4. Continuidad

La mayor parte de las funciones con las que hemos venido trabajando, tienen una importante propiedad, que es la continuidad.

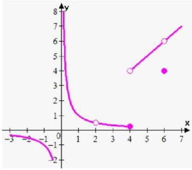
4. Continuidad

La mayor parte de las funciones con las que hemos venido trabajando, tienen una importante propiedad, que es la continuidad.

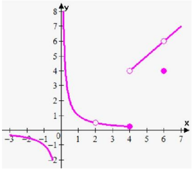
Intuitivamente, la continuidad de una función significa que pequeños cambios en x ocasionan pequeñas cambios en sus imágenes, y no, por ejemplo, un salto brusco de su valor. La gráfica que la representa ”no se rompe”.

Dada una función f y un punto a, la idea de límite de la función f en el punto a se desvincula de la existencia del valor $f(a)$. La función puede o no tener límite en el punto, existir o no $f(a)$, en el caso en que ambos existan, pueden tener diferentes valores, o pueden ambos existir y coincidir.

Dada una función f y un punto a, la idea de límite de la función f en el punto a se desvincula de la existencia del valor $f(a)$. La función puede o no tener límite en el punto, existir o no $f(a)$, en el caso en que ambos existan, pueden tener diferentes valores, o pueden ambos existir y coincidir.



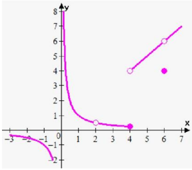
Dada una función f y un punto a, la idea de límite de la función f en el punto a se desvincula de la existencia del valor $f(a)$. La función puede o no tener límite en el punto, existir o no $f(a)$, en el caso en que ambos existan, pueden tener diferentes valores, o pueden ambos existir y coincidir.



Esta función verifica:

- f no está definida en 2, pero existe $\lim\limits_{x \to 2} f(x) = \frac{1}{2}$

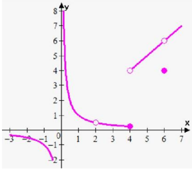
Dada una función f y un punto a, la idea de límite de la función f en el punto a se desvincula de la existencia del valor $f(a)$. La función puede o no tener límite en el punto, existir o no $f(a)$, en el caso en que ambos existan, pueden tener diferentes valores, o pueden ambos existir y coincidir.



Esta función verifica:

- f no está definida en 2, pero existe $\lim\limits_{x\to 2} f(x) = \frac{1}{2}$
- f no está definida en 0 y no existe $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$

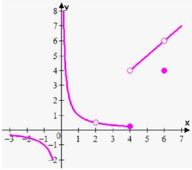
Dada una función f y un punto a, la idea de límite de la función f en el punto a se desvincula de la existencia del valor $f(a)$. La función puede o no tener límite en el punto, existir o no $f(a)$, en el caso en que ambos existan, pueden tener diferentes valores, o pueden ambos existir y coincidir.



Esta función verifica:

- f no está definida en 2, pero existe $\lim\limits_{x \to 2} f(x) = \frac{1}{2}$
- f no está definida en 0 y no existe $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$
- f está definida en 6 y existe $\lim\limits_{x \to 6} f(x) = 6$

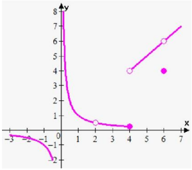
Dada una función f y un punto a, la idea de límite de la función f en el punto a se desvincula de la existencia del valor $f(a)$. La función puede o no tener límite en el punto, existir o no $f(a)$, en el caso en que ambos existan, pueden tener diferentes valores, o pueden ambos existir y coincidir.



Esta función verifica:

- f no está definida en 2, pero existe $\lim\limits_{x \to 2} f(x) = \frac{1}{2}$
- f no está definida en 0 y no existe $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$
- f está definida en 6 y existe $\lim\limits_{x \to 6} f(x) = 6 \neq f(6) = 4$

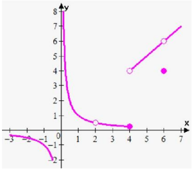
Dada una función f y un punto a, la idea de límite de la función f en el punto a se desvincula de la existencia del valor $f(a)$. La función puede o no tener límite en el punto, existir o no $f(a)$, en el caso en que ambos existan, pueden tener diferentes valores, o pueden ambos existir y coincidir.



Esta función verifica:

- f no está definida en 2, pero existe $\lim\limits_{x \to 2} f(x) = \frac{1}{2}$
- f no está definida en 0 y no existe $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$
- f está definida en 6 y existe $\lim\limits_{x \to 6} f(x) = 6 \neq f(6) = 4$
- f está definida en 4, no existe $\lim\limits_{x \to 4} f(x)$

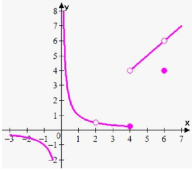
Dada una función f y un punto a, la idea de límite de la función f en el punto a se desvincula de la existencia del valor $f(a)$. La función puede o no tener límite en el punto, existir o no $f(a)$, en el caso en que ambos existan, pueden tener diferentes valores, o pueden ambos existir y coincidir.



Esta función verifica:

- f no está definida en 2, pero existe $\lim\limits_{x \to 2} f(x) = \frac{1}{2}$
- f no está definida en 0 y no existe $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$
- f está definida en 6 y existe $\lim\limits_{x \to 6} f(x) = 6 \neq f(6) = 4$
- f está definida en 4, no existe $\lim\limits_{x \to 4} f(x)$ pues existen los límites laterales pero $\lim\limits_{x \to 4^-} f(x) = \frac{1}{4} \neq \lim\limits_{x \to 4^+} f(x) = 4$

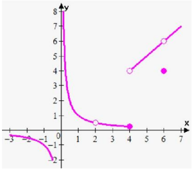
Dada una función f y un punto a, la idea de límite de la función f en el punto a se desvincula de la existencia del valor $f(a)$. La función puede o no tener límite en el punto, existir o no $f(a)$, en el caso en que ambos existan, pueden tener diferentes valores, o pueden ambos existir y coincidir.



Esta función verifica:

- f no está definida en 2, pero existe $\lim\limits_{x\to 2} f(x) = \frac{1}{2}$
- f no está definida en 0 y no existe $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$
- f está definida en 6 y existe $\lim\limits_{x\to 6} f(x) = 6 \neq f(6) = 4$
- f está definida en 4, no existe $\lim\limits_{x\to 4} f(x)$ pues existen los límites laterales pero $\lim\limits_{x\to 4^-} f(x) = \frac{1}{4} \neq \lim\limits_{x\to 4^+} f(x) = 4$
- f está definida en 5, existe $\lim\limits_{x\to 5} f(x)$

Dada una función f y un punto a, la idea de límite de la función f en el punto a se desvincula de la existencia del valor $f(a)$. La función puede o no tener límite en el punto, existir o no $f(a)$, en el caso en que ambos existan, pueden tener diferentes valores, o pueden ambos existir y coincidir.



Esta función verifica:

- f no está definida en 2, pero existe $\lim\limits_{x \to 2} f(x) = \frac{1}{2}$
- f no está definida en 0 y no existe $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$
- f está definida en 6 y existe $\lim\limits_{x \to 6} f(x) = 6 \neq f(6) = 4$
- f está definida en 4, no existe $\lim\limits_{x \to 4} f(x)$ pues existen los límites laterales pero $\lim\limits_{x \to 4^-} f(x) = \frac{1}{4} \neq \lim\limits_{x \to 4^+} f(x) = 4$
- f está definida en 5, existe $\lim\limits_{x \to 5} f(x) = 5 = f(5)$.

Si existe $f(a)$ y existe el límite (finito) de f en a y además ambos valores coinciden, se dice que la función f es *continua en* a.

4.1 Definición de Continuidad

Definición (Continuidad en un punto)

Sean f una función y a un número real, decimos que la función f es continua en a, si y sólo si,

1. existe el valor $f(a)$,
2. existe el valor $\lim_{x \to a} f(x)$ (finito),
3. $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$.

Definición (Continuidad en un punto)

Sean f una función y a un número real, decimos que la función f es continua en a, si y sólo si,

1. existe el valor $f(a)$,
2. existe el valor $\lim_{x \to a} f(x)$ (finito),
3. $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$.

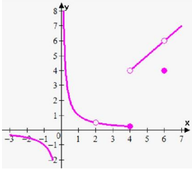
Si la función no es continua en el punto a, o sea, alguna de las tres condiciones no se cumple, decimos que f es **discontinua** en a.

DEFINICIÓN (CONTINUIDAD EN UN PUNTO)

Sean f una función y a un número real, decimos que la función f es continua en a, si y sólo si,

1. existe el valor $f(a)$,
2. existe el valor $\lim_{x \to a} f(x)$ (finito),
3. $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$.

Si la función no es continua en el punto a, o sea, alguna de las tres condiciones no se cumple, decimos que f es **discontinua** en a.



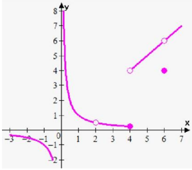
- f es discontinua en 2
- f es discontinua en 4
- f es discontinua en 6

Definición (Continuidad en un punto)

Sean f una función y a un número real, decimos que la función f es continua en a, si y sólo si,

1. existe el valor $f(a)$,
2. existe el valor $\lim_{x \to a} f(x)$ (finito),
3. $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$.

Si la función no es continua en el punto a, o sea, alguna de las tres condiciones no se cumple, decimos que f es **discontinua** en a.



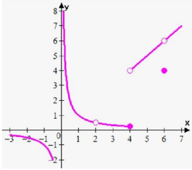
- f es discontinua en 2
- f es discontinua en 4
- f es discontinua en 6
- f es continua en 5

Definición (Continuidad en un punto)

Sean f una función y a un número real, decimos que la función f es continua en a, si y sólo si,

1. existe el valor $f(a)$,
2. existe el valor $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ (finito),
3. $\lim\limits_{x\to a} f(x) = f(a)$.

Si la función no es continua en el punto a, o sea, alguna de las tres condiciones no se cumple, decimos que f es **discontinua** en a.



- f es discontinua en 2
- f es discontinua en 4
- f es discontinua en 6
- f es continua en 5
- f es continua en a para todo $a \in (4,6)$??

Definición (Continuidad en un conjunto)

Si la función f es continua en todo punto de un conjunto A, se dice que f es continua en el conjunto A.

Definición (Continuidad en un conjunto)

Si la función f es continua en todo punto de un conjunto A, se dice que f es continua en el conjunto A.

En términos de entornos,

Definición

Decimos que f es continua en a, si y solamente si, dado $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$, tal que si

$$|x-a| < \delta \;\Rightarrow\; |f(x)-f(a)| < \varepsilon \; .$$

Definición (Continuidad en un conjunto)

Si la función f es continua en todo punto de un conjunto A, se dice que f es continua en el conjunto A.

En términos de entornos,

Definición

Decimos que f es continua en a, si y solamente si, dado $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$, tal que si

$$|x-a| < \delta \Rightarrow |f(x)-f(a)| < \varepsilon \; .$$

Respecto de la definición de límite, se han realizado dos modificaciones:

1. Se ha reemplazado el valor ℓ por el número $f(a)$ y
2. la condición se debe verificar en el entorno completo, ya que f debe estar definida en el punto a, y en dicho punto vale, para todo $\varepsilon > 0$,

$$|f(a)-f(a)| = 0 < \varepsilon \; .$$

Definición (Continuidad lateral)

Una función f se dice continua por izquierda (respectivamente, por derecha) en el punto a, si existe el valor de $f(a)$, el límite lateral por izquierda (respectivamente, por derecha) de la función allí, y ambos coinciden.

1. existe el valor $f(a)$, (existe el valor $f(a)$),
2. existe el valor $\lim_{x \to a^-} f(x)$, (existe el valor $\lim_{x \to a^+} f(x)$),
3. $\lim_{x \to a^-} f(x) = f(a)$, $(\lim_{x \to a^+} f(x) = f(a))$.

Cuando se trata de un intervalo cerrado (o semiabierto), la continuidad en los extremos se considera continuidad lateral.

Definición (Continuidad lateral)

Una función f se dice continua por izquierda (respectivamente, por derecha) en el punto a, si existe el valor de $f(a)$, el límite lateral por izquierda (respectivamente, por derecha) de la función allí, y ambos coinciden.

1. existe el valor $f(a)$, (existe el valor $f(a)$),
2. existe el valor $\lim\limits_{x\to a^-} f(x)$, (existe el valor $\lim\limits_{x\to a^+} f(x)$),
3. $\lim\limits_{x\to a^-} f(x) = f(a)$, ($\lim\limits_{x\to a^+} f(x) = f(a)$).

Cuando se trata de un intervalo cerrado (o semiabierto), la continuidad en los extremos se considera continuidad lateral.

Definición (Función continua)

Se dice que una función es continua si es continua en todos los puntos de su dominio.

Ejemplo

1. La función lineal $f(x) = mx + h$ es continua, pues existe $\lim\limits_{x\to a} mx + h = ma + h = f(a)$, $\forall a \in \mathrm{Dom}(f) = \mathbb{R}$.

EJEMPLO

1. La función lineal $f(x) = mx + h$ es continua, pues existe $\lim_{x \to a} mx + h = ma + h = f(a)$, $\forall a \in \mathrm{Dom}(f) = \mathbb{R}$.
2. Los polinomios son funciones continuas pues existe $\lim_{x \to a} p(x) = p(a)$, $\forall a \in \mathrm{Dom}(p) = \mathbb{R}$.

Ejemplo

1. La función lineal $f(x) = mx + h$ es continua, pues existe $\lim\limits_{x \to a} mx + h = ma + h = f(a)$, $\forall a \in \mathrm{Dom}(f) = \mathbb{R}$.
2. Los polinomios son funciones continuas pues existe $\lim\limits_{x \to a} p(x) = p(a)$, $\forall a \in \mathrm{Dom}(p) = \mathbb{R}$. Las funciones racionales son continuas pues existe $\lim\limits_{x \to a} \frac{p(x)}{q(x)} = \frac{p(a)}{q(a)}$, $\forall a \in \mathrm{Dom}(\frac{p}{q})$.

Ejemplo

1. La función lineal $f(x) = mx + h$ es continua, pues existe $\lim_{x \to a} mx + h = ma + h = f(a)$, $\forall a \in \text{Dom}(f) = \mathbb{R}$.
2. Los polinomios son funciones continuas pues existe $\lim_{x \to a} p(x) = p(a)$, $\forall a \in \text{Dom}(p) = \mathbb{R}$. Las funciones racionales son continuas pues existe $\lim_{x \to a} \frac{p(x)}{q(x)} = \frac{p(a)}{q(a)}$, $\forall a \in \text{Dom}(\frac{p}{q})$.
3. Las funciones seno y coseno son continuas, pues existen $\lim_{x \to a} \operatorname{sen}(x) = \operatorname{sen}(a)$ y $\lim_{x \to a} \cos(x) = \cos(a)$, $\forall a \in \mathbb{R}$.

Ejemplo

1. La función lineal $f(x) = mx + h$ es continua, pues existe $\lim_{x \to a} mx + h = ma + h = f(a)$, $\forall a \in \mathrm{Dom}(f) = \mathbb{R}$.
2. Los polinomios son funciones continuas pues existe $\lim_{x \to a} p(x) = p(a)$, $\forall a \in \mathrm{Dom}(p) = \mathbb{R}$. Las funciones racionales son continuas pues existe $\lim_{x \to a} \frac{p(x)}{q(x)} = \frac{p(a)}{q(a)}$, $\forall a \in \mathrm{Dom}(\frac{p}{q})$.
3. Las funciones seno y coseno son continuas, pues existen $\lim_{x \to a} \mathrm{sen}(x) = \mathrm{sen}(a)$ y $\lim_{x \to a} \cos(x) = \cos(a)$, $\forall a \in \mathbb{R}$. Y las demás funciones trigonométricas, son continuas.

Ejemplo

1. La función lineal $f(x) = mx + h$ es continua, pues existe $\lim\limits_{x \to a} mx + h = ma + h = f(a)$, $\forall a \in \text{Dom}(f) = \mathbb{R}$.
2. Los polinomios son funciones continuas pues existe $\lim\limits_{x \to a} p(x) = p(a)$, $\forall a \in \text{Dom}(p) = \mathbb{R}$. Las funciones racionales son continuas pues existe $\lim\limits_{x \to a} \frac{p(x)}{q(x)} = \frac{p(a)}{q(a)}$, $\forall a \in \text{Dom}(\frac{p}{q})$.
3. Las funciones seno y coseno son continuas, pues existen $\lim\limits_{x \to a} \text{sen}(x) = \text{sen}(a)$ y $\lim\limits_{x \to a} \cos(x) = \cos(a)$, $\forall a \in \mathbb{R}$. Y las demás funciones trigonométricas, son continuas.
4. La función $f(x) = |x|$ es continua.

Ejemplo

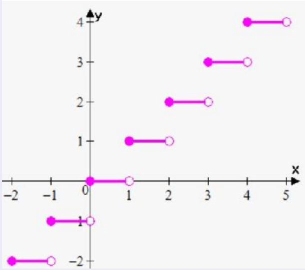
1. La función lineal $f(x) = mx + h$ es continua, pues existe $\lim\limits_{x \to a} mx + h = ma + h = f(a)$, $\forall a \in \text{Dom}(f) = \mathbb{R}$.
2. Los polinomios son funciones continuas pues existe $\lim\limits_{x \to a} p(x) = p(a)$, $\forall a \in \text{Dom}(p) = \mathbb{R}$. Las funciones racionales son continuas pues existe $\lim\limits_{x \to a} \frac{p(x)}{q(x)} = \frac{p(a)}{q(a)}$, $\forall a \in \text{Dom}(\frac{p}{q})$.
3. Las funciones seno y coseno son continuas, pues existen $\lim\limits_{x \to a} \text{sen}(x) = \text{sen}(a)$ y $\lim\limits_{x \to a} \cos(x) = \cos(a)$, $\forall a \in \mathbb{R}$. Y las demás funciones trigonométricas, son continuas.
4. La función $f(x) = |x|$ es continua.
5. la función (signo) $f(x) = \frac{x}{|x|}$ es continua en todo $x \neq 0$ y no es continua en el punto $x = 0$. Lo mismo si la función se define de cualquier manera en el punto 0.

Ejemplo

6. La función $f(x) = [x]$, parte entera de x, es continua en $\mathbb{R} - \mathbb{Z}$, y no es continua en $\mathbb{Z}$.

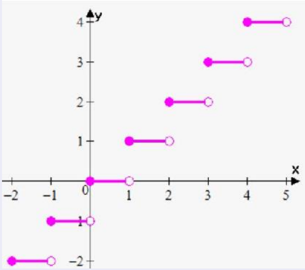
Ejemplo

6. La función $f(x) = [x]$, parte entera de x, es continua en $\mathbb{R} - \mathbb{Z}$, y no es continua en $\mathbb{Z}$.



EJEMPLO

6. La función $f(x) = [x]$, parte entera de x, es continua en $\mathbb{R} - \mathbb{Z}$, y no es continua en $\mathbb{Z}$.



En los números enteros, la función es continua por derecha, pero no por izquierda pues si $k \in \mathbb{Z}$ es

$$\lim_{x \to k^+} [x] = k = [k] \qquad \lim_{x \to k^-} [x] = k - 1 \neq [k].$$

4.2 Tipos de Discontinuidades

Una función f es discontinua en a cuando no se cumple una (o más de una) de las condiciones de la definición.

Esto es, f es discontinua en a si:

- no existe $f(a)$, o
- no existe el $\lim_{x \to a} f(x)$, o
- ambos existen pero $\lim_{x \to a} f(x) \neq f(a)$.

4.2 Tipos de Discontinuidades

Una función f es discontinua en a cuando no se cumple una (o más de una) de las condiciones de la definición.
Esto es, f es discontinua en a si:

- no existe $f(a)$, o
- no existe el $\lim_{x \to a} f(x)$, o
- ambos existen pero $\lim_{x \to a} f(x) \neq f(a)$.

Haremos la siguiente clasificación, según si existe o no, el límite cuando x tiende a a:

- discontinuidad evitable
- discontinuidad inevitable y discontinuidad esencial

Discontinuidades Evitables

Una función presenta una discontinuidad evitable en un punto, si existe $\lim_{x \to a} f(x)$ pero no coincide con el valor de la función en el punto, que puede incluso no estar definido.

Discontinuidades Evitables

Una función presenta una discontinuidad evitable en un punto, si existe $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ pero no coincide con el valor de la función en el punto, que puede incluso no estar definido.

Se dice **evitable** pues, si f presenta una discontinuidad evitable en a, existe

$$\lim_{x\to a} f(x) = \ell$$

pero

$$\ell \neq f(a) \;\text{ o }\; \text{no existe}\, f(a).$$

Discontinuidades Evitables

Una función presenta una discontinuidad evitable en un punto, si existe $\lim_{x\to a} f(x)$ pero no coincide con el valor de la función en el punto, que puede incluso no estar definido.

Se dice **evitable** pues, si f presenta una discontinuidad evitable en a, existe

$$\lim_{x\to a} f(x) = \ell$$

pero

$$\ell \neq f(a) \;\text{ o }\; \text{no existe}\, f(a).$$

Definiendo una nueva función g de manera que

$$g(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } x \neq a \\ \ell & \text{si } x = a \end{cases}$$

resulta g una función continua en a, que coincide con f en los demás puntos.

EJEMPLO (DISCONTINUIDAD EVITABLE)

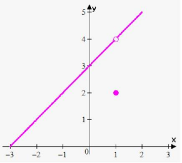
Consideremos la función

$$f(x) = \begin{cases} x+3 & \text{si } x \neq 1 \\ 2 & \text{si } x = 1 \end{cases}$$

EJEMPLO (DISCONTINUIDAD EVITABLE)

Consideremos la función

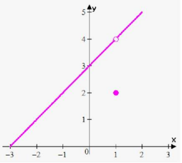
$$f(x) = \begin{cases} x+3 & \text{si } x \neq 1 \\ 2 & \text{si } x = 1 \end{cases}$$



EJEMPLO (DISCONTINUIDAD EVITABLE)

Consideremos la función

$$f(x) = \begin{cases} x+3 & \text{si } x \neq 1 \\ 2 & \text{si } x = 1 \end{cases}$$



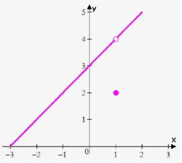
Esta función es continua en $\mathbb{R} - \{1\}$ por ser una función lineal y es discontinua en 1, ya que existe

$$\lim_{x \to 1} f(x) = 4$$

Ejemplo (Discontinuidad evitable)

Consideremos la función

$$f(x) = \begin{cases} x+3 & \text{si } x \neq 1 \\ 2 & \text{si } x = 1 \end{cases}$$



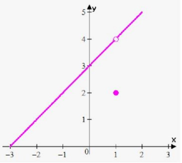
Esta función es continua en $\mathbb{R} - \{1\}$ por ser una función lineal y es discontinua en 1, ya que existe

$$\lim_{x \to 1} f(x) = 4 \neq f(1) = 2.$$

Ejemplo (Discontinuidad evitable)

Consideremos la función

$$f(x)=\begin{cases} x+3 & \text{si } x\neq 1\\ 2 & \text{si } x=1\end{cases}$$



Esta función es continua en $\mathbb{R}-\{1\}$ por ser una función lineal y es discontinua en 1, ya que existe

$$\lim_{x\to 1} f(x)=4\neq f(1)=2.$$

En este caso, es evitable, porque puede considerarse una nueva función g, definida por

$$g(x)=\begin{cases} x+3 & \text{si } x\neq 1\\ 4 & \text{si } x=1\end{cases}$$

que, por construcción es continua en 1.

Discontinuidades Inevitables de Salto Finito

Si para una función f y un punto a, no existe $\lim_{x\to a} f(x)$ pero sí existen ambos límites laterales en a, pero ellos no coinciden, se dice que la función tiene una discontinuidad inevitable de salto finito.

Discontinuidades Inevitables de Salto Finito

Si para una función f y un punto a, no existe $\lim_{x\to a} f(x)$ pero sí existen ambos límites laterales en a, pero ellos no coinciden, se dice que la función tiene una discontinuidad inevitable de salto finito.

En un punto donde una función presenta una discontiuidad inevitable de salto finito se suele llamar discontinuidad del salto la distancia entre los límites laterales en el punto.

Discontinuidades Inevitables de Salto Finito

Si para una función f y un punto a, no existe $\lim_{x \to a} f(x)$ pero sí existen ambos límites laterales en a, pero ellos no coinciden, se dice que la función tiene una discontinuidad inevitable de salto finito.

En un punto donde una función presenta una discontiuidad inevitable de salto finito se suele llamar discontinuidad del salto la distancia entre los límites laterales en el punto.

Ejemplo (Discontinuidad inevitable de salto finito)

La función

$$f(x) = \begin{cases} x+1 & \text{si } x \leq 2 \\ 4-x & \text{si } x > 2 \end{cases}$$

f es continua en $(-\infty, 2)$ y en $(2, +\infty)$ por ser lineal en cada subconjunto

Discontinuidades Inevitables de Salto Finito

Si para una función f y un punto a, no existe $\lim_{x\to a} f(x)$ pero sí existen ambos límites laterales en a, pero ellos no coinciden, se dice que la función tiene una discontinuidad inevitable de salto finito.

En un punto donde una función presenta una discontiuidad inevitable de salto finito se suele llamar discontinuidad del salto la distancia entre los límites laterales en el punto.

Ejemplo (Discontinuidad inevitable de salto finito)

La función

$$f(x) = \begin{cases} x+1 & \text{si } x \leq 2 \\ 4-x & \text{si } x > 2 \end{cases}$$

f es continua en $(-\infty, 2)$ y en $(2, +\infty)$ por ser lineal en cada subconjunto y presenta una discontinuidad inevitable de salto finito en el punto $a = 2$, pues

$$\lim_{x\to 2^-} f(x) = 3 \quad \text{y} \quad \lim_{x\to 2^+} f(x) = 2 \, .$$

Discontinuidades Inevitables de Salto Finito

Si para una función f y un punto a, no existe $\lim_{x\to a} f(x)$ pero sí existen ambos límites laterales en a, pero ellos no coinciden, se dice que la función tiene una discontinuidad inevitable de salto finito.

En un punto donde una función presenta una discontiuidad inevitable de salto finito se suele llamar discontinuidad del salto la distancia entre los límites laterales en el punto.

EJEMPLO (DISCONTINUIDAD INEVITABLE DE SALTO FINITO)

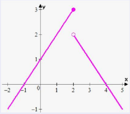
La función

$$f(x) = \begin{cases} x+1 & \text{si } x \leq 2 \\ 4-x & \text{si } x > 2 \end{cases}$$

f es continua en $(-\infty, 2)$ y en $(2, +\infty)$ por ser lineal en cada subconjunto y presenta una discontinuidad inevitable de salto finito en el punto $a = 2$, pues

$$\lim_{x\to 2^-} f(x) = 3 \quad \text{y} \quad \lim_{x\to 2^+} f(x) = 2 \ .$$

decimos que f tiene una discontinuidad inevitable de salto 1 (distancia entre sus límites laterales).

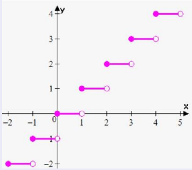


Ejemplo (Discontinuidad inevitable de salto finito)

La función parte entera, $[x]$, parte entera de x, tiene discontinuidades inevitables de salto uno (finito) en todo número entero.

Ejemplo (Discontinuidad inevitable de salto finito)

La función parte entera, $[x]$, parte entera de x, tiene discontinuidades inevitables de salto uno (finito) en todo número entero.



En efecto, si $k \in \mathbb{Z}$,

$$\lim_{x \to k^-} [x] = k - 1 \neq \lim_{x \to k^+} [x] = k \,.$$

Discontinuidades Inevitables de Salto Infinito

Una función tiene una discontinuidad inevitable de salto infinito en el punto a, si al menos uno de los dos límites laterales es infinito, y el otro existe finito o es infinito.

Discontinuidades Inevitables de Salto Infinito

Una función tiene una discontinuidad inevitable de salto infinito en el punto a, si al menos uno de los dos límites laterales es infinito, y el otro existe finito o es infinito.

Ejemplo (Discontinuidad inevitable de salto infinito)

La función

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x-1} & \text{si } x \neq 1 \\ k & \text{si } x = 1 \end{cases}$$

es continua en $(-\infty, 1)$ y en $(1, +\infty)$ por ser una homográfica (racional) en cada subconjunto

Discontinuidades Inevitables de Salto Infinito

Una función tiene una discontinuidad inevitable de salto infinito en el punto a, si al menos uno de los dos límites laterales es infinito, y el otro existe finito o es infinito.

Ejemplo (Discontinuidad inevitable de salto infinito)

La función

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x-1} & \text{si } x \neq 1 \\ k & \text{si } x = 1 \end{cases}$$

es continua en $(-\infty, 1)$ y en $(1, +\infty)$ por ser una homográfica (racional) en cada subconjunto y presenta una discontinuidad inevitable de salto infinito en 1 (no importa el valor $f(1) = k$).

Discontinuidades Inevitables de Salto Infinito

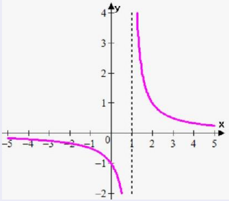
Una función tiene una discontinuidad inevitable de salto infinito en el punto a, si al menos uno de los dos límites laterales es infinito, y el otro existe finito o es infinito.

EJEMPLO (DISCONTINUIDAD INEVITABLE DE SALTO INFINITO)

La función

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x-1} & \text{si } x \neq 1 \\ k & \text{si } x = 1 \end{cases}$$

es continua en $(-\infty, 1)$ y en $(1, +\infty)$ por ser una homográfica (racional) en cada subconjunto y presenta una discontinuidad inevitable de salto infinito en 1 (no importa el valor $f(1) = k$).

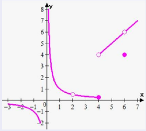


pues en este caso ambos límites laterales son infinitos.

$$\lim_{x \to 1^-} f(x) = -\infty \qquad \text{y} \qquad \lim_{x \to 1^+} f(x) = +\infty$$

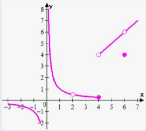
Ejemplo

La función de la figura presenta:



EJEMPLO

La función de la figura presenta:

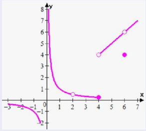


- una discontinuidad evitable en 2, pues f no está definida en 2 pero existe

$$\lim_{x \to 2} f(x) = \frac{1}{2}$$

Ejemplo

La función de la figura presenta:



- una discontinuidad evitable en 2, pues f no está definida en 2 pero existe

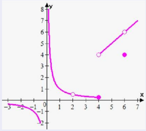
$$\lim_{x\to 2} f(x) = \frac{1}{2}$$

- una discontinuidad evitable en 6, pues existe límite pero no coincide con $f(6)$

$$\lim_{x\to 6} f(x) = 6 \neq f(6) = 4$$

EJEMPLO

La función de la figura presenta:



• una discontinuidad evitable en 2, pues f no está definida en 2 pero existe

$$\lim_{x\to 2} f(x) = \frac{1}{2}$$

• una discontinuidad evitable en 6, pues existe límite pero no coincide con $f(6)$

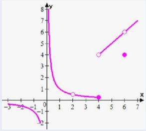
$$\lim_{x\to 6} f(x) = 6 \neq f(6) = 4$$

• una discontinuidad de salto finito en 4, pues existen los límites laterales pero son distintos

$$\lim_{x\to 4^-} f(x) = \frac{1}{4} \neq \lim_{x\to 4^+} f(x) = 4$$

Ejemplo

La función de la figura presenta:



- una discontinuidad evitable en 2, pues f no está definida en 2 pero existe

$$\lim_{x \to 2} f(x) = \frac{1}{2}$$

- una discontinuidad evitable en 6, pues existe límite pero no coincide con $f(6)$

$$\lim_{x \to 6} f(x) = 6 \neq f(6) = 4$$

- una discontinuidad de salto finito en 4, pues existen los límites laterales pero son distintos

$$\lim_{x \to 4^-} f(x) = \frac{1}{4} \neq \lim_{x \to 4^+} f(x) = 4$$

- una discontinuidad inevitable de salto infinito en el punto 0, pues

$$\lim_{x \to 0^-} f(x) = -\infty \qquad \text{y} \qquad \lim_{x \to 0^+} f(x) = +\infty$$

Discontinuidades Esenciales
Una función tiene una discontinuidad esencial en un punto, si allí la discontinuidad no es evitable, ni de salto finito o infinito. En el punto no existe uno de los límites laterales, finito ni infinito.

Discontinuidades Esenciales

Una función tiene una discontinuidad esencial en un punto, si allí la discontinuidad no es evitable, ni de salto finito o infinito. En el punto no existe uno de los límites laterales, finito ni infinito.

Ejemplo (Discontinuidad esencial)

La Función de Dirichlet,

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in \mathbb{Q} \\ 0 & \text{si } x \in \mathbb{I} \end{cases}$$

es una función discontinua en todo número real.

Discontinuidades Esenciales

Una función tiene una discontinuidad esencial en un punto, si allí la discontinuidad no es evitable, ni de salto finito o infinito. En el punto no existe uno de los límites laterales, finito ni infinito.

Ejemplo (Discontinuidad esencial)

La Función de Dirichlet,

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in \mathbb{Q} \\ 0 & \text{si } x \in \mathbb{I} \end{cases}$$

es una función discontinua en todo número real.

En efecto, dado $\varepsilon = \frac{1}{2}$, para todo $a \in \mathbb{Q}$, en todo $E(a, \delta)$ existen números irracionales, para los cuales

$$|f(x) - f(a)| = |0 - 1| = 1 > \tfrac{1}{2} = \varepsilon \ ,$$

Discontinuidades Esenciales
Una función tiene una discontinuidad esencial en un punto, si allí la discontinuidad no es evitable, ni de salto finito o infinito. En el punto no existe uno de los límites laterales, finito ni infinito.

Ejemplo (Discontinuidad esencial)

La Función de Dirichlet,

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in \mathbb{Q} \\ 0 & \text{si } x \in \mathbb{I} \end{cases}$$

es una función discontinua en todo número real.
En efecto, dado $\varepsilon = \frac{1}{2}$, para todo $a \in \mathbb{Q}$, en todo $E(a,\delta)$ existen números irracionales, para los cuales

$$|f(x) - f(a)| = |0-1| = 1 > \tfrac{1}{2} = \varepsilon \ ,$$

mientras que para todo $a \in \mathbb{I}$, en todo $E(a,\delta)$ existen números racionales, para los cuales

$$|f(x) - f(a)| = |1-0| = 1 > \tfrac{1}{2} = \varepsilon \ .$$

Discontinuidades Esenciales

Una función tiene una discontinuidad esencial en un punto, si allí la discontinuidad no es evitable, ni de salto finito o infinito. En el punto no existe uno de los límites laterales, finito ni infinito.

Ejemplo (Discontinuidad esencial)

La Función de Dirichlet,

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in \mathbb{Q} \\ 0 & \text{si } x \in \mathbb{I} \end{cases}$$

es una función discontinua en todo número real.
En efecto, dado $\varepsilon = \frac{1}{2}$, para todo $a \in \mathbb{Q}$, en todo $E(a,\delta)$ existen números irracionales, para los cuales

$$|f(x) - f(a)| = |0-1| = 1 > \tfrac{1}{2} = \varepsilon \ ,$$

mientras que para todo $a \in \mathbb{I}$, en todo $E(a,\delta)$ existen números racionales, para los cuales

$$|f(x) - f(a)| = |1-0| = 1 > \tfrac{1}{2} = \varepsilon \ .$$

Como en ningún punto la función es continua por no verificarse la condición de límites, siquiera límites laterales, la función tiene discontinuidades esenciales en todos los puntos.

Ejercicio

Con la función f del ejemplo anterior, mostrar que la función

$$g(x) = x \cdot f(x) = \begin{cases} x & \text{si } x \in \mathbb{Q} \\ 0 & \text{si } x \in \mathbb{I} \end{cases} \quad ,$$

es continua en $a = 0$, pero discontinua en todo $a \neq 0$.

Ejercicio

Con la función f del ejemplo anterior, mostrar que la función

$$g(x) = x \cdot f(x) = \begin{cases} x & \text{si } x \in \mathbb{Q} \\ 0 & \text{si } x \in \mathbb{I} \end{cases},$$

es continua en $a = 0$, pero discontinua en todo $a \neq 0$.
Para la continuidad en 0, recordar el teorema ApLC, considerar la función Dirichlet f está acotada en un entorno reducido de cero y la función $h(x) = x$ tiene $\lim\limits_{x \to 0} x = 0$, entonces

$$\lim_{x \to 0} g(x) = 0 = g(0)$$

Ejercicio

Con la función f del ejemplo anterior, mostrar que la función

$$g(x) = x \cdot f(x) = \begin{cases} x & \text{si } x \in \mathbb{Q} \\ 0 & \text{si } x \in \mathbb{I} \end{cases},$$

es continua en $a = 0$, pero discontinua en todo $a \neq 0$.
Para la continuidad en 0, recordar el teorema ApLC, considerar la función Dirichlet f está acotada en un entorno reducido de cero y la función $h(x) = x$ tiene $\lim_{x \to 0} x = 0$, entonces

$$\lim_{x \to 0} g(x) = 0 = g(0)$$

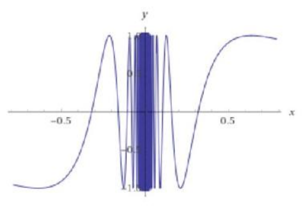
Probar que no existe $\lim_{x \to a} g(x)$ para $a \neq 0$.

Ejemplo (Otros ejemplos clásicos †)

1. La función

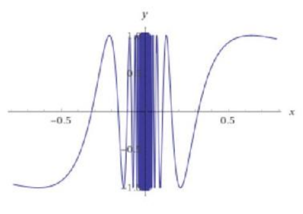
$$f(x) = \begin{cases} \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right) & \text{si } x \neq 0 \\ A & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

tiene una discontinuidad esencial en $a = 0$ pero es continua en todo $a \neq 0$.



Ejemplo (Otros ejemplos clásicos †)

1. La función
$$f(x) = \begin{cases} \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right) & \text{si } x \neq 0 \\ A & \text{si } x = 0 \end{cases}$$
tiene una discontinuidad esencial en $a = 0$ pero es continua en todo $a \neq 0$.



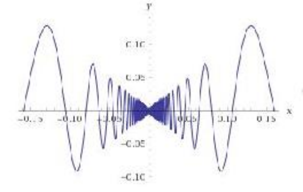
En efecto, la función f en $a = 0$ no tiene límite finito y como está acotada, tampoco límites infinitos. Por otro lado, es continua en todo punto distinto de cero, consecuencia del corolario sobre composición de funciones continuas.

Ejemplo

2. La función

$$g(x) = \begin{cases} x \cdot \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

es continua en todo $\mathbb{R}$.

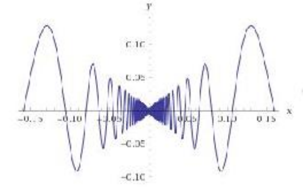


Ejemplo

2. La función

$$g(x) = \begin{cases} x \cdot \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

es continua en todo $\mathbb{R}$.



Es continua en $a = 0$, pues por el teorema ApLC, resulta

$$\lim_{x \to 0} g(x) = 0 = g(0)\ .$$

La continuidad en los demás puntos será consecuencia del corolario sobre composición de funciones continuas.