Práctica de Álgebra y Geometría 1

Luciano N. Barletta & Iker M. Canut

March 25, 2020

Contents

1 Unidad 1: Números Complejos

1.1 Preámbulo

Definimos el conjunto de los números complejos de la siguiente manera:

$$\mathbb{C} = \{(a,b) \mid a,b \in \mathbb{R}\}$$

O sea que $\mathbb{C} = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$.
Dado un $z = (a,b) \in \mathbb{C}$, llamamos parte real de z al número real a y la notamos $\mathrm{Re}(z) = a$. Análogamente llamamos parte imaginaria a b y la notamos $\mathrm{Im}(z) = b$.
Definimos para todo $z = (a,b) \in \mathbb{C}$ y $w = (c,d) \in \mathbb{C}$:

$$z = w \Leftrightarrow a = c \wedge b = d$$

$$z + w = (a+c, b+d)$$

$$zw = (ac - bd, bc + ad)$$

1.2 Demostraciones

Conmutatividad de la suma

Sean $z = (a,b), w = (c,d) \in \mathbb{C}$

$z + w =$ <Definicion de suma de complejos>

$(a+c, b+d) =$ <Propiedad conmutativa de la suma de reales>

$(c+a, d+b) =$ <Definicion de suma de complejos>

$w + z$

□

Conmutatividad del producto

Sean $z = (a,b), w = (c,d) \in \mathbb{C}$:

$zw =$ <Definicion de producto de complejos>

$(ac - bd, ad + cb) =$ <Propiedad conmutativa de suma y producto de reales>

$(ac - db, cb + da) =$ <Definicion de producto de complejos>

wz

□

Asociatividad de la suma

Sean $z = (a,b), u = (c,d), w = (e,f) \in \mathbb{C}$:

$z + (u + w) =$ <Definicion de suma de complejos>

$z + (c+e, d+f) =$ <Definicion de suma de complejos>

$(a + (c+e), b + (d+f)) =$ <Propiedad asociativa de la suma de reales>

$((a+c)+e, (b+d)+f) =$ <Definicion de suma de complejos>

$(a+c, b+d) + w =$ <Definicion de suma de complejos>

$(z+u)+w$

□

Propiedad distributiva de la multiplicación respecto de la suma

Por defnción de igualdad de complejos, dados $z, w \in \mathbb{C}$

$$z = w \Leftrightarrow \mathrm{Re}(z) = \mathrm{Re}(w) \wedge \mathrm{Im}(z) = \mathrm{Im}(w)$$

llamemos $z = (a,b), u = (c,d), w = (e,f)$
Demostramos $\mathrm{Re}(z(uw)) = \mathrm{Re}((zu)w)$

$\mathrm{Re}(z(uw)) =$ <Def mult complejos>

$(a\mathrm{Re}(uw)) - (b\mathrm{Im}(uw)) =$ <Def mult complejos>

$(a(ce-df)) - (b(cf+de)) =$ <Distributiva>

$(ace-adf) - (bcf+bde) =$ <Propiedad -(a+b) = -a - b>

$ace-adf-bcf-bde =$ <Conmutativa>

$ace-bde-adf-bcf =$ <Distributiva>

$(ac-bd)e-(ad+bc)f =$ <Def mult complejos>

$\mathrm{Re}(zu)e - \mathrm{Im}(zu)f =$ <Def mult complejos>

$\mathrm{Re}((zu)w)$

Demostramos $\mathrm{Im}(z(uw)) = \mathrm{Im}((zu)w)$

$\mathrm{Im}(z(uw)) =$ <Def mult complejos>

$(b\mathrm{Re}(uw)) + (a\mathrm{Im}(uw)) =$ <Def mult comlpejos>

$(b(ce-df)) + (a(cf+de)) =$ <Distributiva>

$bce-bdf+acf+ade =$ <Conmutativa>

$bce+ade+acf-bdf =$ <Distributiva>

$(bc+ad)e+(ac-bd)f =$ <Def mult complejos>

$\mathrm{Im}(zu)e + \mathrm{Re}(zu)f =$ <Def mult complejos>

$\mathrm{Im}((zu)w)$

Reescribiendo:

$$\mathrm{Re}(z(uw)) = \mathrm{Re}((zu)w) \wedge \mathrm{Im}(z(uw)) = \mathrm{Im}((zu)w)$$

que por definición de igualdad de complejos implica

$$z(uw) = (zu)w$$

□

$\exists (0,0) \in \mathbb{C} / (0,0) + z = z$

Sea $z = (a,b) \in \mathbb{C}$:

$(0,0) + z =$ <Definicion de la suma de complejos>

$(0+a, 0+b) =$ <Existencia del elemento neutro de suma de reales>

$(a, b) =$ <Definicion de numero complejo>

z

□

$\exists (1,0) \in \mathbb{C} / (1,0)z = z$

Sea $z = (a, b) \in \mathbb{C}$:

$(1,0)z =$ <Definicion del producto de complejos>

$(1a - 0b, 0a + 1b) =$ <Existencia del elemento neutro del producto de reales>

$(a - 0b, 0a + b) =$ <a0 = 0>

$(a - 0, 0 + b) =$ <Existencia del elemento neutro de la suma de reales>

$(a, b) =$ <Definicion de numero complejo>

z

□

$\forall z = (a, b) \exists w = (-a, -b) / z + w = (0,0)$

Sea $z = (a, b)$, $w = (-a, -b) \in \mathbb{C}$

$(0,0) =$ <Existencia del opuesto de la suma de reales>

$(a + -a, b + -b) =$ <Definición de suma de complejos>

$(a, b) + (-a, -b) =$ <sustituimos z = (a,b), w = (-a,-b)>

$z + w$

Por lo tanto:

$$\forall z = (a, b) \in \mathbb{Z} \exists w = (-a, -b) / z + w = (0,0)$$

□

$\forall z \neq (0,0) \exists w / zw = (1,0)$

Llamemos z = (a,b) y llamemos w = (c,d).
Para que zw = (1,0), por definición de igualdad de complejos, tiene que ocurrir:

$$\operatorname{Re}(zw) = 1 \wedge \operatorname{Im}(zw) = 0 \tag{1}$$

Que exista algún w para todo z implica entonces que podamos escribir (c, d) en términos de (a, b), basándonos en el siguiente sistema de ecuaciones:

$$ac - bd = 1 \tag{2}$$
$$bc + ad = 0 \tag{3}$$
$$ac - bd = 1 \tag{4}$$
$$bc = -ad \tag{5}$$
$$ac - bd = 1 \tag{6}$$
$$c = -\frac{ad}{b} \tag{7}$$

Continuamos con la ecuación de arriba

$$a\left(\frac{-ad}{b}\right) - bd = 1 \tag{8}$$
$$\left(\frac{-a^2}{b}\right) d - bd = 1 \tag{9}$$
$$\left(\frac{-a^2}{b} - b\right) d = 1 \tag{10}$$
$$\left(\frac{-a^2}{b} - \frac{b^2}{b}\right) d = 1 \tag{11}$$
$$\frac{-a^2 - b^2}{b} d = 1 \tag{12}$$
$$-\frac{a^2 + b^2}{b} d = 1 \tag{13}$$
$$d = -\frac{b}{a^2 + b^2} \tag{14}$$

Reemplazando en la de abajo

$$c = \left(-\frac{a}{b}\right)\left(-\frac{b}{a^2 + b^2}\right) \tag{15}$$
$$c = \frac{a}{b}\frac{b}{a^2 + b^2} \tag{16}$$
$$c = \frac{a}{a^2 + b^2} \tag{17}$$

La demostración queda entonces: $\forall z = (a, b) \neq (0,0)$, supongo un $w = \left(\frac{a}{a^2 + b^2}, -\frac{b}{a^2 + b^2}\right)$ y muestro que $zw = (1,0)$

$$zw = \left(a\frac{a}{a^2 + b^2} - b\frac{-b}{a^2 + b^2}, b\frac{a}{a^2 + b^2} + a\frac{-b}{a^2 + b^2}\right) \tag{18}$$
$$\left(\frac{a^2}{a^2 + b^2} + \frac{b^2}{a^2 + b^2}, \frac{ba}{a^2 + b^2} - \frac{ab}{a^2 + b^2}\right) \tag{19}$$
$$\left(\frac{a^2 + b^2}{a^2 + b^2}, \frac{ba - ab}{a^2 + b^2}\right) = (1,0) \tag{20}$$

$$\therefore \forall z = (a, b) \neq (0,0), \exists w = (\frac{a}{a^2 + b^2}, -\frac{b}{a^2 + b^2}) / zw = (1,0)$$

□

Llamamos $\mathbb{C}_0$ al conjunto $\{z \mid z = (a,0) \in \mathbb{C}, \forall a \in \mathbb{R}\}$.
Definimos $z - w = z + (-w)$.
Definimos $\frac{z}{w} con w \neq (0,0), zw^{-1}$

Suma cerrada en $\mathbb{C}_0$

Sean $z = (a, 0)$, $w = (b, 0) \in \mathbb{C}_0$

$z + w =$ <Definición de suma de complejos>

$(a + b, 0 + 0) =$

$(a + b, 0) =$

si llamamos $a + b = c$, entonces $(c, 0) \in \mathbb{C}_0$ por definición $\square$

Producto cerrado en $\mathbb{C}_0$

Sean $z = (a, 0)$, $w = (b, 0) \in \mathbb{C}_0$

$zw =$ <Definición de producto de complejos>

$(ab - 0.0, 0b + 0a) =$

$(ab, 0 + 0) =$

$(ab, 0) =$

si llamamos $ab = c$, entonces $(c, 0) \in \mathbb{C}_0$ por definición $\square$

Producto cerrado en $\mathbb{C}_0$

Sean $z = (a, 0)$, $w = (b, 0) \in \mathbb{C}_0$

$zw =$ <Definición de producto de complejos>

$(ab - 0.0, 0b + 0a) =$

$(ab, 0 + 0) =$

$(ab, 0) =$

si llamamos $ab = c$, entonces $(c, 0) \in \mathbb{C}_0$ por definición $\square$

Opuesto y recíproco cerrado en $\mathbb{C}_0$

Sea $z = (a, 0), \in \mathbb{C}_0$

$$-z = (-a, 0) \in \mathbb{C}_0$$

Sea $z = (a, 0) \neq (0, 0), \in \mathbb{C}_0$

$$z^{-1} = (a^{-1}, 0) \in \mathbb{C}_0$$

$\square$

Cociente cerrado en $\mathbb{C}_0$

Sean $z = (a, 0)$, $w = (b, 0) \neq (0, 0) \in \mathbb{C}_0$

$\frac{z}{w} =$ <Definición de cociente de complejos>

zw^{-1}

Como el producto es cerrado en $\mathbb{C}_0$, $\dfrac{z}{w} \in \mathbb{C}_0$ $\square$

Notamos la correspondecia:

$$x \in \mathbb{R} \leftrightarrow (x, 0) \in \mathbb{C}_0$$

Ahora definimos:

$$i = (0, 1)$$

$\forall (a, b) \in \mathbb{C}$, (a, b) puede escribirse $a + bi$

(a, b) <Definición de suma de complejos>

$(a, 0) + (0, b)$

$(a, 0) + (0 - 0, 1b + 0)$

$(a, 0) + (0.b - 1.0, 1b + 0.0)$ <Definición de producto de complejos>

$(a, 0) + (b, 0)(0, 1)$ <Definición de i>

$(a, 0) + (b, 0)i$ <Notación de elementos de $\mathbb{C}_0$>

$a + bi$

$\square$

Entonces usaremos esta notación para referirnos a este tipo de números complejos, $\forall a, b \in \mathbb{R}$:

$$(a, 0) = a \tag{21}$$
$$(0, b) = bi(a, b) \qquad = a + bi \tag{22}$$
$$\tag{23}$$

La última se llama notación binómica de los números complejos.

$i^2 = -1$

$i^2 =$ <Definición de cuadrado>

$i.i =$ <Definición de i>

$(0, 1)(0, 1) =$ <Definición de producto de complejos>

$(0.0 - 1.1, 1.0 + 0.1)$

De esto resulta el número complejo $(-1, 0)$, que representa al número real -1. Notamos que hacer raíz cuadrada de ambos lados nos deja $\pm i = \sqrt{-1}$. $\square$

Fun Fact

$a \in \mathbb{R}, a < 0, z^2 = a \Leftrightarrow z = \pm\sqrt{|a|}i$

Sabemos que $z^2 = a$, pero por definición de valor absoluto

$$z^2 = -|a|, z^2 = -1|a|$$

Al hacer raíz cuadrada de ambos lados

$$\pm z = \sqrt{-1|a|}$$

Que reescribiendo sería

$$z = \mp\sqrt{|a|}\sqrt{-1}$$

Finalmente por definición de i

$$z = \pm\sqrt{|a|}\,i$$

$\square$

Dado $z = a + bi$, llamamos conjugado de z al número complejo $a - bi$ y lo notamos $\overline{z}$.

Distributiva del conjugado respecto de la suma

Sean $z = a + bi,\ w = c + di \in \mathbb{C}$

$\overline{z+w}$

$\overline{(a+bi)+(c+di)}$

$\overline{(a+c)+(b+d)i}$ <Definición de conjugado>

$(a+c)-(b+d)i$ <Distribuyendo $-i$>

$a+c-bi-di$ <Reescribiendo>

$(a-bi)+(c-di)$ <Definición de conjugado>

$\overline{z}+\overline{w}$

$\square$

Distributiva del conjugado respecto del producto

Sean $z = a + bi,\ w = c + di \in \mathbb{C}$

$\overline{zw}$ <Hipótesis>

$\overline{(a+bi)(c+di)}$ <Distribuyendo>

$\overline{(ac-bd)+(bc+ad)i}$ <Definición de conjugado>

$(ac-bd)-(bc+ad)i$ <Distribuyendo -1>

$(ac-bd)+((-b)c+a(-d))i$ <$bd = (-d)(-b)$>

$(ac-(-b)(-d))+((-b)c+a(-d))i$ <Distribuyendo i y reescribiendo>

$ac+(-b)c.i+a(-d).i-(-b)(-d)$ $-1 = i^2$

$ac+(-b)c.i+a(-d).i-(-b)d.i^2$ <Factor común c y $-di$>

$(a-bi)c-(a-bi)di$ <Factor común $a-bi$>

$(a-bi)(c-di)$ <Definición de conjugado>

$\overline{z}\overline{w}$

$\square$

$z = \overline{z} \Leftrightarrow z \in \mathbb{R}$

Sea $z = a + bi = \overline{z} = a - bi, z \in \mathbb{C}$

$z = \overline{z}$ <Hipótesis>

$a + bi = a - bi$ <Propiedad cancelativa de la suma>

$bi = -bi$ <Sumando bi en ambos lados>

$2bi = 0$ <Multiplicando $(2i)^{-1}$ en ambos lados>

$b = 0$

$$z = a + 0i = a \in R$$

Sea $a \in \mathbb{R}$

$a = a$ <Elemento neutro de la suma>

$a + 0 = a + 0$ $0x = 0$

$a + 0i = a + 0(-i)$ <Definición de conjugado>

$a + 0i = \overline{a + 0i}$ <Llamemos $z = a + 0i$

$z = \overline{z}$

$$z = a \in \mathbb{R} \Rightarrow z = \overline{z}$$

$$\therefore z = \overline{z} \Leftrightarrow z \in \mathbb{R}$$

□

$z\overline{z} = \mathbf{Re}(z)^2 + \mathbf{Im}(z)^2$

Sea $z = a + bi, z \in \mathbb{C}$

$z\overline{z}$ <Hipótesis y definición de conjugado>

$(a + bi)(a - bi)$ <Distribuyendo>

$a^2 + ab.i - ab.i - (bi)^2$ <Resolviendo>

$a^2 - (bi)^2$ <Distribuyendo>

$a^2 - b^2 i^2$ <$i^2 = -1$>

$a^2 - b^2.(-1)$

$a^2 + b^2$ <$a = \mathrm{Re}(z), b = \mathrm{Im}(z)$>

$\mathrm{Re}(z)^2 + \mathrm{Im}(z)^2$

□

Fun Fact 2. $z = a + bi \in \mathbb{C} z \neq 0$

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{z}\frac{\overline{z}}{\overline{z}} = \frac{\overline{z}}{z\overline{z}} = \frac{a - bi}{a^2 + b^2} = \frac{a}{a^2 + b^2} - \frac{b}{a^2 + b^2} i$$

Fun Fact 2.5. $w = a + bi \in \mathbb{C} w \neq 0$

$$\frac{z}{w} = \frac{z}{w}\frac{\overline{w}}{\overline{w}} = \frac{z\overline{w}}{w\overline{w}} = \frac{z\overline{w}}{a^2 + b^2}$$

Formula de Moivre

$$z^n = |z|^n(\cos n\alpha + i \sin n\alpha), n \in \mathbb{Z}$$

Prueba por induccion:

- Para el caso n = 1 resulta trivial,
$$z^1 = |z|^1(\cos 1\alpha + i \sin 1\alpha)$$
$$z = |z|(\cos \alpha + i \sin \alpha)$$

- Para el caso n > 0, hay que demostrar que $\underbrace{(\cos \alpha + i \sin \alpha)^n = \cos n\alpha + i \sin n\alpha}_{HI}$

  Para $n + 1$:
$$(\cos \alpha + i \sin \alpha)^{n+1}$$
$$\underbrace{(\cos \alpha + i \sin \alpha)^n}_{HI}.(\cos \alpha + i \sin \alpha)$$
$$(\cos n\alpha + i \sin n\alpha).(\cos \alpha + i \sin \alpha)$$
$$(\cos(n\alpha).\cos(\alpha) - \sin(n\alpha).\sin(\alpha) + i\ (\cos(n\alpha).\sin(\alpha) + \sin(n\alpha).\cos(\alpha))$$
$$\cos(n\alpha + \alpha) + i \sin(n\alpha + \alpha)$$
$$\cos((n+1)\alpha) + i \sin((n+1)\alpha)$$

- Para el caso n = 0, tambien resulta trivial,
$$\cos(0\alpha) + i \sin(0\alpha) = 1 + 0i = 1$$

- Para el caso n < 0:
$$(\cos \alpha + i \sin \alpha)^{-n}$$
$$\big((\cos \alpha + i \sin \alpha)^n\big)^{-1}$$

Aplicando el item 2

$$(\cos n\alpha + i \sin n\alpha)^{-1}$$

Aplicando la identidad $z^{-1} = \dfrac{\overline{z}}{|z|^2}$

$$\cos(-n\alpha) + i \sin(-n\alpha)$$

Con lo que queda demostrado para todos los numeros enteros n que:

$$z^n = |z|^n(\cos n\alpha + i \sin n\alpha)$$

□