

Unidad 1: Análisis Combinatorio
Álgebra y Geometría Analítica II (R-121)
Licenciatura en Ciencias de la Computación

Iker M. Canut

2020

1. Reglas Básicas

1.1. Regla de la Suma

Si una primera tarea puede realizarse de m formas, y una segunda de n formas, y no es posible realizarlas simultáneamente, entonces la tarea general puede realizarse de $m + n$ formas.

Def/ Intervalo Entero: $m, n, k \in \mathbb{N}, m \leq n$, notamos $\llbracket m, n \rrbracket = \{m, m+1, \dots, n\} = \{k : m \leq k \leq n\}$. Luego, $|\llbracket m, n \rrbracket| = n - m + 1$.

Def/ Un conjunto X tiene **cardinalidad** n , con $n \in \mathbb{N}$ si existe una función biyectiva $f : \llbracket 1, n \rrbracket \rightarrow X$ y se denota $|X| = n$. Definimos $|\emptyset| = 0$. Todo conjunto que tenga cardinalidad n se llamará **finito**.

Teorema 1: Principio de Adición: Sean A, B conjuntos finitos disjuntos, entonces $|A \cup B| = |A| + |B|$.

D/ Existen $m, n \in \mathbb{N}$ y dos funciones biyectivas $f : \llbracket 1, m \rrbracket \rightarrow A$ y $g : \llbracket 1, n \rrbracket \rightarrow B$. Luego definimos:

$$h : \llbracket 1, m+n \rrbracket \rightarrow A \cup B : h(x) = \begin{cases} f(x), & x \in \llbracket 1, m \rrbracket \\ g(x-m), & x \in \llbracket m+1, m+n \rrbracket \end{cases}$$

Vemos que h es una función biyectiva. Luego $|A \cup B| = m+n = |A| + |B|$. ■

Corolario 1a: A_1, A_2, \dots, A_n conjuntos disjuntos dos a dos, entonces $|A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n| = \sum_{i=1}^n |A_i|$.

Corolario 1b: Sean A, B conjuntos finitos, entonces $|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$.

1.2. Regla del Producto

Si un procedimiento se puede descomponer en dos etapas, de manera que existen m resultados posibles para la primera, y para cada uno de estos resultados existen n resultados posibles para la segunda etapa, entonces el procedimiento total se puede realizar de mn formas.

Teorema 2: Formalización de la Regla del Producto: Sean A, B finitos, entonces $|A \times B| = |A| \cdot |B|$

D/ $A = \{a_1, \dots, a_m\}$ y $B = \{b_1, \dots, b_n\}$, probaremos que $|A \times B| = mn$. Fijamos n , inducción sobre m . Si $m = 1$: $A \times B = \{(a_1, b_1), \dots, (a_1, b_n)\}$. Definiendo $f : \llbracket 1, n \rrbracket \rightarrow A \times B$. $f(i) = (a_1, b_i)$, resulta que f es biyectiva y $|A \times B| = n = 1 \cdot n$. Suponemos que $|A \times B| = mn$ y probamos para $m+1$. Tenemos $A = \{a_1, \dots, a_m, a_{m+1}\}$, luego $A \times B = ((A - \{a_{m+1}\}) \times B) \cup (\{a_{m+1}\} \times B)$. Luego, por el Principio de Adición y la Hipótesis Inductiva, resulta que $|A \times B| = mn + m = (m+1)n$. ■

Corolario 2: A_1, A_2, \dots, A_n conjuntos finitos, entonces $|A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n| = \prod_{i=1}^n |A_i|$.

2. Permutaciones

Def/ Dada una colección de n objetos distintos, cualquier disposición (lineal) de estos objetos se denomina **permutación** de la colección.

Si existen n objetos distintos a los que podemos denotar con a_1, a_2, \dots, a_n y r es un entero $1 \leq r \leq n$, entonces, por la regla del producto, el número de permutaciones de tamaño r para los n objetos es $n \times (n-1) \times (n-2) \times \dots \times (n-r+1)$ y lo notaremos $P(n, r)$. Definimos $P(n, 0) = 1$.

$$P(n, r) = n \cdot (n-1) \cdot \dots \cdot (n-r+1) \cdot \frac{(n-r) \cdot (n-(r+1)) \cdot \dots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{(n-r) \cdot (n-(r+1)) \cdot \dots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = \frac{n!}{(n-r)!}$$

Preguntarnos cuantas **funciones** $f : X \rightarrow X$ existen es equivalente a preguntarnos cuántas **disposiciones lineales con repeticiones** pueden realizarse.

Teorema 3: Sean A, B conjuntos finitos con $|A| = m, |B| = n$, si $\mathcal{F}(A, B)$ es el conjunto de todas las funciones de A en B , entonces $|\mathcal{F}(A, B)| = n^m$.

Dem/ Si ponemos $A = \{a_1, \dots, a_m\}$, entonces $f(a_i) = b_i$, donde b_i es alguno de los n elementos de B . Luego, se puede identificar a f con la m -upla $(f(a_1), f(a_2), \dots, f(a_m)) \in B \times B \times \dots \times B$. Por la Regla del Producto, la cantidad de elementos de $B \times B \times \dots \times B$ es n^m . Luego, $|\mathcal{F}(A, B)| = n^m$. ■

Nota: Sabemos que el conjunto de todos los subconjuntos de A se llama conjunto de partes de A . Si definimos la **función característica** como $\mathcal{X}_B : A \rightarrow \{0, 1\} / \mathcal{X}_B(x) = \begin{cases} 0, & x \notin B \\ 1, & x \in B \end{cases}$, se puede ver que $\mathcal{X}_\emptyset(x) = 0$ y $\mathcal{X}_A(x) = 1$. La correspondencia $B \leftrightarrow \mathcal{X}_B$ es biunívoca. Contar la cantidad de subconjuntos B en A es equivalente a contar la cantidad de funciones características \mathcal{X}_B cuyo dominio es A existen. Aplicando el T3, resulta $\mathcal{P}(A) = |\mathcal{F}(A, \{0, 1\})| = 2^n$.

Nota: Como cualquier subconjunto de $A \times B$ es una relación de A en B , luego $\mathcal{F}(A, B) \subseteq \mathcal{P}(A, B)$ y se verifica $|\mathcal{F}(A, B)| = n^m \leq 2^m n = \mathcal{P}(A, B)$, y utilizaremos la siguiente notación:

$\mathcal{F}_i = \{f \in \mathcal{F}(A, B) : f \text{ es inyectiva}\} \quad \mathcal{F}_b = \{f \in \mathcal{F}(A, B) : f \text{ es biyectiva}\}$

Preguntarnos cuántas **funciones inyectivas** $f : X \rightarrow X$ pueden realizarse es equivalente a cuántas **permutaciones** existen.

Teorema 4: Si $|A| = m, |B| = n, m \leq n$, entonces $|\mathcal{F}_i(A, B)| = \frac{n!}{(n-m)!}$

Dem/ Sea $A = \{a_1, \dots, a_m\}$, podemos identificar a f con la m -upla $(f(a_1), \dots, f(a_m))$, donde debido a la inyectividad de f aseguramos que hay n valores posibles para $f(a_1)$, $n-1$ para $f(a_2)$, ..., y finalmente $n - (m-1)$ para $f(a_m)$. Luego, $|\mathcal{F}_i(A, B)| = n(n-1)(n-2)\dots(n-(m-1)) = \frac{n!}{(n-m)!}$ ■

Corolario 3: Si $m = n$, entonces $|\mathcal{F}_b(A, B)| = n!$

Def/ Sea $|A| = n$, llamaremos **permutación** de n elementos de A a cualquier función inyectiva $f : \llbracket 1, n \rrbracket \rightarrow A$. Se representa con la n -upla (a_1, \dots, a_n) , donde $a_i \in A$ son todos distintos.

Def/ Permutaciones con repetición: Si existen n objetos, con n_1 de un primer tipo, n_r de un r -ésimo tipo, donde $n_1 + \dots + n_r = n$, entonces existen $\frac{n!}{n_1! \dots n_r!}$ disposiciones lineales de los n objetos.

3. Combinaciones

Si existen n objetos distintos, cada combinación de r objetos, sin hacer referencia al orden, corresponde a $r!$ permutaciones de tamaño r de los n objetos. Luego, el número de combinaciones está dado por:

$$C(n, r) = \frac{P(n, r)}{r!} = \frac{n!}{(n-r)!r!}, \quad \text{donde } 0 \leq r \leq n$$

Como no nos interesa el orden, si tomamos las permutaciones de r elementos tomados de n , tenemos $r!$ permutaciones de esos r elementos que corresponden a la misma combinación.

Def/ Se denomina **número combinatorio** al definido por $\binom{n}{r} := \frac{n!}{(n-r)!r!}, \forall n \in \mathbb{N}_0, r \in \mathbb{N}_0 : 0 \leq r \leq n$.

Proposición 1: Sea $n \in \mathbb{N}_0, \forall r \in \mathbb{N}_0 : 0 \leq r \leq n$, $\binom{n}{k}$ es un numero natural.

Dem/ ■

Def/ Una **cadena** de largo n es una disposición, donde en cada lugar se puede usar cualquier caracter de un alfabeto de largo r . Por la Regla del Producto existen r^n cadenas. Sea $x = x_1 x_2 \dots x_n$ una cadena, se define el **peso** de x , $wt(x)$, como $x_1 + x_2 + \dots + x_n$.

Proposición 2: Sea $r \leq n$ dos enteros no negativos, entonces:

▪ $\binom{n}{1} = n$

Dem/ $\binom{n}{1} = \frac{n!}{(n-1)! \cdot 1!} = \frac{n \cdot (n-1)!}{(n-1)! \cdot 1} = n$ ■

▪ $\binom{n}{r} = \binom{n}{n-r}$

Dem/ $\binom{n}{r} = \frac{n!}{(n-r)! \cdot r!} = \frac{n!}{(n-r)! \cdot ((n-n)+r)!} = \frac{n!}{(n-r)! \cdot (n-(n-r))!} = \binom{n}{n-r}$ ■

▪ $\binom{n-1}{r-1} + \binom{n-1}{r} = \binom{n}{r}$

Dem/ Si $n = r$, entonces $\binom{n}{r} = 1$, $\binom{n-1}{r-1} = 1$ y $\binom{n-1}{n} = \binom{n-1}{r} = 0$. Luego, $1 = 1 + 0$ □

Si $r < n$, $\binom{n-1}{r-1} + \binom{n-1}{r} = \frac{r}{r} \cdot \frac{(n-1)!}{(n-r)! \cdot (r-1)!} + \frac{(n-1)!}{((n-1)-r)! \cdot r!} \cdot \frac{(n-r)}{(n-r)} = \frac{r(n-1)!}{(n-r)! \cdot r!} + \frac{(n-1)! \cdot (n-r)!}{(n-r)! \cdot r!} =$
 $= \frac{r(n-1)! + (n-1)! \cdot (n-r)}{(n-r)! \cdot r!} = \frac{(n-1)! \cdot (r + (n-r))}{(n-r)! \cdot r!} = \frac{(n-1)! \cdot n}{(n-r)! \cdot r!} = \frac{n!}{(n-r)! \cdot r!} = \binom{n}{r}$ ■

3.1. Binomio de Newton

Teorema 5: Sean $x, y \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}$

$$(x+y)^n = \binom{n}{0}x^ny^0 + \binom{n}{1}x^{n-1}y^1 + \dots + \binom{n}{n}x^0y^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k}x^{n-k}y^k$$

Dem/ Va por inducción: $n=1$, claramente se verifica. □

Suponemos que $(x+y)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k}x^{n-k}y^k$ y probamos que $(x+y)^{n+1} = \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k}x^{n+1-k}y^k$:

$$\begin{aligned} (x+y)^{n+1} &= (x+y) \cdot (x+y)^n = x(x+y)^n + y(x+y)^n \stackrel{HI}{=} x\left(\sum_{k=0}^n \binom{n}{k}x^{n-k}y^k\right) + y\left(\sum_{k=0}^n \binom{n}{k}x^{n-k}y^k\right) = \\ &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k}x^{n-k+1}y^k + \sum_{k=0}^n \binom{n}{k}x^{n-k}y^{k+1} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k}x^{n-k+1}y^k + \sum_{k=1}^{n+1} \binom{n}{k-1}x^{n-k+1}y^k \\ &= \binom{n}{0}x^{n-0+1}y^0 + \sum_{k=1}^n \binom{n}{k}x^{n-k+1}y^k + \sum_{k=1}^n \binom{n}{k-1}x^{n-k+1}y^k + \binom{n}{n}x^0y^{n+1} \\ &= x^{n+1} + \sum_{k=1}^n x^{n-k+1}y^k \left[\binom{n}{k} + \binom{n}{k-1} \right] + y^{n+1} \\ &= x^{n+1} + \sum_{k=1}^n x^{n-k+1}y^k \binom{n+1}{k} + y^{n+1} = \end{aligned}$$

Como $a^{k+1} = \binom{k+1}{k+1}a^{k+1}b^{k+1-(k+1)}$ y $b^{k+1} = \binom{k+1}{0}a^0b^{k+1-0}$, tenemos que: $= \sum_{k=0}^{n+1} x^{n-k+1} + y^k$ ■

Corolario 6:

▪ $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k}(-1)^k = 0$

Dem/ Sea $x = 1, y = -1$, aplicando el T5, tenemos $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k}1^{n-k}(-1)^k = (-1+1)^n = 0$ ■

▪ $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} = 2^n$

Dem/ Sea $x = 1, y = 1$, aplicando el T5, tenemos $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k}1^{n-k}1^k = (1+1)^n = 2^n$ ■

Teorema del Multinomio: Sean $n_1, n_2, \dots, n_r \in \mathbb{N}_0 / n_i \leq n, i = 1, 2, \dots, r$ y $n_1 + n_2 + \dots + n_r = n$, entonces el coeficiente de $x_1^{n_1}, x_2^{n_2}, \dots, x_r^{n_r}$ en el desarrollo de $(x_1 + x_2 + \dots + x_r)^n$ es $\frac{n!}{n_1!n_2!\dots n_r!}$ □

4. Combinaciones con Repeticiones: Distribuciones

Si X es un conjunto con n elementos distintos, y queremos elegir r pero tenemos la posibilidad de repetir objetos en la elección, estamos considerando todas las disposiciones de r letras \mathbf{x} y $n - 1$ |, que se calcula: $\frac{(r + n - 1)!}{r!(n - 1)!} = \binom{n+r-1}{r}$. Luego, el número de combinaciones de r objetos tomados de X permitiendo repeticiones es $C(r + n - 1, r)$.

5. Principio de las Casillas

Teorema 7: $m, n \in \mathbb{N}$ tales que $n > m$ entonces no existe ninguna función inyectiva $f : \llbracket 1, n \rrbracket \rightarrow \llbracket 1, m \rrbracket$.

Dem/ Sea $H := \{n \in \mathbb{N} : \text{existe un } n > m \text{ y existe una función } f : \llbracket 1, n \rrbracket \rightarrow \llbracket 1, m \rrbracket \text{ inyectiva}\}$, hay que demostrar que $H = \emptyset$. Vamos por el absurdo, suponiendo que es un subconjunto de los \mathbb{N} no vacío, ergo, tiene primer elemento, digamos h . Luego, por definición, existe un $m < n$ y una función $f : \llbracket 1, n \rrbracket \rightarrow \llbracket 1, m \rrbracket$ inyectiva.

Nombre	Orden?	Repeticiones?	Formula	Ejemplo
Permutación	Si	No	$n!$	De cuantas formas se pueden ordenar 10 chicos? $10!$
K-Permutación	Si	No	$\frac{n!}{(n-k)!}$	Si hay 10 chicos, y queremos seleccionar 5, de cuantas maneras se pueden ordenar esos 5? $\frac{10!}{(10-5)!}$
R-Permutación	Si	Si	k^n	Banderas de 3 bandas con 4 colores? 4^3
Anagrama	Si	No	$\frac{n!}{n_1! \cdot \dots \cdot n_r!}$	Combinaciones BANANA = $\frac{6!}{1!3!2!}$. Trayectorias escalonadas (2, 1) a (7, 4) = $\frac{(5+3)!}{5!3!}$
Combinación	No	No	$\frac{n!}{(n-r)!r!}$	Elegir 3 cartas de un mazo de 52? $\frac{52!}{(52-3)!3!}$ 36 chicos, 4 grupos de 9: $\binom{36}{9} \cdot \binom{27}{9} \cdot \binom{18}{9} \cdot \binom{9}{9}$
R-Combinación	No	Si	$\frac{(n+r-1)!}{r!(n-1)!}$	7 amigos, 4 menues? $\frac{(7+4-1)!}{7!3!}$ Soluciones enteras de $\sum_{i=1}^4 x_i = 7$? $\frac{(7+4-1)!}{7!4!}$