Unidad 2: Funciones Reales
Analisis Matemático I

Iker M. Canut

24 de julio de 2020

1. Generalidades

- Dados dos conjuntos X e Y, una **función** f es una ley que asocia a cada elemento $x \in X$, un único elemento $y \in Y$. Se nota $f : X \to Y, x \to y$
- Al conjunto X se lo llama **dominio** de la función f.
- Al conjunto Y se lo llama **codominio** de la función f.
- Al elemento y, **imagen** de x por la función f y lo notamos $y = f(x)$, se lee "y es igual a f de x". Ésta es la variable dependiente.
- Al elemento x, **preimagen** de y por f. Es la variable independiente.
- Al conjunto de todas las imágenes es el **recorrido** de f. $Rec(f) = \{y \in Y : y = f(x) \wedge x \in X\}$

2. Gráfica de una función

Es el conjunto de pares ordenados (x, y), donde $x \in Dom(f)$ e $y = f(x)$, notando al mismo G_f:

$$G_f = \{(x, y) : x \in Dom(f), y = f(x)\} = \{(x, f(x)) : x \in Dom(f)\}$$

Para representar los pares ordenados, se usa un **sistema de coordenadas cartesianas**: Dos rectas perpendiculares, cada una con su escala. Eje x y eje y forman el **plano x y**, se intersecan en el **origen de coordenadas**. Hay una **relación biunivoca** entre los puntos del plano y los pares ordenados de números reales. Un punto P se escribe como $P(x, y)$, x **abscisa**, y **ordenada**, donde $x \in Dom(f) \wedge y = f(x)$. Además, cualquier recta vertical corta a la gráfica de una función a lo sumo en un punto.

3. Propiedades de las funciones

- Es **suryectiva** cuando su recorrido coincide con su codominio, es decir, $Rec(f) = Codom(f)$.
- Es **inyectiva** cuando a todo par de elementos distintos del dominio le corresponden distintas imágenes: dados $x_1, x_2 \in Dom(f), x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$, o bien, $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$. Si existe una recta horizontal que corta a la gráfica en más de un punto, entonces no es inyectiva.
- Es **biyectiva** cuando es suryectiva e inyectiva. Luego, hay una relación biunivoca entre el dominio y el codominio. Cada elemento del codominio recibe una única flecha.

- Un conjunto no vacio A de números reales es **simétrico** cuando $x \in A \Rightarrow -x \in A$.
- Una función f es **par** si su dominio es un conjunto simétrico y $f(x) = f(-x)\ \forall x \in Dom(f)$. La gráfica es simétrica respecto al eje y, $(x, y) \in G_f \iff (-x, y) \in G_f$.
- Una función f es **impar** si su dominio es un conjunto simétrico y $f(-x) = -f(x)\ \forall x \in Dom(f)$. La gráfica es simétrica respecto al origen de coordenadas, $(x, y) \in G_f \iff (-x, -y) \in G_f$.

- Sea A un subconjunto del dominio de f, si para todo par de puntos $x_1, x_2 \in A$ se tiene que:
  - $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$, entonces f es una función **creciente** en A.
  - $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2)$, entonces f es una función **no decreciente** en A.
  - $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$, entonces f es una función **decreciente** en A.
  - $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \geq f(x_2)$, entonces f es una función **no creciente** en A.
- Una función es **monótona** en un conjunto si es creciente o decreciente en dicho conjunto.

4. Funciones elementales

Función	Definición	Sury	Iny	Paridad	Crecimiento
Constante	$\mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \to c$	$\times$	$\times$	Par	No creciente y No decreciente
Identidad	$\mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \to x$	✓	✓	Impar	Creciente
Lineal	$\mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \to m \cdot x + h$	✓	✓	$h = 0 \Rightarrow$ Impar	$m > 0 \Rightarrow$ crec, $m < 0 \Rightarrow$ decr.
Valor Absoluto	$\mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \to \lvert x \rvert$	$\times$	$\times$	Par	$(-\infty, 0] \to$ decr, $[0, +\infty) \to$ crec.
Potencia	$\mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \to x^a$ (a impar)	✓	✓	Impar	Creciente
Potencia	$\mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \to x^a$ (a par)	$\times$	$\times$	Par	$(-\infty, 0] \to$ decr, $[0, +\infty) \to$ crec.
Reciproca	$\mathbb{R} - \{0\} \to \mathbb{R}, x \to x^a$	$\times$	✓	Impar	$(-\infty, 0] \to$ decr, $[0, +\infty) \to$ decr.
Parte Entera	$\mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \to [x]$	$\times$	$\times$	$\times$	No decreciente
Mantisa	$\mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \to x - [x]$	$\times$	$\times$	$\times$	$\times$
Cuadrática	$\mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \to a \cdot x^2 + b \cdot x + c$	$\times$	$\times$	Par	$(-\infty, 0] \to$ decr, $[0, +\infty) \to$ crec.
Homográfica	$\mathbb{R} - \{-\frac{d}{c}\} \to \mathbb{R}, x \to \frac{a \cdot x + b}{c \cdot x + d}$	$\times$	✓	$\times$	Analizar
Signo	$\mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \to \begin{cases} \frac{\lvert x \rvert}{x}, x \neq 0; 0, x = 0 \end{cases}$	$\times$	$\times$	Impar	No decreciente

5. Función Cuadrática Caso General

- Para graficarlo, se completa el cuadrado: ... $+ \left(\frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{b}{2a}\right)^2$ ...
- Para calcular las raices: $x_1, x_2 = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$
- El vertice tiene coordenadas $\left(\frac{-b}{2a}, f(\frac{-b}{2a})\right)$, recordamos que $\frac{x_1 + x_2}{2} = \frac{-b}{2a}$.
- Si $a > 0$ entonces tiene mínimo y las ramas van hacia arriba.
- Si $a < 0$ entonces tiene máximo y las ramas van hacia abajo.

6. Función Homográfica

$\frac{ax+b}{cx+d}$ se busca llegar a $A + \frac{C}{x+B}$. Se saca $\frac{a}{c}$. Luego ... $+ \frac{d}{c} - \frac{d}{c}$... para cancelar el parte del numerador usando el denominador como referencia. Se distribuye, se cancela, y llegamos a:

$$\frac{a}{c} + \frac{bc - ad}{c^2} \cdot \frac{1}{x + \frac{d}{c}}$$

La asintota horizontal es $y = A = \frac{a}{c}$ y la asintota vertical es $x = -B = -\frac{d}{c}$

La intersección con los ejes es en los puntos $(0, \frac{b}{d})$ y $(-\frac{b}{a}, 0)$

7. Función Racional

Sea $f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$, siendo p y q dos polinomios, $Dom(f) = \mathbb{R} \cap \{x : q(x) \neq 0\}$.

8. Función Periódica

Si $f(x) = f(x+p)\ \forall x \in Dom(f)$ y p es el mismo número positivo que verifica esta relación.

9. Funciones Trigonométricas

9.1. Función Seno

$f(x) = sin(x)\ \forall x \in \mathbb{R}$. $Rec(f) = [-1, 1]$, periódica de periodo 2π, función impar.

$$sin\ x = 0 \iff x = \pi \cdot k, k \in Z$$
$$sin\ x = 1 \iff x = \frac{\pi}{2} + 2 \cdot \pi k, k \in Z$$

9.2. Función Coseno

$f(x) = cos(x)\ \forall x \in \mathbb{R}$. $Rec(f) = [-1, 1]$, periódica de periodo 2π, función par.

$$cos\ x = 0 \iff x = \frac{\pi}{2} + \pi k, k \in Z$$
$$cos\ x = 1 \iff x = 2\pi \cdot k, k \in Z$$

$$cos(x) = sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right),\ \forall x \in \mathbb{R}$$

9.3. Función Tangente

$f(x) = tan(x) = \dfrac{sin(x)}{cos(x)}\ \forall x \in \mathbb{R} - \{\dfrac{\pi}{2} + k \cdot \pi, k \in Z\}$. $Rec(f) = \mathbb{R}$, periódica de periodo π, impar.

10. Funciones Recíprocas Trigonométricas

10.1. Función Cosecante

$csc(x) = \dfrac{1}{sin\ x}$. $Dom(cosec) = \mathbb{R} - \pi \cdot k, k \in \mathbb{Z}$. $Rec(cosec) = \mathbb{R} - (-1, 1)$.

Impar, Periódica de periodo 2π.

10.2. Función Secante

$csc(x) = \dfrac{1}{cos\ x}$. Periódica de periodo 2π. $Dom(sec) = \mathbb{R} - \{\pi \cdot k + \dfrac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}\}$. $Rec(sec) = \mathbb{R} - (-1, 1)$

Par, Periódica de periodo 2π.

10.3. Función Cotangente

$csc(x) = \dfrac{1}{tan\ x} = \dfrac{cos\ x}{sin\ x}$. $Dom(cot) = \mathbb{R} - \{\pi \cdot k, k \in \mathbb{Z}\}$. $Rec(cot) = \mathbb{R}$

Impar, Periódica de periodo π.

11. Identidades Trigonométricas

1. $cos^2x + sin^2x = 1$
2. $1 + tan^2x = \dfrac{1}{cos^2x} = sec^2x$
3. $1 + cot^2x = \dfrac{1}{sin^2x} = csc^2x$
4. $cos(x \pm y) = cos\ x \cdot cos\ y \mp sin\ x \cdot sin\ y \wedge sin(x \pm y) = sin\ x \cdot cos\ y \pm cos\ x \cdot sin\ y$
5. $cos\ x + cos\ y = 2 \cdot cos\dfrac{x+y}{2} \cdot cos\dfrac{x-y}{2} \wedge cos\ x - cos\ y = -2 \cdot sin\dfrac{x+y}{2} \cdot sin\dfrac{x-y}{2}$
6. $sin\ x + sin\ y = 2 \cdot sin\dfrac{x+y}{2} \cdot cos\dfrac{x-y}{2} \wedge sin\ x - sin\ y = 2 \cdot cos\dfrac{x+y}{2} \cdot sin\dfrac{x-y}{2}$
7. $cos(2x) = cos^2x - sin^2x \wedge sin(2x) = 2 \cdot sin\ x \cdot cos\ x$
8. $cos^2x = \dfrac{1 + cos\ 2x}{2} \wedge sin^2x = \dfrac{1 - cos\ 2x}{2}$

$$x = \frac{x+y}{2} + \frac{x-y}{2} \quad \wedge \quad y = \frac{x+y}{2} - \frac{x-y}{2}$$

9. $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cdot cos\ C$
10. $\dfrac{sin\ A}{a} = \dfrac{sin\ B}{b} = \dfrac{sin\ C}{c}$

12. Traslaciones o reflexiones respecto de una recta

- $g(x) = -f(x)$, entonces $x \in Dom(g) \iff x \in Dom(f)$, $(x, y) \in G_f \iff (x, -y) \in G_g]$ y tienen los mismos ceros. $Rec(f) = [c, d] \Rightarrow Rec(g) = [-d, -c]$. Reflexión respecto del eje x.
- $t(x) = |f(x)|$, entonces $x \in Dom(t) \iff x \in Dom(f)$. Si $f(x) \geq 0$, entonces $t(x) = f(x)$. Si $f(x) < 0$, entonces $t(x) = -f(x)$.
- $h(x) = f(x) + \alpha$, entonces $x \in Dom(h) \iff x \in Dom(f)$, $(x, y) \in G_f \iff (x, y + \alpha) \in G_h$. Si $\alpha > 0$, se traslada la gráfica de f hacia arriba α unidades. Si $\alpha < 0$, hacia abajo.
  $Rec(f) = [c, d] \Rightarrow Rec(h) = [c + \alpha, d + \alpha]$
- $p(x) = f(x+\beta)$, entonces $x \in Dom(f) \iff (x-\beta) \in Dom(p)$, $(x, y) \in G_f \iff (x-\beta, y) \in G_p$. Si $\beta > 0$, se traslada la gráfica de f a la izquierda. Si $\beta < 0$, hacia la derecha. $Rec(p) = Rec(f)$.

13. Cambio de Tamaño y Reflexión

- $y = c \cdot f(x)$ dilata verticalmente G_f.
- $y = \dfrac{1}{c} \cdot f(x)$ comprime verticalmente G_f.
- $y = f(c \cdot x)$ comprime horizontalmente G_f.
- $y = f\left(\dfrac{1}{c} \cdot x\right)$ dilata horizontalmente G_f.
- $y = -f(x)$ refleja G_f respecto del eje x.
- $y = f(-x)$ refleja G_f respecto del eje y.

14. Composición de Funciones

Dadas dos funciones $f : Dom(f) \to \mathbb{R}, g : Dom(g) \to \mathbb{R}$, se define la función compuesta, notado como $(f \circ g)(x) = f(g(x))$. Luego, $Dom(f \circ g)(x) = \{x \in Dom(g) \wedge g(x) \in Dom(f)\}$

15. Función Inversa

Sea f una función inyectiva con dominio A y recorrido B, entonces su función inversa $f^{-1} : B \to A$ se define para cada $y \in B : f^{-1} = x \iff f(x) = y$. Luego, $(x, y) \in G_f \iff (y, x) \in G_{f^{-1}}$. Es decir, las gráficas de f y f^{-1} son simétricas respecto a la gráfica de la función identidad. Además, como $f^{-1}(f(x)) = x \iff f(f^{-1}(x)) = y$, tenemos que $f(f^{-1}(x))$, y $f^{-1}(f(x))$, es la función identidad.

Por último, cuando f no es inyectiva, podemos restringir el dominio a un subconjunto, donde si lo sea, y definir su inversa.

16. Función Exponencial

$f(x) = a^x$, $a > 0 \wedge a \neq 1$. $Dom(f) = \mathbb{R}, Rec(f) = \mathbb{R}^+$. Si $a > 1$, creciente. Si $0 < a < 1$, decreciente. $y = 0$ es una asintota horizontal.

- $a^x \neq 0, \ \forall x$
- $a^0 = 1, \ \forall a$
- $0 < a < b \wedge x > 0 \Rightarrow a^x < b^x$
- $0 < a < b \wedge x < 0 \Rightarrow a^x > b^x$

16.1. Función Logaritmica (inversa de la exponencial)

$f(x) = log_a x$, $a > 0 \wedge a \neq 1$. $Dom(f) = \mathbb{R}^+, Rec(f) = \mathbb{R}$. Definición: $log_a x = y \iff a^y = x$

$$log_a(x \cdot y) = log_a(x) + log_a(y) \ \wedge \ a^x \cdot a^y = a^{x+y}$$
$$log_a\left(\frac{x}{y}\right) = log_a(x) - log_a(y) \ \wedge \ \frac{a^x}{a^y} = a^{x-y}$$
$$log_a(x^y) = y \cdot log_a(x) \ \wedge \ (a^x)^y = a^{x \cdot y}$$

17. Funciones Trigonometricas Inversas

17.1. Arco Seno

$arcsin\ x = sin^{-1}(x) = y \iff sin\ y = x, -\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}$. Es el número entre $-\frac{\pi}{2}$ y $\frac{\pi}{2}$ cuyo seno es x.

$Dom(sin\ x) = Rec(arcsin\ x) = [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, $Rec(sin\ x) = Dom(arcsin\ x) = [-1, 1]$

17.2. Arco Coseno

$arccos\ x = cos^{-1}(x) = y \iff cos\ y = x, 0 \leq x \leq \pi$. El número entre 0 y π cuyo coseno es x.

$Dom(cos\ x) = Rec(arccos\ x) = [0, \pi]$, $Rec(cos\ x) = Dom(arccos\ x) = [-1, 1]$

17.3. Arco Tangente

$arctan\ x = tan^{-1}(x) = y \iff tan\ y = x, 0 < x < \frac{\pi}{2}$. El número entre $-\frac{\pi}{2}$ y $\frac{\pi}{2}$ cuya tangente es x.

$Dom(tan\ x) = Rec(arctan\ x) = (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$, $Rec(tan\ x) = Dom(arctan\ x) = \mathbb{R}$