Facultad de Ciencias Exactas, Ingeniería y Agrimensura

Departamento de Matemática - Escuela de Ciencias Exactas y Naturales

ANÁLISIS MATEMÁTICO II

Licenciatura y Profesorado en Física, Licenciatura en Ciencias de la Computación,

Licenciatura y Profesorado en Matemática - Año 2020

Práctica 9: Funciones de varias variables - Límite y continuidad.

---

1. Sea A un subconjunto de $\mathbb{R}^n$:

    - un punto $u \in \mathbb{R}^n$ de denomina un **punto de frontera** de A, si para cada $r > 0$, $B_r(u) \cap A \neq \emptyset$ y $B_r(u) \cap \mathcal{C}A \neq \emptyset$. El conjunto de puntos de frontera de A se denomina la **frontera** de A, y se denota por ∂A.
    - un punto $u \in \mathbb{R}^n$ se denomina un **punto exterior** de A, si existe $r > 0$ tal que $B_r(u) \subset \mathcal{C}A$. El conjunto de puntos exteriores de A se denota por ext$A$.
    - El conjunto de puntos de acumulación de A, se denota por A'.

    Indique en cada caso el interior $\overset{\circ}{A}$, el conjunto de puntos de acumulación A', la clausura $\overline{A}$, la frontera ∂A, el complemento $\mathcal{C}A$ y el exterior ext$A$ del conjunto A. Determine si el conjunto A dado es abierto, cerrado, o ninguno de los dos. Haga un bosquejo del conjunto en el plano o en el espacio según corresponda.

    a) $A = \{(x, y) : xy > 0\}$
    b) $A = \{(x, y) : x > 0, y > 0, y < 2 - x\}$
    c) $A = \{(x, y) : |x| + |y| \leq 1\}$
    d) $A = \left\{(x, y) : x^2 + y^2 > 1\right\}$
    e) $A = \left\{(x, y) : 1 < x^2 + y^2 \leq 4\right\}$
    f) $A = \left\{(x, y) : (x^2 + y^2 - 4)(1 - x^2 - y^2) > 0\right\}$
    g) $A = \{(x, y, z) : |x - 1| < 2, |y| < 1, |z| \leq 1\}$
    h) $A = \left\{(x, y, z) : x^2 + 5y^2 + 3z^2 > 7\right\}$

2. Sean A y B subconjuntos de $\mathbb{R}^n$. Pruebe que:

    a) Si A y B son abiertos, entonces $A \cap B$ es abierto y $A \cup B$ es abierto.
    b) Si A y B son cerrados, entonces $A \cap B$ es cerrado y $A \cup B$ es cerrado.

3. Para cada una de las siguientes funciones, determine su dominio natural, es decir, el mayor subconjunto de $\mathbb{R}^n$ donde la función está definida, y represéntelo gráficamente.

a) $f(x, y) = \dfrac{1}{\sqrt{1 - 2x^2 - y^2}}$

b) $f(x, y) = \sqrt{\dfrac{1 - x^2}{y^2 - 1}}$

c) $f(x, y, z) = \ln(xyz)$

d) $f(x, y, z) = \arcsin \dfrac{1}{x + y + z}$

4. Represente gráficamente los conjuntos de nivel correspondientes al k dado, para cada $f : S \to \mathbb{R}$, donde S es el dominio natural de f.

a) $f(x, y) = 6 - 3x - 2y$ $\quad k = -6, 0, 6.$

b) $f(x, y) = \sqrt{9 - x^2 - y^2}$ $\quad k = -1, 0, 1, 3$

c) $f(x, y) = x + y^2$ $\quad k = -1, 0, 2.$

d) $f(x, y, z) = x - 3y - z$ $\quad k = -1, 2, 3.$

e) $f(x, y, z) = x^2 + 2y^2 + 5z^2$ $\quad k = -1, 1, 2$

5. Usando coordenadas polares describa las curvas de nivel de la función $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dada por:

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{2xy}{\sqrt{x^2+y^2}} & \text{si} \quad (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si} \quad (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

6. Determine en cada caso el conjunto de $\mathbb{R}^2$ en el cual f es continua:

a) $f(x, y) = \dfrac{1}{x^4 + y^4 - 2x^2y^2}$

b) $f(x, y) = \arcsin \left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} \right)$

c) $f(x, y) = \log \left(x^2 + y^2 \right)$

7. Muestre que la función $f(x, y) = \dfrac{x - y}{x + y}$ no posee límite en los puntos de la recta $y + x = 0$.

8. Considere la función $f(x, y) = x \sin(1/y) + y \sin(1/x)$ con $x \neq 0, y \neq 0$. ¿Tiene límite en $(0, 0)$?

9. Demuestre que las siguientes funciones son continuas en $\mathbb{R}^2$. En cada caso se define $f(0, 0)$ como $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x, y)$.

a) $f(x, y) = \dfrac{\sin xy}{\sqrt{x^2 + y^2}}$

b) $f(x,y) = y^2 \log(x^2+y^2)$

c) $f(x,y) = \dfrac{x^3+y^3}{x^2+y^2}$

10. Sea $f(x,y,z) = \dfrac{x^2+y^2-z^2}{x^2+y^2+z^2}$. Muestre que no existe $\lim\limits_{(x,y,z)\to(0,0,0)} f(x,y,z)$.

11. Muestre que $g(x,y) = \dfrac{x^2}{x^2+y^2-x}$ tiende a cero si (x,y) se aproxima a $(0,0)$ por cualquier recta, y sin embargo g no tiene límite en $(0,0)$.

12. Analice la existencia de los siguientes límites:

    a) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} xy^3(x+y)^{-1}$

    b) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy^2}{x^2+y^4}$

    c) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{sen(xy)}{xy}$

    d) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} (1-\cos(x^2+y^2))(x^2+y^2)^{-1}$

13. Pruebe que toda función lineal $A : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ es continua.

14. Pruebe que existe la siguiente derivada respecto de t: $\frac{d}{dt}|_{t=0} A(tv)$, donde $A : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ es lineal, y donde esa derivada se toma componente a componente.

    Ayuda: piense en el cociente incremental correspondiente y convenza que está bien definido.