Unidad 2: Matrices y Determinantes
Álgebra y Geometría Analítica II (R-121)
Licenciatura en Ciencias de la Computación

Iker M. Canut

2020

1. Matrices

Una **matriz** A de tamaño $m \times n$ con coeficientes en $\mathbb{F}$ es una función $A : [\![1, m]\!] \times [\![1, n]\!] \to \mathbb{F}$.
El conjunto de todas las matrices $m \times n$ con coeficientes en $\mathbb{F}$ se denotará por $\mathbb{F}^{m \times n}$.

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Luego, $a_{ij} = A(i, j)$ se llama **coeficiente** de la matriz A. Además, A tiene m filas y n columnas.
$A = (a_{ij})$ y $B = (b_{ij})$ son **iguales** cuando tienen la misma cantidad de filas y columnas, y $a_{ij} = b_{ij}\ \forall i, j$.

$v \in \mathbb{F}^{1 \times n}$ es un **vector fila** de tamaño n.
$v \in \mathbb{F}^{m \times 1}$ es un **vector columna** de tamaño m.
$A \in \mathbb{F}^{n \times n}$ es una **matriz cuadrada**. El **vector diagonal** de A es $\text{diag}(A) = (a_{11}, a_{22}, ..., a_{nn})$

- **Cuadrada triangular superior** si $a_{ij} = 0$ para $i > j$.
- **Cuadrada triangular superior estricta** si $a_{ij} = 0$ para $i \geq j$.
- **Cuadrada triangular inferior** si $a_{ij} = 0$ para $i < j$.
- **Cuadrada triangular inferior estricta** si $a_{ij} = 0$ para $i \leq j$.
- **Cuadrada diagonal** si es triangular superior y triangular inferior.

$0 = 0_{m \times n} \in \mathbb{F}^{m \times n}$ es la **matriz nula**, que tiene todas sus entradas iguales a cero.
$I = I_n \in \mathbb{F}^{m \times n}$ es la **matriz identidad** de orden n, tal que $I_{ij} = \delta_{ij}$,

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases} \quad \text{se conoce como el delta de Kronecker}$$

1.1. Operaciones Entre Matrices

Matriz por escalar: $A \in \mathbb{F}^{m \times n}, \alpha \in \mathbb{F}$, entonces $C = \alpha A \in \mathbb{F}^{m \times n}$ está dada por $c_{ij} = \alpha a_{ij}$.
Suma de matrices: $A, B \in \mathbb{F}^{m \times n}$, entonces $C = A + B \in \mathbb{F}^{m \times n}$ está dada por $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$.
Multiplicación: $A \in \mathbb{F}^{m \times n}$, $B \in \mathbb{F}^{n \times p}$, entonces $C = A \cdot B \in \mathbb{F}^{m \times p}$ está dada por $c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj}$.
El lugar $(AB)_{ij}$ está dado por el producto escalar entre la i-ésima fila de A y la j-ésima columna de B.
Teorema 1: NO es conmutativo, pero SI es asociativo, pues:

$$(A(BC))_{ij} = \sum_{k=1}^{n} A_{ik}(BC)_{kj} = \sum_{k=1}^{n} A_{ik} \sum_{l=1}^{p} B_{kl} C_{lj} = \sum_{k=1}^{n} \sum_{l=1}^{p} A_{ik} B_{kl} C_{lj}$$

$$((AB)C)_{ij} = \sum_{l=1}^{p} (AB)_{il} C_{lj} = \sum_{l=1}^{p} \sum_{k=1}^{n} A_{ik} B_{kl} C_{lj} = \sum_{k=1}^{n} \sum_{l=1}^{p} A_{ik} B_{kl} C_{lj}$$

$\blacksquare$

Teorema 2: $A \in \mathbb{F}^{m \times n}$, $B, C \in \mathbb{F}^{n \times p}$, entonces $A(B + C) = AB + AC$

$$(A(B + C))_{ij} = \sum_{k=1}^{n} A_{ik}(B_{kj} + C_{kj}) = \sum_{k=1}^{n} A_{ik} B_{kj} + \sum_{k=1}^{n} A_{ik} C_{kj} = (AB)_{ij} + (AC)_{ij} = (AB + AC)_{ij}$$

$\blacksquare$

Teorema 3: Sea $A \in \mathbb{F}^{m \times n}$, entonces $I_m A = A I_n = A$

$$(I_m A)_{ij} = \sum_{k=1}^{m} (I_m)_{ik} A_{kj} = \sum_{k=1}^{m} \delta_{ik} A_{kj} = A_{ij} \Rightarrow I_m A = A$$

$\blacksquare$

Dada $A \in \mathbb{F}^{m \times n}$, se define la **matriz transpuesta** de A como la matriz $A^t \in \mathbb{F}^{n \times m}$ tal que $(A^t)_{ij} = A_{ji}$

Teorema 4: Sean $A, B \in \mathbb{F}^{m \times n}, \alpha \in \mathbb{F}$, entonces:

- $(A^t)^t = A$
  Dem/ $((A^t)^t)_{ij} = (A^t)_{ji} = A_{ij}$ ■
- $(\alpha A)^t = \alpha A^t$
  Dem/ $((\alpha A)^t)_{ij} = (\alpha A)_{ji} = \alpha A_{ji} = \alpha (A^t)_{ij} = (\alpha A^t)_{ij}$ ■
- $(A+B)^t = A^t + B^t$
  Dem/ $((A+B)^t)_{ij} = (A+B)_{ji} = A_{ji} + B_{ji} = (A^t)_{ij} + (B^t)_{ij} = (A^t + B^t)_{ij}$ ■

Teorema 5: Sea $A \in \mathbb{F}^{m \times n}, B \in \mathbb{F}^{n \times p}$, entonces $(AB)^t = B^t A^t$
Dem/ $((AB)^t)_{ij} = (AB)_{ji} = \sum_{k=1}^n A_{jk} B_{ki} = \sum_{k=1}^n (B^t)_{ik} (A^t)_{kj} = (B^t A^t)_{ij}$ ■

A es **simétrica** si $A^t = A$
A es **antisimétrica** si $A^t = -A$. Se ve que $\text{diag}(A) = (0, ..., 0)$.

Teorema 6: $A \in \mathbb{F}^{n \times n}$ puede escribirse como la suma de una matriz simétrica y una antisimétrica.
Dem/ $A = \frac{1}{2}(A + A^t) + \frac{1}{2}(A - A^t)$, donde $A_{\text{sim}} = \frac{1}{2}(A + A^t)$ y $A_{\text{anti}} = \frac{1}{2}(A - A^t)$. Donde se ve que:

- $(A_{\text{sim}})^t = (\frac{1}{2}(A + A^t))^t = \frac{1}{2}(A^t + A) = \frac{1}{2}(A + A^t) = A_{\text{sim}}$
- $(A_{\text{anti}})^t = (\frac{1}{2}(A - A^t))^t = \frac{1}{2}(A^t - A) = -\frac{1}{2}(A - A^t) = -A_{\text{anti}}$ ■

Se define la **traza** de una matriz $A \in \mathbb{F}^{n \times n}$ como $tr(A) = \sum_{i=1}^n A_{ii}$
Teorema 7: Sean $A, B \in \mathbb{F}^{n \times n}, \alpha \in \mathbb{F}$:

- $tr(A+B) = tr(A) + tr(B)$
- $tr(\alpha A) = \alpha \cdot tr(A)$
- $tr(AB) = tr(BA)$

Teorema 8: Sea $A \in \mathbb{F}^{n \times n}$, entonces $tr(AA^t) = \displaystyle\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n A_{ij}^2$

$$\text{Puesto que } (AA^t)_{ii} = \sum_{j=1}^n A_{ij} A_{ji}^t = \sum_{j=1}^n A_{ij} A_{ij} = \sum_{j=1}^n A_{ij}^2$$

$$\text{Se puede ver que } tr(AA^t) = \sum_{i=1}^n (AA^t)_i i = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n A_{ij}^2$$

■

Además si $\mathbb{F} = \mathbb{R}$, se puede pensar el número $tr(AA^t)$ como el “modulo” al cuadrado de la matriz $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, pues este número se calcula sumando los cuadrados de todos los coeficientes de la matriz. Finalmente, se puede introducir la noción de distancia en el conjunto $\mathbb{R}^{n \times n}$, es decir, la distancia entre dos matrices $A, B \in \mathbb{F}^{n \times n}$ se define como el modulo de la diferencia $B - A$,

$$dist(A, B) = tr((B - A)(B - A^t))^{\frac{1}{2}}$$

Y el conjunto de todas las matrices $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ tales que $tr(A) = const$ puede pensarse como un “hiperplano” en $\mathbb{R}^{n \times n}$, pues dichas matrices satisfacen una especie de “ecuación general del plano”.

Por ejemplo, el hiperplano de todas las matrices 2×2 de traza 0 está dado por $\left\{ \begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2 \times 2} : x + w = 0 \right\}$

2. Determinantes

Definimos $S_n = \{\sigma : [\![1,n]\!] \to [\![1,n]\!] : \sigma \text{ es biyectiva}\}$ al conjunto de permutaciones de n elementos.

- Hay $n!$ permutaciones de n elementos. Es decir, $|S_n| = n!$
- Si $\sigma, \tau \in S_n$, entonces $\sigma \circ \tau \in S_n$, en donde $\sigma \circ \tau$ es la composición y está definida $\forall i \in [\![1,n]\!]$.
- La **función identidad** $id : S_n \to S_n$ se comporta como el "elemento neutro" de S_n con respecto a la operación composición, es decir, $id \circ \sigma = \sigma \circ id = \sigma,\ \forall \sigma \in S_n$.
- Toda $\sigma \in S_n$ tiene una inversa, es decir, $\exists \sigma^{-1}$ tal que $\sigma \circ \sigma^{-1} = \sigma^{-1} \circ \sigma = id$
- Se puede identificar una permutación $\sigma \in S_n$ con una n-upla: $\sigma \longleftrightarrow (\sigma(1), \sigma(2), ..., \sigma(n))$

Una **trasposición** es una permutación que intercambia solo dos elementos. $\tau \in S_n$ es una trasposición si existen $i, j \in [\![1,n]\!], i \neq j$ tal que:

$$\tau(k) = \begin{cases} j & k = i \\ i & k = j \\ k & k \neq i, k \neq j \end{cases}$$

Y se denota $\tau_{i,j}$ a la transposición que intercambia i con j. Además, τ es su propia inversa: $\tau \circ \tau = id$. De esta manera, es facil calcular la inversa de una transposición arbitraria.

Teorema 9: Toda $\sigma \in S_n$ puede escribirse como una composición de trasposiciones, y la cantidad usada en una descomposición es siempre par o impar.

El **signo** de una permutación $\sigma \in S_n$ se define por $sg(\sigma) = (-1)^k$. Luego, se dice que:
σ es par si $sg(\sigma) = 1$ o impar si $sg(\sigma) = -1$.

Teorema 10:

- $sg(id) = 1$
  Dem/ La cantidad de trasposiciones necesarias para describirla siempre será par. □
- $sg(\sigma \circ \tau) = sg(\sigma) \cdot sg(\tau),\ \forall \sigma, \tau \in S_n$
  Dem/ Sea $\sigma = \sigma_1 \circ ... \circ \sigma_k$ y $\tau = \tau_1 \circ ... \circ \tau_k$, entonces $\sigma \circ \tau$ es una composición de $k + l$ trasposiciones. Luego, $sg(\sigma \circ \tau) = (-1)^{k+l} = (-1)^k \cdot (-1)^l = sg(\sigma) \cdot sg(\tau)$ □
- $sg(\sigma^{-1}) = sg(\sigma)^{-1} = sg(\sigma),\ \forall \sigma \in S_n$
  Dem/ $1 = sg(id) = sg(\sigma \circ \sigma^{-1}) = sg(\sigma) \cdot sg(\sigma^{-1}) \Rightarrow sg(\sigma^{-1}) = \frac{1}{sg(\sigma)} = sg(\sigma)^{-1}$. Luego, si $sg(\sigma) = 1$, entonces $sg(\sigma^{-1}) = \frac{1}{1}$; y si $sg(\sigma) = -1$, entonces $sg(\sigma^{-1}) = \frac{1}{-1}$. En cualquiera de los dos casos, vale $sg(\sigma) = sg(\sigma^{-1})$. ■

Sea $A \in \mathbb{F}^{m \times n}$, el **determinante** de A se define como

$$det\ A = \sum_{\sigma \in S_n} sg(\sigma) \cdot \prod_{i=1}^{n} A_{i\sigma(i)}$$

es decir, hay que sumar todos los posibles factores que se pueden armar con coeficientes de A, tomando un elemento en cada fila y cada columna, en donde el factor $A_{1\sigma(1)}...A_{n\sigma(n)}$ debe ir multiplicado por el signo de la permutacion de las columnas σ.

Teorema 11: Si $I \in \mathbb{F}^{n \times n}$ es la matriz identidad, entonces $det\ I = 1$.
Dem/ $det\ I = \sum_{\sigma \in S_n} sg(\sigma) \cdot \prod_{i=1}^{n} I_{i\sigma(i)}$. Pero $I_{i\sigma(i)} \neq 0 \Leftrightarrow \sigma(i) = i$, donde vale 1. Luego, la suma tiene un solo sumando no nulo y $det\ I = sg(id) \prod_{i=1}^{n} I_{ii} = 1$. ■
De manera análoga, si $A \in \mathbb{F}n \times n$ es una matriz diagonal, entonces $det\ A = A_{11} \cdot ... \cdot A_{nn}$.

Teorema 12: Sea $A \in \mathbb{F}^{n \times n}$, entonces $det\ A = det\ A^t$
Dem/ $sg(\sigma) \cdot A_{1\sigma(1)} \cdots A_{n\sigma(n)} = sg(\sigma^{-1}) \cdot A_{\sigma^{-1}(1)1} \cdots A_{\sigma^{-1}(n)n} = sg(\sigma^{-1}) \cdot A^t_{1\sigma^{-1}(1)} \cdots A^t_{n\sigma^{-1}(n)}$. Luego,

$$det\ A = \sum_{\sigma \in S_n} sg(\sigma) \prod_{i=1}^{n} A_{i\sigma(i)} = \sum_{\sigma^{-1} \in S_n} sg(\sigma^{-1}) \prod_{i=1}^{n} A^t_{i\sigma^{-1}(i)} = det\ A^t$$

■

Teorema 13: Si $A \in \mathbb{F}^{n\times n}$ tiene dos columnas o dos filas iguales, entonces $det\ A = 0$.
Dem/ Suponemos columna k igual a j. Luego, $a_{ik} = a_{ij}$. Dada $\sigma \in S_n$, sea $\tilde{\sigma} = \tau_{k,j} \circ \sigma$, y tenemos que $A_{1\sigma(1)} \cdots A_{n\sigma(n)} = A_{1\tilde{\sigma}(1)} \cdots A_{n\tilde{\sigma}(n)}$. Además, $sg(\tilde{\sigma}) = sg(\tau_{k,j} \circ \sigma) = sg(\tau_{k,j})sg(\sigma) = -sg(\sigma)$. Ergo,

$$sg(\sigma)\prod_{i=1}^{n} A_{i\sigma(i)} + sg(\tilde{\sigma})\prod_{i=1}^{n} A_{i\tilde{\sigma}(i)} = 0$$

de donde se van cancelando de a pares, por lo tanto, el determinante es cero. Notamos esto pues S_n se descompone como la unión disjunta de las permutaciones pares e impares, que se relacionan de la siguiente forma: $\sigma \in S_n^{par} \iff \tau_{k,j} \circ \sigma = \tilde{\sigma} \in S_n^{impar}$.

$$\begin{aligned}
det\ A = \sum_{\sigma \in S_n} sg(\sigma)\prod_{i=1}^{n} A_{i\sigma(i)} &= \sum_{\sigma \in S_n^{par}} sg(\sigma)\prod_{i=1}^{n} A_{i\sigma(i)} + \sum_{\sigma \in S_n^{impar}} sg(\sigma)\prod_{i=1}^{n} A_{i\sigma(i)} \\
&= \sum_{\sigma \in S_n^{par}} sg(\sigma)\prod_{i=1}^{n} A_{i\sigma(i)} + \sum_{\sigma \in S_n^{par}} sg(\tilde{\sigma})\prod_{i=1}^{n} A_{i\tilde{\sigma}(i)} \\
&= \sum_{\sigma \in S_n^{par}} \left[sg(\sigma)\prod_{i=1}^{n} A_{i\sigma(i)} + sg(\tilde{\sigma})\prod_{i=1}^{n} A_{i\tilde{\sigma}(i)} \right] = 0
\end{aligned}$$

Si A tiene dos columnas iguales, entonces A^t tiene dos filas iguales. Luego, $det\ A = det\ A^t = 0$. ■

Notación: Sean $C_1, C_2, ..., C_n \in \mathbb{F}^{n\times 1}$ vectores columna, denotaremos por $A = (C_1, C_2, ..., C_n)$ a la matriz cuyas columnas son $C_1, C_2, ..., C_n$. De manera analoga, si $F_1, F_2, ..., F_n \in \mathbb{F}^{1\times n}$ son vectores fila.

Teorema 14: Sean $A_1, A_2, ..., A_n \in \mathbb{F}^{n\times 1}$ vectores columna y sea $\alpha \in \mathbb{F}$, entonces

$$det\ (A_1, \cdots \alpha A_k \cdots A_n) = \alpha \cdot det\ (A_1 \cdots A_k \cdots A_n)$$

Dem/ Vemos que $A'_{ij} = \begin{cases} A_{ij} & j \neq k \\ \alpha A_{ik} & j = k \end{cases}$. Luego, dada $\sigma \in S_n$, se tiene que

$$A'_{1\sigma(1)}, A'_{2\sigma(2)} \cdots A'_{n\sigma(n)} = \alpha A_{1\sigma(1)} A_{2\sigma(2)} \cdots A_{n\sigma(n)}$$

Por lo tanto,

$$det\ A' = \sum_{\sigma \in S_n} sg(\sigma)\prod_{i=1}^{n} A'_{i\sigma(i)} = \alpha \sum_{\sigma \in S_n} sg(\sigma)\prod_{i=1}^{n} A_{i\sigma(i)} = \alpha\ det\ A$$

■

Corolario 1: Sea $A \in \mathbb{F}^{n\times n}$ y $\alpha \in \mathbb{F}$, entonces:

- $det(\alpha A) = \alpha^n\ det\ A$
- Y A tiene una columna o fila nula, entonces $det\ A = 0$

Corolario 2: Sean $A_1, A_2, ..., A_n \in \mathbb{F}^{1\times n}$ vectores fila y sea $\alpha \in \mathbb{F}$, entonces

$$det \begin{pmatrix} A_1 \\ \vdots \\ \alpha A_k \\ \vdots \\ A_n \end{pmatrix} = \alpha\ det \begin{pmatrix} A_1 \\ \vdots \\ A_k \\ \vdots \\ A_n \end{pmatrix}$$

Teorema 15: Sea $A \in \mathbb{F}^{n\times n}$ y sean $A_1, ..., A_n \in \mathbb{F}^{n\times 1}$ las columnas de A, supongamos que $A_k = B_k + C_k$ y sean las matrices $B = (A_1, ..., A_{k-1}, B_k, A_{k+1}, ..., A_n)$ y $C = (A_1, ..., A_{k-1}, C_k, A_{k+1}, ..., A_n)$, entonces $det\ A = det\ B + det\ C$.

Dem/ Denotemos $B_k = \begin{pmatrix} B_{1k} \\ \vdots \\ B_{nk} \end{pmatrix}$ y $C_k = \begin{pmatrix} C_{1k} \\ \vdots \\ C_{nk} \end{pmatrix}$, sigue que $B_{ij} = \begin{cases} A_{ij} & j \neq k \\ B_{ik} & j = k \end{cases}$ y $C_{ij} = \begin{cases} A_{ij} & j \neq k \\ C_{ik} & j = k \end{cases}$.

Luego si $\sigma \in S_n$, tenemos que $A_{1\sigma(1)} \dots A_{n\sigma(n)} = B_{1\sigma(1)} \dots B_{n\sigma(n)} + C_{1\sigma(1)} \dots C_{n\sigma(n)}$, pues siempre existe un $l \in [\![1, n]\!]$ tal que $\sigma(l) = k$, y así $A_{l\sigma(l)} = k$, y asi $A_{l\sigma(l)} = B_{l\sigma(l)} + C_{l\sigma(l)}$. Finalmente,

$$\begin{aligned} det\ A &= \sum_{\sigma \in S_n} sg(\sigma) \prod_{i=1}^{n} A_{i\sigma(i)} = \sum_{\sigma \in S_n} sg(\sigma) \left[\prod_{i=1}^{n} B_{i\sigma(i)} + \prod_{i=1}^{n} C_{i\sigma(i)} \right] \\ &= \sum_{\sigma \in S_n} sg(\sigma) \prod_{i=1}^{n} B_{i\sigma(i)} + \sum_{\sigma \in S_n} sg(\sigma) \prod_{i=1}^{n} C_{i\sigma(i)} = det\ B + det\ C \end{aligned}$$

■

Teorema 16: Sea $A \in \mathbb{F}^{n\times n}$ y $A_1, ..., A_n \in \mathbb{F}^{n\times 1}$ las filas de A, supongamos que $A_k = B_k + C_k$ y sean las matrices B cuyas filas son $A_1, ..., A_{k-1}, B_k, A_{k+1}, ..., A_n$ y C, cuyas filas son $A_1, ..., A_{k-1}, C_k, A_{k+1}, ..., A_n$, entonces $det\ A = det\ B + det\ C$.

Teorema 17: Sean $A_1, ..., A_n \in \mathbb{F}^{n\times 1}$, entonces $det(A_1 \dots A_j \dots A_i \dots A_n) = -det(A_1 \dots A_i \dots A_j \dots A_n)$.

Dem/ Sea $\tilde{A} = (A_1 \dots (A_i + A_j) \dots (A_i + A_j) \dots A_n)$, luedo $det\ \tilde{A} = 0$

$$\begin{aligned} 0 &= det(A_1 \dots (A_i + A_j) \dots (A_i + A_j) \dots A_n) \\ &= det(A_1 \dots A_i \dots A_i \dots A_n) + det(A_1 \dots A_i \dots A_j \dots A_n) \\ &+ det(A_1 \dots A_j \dots A_i \dots A_n) + det(A_1 \dots A_j \dots A_j \dots A_n) \end{aligned}$$

De donde se concluye que $det(A_1 \dots A_i \dots A_i \dots A_n) = -det(A_1 \dots A_j \dots A_i \dots A_n)$. ■

Teorema 18: Sea $A \in \mathbb{F}^{n\times n}$ y sea A' la matriz que se obtiene de A sumando a la j-ésima columna un múltiplo de la k-ésima columna, con $j \neq k$, entonces $det\ A = det\ A'$.

Dem/ Sin perder generalidad, suponemos $j < k$. Sean $A_1, ..., A_n$ las columnas de A, entonces

$$\begin{aligned} det\ A' &= det(A_1 \dots A_{j-1}(A_j + \alpha A_k)A_{j+1} \dots A_k \dots A_n) \\ &= det(A_1 \dots A_{j-1}A_jA_{j+1} \dots A_k \dots A_n) + det(A_1 \dots A_{j-1}(\alpha A_k)A_{j+1} \dots A_k \dots A_n) \\ &= det\ A + \alpha\ det(A_1 \dots A_{j-1}A_kA_{j+1} \dots A_k \dots A_n) \\ &= det\ A \end{aligned}$$

■

Teorema 19: Sea $A \in \mathbb{F}^{n\times n}$ triangular superior, entonces $det\ A = A_{11}A_{22} \dots A_{nn}$.

Dem/ $A_{ij} = 0$ si $i > j$. Para $\sigma \in S_n \neq id$, siempre existe un i tal que $i > \sigma(i)$. Si esto no sucediera, se tendría que $n \leq \sigma(n) \leq n$, es decir, $\sigma(n) = n$. Luego, $n-1 \leq \sigma(n-1) \leq n-1$, es decir, $n-1 = \sigma(n-1)$. Y asi para todo $i \in [\![1, n]\!]$. Pero esto es absurdo, pues $\sigma \neq id$. Esto quiere decir que en la definición de $det\ A$, todos los sumandos correspondientes a $\sigma \neq id$ son nulos, por lo tanto,

$$det\ A = \sum_{\sigma \in S_n} sg(\sigma) \prod_{i=1}^{n} A_{i\sigma(i)} = sg(id) \prod_{i=1}^{n} A_{ii} = \prod_{i=1}^{n} A_{ii}$$

■

Una matriz $A \in \mathbb{F}^{n\times n}$ se dice **invertible** si existe $B \in \mathbb{F}^{n\times n}$ tal que $AB = BA = I$. Luego, B se llama la **matriz inversa** de A y se denota $B = A^{-1}$. La matriz inversa es única.

Sea $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, buscamos $B = \begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix}$ tal que $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

Tenemos un sistema de 4 ecuaciones con 4 incognitas: $ae+bg = 1, af+bh = 0, ce+dg = 0, cf+dh = 1$. Sigue que $d = d(ae+bg) - b(cf+dh) = e(ad-bc)$. Analogamente, se resuelven el resto. Y finalmente, si $det\ A = ad - bc \neq 0$, entonces el sistema tiene solución y la matriz inversa es

$$B = \frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

Teorema 20: $A \in \mathbb{F}^{n\times n}$ es invertible si y solo si $det\ A \neq 0$. Además, $det\ A^{-1} = (det\ A)^{-1}$.
Dem/ Si A es invertible entonces $AA^{-1} = I$. Luego, $1 = det\ I = det\ A \cdot det\ A^{-1}$. Ambos deben ser no nulos, y además implica que $det\ A^{-1} = (det\ A)^{-1}$. ■

2.1. Desarrollo del Determinante por Filas o Columnas

Definimos $S_n^j = \{\sigma \in S_n : \sigma(1) = j\}$, es decir, son las permutaciones donde j va al primer elemento. Sea $A \in \mathbb{F}^{n\times n}$ y sean $i, j \in [\![1, n]\!]$, se define $A(i|j)$ como la matriz $(n-1)\times(n-1)$ que se obtiene suprimiendo la i-ésima fila y la j-ésima columna de A.
Teorema 21: Si $A \in \mathbb{F}^{n\times n}$, entonces

$$det\ A = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{1+j} A_{1j}\ det\ A(1|j)$$

Dem/ El conjunto de todas las permutaciones de n elementos puede describirse como la unión disjunta de las permutaciones que mandan al 1 a $j \in [\![1, n]\!]$. Luego, $S_n = S_n^1 \cup \ldots \cup S_n^n$. Ahora bien, $\sigma \in S_n^j$ es una permutación de $n-1$ elementos (S_{n-1}). A cada elemento $\sigma \in S_n^j$ le corresponde un único elemento $\sigma^j \in S_{n-1}$. Para calcular $sg(\sigma)$ uno debe expresar σ como una composición de trasposiciones (hay que contar la cantidad de intercambios para llegar de $(1, ..., j-1, j+1, ..., n)$ a $(\sigma(2), \sigma(3), ..., \sigma(n))$. Y como uno tiene que hacer $j-1$ intercambios para llegar de $(1, 2, ..., n)$ a $(j, 2, 3, ..., n)$ y luego hacer los intercambios necesarios sobre los últimos elementos para transformar $(j, 2, 3, ..., n)$ en $(j, \sigma(2), \sigma(3), ..., \sigma(n))$. Luego tenemos que $sg(\sigma) = (-1)^{j-1} sg(\sigma^j) = (-1)^{1+j} sg(\sigma^j)$. Finalmente,

$$\begin{aligned} det\ A &= \sum_{\sigma\in S_n} sg(\sigma) \prod_{i=1}^{n} A_{i\sigma(i)} = \sum_{j=1}^{n} \sum_{\sigma\in S_n^j} sg(\sigma) \prod_{i=1}^{n} A_{i\sigma(i)} \\ &= \sum_{j=1}^{n} \sum_{\sigma\in S_n^j} sg(\sigma) A_{1j} \prod_{i=2}^{n} A_{i\sigma(i)} \\ &= \sum_{j=1}^{n} \sum_{\sigma^j\in S_{n-1}} (-1)^{1+j} sg(\sigma^j) A_{1j} \prod_{i=1}^{n-1} A(1|j)_{i\sigma^j(i)} \\ &= \sum_{j=1}^{n} (-1)^{1+j} A_{1j} \sum_{\sigma^j\in S_{n-1}} sg(\sigma^j) \prod_{i=1}^{n-1} A(1|j)_{i\sigma^j(i)} \\ &= \sum_{j=1}^{n} (-1)^{1+j} A_{1j} det\ A(1|j) \end{aligned}$$

■

Nota: El determinante se puede definir recursivamente. Para matrices $A \in \mathbb{F}^{1\times 1}$ se define $det\ A = A$ y luego, dado $n \in \mathbb{N}$, se define el determinante de una matriz $A \in \mathbb{F}^{(n+1)\times(n+1)}$ como

$$det\ A = \sum_{j=1}^{n+1} (-1)^{i+j} A_{ij}\ det\ A(1|j)$$

Teorema 22: (Desarrollo i-ésima fila): Sea $A \in \mathbb{F}^{n\times n}$, $i \in [\![1, n]\!]$, entonces $det\ A = \sum_{j=1}^{n}(-1)^{i+j}A_{ij}det\ A(i|j)$.

Teorema 23: (j-ésima columna): Sea $A \in \mathbb{F}^{n\times n}$, $j \in [\![1, n]\!]$, entonces $det\ A = \sum_{i=1}^{n}(-1)^{i+j}A_{ij}det\ A(i|j)$.

Sea $A \in \mathbb{F}^{n\times n}$, el escalar $C_{ij} = (-1)^{i+j}\ det\ A(i|j)$ se llama **cofactor** i, j de A.
La matriz $C = (C_{ij})$ se llama **matriz de cofactores** de A.
La **matriz adjunta** de $A \in \mathbb{F}^{n\times n}$, $adj\ A$, es la matriz transpuesta de la matriz de los cofactores de A:

$$(adj\ A)_{ij} = (-1)^{i+j}\ det\ A(j|i)$$

Teorema 24: Sea $A \in \mathbb{F}^{n\times n}$, entonces $A\ (adj\ A) = (adj\ A)A = (det\ A)I$.
Dem/ Hay que ver que $(A(adj\ A))_{ij} = (det\ A)\delta_{ij}$.
Si $i \neq j$, entonces

$$(A\ (adj\ A))_{ij} = \sum -k = 1^n A_{ik}(adj\ A)_{kj} = \sum_{k=1}^{n}(-1)^{k+j}A_{ik}det\ A(j|k) = det\ A'n$$

donde A' es la matriz tal que $(A')_{ik} = (A')_{jk}$ para todo $k \in [\![1, n]\!]$ y tiene todas sus otras entradas iguales a A. Pero en A', la columna i es igual a la columna j. Luego, $0 = det\ A' = (A\ (adj\ A))_{ij}$. Finalmente,

$$(A\ (adj\ A))_{ii} = \sum_{k=1}^{n} A_{ik}(adj\ A)_{ki} = \sum_{k=1}^{n}(-1)^{i+k}A_{ik}det\ A(i|k) = det\ A$$

■

Teorema 25: Sea $A \in \mathbb{F}^{n\times n}$, $det\ A \neq 0$, entonces A es invertible y vale $A^{-1} = \frac{1}{det\ A}adj\ A$.
Dem/ $(\frac{1}{det\ A}adj\ A)A = A(\frac{1}{det\ A}adj\ A) = I$ ■

Teorema 26: Si $A \in \mathbb{F}^{n\times n}$ tiene una inversa a izquierda, entonces A es invertible.
Dem/ Suponiendo que existe $B \in \mathbb{F}^{n\times n}$ tal que $I = BA$, sigue que $1 = det(BA) = (det\ B)(det\ A)$ y en particular $det\ A \neq 0$. Luego A es invertible. ■

El **permanente** de una matriz $A \in \mathbb{F}^{n\times n}$ se define sumando todos los factores que se pueden armar eligiendo un elemento en cada fila recorriendo todas las columnas, pero sin tener en cuenta el signo de la permutación de las columnas.

$$perm\ A = \sum_{\sigma\in S_n}\prod_{i=1}^{n} A_{i\sigma(i)}$$

Además, $perm\ A = perm\ A^t$, y si uno multipica la columna k de A por α, entonces $perm\ A' = \alpha\ perm\ A$. Pero si tiene dos columnas iguales, no necesariamente vale $perm\ A = 0$. Tampoco es cierto que $perm(AB) = (perm\ A)(perm\ B)$.

Vector Canónico: $e_{\sigma(i)} = (e_{1j})_{j=1}^{n}$ donde $e_{1j} = \begin{cases} 0 & j \neq \sigma(i) \\ 1 & j = \sigma(i) \end{cases}$