Facultad de Ciencias Exactas, Ingeniería y Agrimensura
UNIVERSIDAD NACIONAL DE ROSARIO
Av. Pellegrini 250, S2000BTP, Rosario, Argentina

Álgebra y Geometría Analítica I

Relaciones - Resolución de ejercicios selectos

1. Si $U = \mathbb{N}$, $A = \{1, 2, 3, 4\}$, $B = \{2, 5\}$ y $C = \{3, 4, 7\}$, determinar y graficar los siguientes conjuntos como subconjuntos del plano:

   (a) $A \times B$
   (b) $B \times A$
   (c) $(A \times C) \cap (B \times C)$
   (d) $(A \cap B) \times C$
   (e) $(A \times C) \cup (B \times C)$
   (f) $(A \cup B) \times C$

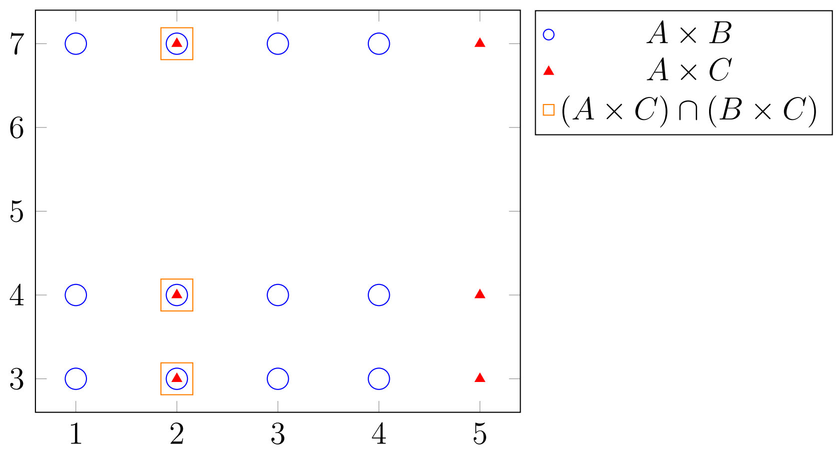
Solución:

(c) $(A \times C) \cap (B \times C)$
Tenemos que:

$$A \times C = \{(1,3),(1,4),(1,7),(2,3),(2,4),(2,7),(3,3),(3,4),(3,7),(4,3),(4,4),(4,7)\}$$
$$B \times C = \{(2,3),(2,4),(2,7),(5,3),(5,4),(5,7)\}$$

Hallamos la intersección, determinando los pares que forman parte de ambos conjuntos anteriores:

$$(A \times C) \cap (B \times C) = \{(2,3),(2,4),(2,7)\}$$

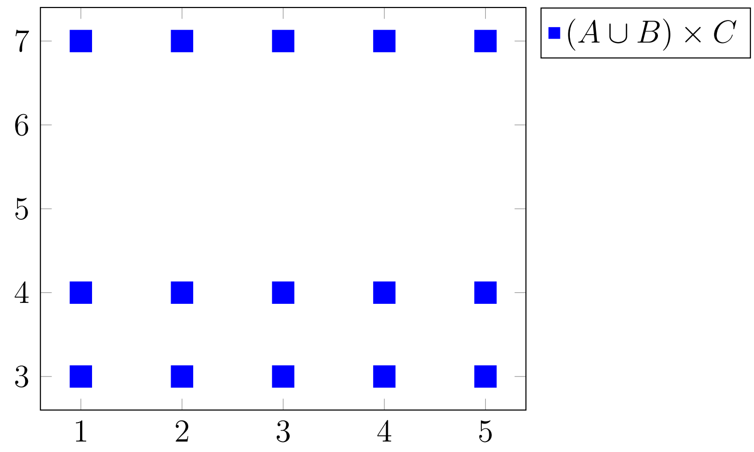


(f) $(A \cup B) \times C$
Tenemos que:

$$A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5\}$$

Ahora calculamos el producto cartesiano con C:

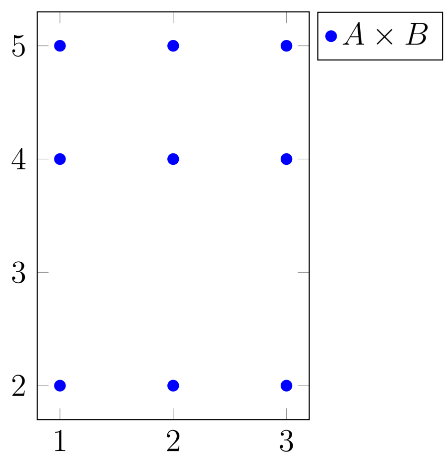
$$(A \cup B) \times C = \{(1,3),(1,4),(1,7),(2,3),(2,4),(2,7),(3,3),(3,4),(3,7),$$
$$(4,3),(4,4),(4,7),(5,3),(5,4),(5,7)\}$$



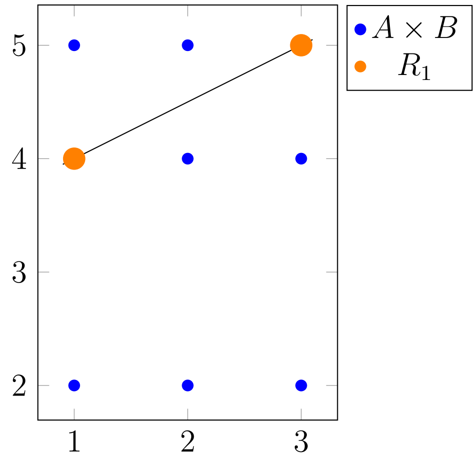
5. Si $A = \{1, 2, 3\}$ y $B = \{2, 4, 5\}$, dar ejemplos de:
   (a) Tres relaciones binarias no vacías de A en B. Graficar $A \times B$ y las tres relaciones como subconjuntos del plano.
   (b) Tres relaciones binarias no vacías de A en A. Graficar $A^2 = A \times A$ y las tres relaciones como subconjuntos del plano.

Solución:

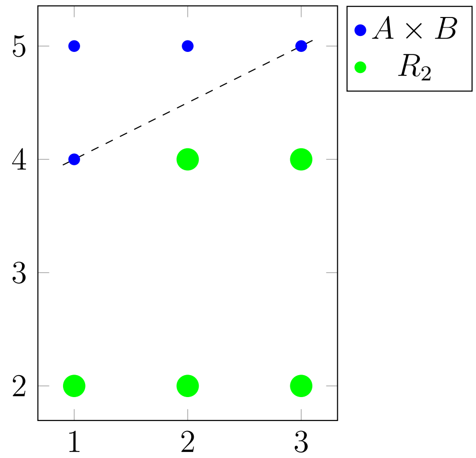
(a) $A \times B = \{(1, 2), (1, 4), (1, 5), (2, 2), (2, 4), (2, 5), (3, 2), (3, 4), (3, 5), \}$



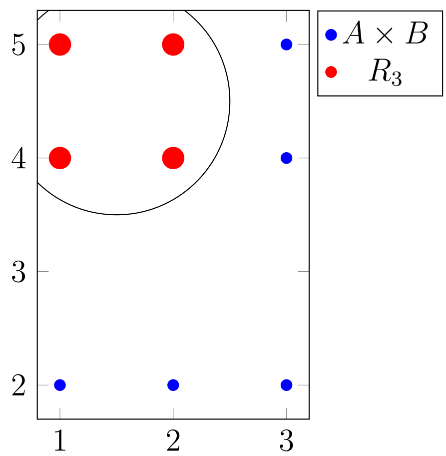
$\mathcal{R}_1 = \{(x, y) : y = 3{,}5 + 0{,}5x\}$



$\mathcal{R}_2 = \{(x, y) : y < 3{,}5 + 0{,}5x\}$



$\mathcal{R}_3 = \{(x, y) : \left(x - \frac{3}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{9}{2}\right)^2 \leq 1\}$



6. Sean $A = \{0, 1, 2, 3, 4\}$, $B = \{3, 4, 5, 6\}$. Expresar por extensión los subconjuntos $\mathcal{R}$ de $A \times B$ definidos por:

(a) $(x, y) \in \mathcal{R}$ si y solo si $x + y$ es múltiplo de 3.

(b) $(x, y) \in \mathcal{R}$ si y solo si $y - x$ es un número natural primo.

7. Sea $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$. Expresar por extensión los subconjuntos $\mathcal{R}$ de $A \times A$ definidos por las relaciones siguientes:

   (a) $(x, y) \in \mathcal{R}$ si y solo si $x + y \leq 6$.

   (b) $(x, y) \in \mathcal{R}$ si y solo si $x = y - 1$.

8. Para cada una de las relaciones de los ejercicios 6 y 7 determinar:

   (a) $\mathcal{R}(1)$, $\mathcal{R}(3)$.

   (b) $\mathcal{R}^{-1}(4)$, $\mathcal{R}^{-1}(5)$.

Solución:

(a) Debemos hallar $\mathcal{R}(1)$, y $\mathcal{R}(3)$, es decir la imagen para $x = 1$ y $x = 3$ a través de cada una de las relaciones.

- $\mathcal{R}$ del ej. 6a)
  Para obtener $\mathcal{R}(1)$ debemos hallar $y \in B : 1 + y$ es múltiplo de 3.
  Podemos ver que: $\mathcal{R}(1) = \{5\}$.

  Para obtener $\mathcal{R}(3)$ debemos hallar $y \in B : 3 + y$ es múltiplo de 3.
  Podemos ver que: $\mathcal{R}(3) = \{3, 6\}$.

- $\mathcal{R}$ del ej. 7b)
  Para obtener $\mathcal{R}(1)$ debemos hallar $y \in B : y = x + 1$.
  Podemos ver que: $\mathcal{R}(1) = \{2\}$.

  Para obtener $\mathcal{R}(3)$ debemos hallar $y \in B : y = x + 1$.
  Podemos ver que: $\mathcal{R}(3) = \{4\}$.

(b) Debemos hallar $\mathcal{R}^{-1}(4)$, y $\mathcal{R}^{-1}(5)$, es decir la pre-imagen para $y = 4$ y $y = 5$ a través de cada una de las relaciones.

- $\mathcal{R}$ del ej. 6b)
  Para obtener $\mathcal{R}^{-1}(4)$ debemos hallar $x \in A : 4-x$ es un número natural primo.
  Podemos ver que: $\mathcal{R}^{-1}(4) = \{1, 2\}$.

  Para obtener $\mathcal{R}^{-1}(5)$ debemos hallar $x \in A : 5-x$ es un número natural primo.
  Podemos ver que: $\mathcal{R}^{-1}(5) = \{0, 2, 3\}$.

- $\mathcal{R}$ del ej. 7a)
  Para obtener $\mathcal{R}^{-1}(4)$ debemos hallar $y \in B : x + 4 \leq 6$.
  Podemos ver que: $\mathcal{R}^{-1}(4) = \{1, 2\}$.

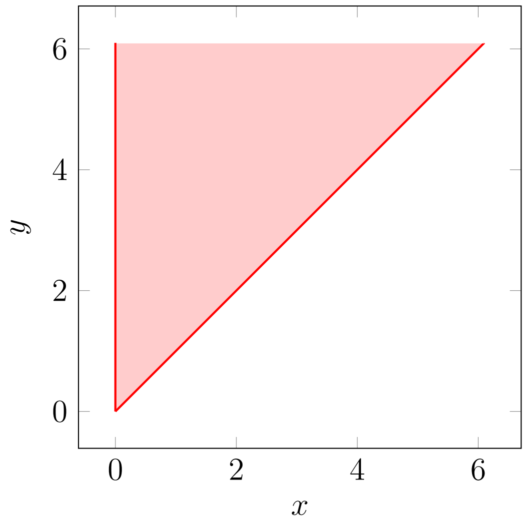
  Para obtener $\mathcal{R}^{-1}(5)$ debemos hallar $y \in B : x + 5 \leq 6$.
  Podemos ver que: $\mathcal{R}^{-1}(5) = \{1\}$.

10. Sea $\mathcal{R}$ la relación de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$ definida por: $(x, y) \in \mathcal{R}$ si y sólo si $x, y \geq 0$ y $x \leq y$. Graficar $\mathcal{R}$ y hallar:

    (a) $\mathcal{R}(\{2\})$
    (b) $\mathcal{R}(\{-1\})$
    (c) $\mathcal{R}((0, 1])$
    (d) $\mathcal{R}(\mathbb{R})$
    (e) $\mathcal{R}^{-1}(\{0\})$
    (f) $\mathcal{R}^{-1}(\{-1\})$
    (g) $\mathcal{R}^{-1}((2, 3))$
    (h) $\mathcal{R}^{-1}(\mathbb{R})$

Solución:

$\mathcal{R}$ está formada por todos los puntos que se encuentran en la región comprendida entre el semieje positivo de y y la recta a 45°, estando ambas semirectas contenidas en $\mathcal{R}$. La podemos graficar de la siguiente manera:

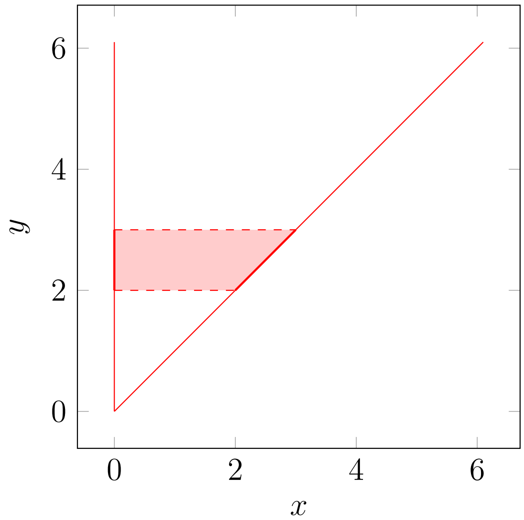


(a) $\mathcal{R}(\{2\}) = [2, +\infty)$

(b) $\mathcal{R}(\{-1\}) = \emptyset$

(d) $\mathcal{R}(\mathbb{R}) = \mathbb{R}_0^+$
$\mathbb{R}^+$ es la notación usual para el conjunto de los números reales positivos, es decir, $\{x \in \mathbb{R} : x > 0\}$.
$\mathbb{R}_0^+ = \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$ Es el conjunto de los números reales positivos y el cero.

(g) $\mathcal{R}^{-1}(2,3)) = [0,3)$



11. Hallar $\mathcal{R} \circ \mathcal{S}$ y $\mathcal{S} \circ \mathcal{R}$ en el Ejemplo 4.

Solución:

En el ejemplo 4, tenemos los conjuntos:

$$A = \{1,2,3,4\} \qquad B = \{w,x,y,z\} \qquad C = \{1,2,4,8\}$$

y las relaciones:

$$\mathcal{R} = \{(1,x),(1,z),(2,w),(3,x)\} \qquad \mathcal{S} = \{(w,1),(x,8),(y,4),(z,2)\}$$

- Calculo $\mathcal{R} \circ \mathcal{S}$
  $(\mathcal{R} \circ \mathcal{S})(w) = \mathcal{R}(\mathcal{S}(w)) = \mathcal{R}(1) = \{x,z\}$

  $$\Rightarrow (w,x) \in \mathcal{R} \circ \mathcal{S} \text{ y } (w,z) \in \mathcal{R} \circ \mathcal{S}$$

  $(\mathcal{R} \circ \mathcal{S})(x) = \mathcal{R}(\mathcal{S}(x)) = \mathcal{R}(8) = \emptyset$

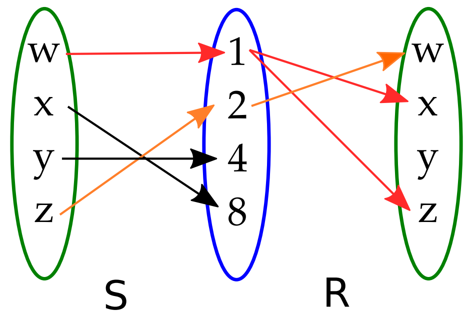
  $(\mathcal{R} \circ \mathcal{S})(y) = \mathcal{R}(\mathcal{S}(y)) = \mathcal{R}(4) = \emptyset$

  $(\mathcal{R} \circ \mathcal{S})(z) = \mathcal{R}(\mathcal{S}(z)) = \mathcal{R}(2) = \{w\}$

  $$\Rightarrow (z,w) \in \mathcal{R} \circ \mathcal{S}$$

Entonces obtenemos que: $\mathcal{R} \circ \mathcal{S} = \{(w,x),(w,z),(z,w)\}$

Gráficamente podemos representar la composición de la siguiente manera:


w
x
y
z
1
2
4
8
w
x
y
z
S
R