Introducción a la Matemática

Iker M. Canut

March 25, 2020

Contents

1 Unidad 1: Numeros Reales

Propiedad Cancelativa de la Suma

Sea $d = a + b$, y por ende, $d = b + c$, por el Axioma 5, existe y que es opuesto a a, entonces:

$$y + d = y + (a + b) \overset{A2}{=} (y + a) + b = 0 + b \overset{A4}{=} b$$

$$y + d = y + (a + c) \overset{A2}{=} (y + a) + c = 0 + c \overset{A4}{=} c$$

$$b = c$$

□

Unicidad del Elemento Neutro de la suma

Supongamos que 0’ es un numero que tambien funciona como neutro de la suma, entonces

$$a + 0 = a \wedge a + 0' = a$$

$$a + 0 = a + 0'$$

Y por propiedad cancelativa de la suma

$$0 = 0'$$

□

Unicidad del Elemento Opuesto

La existencia de un numero b esta dada por el axioma 5, hay que demostrar que es unico. Suponiendo que existe b' / $a + b' = b' + a = 0$, tenemos que

$$a + b = 0 \wedge a + b' = 0$$

$$a + b = a + b'$$

Y por propiedad cancelativa de la suma

$$b = b'$$

□

$-(-a) = a$

Sea b el opuesto de a, se puede concluir que $a + b = 0 \wedge b = (-a) \wedge a = (-b)$ $\quad (1) \wedge (2) \wedge (3)$

$$-(-a) \overset{(2)}{=} -b \overset{(3)}{=} a$$

□

$-0 = 0$

Por el axioma 5, todo numero real tiene su opuesto. Llamemos 0’ al opuesto de 0, siendo $0 + 0' = 0$ y Del axioma 3 se concluye que $0 + 0 = 0$

$$si\ 0 + 0' = 0 \wedge 0 + 0 = 0 \Rightarrow 0' = 0$$

□

$0.a = 0$

$$a.0 \overset{A4}{=} a.0 + 0 \overset{A5}{=} a.0 + (a + (-a)) \overset{A2}{=} (a.0 + a) + (-a) \overset{A4}{=} (a.0 + a.1) + (-a) \overset{A3}{=}$$
$$a(0+1) + (-a) \overset{A4}{=} a.1 + (-a) \overset{A4}{=} a + (-a) \overset{A5}{=} 0$$

□

$a(-b) = -(ab) = (-a)b$

$$a(-b) \overset{A4}{=} a(-b) + 0 \overset{A5}{=} a(-b) + (ab + -(ab)) \overset{A2}{=} (a(-b) + ab) + -(ab) \overset{A3}{=}$$
$$a((-b) + b) + -(ab) \overset{A5}{=} a.0 + -(ab) \overset{T2.3}{=} 0 + -(ab) \overset{A4}{=} -(ab)$$

Y análogamente

$$(-a)b \overset{A4}{=} (-a)b + 0 \overset{A5}{=} (-a)b + (ab + -(ab)) \overset{A2}{=} ((-a)b + ab) + -(ab) \overset{A3}{=}$$
$$b((-a) + a) + -(ab) \overset{A5}{=} b.0 + -(ab) \overset{T2.3}{=} 0 + -(ab) \overset{A4}{=} -(ab)$$

Reescribiendo

$$a(-b) = -(ab) = (-a)b$$

□

$(-a)(-b) = ab$

Analizamos la expresión $(-a)(-b)$, llamemos $c = -b$. Por el teorema anterior obtenemos:

$$(-a)c = -(ac)$$

Pero reemplzando por nuestra definición de $c = -b$, queda:

$$-(ac) = -(a(-b))$$

Que por la aplicación del mismo teorema nos da:

$$-(a(-b)) = -(-(ab))$$

Y finalmente por el teorema $-(-a) = a$:

$$-(-(ab)) = ab$$

Reescribiendo:

$$(-a)(-b) = ab$$

□

$a(b-c) = ab - ac$

Por la definicion de diferencia, se puede reescribir como:

$$a(b + (-c)) \overset{A3}{=} ab + a(-c) \overset{T2.4}{=} ab + -(ac)$$

Que por la definicion de diferencia, se puede reescribir como: $ab - ac$ □

Propiedad cancelativa del producto

Analicemos $ab = ac$, llamemos $d = ab = ba$ y además $d = ac = ca$:

$$da^{-1} \overset{Def}{=} (ba)a^{-1} \overset{Asoc}{=} b(aa^{-1}) \overset{Asoc}{=} b.1 \overset{Neutro}{=} b$$

Y análogamente:

$$da^{-1} \overset{Def}{=} (ca)a^{-1} \overset{Asoc}{=} c(aa^{-1}) \overset{Recip}{=} c.1 \overset{Neutro}{=} c$$

Reescribiendo:

$$b = c$$

□

Unidad del elemento neutro del producto

Sabemos que existe 1, tal que $\forall a, a.1 = a$, supongamos que existe $1'$ que cumple lo mismo, entonces:

$$a.1 = a \wedge a.1' = a$$

Entonces:

$$a.1 = a.1'$$

Y por el teorema anterior:

$$1 = 1'$$

□

Unidad del elemento recíproco

Sabemos que $\forall a \exists b \in \mathbb{R} / ab = 1$, supongamos que existe b' que cumple lo mismo, entonces:

$$a.b = 1 \wedge a.b' = 1$$

Entonces:

$$a.b = a.b'$$

Y por el teorema anterior:

$$b = b'$$

□

$\nexists 0^{-1}$

Asumimos $\exists 0^{-1} \in \mathbb{R}$ tal que

$$0.0^{-1} = 1$$

Pero por $a.0 = 0.a = 0, \forall a \in \mathbb{R}$

$$0.0^{-1} = 0$$

Esto es una contradicción a lo supuesto.

$$\therefore \nexists 0^{-1}$$

□

$1^{-1} = 1$

$1^{-1} =$ <Existencia del elemento neutro del producto>

$1.1^{-1} =$ <Existencia del elemento recíproco>

1

$\square$

$\frac{a}{1} = a; a \neq 0, \frac{1}{a} = a^{-1}$

Analizamos $\frac{a}{1}$

$\frac{a}{1} =$ <Definición de cociente>

$a.1^{-1} =$ <$1^{-1} = 1$>

$a.1 =$ <Elemento neutro del producto>

a A

nalizando $\frac{1}{a}$ cuando $a \neq 0$

$\frac{1}{a} =$ <Definición de cociente>

$1.a^{-1} =$ <Elemento neutro del producto>

a^{-1}

$\square$

$ab = 0 \Rightarrow a = 0 \vee b = 0$

Hay dos casos posibles para la expresión $ab = 0$:

$ab = 0 \Rightarrow$ <$a = b \Rightarrow ac = bc$>

$ab.b^{-1} = 0b^{-1} \Rightarrow$ <$a.0 = 0$>

$ab.b^{-1} = 0 \Rightarrow$ <Propiedad asociativa>

$a.(bb^{-1}) = 0 \Rightarrow$ <Existencia del elemento recíproco>

$a.1 = 0 \Rightarrow$ <Existencia del elemento neutro del producto>

$a = 0$

$ab = 0 \Rightarrow$ <$a = b \Rightarrow ca = cb$>

$a^{-1}.ab = b^{-1}0 \Rightarrow$ <$0.a = 0$>

$a^{-1}.ab = 0 \Rightarrow$ <Propiedad asociativa>

$(a^{-1}a).b = 0 \Rightarrow$ <Existencia del elemento recíproco>

$1.b = 0 \Rightarrow$ <Existencia del elemento neutro del producto>

$b = 0$

Como las dos afirmaciones son válidas:

$$ab = 0 \Rightarrow a = 0 \vee b = 0$$

$\square$

$b \neq 0 \wedge d \neq 0 \Rightarrow (bd)^{-1} = b^{-1}.d^{-1}$

Analizamos la expresión $1 = 1$ que, por existencia del elemento neutro del producto, resulta ser equivalente a:

$$1 = 1.1$$

Observamos 3 cosas, por existencia y unicidad del elemento recíproco:

$$bc.(bc)^{-1} = 1$$

$$b.b^{-1} = 1$$

$$c.c^{-1} = 1$$

Y reemplazando en la expresión $1 = 1.1$:

$$bc.(bc)^{-1} = (b.b^{-1}).(c.c^{-1})$$

Que por propiedad asociativa y conmutativa del producto, reescribimos como:

$$bc.(bc)^{-1} = bc.(b^{-1}.c^{-1})$$

Y finalmente, por cancelativa del producto, obtenemos:

$$(bc)^{-1} = b^{-1}.c^{-1}$$

$\square$

$b \neq 0 \wedge d \neq 0 \Rightarrow \frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad+cb}{bd}$

$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} =$ <Definición de cociente>

$ab^{-1} + cd^{-1} =$ <Existencia del elemento neutro del producto>

$1.ab^{-1} + 1.cd^{-1} =$ <Existencia del elemento recíproco>

$(dd^{-1}).(ab^{-1}) + (bb^{-1}).(cd^{-1}) =$ <Reescribiendo con propiedad conmutativa y asociativa>

$(ad).(b^{-1}d^{-1}) + (cb).(b^{-1}d^{-1}) =$ <$(ab)^{-1} = a^{-1}b^{-1}$>

$(ad).(bd)^{-1} + (cb).(bd)^{-1} =$ <Propiedad distributiva>

$(ad + cb).(bd)^{-1} =$ <Definición de cociente>

$\frac{ad+cb}{bd}$

$$\therefore \frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad+cb}{bd}$$

$\square$

$b \neq 0 \wedge d \neq 0 \Rightarrow \frac{a}{b}.\frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$

$\frac{a}{b}.\frac{c}{d} =$ <Definición de cociente>

$(ab^{-1}).(cd^{-1}) =$ <Reescribniendo con propiedad conmutativa y asociativa>

$(ac).(b^{-1}d^{-1}) =$ <$(ab)^{-1} = a^{-1}b^{-1}$>

$(ac).(bd)^{-1} =$ <Definición de cociente>

$\frac{ac}{bd}$

$$\therefore \frac{a}{b}.\frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$$

□

$a \neq 0 \wedge b \neq 0 \Rightarrow \left(\frac{a}{b}\right)^{-1} = \frac{a^{-1}}{b^{-1}}$

$\left(\frac{a}{b}\right)^{-1}$ <Definición de cociente>

$\left(ab^{-1}\right)^{-1}$ <$(ab)^{-1} = a^{-1}.b^{-1}$>

$a^{-1}\left(b^{-1}\right)^{-1}$ <Definición de cociente>

$\frac{a^{-1}}{b^{-1}}$

□

$(-1).a = -a$

$-1.a =$ <Existencia del elemento neutro de la suma>

$-1.a + 0 =$ <Existencia del elemento opuesto>

$-1.a + (a + -a) =$ <Propiedad asociativa de la suma>

$(-1.a + a) + -a =$ <Existencia del elemento neutro de la multiplicacion>

$(-1.a + 1.a) + -a =$ <Propiedad distrubutiva>

$a.(-1+1) + -a =$ <Existencia del elemento opuesto>

$a.0 + -a =$ <$a.0 = 0$>

$0 + -a =$ <Existencia del elemento neutro de la suma>

$-a$

□

Suponemos $\mathbb{R}^+ \subset \mathbb{R}$, tal que cumple:

- $a, b \in \mathbb{R}^+ \Rightarrow a + b, ab \in \mathbb{R}^+$
- $\forall a \neq 0 \in \mathbb{R}, a \in \mathbb{R}^+ \veebar -a \in \mathbb{R}^+$
- $0 \notin \mathbb{R}^+$

Llamamos a estos números "positivos". Definimos $<, >, \geq, \leq$ de la forma que está en el apunte.

$a > 0 \Leftrightarrow a \in \mathbb{R}^+$

Sea $a > 0, a \in \mathbb{R}$:

$a > 0$ <Definición de <>

$a - 0 \in \mathbb{R}^+$ <Definición de resta>

$a + (-0) \in \mathbb{R}^+$ <$0 = -0$>

$a + 0 \in \mathbb{R}^+$ <Elemento neutro de la suma>

$a \in \mathbb{R}^+$	<Elemento neutro de la suma>

Sea $a \in \mathbb{R}^+$:

$a \in \mathbb{R}^+$	<Elemento neutro de la suma>
$a + 0 \in \mathbb{R}^+$	<$0 = -0$>
$a + (-0) \in \mathbb{R}^+$	<Definición de resta>
$a - 0 \in \mathbb{R}^+$	<Definición de <>
$a > 0$	

$$\therefore a > 0 \Leftrightarrow a \in \mathbb{R}^+$$

□

$a > 0 \Leftrightarrow -a < 0$

Sea $a > 0, a \in \mathbb{R}$:

$a > 0$	<$a > 0 \Leftrightarrow a \in \mathbb{R}^+$>
$a \in \mathbb{R}^+$	<$a = -(-a)$>
$-(-a) \in \mathbb{R}^+$	<Elemento neutro de la suma>
$0 + -(-a) \in \mathbb{R}^+$	<Definición de resta>
$0 - (-a) \in \mathbb{R}^+$	<Definición de <>
$-a < 0$	<Definición de <>

□

$a < 0 \Leftrightarrow -a > 0$

Sea $a < 0, a \in \mathbb{R}$:

$a < 0$	<Definición de <>
$0 - a \in \mathbb{R}^+$	<Definición de resta>
$0 + (-a) \in \mathbb{R}^+$	<Elemento neutro de la suma>
$-a \in \mathbb{R}^+$	<$a \in \mathbb{R}^+ \Leftrightarrow a > 0$>
$-a > 0$	

□

Como llamamos a los números en $\mathbb{R}^+$ positivos, a sus opuestos los llamaremos "negativos". Además Si $a \geq 0$, es "no negativo".

Propiedad de Tricotomía

Para demostrar proposiciones mutuamente excluyentes, optaremos por probar que la ocurrencia de una implica la no ocurrencia de las otras, para todo posible caso.
Sean $a, b \in \mathbb{R}$:

- Caso 1, $a < b$ o sea $b - a \in \mathbb{R}^+$:
  Supongamos que además $a = b$, entonces
  $$b - a = 0$$
  pero por axioma
  $$0 \notin \mathbb{R}^+$$
  Contradicción.
  Supongamos que además $a > b$, entonces
  $$a - b \in \mathbb{R}^+$$
  pero
  $$b - a = -(a - b)$$
  entonces por axioma
  $$-(a - b) \notin \mathbb{R}^+$$
  Contradicción.

- Caso 2, $a = b$ o sea $b - a = 0$:
  Supongamos que además $a < b$, entonces
  $$b - a \in \mathbb{R}^+$$
  pero por axioma
  $$0 \notin \mathbb{R}^+$$
  Contradicción.
  Supongamos que además $a > b$, entonces
  $$a - b \in \mathbb{R}^+$$
  pero
  $$b - a = -(a - b)$$
  y por axioma
  $$0 = -0 \notin \mathbb{R}^+$$
  Contradicción.

- Caso 3, $a > b$ o sea $a - b \in R^+$:
  Supongamos que además $a = b$, entonces
  $$a - b = 0$$
  pero por axioma
  $$0 \notin \mathbb{R}^+$$
  Contradicción.
  Supongamos que además $a < b$, entonces
  $$b - a \in \mathbb{R}^+$$
  pero
  $$a - b = -(b - a)$$

entonces por axioma

$$-(b-a) \notin \mathbb{R}^+$$

Contradicción.

$$\therefore a < b \;\veebar\; a = b \;\veebar\; a > b$$

$\square$

Propiedad Transitiva del Menor

Sean $a, b, c \in \mathbb{R}$, tal que $a < b$ y $b < c$:
Observamos que $b-a, c-b \in \mathbb{R}^+$

$b-a \in \mathbb{R}^+$	<Axioma $a, b \in \mathbb{R}^+ \Rightarrow a+b \in \mathbb{R}^+$
$(b-a)+(c-b) \in \mathbb{R}^+$	<Reescribiendo>
$(c-a)+(b-b) \in \mathbb{R}^+$	<Existencia del opuesto>
$(c-a)+0 \in \mathbb{R}^+$	<Elemento neutro de la suma>
$c-a \in \mathbb{R}^+$	<Definición de <>
$a < c$	<Definición de <>

$\square$

$a < b \Rightarrow a+c < b+c$

Sean $a, b, c \in \mathbb{R}$:

$a < b$	Def $<$
$b-a \in \mathbb{R}^+$	<Elemento neutro de la suma>
$(b-a)+0 \in \mathbb{R}^+$	<Existencia del opuesto>
$(b-a)+(c+-c) \in \mathbb{R}^+$	<Definición de <>
$(b+-a)+(c+-c) \in \mathbb{R}^+$	<Reescribiendo>
$(b+c)+(-a+-c) \in \mathbb{R}^+$	$<-(a+b) = (-a)+(-b)$
$(b+c)+-(a+c) \in \mathbb{R}^+$	<Definición de resta>
$(b+c)-(a+c) \in \mathbb{R}^+$	Definición de <>
$a+c < b+c$	

$\square$

$a < b \wedge c < d \Rightarrow a+c < b+d$

Sean $a, b, c, d \in \mathbb{R}$
$a < b$ o sea $b-a \in \mathbb{R}^+$, $c < d$ o sea $d-c \in \mathbb{R}^+$:

$a < b$	<Definición de <>
$b-a \in \mathbb{R}^+$	<Axioma $a, b \in \mathbb{R}^+ \Rightarrow a+b \in \mathbb{R}^+$

$(b-a)+(d-c)\in\mathbb{R}^+$	<Reescribiendo>
$(b+d)-a-c\in\mathbb{R}^+$	<$-a-b=-(a+b)$>
$(b+d)-(a+c)\in\mathbb{R}^+$	<Definición de <>
$a+c<b+d$	

□

$a<b\wedge c>0\Rightarrow ac<bc$

Sean $a,b,c\in\mathbb{R}, c>0$:
Observamos $c>0\Rightarrow c\in\mathbb{R}^+$

$a<b$	<Definición de <>
$b-a\in\mathbb{R}^+$	<Axioma $a,b\in\mathbb{R}^+\Rightarrow ab\in\mathbb{R}^+$
$(b-a)c\in\mathbb{R}^+$	<Propiedad distributiva>
$bc-ac\in\mathbb{R}^+$	<Definición de <>
$ac<bc$	

□

$a<b\wedge c<0\Rightarrow ac>bc$

Sean $a,b,c\in\mathbb{R}, c<0$:
Observamos $c<0\Rightarrow -c\in\mathbb{R}^+$

$a<b$	<Definición de <>
$b-a\in\mathbb{R}^+$	<Axioma $a,b\in\mathbb{R}^+\Rightarrow ab\in\mathbb{R}^+$
$(b-a)(-c)\in\mathbb{R}^+$	<$a=(-1).a$>
$(b-a)c.(-1)\in\mathbb{R}^+$	<Propiedad distributiva>
$(bc-ac).-1\in\mathbb{R}^+$	<$a=(-1).a$>
$-(bc-ac)\in\mathbb{R}^+$	<$-(a-b)=b-a$>
$ac-bc\in\mathbb{R}^+$	<Definición de >>
$ac>bc$	

□

$a\neq 0\Rightarrow a^2>0$

Sea $a\in\mathbb{R}, a\neq 0$ Por la propiedad tricotómica, $a\neq 0 \veebar a>0 \veebar a<0$. Pero $a\neq 0$, entonces $a>0 \veebar a<0$.

- Caso 1, $a>0$ o sea $a\in\mathbb{R}^+$:
  Por axioma $a,b\in\mathbb{R}^+\Rightarrow ab\in\mathbb{R}^+$
  $$aa\in\mathbb{R}^+\Leftrightarrow a^2\in\mathbb{R}^+$$
- Caso 2, $a<0$ o sea $-a\in\mathbb{R}^+$:

Por axioma $a, b \in \mathbb{R}^+ \Rightarrow ab \in \mathbb{R}^+$

$$(-a)(-a) \in \mathbb{R}^+$$

Que por $(-a)(-a) = aa$

$$aa \in \mathbb{R}^+ \Leftrightarrow a^2 \in \mathbb{R}^+$$

□

$1 \in \mathbb{R}^+$

Existen neutros, 0 y 1, $0 \neq 1$
Por axioma $1 \in \mathbb{R}^+ \veebar -1 \in \mathbb{R}^+$. Supongo $-1 \in \mathbb{R}^+$, entonces $1 \notin \mathbb{R}^+$

$-1 \in \mathbb{R}^+$ <Axioma $a, b \in \mathbb{R}^+ \Leftarrow ab \in \mathbb{R}^+$

$(-1).(-1) \in \mathbb{R}^+$ <$aa = (-a)(-a)$>

$1 \in \mathbb{R}^+$

Pero esto es una contradicción con lo supuesto. □

$a < b \Leftarrow -b < -a$

Sean $a, b \in \mathbb{R}, a < b$:

$a < b$ <Definición de <

$b - a \in \mathbb{R}^+$ <Definición de resta>

$b + (-a) \in \mathbb{R}^+$ <$a = -(-a)$>

$-(-b) + (-a) \in \mathbb{R}^+$ <Conmutativa>

$(-a) + -(-b) \in \mathbb{R}^+$ <Definición de resta>

$(-a) - (-b) \in \mathbb{R}^+$ <Definición de <>

$-b < -a$

□

$ab > 0 \Leftrightarrow a, b \in \mathbb{R}^+ \vee -a, -b \in \mathbb{R}^+$

Sean $a, b \in \mathbb{R}, ab > 0$:
Asumo $a \in \mathbb{R}^+, -b \in \mathbb{R}^+$. Por axioma

$$a(-b) \in \mathbb{R}^+$$

$$-ab \in \mathbb{R}^+$$

Pero como $ab \in \mathbb{R}^+$ entonces no puede ser $-ab \in \mathbb{R}^+$. Esto es una contradicción con la suposición de que $a \in \mathbb{R}^+, -b \in \mathbb{R}^+$.
Analogamente se puede demostrar para el caso $b \in \mathbb{R}^+, -a \in \mathbb{R}^+$. Por lo tanto

$$ab > 0 \Rightarrow a, b \in \mathbb{R}^+ \vee -a, -b \in \mathbb{R}^+$$

Sean $a, b \in \mathbb{R}^+$
$a, b \in \mathbb{R}^+$ <Producto cerrado en $\mathbb{R}^+$>

$ab \in \mathbb{R}^+$ <$a > 0 \Leftrightarrow a \in \mathbb{R}^+$>

$ab > 0$

Sean $-a, -b \in \mathbb{R}^+$

$-a,-b \in \mathbb{R}^+$ <Producto cerrado en $\mathbb{R}^+$>

$(-a)(-b) \in \mathbb{R}^+$ <$a > 0 \Leftrightarrow a \in \mathbb{R}^+$>

$(-a)(-b) > 0$ <$ab = (-a)(-b)$

$ab > 0$

Por lo tanto

$$a, b \in \mathbb{R}^+ \lor -a, -b \in \mathbb{R}^+ \Rightarrow ab > 0$$

Finalmente

$$\therefore ab > 0 \Leftrightarrow a, b \in \mathbb{R}^+ \lor -a, -b \in \mathbb{R}^+$$

□

$ab < 0 \Leftrightarrow a, -b \in \mathbb{R}^+ \lor -a, b \in \mathbb{R}^+$

Sean $a, b \in \mathbb{R}, ab < 0$:
$ab < 0$ implica que $-ab \in \mathbb{R}^+$
Asumo $a \in \mathbb{R}^+, b \in \mathbb{R}^+$. Por axioma

$$ab \in \mathbb{R}^+$$

Pero como $-ab \in \mathbb{R}^+$ entonces no puede ser $ab \in \mathbb{R}^+$. Esto es una contradicción con la suposición de que $a \in \mathbb{R}^+, b \in \mathbb{R}^+$.
Asumo $-a \in \mathbb{R}^+, -b \in \mathbb{R}^+$. Por axioma

$$(-a)(-b) \in \mathbb{R}^+$$

Por $ab = (-a)(-b)$

$$ab \in \mathbb{R}^+$$

Pero como $-ab \in \mathbb{R}^+$ entonces no puede ser $ab \in \mathbb{R}^+$. Esto es una contradicción con la suposición de que $-a \in \mathbb{R}^+, -b \in \mathbb{R}^+$.

$$ab < 0 \Rightarrow a, -b \in \mathbb{R}^+ \lor -a, b \in \mathbb{R}^+$$

Sean $a, -b \in \mathbb{R}^+$

$a, -b \in \mathbb{R}^+$ <Producto cerrado en $\mathbb{R}^+$>

$a(-b) \in \mathbb{R}^+$ <$-ab = a(-b)$>

$-ab \in \mathbb{R}^+$ <Elemento neutro de la suma>

$0 + -ab \in \mathbb{R}^+$ <Definición de resta>

$0 - ab \in \mathbb{R}^+$ <Definición de <>

$ab < 0$

Análogamente se demuestra para el caso $-a, b$, pues $(-a)b = a(-b)$. Por lo tanto

$$a, -b \in \mathbb{R}^+ \lor a, -b \in \mathbb{R}^+ \Rightarrow ab < 0$$

Finalmente

$$\therefore ab < 0 \Leftrightarrow a, -b \in \mathbb{R}^+ \lor a, -b \in \mathbb{R}^+$$

□

$a > 0 \Leftrightarrow \frac{1}{a} > 0$

Sea $a \in \mathbb{R}, a > 0$:

Suponemos $\frac{1}{a} < 0$

$\frac{1}{a} < 0$	<Definición de $<$ y de cociente>
$0 - a^{-1} \in \mathbb{R}^+$	<Definición de resta>
$0 + -a^{-1} \in \mathbb{R}^+$	<Elemento neutro de la suma>
$-a^{-1} \in \mathbb{R}^+$	<Producto cerrado en $\mathbb{R}^+$>
$-a^{-1}a \in \mathbb{R}^+$	<$-a = (-1).a$>
$(-1).a^{-1}a \in \mathbb{R}^+$	<Existencia del recíproco>
$(-1).1 \in \mathbb{R}^+$	<Elemento neutro del producto>
$-1 \in \mathbb{R}^+$	

Pero $1 \in \mathbb{R}^+$, entonces por axioma, no puede ser $-1 \in \mathbb{R}^+$. Esto es una contradicción.

$$\therefore a > 0 \Rightarrow \frac{1}{a} > 0$$

Sea $a \in \mathbb{R}, a \neq 0, \frac{1}{a} > 0$:
Suponemos $a < 0$

$a < 0$	<$a < 0 \Rightarrow -a > 0$>
$-a > 0$	<$a < b \wedge c > 0 \Rightarrow ac < bc$>
$-a.\frac{1}{a} > 0.\frac{1}{a}$	<$a.0 = 0$ y Definición de cociente>
$-aa^{-1} > 0$	<$-a = (-1).a$>
$(-1).aa^{-1} > 0$	<Existencia del recíproco>
$(-1).1 > 0$	<Elemento neutro del producto>
$(-1) > 0$	<$a < 0 \Rightarrow -a > 0$>
$1 < 0$	<Definición de $<$>

Pero $1 > 0$. Esto es una contradicción. Y por propiedad tricotómica y $a \neq 0$

$$\therefore \frac{1}{a} > 0 \Rightarrow a > 0$$

$$\therefore a > 0 \Leftrightarrow \frac{1}{a} > 0$$

$\square$

$0 < a < b \Rightarrow 0 < \frac{1}{b} < \frac{1}{a}$

Sean $a, b \in \mathbb{R}, 0 < a < b$:
Por la demostración anterior

$$a > 0 \Leftrightarrow \frac{1}{a} > 0$$

Por propiedad transitiva de la relación de menor, $0 < b$, entonces

$$b > 0 \Leftrightarrow \frac{1}{b} > 0$$

Analicemos $a < b$

$a < b$	<Definición de <>
$b - a \in \mathbb{R}^+$	<Producto cerrado en $\mathbb{R}^+$>
$(b-a)b^{-1}a^{-1} \in \mathbb{R}^+$	<Distributiva>
$bb^{-1}a^{-1} - ab^{-1}a^{-1} \in \mathbb{R}^+$	<Existencia del elemento recíproco>
$1.a^{-1} - 1.b^{-1} \in \mathbb{R}^+$	<Elemento neutro del producto>
$a^{-1} - b^{-1} \in \mathbb{R}^+$	<Definición de <>
$b^{-1} < a^{-1}$	<Definición de cociente>
$\frac{1}{b} < \frac{1}{a}$	

$$0 < a < b \Rightarrow 0 < \frac{1}{b} < \frac{1}{a}$$

□