Unidad 3: Conjuntos
Álgebra y Geometría Analítica I (R-111)
Licenciatura en Ciencias de la Computación

Iker M. Canut

2020

1. Teoría de Conjuntos

Conjunto: Colección bien definida de elementos. Los conjuntos se escriben con letras mayúsculas, los elementos con minúsculas.

- $a \in A$: El elemento a **pertenece** al conjunto A.
- $a \notin A$: El elemento a **no pertenece** al conjunto A.

Definimos un conjunto por **extensión** si enumeramos todos los elementos que pertenecen, o podemos definirlo por **comprensión** si damos una caracteristica, una ley que define si un elemento pertenece o no al conjunto.
El universo en el cual estan todos los elementos, se lo denomina **universal**, $\mathbb{U}$.

- C es un **subconjunto** de $D \iff C \subseteq D \iff \forall x[x \in C \Rightarrow x \in D]$
- $C \nsubseteq D \iff \exists x[x \in C \wedge x \notin D]$
- $C \subseteq D \Rightarrow |C| \leq |D|$
- C es un **subconjunto propio** de $D \iff C \subset D \iff C \subseteq D \wedge C \neq D$
- $C \not\subset D \iff C \nsubseteq D \vee C = D$
- $C \subset D \Rightarrow |C| < |D|$
- C es **igual** a $D \iff C = D \iff C \subseteq D \wedge D \subseteq C \iff \forall x[x \in C \iff x \in D]$
- C es **distinto** a $D \iff C \neq D \iff C \nsubseteq D \vee D \nsubseteq C$

Sean $A, B, C \subseteq U$

- Si $A \subseteq B \wedge B \subseteq C \Rightarrow A \subseteq C$
- Si $A \subset B \wedge B \subseteq C \Rightarrow A \subset C$
- Si $A \subseteq B \wedge B \subset C \Rightarrow A \subset C$
- Si $A \subset B \wedge B \subset C \Rightarrow A \subset C$

Demostración: $A \subset B \wedge B \subseteq C \Rightarrow A \subset C$.
Como $A \subset B$, entonces $\forall x \in A \Rightarrow x \in B \wedge \exists y \in B : y \notin A$ y además como $\wedge B \subseteq C \forall x \in B \Rightarrow x \in C$.
Para probar que $A \subset C$, hay que demostrar que $x \in A \Rightarrow x \in C$ y existe un $y \in C : y \notin A$. Sea $x \in A \Rightarrow x \in B \Rightarrow x \in C$ y además $\exists y \in B : y \notin A$, pero ese y pertenece a C, ergo, $\exists y \in C : y \notin A$. ■

Se llama **conjunto vacio**, $\emptyset$ o $\{\}$ al conjunto que no tiene elementos. $|\emptyset| = 0$

Para cualquier $\mathbb{U}$, $A \subseteq U$ se tiene que $\emptyset \subseteq A$. Y si $a \neq \emptyset \Rightarrow \emptyset \subset A$
Demostración: Por absurdo, si $\emptyset \nsubseteq A$ entonces $\exists x \in \emptyset : x \notin A$. Pero es absurdo. Luego, $\emptyset \subseteq A$.
Finalmente, si $A \neq \emptyset$, entonces $\exists a[a \in A \wedge a \notin \emptyset] \therefore \emptyset \subset A$ ■

Dado un conjunto A, se llama **conjunto de partes** de A al conjunto cuyos elementos son todos los subconjuntos de A. $P(A) = \{F.F \subseteq A\}$

Paradoja de Russel: Sea S el conjunto de todos los conjuntos A que no son elemenos de si mismos, es decir $S = \{A : A \notin A\}$, entonces $S \in S \iff S \notin S$. Es decir,

> "El conjunto cuyos elementos son todos los conjuntos que no son elementos de sí mismos,
> ¿es o no es elemento de sí mismo?"

También se lo conoce como *"Paradoja del barbero"*.

2. Operaciones de Conjuntos

- **Unión** de A y B: Conjunto cuyos elemento pertenecen a A o a B. $A \cup B = \{x \in \mathbb{U}.x \in A \vee x \in B\}$
  - $A \cup B = B \cup A$
    Dem/ $x \in (A \cup B) \iff x \in A \wedge x \in B \iff x \in B \wedge x \in A \iff x \in (B \cup A)$ ■
  - $B \subseteq A \iff B \cup A = A$
    Dem/ $\Rightarrow$) $x \in A \Rightarrow$ (por amp. disy.) $x \in A \vee x \in B \Rightarrow x \in (A \cup B)$ i.e $A \subseteq (A \cup B)$.
    Sea $x \in (A \cup B) \Rightarrow x \in A \vee x \in B \Rightarrow x \in A \vee x \in A \Rightarrow x \in A$ i.e $(A \cup B) \subseteq A \therefore A = B \cup A$
    $\Leftarrow$) $x \in B \Rightarrow x \in B \vee x \in A \iff x \in B \cup A = A \iff x \in A$ ■
  - $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$
    Dem/ $x \in (A \cup B) \cup C \iff x \in (A \cup B) \vee x \in C \iff (x \in A \vee x \in B) \vee x \in C \iff x \in A \vee (x \in B \vee x \in C) \iff x \in A \vee x \in (B \cup C) \iff x \in A \cup (B \cup C)$ ■
- **Intersección** de A y B: Elementos que pertenecen a A y a B. $A \cap B = \{x \in \mathbb{U}.x \in A \wedge x \in B\}$
  - $A \cap B = B \cap A$
    Dem/ $x \in A \cap B \iff x \in A \wedge x \in B \iff x \in B \wedge x \in A \iff x \in B \cap A$ ■
  - $B \subseteq A \iff B \cap A = B$
    Dem/ $\Rightarrow$) $x \in B \cap A \Rightarrow x \in B \wedge x \in A \Rightarrow x \in B$ i.e $B \cap A \subseteq B$
    Sea $x \in B \Rightarrow x \in B \wedge x \in B \Rightarrow x \in A \wedge x \in B \Rightarrow x \in A \cap B$ i.e $B \subseteq A \cap B \therefore B \cap A = B$
    $\Leftarrow$) Sea $x \in B \Rightarrow x \in A \cap B \Rightarrow x \in B \wedge x \in A \Rightarrow x \in A$ i.e $B \subseteq A$ ■
  - $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$
    Dem/ $x \in (A \cap B) \cap C \iff x \in (A \cap B) \wedge x \in C \iff (x \in A \wedge x \in B) \wedge x \in C \iff x \in A \wedge (x \in B \wedge x \in C) \iff x \in A \wedge x \in (B \cap C) \iff x \in A \cap (B \cap C)$ ■
  - Dos conjuntos son **disjuntos** si la intersección es el conjunto vacio.
  - $X \cap Y = \emptyset \Rightarrow P(X) \cap P(Y) = \{\emptyset\}$
    Dem/ Suponemos que $P(X) \cap P(Y) \neq \{\emptyset\}$. Luego existe $Z \neq \emptyset : Z \in P(X) \cap P(Y)$. Entonces $Z \in P(X) \wedge Z \in P(Y) \Rightarrow Z \subseteq X \wedge Z \subseteq Y$. Y al no ser vacio, existe $x \in Z \subset X$, y para el mismo x, tenemos que $x \in Y$. Luego $X \cap Y \neq \emptyset$, contradiciendo la hipotesis. ■
  - A y B son disjuntos $\iff A \cup B = A \triangle B$
    Dem/ ■
- **Diferencia** de A y B: Elem. que pertenecen a A y no a B. $A - B = \{x \in \mathbb{U}.x \in A, x \notin B\} = A \cap \overline{B}$
  - $A - A = \emptyset$
    Dem/ $A - A = \{x : x \in A \wedge x \notin A\} = \{x : F_0\} = \emptyset$ ■
  - $A - \emptyset = A$
    Dem/ $A - \emptyset = \{x : x \in A \wedge x \notin \emptyset\} = \{x : x \in A\} = A$ ■
  - $\emptyset - A = \emptyset$
    Dem/ $\emptyset - A = \{x : x \in \emptyset \wedge x \notin A\} = \emptyset$ ■
  - $(A - B = B - A) \iff A = B$
    Dem/ $\Rightarrow$) Suponemos $A \neq B$. Luego $A - B = B - A \neq \emptyset$. Dado $x \in A - B$, para ese mismo x, $x \in B - A$. Por lo tanto $x \in A \wedge x \in B$, pero entonces no podria estar en $A - B$ o en $B - A$ llegando asi a una contradicción.
    $\Leftarrow$) Sea $A = B \Rightarrow A - B = \emptyset \wedge B - A = \emptyset \therefore A - B = B - A$ ■
  - $(A - B) - C \subseteq A - (B - C)$
    Dem/ $x \in (A - B) - C \Rightarrow (x \in A \wedge x \notin B) \wedge x \notin C \Rightarrow (x \in A \wedge x \notin B) \Rightarrow$
    $x \in A \wedge (x \notin B \vee x \in C) \Rightarrow x \in A \wedge \neg(x \in B \wedge x \notin C) \Rightarrow$
    $x \in A \wedge \neg(x \in B - C) \Rightarrow x \in A \wedge x \notin B - C \Rightarrow x \in A - (B - C)$ ■

- **Complemento** de B respecto de A: es la diferencia. $\complement_A B = A - B = \{x.x \in A, x \notin B\}$
Si tomamos $A = \mathbb{U}$, notamos $\complement_U B = \complement B = \overline{B}$

  - $\complement\mathbb{U} = \emptyset$
  Dem/ $\complement\mathbb{U} = \complement_{\mathbb{U}}\mathbb{U} = \mathbb{U} - \mathbb{U} = \emptyset$ ■
  - $\complement\emptyset = \mathbb{U}$
  Dem/ $\complement\emptyset = \complement_{\mathbb{U}}\emptyset = \mathbb{U} - \emptyset = \mathbb{U}$ ■
  - $\complement(\complement A) = A$
  Dem/ $\complement(\complement A) = U - (U - A) = \{x \in \mathbb{U} \wedge x \notin (\mathbb{U} - A)\} = \{x \in \mathbb{U} \wedge \neg(x \in \mathbb{U} \wedge x \notin A)\} =$
  $= \{x \in \mathbb{U} \wedge (x \notin \mathbb{U} \vee x \in A)\} = \{x \in \mathbb{U} \wedge x \in A\} = A$ ■
  - $\complement(A \cup B) = \complement A \cap \complement B$
  Dem/ $x \in \complement(A \cup B) = x \in \mathbb{U} \wedge x \notin (A \cup B) = x \in \mathbb{U} \wedge \neg(x \in A \vee x \in B)) =$
  $= x \in \mathbb{U} \wedge x \notin A \wedge x \notin B$ ■
  - $\complement(A \cap B) = \complement A \cup \complement B$
  Dem/ $\subseteq)$ $x \in \overline{A \cap B} \Rightarrow \neg(x \in A \wedge x \in B) \Rightarrow x \notin A \vee x \notin B \Rightarrow x \in \overline{A} \vee x \in \overline{B}$ □
  $\supseteq)$ $x \in \overline{A} \cup \overline{B}$. Suponemos que $x \in A \cap B$, luego $x \in A \wedge x \in B \Rightarrow x \notin \overline{A} \wedge x \notin \overline{B} \Rightarrow$
  $\neg(x \in \overline{A} \wedge x \in \overline{B})$, contradiciendo asi la hipótesis. Luego, $x \in \overline{A \cap B}$ i.e $\overline{A} \cup \overline{B} \subseteq \overline{A \cap B}$ ■
  - $A \subseteq B \Rightarrow A \cup \complement_B A = B$
  Dem/ $\subseteq)$ $x \in (A \cup \complement_B A) \Rightarrow x \in A \vee (x \in B \wedge x \notin A) \Rightarrow x \in A \vee x \in B \Rightarrow$
  $x \in B \vee x \in B \Rightarrow x \in B$ i.e $A \cup \complement_B A \subseteq B$
  $\supseteq)$ $x \in B \Rightarrow x \in A \vee x \in B \Rightarrow x \in A \vee (x \in B \wedge x \notin A) \Rightarrow x \in A \cup (B - A) \Rightarrow$
  $x \in A \cup \complement_B A$ i.e $A \cup \complement_B A \supseteq B \;\therefore\; A \cup \complement_B A = B$ ■

- **Diferencia Simetrica** de A y B: son los elementos que pertenecen a A o a B, pero no a ambos.

$$\begin{aligned} A \triangle B &= \{x \in \mathbb{U}.x \in A \veebar x \in B\} \\ &= (A \cup B) - (A \cap B) = (A \cap \overline{B}) \cup (\overline{A} \cap B) \\ &= (A \cup B) \cap \overline{(A \cap B)} = (A - B) \cup (B - A) \end{aligned}$$

  - $A \triangle B = (A \cup B) \cap \complement(A \cap B)$
  Dem/ $x \in A \triangle B \iff x \in A \cup B \wedge x \notin (A \cap B) \iff$
  $(x \in A \vee x \in B) \wedge \neg(x \in A \wedge x \in B) \iff x \in (A \cup B) \cap \overline{(A \cap B)}$ ■
  - $A \triangle B = (A \cap \complement B) \cup (\complement A \cap B)$
  Dem/ $x \in A \triangle B \iff (x \in A \vee x \in B) \wedge \neg(x \in A \wedge x \in B) \iff$
  $((x \in A \vee x \in B) \wedge x \notin A) \vee ((x \in A \vee x \in B) \wedge x \notin B) \iff$
  $(x \notin A \wedge x \in B) \vee (x \in A \wedge x \notin B) \iff x \in (A \cap \overline{B}) \cup (\overline{A} \cap B)$ ■
  - $A \triangle B = (A - B) \cup (B - A)$
  Dem/ $x \in A \triangle B \iff x \in (A \cap \overline{B}) \cup (\overline{A} \cap B) \iff x \in (A - B) \cup (B - A)$ ■

- **Producto Cartesiano** de A y B: es el conjunto de pares ordenados (a, b) tal que la primer componente pertenece a A y la segunda pertenece a B.
$A \times B = \{(a, b).a \in A, b \in B\}$
Si $A = B$ se escribe $A \times A = A^2$

$[a, b] = \{x \in \mathbb{R} : a \leq x \leq b\}$
$[c, d] = \{x \in \mathbb{R} : c \leq x \leq d\}$
$[a, b] \times [c, d] = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : a \leq x \leq b \wedge c \leq y \leq d\}$

3. Generalizaciones

Sean $E_1, E_2, ...E_n \subseteq U$ se llama:

- **unión** de $E_1, E_2, ...E_n$ al conjunto $E_1 \cup E_2 \cup ... \cup E_n = \bigcup_{i \in 1}^{n} E_i = \{x \in \mathbb{U}. x \in E_i, \text{para algun } i = 1..n\}$
- **intersección** de $E_1, E_2, ...E_n$ al conjunto $E_1 \cap E_2 \cap ... \cap E_n = \bigcap_{i \in 1}^{n} E_i = \{x \in \mathbb{U}. x \in E_i, \forall i = 1..n\}$

Sea I un conjunto no vacio, U el conjunto universal,
$\forall i \in I$ sea $A_i \subseteq \mathbb{U}$. Cada i es un indice, e I es el conjunto de indices.

- $\bigcup_{i \in I} A_i = \{x \in \mathbb{U}. x \in A_i, \text{ para algun } i \in I\}$
- $\bigcap_{i \in I} A_i = \{x \in \mathbb{U}. x \in A_i, \text{ para todo } i \in I\}$

Equivalentemente,

- $x \in \bigcup_{i \in I} A_i \iff \exists i \in I. (x \in A_i)$
- $x \in \bigcap_{i \in I} A_i \iff \forall i \in I. (x \in A_i)$
- $\overline{\bigcup_{i \in I} A_i} = \bigcap_{i \in I} \overline{A_i}$
- $\overline{\bigcap_{i \in I} A_i} = \bigcup_{i \in I} \overline{A_i}$

4. Leyes

1.	$\overline{\overline{A}} = A$		Doble negación
2.	$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$	$\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$	De Morgan
3.	$A \cup B = B \cup A$	$A \cap B = B \cap A$	Conmutativa
4.	$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$	$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$	Asociativa
5.	$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$	$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$	Distributiva
6.	$A \cup A = A$	$A \cap A = A$	Idempotente
7.	$A \cup \emptyset = A$	$A \cap \mathbb{U} = A$	Neutro
8.	$A \cup \overline{A} = \mathbb{U}$	$A \cap \overline{A} = \emptyset$	Inverso
9.	$A \cup \mathbb{U} = \mathbb{U}$	$A \cap \emptyset = \emptyset$	Dominación
10.	$A \cup (A \cap B) = A$	$A \cap (A \cup B) = A$	Absorción
	$A \cup (\overline{A} \cap B) = A \cup B$	$A \cap (\overline{A} \cup B) = A \cap B$	

5. Cardinalidad

La cardinalidad de un conjunto finito es la cantidad de elementos que contiene.

- $|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$
- $|\overline{A} \cap \overline{B} \cap \overline{C}| = |\overline{A \cup B \cup C}| = |U| = |A \cup B \cup C|$
$= |U| - |A| - |B| - |C| + |A \cap B| + |A \cap C| + |B \cap C| - |A \cap B \cap C|$

6. Dualidad

Para conseguir el dual de un conjunto, se reemplazan:

- $\emptyset$ por $\mathbb{U}$ y $\mathbb{U}$ por $\emptyset$.
- $\cup$ por $\cap$ y $\cap$ por $\cup$.