Álgebra y Geometría Analítica1 Práctica - Teor'ia de Conjuntos

Ejercicios resueltos, página 3

---

12. Sean A, B y C conjuntos. Demostrar que:

    a) Si $A \subset B$ y $B \subseteq C$, entonces $A \subset C$.
    b) Si $A \subseteq B$ y $B \subset C$, entonces $A \subset C$.

    Solución:
    a) Tenemos
    $$A \subset B,$$
    lo que significa que
    $$\forall x, x \in A \Rightarrow x \in B \tag{1}$$
    y
    $$\exists y \in B : y \notin A \tag{2}$$
    y tenemos
    $$B \subseteq C,$$
    lo que significa que
    $$\forall x, x \in B \Rightarrow x \in C. \tag{3}$$

    Para probar ahora $A \subset C$ debemos probar dos cosas:
    1. que todo elemento de A es un elemento de C
    2. que hay un elemento de C que no es elemento de A.

    Comenzaremos probando 1. Sea entonces $x \in A$. De (1) obtenemos que entonces $x \in B$ y de (3) concluimos que entonces $x \in C$, que es lo que queríamos probar.

    Para probar 2., notemos que por (2), existe $y \in B$ de modo que $y \notin A$ y notemos que al tener $y \in B$, por (3) se tiene $y \in C$. Hallamos entonces un elemento de C que no es elemento de A, que es lo que queríamos probar.

    Habiendo probado 1. y 2., concluimos entonces que $A \subset C$. b) El razonamiento es análogo al que aplicamos en a).

14. Dado $E = \{1, \{2\}, \{3, 4\}, 5, \{6, 7\}\}$ decir cuáles de las siguientes afirmaciones son veraderas, justificando la respuesta.

    a) Verdadero, pues el primer elemento que figura en E es 1.
    b) Verdadero, pues el segundo elemento que figura en E es $\{2\}$
    c) Verdadero, pues $1 \in E$ implica $\{1\} \in P(E)$.
    d) Falso, pues para que esto sea verdad, 1 debería ser un elemento de $P(E)$, pero en $P(E)$ únicamente se encuentran conjuntos, y 1 no es un conjunto.

e) Verdadero, pues 5 es el cuarto elemento que figura en E y $5 \in E \iff \{5\} \subset E$.

f) Falso, pues $\{3,4\}$ es el tercer elemento que figura en E, de modo que $\{3,4\} \in E$. Esto implica que $\{\{3,4\}\} \in P(E)$.

g) Falso, pues 6 y 7 no figuran entre los 5 elementos de E.

h) Falso, mismo razonamiento que en d).

i) Falso, ya que no hay ningún elemento x en E de modo que el conjunto $\{x\}$ también pertenezca a E.

j) Falso, de hecho lo contrario es verdadero, por definición de $P(E)$: $\forall x \in E, \{x\} \in P(E)$.

k) Falso, ya que por definición, si $x \in E$, necesariamente $\{1\} \subset E$.

l) Verdadero, por ejemplo existe $x = 1$. Se tiene que $x \in E$ y que $\{1\} \in P(E)$, pero $\{1\} \subseteq P(E)$ es falso, por la misma justificación que en d).

15. Sean $A, B, C, D, E \subset \mathbb{Z}$, $A = \{2n : n \in \mathbb{Z}\}$, $B = \{3n : n \in \mathbb{Z}\}$, $C = \{4n : n \in \mathbb{Z}\}$, $D = \{6n : n \in \mathbb{Z}\}$ y $E = \{8n : n \in \mathbb{Z}\}$. Determinar cada uno de los siguientes conjuntos:
a) $C \cap E = E$
Lo probaremos por doble inclusión
1. Veamos que $C \cap E \subseteq E$. Sea entonces

$$x \in C \cap E.$$

Eso significa que

$$x \in C \text{ y } x \in E.$$

Pero aquí ya obtenemos el resultado deseado, ya que partimos de $x \in C \cap E$ y concluimos que $x \in E$. 2. Veamos que $E \subseteq C \cap E$. Sea entonces

$$x \in E.$$

Eso significa que existe $n_1 \in \mathbb{Z}$ de modo que

$$x = 8n_1.$$

Ahora, de esta igualdad obtenemos que

$$x = 8n_1 = 4(2n_1),$$

es decir que si definimos $n_2 := 2n_1 \in \mathbb{Z}$, entonces queda que

$$x = 4n_2,$$

de modo que podemos concluir que $x \in C$ y como por hipótesis ya teníamox que $x \in E$, obtenemos que

$$x \in C \cap E.$$

De 1. y 2. concluimos que $C \cap E = E$.

b) $B \cup D = B$
Probaremos que
$$D \subset B.$$
Para eso, sea $x \in D$, es decir que existe $n_1 \in \mathbb{Z}$ de modo que
$$x = 6n_1.$$
De manera similar a la parte 2. del ejercicio 14.a), podemos fijar $n_2 := 2n_1 \in \mathbb{Z}$ y obtenemos que
$$x = 3n_2,$$
de modo que podemos concluir que $x \in B$ y de esa forma queda probada la contención deseada.
Ahora obtenemos naturalmente la igualdad de conjuntos planteada, ya que teniendo en cuenta que $D \subset B$, se tiene
$$B \cup D = B.$$
c) $A \cap B = D$
Nuevamente lo probaremos por doble inclusión.
1. Veamos primero que $A \cap B \subseteq D$. Sea entonces
$$x \in A \cap B.$$
Esto significa que
$$x \in A \text{ y } x \in B,$$
lo que implica que existen $n_1, n_2 \in \mathbb{Z}$, de modo que
$$x = 2n_1 \text{ y } x = 3n_2.$$
De la igualdad que surge al combinar estas dos igualdades,
$$2n_1 = 3n_2,$$
podemos concluir que 3 divide a $2n_1$ (en efecto, $2n_1 = x$ y como x pertenece a B, sabemos que es un múltiplo de 3), pero sabiendo que 3 no divide a 2, concluimos que necesariamente 3 divide a n_1. Eso significa que existe $n_3 \in \mathbb{Z}$ de modo que
$$n_1 = 3n_3.$$
Reemplazando esto en la igualdad original, se obtiene
$$x = 2n_1 = 2(3n_3) = 6n_3,$$
es decir que $x \in D$.
2. Veamos ahora que $D \subseteq A \cap B$. Sea entonces
$$x \in D.$$

Esto significa que existe $n_1 \in \mathbb{Z}$ de modo que

$$x = 6n_1 = 2(3n_1) = 3(2n_1).$$

Fijando entonces $n_2 = 3n_1 \in \mathbb{Z}$ y $n_3 = 2n_1 \in \mathbb{Z}$, concluimos que

$$x = 2n_2 \text{ y } x = 3n_3,$$

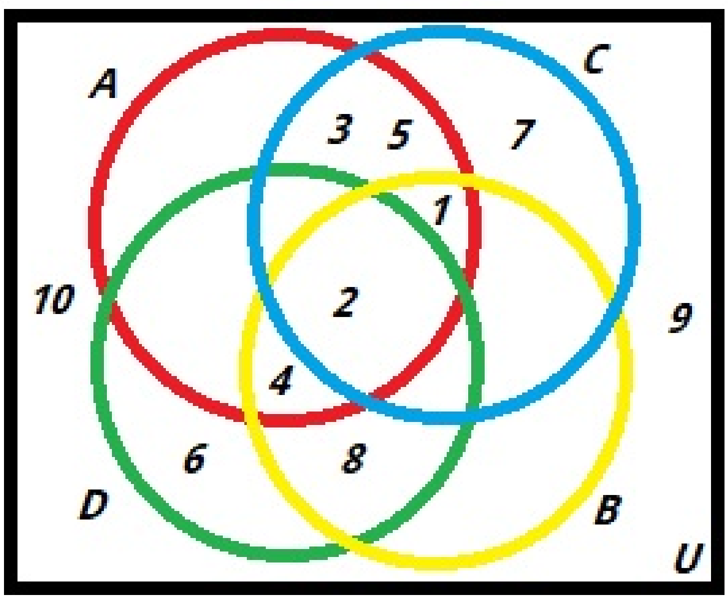
de modo que podemos concluir que

$$x \in A \text{ y } x \in B,$$

es decir $x \in A \cap B$, que es lo que queríamos probar.

De 1. y 2. concluimos que $A \cap B = D$.

16. El diagrama de Venn viene dado por:



a) $(A \cup B) \cap C = \{1, 2, 3, 5\}$
b) $A \cup (B \cap C) = \{1, 2, 3, 4, 5\}$
c) $\overline{C} \cup \overline{D} = \{1, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$
d) $\overline{C \cap D} = \{1, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$
e) $(A \cup B) - C = \{4, 8\}$
f) $(A \cup (B - C)) = \{1, 2, 3, 4, 5, 8\}$
g) $(B - C) - D = \emptyset$
h) $B - (C - D) = \{2, 4, 8\}$
i) $(A \cup B) - (C \cap D) = \{1, 3, 4, 5, 8\}$