PRÁCTICA 3 - Límite y Continuidad

Límite

1. -a- Demostrar la validez de las siguientes afirmaciones:

   .I. $|x-3| < 2 \Rightarrow |x| < 5.$ .II. $|x-3| < \dfrac{1}{2} \Rightarrow \dfrac{1}{|x-2|} < 2.$

   -b- Interpretar geométricamente los resultados obtenidos en los ítem anteriores.

2. Utilizando la representación gráfica de la función $f(x) = \dfrac{1}{x}$,

   -a- explicitar el conjunto $\{x \in \mathbb{R} : |f(x) - 1| < 1/2\}$.

   -b- determinar un número $\delta > 0$, tal que $|x-1| < \delta \Rightarrow |f(x) - 1| < 1/2$.

   -c- comprobar analíticamente la validez de la afirmación anterior.

3. -a- En el siguiente ejemplo determinar, si ello resulta posible, un número $\delta > 0$ tal que

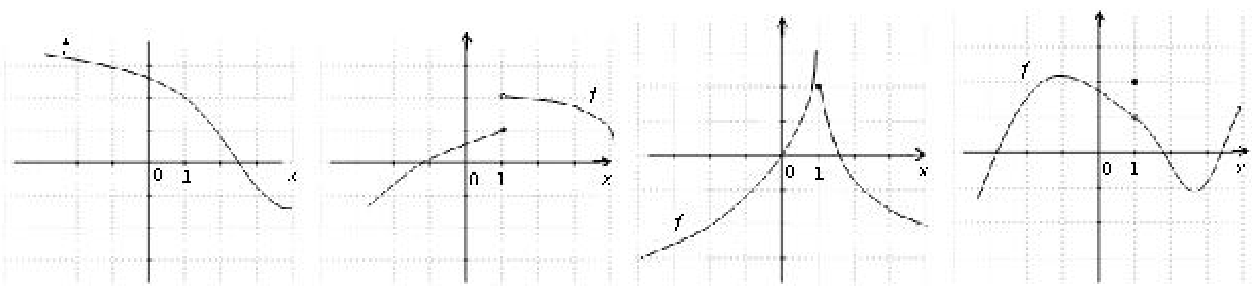
   $$0 < |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - c| < \epsilon,$$

   para los valores de a, c y ϵ dados:

   $$f(x) = 2 - 3x,\ a = -1,\ c = 5,\ \epsilon = 0{,}1$$

   -b- Representar gráficamente la función f en un entorno del punto a e interpretar geométricamente el resultado obtenido.

4. Resolver para cada una de las funciones cuyas gráficas se esbozan a continuación, lo que se pide en cada item.



   -a- Analizar la existencia del límite $\lim\limits_{x\to 1} f(x) = L$.

   -b- En caso de una respuesta afirmativa en -a-, representar el número L sobre el eje de las ordenadas y, en caso de una respuesta negativa, explicar las razones de la misma.

ESCUELA DE CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
Av. Pellegrini 250. Rosario
+54 0341 - 480 2649 internos 216 - 119

5. Dados $a \in \mathbb{R}$ y $b \in \mathbb{R}$ se considera la función $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, tal que

$$h(x) = \begin{cases} x^2 + 4x + 2 & x < -1, \\ ax + b & |x| \leq 1, \\ -x^2 + 4x - 6 & x > 1. \end{cases}$$

-a- Representar gráficamente la función h para $x < -1$ y $x > 1$.

-b- A partir de la gráfica obtenida, determinar a y b de manera que existan $\lim\limits_{x \to -1} h(x)$ y $\lim\limits_{x \to 1} h(x)$.

6. Para cada una de las siguientes funciones determinar su dominio y su gráfica. A partir de la gráfica indicar el valor de cada límite.

.I. $f_1(x) = \dfrac{x^2 - 1}{x - 1}$, $\lim\limits_{x \to 1} f_1(x)$.

.II. $f_2(x) = \dfrac{x^2 + x - 2}{x^2 - 3x + 2}$, $\lim\limits_{x \to 1} f_2(x)$.

.III. $f_3(x) = \dfrac{\ln x^4 - \ln x^2 - \ln x}{\ln x^3}$, $\lim\limits_{x \to 1} f_3(x)$.

7. Utilizando la definición, demostrar los siguientes límites.

.I. $\lim\limits_{x \to 4} (9 - x) = 5$.

.II. $\lim\limits_{x \to 4} \dfrac{8}{x} = 2$.

.III. $\lim\limits_{x \to 1} f(x) = 1$ para $f(x) = \begin{cases} x^2 & x \neq 1, \\ 2 & x = 1. \end{cases}$

Cálculo de límites

8. Calcular los siguientes límites, indicando en cada caso las propiedades aplicadas.

$$(i) \lim_{x \to 4} \left(5x^2 - 2x + 3\right), \qquad (ii) \lim_{x \to -1} \frac{x + 2}{x^4 - x + 5}.$$

9. Sabiendo que:

$$\lim_{x \to a} f(x) = -3, \qquad \lim_{x \to a} g(x) = 0, \qquad \lim_{x \to a} h(x) = 6$$

determinar, si existen, los siguientes límites:

.I. $\lim\limits_{x \to a} (f(x) + h(x))$.

.II. $\lim\limits_{x \to a} (g(x) \cdot h(x))$.

.III. $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{2g(x)}{f(x) - h(x)}$.

10. Calcular los siguientes límites:

-a- $\lim\limits_{x \to 4} (3x - 2)$.

-b- $\lim\limits_{x \to 0} 3\sqrt{x^2 + 9}$.

-c- $\lim\limits_{x \to 3} \dfrac{x - 3}{\sqrt{x^2 + 16} - 4}$.

-d- $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x^3 - 3x}{x^3 - 4x}$.

-e- $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{4}} \dfrac{\tan(x) + x}{4}$.

-f- $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{4}} \dfrac{\operatorname{sen}(x) - \cos(x)}{\tan(x) - 1}$.

ESCUELA DE CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
Av. Pellegrini 250. Rosario
+54 0341 - 480 2649 internos 216 - 119

-g- $\lim\limits_{y\to 2} \dfrac{y^2-4}{2-y}$.

-h- $\lim\limits_{t\to -1} \dfrac{t^2+3t+2}{t^2-t-2}$.

-i- $\lim\limits_{x\to \pi} \cos\left(\frac{x}{4}\right)$.

-j- $\lim\limits_{v\to 1} \dfrac{v^4-1}{v^3-1}$.

-k- $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1+x+\operatorname{sen} x}{3\cos x}$.

11. Analizar :

-a- Si no existen los límites $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ y $\lim\limits_{x\to a} g(x)$, ¿puede existir $\lim\limits_{x\to a}[f(x)+g(x)]$?, ¿o puede existir $\lim\limits_{x\to a} f(x)\cdot g(x)$?

-b- Si existen los límites $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ y $\lim\limits_{x\to a}[f(x)+g(x)]$, ¿debe existir $\lim\limits_{x\to a} g(x)$?

-c- Si existen los límites $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ y $\lim\limits_{x\to a} f(x)\cdot g(x)$, ¿se sigue de ello que existe $\lim\limits_{x\to a} g(x)$?

12. Si $2-x^2 \leq f(x) \leq 2\cos x$ para todo x, determinar $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$.

13. -a- Sabiendo que $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{sen} x}{x} = 1$, demostrar la siguiente proposición:

Si $f(x) \neq 0$ en un entorno reducido del punto a y $\lim\limits_{x\to a} f(x) = 0$ entonces

$$\lim_{x\to a} \frac{\operatorname{sen}(f(x))}{f(x)} = 1.$$

-b- Utilizando el resultado del ítem anterior, calcular los siguientes límites.

-a- $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{sen}(2x)}{5x}$.

-b- $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}} \dfrac{\cos x}{x-\frac{\pi}{2}}$.

-c- $\lim\limits_{x\to 0} 6x^2 \cot(x)\csc(2x)$.

-d- $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{sen}(\operatorname{sen} x)}{\operatorname{sen} x}$.

-e- $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x\csc(2x)}{\cos(3x)}$.

-f- $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{\operatorname{sen}(x+h)-\operatorname{sen} x}{h}$.

14. Utilizar las definiciones formales para probar los siguientes límites.

-a- $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{1}{x} = +\infty$.

-b- $\lim\limits_{x\to 2^+} \dfrac{1}{x-2} = +\infty$.

15. Calcular los siguientes límites laterales:

-a- $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{x-1}{x}$.

-b- $\lim\limits_{x\to 0^-} (1+\csc(x))$.

-c- $\lim\limits_{x\to 2^-} \dfrac{x-2}{|2-x|}$.

-d- $\lim\limits_{x\to -2^+} (x+4)\dfrac{|x+2|}{x+2}$.

-e- $\lim\limits_{x\to 0^+} \sqrt{x}\cos\left(\dfrac{2}{x}\right)$.

-f- $\lim\limits_{x\to 1^-} \dfrac{\sqrt{x}(x-1)}{|1-x|}$.

16. Calcular los siguientes límites:

-a- $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x-1}{x}$.

-b- $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{-1}{x^2(x+3)}$.

17. Sea

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right), & x<0 \\ \sqrt{x}, & x>0 \end{cases}$$

Determinar $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$ y $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)$. Utilizar las definiciones formales para verificar los resultados. En base a lo obtenido, ¿qué se puede decir acerca de $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$? Justificar la respuesta.

18. Utilizando el Teorema de Intercalación del Límite, calcular:

-a- $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{\operatorname{sen} 2x}{x}$. -b- $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{\cos 3x}{x}$.

19. Calcular, para cada función racional enunciada, el límite cuando $x \to +\infty$ y el límite cuando $x \to -\infty$.

-a- $\dfrac{2x-3}{5x+7}$. -b- $\dfrac{x+1}{x^2+3}$.

20. -a- Demostrar que, si $n \in \mathbb{N}$ entonces $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} x^n = +\infty$.

-b- Dada la función polinómica $p(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1x + a_0$, mostrar que

$$\lim_{x\to+\infty} p(x) = +\infty.$$

Sugerencia: Reescriba a la función polinómica p como $p(x) = x^n(1 + a_{n-1}\frac{1}{x} + \cdots + a_1\frac{1}{x^{n-1}} + a_0\frac{1}{x^n})$.

-c- Mostrar que

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1x + a_0}{b_mx^m + b_{m-1}x^{m-1} + \cdots + b_1x + b_0} = \begin{cases} +\infty & \text{si } m < n,\ a_n\, b_m > 0, \\ -\infty & \text{si } m < n,\ a_n\, b_m < 0, \\ \dfrac{a_n}{b_m} & \text{si } m = n, \\ 0 & \text{si } \ m > n. \end{cases}$$

21. Calcular los siguientes límites en el infinito.

-a- $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} \frac{10x^6 + x^3 + 5}{x^4 + 10}$.

-b- $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{2\sqrt{x} + x^{-1}}{3x - 7}$.

-c- $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} \frac{\sqrt[3]{x} - \sqrt[5]{x}}{\sqrt[3]{x} + \sqrt[5]{x}}$.

-d- $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \sqrt{\frac{x+1}{x^2+3}}$.

-e- $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} \frac{9x^4 + x}{3x^4 + 5x^3 - 4x^2 - x + 2}$.

En los ejercicios siguientes se utilizan alguno de estos conceptos.

Sea f una función real definida en un entorno reducido del punto a. La recta $x = a$ se llama **asíntota vertical** de la curva $y = f(x)$ si por lo menos una de las siguientes afirmaciones es verdadera:

(I) $\displaystyle\lim_{x\to a} f(x) = +\infty$. (III) $\displaystyle\lim_{x\to a^+} f(x) = +\infty$. (V) $\displaystyle\lim_{x\to a^+} f(x) = -\infty$.

(II) $\displaystyle\lim_{x\to a} f(x) = -\infty$. (IV) $\displaystyle\lim_{x\to a^-} f(x) = +\infty$. (VI) $\displaystyle\lim_{x\to a^-} f(x) = -\infty$.

La recta $y = L$ se llama **asíntota horizontal** de la curva $y = f(x)$ si se cumple cualquiera de las dos condiciones siguientes:

$$(i) \lim_{x\to+\infty} f(x) = L \quad \text{o} \quad (ii) \lim_{x\to-\infty} f(x) = L.$$

ESCUELA DE CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
Av. Pellegrini 250. Rosario
+54 0341 - 480 2649 internos 216 - 119

Si $\lim_{x\to+\infty} (f(x) - (mx+b)) = 0$, la recta $y = mx + b$ se llama **asíntota oblicua o inclinada** de la curva $y = f(x)$ porque la distancia entre la curva $y = f(x)$ y la recta $y = mx + b$ tiende a 0, como se observa en la Figura 1. Se presenta un caso semejante si se hace $x \to -\infty$.

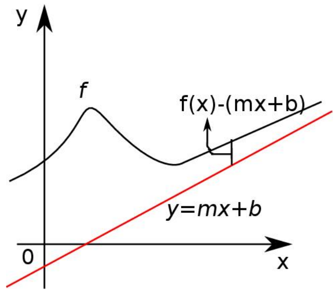


Figura 1: Asíntota oblícua

22. En cada uno de los siguientes ítems, determinar una función que satisfaga las condiciones indicadas. Elaborar un bosquejo de su gráfica.

    -a- $f(2) = 1,\ f(-1) = 0,\ \lim_{x\to+\infty} f(x) = 0,\ \lim_{x\to0^+} f(x) = +\infty,\ \lim_{x\to0^-} f(x) = -\infty$ y $\lim_{x\to-\infty} f(x) = 1.$

    -b- $h(0) = 0,\ \lim_{x\to\pm\infty} h(x) = 0,\ \lim_{x\to2^+} h(x) = 2$ y $\lim_{x\to2^-} h(x) = -2.$

    -c- $\lim_{x\to\pm\infty} p(x) = 0,\ \lim_{x\to3^+} p(x) = +\infty$ y $\lim_{x\to3^-} p(x) = -\infty.$

    Aclaración: En general las respuestas no son únicas; cualquier función que cumpla con las condiciones es aceptable. Se puede utilizar funciones definidas por partes, si esto ayuda.

23. Determinar algebraicamente los siguientes límites:

    -a- $\lim_{x\to+\infty} \left(\sqrt{x+9} - \sqrt{x+4}\right).$

    -b- $\lim_{x\to+\infty} \dfrac{1}{\sqrt{9x^2 - x} - 3x}.$

    -c- $\lim_{x\to-\infty} \dfrac{x}{x + \sqrt{x^2 + x}}.$

    -d- $\lim_{x\to-\infty} \left(\sqrt{x^2 + x} - \sqrt{x^2 - x}\right).$

Sea f una función racional tal que el grado del numerador es igual al grado del denominador más 1. Al dividir el numerador por el denominador podemos reescribir a la función racional f como una función lineal, más un residuo que tiende a cero cuando $x \to \pm\infty$. Entonces **la gráfica de f tiene una asíntota oblicua**.

Por ejemplo, si se quiere determinar la asíntota oblicua de la gráfica de $f(x) = \dfrac{x^2 - 3}{2x - 4}$, se efectúa la división de polinomios para obtener, gracias al algoritmo del cociente, que

$$f(x) = \underbrace{\left(\frac{x}{2} + 1\right)}_{\textit{término lineal}} + \underbrace{\left(\frac{1}{2x - 4}\right)}_{\textit{residuo}}.$$

Cuando $x \to \pm\infty$, el residuo (cuya magnitud indica la distancia vertical que hay entre las gráficas de f y la del término lineal) tiende a cero. Por lo tanto, la recta $y = \dfrac{x}{2} + 1$ resulta ser una asíntota de la gráfica de f, tanto por derecha, si $t \to +\infty$, como por izquierda, si $t \to -\infty$.

24. Hallar las asíntotas oblicuas de las siguientes funciones:

    -a- $f(x) = \dfrac{x^2}{x-1}$. -b- $f(x) = \dfrac{x^2+1}{x-1}$. -c- $f(x) = \dfrac{x^3+1}{x^2}$.

    I Si se quisiera graficar estas funciones, ¿es posible que aparezcan otro tipo de asíntotas en ellas (verticales, horizontales)? ¿Por qué?

    II Realizar un bosquejo de la gráfica de cada una de las funciones.

25. ¿Es la función $f(x) = \frac{x^2-1}{x-1}$ una función racional? ¿Tiene asíntota oblicua?

Continuidad

26. Sean las funciones $f(x) = \dfrac{x^2+x-6}{x-2}$ y $g(x) = x+3$.

    -a- ¿Es correcto decir que $f = g$?

    -b- ¿Cómo son los límites $\lim\limits_{x\to 2} f(x)$ y $\lim\limits_{x\to 2} g(x)$? Justificar la respuesta.

27. Analizar la continuidad de cada una de las siguientes funciones en el punto x_0 indicado en cada caso.

    -a- $f_1(x) = \begin{cases} x & x < 1 \\ 2-x & x \geq 1 \end{cases}$, $(x_0 = 1)$.

    -b- $f_2(x) = \begin{cases} -4 & x \leq 0 \\ \dfrac{1}{x+1} & x > 0 \end{cases}$, $(x_0 = 0)$.

    -c- $f_3(x) = \begin{cases} \dfrac{x^3-1}{x-1} & x \neq 1 \\ -5 & x = 1 \end{cases}$, $(x_0 = 1)$.

    -d- $f_4(x) = \begin{cases} \sqrt{x+1} & -1 < x \leq 0 \\ \dfrac{1}{x+1} & x > 0 \end{cases}$, $(x_0 = 0)$.

28. Determinar los puntos de continuidad y clasificar las discontinuidades de las siguientes funciones:

    -a- $f_1(x) = [x]$.

    -b- $f_2(x) = \begin{cases} \dfrac{2x^2+7x-4}{x+4} & x \neq -4 \\ 3 & x = -4 \end{cases}$.

    -c- $f_3(x) = \dfrac{x^2+2x-3}{2x^2-6x+4}$.

    -d- $f_4(x) = \begin{cases} \dfrac{x^3-1}{x-1} & x \neq -1 \\ -5 & x = 1 \end{cases}$.

29. Dadas las funciones

$$f_1(x) = \frac{x^2-4}{x-2}, \qquad f_2(x) = \frac{|3-x|}{x-3}, \qquad f_3(x) = 0 \; \forall\, x \in \mathbb{R} \smallsetminus \mathbb{Q},$$

determinar para cuáles de ellas se puede definir una función $F_i : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continua tal que coincida con f_i, es decir,

$$F_i(x) = f_i(x) \quad \forall\, x \in Dom(f_i), \; i = 1, 2, 3.$$

ESCUELA DE CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
Av. Pellegrini 250. Rosario
+54 0341 - 480 2649 internos 216 - 119

30. En los siguientes ejemplos se consideran dos funciones f y g. Hallar, en cada caso, la ley de la composición $h = f \circ g$ y analizar sus puntos de continuidad.

    -a- $f(x) = x + 1$, $g(x) = x^2 - x$.

    -b- $f(x) = \dfrac{x + |x|}{2}$, $g(x) = \begin{cases} x & x < 0 \\ x^2 & x \geq 0 \end{cases}$.

    -c- $f(x) = \sqrt{x}$, $g(x) = \dfrac{x+1}{x-1}$.

31. Sea la función g definida por $g(x) = \dfrac{x-1}{\sqrt{x}-1}$.

    -a- Determinar su dominio.

    -b- Trazar la gráfica de la función g.

    -c- Calcular $\lim\limits_{x\to 1} g(x)$.

    -d- ¿Es posible encontrar una función f continua en $x = 1$ tal que $f(x) = g(x)$ para todo $x \neq 1$? En caso afirmativo, escribir su ley.

32. Determinar el valor de $a \in \mathbb{R}$ tal que la función resulte continua en $\mathbb{R}$.

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \operatorname{sen}(\frac{1}{x}) & x \neq 0 \\ a & x = 0 \end{cases}$$

33. Determinar los valores de a y b para los cuales se verifica

$$\lim_{x\to 0} \frac{\cos(ax^2) - b}{2x^4} = -1.$$

Teoremas de valor intermedio

34. Dada la función $f : [-1, 4] \to \mathbb{R}$ tal que

$$f(x) = \begin{cases} 3 & -1 \leq x < 0, \\ 2 - x^2 & 0 \leq x \leq 4, \end{cases}$$

    analizar si el teorema de Bolzano asegura la existencia de un punto $c \in (-1, 4)$ tal que $f(c) = 0$.

35. Considerar la función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $f(x) = x^3 - x^2 + 1$ para $x \in \mathbb{R}$.

    -a- Demostrar que existe un número $c \in [n, n + 1]$ para algún $n \in \mathbb{Z}$ tal que $f(c) = 0$.

    -b- Aproximar c con un error menor que $0{,}01$.

    -c- Probar que existe un número $\beta \in \mathbb{R}$ tal que $f(\beta) = 20$.

36. Demostrar que existe un único número $c \in \mathbb{R}$ solución de la ecuación:

$$\cos x - \sqrt{x} = 0$$

ESCUELA DE CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
Av. Pellegrini 250. Rosario
+54 0341 - 480 2649 internos 216 - 119

37. Un **punto fijo** de una función f es un número $\xi \in$ *Dom*(f) tal que $f(\xi) = \xi$.

   -a- Representar gráficamente una función continua $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ tal que $\mathbf{Im}(f) \subseteq [0, 1]$ y determinar gráficamente si f tiene un punto fijo.

   -b- ¿ Es posible trazar la gráfica de una función continua $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ tal que su imagen está contenida en $[0, 1]$ y que no tenga un punto fijo?

   -c- Demostrar que si $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ es una función continua, tal que $\mathbf{Im}(f) \subseteq [0, 1]$, entonces f tiene un punto fijo.
   Sugerencia: Aplicar el teorema de Bolzano a la función $g : [0, 1] \to \mathbb{R}$, *donde* $g(x) = f(x) - x$.

38. Demostrar que si la función f es continua y no tiene ceros en el intervalo $[a, b]$ entonces $f(x) > 0$ para todo $x \in [a, b]$, o bien $f(x) < 0$ para todo $x \in [a, b]$.

39. En cada uno de los siguientes casos demostrar que la función f_i es estrictamente monótona en su dominio. Obtener su inversa (ley y dominio) y estudiar la continuidad de la misma.

   -a- $f_1(x) = 2x - 5,\ x \in \mathbb{R}$.

   -b- $f_2(x) = x^2 + 4,\ x \leq 0$.

   -c- $f_3(x) = \begin{cases} 2x - 1 & x \leq 1, \\ x^2 & 1 < x \leq 3, \\ 3\sqrt{3x} & x > 3. \end{cases}$

ESCUELA DE CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
Av. Pellegrini 250. Rosario
+54 0341 - 480 2649 internos 216 - 119