Operaciones. Problemas resueltos.

2. Defina la operación binaria cerrada $h : \mathbb{Q}^{+} \times \mathbb{Q}^{+} \to \mathbb{Q}^{+}$ dada por $h\left(a,b\right) = \frac{a}{b}$.

   a) Muestre que h no es conmutativa ni asociativa.

   b) Determine si h tiene algún elemento neutro.

Solución:

a) Para ver que h no es conmutativa basta con mostrar que existen dos elementos $a, b \in \mathbb{Q}^{+}$ para los cuales se tiene que $h\left(a,b\right) \neq h\left(b,a\right)$. Por ejemplo, $h\left(1,2\right) = \frac{1}{2}$, mientras que $h\left(2,1\right) = 2$. Análogamente, para ver que h no es asociativa, observemos que

$$h\left(h\left(1,2\right),2\right) = \frac{h\left(1,2\right)}{2} = \frac{\frac{1}{2}}{2} = \frac{1}{4},$$

mientras que

$$h\left(1,h\left(2,2\right)\right) = \frac{1}{h\left(2,2\right)} = \frac{1}{\frac{2}{2}} = 1.$$

b) Veamos que h no tiene elemento neutro. En efecto, si suponemos que e es un neutro para h, tenemos que $h\left(e,a\right) = h\left(a,e\right) = a$ para todo $a \in \mathbb{Q}^{+}$. En particular, $h\left(e,1\right) = \frac{e}{1} = 1$, i.e., e debe ser necesariamente igual a 1. Sin embargo, 1 no es neutro dado que, por ejemplo, $h\left(1,2\right) = \frac{1}{2} \neq 2$.

3. Cada una de las siguientes funciones $f : \mathbb{Z}\times\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ es una operación binaria cerrada en $\mathbb{Z}$. Determine los casos en los que f es conmutativa o asociativa.

   a) $f\left(x,y\right) = x + y - xy$

   b) $f\left(x,y\right) = \max\left\{x,y\right\}$, el máximo entre x e y

   c) $f\left(x,y\right) = x^{|y|}$

   d) $f\left(x,y\right) = x + y - 3$

Solución:

a) Notemos que

$$f\left(x,y\right) = x + y - xy = y + x - yx = f\left(y,x\right)$$

y, por lo tanto, f es conmutativa. Para mostrar que f es también asociativa, observemos que, si $x, y, z \in \mathbb{Z}$, tenemos que

$$\begin{aligned}
f\left(x,f\left(y,z\right)\right) &= x + f\left(y,z\right) - xf\left(y,z\right) \\
&= x + y + z - yz - x\left(y + z - yz\right) \\
&= x + y + z - yz - xy - xz + xyz \\
&= x + y - xy + z - \left(x + y + xy\right)z \\
&= f\left(f\left(x,y\right),z\right).
\end{aligned}$$

Luego, $f(x, f(y,z)) = f(f(x,y), z)$ para todo $x, y, z \in \mathbb{Z}$.

b) La función $f(x,y) = \max\{x,y\}$ es conmutativa y asociativa. La conmutatividad en inmediata, $\max\{x,y\} = \max\{y,x\}$. Para ver la asociatividad, notemos que, para todo $x, y, z \in \mathbb{Z}$

$$\max\{x, \max\{y,z\}\} = \max\{x,y,z\} = \max\{\max\{x,y\}, z\}.$$

c) La función $f(x,y) = x^{|y|}$ no es conmutativa ni tampoco asociativa. Por ejemplo, $f(1,2) \neq f(2,1)$ y

$$f(f(2,2), 3) = f(2,2)^{|3|} = \left(2^{|2|}\right)^{|3|} = 4^3 = 64,$$

mientras que

$$f(2, f(2,3)) = 2^{|f(2,3)|} = 2^{\left|2^{|3|}\right|} = 2^8 = 256.$$

d) La función $f(x,y) = x + y - 3$ es claramente conmutativa. Para mostrar que también es asociativa notemos que

$$\begin{aligned} f(f(x,y), z) &= f(x,y) + z - 3 \\ &= x + y - 3 + z - 3 \\ &= x + y + z - 6 \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} f(x, f(y,z)) &= x + f(y,z) - 3 \\ &= x + y + z - 3 - 3 \\ &= x + y + z - 6. \end{aligned}$$

5. Para $\emptyset \neq A \subseteq \mathbb{N}$, sean $f, g : A \times A \to A$ las operaciones binarias cerradas dadas por $f(x,y) = \min\{x,y\}$ y $g(x,y) = \max\{x,y\}$.

   a) Determine si f tiene elemento neutro.

   b) Determine si g tiene elemento neutro.

Solución:

a) Cuando A es un conjunto arbitrario, no podemos asegurar que f tenga elemento neutro. Por ejemplo, si consideramos $A = \mathbb{N}$ y suponemos que A tiene un elemento neutro n_0, entonces tenemos que

$$n_0 + 1 = f(n_0, n_0 + 1) = \min\{n_0, n_0 + 1\} = n_0.$$

Esta contradicción muestra que para $A = \mathbb{N}$, f no tiene neutro.

Ejercicio: Pruebe que f tiene elemento neutro si y solo si el cardinal de A es finito.

b) Veamos que g tiene elemento neutro. En efecto, como $\emptyset \neq A \subseteq \mathbb{N}$, podemos asegurar que A tiene mínimo. Ahora, si denotamos con n_0 al $\min(A)$, tenemos que, para todo $a \in A$,

$$g(a, n_0) = g(n_0, a) = \max\{n_0, a\} = a.$$