Álgebra y Geometría Analítica I: Funciones

Depto de Matemática
Facultad de Ciencias Exactas, Ingeniería y Agrimensura
UNR

2020

Dados A y B conjuntos no vacíos, una función de A en B es una relación de A en B que verifica que *cada* elemento de A es *exactamente* una vez primera componente de un par ordenado de la relación. Lo notamos $f : A \to B$

En otras palabras la relación f es función si:

1. Para cada $a \in A$ existe $b \in B$ tal que (a,b) está en la relación
2. No puede haber dos pares (a,b_1) y (a,b_2) con $b_1 \neq b_2$ en la relación.

Podemos escrbir $f(a) = b$ para indicar que la *imagen* de $a \in A$ es el elemento $b \in B$.
Si la relación que es función es un subconjunto de $A \times B$ diremos que el *dominio* de la función f es A y el *codominio* de f es B. Escribimos Dom(f) y Codom(f) respectivamente.
La *imagen* de A está definida como
$f(A) = \{b \in B : b = f(a) \text{ para algún } a \in A\}$.

Ejemplo

Si $A = \{1,2,3\}$ *y* $B = \{w,x,y,z\}$ *sea*

$$f = \{(1,w),(2,x),(3,x)\}.$$

Notemos que f *cumple con las condiciones para ser función.*
Podemos escribir $f : A \to B$ *con* $f(1) = w$, $f(2) = x$ *y* $f(3) = x$.
En este caso $f(A) = \{w,x\}$.

Ejercicio

Cuántas funciones distintas se pueden definir de A en B?

Definición

Decimos que $f : A \to B$ es inyectiva si cada elemento de B aparece a lo sumo una vez como segunda componente de los pares ordenados de la relación.

O bien,

$$\forall a_1, a_2 \in A, \quad f(a_1) = f(a_2) \Rightarrow a_1 = a_2$$

Ejemplo

- *En el ejemplo anterior $f(2) = f(3)$ y por lo tanto f NO inyectiva*
- $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *tal que* $f(x) = 3x + 7$ *es inyectiva.*
  $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow 3x_1 + 7 = 3x_2 + 7 \Rightarrow 3x_1 = 3x_2 \Rightarrow x_1 = x_2$
- $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *tal que* $g(x) = |x|$ *NO es inyectiva.*

Ejercicio

Cuántas funciones INYECTIVAS hay de $A = \{1, 2, 3\}$ *en* $B = \{w, x, y, z\}$*? Existe una función inyectiva de A en B con $|B| = 2$?*

Como en relaciones, si $f : A \to B$ y $A_1 \subseteq A$,

$$f(A_1) = \{b \in B : f(a) = b \text{ para algún } a \in A_1\}$$

y decimos que es la imagen de A_1 por medio de f.
Si $A_1 = A$ notamos $f(A) = \mathrm{Im(f)}$ y es el conjunto imagen de f.

Ejemplo

- *$A = \{1,2,3,4,5\}$ y $B = \{w,x,y,z\}$, $f : A \to B$ es $f = \{(1,w),(2,x),(3,x),(4,y).(5,y)\}$ entonces $f(\{1,2\}) = \{w,x\}$.
  Además, $f(\{2,4,5\} = \{x,y\}$ y $f(\{5\}) = \{y\}$.*
- *Para $A = \{a,b,c\}$ sea $s : \mathscr{P}(A) \to \mathbb{N}$ tal que $s(X) = |X| + 1$. Es inyectiva?*
- *$h : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ tal que $h(x,y) = 2x + 3y$ verifica que $\mathrm{Im(h)} = \mathbb{Z}$.
  ya que: $\mathrm{Im(h)} \subseteq \mathbb{Z}$ y dado $z \in \mathbb{Z}$ existe $(-z,z) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ tal que $h(-z,z) = 2(-z) + 3z = z$. Esto prueba $\mathbb{Z} \subseteq \mathrm{Im(h)}$.*

TEOREMA

$f : A \to B$, $A_1, A_2 \subseteq A$

I) $f(A_1 \cup A_2) = f(A_1) \cup f(A_2)$

II) $f(A_1 \cap A_2) \subseteq f(A_1) \cap f(A_2)$

Dem. 

TEOREMA

Sea $f : A \to B$,

$\forall X_1, X_2 \subseteq A, \quad f(X_1 \cap X_2) = f(X_1) \cap f(X_2) \Leftrightarrow f$ *inyectiva.*

Dem.

$\Leftarrow)$

Por el teorema anterior, para cualquier $X_1, X_2 \subseteq A$,
$f(X_1 \cap X_2) \subseteq f(X_1) \cap f(X_2)$.

Ahora,

$y \in f(X_1) \cap f(X_2) \Rightarrow y \in f(X_1) \wedge y \in f(X_2) \Rightarrow \exists x_1 \in X_1 : \; y = f(x_1) \wedge \exists x_2 \in X_2 : \; y = f(x_2)$. Entonces $f(x_1) = f(x_2)$.

Como f inyectiva $x_1 (= x_2) \in X_1 \cap X_2$, $y \in f(X_1 \cap X_2)$.

$\Rightarrow)$

Sean $x_1, x_2 \in A$ tales que $f(x_1) = f(x_2)$. Definimos $X_1 = \{x_1\}$ y $X_2 = \{x_2\}$.

Por lo tanto, $f(X_1) = \{f(x_1)\}$ y $f(X_2) = \{f(x_2)\}$. De manera que $f(X_1) \cap f(X_2) = \{f(x_1)\}$.

Por hipótesis, $f(X_1) \cap f(X_2) = f(X_1 \cap X_2)$. Si $x_1 \neq x_2$, $X_1 \cap X_2 = \emptyset$. Contradiciendo la hipótesis.

Por lo tanto, $x_1 = x_2$, probando la inyectividad de f, ya que mostramos que

$$f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2.$$

Definición

$f : A \to B$, $A_1 \subseteq A$

- $f|_{A_1} : A_1 \to B$ *es tal que* $f|_{A_1}(a) = f(a)$ *si* $a \in A_1$.
  Es LA restricción de f *a* A_1.
- *Para* $A \subseteq A_2$, $g : A_2 \to B$ *tal que* $g(a) = f(a)$ *si* $a \in A$.
  Es UNA extensión de f *a* A_2.

Ejemplo

$A = \{1,2,3,4,5\}$, $B = \mathbb{N}$, $A_1 = \{2,3,5\}$ *y* $A_2 = \{1,2,3,4,5,6,10\}$. *Si* $f = \{(1,1),(2,3),(3,5),(4,7),(5,9)\}$

- $f|_{A_1} = \{(2,3),(3,5),(5,9)\}$
- $g : A_2 \to \mathbb{N}$:
  $g = \{(1,1),(2,3),(3,5),(4,7),(5,9),(6,11),(10,19)\}$ *es UNA extensión de* f *a* A_2.
- $h : A_2 \to \mathbb{N}$: $h = \{(1,1),(2,3),(3,5),(4,7),(5,9),(6,9),(10,8)\}$ *es UNA extensión de* f *a* A_2.

Definición

Dada una función $f : A \to B$ y $B_1 \subseteq B$, la preimagen de B_1 por medio de f, notada como $f^{-1}(B_1)$, es el conjunto

$$f^{-1}(B_1) = \{x \in A : f(a) \in B_1\}.$$

La preimagen de un conjunto es otro conjunto

Ejemplo

$f : \mathbb{Z} \to \mathbb{R}$ *tal que* $f(x) = x^2 + 5$.

- *Si* $B = \{0\}$ *entonces* $f^{-1}(B) = \emptyset$.
- *Si* $B = [5, +\infty)$ *entonces* $f^{-1}(B) = \mathbb{Z}$.
- *Si* $B = [6, 10]$ *entonces* $f^{-1}(B) = \{1, -1, -2, 2\}$. *(Verificarlo)*

Teorema

$f : A \to B$, $B_1, B_2 \subseteq B$, entonces:

- $f^{-1}(B_1 \cup B_2) = f^{-1}(B_1) \cup f^{-1}(B_2)$
- $f^{-1}(B_1 \cap B_2) = f^{-1}(B_1) \cap f^{-1}(B_2)$
- $f^{-1}(\overline{B_1}) = \overline{f^{-1}(B_1)}$

Dem. Hacemos solo la última, las otras dos ejercicio.

Dado $a \in A$,

$a \in f^{-1}(\overline{B_1}) \Leftrightarrow f(a) \in \overline{B_1} \Leftrightarrow \neg(f(a) \in B_1) \Leftrightarrow \neg(a \in f^{-1}(B_1)) \Leftrightarrow a \in \overline{f^{-1}(B_1)}$.

DEFINICIÓN

Decimos que $f : A \to B$ es suryectiva si cada elemento de B aparece una vez como segunda componente de los pares ordenados de la relación.

O bien, $f(A) = \mathrm{Im(f)} = B$

Dado $y \in B, \quad \exists x \in A\colon\ f(x) = y.$

EJEMPLO

1. $A = \{1,2,3,4\}$, $B = \{a,b,c,d\}$, $f = \{(1,a),(2,a),(3,d),(4,c)\}$ $\mathrm{Im(f)} = \{\mathrm{a,c,d}\}$. *No es sobre ya que $\exists b \in B$ que no tiene preimagen.*
2. *Si $g = \{(1,d),(2,b),(3,c),(4,a)\}$ con los mismos A y B,* $\mathrm{Im(g)} = \mathrm{B}$, *es decir, g es suryectiva.*
3. $A = \{1,2,3,4\}$, $B = \{w\}$ *cualquier función de A en B es suryectiva. Niguna función de B en A es suryectiva.*

Definición

Una función es biyectiva si es inyectiva y suryectiva.

Ejemplo

1. *La función del Ejemplo 1. anterior NO es biyectiva ya que no es suryectiva.*
2. *La función del Ejemplo 2. anterior es biyectiva ya que además de suryectiva es inyectiva (verificarlo).*
3. *Recordemos la función* $h : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ *tal que* $h(x,y) = 2x + 3y$. *Vimos que es suryectiva en un ejemplo anterior. Es inyectiva?*

   $$h(x_1,y_1) = h(x_2,y_2) \Rightarrow 2x_1 + 3y_1 = 2x_2 + 3y_2 \Rightarrow 2(x_1 - x_2) = 3(y_2 - y_1)$$

   Que podemos decir?
   Si tomamos $(3,0)$ *y* $(0,2)$ *la igualdad se cumple y los pares ordenados son distintos. NO es inyectiva. NO es biyectiva.*

Definición

Sean f y g dos funciones tales que $\mathrm{Im(f)} \cap \mathrm{Dom(g)} \neq \emptyset$. *Se define la* *composición de g con f y se la nota $g \circ f$ a la función con dominio:*

$$\mathrm{Dom(g \circ f)} = \{\mathrm{x} \in \mathrm{Dom(f)} : \ \mathrm{f(x)} \in \mathrm{Dom(g)}\}$$

y tal que $(g \circ f)(x) = g(f(x))$ *para todo* $x \in \mathrm{Dom(g \circ f)}$.

Bajo la condición $\mathrm{Im(f)} \cap \mathrm{Dom(g)} \neq \emptyset$ decimos que la *composición de g con f es posible* ya que su dominio es no vacío.

Existen funciones para las cuales $g \circ f$ está bien definida y que no lo esté $f \circ g$. Es más, pueden ser posibles ambas composiciones y sin embargo, ser distintas. Construir ejemplos de tales situaciones. Decimos entonces que la composición de funciones NO es conmutativa.

Proposición

La composición de funciones es asociativa.

Dem. Supongamos que $f : A \to B$, $g : B \to C$ y $h : C \to D$. En este caso son posibles las siguientes composiciones (verficarlo):
$(h \circ g) \circ f$ y $h \circ (g \circ f)$ y su dominio es A y codominio D.
Además,

$$((h \circ g) \circ f)(x) = (h \circ g)(f(x)) = h(g(f(x))) = h((g \circ f)(x)) = (h \circ (g \circ f))(x)$$

para cualquier $x \in A$.

Ejemplo

Si $f : A \to A$ la composición $f \circ f$ es posible y se nota f^2.

Recursivamente $f^n = f \circ f^{n-1}$ para $n \geq 2$.

TEOREMA

Si $f : A \to B$ y $g : B \to C$ inyectiva (suryectiva) entonces $g \circ f : A \to C$ es inyectiva (suryectiva).

Dem. Veamos que si f y g son inyectivas, $g \circ f$ lo es.
Dados $a_1, a_2 \in A$,

$$(g \circ f)(a_1) = (g \circ f)(a_2) \Rightarrow g(f(a_1)) = g(f(a_2)) \Rightarrow f(a_1) = f(a_2) \Rightarrow a_1 = a_2.$$

Para la suryectividad: dado $c \in C$ sabemos que existe $b \in B$ tal que $g(b) = c$ (g suryectiva).
Dado ESE elemento b por la suryectividad de f, existe $a \in A$ tal que $f(a) = b$.
Por lo tanto, dado $c \in C$, existe $a \in A$ tal que $g(f(a)) = g(b) = c$.

DEFINICIÓN

Una función $f : A \to B$ es inversible si existe una función $g : B \to A$ tal que $g \circ f = id_A$ y $f \circ g = id_B$.

Si f es inversible, g también lo es.

TEOREMA

Si $f : A \to B$ es inversible y $g : B \to A$ es una inversa de f, entonces es única.

Dem.

Supongamos que existen dos funciones $g : B \to A$ y $h : B \to A$ tales que $f \circ h = id_B, f \circ g = id_B, g \circ f = id_A$ y $h \circ f = id_A$.
De esta manera:

$$h = h \circ id_B = h \circ (f \circ g) = (h \circ f) \circ g = id_A \circ g = g.$$

La inversa de f (si f inversible) tiene una notación propia por su unicidad: f^{-1}.

Teorema

$f : A \to B$ es inversible si y sólo si es biyectiva.

Dem.

$\Rightarrow$)

f inyectiva?

$$f(a_1) = f(a_2) \Rightarrow f^{-1}(f(a_1)) = f^{-1}(f(a_2)) \Rightarrow a_1 = a_2$$

f suryectiva?

Dado $b \in B$ ¿$\exists a \in A : f(a) = b$?

$f(a) = b \Leftrightarrow a = f^{-1}(b)$. Ahora $f^{-1}(b)$ existe para cualquier elemento $b \in B$ y $f^{-1}(b) \in A$.

$\Leftarrow$)

Como f es suryectiva, defino $g : B \to A$ de manera que a cada elemento de B le asigna $a \in A$ tal que $f(a) = b$.

Por la inyectividad g es función. En efecto, si $g(b) = a_1$ y $g(b) = a_2$, con $a_1 \neq a_2$ seria porque $f(a_1) = f(a_2)$, contradiciendo la inyectividad de f.

g está bien definida y verifica ser la inversa de f (verificar).

TEOREMA

Si $f : A \to B$ y $g : B \to C$ inversibles entonces $g \circ f$ es inversible y $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$.

Dem.

Como la composición de funciones biyectivas es biyectiva, $g \circ f$ es inversible.

Sólo resta verificar que LA inversa es $f^{-1} \circ g^{-1}$. Para ello:

$$(f^{-1} \circ g^{-1}) \circ (g \circ f) = f^{-1} \circ (g^{-1} \circ g) \circ f = f^{-1} \circ (id_B) \circ f$$

$= (f^{-1} \circ id_B) \circ f = f^{-1} \circ f = id_A.$

Análoga la otra composición.

Recordar definición de preimagen y contrastar con función inversa. La preimagen siempre existe, es un conjunto. La función inversa (cuando existe) es una FUNCIÓN.

TEOREMA

$f : A \to B$, A y B finitos, $|A| = |B|$. Entonces son equivalentes:

A) *f inyectiva;*

B) *f suryectiva;*

C) *f inversible.*

Hipótesis: A y B finitos.

Dem.

Ya sabemos que C) $\Leftrightarrow$ A) $\wedge$ B).
Si probamos que A) $\Leftrightarrow$ B) completamos la demostración.

Supongamos que f no es inyectiva y que vale B). Entonces existen $a_1 \neq a_2$ tales que $f(a_1) = f(a_2)$. Con lo cual $|A| > |f(A)| = |B|$. Contradicción.
Si f no es suryectiva y que vale A) $|f(A)| < |B| = |A|$ pero como es inyectiva $|A| \leq |f(A)|$. Contradicción.

DEFINICIÓN

Dados A y B no vacios, una función $f : A \times A \to B$ es una operación binaria en A. Si además, $\mathrm{Im(f)} \subseteq \mathrm{A}$ *la operación es cerrada en A.*

DEFINICIÓN

Si $g : A \to A$ entonces g es una operación monaria (unaria) en A.

EJEMPLO

- $f : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ *tal que* $f(a,b) = a - b$ *es una operación binaria cerrada en* $\mathbb{Z}$.
- $q : \mathbb{Z}^+ \times \mathbb{Z}^+ \to \mathbb{Z}$ *tal que* $g(a,b) = a - b$ *es una operación en* $\mathbb{Z}$ *que NO es cerrada. Ya que* $\exists (3,7) \in \mathbb{Z}^+ \times \mathbb{Z}^+$ *tal que* $g(3,7) \notin \mathbb{Z}^+$.
- $h : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ *tal que* $h(a) = \frac{1}{a}$ *es una operación monaria en* $\mathbb{R}^+$.

Ejemplo

Dado un conjunto universal $\mathscr{U}$ *consideramos*

- $f : \mathscr{P}(\mathscr{U}) \times \mathscr{P}(\mathscr{U}) \to \mathscr{P}(\mathscr{U})$ *tal que* $f(A,B) = A \cup B$. f *es una operación cerrada binaria.*
- $g : \mathscr{P}(\mathscr{U}) \to \mathscr{P}(\mathscr{U})$ *tal que* $g(A) = \overline{A}$ *es una operación monaria.*

Definición

Dada $f : A \times A \to B$ *operación binaria en* A.

- f *es* *conmutativa* *si* $f(a_1,a_2) = f(a_2,a_1)$ *para todo* $(a_1,a_2) \in A \times A$.
- *Si* f *es cerrada, entonces* f *es asociativa si* $f(f(a,b),c) = f(a,f(b,c))$ *para todo* $a,b,c \in A$.

Vamos comunmente a usar una notación más "parecida" a una operación. Por ejemplo, $f : A \times A \to B$ operación binaria en A tal que $f(a,b) = a \otimes b$. Entonces la asociatividad es mas "amigable" para usar $(a \otimes b) \otimes c = a \otimes (b \otimes c)$ para todo $a, b, c \in A$.

Ejemplo

- *Ya probamos que la operación unión de conjuntos verifica ambas.*
- *Sea* $h : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ *tal que* $h(a,b) = a|b|$ *es cerrada.*

  Es asociativa? Es conmutativa?
- $g : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{Z}$ *tal que* $g(a,b) = \lceil a+b \rceil$.

  Verificar que es cerrada y conmutativa.

  No es asociativa. Basta considerar $a = 0{,}2$, $b = 1{,}5$ *y* $c = 2{,}6$.

DEFINICIÓN

Dada $f : A \times A \to A$ operación binaria en A (obviamente cerrada). Decimos que la operación ***posee neutro*** *si existe $a_0 \in A$ tal que $f(a, a_0) = f(a_0, a) = a$ para todo $a \in A$.*

en la notación más usual escribimos $a \otimes a_0 = a_0 \otimes a = a$ para todo $a \in A$.

Para mostrar que una operación posee neutro, exhibimos un elemento que cumple con la definición...EXISTENCIA! Es único?

EJEMPLO

- *La operación unión de conjuntos posee neutro. El conjunto* $\emptyset$.
- *La operación intersección de conjuntos? El conjunto* $\mathscr{U}$ *tal que en* $\mathscr{P}(\mathscr{U})$ *esté definida la operación.*
- *En* $\mathbb{Z}$ *la operación* $a \otimes b = a - b$ *(la resta en* $\mathbb{Z}$*) posee neutro? NO. Cómo se prueba?*
- *Si* $A = \{1, 2, \ldots, 7\}$ *definimos* $g : A \times A \to A$ *tal que* $g(a, b) = \min\{a, b\}$.

  Es conmutativa?

  Es asociativa?

  Posee neutro? Si. El número $7 \in A$ *es tal que*

$$g(a, 7) = \min\{a, 7\} = a$$

  ya que $a \in A$ *verifica* $a \leq 7$.

TEOREMA

Si $f : A \times A \to A$ posee neutro, éste es único.

Dem.

Supongamos que $f(a,b) = a \otimes b$ y sean $x, y \in A$ elementos neutros. Entonces:

$$a \otimes x = x \otimes a = a \qquad \forall a \in A$$

y también

$$a \otimes y = y \otimes a = a \qquad \forall a \in A.$$

Como en particular $x \in A$ para y neutro, resulta que

$$x \otimes y = y \times x = x$$

pero si miramos a $y \in A$ para x neutro esta misma igualdad es

$$x \otimes y = y \times x = y.$$

Probando asi que $x = y$.

Definición

Dada $f : A \times A \to A$ operación binaria en A (obviamente cerrada). Si f posee neutro $x \in A$, decimos que la operación posee inversos si para cada $a \in A$ existe $a' \in A$ tal que $f(a,a') = f(a',a) = x$.

Ejemplo

Sea $\star$ la operación definida en $A = \{0,1,3\}$ dada por la siguiente tabla:

$\star$	0	1	3
0	1	3	0
1	3	0	1
3	0	1	3

Notemos que podemos ver la conmutatividad de la forma de la tabla, lo mismo que la existencia de neutro y de inverso. Es conmutativa y 3 es neutro. Todos los elementos poseen inverso, por ejemplo, 1 es inverso de 0.

Es otra forma de presentar las funciones que definen operaciones, por su "tabla de valores".

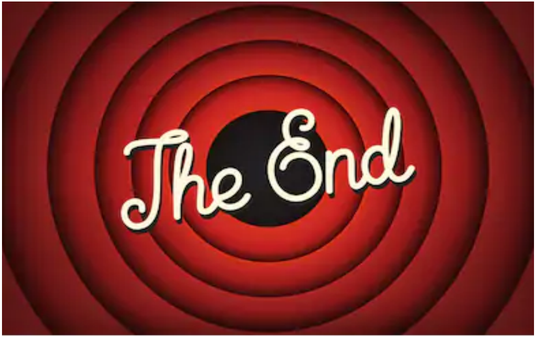
TEOREMA

Si $f : A \times A \to A$ es una operación asociativa, con elemento neutro $x \in A$ que posee inversos, entonces, cada elemento posee un único inverso.

Dem.

Supongamos que $a \in A$ posee dos elementos inversos, a_1 y a_2 y notemos con $f(a,b) = a \star b$. Entonces:

$$a_1 = a_1 \star x = a_1 \star (a \star a_2) = (a_1 \star a) \star a_2 = x \star a_2 = a_2.$$


The End