Unidad 4: Relaciones

Iker M. Canut

29 de junio de 2020

1. Definiciones

Dados dos conjuntos A y B, un **par ordenado** es un objeto de la forma (a,b) donde $a \in A$ y $b \in B$. Si (a,b) y (c,d) son dos pares ordenados, $(a,b) = (c,d) \iff a = c \wedge b = d$.

Dados dos conjuntos A y B, llamaremos **producto cartesiano**, $A \times B$, al conjunto formado por los pares ordenados (a,b) tales que $a \in A \wedge b \in B$. Es decir: $A \times B = \{(a,b) : a \in A, b \in B\}$.

Sean A, B, C conjuntos, entonces:

- $A \times (B \cap C) = (A \times B) \cap (A \times C)$
- $A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C)$
- $(A \cap B) \times C = (A \times C) \cap (B \times C)$
- $(A \cup B) \times C = (A \times C) \cup (B \times C)$

....

Una **relación** de un conjunto A en un conjunto B es un subconjunto R de $A \times B$. Si $(a,b) \in R$, se dice que a está relacionado con b por R, y se nota aRb.

Sea $R \subseteq A \times B$, el **dominio** de R es:

$$Dom(R) = \{a \in A : (a,b) \in R, \text{ para algun } b \in B\}$$

y la **imagen** de R es:

$$Im(R) = \{b \in B : (a,b) \in R, \text{ para algun } a \in A\}$$

....

Sea $R \subseteq A \times B$, y $X \subseteq A$, el **conjunto imagen** de X por R es:

$$R(X) = \{b \in B : (a,b) \in R, \text{ para algun } a \in X\}$$

y si $Y \subseteq B$, el **conjunto preimagen** de Y por R es:

$$R^{-1}(Y) = \{a \in A : (a,b) \in R, \text{ para algun } b \in Y\}$$

....

Sea $R \subseteq A \times B$, la **inversa** de R, denotada como R^{-1} es una relación de B en A definida por:

$$R^{-1} = \{(x,y) : (y,x) \in R\}$$

....

Sea $R \subseteq A \times B, x \in A, X \subseteq A$, notar que:

- $R^{-1}(x)$ es la preimagen del elemento x por R.
- $R^{-1}(X)$ es la preimagen del subconjunto X por R.
- R^{-1} es la relación inversa de R.

....

Sea $R \subseteq A \times B$ y $S \subseteq B \times C$, la relación **composición** de R en S, notada como $S \circ R$, es una relación de A en C definida por $x(S \circ R)y \iff \exists u \in B : xRu \wedge uSy$

$$S \circ R = \{(x,y) \in A \times C : (x,u) \in R \wedge (u,y) \in S, \text{ para algun } u \in B\}$$

- $T \circ (S \circ R) = (T \circ S) \circ R$
- $(T \circ S)^{-1} = S^{-1} \circ T^{-1}$

....

2. Relaciones en un conjunto

Sea $R \subseteq A \times A$, y $a, b, c \in A$, se dice que R es:

- **Reflexiva**: si $(a, a) \in R \forall a \in A$
- **Simétrica**: si $(a, b) \in R \Rightarrow (b, a \in A)$
- **Antisimétrica**: $(a, b) \in R \wedge a \neq b \Rightarrow (b, a) \notin R$, equivalentemente, $(a, b) \in R \wedge (b, a) \in R \Rightarrow a = b$
- **Transitiva**: si $(a, b) \in R \wedge (b, c) \in R \Rightarrow (a, c) \in R$

3. Relaciones de Orden

Una relación R en A es una relación de orden si es **reflexiva**, **antisimétrica** y **transitiva** (R.A.T.)

Si $(a, b) \in R$, se dice que a es anterior a b y se nota $a \prec b$.

Al par (A, R) o $(A, \prec)$ se lo llama **conjunto ordenado**.

Sea $(A, \prec)$, dos elementos distintos $x, y \in A$ son **comparables** si $x \prec y$ o si $y \prec x$.

Un conjunto ordenado es **totalmente ordenado** si todo par de elementos es comparable, y se dice que es un **orden total**.

Sea $(A, \prec)$, y $B \subseteq A$, el **orden inducido** por R en B es $R_B = R \cap (B \times B)$, es decir, sea $x, y \in B$, $xR_By \iff xRy$. (B, S) es un **subconjunto ordenado** de (A, R) si $B \subseteq A$ y $S = R_B$.

Ademas, si R_B es un orden total en B, (B, R_B) se llama subconjunto ordenado de (A, R) o **cadena**.

....

Diagrama de Hasse: se dibuja como un grafo, y convenimos que no se dibujan las flechas correspondientes a (a, a), ni la flecha (a, c) cuando $a \prec b$ y $b \prec c$

....

Sea $(A, \prec)$ y $B \subseteq A$:

- $a \in A$ es **minimal** si $\forall x \in A : x \prec a$, se tiene que $x = a$.
- $a \in A$ es **maximal** si $\forall x \in A : a \prec x$, se tiene que $x = a$.

- $a \in A$ es **mínimo** si $a \prec x \forall x \in A$
- $a \in A$ es **máximo** si $x \prec a \forall x \in A$

- $a \in A$ es **cota inferior** para B si $a \prec x \; \forall x \in B$. Una cota inferior $'a$ es el **ínfimo** de B si $a \prec a'$ para toda cota inferior de B.
- $a \in A$ es **cota superior** para B si $x \prec a \; \forall x \in B$. Una cota superior $'a$ es el **supremo** de B si $a' \prec a$ para toda cota inferior de B.

Un conjunto puede tener más de un minimal o maximal, pero si tiene máximo, mínimo, supremo o ínfimo, estos es único. Además, si tiene alguna cota se dice que está acotado.

....

4. Relaciones de Equivalencia

Una relación R en A es de equivalencia si es **reflexiva**, **simétrica** y **transitiva** (R.S.T.)

Si $(a, b) \in R$, se dice que a es equivalente a b y se nota $a \sim b$.

Dada una relación de equivalencia R en un conjunto A y $a \in A$, el conjunto $R(a)$ se llama **clase de equivalencia** de a y se nota $[a]$.

$$[a] = \{x \in A : (a, x) \in \mathbb{R}\}$$

Observemos que como es simétrica, $[a] = \{x \in A : (x, a) \in \mathbb{R}\}$ tambien vale. Todo elemento $x \in [a]$ se dice que es un **representante** de esa clase de equivalencia.

- $[a] \neq \emptyset$
- $(a, b) \in R \iff [a] = [b]$
- $(a, b) \notin R \iff [a] \cap [b] = \emptyset$

Es decir, todo elemento de A pertenece a alguna clase y dos clases de equivalencia, o bien son iguales o son conjuntos disjuntos.

Una **partición** P de un conjunto A es una colección de conjuntos no vacios $\{X_1, X_2, ...\}$ tales que:

- $i \neq j \Rightarrow X_i \cap X_j = \emptyset$,
- $\forall a \in A, \exists X_i \in P : a \in X_i$

Sea P una partición de A, existe una única relación de equivalencia en A cuyas clases de equivalencia son los elementos de P.

Sea R una relación de equivalencia en A, llamamos **conjunto cociente** de A por R, y lo notamos $A|_R$ al conjunto cuyos elementos son las clases de equivalencia de A definidadas por R:

$$A|_R = \{[a] : a \in A\}$$