Si $y > x$, $y/x > 1$ y por el Corolario 35 tenemos

$$0 < \ln(y/x) = \ln(y) - \ln(x) \;\Rightarrow\; \ln(y) > \ln(x).$$

  Luego ln es una función estrictamente creciente y por lo tanto admite inversa.

La función exponencial

Definición 36. Se denomina *función exponencial* a la función $\exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ dada por $\exp = \ln^{-1}$.

es de esperar que la función exp verifique la ecuación 1 para $c = 1$. En efecto, tenemos:

Teorema 37. Para cualquier número real x, se verifica

$$\exp'(x) = \exp(x).$$

La función exponencial

Definición 36. Se denomina *función exponencial* a la función $\exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ dada por $\exp = \ln^{-1}$.

es de esperar que la función exp verifique la ecuación 1 para $c = 1$. En efecto, tenemos:

Teorema 37. Para cualquier número real x, se verifica

$$\exp'(x) = \exp(x).$$

<u>**Demostración:**</u> Como la exponencial es por definición la inversa del logaritmo, tendremos:

$$\begin{aligned} \exp'(x) &= (\ln^{-1})'(x) = \frac{1}{\ln'(\ln^{-1}(x))} \\ &= \frac{1}{\frac{1}{\ln^{-1}(x)}} = \ln^{-1}(x) = \exp(x). \quad \square \end{aligned}$$

Propiedades de la función exponencial

Teorema 38. Para $x, y \in \mathbb{R}$, se tiene

$$\exp(x + y) = \exp(x) \cdot \exp(y).$$

Propiedades de la función exponencial

Teorema 38. Para $x, y \in \mathbb{R}$, se tiene

$$\exp(x+y) = \exp(x) \cdot \exp(y).$$

Demostración: Fijemos $x, y \in \mathbb{R}$ y pongamos $\overline{x} = \exp(x)$, $\overline{y} = \exp(y)$, es decir

$$x = \ln(\overline{x}), \quad y = \ln(\overline{y}).$$

Propiedades de la función exponencial

Teorema 38. Para $x, y \in \mathbb{R}$, se tiene

$$\exp(x+y) = \exp(x) \cdot \exp(y).$$

Demostración: Fijemos $x, y \in \mathbb{R}$ y pongamos $\overline{x} = \exp(x)$, $\overline{y} = \exp(y)$, es decir

$$x = \ln(\overline{x}), \quad y = \ln(\overline{y}).$$

Entonces, a partir del Teorema 33, tenemos

$$x + y = \ln(\overline{x}) + \ln(\overline{y}) = \ln(\overline{x}\,\overline{y}).$$

Propiedades de la función exponencial

Teorema 38. Para $x, y \in \mathbb{R}$, se tiene

$$\exp(x+y) = \exp(x) \cdot \exp(y).$$

Demostración: Fijemos $x, y \in \mathbb{R}$ y pongamos $\overline{x} = \exp(x)$, $\overline{y} = \exp(y)$, es decir

$$x = \ln(\overline{x}), \quad y = \ln(\overline{y}).$$

Entonces, a partir del Teorema 33, tenemos

$$x + y = \ln(\overline{x}) + \ln(\overline{y}) = \ln(\overline{x}\,\overline{y}).$$

Concluimos entonces que $\exp(x+y) = \overline{x}\,\overline{y} = \exp(x) \cdot \exp(y)$ como queríamos ver. $\square$

Teorema 40. *Para cada número racional r,*

$$\exp(rx) = \exp(x)^r.$$

Teorema 40. *Para cada número racional r,*

$$\exp(rx) = \exp(x)^r.$$

Demostración: A partir del Teorema 38 es fácil ver inductivamente que

$$\exp(nx) = \exp(x)^n$$

para cada $n \in \mathbb{N}$ y cualquier número real x.

Teorema 40. *Para cada número racional* r,

$$\exp(rx) = \exp(x)^r.$$

Demostración: A partir del Teorema 38 es fácil ver inductivamente que

$$\exp(nx) = \exp(x)^n$$

para cada $n \in \mathbb{N}$ y cualquier número real x.
Pongamos ahora $y = \frac{x}{n}$. Entonces

$$\exp(x) = \exp(ny) = \exp(y)^n = \exp\left(\frac{x}{n}\right)^n \Rightarrow \exp(x)^{\frac{1}{n}} = \exp\left(\frac{x}{n}\right)$$

Teorema 40. *Para cada número racional r,*

$$\exp(rx) = \exp(x)^r.$$

<u>**Demostración:**</u> A partir del Teorema 38 es fácil ver inductivamente que

$$\exp(nx) = \exp(x)^n$$

para cada $n \in \mathbb{N}$ y cualquier número real x.
Pongamos ahora $y = \frac{x}{n}$. Entonces

$$\exp(x) = \exp(ny) = \exp(y)^n = \exp\left(\frac{x}{n}\right)^n \Rightarrow \exp(x)^{\frac{1}{n}} = \exp\left(\frac{x}{n}\right)$$

Luego si $r = \frac{n}{m}$ con $m, n \in \mathbb{N}$, resulta

$$exp(rx) = \exp\left(n\frac{x}{m}\right) = \exp\left(\frac{x}{m}\right)^n = \exp(x)^{\frac{n}{m}}.$$

Dejamos como **ejercicio** el caso en que $n \in \mathbb{Z}$.

Definición 39. El número real $\exp(1)$ se denota por e. Es decir, e es tal que

$$\ln(e) = \int_1^e \frac{1}{t} dt = 1.$$

Definición 39. El número real $\exp(1)$ se denota por e. Es decir, e es tal que

$$\ln(e) = \int_1^e \frac{1}{t} dt = 1.$$

Definición 41. Para cualquier número real x, se define

$$e^x = \exp(x)$$

Observemos que a partir de esta definición hemos extendido la noción de potenciación a un exponente real cualquiera, solo cuando la base es el número e.

Definición 39. El número real exp(1) se denota por e. Es decir, e es tal que

$$\ln(e) = \int_1^e \frac{1}{t} dt = 1.$$

Definición 41. Para cualquier número real x, se define

$$e^x = \exp(x)$$

Observemos que a partir de esta definición hemos extendido la noción de potenciación a un exponente real cualquiera, solo cuando la base es el número e.

Esta definición efectivamente extiende el concepto de potencia pues cuando r es racional, se tiene

$$exp(r) = exp(1 \cdot r) = exp(1)^r = e^r.$$

Definición de a^x

Siguiendo las ideas del Teorema 40 puede probarse que para cualquier $r \in \mathbb{Q}$ y cualquier $a > 0$ vale

$$\ln(a^r) = r \ln(a).$$

Definición de a^x

Siguiendo las ideas del Teorema 40 puede probarse que para cualquier $r \in \mathbb{Q}$ y cualquier $a > 0$ vale

$$\ln(a^r) = r \ln(a).$$

Aplicando exp a ambos lados de la igualdad, resulta

$$a^r = \exp(r \ln(a)) = e^{r \ln(a)}$$

para cada $r \in \mathbb{Q}$.

Definición de a^x

Siguiendo las ideas del Teorema 40 puede probarse que para cualquier $r \in \mathbb{Q}$ y cualquier $a > 0$ vale

$$\ln(a^r) = r\ln(a).$$

Aplicando exp a ambos lados de la igualdad, resulta

$$a^r = \exp(r\ln(a)) = e^{r\ln(a)}$$

para cada $r \in \mathbb{Q}$. El lado derecho está sin embargo definido para cualquier $r \in \mathbb{R}$, lo que motiva:

Definición 42. Si $a > 0$, para cualquier número real x definimos

$$a^x = e^{x\ln(a)}.$$

Algunas observaciones:

- Tanto la función $\exp(x)$ como $h(x) = x \ln(a)$ son continuas y derivables. Por lo tanto la función $f(x) = a^x = \exp \circ h(x)$ resulta continua y derivable, y usando la regla de la cadena se obtiene

Algunas observaciones:

- Tanto la función $\exp(x)$ como $h(x) = x\ln(a)$ son continuas y derivables. Por lo tanto la función $f(x) = a^x = \exp\circ h(x)$ resulta continua y derivable, y usando la regla de la cadena se obtiene

$$\boxed{f'(x) = \exp'(h(x))h'(x) = \exp(h(x))\ln(a) = \ln(a)a^x.}$$

- Para $a > 0$ y $x \in \mathbb{R}$ cualquiera, se tiene

$$\ln(a^x) = \ln\left(e^{x\ln(a)}\right) = x\ln(a)$$

lo que generaliza la propiedad del Corolario 34.

Algunas observaciones:

- Tanto la función $\exp(x)$ como $h(x) = x\ln(a)$ son continuas y derivables. Por lo tanto la función $f(x) = a^x = \exp \circ h(x)$ resulta continua y derivable, y usando la regla de la cadena se obtiene

$$\boxed{f'(x) = \exp'(h(x))h'(x) = \exp(h(x))\ln(a) = \ln(a)a^x.}$$

- Para $a > 0$ y $x \in \mathbb{R}$ cualquiera, se tiene

$$\ln(a^x) = \ln\left(e^{x\ln(a)}\right) = x\ln(a)$$

  lo que generaliza la propiedad del Corolario 34.

Además es directo de la definición verificar que:

Teorema 43. *Si $a > 0$, cualesquiera sean $x, y \in \mathbb{R}$ se verifica:*

1. $(a^x)^y = a^{xy}$.
2. $a^1 = a$ *y* $a^{x+y} = a^x \cdot a^y$.

Analizamos el comportamiento de $f(x) = a^x$:

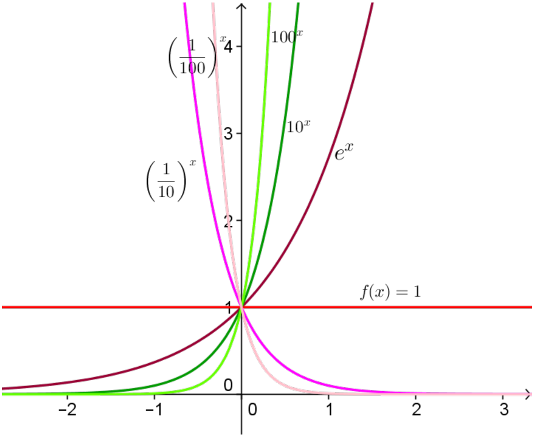
1. Si $a = 1$, entonces $1^x = e^{x \ln 1} = e^0 = 1$. Luego f es la función constante igual a 1.

Analizamos el comportamiento de $f(x) = a^x$:

1. Si $a = 1$, entonces $1^x = e^{x \ln 1} = e^0 = 1$. Luego f es la función constante igual a 1.
2. Si $0 < a < 1$, entonces $\ln(a) < 0$, luego si $x < y$, $y \ln(a) < x \ln(a)$ y como exp es creciente (por ser la inversa de una función creciente), resulta
$$a^y = e^{y \ln(a)} < e^{x \ln(a)} = a^x$$
con lo cual en este caso f es una función decreciente.

Analizamos el comportamiento de $f(x) = a^x$:

1. Si $a = 1$, entonces $1^x = e^{x \ln 1} = e^0 = 1$. Luego f es la función constante igual a 1.
2. Si $0 < a < 1$, entonces $\ln(a) < 0$, luego si $x < y$, $y \ln(a) < x \ln(a)$ y como exp es creciente (por ser la inversa de una función creciente), resulta
$$a^y = e^{y \ln(a)} < e^{x \ln(a)} = a^x$$
con lo cual en este caso f es una función decreciente.
3. Si $1 < a$, $\ln(a) > 0$ y un análisis análogo al del item anterior muestra que f es una función creciente.



$\left(\frac{1}{100}\right)^x$
100^x
10^x
e^x
$\left(\frac{1}{10}\right)^x$
$f(x) = 1$
4
3
2
1
0
−2
−1
0
1
2
3

Logaritmos en cualquier base

Definición 44. Dado un número real positivo a se denomina función *logaritmo en base a* a la función inversa de la función a^x. Se denota $\log_a(x)$ y verifica:

$$\log_a(x) = y \iff a^y = x$$

Logaritmos en cualquier base

Definición 44. Dado un número real positivo a se denomina función *logaritmo en base a* a la función inversa de la función a^x. Se denota $\log_a(x)$ y verifica:

$$\log_a(x) = y \iff a^y = x$$

Observemos que

$$\begin{aligned} \log_a(x) = y \quad &\iff \quad a^y = x \iff x = e^{y \ln a} \\ &\iff \quad \ln(x) = \ln\left(e^{y\ln(a)}\right) \iff \ln(x) = y\ln(a) \\ &\iff \quad \log_a(x) = \frac{\ln(x)}{\ln(a)}. \end{aligned}$$

Logaritmos en cualquier base

Definición 44. Dado un número real positivo a se denomina función *logaritmo en base a* a la función inversa de la función a^x. Se denota $\log_a(x)$ y verifica:

$$\log_a(x) = y \;\Leftrightarrow\; a^y = x$$

Observemos que

$$\begin{aligned}
\log_a(x) = y \quad &\Leftrightarrow \quad a^y = x \;\Leftrightarrow\; x = e^{y \ln a} \\
&\Leftrightarrow \quad \ln(x) = \ln\left(e^{y\ln(a)}\right) \;\Leftrightarrow \ln(x) = y\ln(a) \\
&\Leftrightarrow \quad \log_a(x) = \frac{\ln(x)}{\ln(a)}.
\end{aligned}$$

Por lo tanto

$$\mathrm{Dom}(\log_a) = \mathbb{R}^+, \quad \mathrm{Im}(\log_a) = \mathbb{R} \;/\; \mathrm{Dom}(a^x) = \mathbb{R}, \quad \mathrm{Im}(a^x) = \mathbb{R}^+$$

De las propiedades de a^x (pero también del hecho que $\log_a$ es un múltiplo de $\ln$) obtenemos que:

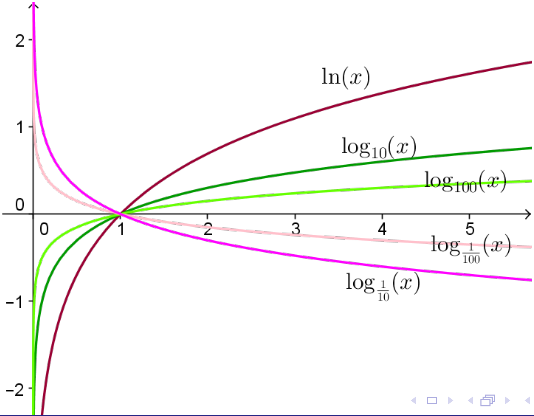
- Si $a = 1$, $\log_a$ no está definida.

De las propiedades de a^x (pero también del hecho que $\log_a$ es un múltiplo de $\ln$) obtenemos que:

- Si $a = 1$, $\log_a$ no está definida.
- Si $0 < a < 1$, entonces $\log_a$ es decreciente.

De las propiedades de a^x (pero también del hecho que $\log_a$ es un múltiplo de ln) obtenemos que:

- Si $a = 1$, $\log_a$ no está definida.
- Si $0 < a < 1$, entonces $\log_a$ es decreciente.
- Si $1 < a$, entonces $\log_a$ es creciente.



Propiedades caracterizantes de la función exponencial

Las funciones exponenciales son las únicas para las cuales su derivada coincide con la función:

Teorema 45. Si f es una función derivable tal que $f'(x) = f(x)$ para todo x, entonces existe un número real c tal que $f(x) = ce^x$.

Además, la función exponencial "crece más rapido" que cualquier polinomio, esto es:

Teorema 46. Para cualquier número natural n,

$$\lim_{x \to \infty} \frac{e^x}{x^n} = \infty.$$