Álgebra y Geometría Analítica I

Vectores - Resolución de ejercicios selectos

Ejercicios de la Sección 15.3

1. (a) Dados los puntos $A = (-1, 2, 4)$, $B = (5, -1, 2)$ y $C = (2, 3, 5)$ determine tres puntos P, Q y R tales que cada uno de ellos es cuarto vértice de un paralelogramo del cual A, B y C son tres vértices.

   (b) En el triángulo ABC calcule la longitud de la mediana del segmento BC.

   (c) Calcule $\cos(\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}})$.

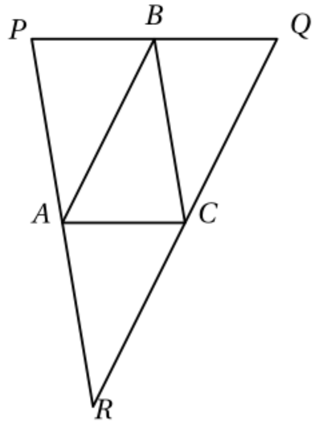


Figure 1: Esquema de puntos A, B, C, P, Q y R

Solución:

(a) Vamos a hallar las coordenadas de un punto R tal que R sea el cuarto vértice del paralelogramo $ABCR$ (ver figura 1).
Como primer paso encontremos las coordenadas del punto medio del segmento que une los vértices no adyacentes A y C.

$$2 \cdot \overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AC}$$

$$2 \cdot (x_M - x_A, y_M - y_A, z_M - z_A) = (x_C - x_A, y_C - y_A, z_C - z_A)$$

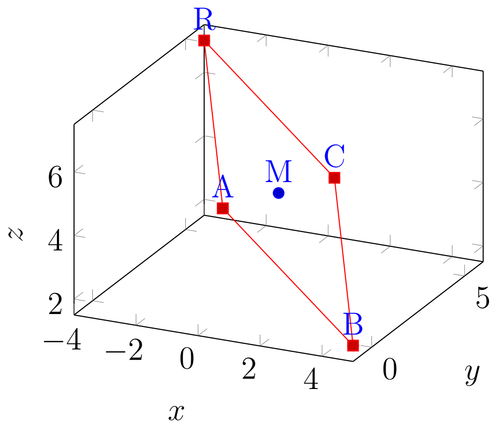
$$(x_M, y_M, z_M) = \left(\frac{x_A + x_C}{2}, \frac{y_A + y_C}{2}, \frac{z_A + z_C}{2}\right)$$

$$(x_M, y_M, z_M) = \left(\frac{-1 + 2}{2}, \frac{2 + 3}{2}, \frac{4 + 5}{2}\right)$$

$$(x_M, y_M, z_M) = (0.5, 2.5, 4.5)$$

Ahora podemos hallar las coordenadas del punto R sabiendo que M es el punto medio entre R y B.

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{BR} &= 2 \cdot \overrightarrow{BM} \\
(x_R - x_B, y_R - y_B, z_R - z_B) &= 2 \cdot (x_M - x_B, y_M - y_B, z_M - z_B) \\
(x_R, y_R, z_R) &= (2x_M - x_B, 2y_M - y_B, 2z_M - z_B) \\
(x_R, y_R, z_R) &= (x_M + (x_M - x_B), y_M + (y_M - y_B), z_M + (z_M - z_B)) \\
(x_R, y_R, z_R) &= (-4, 9, 7)
\end{aligned}$$



(b) La mediana del segmento BC es el segmento que va desde el vértice A hasta el punto medio del segmento BC. Vamos a resolver el problema en dos pasos, primero hallamos las coordenadas del punto medio del segmento BC, al que llamaremos N, y luego calculamos la distancia entre N y A.

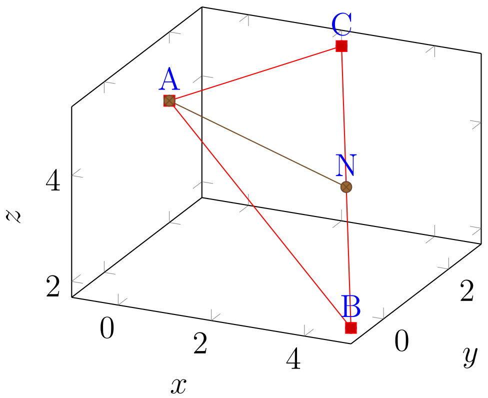
$$\begin{aligned}
2 \cdot \overrightarrow{BN} &= \overrightarrow{BC} \\
2 \cdot (x_N - x_B, y_N - y_B, z_N - z_B) &= (x_C - x_B, y_C - y_B, z_C - z_B) \\
(x_N, y_N, z_N) &= \left(\frac{x_C + x_B}{2}, \frac{y_C + y_B}{2}, \frac{z_C + z_B}{2}\right) \\
(x_N, y_N, z_N) &= \left(\frac{2+5}{2}, \frac{3+(-1)}{2}, \frac{5+2}{2}\right) \\
(x_N, y_N, z_N) &= (3.5, 1, 3.5)
\end{aligned}$$

Las componentes del vector $\overrightarrow{AN}$ son:

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{AN} &= (x_N - x_A, y_N - y_A, z_N - z_A) \\
&= (3.5 - (-1), 1 - 2, 3.5 - 4) \\
&= (4.5, -1, -0.5)
\end{aligned}$$

La longitud de la mediana del segmento BC será el módulo del vector $\overrightarrow{AN}$:

$$\begin{aligned}
|\overrightarrow{AN}| &= \sqrt{x_{AN}^2 + y_{AN}^2 + z_{AN}^2} \\
&= \sqrt{4.5^2 + (-1)^2 + (-0.5)^2} \\
&\simeq 2.1794
\end{aligned}$$



2. (a) Pruebe que los puntos $A = (4, 2, 1)$, $B = (7, 5, 3)$ y $C = (2, 2, 4)$ son vértices de un triángulo rectángulo.
   (b) Calcule el área del triángulo ABC.

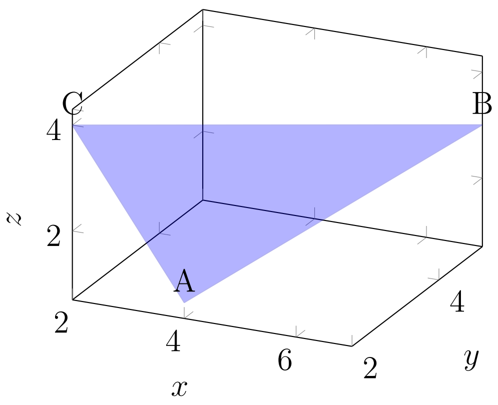
Solución:

(a) Dado que son diferentes, sabemos que los puntos A, B y C son sí o sí los extremos de un triángulo. Para probar que el triángulo es rectángulo debemos probar que uno de sus tres ángulos es un ángulo recto (90°). Para ello podemos calcular los siguientes productos escalares:

$$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}$$
$$\overrightarrow{BA} \times \overrightarrow{BC}$$
$$\overrightarrow{CA} \times \overrightarrow{CB}$$

Si alguno de dichos productos escalares es igual a cero, implica que el ángulo entre los dos vectores correspondientes es recto.

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} &= (x_B - x_A, y_B - y_A, z_B - z_A) \times (x_C - x_A, y_C - y_A, z_C - z_A) \\
&= (3, 3, 2) \times (-2, 0, 3) \\
&= 3 \cdot (-2) + 3 \cdot 0 + 2 \cdot 3 \\
&= 0
\end{aligned}$$



Ejercicios de la Sección 17.5

1. Si $\vec{u} = (3, -1, -2)$ y $\vec{v} = (1, 2, -1)$, calcule:
   (a) $\vec{u} \wedge \vec{v}$.
   (b) $(2 \cdot \vec{u} + \vec{v}) \wedge \vec{v}$.
   (c) $(2 \cdot \vec{u} - \vec{v}) \wedge (2 \cdot \vec{u} + \vec{v})$.

Solución:

(a) $\vec{u} \wedge \vec{v}$

$$\begin{aligned}
\vec{u} \wedge \vec{v} &= (u_2v_3 - u_3v_2) \cdot \vec{i} + (u_3v_1 - u_1v_3) \cdot \vec{j} + (u_1v_2 - u_2v_1) \cdot \vec{k} \\
&= ((-1)(-1) - (-2)2) \cdot \vec{i} + ((-2)1 - 3(-1)) \cdot \vec{j} + (3 \cdot 2 - (-1)1) \cdot \vec{k}) \\
&= (5 \cdot \vec{i} + 1 \cdot \vec{j} + 7 \cdot \vec{k}) \\
&= (5, 1, 7)
\end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned}
(2 \cdot \vec{u} + \vec{v}) \wedge \vec{v} &= (2 \cdot \vec{u}) \wedge \vec{v} + \vec{v} \wedge \vec{v} \\
&= 2 \cdot (\vec{u} \wedge \vec{v}) + \vec{0} \\
&= 2 \cdot (5, 1, 7) \\
&= (10, 2, 14)
\end{aligned}$$