<u>Unidad 2</u>: FUNCIONES REALES

Funciones reales: Generalidades

El concepto de ***función*** es fundamental en el análisis matemático de una situación en la que se requiere establecer una relación entre las variables que describen tal situación. Podríamos decir que una función es una relación especial en la que una cantidad depende de otra, por ejemplo:

- El área de un círculo (A) depende de su radio (r), es decir "A es *función* de r".
- Cuando se invierte dinero a una tasa de interés determinada, el interés (I) depende del tiempo (t) en que se invierte el dinero. Decimos entonces que " I es *función* de t ".
- El costo (c) de producir cualquier artículo depende del número de artículos producidos (q). O sea "c es *función* de q ".

Definición: Dados dos conjuntos X e Y , una ***función*** f es una ley que asocia a cada elemento $x \in X$ un único elemento $y \in Y$. Notación

$$\begin{array}{rcl} f : X & \rightarrow & Y \\ x & \rightarrow & y \end{array}$$

Los conjuntos X e Y pueden ser de distinta naturaleza, por ejemplo conjuntos de personas, de ciudades, de mesas, etc.. Nosotros sólo vamos a estudiar funciones en las que los conjuntos X e Y son conjuntos de números reales o sea ***funciones reales***.

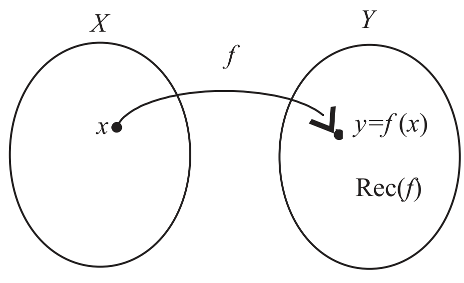
Llamaremos:

* al conjunto X , ***dominio*** de la función f y lo notaremos Dom (f)
* al conjunto Y , ***codominio*** de la función f y lo notaremos Codom (f)
* al elemento y, ***imagen*** de x por la función f y lo notaremos $y = f(x)$ que se lee "y es igual a f de x" y se dice que y es el *valor* de f en x
* al elemento x, ***pre-imagen*** de y por f

➢ El conjunto de todas las imágenes es el ***recorrido de f*** o ***imagen de f*** y se lo nota Rec (f) o *Im(f)*, es decir

$$\text{Rec}(f) = \text{Im}(f) = \{y \in Y : y = f(x) \ \wedge \ x \in X\} = f(X)$$

También se lo llama ***rango*** de f . El recorrido de una función no necesariamente coincide con el codominio, sino que está formado por los elementos del codominio que son imagen de algún elemento del dominio.



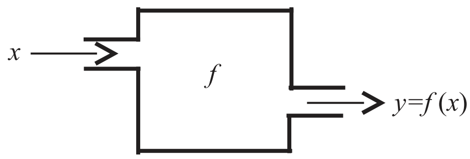
➢ Si una función expresa una relación de la forma $y = f(x)$, las variables intervinientes, x e y, juegan distintos papeles, ya que <u>el valor de y depende del valor asignado a x</u>, por lo tanto a

x es la ***variable independiente***

y es la ***variable dependiente***.

Se utilizan distintas letras para nombrar una función, las más comunes son : f, g, h, F, P, etc.
Para las variables se suelen utilizar las letras x, y, w, z, t, etc.

➢ A una función f la podemos imaginar como una "máquina" que acepta como entrada un valor $x \in Dom(f)$ y que produce como salida un número $y = f(x)$.



Una máquina de este tipo es la calculadora, con una tecla para la raíz cuadrada $\boxed{\sqrt{\ }}$
Cuando se usa como dato un número no negativo y se oprime esta tecla, la calculadora exhibe un número. La "máquina" no admite cualquier entrada, para la función raíz cuadrada, $f(x)=\sqrt{x}$ el dominio es el conjunto de los números reales no negativos, o sea $Dom(f) = \mathbb{R}_0^+$, el recorrido es el conjunto de los reales no negativos. $\text{Rec}(f) = \mathbb{R}_0^+$

Ejemplo Sea la función $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ donde $f(x) = 2x^2 + 1$, calcular el valor de f para $x = 2,\ \ x = -1,\ \ x = a,$ $x = a + 1$, es decir determine $f(2),\ f(-1),\ f(a),\ f(a+1)$

➢ Cuando no se especifica cual es el dominio de una función, se considera que el dominio es el mayor conjunto de todos los números reales para los que tiene sentido la ley de dicha función. Ejemplos: $f(x)=x+3\,;\ g(x)=\sqrt{x}\,;\ h(x)=3\text{x}/x-1$.

Operaciones con funciones

➢ Dadas dos funciones f y g, para cada $x \in Dom(f) \cap Dom(g)$, $f(x)$ y $g(x)$ son números reales por lo tanto podemos operar con ellos, sumarlos, restarlos, multiplicarlos y dividirlos (si $g(x) \neq 0$).

Llamando $X = Dom(f) \cap Dom(g)$, definimos entonces las siguientes funciones:

Función suma: $\boldsymbol{f+g}$

$$f+g: X \to \mathbb{R} \quad \text{donde } (f+g)(x) = f(x) + g(x)$$

Función diferencia: $\boldsymbol{f-g}$

$$f-g: X \to \mathbb{R} \quad \text{donde } (f-g)(x) = f(x) - g(x)$$

Función producto: $\boldsymbol{f \cdot g}$

$$f \cdot g: X \to \mathbb{R} \quad \text{donde } (f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x)$$

Función cociente: $\boldsymbol{\dfrac{f}{g}}$

Sea $A = \{\, x \in X:\ g(x) \neq 0 \,\}$

$$\frac{f}{g}: A \to \mathbb{R} \quad \text{donde } \left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$$

Ejemplo

Dadas las funciones $f(x) = x^2 + 1$ y $g(x) = \dfrac{1}{x-1}$, halle las funciones $f+g,\ f-g,\ f \cdot g,\ \dfrac{f}{g}$ y $\dfrac{g}{f}$, indicando los dominios de cada una de ellas. $X = Dom(f) \cap Dom(g) = \Re - \{1\}$ y A=X pues $g(x) \neq 0$.

Gráfica de una función. Sistema de coordenadas cartesianas

Definición: La ***gráfica de una función f*** es el conjunto de pares ordenados (x, y), donde $x \in Dom(f)$ e $y = f(x)$. Notando con G_f a dicho conjunto

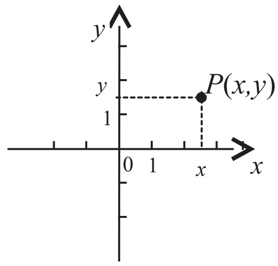
$$G_f = \{(x, y): x \in Dom(f), y = f(x)\} = \{(x, f(x)): x \in Dom(f)\}$$

$$(x, y) \in G_f \Leftrightarrow x \in Dom(f) \wedge y = f(x)$$

Sabemos que los números reales se representan gráficamente en el eje real, veamos ahora la manera de representar pares ordenados de números reales.

Un ***par ordenado*** de números reales (x, y), tiene un ***primer elemento*** *x* y un ***segundo elemento*** *y*. Para representar los pares ordenados utilizaremos un ***sistema de coordenadas cartesianas.***
Dibujamos en el plano dos rectas perpendiculares que denominamos ***ejes coordenados***.

Los ejes coordenados son ejes reales, por lo tanto debemos considerar en ellos una escala, como se muestra en la figura. La recta horizontal se denomina ***eje x***, la recta vertical ***eje y*** y el punto de intersección de ambas ***origen de coordenadas***. El plano en el que se ha determinado un sistema de coordenadas cartesianas, se denomina ***plano coordenado*** o ***plano x y***.



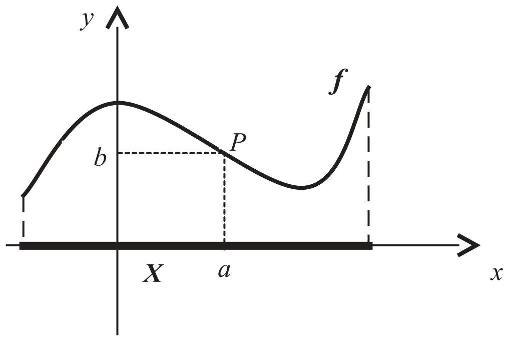
- *A cada punto del plano le corresponde un único par ordenado de números reales y a cada par ordenado de números reales le corresponde un único punto del plano.*
- Si *P* es un punto cualquiera del plano, sus ***coordenadas cartesianas*** están dadas por un *par ordenado* de la forma (x, y). A *x* se lo denomina ***abscisa*** de *P* y a *y* ***ordenada*** de *P*. Notación $P(x, y)$

Las coordenadas del *origen* son $(0,0)$. Los *puntos sobre el eje x* tienen ordenada 0, o sea coordenadas $(x, 0)$ y los *puntos sobre el eje y* tienen abscisa 0, o sea coordenadas $(0, y)$.
Los ejes coordenados dividen el plano en cuatro regiones llamadas ***cuadrantes***.
Ejercicio: graficar los puntos (1,0), (0,1), (0,-1), (-2,0), (3,1), (-2,2), (-1,-1) y (1,-1).

De acuerdo a lo analizado, resulta natural representar gráficamente una función en el plano coordenado, teniendo en cuenta que: si un punto del plano pertenece a la gráfica de una función entonces la ordenada es la imagen de la abscisa a través de dicha función y recíprocamente, si *y* es la imagen de *x* a través de la función *f*, entonces el punto $P(x, y)$ pertenece a la gráfica de la función *f*. Es decir:

$$P(x, y) \in G_f \Leftrightarrow y = f(x) \text{ y } x \in Dom(f)$$

El dominio de la función se representa en el eje de las abscisa (eje *x*) y el recorrido en el eje de las ordenadas (eje *y*).

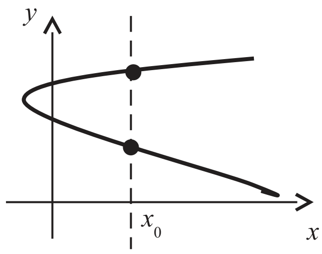


Por ejemplo, supongamos conocida la gráfica de una función, como se muestra en la figura. Observamos que el punto *P* de coordenadas (a, b) pertenece a la gráfica de f, por lo tanto podemos asegurar que a pertenece al dominio de f y que $f(a) = b$.

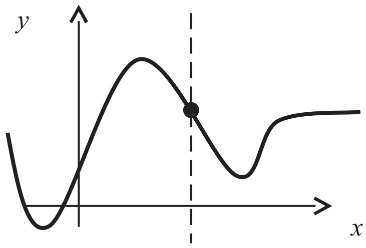
Según la definición de función a cada elemento de *X* le corresponde un ***único*** elemento en *Y*, es decir cada elemento del dominio de *f* es abscisa de un ***único*** punto de la gráfica de *f*

Cualquier recta vertical corta a la gráfica de una función a lo sumo en un punto

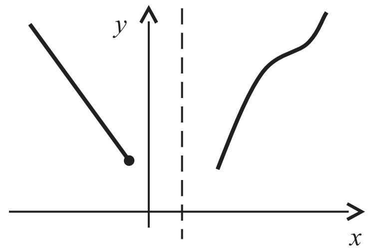
Esto nos proporciona un criterio gráfico para determinar si una curva es la gráfica de una función, el ***criterio de la recta vertica****l*. Veamos como aplicarlo en las siguientes gráficas.



a) no es la gráfica de una función de *x*



b) es la gráfica de una función de *x*



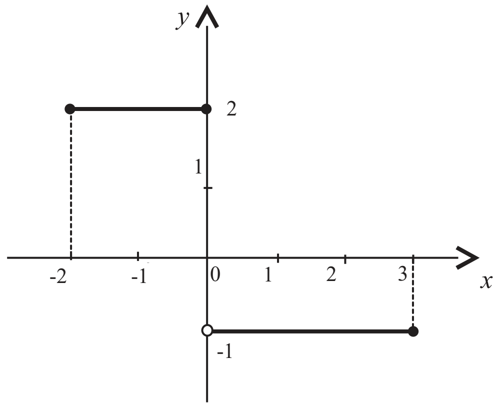
c) es la gráfica de una función de *x*

Ejemplo .- Dada la función $f:[-2,3]\to \mathbb{R}$ donde

$$f(x)=\begin{cases} 2 & si \quad -2\le x\le 0 \\ -1 & si \quad 0<x\le 3 \end{cases}$$

El dominio de esta función es el intervalo $[-2,3]$.
Si $-2\le x\le 0$, la función *f* está definida por $f(x)=2$, y si $0<x\le 3$ por la expresión $f(x)=-1$.
Observemos que el punto $(0,-1)$ no pertenece a la gráfica de la función *f*, ya que $f(0)\neq -1$, por lo tanto marcamos en dicho punto un círculo.
Los únicos valores que toma *y* son -1 y 2 , por lo tanto, el recorrido de *f* es:

$$\text{Rec}(f)=\{-1,2\}$$



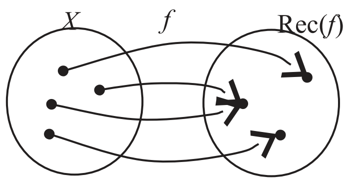
Antes de continuar con otros ejemplos de funciones, veremos algunas definiciones de propiedades que pueden caracterizar a las funciones.

Propiedades de las funciones

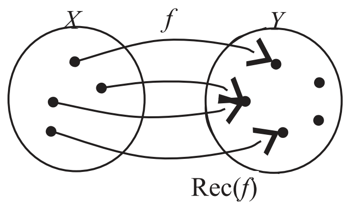
➢ ***Definición***: Decimos que una función *f* es ***suryectiva*** o ***sobreyectiva*** cuando su recorrido coincide con su codominio. O sea

$$\mathbf{Re}\,c(f)=Codom(f)$$

Observemos que en este caso, todo elemento del codominio es imagen de algún elemento del dominio (todos los elementos del codominio reciben alguna flecha).



f es una función *suryectiva*

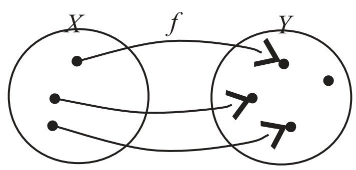


f **no** es una función *suryectiva*

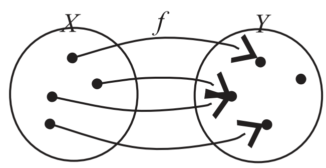
➢ ***Definición***: Decimos que una función *f* es ***inyectiva*** cuando a todo par de elementos distintos del dominio le corresponden distintas imágenes. O sea:

$$x_1,\ x_2\in Dom(f),\ x_1\neq x_2 \ \Rightarrow\ f(x_1)\neq f(x_2)$$

O bien: $x_1,\ x_2\in Dom(f),\ f(x_1)=f(x_2)\ \Rightarrow\ x_1=x_2$



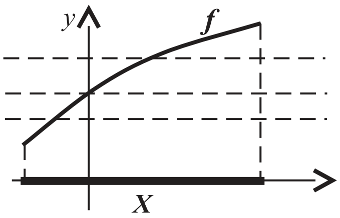
f es una función *inyectiva*



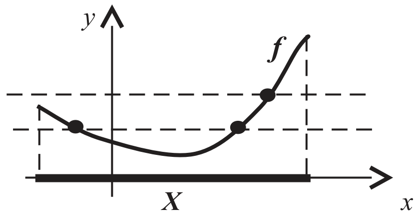
f **no** es una función *inyectiva*

Cada elemento de la imagen recibe sólo una flecha.

En cuanto a la gráfica de una función *inyectiva*, toda recta horiontal interseca a la gráfica de f a lo sumo en un punto.



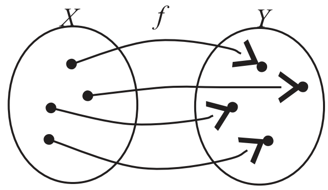
f es una función *inyectiva*



f **no** es una función *inyectiva*

Si existe una recta horizontal que corta a la gráfica de una función en más de un punto, la función no es inyectiva, esto se observa en la figura de la derecha.

- ***Definición***: Decimos que una función f es ***biyectiva*** cuando es *suryectiva* e *inyectiva*. Se dice en este caso que existe una *correspondencia biunívoca* o *uno a uno* entre el dominio y el codominio de la función f. *Cada elemento del codominio recibe una única flecha.*



f es una función *biyectiva*

- Un conjunto no vacío A de números reales es ***simétrico*** cuando:

$$x \in A \;\Rightarrow\; -x \in A$$

Es decir, si un número pertenece al conjunto, su opuesto también pertenece al conjunto. Son ejemplos de conjuntos simétricos:

$$A = [-4,4], \qquad B = \mathbb{R}\;, \qquad C = \mathbb{R} - \{0\}, \qquad D = (-3,3)$$

No son conjuntos simétricos:

$$A = [0,3] \qquad B = \mathbb{R} - \{1\} \qquad C = [-5,5)$$

Las dos propiedades que veremos a continuación se estudian exclusivamente en funciones cuyos dominios son conjuntos simétricos.

- ***Definición***: Una función f es ***par***, si su dominio es un conjunto simétrico y se verifica:

$$f(x) = f(-x) \qquad \forall x \in Dom(f)$$

La *gráfica* de una función par es simétrica respecto al eje y, ya que:

$$(x,y) \in G_f \;\Leftrightarrow\; x \in Dom(f), y = f(x) \;\Leftrightarrow\; -x \in Dom(f),\; y = f(-x) \;\Leftrightarrow\; (-x,y) \in G_f$$

- ***Definición***: Una función f es ***impar***, si su dominio es un conjunto simétrico y se verifica:

$$f(-x) = -f(x) \qquad \forall x \in Dom(f)$$

La *gráfica* de una función impar es simétrica respecto al origen de coordenadas, ya que:

$$\underline{(x,y) \in G_f} \;\Leftrightarrow\; x \in Dom(f), y = f(x) \;\Leftrightarrow\; -x \in Dom(f),\; y = -f(-x) \;\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow\; -x \in Dom(f), -y = f(-x) \;\Leftrightarrow\; \underline{(-x,-y) \in G_f}$$

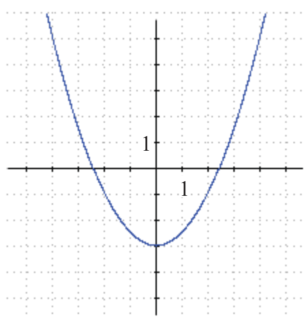


Fig.1 Función par

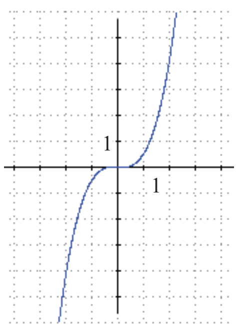
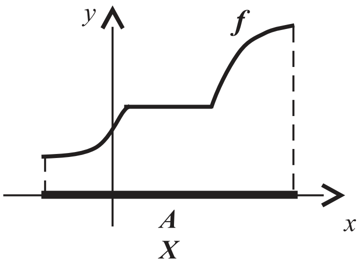


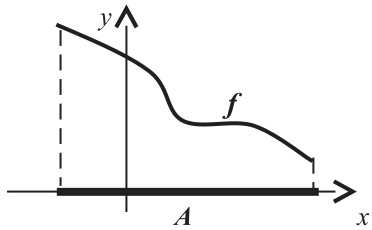
Fig. 2 Función impar

- ***Definición***: Sea A un subconjunto del dominio de f. Si para todo par de puntos x_1, x_2 de A, se tiene:
  - $x_1 < x_2 \quad \Rightarrow \quad f(x_1) < f(x_2)$ entonces f es una función ***creciente*** en A
  - $x_1 < x_2 \quad \Rightarrow \quad f(x_1) > f(x_2)$ entonces f es una función ***decreciente*** en A
  - $x_1 < x_2 \quad \Rightarrow \quad f(x_1) \leq f(x_2)$ entonces f es una función ***no decreciente*** en A
  - $x_1 < x_2 \quad \Rightarrow \quad f(x_1) \geq f(x_2)$ entonces f es una función ***no creciente*** en A

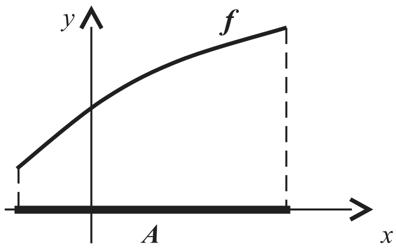
Veamos ejemplos de gráficas de funciones que respondan a cada una de las propiedades presentadas.



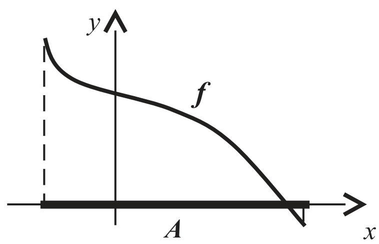
función *no decreciente*



función *no creciente*



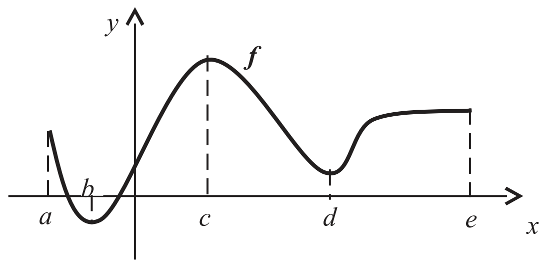
función *creciente*



función *decreciente*

Observación: Una función se dice que es ***monótona*** en un conjunto si es creciente o decreciente en dicho conjunto

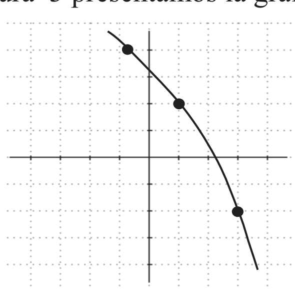
Ejemplo: Determine los intervalos de monotonía de la función f, cuya grafica se presenta en la figura.

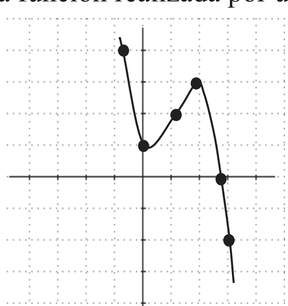


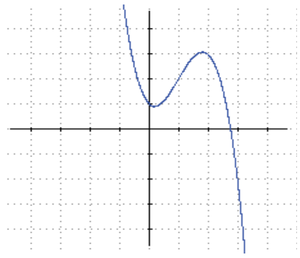
f es *decreciente* en los intervalos: $[a,b]$, $[c,d]$
f es *creciente* en el intervalo: $[b,c]$,
f es *no decreciente* en el intervalo: $[d,e]$

Gráfica de funciónes elementales

Trazar la gráfica de una función es buscar puntos de la forma $(x, f(x))$ y luego unirlos de la "mejor" forma posible? Pero, cuántos puntos debemos marcar?, estamos seguros de que los unimos bien? o sea esa curva que trazamos es en realidad la gráfica de la función? Si contamos con una calculadora gráfica o un programa para computación podríamos tener la gráfica de la función simplemente apretando algunas teclas. A medida que aumentamos el número de puntos marcados, la curva se irá aproximando a la gráfica buscada, esto lo observamos en las siguientes figuras. En la figura 1 marcamos sólo 3 puntos y los unimos con una curva. En la figura 2 agregamos tres puntos más y nuevamente los unimos con una curva, observese la diferencia con la figura 1. Y por último en la figura 3 presentamos la gráfica de la función realizada por un programa de computación.

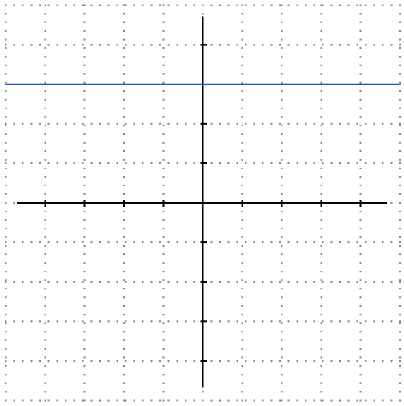






La idea básica de esta sección es presentar las gráficas de algunas funciones elementales, con el objeto de realcionar la ley de una función y la forma de su gráfica, para que con pocos cálculos podemas trazar la gráfica de una función con cierta seguridad. Analizaremos también para cada función las propiedades que verifica.

- ***Función constante***



Sea c una constante real.

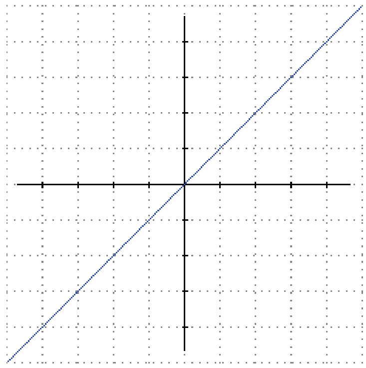
$$f:\mathbb{R} \to \mathbb{R}$$
$$x \to f(x)=c$$

- $G_f=\{(x,y): x\in\mathbb{R}\ ,\ y=c\}=\{(x,c): x\in\mathbb{R}\}$

la *gráfica* de la *función constante* es una *recta* paralela al eje x de ecuación $y=c$.

- $Rec(f)=\{c\}$
- $Rec(f)\neq Codom(f) \Rightarrow$ f **no** es *sobreyectiva.*
- $x_1\neq x_2$ y $f(x_1)=f(x_2)=c \Rightarrow$ f **no** es *inyectiva.*
- $f(-x)=c=f(x) \Rightarrow$ f es una función *par.*
- Es *no creciente* y *no decreciente*.

- ***Función identidad***



$$i:\mathbb{R} \to \mathbb{R}$$
$$x \to i(x)=x$$

- $Dom(i)=R,\ \ Codom(i)=R$
- $G_i=\{(x,y): x\in\mathbb{R}\ ,\ y=x\}=\{(x,x): x\in\mathbb{R}\}$

la *gráfica* de la *función identidad i*, es la *recta* de ecuación $y=x$

- $Rec(i)=\mathbb{R}$
- $Rec(i)=Codom(i) \Rightarrow$ i es *sobreyectiva.*
- $[x_1\neq x_2 \Rightarrow i(x_1)\neq i(x_2)] \Rightarrow$ i es *inyectiva.*
- La función identidad es *biyectiva*
- $i(-x)=-x=-i(x) \Rightarrow$ i es una función *impar.*
- i es una función *creciente*

- ***Función lineal***

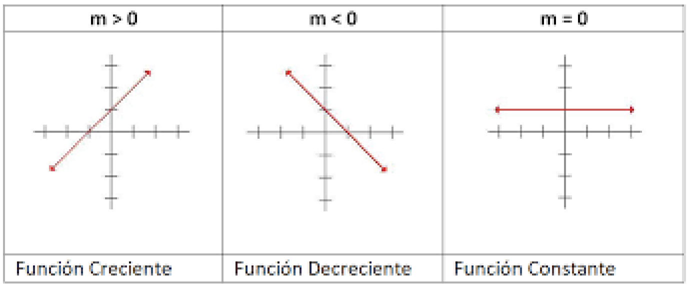
Si $m\neq 0$, el caso $m=0$ es la función constante.

$$f:\mathbb{R} \to \mathbb{R}$$
$$x \to f(x)=mx+h$$

- $Dom(f)=R,\ \ Codom(f)=R$
- $G_f=\{(x,y): x\in\mathbb{R},\ y=mx+h\}=\{(x,mx+h): x\in\mathbb{R}\}$

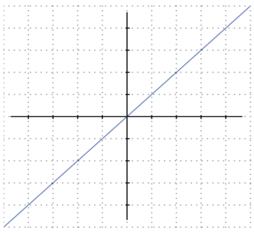
la *gráfica* de la *función lineal f*, es la *recta* de ecuación $y=mx+h$. Donde m es la pendiente de la recta y h es la ordenada al origen.

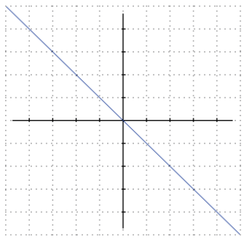
- $Rec(f)=\mathbb{R}$
- $Rec(f)=Codom(f) \Rightarrow$ f es *sobreyectiva.*
- $[x_1\neq x_2 \Rightarrow f(x_1)\neq f(x_2)] \Rightarrow$ f es *inyectiva.*
- La función lineal es *biyectiva*
- Cuando h=0, $f(-x)=m(-x)=-f(x) \Rightarrow$ f es una función *impar.*
- f es una función *creciente* si *m>0,* y es *decreciente* si *m<0.*



Gráficas de funciones lineales cuando h=0, la recta pasa por el origen.

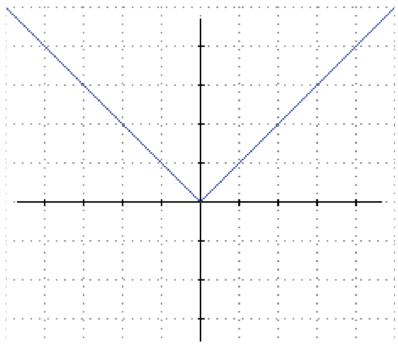
m>0 ***m<0***





- ***Función valor absoluto***

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$
$$x \to f(x) = |x|$$



Donde el valor absoluto se define como:

$$|x| = \begin{cases} x & si \;\; x \geq 0 \\ -x & si \;\; x < 0 \end{cases}$$

Observemos que cualquiera sea x real,

$$* \quad |x| \geq 0$$
$$* \quad |-x| = |x|$$

- $G_f = \{(x, y) : x \in R,\; y = |x|\} = \{(x, y) : (x \geq 0,\; y = x) \;\text{ o }\; (x < 0,\; y = -x)\}$

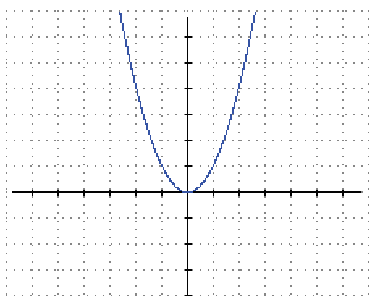
o sea la gráfica de f consta de dos *semirectas* de ecuaciones:

$$y = x \quad \text{si} \;\; x \geq 0$$
$$y = -x \quad \text{si} \;\; x < 0$$

- $Rec(f) = \mathbb{R}_0^+$
- $Rec(f) \neq Codom(f) \;\Rightarrow\; f$ **no** es *sobreyectiva.*
- $f(-1) = |-1| = 1 \;\; y \;\; f(1) = |1| = 1 \;\Rightarrow\; f$ **no** es *inyectiva.*
- $f(-x) = |-x| = |x| = f(x) \Rightarrow f$ es una función *par. La gráfica* de f es *simétrica* respecto al eje y
- f es *decreciente* en $(-\infty, 0]$ y f es *creciente* en $[0, +\infty)$

- ***Función cuadrática***

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$
$$x \to f(x) = x^2$$



- $G_f = \{(x, y) : x \in \mathbb{R},\; y = x^2\} = \{(x, x^2) : x \in \mathbb{R}\}$
- $f(-x) = (-x)^2 = x^2 = f(x) \Rightarrow f$ es una función *par*
  la *gráfica* de f es *simétrica* respecto al eje y
- $f(0) = 0$, $f(1) = 1$, $0 < x < 1 \Rightarrow x^2 < x$,
  $x > 1 \Rightarrow x^2 > x$
- $x^2 \geq 0$, $Rec(f) = \mathbb{R}_0^+$
- $x_1, x_2 > 0,\; x_1 < x_2 \;\Rightarrow\; x_1^2 < x_1 \cdot x_2 < x_2^2$
  luego f es *creciente* en $[0, +\infty)$
- f es *decreciente* en $(-\infty, 0]$ (justificar)
- $Rec(f) \neq Codom(f) \;\Rightarrow\; f$ **no** es *sobreyectiva.*

- $f(-1)=1=f(1) \Rightarrow f$ **no** es *inyectiva.*

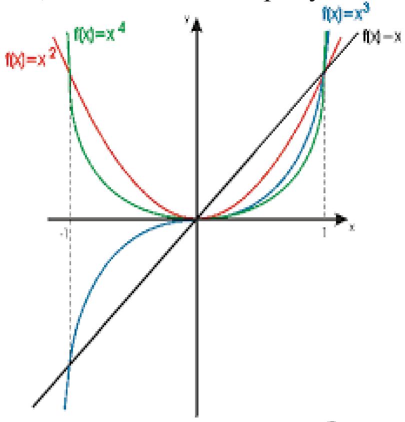
La gráfica de la función $f(x)=x^2$ se llama ***parábola***, el punto $(0,0)$ es el ***vértice*** y el eje y es el ***eje de simetría*** de la parábola.

- ***Función potencia*** $f(x)=x^a$ con a constante racional.
  - ***Caso*** $a=n$ ***un nº natural***

$$f(x)=x^n=\underbrace{x.x\ldots x}_{n\ veces}$$

Dom(f)=R, *Rec(f)*=R si n impar, *Rec(f)*= $\mathbb{R}_0^+$ si n es par.

Si n es impar es sobreyectiva, es inyectiva, es una función impar y creciente.

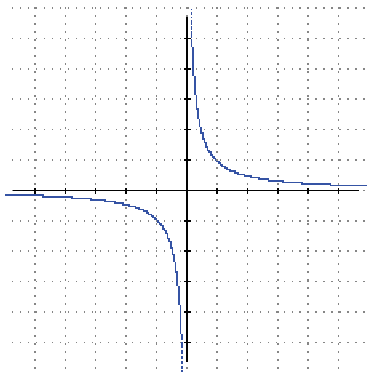


Funciones potenciales: f(x)=xⁿ

Si n es par f no es sobreyectiva, no es inyectiva, es una función par, es monótona?

- ***Caso*** $a=-1$ ***Función recíproca***

$$\begin{aligned} f:\mathrm{R}\text{-}\{0\} &\rightarrow \mathrm{R} \\ x &\rightarrow f(x)=\frac{1}{x} \end{aligned}$$



- $Dom(f)=R-\{0\},\ \ Codom(f)=R$
- $f(-x)=\dfrac{1}{-x}=-\dfrac{1}{x}=-f(x) \Rightarrow f$ es una función *impar*.
- $0<x<1 \Rightarrow \dfrac{1}{x}>1 \quad , \quad x>1 \Rightarrow \dfrac{1}{x}<1$

La gráfica que resulta se llama ***hipérbola***

- $\dfrac{1}{x}\neq 0 \quad \forall x\in \mathrm{R}$; cualquiera sea $y\in \mathrm{R}-\{0\}$ existe

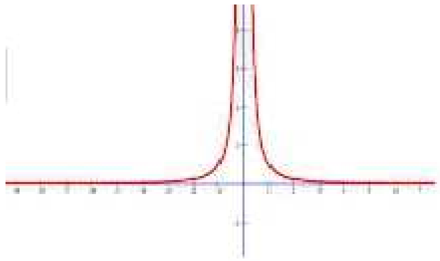
  $x=\dfrac{1}{y}\in \mathrm{R}-\{0\}$, tal que $f(x)=f\left(\dfrac{1}{y}\right)=y$, luego: $\quad Rec(f)=\mathrm{R}-\{0\}$
- $Rec(f)\neq Codom(f) \Rightarrow \ f$ **no** es *sobreyectiva.*
- Analizar: f es decreciente en $(0,+\infty)$ y es decreciente en $(-\infty,0)$, ¿f es decreciente en su dominio?
- f es *inyectiva.*

Observemos que para valores positivos y grandes de x, $y=\dfrac{1}{x}$ toma valores pequeños, cercanos a cero, pero la función no vale nunca cero. La gráfica de f se acerca al eje x, pero no lo corta en ningún punto. Decimos entonces que el eje x es una ***asíntota horizontal*** de la gráfica de la función o sea la recta de ecuación *y=0* es una *asíntota horizontal*.

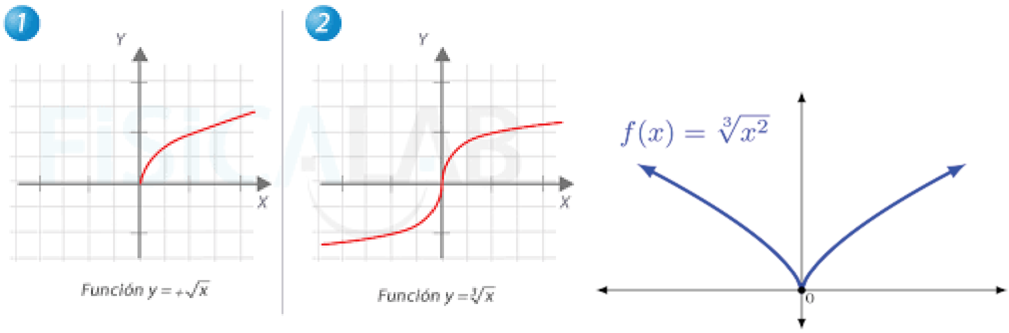
De la misma manera, cuando x toma valores positivos pequeños, cercanos a cero, $y=\dfrac{1}{x}$ toma valores grandes. La gráfica de f se acerca al eje y, pero no lo corta en ningún punto. Decimos entonces que el eje y es una ***asíntota vertical*** de la gráfica de la función, o sea la recta de ecuación *x=0* es una *asíntota vertical*.

- **Caso** $a = -2$.

Determinar dominio, codominio, recorrido, analizar inyectividad, sobreyectividad, paridad, monotonía, existencia de asíntotas.



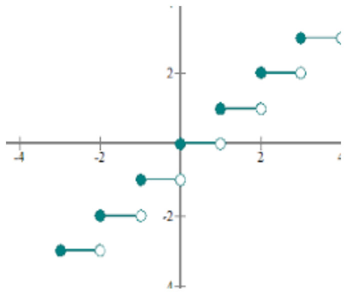
- **Caso** $a = 1/2,\ a = 1/3,\ a = 2/3$.



➢ ***Función parte entera*** (mayor entero menor o igual que x)

$$\begin{aligned} f: \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ x &\to f(x) = [x] \end{aligned}$$

- $Dom(f) = R,\ \ Codom(f) = R$



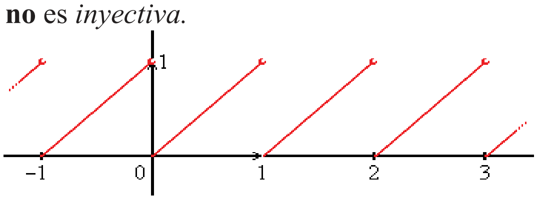
- $Rec(f) = Z \neq Codom(f) \ \Rightarrow \ f$ **no** es *sobreyectiva.*
- $f(1) = f(1.3) = 1 \Rightarrow f$ ***no*** es inyectiva
- Analizar: paridad y monotonía

$$\forall x \in R, \text{ se verifica } [x] \leq x < [x] + 1$$

➢ ***Función mantisa***

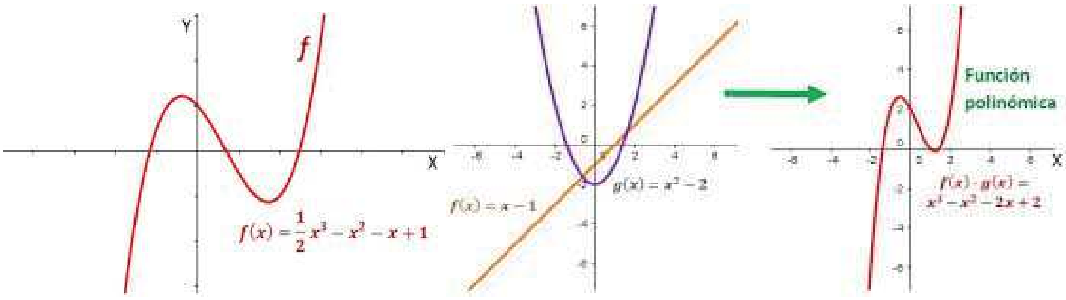
$$\begin{aligned} f: \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ x &\to f(x) = x - [x] = mant(x) \end{aligned}$$

- $Dom(f) = R,\ \ Codom(f) = R \neq Rec(f) = [0,1) \ \Rightarrow \ f$ **no** es *sobreyectiva.*
- $f(1.5) = 0.5 = f(2.5) \ \Rightarrow \ f$ **no** es *inyectiva.*



➢ ***Función polinómica o polinomial***

Una función $p(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$ es un polinomio o función polinómica, si $n \in N_0$ y $a_n, a_{n-1}, \cdots, a_1, a_0$ son constantes reales llamados coeficientes del polinomio. *Dom(p)=R,* si $a_n \neq 0$ decimos que *n* es el grado del polinomio. Casos particulares, las funciones constantes, lineales, cuadráticas, cúbicas, etc.



➢ **Cuadrática caso general** $f(x) = ax^2 + bx + c$, con *a* distinto de cero.

Completando cuadrados

$$f(x) = a[(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}] = a[x^2 + 2\frac{b}{2a}x + \left(\frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{c}{a}] = a[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{c}{a}] =$$

$= a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + c - \frac{b^2}{4a}$, llegamos a la siguiente expresión para *f*:

$$f(x) = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{4ac - b^2}{4a}$$

Calculamos las raíces de la ecuación cuadrática $ax^2 + bx + c = 0$

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2x} = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}, \qquad x_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2x} = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$$

Recordar que $\Delta = b^2 - 4ac$

<u>*vértice*</u>: (x_V, y_V), donde $x_V = \frac{x_1 + x_2}{2} = \frac{-b}{2a}$, $y_V = f(\frac{-b}{2a}) = \frac{-\Delta}{4a}$

<u>*eje de simetría*</u>: es la recta de ecuación $x = x_V = -\frac{b}{2a}$

<u>*ceros de f*</u> :

- $\Delta > 0$ la función f tiene **dos** ceros: $x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$, $x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$

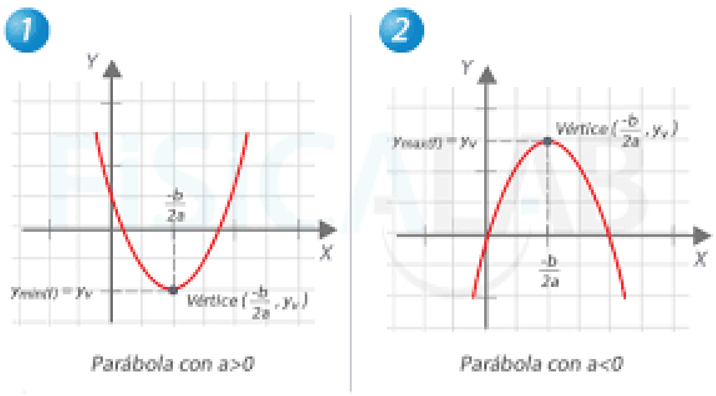
  <u>la parábola corta al eje *x* en dos puntos</u>.

- $\Delta < 0$ la función *f* **no** tiene ceros, $x_1, x_2 \notin R$, <u>la parábola no corta al eje *x*</u>.
- $\Delta = 0$ la función f tiene un **único** cero, <u>la parábola corta al eje *x* en un punto</u> de abcsisa $x = x_V = \frac{-b}{2a}$

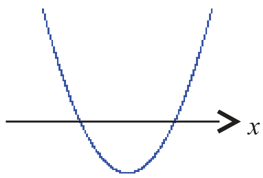
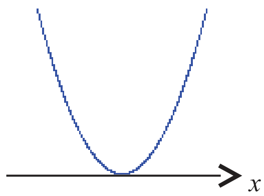
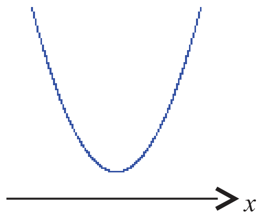
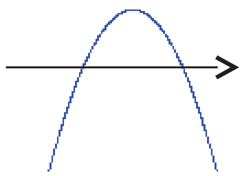
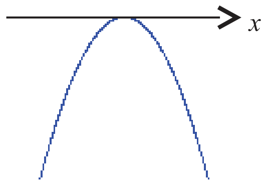
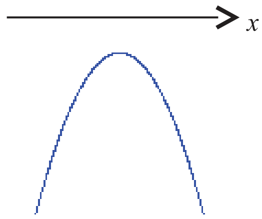
<u>*intersección con el eje y*</u>: $f(0) = c$, la parábola corta al eje *y* en el punto $(0, c)$

<u>*mínimo de f*</u>: La función f tiene mínimo si <u>$a > 0$</u> , $\min(f) = f(x_V) = y_V$

<u>*máximo de f*</u>: La función *f* tiene máximo si <u>$a < 0$</u> , en este caso: $\max(f) = f(x_V) = y_V$



Resumimos en el siguiente cuadro las posición de una parábola, gráfica de $f(x) = ax^2 + bx + c$, con respecto al eje x, según sean $\boldsymbol{a}$ (coeficiente de x^2) y Δ (discriminante: $b^2 - 4ac$)

	$\Delta > 0$	$\Delta = 0$	$\Delta < 0$
$a > 0$			
$a < 0$			

Ejemplo:

$$f(x) = 2x^2 + 2x - 4 = 2(x^2 + x - 2) = 2[x^2 + 2\frac{1}{2}x + \left(\frac{1}{2}\right)^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2 - 2] = 2[\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{9}{4}] = 2\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{9}{2}$$

con $x_V = \frac{-b}{2a} = \frac{-1}{2}$, $y_V = f(x_V) = f(\frac{-1}{2}) = \frac{-9}{2}$. Además $f(0) = -4$ y $f(x) = 0$ si y solo si

$x_1 = \frac{-2+3}{4} = \frac{1}{4}$, $x_2 = \frac{-2-3}{4} = \frac{-5}{4}$. Realizar la gráfica de la parábola.

- ***Funcion Homográfica***

Dados $a, b, c, d \in \mathrm{R}$, $bc \neq ad$, $c \neq 0$, se define la ***función homográfica.***

$$f(x) = \frac{ax+b}{cx+d} \quad \text{definida para todo } x \neq -\frac{d}{c}$$

es decir Dom $(f) = \left\{ x \in R : x \neq -\frac{d}{c} \right\}$

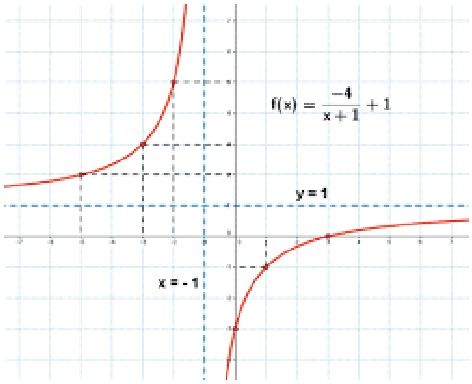
La función homográfica más simple es la función recíproca $f(x) = \frac{1}{x}$, ($a = 0$, $b = 1$, $c = 1$, $d = 0$) cuya gráfica sabemos que es una hipérbola; a partir de esta se puede obtener la gráfica de cualquier otra función homográfica. Teniendo en cuenta la siguiente expresión para f:

$$f(x)=\frac{bc-ad}{c^2}\cdot\frac{1}{x+\frac{d}{c}}+\frac{a}{c}$$

Tengamos entonces en cuenta que, la gráfica de una función homográfica es una ***hipérbola***, en la que siempre deberemos identificar una ***asíntota horizontal***, $y=\frac{a}{c}$ y una ***asíntota vertical***, $x=-\frac{d}{c}$.

Ejemplos: 1) $f(x)=\frac{x-3}{x+1}=1+\frac{-4}{x+1}$, con ***asíntota vertical***, $x=-1$ y ***asíntota horizontal***, $y=1$. Calculamos, $f(0)=-3$ y los x tales que $f(x)=0$, para determinar los puntos de intersección con los ejes, $(0,-3)$ y $(3,0)$

2) $g(x)=\frac{2x+2}{3x-6}=\frac{2}{3}\frac{x+1}{x-3}=\frac{2}{3}+\frac{2}{x-2}$ luego ***asíntota vertical***, $x=2$ y ***asíntota horizontal***, $y=\frac{2}{3}$. Calculamos, $g(0)=\frac{-1}{3}$ y los x tales que $g(x)=0$, para determinar los puntos de intersección con los ejes, $(0,\frac{-1}{3})$ y $(-1,0)$.



- **Función Racional**

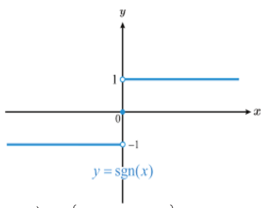
$f(x)=\frac{p(x)}{q(x)}$ siendo p y q dos polinomios. El dominio de la función racional será

$$Dom(f)=Dom(p)\cap Dom(q)=R\cap\{x\in R: q(x)\neq 0\}$$

Ejemplos: determinar los dominios de las funciones $f(x)=\frac{x-3}{x+1}$, $g(x)=\frac{x^2-1}{x+1}$ y $h(x)=\frac{x+1}{x^2-1}$. Si es posible esbozar sus gráficas.

- **Función Signo**

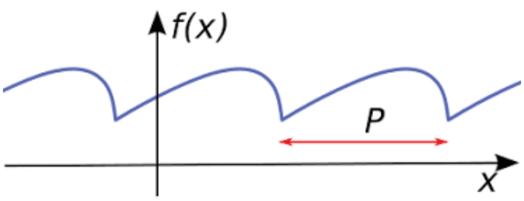
$$\operatorname{sgn}(x)=\begin{cases}\frac{|x|}{x} & si\ x\neq 0\\ 0 & si\ x=0\end{cases}$$

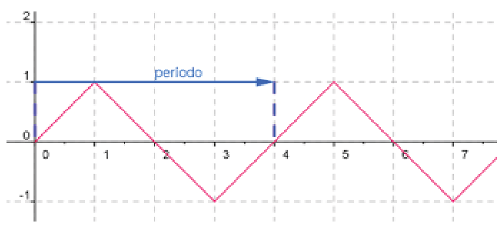


Es una función impar, no sobreyectiva, no inyectiva, $\operatorname{Rec}(\operatorname{sgn})=\{-1,0,1\}$, es no decreciente.

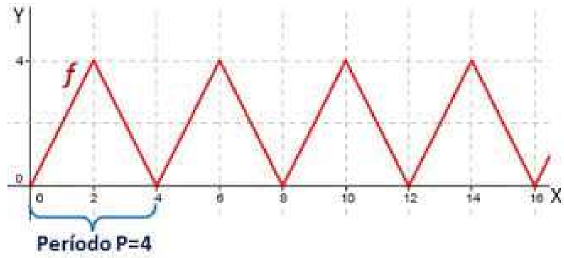
- **Función periódica**

Una función es periódica de período p si $f(x)=f(x+p)$ $\forall x\in Dom(f)$ y p es el mínimo número positivo que verifica esta relación.





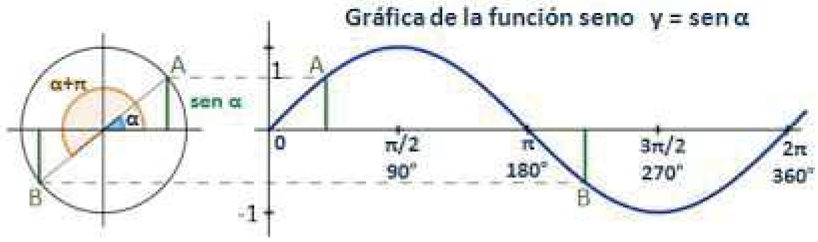
Observemos que $f(x+2p)=f((x+p)+p)=f(x+p)=f(x)$



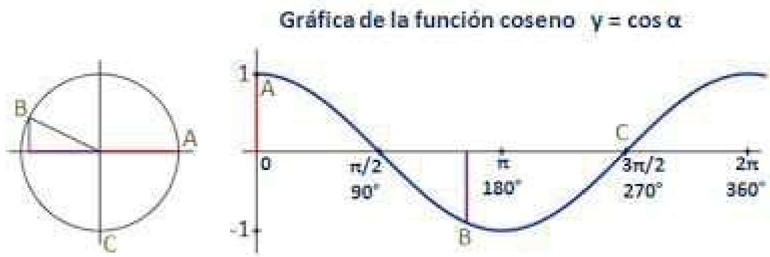
Clasificación de funciones: algebraicas (se construyen a partir de polinomios usando operaciones algebraicas: suma, resta, producto, división y raíces) y **trascendentes (**son las no algebraicas, entre ellas las **trigonométricas; exponenciales; logarítmicas; inversas trigonométricas; hiperbólicas** (por ej: catenaria); **inversas hiperbólicas**).

- **Funciones trigonométricas**

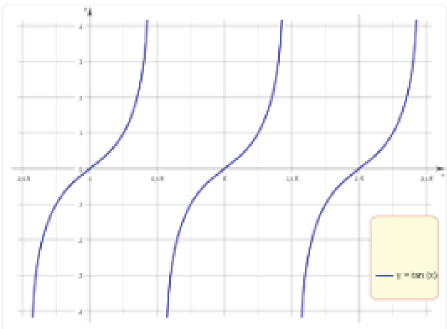
  Funión seno $f(x)=\operatorname{sen}(x)\ \ \forall x\in R$, $\operatorname{Re}c(f)=[-1,1]$, periódica de período 2π , función impar.



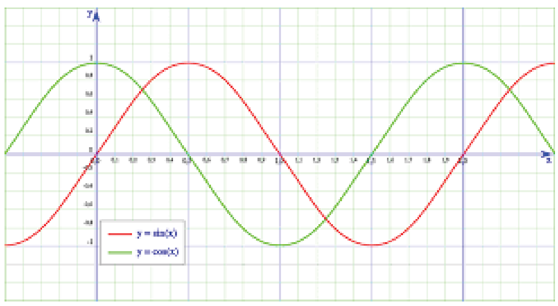
  Función coseno $f(x)=\cos(x)\quad \forall x\in R\quad \operatorname{Re}c(f)=[-1,1]$, periódica de período 2π , función par.



  Función tangente $f(x)=\tan(x)=\dfrac{\operatorname{sen}(x)}{\cos(x)}\ \ \forall x\in R-\left\{x=\dfrac{\pi}{2}+k\pi,\ \ k\in Z\right\}$, $\operatorname{Re}c(f)=R$, periódica de período π , función impar.



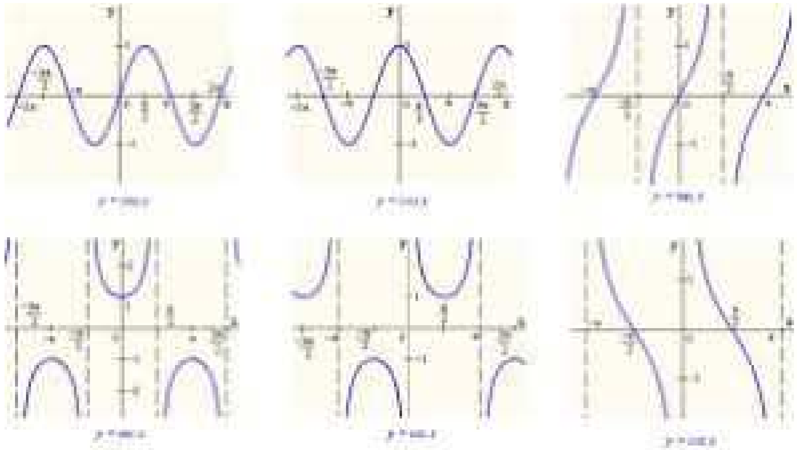
Observemos que son funciones periódicas y que $\cos(x)=\operatorname{sen}(x+\frac{\pi}{2})\ \ \forall x\in R$



Función recíprocas trigonométricas: cosecante, secante y cotangente.

$$\csc(x)=\frac{1}{\operatorname{sen}(x)}\ ,\ \sec(x)=\frac{1}{\cos(x)}\ \text{ y }\ \cot(x)=\frac{\cos(x)}{\operatorname{sen}(x)}\ .$$

Todas son periódicas, las dos primeras de período 2π y la cotangente de período π.



Identidades trigonométricas

1) $\cos^2 x+\operatorname{sen}^2 x=1$ identidad Pitagórica

2) $1+\tan^2 x=\dfrac{1}{\cos^2 x}=\sec^2 x$

3) $1+\cot^2 x=\dfrac{1}{\operatorname{sen}^2 x}=\csc^2 x$

4) $\cos(x\pm y)=\cos x\cos y\mp\operatorname{sen} x\ \operatorname{sen} y$ y $\operatorname{sen}(x\pm y)=\operatorname{sen} x\cos y\pm\cos x\ \operatorname{sen} y$

5) $\cos x+\cos y=2\cos\dfrac{x+y}{2}\cos\dfrac{x-y}{2}$ y $\cos x-\cos y=-2\operatorname{sen}\dfrac{x+y}{2}\operatorname{sen}\dfrac{x-y}{2}$

6) $\operatorname{sen} x+\operatorname{sen} y=2\operatorname{sen}\dfrac{x+y}{2}\cos\dfrac{x-y}{2}$ y $\operatorname{sen} x-\operatorname{sen} y=2\cos\dfrac{x+y}{2}\operatorname{sen}\dfrac{x-y}{2}$

7) $\cos(2x)=\cos^2 x-\operatorname{sen}^2 x$ y $\operatorname{sen}(2x)=2\operatorname{sen} x\cos x$

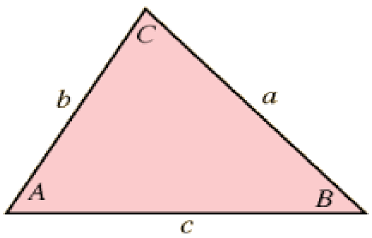
8) $\cos^2 x=\dfrac{1+\cos 2x}{2}$ y $\operatorname{sen}^2 x=\dfrac{1-\cos 2x}{2}$

Para algunas demostraciones puede ser de utilidad las igualdades válidas para todo par de números reales:

$$x=\frac{x+y}{2}+\frac{x-y}{2}\quad \text{e} \quad y=\frac{x+y}{2}-\frac{x-y}{2}$$

Ley de los cosenos

$$c^2=a^2+b^2-2ab\cos C$$



Ley de los senos

$$\frac{senA}{a}=\frac{senB}{b}=\frac{senC}{c}$$

Gráfica de una función definida a partir de una función dada

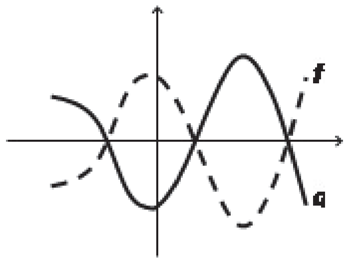
La gráfica de una función f permite determinar la gráfica de nuevas funciónes, definida a partir de f. Analizaremos algunos casos.

Traslaciones o reflexiones respecto de una recta.

➢ $g(x) = -f(x)$

$x \in Dom\,(g) \Leftrightarrow x \in Dom\,(f)$, $\qquad (x, y) \in G_f \Leftrightarrow (x, -y) \in G_g$

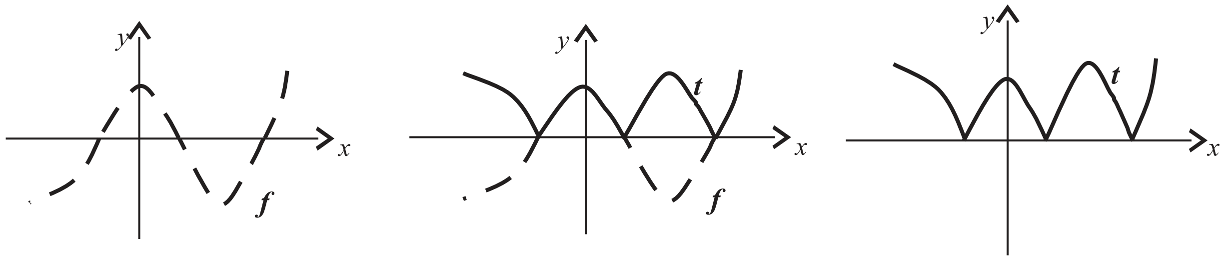
La gráfica de g se obtiene a partir de la gráfica de f, efectuando a la misma una reflexión respecto del eje x, como se indica en la figura.



Observemos que tanto f como $-f$ tienen los mismos ceros, es decir que se anulan para los mismos valores de x.
En la gráfica, vemos que cortan al eje x en los mismos puntos.
Analizar el recorrido de g.
Por ejemplo si $\text{Rec}(f) = [c, d] \Leftrightarrow \text{Rec}\,(g) = [-d, -c]$

➢ $t(x) = |\,f(x)\,|$ $\qquad x \in Dom\,(t) \Leftrightarrow x \in Dom\,(f)$

Si x es tal que $f(x) \geq 0$, entonces $t(x) = |\,f(x)\,| = f(x)$. Así $(x, y) \in G_f \Leftrightarrow (x, y) \in G_t$. Por lo tanto, para estos valores de x la gráfica de f y t coinciden.
Si x es tal que $f(x) < 0$, entonces $t(x) = |\,f(x)\,| = -f(x)$. Así $(x, y) \in G_f \Leftrightarrow (x, -y) \in G_t$. Luego, para dichos valores de x, la gráfica de t se obtiene efectuando a la gráfica de f una reflexión respecto del eje x.



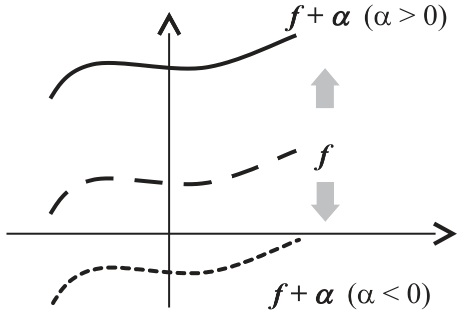
Por ejemplo,
si $\text{Rec}(f) = [c, d]$ con $c \geq 0 \Rightarrow \text{Rec}\,(t) = \text{Rec}\,(f)$; si $\text{Rec}(f) = [c, d]$ con $c < 0$ y $d > 0 \Rightarrow \text{Rec}\,(t) = [0, d]$.

➢ $h(x) = f(x) + \alpha$, $\qquad x \in Dom\,(h) \Leftrightarrow x \in Dom\,(f)$

$$(x, y) \in G_f \Leftrightarrow (x, y + \alpha) \in G_h$$

En consecuencia:

- Si $\boxed{\alpha > 0}$ la gráfica de h se obtiene *trasladando verticalmente hacia arriba* α unidades la gráfica de f .
- Si $\boxed{\alpha < 0}$ la gráfica de h se obtiene *trasladando verticalmente hacia abajo* $|\alpha|$ unidades la gráfica de f .
- Recorrido de h. Por ejemplo, si $\text{Rec}(f) = [c, d] \Rightarrow \text{Rec}\,(h) = [c + \alpha, d + \alpha]$

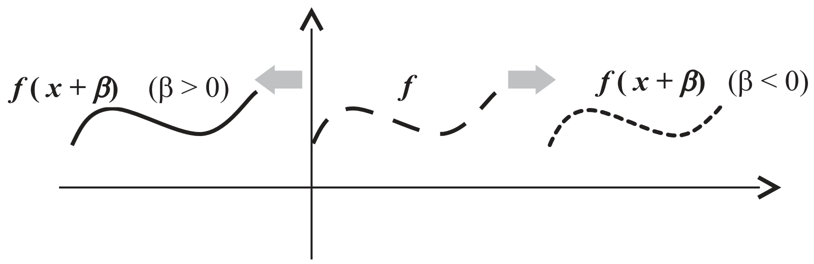


➢ $p(x) = f(x + \beta)$

$x \in \text{Dom}(f) \Leftrightarrow (x - \beta) \in \text{Dom}(p)$

$$(x, y) \in G_f \Leftrightarrow x \in Dom(f),\ y = f(x) = p(x - \beta) \Leftrightarrow (x - \beta, y) \in G_p$$

- La gráfica de p se obtiene *trasladando horizontalmente* $|\beta|$ *unidades* la gráfica de f
  - *hacia la izquierda* si $\boxed{\beta > 0}$
  - *hacia la derecha* si $\boxed{\beta < 0}$
- El recorrido $\text{Rec}(p) = \text{Rec}\,(f)$



Cambio de tamaño y reflexión. Estudiaremos $f(cx)$, $c \cdot f(x)$ para cierto $\boxed{c \in R}$.
Para $\boxed{c > 1}$

$$y = c \cdot f(x) \text{ dilata o estira verticalmente la } Gf$$

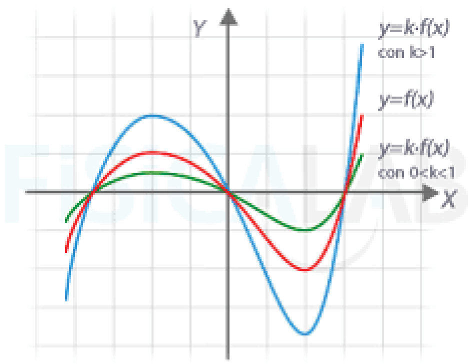
$$y = \frac{1}{c} \cdot f(x) \text{ comprime verticalmente la } Gf$$

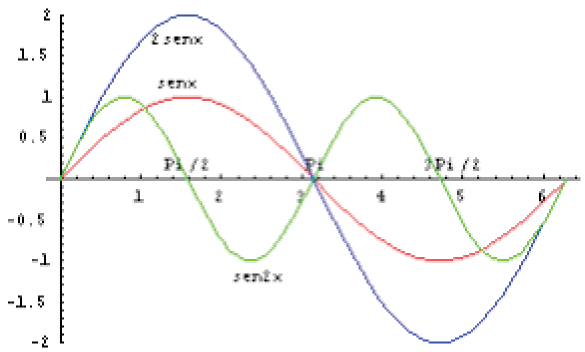
$$y = f(cx) \text{ comprime horizontalmente la } Gf$$

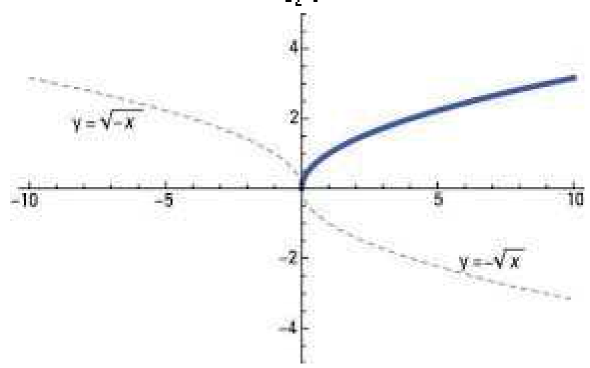
$$y = f\left(\frac{1}{c}x\right) \text{ dilata o estira horizontalmente la } Gf$$

Para $\boxed{c = -1}$

$y = -f(x)$ refleja la *Gf* respecto del eje *x*, ya estudiado.
$y = f(-x)$ refleja la *Gf* respecto del eje *y*.







Ejercicio: $f(|x|)$

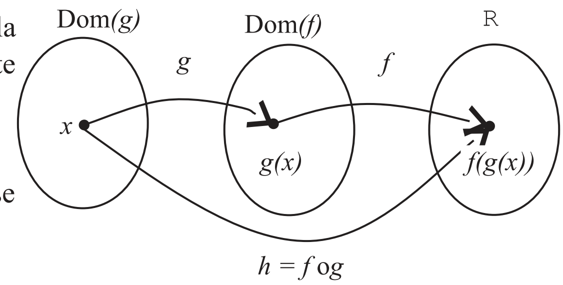
Composición de funciones

➢ Dadas dos funciones $f:\text{Dom}(f)\to R$ y $g:\text{Dom}(g)\to R$, es posible definir una nueva función *h*, que se denomina ***función compuesta de f con g*** mediante la siguiente ley

$$h(x)=f(g(x))$$

A la función compuesta de *f* con *g* se la nota $h=f\circ g$ $\boxed{(f\circ g)(x)=f(g(x))}$

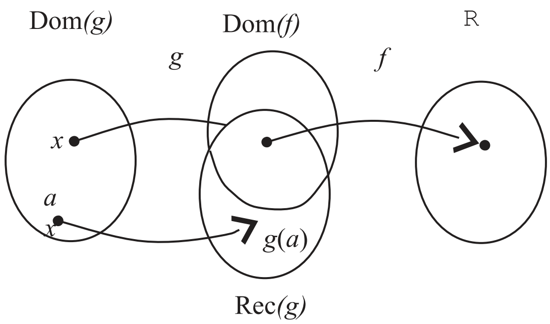
Para calcular la función compuesta $(f\circ g)(x)$, primero se calcula *g*(*x*) y luego se evalúa *f* en *g*(*x*), como se observa en el siguiente diagrama.



Es claro que para que este cálculo tenga sentido es necesario que se verifique:

- *x* pertenezca al Dom(*g*),
- *g*(*x*) pertenezca al Dom(*f*),

ya que si elegimos un elemento *a* del dominio de *g* tal que *g*(*a*) no sea un elemento del Dom(*f*), no podremos aplicarle dicha función, como se observa en la siguiente figura.



Por lo tanto:

$$\boxed{\text{Dom}(f\circ g)=\{x\in\text{Dom}(f):\ g(x)\in\text{Dom}(f)\}}$$

Ejemplo

Sean las funciones $f(x)=x^2$ y $g(x)=x+2$, determine el dominio y ley de $f\circ g$ y $g\circ f$.

***Observación*:** Surge de este ejemplo que en general:

$$\boxed{f\circ g\neq g\circ f}$$

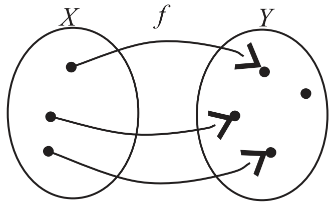
Ejemplo 3

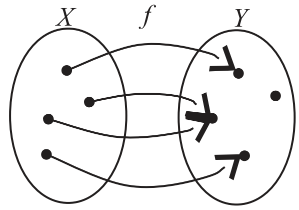
Sean las funciones $f(x)=\dfrac{1}{x-2}$ y $g(x)=\sqrt{x}$, determine dominio y ley de $f\circ g$ y $g\circ f$.

Funciones inversas

➢ ***Definición*:** Decimos que una función *f* es ***inyectiva*** cuando a todo par de elementos distintos del dominio le corresponden distintas imágenes, o sea, $x_1,\ x_2\in\text{Dom}(f),\ x_1\neq x_2\ \Rightarrow\ f(x_1)\neq f(x_2)$.

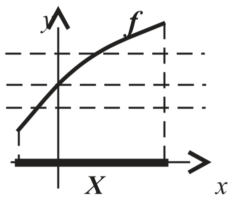
O bien: $x_1,\ x_2\in\text{Dom}(f),\ f(x_1)=f(x_2)\ \Rightarrow\ x_1=x_2$



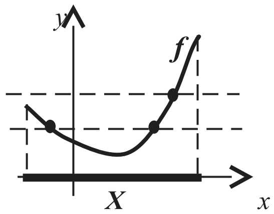


f es una función *inyectiva* *f* **no** es una función *inyectiva*

En una función *inyectiva*, toda recta horiontal corta a la gráfica de *f* a lo sumo en un punto.



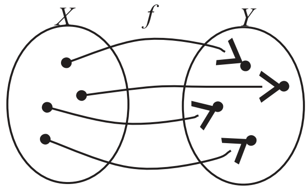
f es una función *inyectiva*

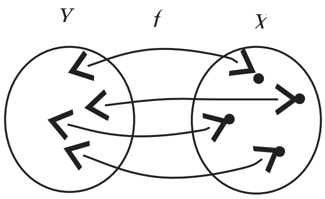


f **no** es *inyectiva*

Si existe una recta horizontal que corta a la gráfica de una función en más de un punto, la función **no** es inyectiva, esto se observa en la figura de la derecha.

- ***Definición*:** Decimos que una función *f* es ***biyectiva*** cuando es *sobreyectiva* e *inyectiva*. Se dice en este caso que existe una *correspondencia biunívoca* o *uno a uno* entre el dominio y el codominio de la función *f*.





Cuando *f* es biyectiva podemos asignar a cada $y \in \operatorname{Re}c(f)$ su única preimagen $x \in \operatorname{Dom}(f)$ mediante una función que llamaremos inversa de *f*.

- ***Definición*:** Sea *f* una función inyectiva con dominio *A* y recorrido *B* entonces su función inversa f^{-1} con dominio *B* y recorrido *A* se define para cada $y \in B$

$$f^{-1}(y) = x \Leftrightarrow f(x) = y$$

Esta definición dice que si *f* mapea *x* en *y*, entonces f^{-1} mapea *y* en *x,* si *f* no fuera inyectiva, f^{-1} no estaría bien definida.

Gráfica de la inversa: $(x, y) \in Gf \Leftrightarrow f(x) = y \Leftrightarrow f^{-1}(y) = x \Leftrightarrow (y, x) \in Gf^{-1}$

Pero el punto *(y,x)* se obtiene de reflejar *(x,y)* respecto de la recta de ecuación *y=x*. Luego la Gf^{-1} se obtiene reflejando la *Gf* respecto de la recta *y=x*. O sea las gráficas de *f* y f^{-1} son simétricas respecto a la gráfica de la función identidad.

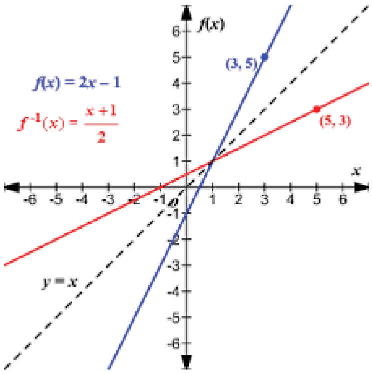
Además $\operatorname{Dom}(f^{-1}) = \operatorname{Rec}(f)$ *y* $\operatorname{Rec}(f^{-1}) = \operatorname{Dom}(f)$.

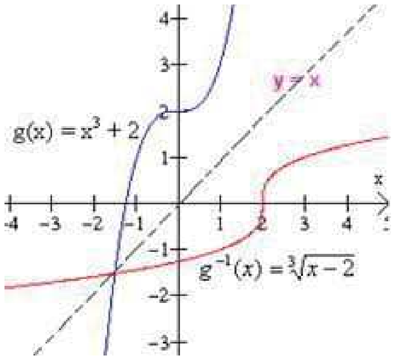
Como $f^{-1}(y) = x \Leftrightarrow f(x) = y$ resulta que $f^{-1}(f(x)) = x \Leftrightarrow f(f^{-1}(y)) = y$. Es decir la composición de *f* con f^{-1} y de f^{-1} con *f* es la función identidad

$$f^{-1} \circ f = id : A \to A \quad \text{y} \quad f \circ f^{-1} : id : B \to B$$

Por ejemplo: 1) $f(x) = 2x - 1$ y $f^{-1}(x) = \dfrac{x+1}{2}$.

2) $f(x) = x^3 + 2$ y $f^{-1}(x) = \sqrt[3]{x-2}$.





Cuando *f* no es inyectiva podemos restringir el dominio a un subconjunto donde sí lo sea, y definir su inversa, por ejemplo la función cuadrática no es inyectiva en *R* pero si lo es en R_0^+ , $f(x)=x^2$ si $x\geq 0$ y $f^{-1}(x)=\sqrt[2]{x}$