FACULTAD DE CIENCIAS EXACTAS, INGENIERÍA Y AGRIMENSURA

ESCUELA DE CIENCIAS EXACTAS

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

LCC - LF - LM - PF - PM

ÁLGEBRA Y GEOMETRÍA ANALÍTICA II - Año 2020

PRÁCTICA 4: LOS ESPACIOS VECTORIALES $\mathbb{R}^n$ Y $\mathbb{C}^n$.

---

1. Pruebe que $\mathbb{F}_n[x]$ es un espacio vectorial.
2. Pruebe que $\mathbb{F}^{m\times n}$ es un espacio vectorial.
3. Consideremos en $V=\mathbb{F}^3$ las operaciones definidas según:
   - Producto por escalar: $\cdot : \mathbb{F}\times\mathbb{F}^3 \to \mathbb{F}^3$ tal que $\alpha\cdot(x_1,x_2,x_3)) = (\alpha x_1, x_2, x_3)$,
   - Suma usual: $+ : \mathbb{F}^3\times\mathbb{F}^3 \to \mathbb{F}^3$ tal que $(x_1,x_2,x_3)+(y_1,y_2,y_3) = (x_1+y_1, x_2+y_2, x_3+y_3)$.

   Probar que $(V,+,\cdot)$ es un espacio vectorial.
4. Consideremos en $V=\mathbb{R}^3$ las operaciones definidas según:
   - Producto por escalar usual: $\cdot : \mathbb{R}\times\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tal que $\alpha\cdot(x_1,x_2,x_3)) = (\alpha x_1, \alpha x_2, \alpha x_3)$,
   - Suma: $+ : \mathbb{R}^3\times\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tal que $(x_1,x_2,x_3)+(y_1,y_2,y_3) = (x_1,x_2,x_3)\wedge(y_1,y_2,y_3) = (x_2y_3-x_3y_2, x_3y_1-x_1y_3, x_1y_2-x_2y_1)$, o sea, estamos considerando una operación que le llamamos suma, y que es la conocida como producto vectorial. Probar que $(V,+,\cdot)$ NO es un espacio vectorial. Chequear los 10 axiomas y marcar cuáles no son válidos.
5. Sea $\beta=\{\overline{x}_1,\ldots,\overline{x}_s\}$ un subconjunto de vectores de $\mathbb{F}^n$. Probar que:
   a) Si $s>n$ entonces β debe ser LD.
   b) Si $s<n$ entonces β no puede generar $\mathbb{F}^n$.
   c) Si $s=n$ y β es LI, entonces β genera $\mathbb{F}^n$ y resulta ser base de $\mathbb{F}^n$.
   d) Si $s=n$ y β genera $\mathbb{F}^n$, entonces β es LI y resulta ser base de $\mathbb{F}^n$.
6. Cuáles de las siguientes son combinaciones lineales de $u=(1,-1,3)$ *y* $v=(2,4,0)$?

   a) $(3,3,3)$ *b*) $(4,2,6)$ *c*) $(1,5,6)$ *d*) $(0,0,0)$.
7. En cada caso exprese los polinomios como combinaciones lineales de

$$p_1 = 2+x+4x^4, \quad p_2 = 1-x+3x^2 \ \ y \ \ p_3 = 3+2x+5x^2$$

   a) $5+9x+5x^2$ *b*) $2+6x^2$ *c*) 0 *d*) $2+2x+3x^2$
8. Determinar si los vectores dados generan $\mathbb{R}^3$
   a) $v_1=(1,1,1),\ v_2=(2,2,0)\ v_3=(3,0,0)$.
   b) $v_1=(2,-1,3),\ v_2=(4,1,2)\ v_3=(8,-1,8)$.
9. Determinar cuáles de los siguientes conjuntos de vectores son linealmente dependientes:

a) en $\mathbb{R}^3$:

i) $(2,-1,4)$, $(3,6,2)$, $(2,10,-4)$.

ii) $(1,3,3)$, $(0,1,4)$, $(5,16,3)$, $(7,2,-1)$.

b) en $\mathbb{R}^4$:

i) $(1,2,1,-2)$, $(0,-2,-2,0)$, $(0,2,3,1)$, $(3,0,-3,6)$.

ii) $(4,4,0,0)$, $(0,0,6,6)$, $(-5,0,5,5)$.

10. Para qué valores de λ los vectores que siguen forman un conjunto linealmente dependiente en $\mathbb{R}^3$?
$$v_1 = \left(\lambda, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right), \quad v_2 = \left(-\frac{1}{2}, \lambda, -\frac{1}{2}\right), \quad v_3 = \left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \lambda\right).$$

11. Si $S = \{\overline{v_1}, \overline{v_2}, \ldots, \overline{v_n}\}$ es un conjunto linealmente independiente de vectores, demuestre que todo subconjunto no vacío de vectores de S es linealmente independiente.

12. Si $\{\overline{v_1}, \overline{v_2}, \ldots, \overline{v_n}\}$ es un conjunto linealmente independiente de vectores en un espacio vectorial $\mathbb{F}^n$, demuestre que $\{\overline{v_1}, \overline{v_2}, \ldots, \overline{v_n}, \overline{v_{n+1}}\}$ también es linealmente dependiente, en donde $\overline{v_{n+1}} \in \mathbb{F}^n$.

13. Determinar cuáles de los siguientes conjuntos de vectores son bases para:

a) en $\mathbb{R}^3$:

i) $(1,0,0)$, $(2,2,0)$, $(3,3,3)$.

ii) $(2,-3,1)$, $(4,1,1)$, $(0,-7,1)$, $(7,2,-1)$.

b) en $\mathbb{R}^4$:

i) $(1,2,1,-2)$, $(0,-2,-2,0)$, $(0,2,3,1)$, $(3,0,-3,6)$.

ii) $(4,4,0,0)$, $(0,0,6,6)$, $(-5,0,5,5)$.

14. Sea $\{\overline{v_1}, \overline{v_2}, \overline{v_3}\}$ una base para un espacio vectorial $\mathbb{F}^n$. Demuestre que $\{\overline{u_1}, \overline{u_2}, \overline{u_3}\}$ también es una base, en donde $\overline{u_1} = \overline{v_1}, : \overline{u_2} = \overline{v_1} + \overline{v_2}\ y\ \overline{u_3} = \overline{v_1} + \overline{v_2} + \overline{v_3}$.

15. Estudiar para qué valores de a y b los vectores $(3,0,a,1)$, $(1,1,0,b)$ y $(2,5,b,4)$ de $\mathbb{R}^4$ son linealmente dependientes.

16. Sea $\mathbb{F}^4$ con base $B = \{\overline{u_1}, \overline{u_2}, \overline{u_3}, \overline{u_4}\}$. Se definen los vectores
$$\begin{aligned}
\overline{v_1} &= 2\overline{u_1} + \overline{u_2} - \overline{u_3}, \\
\overline{v_2} &= 2\overline{u_1} + \overline{u_3} + 2\overline{u_4}, \\
\overline{v_3} &= \overline{u_1} + \overline{u_2} - \overline{u_3}, \\
\overline{v_4} &= \overline{u_1} + 2\overline{u_3} + 3\overline{u_4}
\end{aligned}$$

Probar que $C = \{\overline{v_1}, \overline{v_2}, \overline{v_3}, \overline{v_4}\}$ es una base de $\mathbb{F}^4$.

17. De manera similar al ejercicio 1) se puede demostrar que el conjunto de los polinomios $\mathbb{F}[x]$ es un espacio vectorial. Demostrar que $\mathbb{F}[x]$ no puede tener dimensión finita.

18. Sean $\overline{v}_1 = (1,1,-2), \overline{v}_2 = (2,5,-1), \overline{v}_3 = (0,1,1) \in \mathbb{R}^3$.

i) Pruebe que $S = \{\overline{v}_1, \overline{v}_2, \overline{v}_3\}$ es linealmente dependiente.

ii) Escriba cada uno de los vectores como combinacineal de los otros dos.

19. Consideremos $\mathbb{F}^n$.

i) Bajo qué condiciones un conjunto de un solo vector $S = \{\overline{v}\}$ es linealmente independiente?

ii) Pruebe que si el conjunto de dos vectores $S = \{\overline{u}, \overline{v}\}$ es linealmente dependiente, entonces o bien $\overline{u} = \lambda\overline{v}$ o bien $\overline{u} = \lambda\overline{v}$ para algn $\lambda \in \mathbb{F}$.

iii) Pruebe que si el conjunto de tres vectores $S = \{\overline{u}, \overline{v}, \overline{w}\}$ es linealmente dependiente, entonces alguno de ellos puede escribirse como combinación lineal de los otros dos.

iv) [$*$] Pruebe la siguiente afirmación: Un conjunto $S = \{\overline{v}_1, \ldots, \overline{v}_k\}$ con $k \geq 2$ es linealmente dependiente si y sólo si al menos uno de los vectores $\overline{v}_j$ puede expresarse como una combinación lineal de los demás vectores de S.

20. Sean $\overline{u} = (u_1, u_2, u_3), \overline{v}_1 = (1, 2, 3), \overline{v}_2 = (0, 1, 2), \overline{v}_3 = (-2, 0, 1) \in \mathbb{R}^3$. Pruebe que

    i) $S = \{\overline{v}_1, \overline{v}_2, \overline{v}_3\}$ es una base de $\mathbb{R}^3$.

    ii) La ecuación $\overline{u} = c_1\overline{v}_1 + c_2\overline{v}_2 + c_3\overline{v}_3$ tiene una única solución.

21. [$*$] En base al ejercicio anterior, enuncie un teorema acerca de la unicidad de escritura respecto a una base dada en $\mathbb{F}^n$. Se anima a demostrarlo?

22. [$*$] Sea $AX = b$ un sistema de m ecuaciones lineales con n incógnitas. Sean $\overline{v}_1, \ldots, \overline{v}_n$ las columnas de A. Si b es una combinación lineal de estos n vectores columna, explique porqué esto implica que el sistema lineal es consistente. Ilustre su respuesta con ejemplos apropiados. Qué puede concluir acerca del sistema lineal si b no es una combinación lineal de las columnas de A?

Los ejercicios marcados con [$*$] requieren de madurez de los conceptos. No se desespere por resolverlos, si no salen, ya saldrán.