Introducción a la Matemática

Iker M. Canut

March 14, 2020

Contents

1 Unidad 1: Numeros Reales

Demostracion de la Propiedad Cancelativa de la Suma

Sea $d = a + b$, y por ende, $d = b + c$, por el Axioma 5, existe y que es opuesto a a, entonces:

$$y + d = y + (a + b) \overset{A2}{=} (y + a) + b = 0 + b \overset{A4}{=} b$$

$$y + d = y + (a + c) \overset{A2}{=} (y + a) + c = 0 + c \overset{A4}{=} c$$

$$b = c$$

□

Demostracion de la Unicidad del Elemento Neutro de la suma

Supongamos que 0' es un numero que tambien funciona como neutro de la suma, entonces

$$a + 0 = a \wedge a + 0' = a$$

$$a + 0 = a + 0'$$

Y por propiedad cancelativa de la suma

$$0 = 0'$$

□

Demostracion de la Unicidad del Elemento Opuesto

La existencia de un numero b esta dada por el axioma 5, hay que demostrar que es unico. Suponiendo que existe b' / $a + b' = b' + a = 0$, tenemos que

$$a + b = 0 \wedge a + b' = 0$$

$$a + b = a + b'$$

Y por propiedad cancelativa de la suma

$$b = b'$$

□

Demostracion de que el opuesto al opuesto de a es a

Sea b el opuesto de a, se puede concluir que $a + b = 0 \wedge b = (-a) \wedge a = (-b)$ $\quad (1) \wedge (2) \wedge (3)$

$$-(-a) \overset{(2)}{=} -b \overset{(3)}{=} a$$

□

Demostracion de que el opuesto de 0 es 0

Por el axioma 5, todo numero real tiene su opuesto. Llamemos 0' al opuesto de 0, siendo $0 + 0' = 0$ y Del axioma 3 se concluye que $0 + 0 = 0$

$$si\ 0 + 0' = 0 \wedge 0 + 0 = 0 \Rightarrow 0' = 0$$

□

Demostracion de que el producto de 0 con cualquier otro numero es 0

$$a.0 \overset{A4}{=} a.0+0 \overset{A5}{=} a.0+(a+(-a)) \overset{A2}{=} (a.0+a)+(-a) \overset{A4}{=} (a.0+a.1)+(-a) \overset{A3}{=}$$
$$a(0+1)+(-a) \overset{A4}{=} a.1+(-a) \overset{A4}{=} a+(-a) \overset{A5}{=} 0$$

□

$a(-b) = -(ab) = (-a)b$

$$a(-b) \overset{A4}{=} a(-b)+0 \overset{A5}{=} a(-b)+(ab+-(ab)) \overset{A2}{=} (a(-b)+ab)+-(ab) \overset{A3}{=}$$
$$(a((-b)+b)+-(ab)) \overset{A5}{=} a.0+-(ab) \overset{T2.3}{=} 0+-(ab) \overset{A4}{=} -(ab)$$

□

$(-a)(-b) = ab$

$$(-a)(-b) \overset{T2.4}{=} -((-a)(-(-b))) \overset{T2.1}{=} -((-a)b) \overset{T2.4}{=} -(-(ab)) \overset{T2.1}{=} ab$$

□

$a(b-c) = ab-ac$

Por la definicion de diferencia, se puede reescribir como:

$$a(b+(-c)) \overset{A3}{=} ab+a(-c) \overset{T2.4}{=} ab+-(ac)$$

Que por la definicion de diferencia, se puede reescribir como: $ab-ac$ □

$a<b \implies a+c<b+c$

$$a<b \overset{Def<}{\implies} b-a \in \mathbb{R}^+ \overset{A4}{\implies} (b-a)+0 \in \mathbb{R}^+ \overset{A5}{\implies} (b-a)+(c+-c) \in \mathbb{R}^+ \overset{Def-}{\implies} (b+-a)+(c+-c) \in \mathbb{R}^+$$

Reescribiendo usando $A1$ y $A2$:

$$(b+c)+(-a+-c) \in \mathbb{R}^+ \overset{T?}{\implies} (b+c)+-(a+c) \in \mathbb{R}^+ \overset{Def-}{\implies} (b+c)-(a+c) \in \mathbb{R}^+ \overset{Def<}{\implies} a+c<b+c$$

□

$a<b \wedge c>0 \implies ac<bc$

Tenemos que: $c>0 \implies c \in \mathbb{R}^+$

Analizamos $a<b$:

$$a<b \overset{Def<}{\implies} b-a \in \mathbb{R}^+ \overset{A7yc>0}{\implies} (b-a)c \in \mathbb{R}^+ \overset{A?}{\implies} bc-ac \in \mathbb{R}^+ \overset{Def<}{\implies} ac<bc$$

□

$a \neq 0 => a^2 > 0$

Por la propiedad tricotómica, $a \neq 0 => a > 0 xor a < 0$. Analicemos los dos casos.

Analizemos a >0:

$$a>0 \overset{Def>}{\implies} a-0 \in \mathbb{R}^+ \overset{Def-}{\implies} a+-0 \in \mathbb{R}^+ \overset{T?}{\implies} a \in \mathbb{R}^+ \overset{A?}{\implies} a*a \in \mathbb{R}^+ \overset{Def>yDefx^2}{\implies} a^2>0$$

Analizamos a < 0:

$$a < 0 \overset{Def<}{\Longrightarrow} 0 - a \in \mathbb{R}^+ \overset{Def-}{\Longrightarrow} 0 + -a \in \mathbb{R}^+ \overset{A?}{\Longrightarrow} -a \in \mathbb{R}^+ \overset{A?}{\Longrightarrow} -a * -a \in \mathbb{R}^+ \overset{T?}{\Longrightarrow}$$

$$(-1 * a) * (-1 * a) \in \mathbb{R}^+ \overset{A?}{\Longrightarrow} (-1 * -1) * (a * a) \in \mathbb{R}^+ \overset{A?}{\Longrightarrow} 1 * (a * a) \in \mathbb{R}^+ \overset{A?}{\Longrightarrow} a * a \in \mathbb{R}^+ \overset{Def>yDefx^2}{\Longrightarrow} a^2 > 0$$

□

$1 \in \mathbb{R}^+$

Existen neutros, 0 y 1, $0 \neq 1$

Ax 8, $1 \in \mathbb{R}^+ xor -1 \in \mathbb{R}^+$

Supongo $-1 \in \mathbb{R}^+$, entonces $1 \notin \mathbb{R}^+$

Por Ax 7 $-1 * -1 \in \mathbb{R}^+$

$-1 * -1 = 1 \in \mathbb{R}^+$, pero esto es una contradicción con lo supuesto □