Introducción a la Matemática

Luciano N. Barletta & Iker M. Canut

March 16, 2020

Contents

1 Unidad 1: Numeros Reales

Los números reales son elementos de un conjunto denominado R entre los que existen dos operaciones que, por definición, satisfacen ciertas propiedades específicas llamadas axiomas.
Las operaciones son la suma y el producto. Si $a, b \in R$

- Y la operación suma les asigna el elemento $c \in R$, escribimos: $a + b = c$
- Y la operación producto les asigna el elemento $d \in R$, escribimos $a.b = d$

1.1 Axiomas de Cuerpo

Axioma de Cuerpo 1: Conmutativa

$$a + b = b + a \wedge a.b = b.a$$

Axioma de Cuerpo 2: Asociativa

$$(a + b) + c = a + (b + c) \wedge (a.b).c = a.(b.c)$$

Axioma de Cuerpo 3: Distributiva de la Multiplicacion respecto a la Suma

$$a.(b + c) = a.b + a.c$$

Axioma de Cuerpo 4: Existencia de Elementos Neutros

Existen dos numeros reales, notados 0 y 1 / $\forall a \in R$

$$0 + a = a + 0 = a \wedge 1.a = a.1 = a$$

Axioma de Cuerpo 5: Existencia de Elementos Opuestos

$$\forall a \in R, \exists\, b \in R \;/\; a + b = b + a = 0$$

Axioma de Cuerpo 6: Existencia de Elementos Reciprocos

$$\forall a \in R - \{0\}, \exists\, b \in R \;/\; a.b = b.a = 1$$

Teorema 1: Propiedad Cancelativa de la Suma

$$a, b, c \in R, si\ a + b = a + c,\ entonces\ b = c$$

Junto con los axiomas, se presupone la validez de las siguientes propiedades de la igualdad:

- Propiedad de Reflexibidad: $\forall a, a = a$
- Propiedad de Simetria: $si\ a = b \Rightarrow b = a$
- Propiedad de Transitividad: $si\ a = b \wedge b = c \Rightarrow a = c$

Unicidad del Elemento Neutro de la suma

Si $0'$ es un numero que verifica que $a + 0' = 0' + a = a$, $\forall a \in R$, entonces $0' = 0$

Unicidad del Elemento Opuesto

$\forall a \in R, \exists$ un unico numero b / $a + b = b + a = 0$

Para cualquier numero a, denotamos con $-a$ al unico elemento opuesto de a.

Llamamos *diferencia* entre dos numeros reales a y b, y lo denotamos como $a - b$, al numero dado por la suma de a y el opuesto de b.

$$a - b = a + (-b)$$

Teorema 2

$$-(-a) = a$$
$$-0 = 0$$
$$0.a = 0$$
$$a(-b) = -(ab) = (-a)b$$

$$(-a)(-b) = ab$$
$$a(b - c) = ab - ac$$
$$-(a - b) = b - a$$
$$a = b \iff -a = -b$$

Propiedad

Sean $a, b \in R$, $a - b = 0 \iff a = b$

Teorema 3: Propiedad Cancelativa del Producto

$a, b, c \in R, a \neq 0$, si $ab = ac \Rightarrow b = c$

Unicidad del Elemento Neutro del Producto

Si $1'$ es un numero que verifica que $a.1' = 1'.a = a, \forall a \in R$, entonces $1' = 1$

Unicidad del Reciproco

$\forall a \in R - \{0\}, \exists!\, b$ / $ab = ba = 1$

ado $a \in R - \{0\}$, el reciproco se nota como a^{-1}

Si $a, b \in R, b \neq 0$, llamamos cociente entre a y b, y lo notamos $\dfrac{a}{b}$, al numero dado por el producto de a y el reciproco de b.

Teorema 4

1. 0 no tiene reciproco
2. $1^{-1} = 1$
3. $\frac{a}{1} = a$ y si $a \neq 0 \Rightarrow \frac{1}{a} = a^{-1}$
4. Si $ab = 0 \Rightarrow a = 0 \vee b = 0$
5. Si $b \neq 0 \wedge d \neq 0 \Rightarrow$

   i $(bd)^{-1} = b^{-1}.d^{-1}$

   ii $\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad+bc}{bd}$

   iii $\frac{a}{b}.\frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$
6. Si $a \neq 0 \wedge b \neq 0 \Rightarrow \left(\frac{a}{b}\right)^{-1} = \frac{a^{-1}}{b^{-1}} = \frac{b}{a}$
7. $-a = -1.a$

1.2 Axiomas de Orden

Suponemos la existencia de un subconjunto de R, al que llamaremos conjunto de numeros positivos, y lo notaremos R^+, tal que satisface los siguientes axiomas.

Axioma de Orden 7

Si $a \in R^+ \wedge b \in R^+ \Rightarrow a+b \in R^+ \wedge a.b \in R^+$

Axioma de Orden 8

$\forall a \in R - \{0\}, a \in R^+ \vee (-a) \in R$

Axioma de Orden 9

$\emptyset \in R^+$

- $a < b = b - a \in R^+$
- $a > b = a - b \in R^+$
- $a \leq b = b - a \in R^+ \vee b = a$
- $a \geq b = a - b \in R^+ \vee b = a$
- $a > 0 \iff a \in R^+$
- $a > 0 \Rightarrow (-a) < 0$
- $a < 0 \Rightarrow (-a) > 0$

Si $a < 0$ se dice que a es negativo.

Teorema 5: Propiedad de Tricotomia

Dados dos numeros reales cualesquiera a y b, se verifica exactamente una de las siguientes afirmaciones:

i $a < b$ ii $a = b$ iii $a > b$

Teorema 6: Propiedad Transitiva de a relacion menor

Dados $a, b, c \in R$, si $a < b \wedge b < c \Rightarrow a < c$

1. Si $a < b \Rightarrow a + c < b + c$
2. Si $a < b \wedge c < d \Rightarrow a + c < b + d$
3. (a) $a < b \wedge c > 0 \Rightarrow ac < bc$
   (b) $a < b \wedge c < 0 \Rightarrow ac > bc$
4. $a \neq 0 \Rightarrow a^2 > 0$
5. $1 > 0$. Es decir, $1 \in R^+$
6. $a < b \Rightarrow -b < -a$
7. $ab > 0 \iff a$ y b son positivos o los dos son negativos
8. $ab < 0 \Rightarrow$ o a es positivo y b es negativo o viceversa.
9. $a > 0 \iff \frac{1}{a} > 0$
10. $0 < a < b \Rightarrow a < \frac{1}{b} < \frac{1}{a}$

2 Numeros Naturales, enteros y racionales e irracionales

Sabemos de los axiomas de orden que $0 < 1$ y que para cualesquiera $a, b, c \in R$ se cumple que $a < b \Rightarrow a+c < b+c$ Luego, $0 < 1 \Rightarrow 0 + 1 < 1 + 1$ y se respeta el orden. Aplicando la propiedad transitiva, tenemos que $0 < 1 < 2$.

3 Demostraciones

Demostracion de la Propiedad Cancelativa de la Suma

Sean $a, b, c \in R$, $a + b = a + c \Rightarrow b = c$ Sea $d = a + b$, y por ende, $d = a + c$, por la existencia de elementos opuestos, existe y que es opuesto a a, entonces:

- $y + d$ .... Hipotesis
  $y + (a + b)$ .... Asociativa
  $(y + a) + b$ .... Hipotesis
  $0 + b$ .... Elemento neutro de la suma
  b

- $y + d$ .... Hipotesis
  $y + (a + c)$ .... Asociativa
  $(y + a) + c$ .... Hipotesis
  $0 + c$ .... Elemento neutro de la suma
  c

Ergo, $b = c$ □

Demostracion de la Unicidad del Elemento Neutro de la suma

Supongamos que 0' es un numero que tambien funciona como neutro de la suma, entonces

$$a + 0 = a \land a + 0' = a$$

$$a + 0 = a + 0'$$

Y por propiedad cancelativa de la suma

$$0 = 0'$$

□

Demostracion de la Unicidad del Elemento Opuesto

La existencia de un numero b esta dada por el axioma 5, hay que demostrar que es unico. Suponiendo que existe $b' \ / \ a + b' = b' + a = 0$, tenemos que

$$a + b = 0 \land a + b' = 0$$

$$a + b = a + b'$$

Y por propiedad cancelativa de la suma

$$b = b'$$

□

Demostracion de que el opuesto al opuesto de a es a

Sea b el opuesto de a, se puede concluir que $a + b = 0 \land b = (-a) \land a = (-b)$ (1) $\land$ (2) $\land$ (3)

$$-(-a) \overset{(2)}{=} -b \overset{(3)}{=} a$$

□

Demostracion de que el opuesto de 0 es 0

Por el axioma 5, todo numero real tiene su opuesto. Llamemos 0' al opuesto de 0, siendo $0 + 0' = 0$ y Del axioma 3 se concluye que $0 + 0 = 0$

$$si\ 0 + 0' = 0 \wedge 0 + 0 = 0 \Rightarrow 0' = 0$$

□

Demostracion de que el producto de 0 con cualquier otro numero es 0

$$a.0 \overset{A4}{=} a.0 + 0 \overset{A5}{=} a.0 + (a + (-a)) \overset{A2}{=} (a.0 + a) + (-a) \overset{A4}{=} (a.0 + a.1) + (-a) \overset{A3}{=}$$
$$a(0 + 1) + (-a) \overset{A4}{=} a.1 + (-a) \overset{A4}{=} a + (-a) \overset{A5}{=} 0$$

□

$a(-b) = -(ab) = (-a)b$

$$a(-b) \overset{A4}{=} a(-b) + 0 \overset{A5}{=} a(-b) + (ab + -(ab)) \overset{A2}{=} (a(-b) + ab) + -(ab) \overset{A3}{=}$$
$$(a((-b) + b) + -(ab)) \overset{A5}{=} a.0 + -(ab) \overset{T2.3}{=} 0 + -(ab) \overset{A4}{=} -(ab)$$

□

$(-a)(-b) = ab$

$$(-a)(-b) \overset{T2.4}{=} -((-a)(-(-b))) \overset{T2.1}{=} -((-a)b) \overset{T2.4}{=} -(-(ab)) \overset{T2.1}{=} ab$$

□

$a(b - c) = ab - ac$

Por la definicion de diferencia, se puede reescribir como:

$$a(b + (-c)) \overset{A3}{=} ab + a(-c) \overset{T2.4}{=} ab + -(ac)$$

Que por la definicion de diferencia, se puede reescribir como: $ab - ac$ □