Problemas resueltos

7. Dada $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ hallar, en cada caso, todas las matrices $A \in \mathbb{F}^{2\times 2}$ que satisfacen la condición dada:

   a) $AB = 0$,
   b) $BA = 0$,
   c) $A^2 = 0$.

Solución:

Para resolver el apartado a) del problema, consideremos $A = \begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix} \in \mathbb{F}^{2\times 2}$ y calculemos la matriz AB,

$$AB = \begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & x+2y \\ 0 & z+2w \end{pmatrix}.$$

Luego, si $AB = 0$, tenemos que cada entrada de la matriz $\begin{pmatrix} 0 & x+2y \\ 0 & z+2w \end{pmatrix}$ debe ser igual a 0, de donde sigue que

$$x + 2y = 0 \quad \text{y} \quad z + 2w = 0,$$

o, en forma eequivalente,

$$x = -2y \quad \text{y} \quad z = -2w.$$

Por lo tanto, el conjunto de tadas las matrices $A \in \mathbb{F}^{2\times 2}$ tales que $AB = 0$ es el conjunto S dado por

$$S = \left\{ \begin{pmatrix} -2y & y \\ -2w & w \end{pmatrix} : y, w \in \mathbb{F} \right\}.$$

Para la parte b) el razonamiento es análogo. Haciendo el producto, obtenemos que la matriz BA es de la forma

$$BA = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z & w \\ 2z & 2w \end{pmatrix}.$$

Luego, si $BA = 0$, debe ser $z = w = 0$, y en consecuencia, todas las matrices $A \in \mathbb{F}^{2\times 2}$ son las matrices del conjunto

$$S = \left\{ \begin{pmatrix} x & y \\ 0 & 0 \end{pmatrix} : x, y \in \mathbb{F} \right\}.$$

En el apartado c), notemos que si $A = \begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix}$, entonces A^2 es de la forma

$$A^2 = \begin{pmatrix} x^2 + yz & xy + yw \\ xz + zw & zy + w^2 \end{pmatrix}.$$

Luego, si $A^2 = 0$ tenemos que

$$\begin{cases} x^2 + yz = 0 \\ y\,(x+w) = 0 \\ z\,(x+w) = 0 \\ zy + w^2 = 0 \end{cases}.$$

De la primera ecuación tenemos que $x = (-yz)^{\frac{1}{2}}$ (notemos que si $\mathbb{F} = \mathbb{C}$, $(-yz)^{\frac{1}{2}}$ siempre existe, mientras que si consideramos $\mathbb{F} = \mathbb{R}$ o $\mathbb{F} = \mathbb{Q}$, para que exista solución debemos suponer que $-yz \geq 0$). Ahora, si $yz = 0$, entonces de la primera ecuación y la cuarta ecuación obtenemos que $x^2 = w^2 = 0$ y por lo tanto $x = w = 0$. Sigue de esto que, en este caso, las matrices deben ser de la forma

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ z & 0 \end{pmatrix} \quad \text{o} \quad \begin{pmatrix} 0 & y \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{1}$$

En caso contrario (esto es si $yz \neq 0$) debe ser $y \neq 0$ y $z \neq 0$. Luego, teniendo en cuenta la segunda o la tercera ecuación, resulta $x = -w$. Así, obtenemos que el conjunto de todas las matrices $A \in \mathbb{F}$ para las cuales se verifica que $A^2 = 0$ es el conjunto

$$S = \left\{ \begin{pmatrix} (-yz)^{\frac{1}{2}} & y \\ z & -(-yz)^{\frac{1}{2}} \end{pmatrix} : y, z \in \mathbb{F} \right\}$$

cuando $\mathbb{F} = \mathbb{C}$, y

$$S = \left\{ \begin{pmatrix} (-yz)^{\frac{1}{2}} & y \\ z & -(-yz)^{\frac{1}{2}} \end{pmatrix} : y, z \in \mathbb{F} \text{ y } yz \leq 0 \right\}$$

cuando $\mathbb{F} = \mathbb{R}$ o $\mathbb{F} = \mathbb{Q}$ (notar que las matrices de la forma (1) son elementos del conjunto S).

19. *a*) Dada $\sigma \in S_n$, mostrar que existe $P_\sigma \in \mathbb{R}^{n\times n}$, cuyas entradas son solo ceros y unos, y tal que

$$P_\sigma \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ \vdots \\ n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma(1) \\ \sigma(2) \\ \vdots \\ \sigma(n) \end{pmatrix}$$

b) Probar que $P_\sigma P_\mu = P_{\mu\circ\sigma}$ para todas $\sigma, \mu \in S_n$.

c) Probar que $\det P_\sigma = P_\sigma$ para toda $\sigma \in S_n$.

Solución:

Para mostrar la validez del apartado a), dada $\sigma \in S_n$, consideremos la matriz $P_\sigma = (p_{ij}) \in \mathbb{R}^{n\times n}$, cuyas entradas son

$$p_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } j = \sigma(i) \\ 0 & \text{si } j \neq \sigma(i) \end{cases}.$$

Veamos que

$$P_\sigma \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ \vdots \\ n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma(1) \\ \sigma(2) \\ \vdots \\ \sigma(n) \end{pmatrix}.$$

En efecto, si

$$P_\sigma \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ \vdots \\ n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix},$$

entonces, para $k : 1, ..., n,$

$$a_k =_{j=1}^{n} p_{kj} j = p_{k\sigma(k)} \sigma(k) = \sigma(k)$$

(las igualdades anteriores siguen del hecho que $p_{kj} = 0$ para todo $j \neq \sigma(k)$ y $p_{k\sigma(k)} = 1$).

Para probar b) supongamos que $P_\sigma = (p_{ij})$ y $P_\mu = (q_{ij})$. Luego, la entrada s_{kl} de la matriz $P_\sigma P_\mu$ es de la forma

$$s_{kl} =_{j=1}^{n} p_{kj} q_{jl}.$$

Ahora, teniendo en cuenta que

$$p_{kj} = \begin{cases} 0 & \text{si } j \neq \sigma(k) \\ 1 & \text{si } j = \sigma(k) \end{cases}$$

y que

$$q_{jl} = \begin{cases} 0 & \text{si } l \neq \mu(j) \\ 1 & \text{si } l = \mu(j) \end{cases},$$

obtenemos que

$$s_{kl} =_{j=1}^{n} p_{kj} q_{jl} = \begin{cases} 1 & \text{si } j = \sigma(k) \text{ y } l = \mu(j) \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases} = \begin{cases} 1 & \text{si } l = \mu(\sigma(k)) \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}.$$

Por lo tanto, la entrada s_{kl} de la matriz $P_\sigma P_\mu$ coincide con la entrada s_{kl} de la matriz $P_{\mu \circ \sigma}$.

Para la parte c), observemos que el enunciado del apartado anterior puede extenderse a un número finito de permutaciones (esto puede probarse usando inducción), i.e.,

$$P_{\sigma_1} P_{\sigma_2} ... P_{\sigma_m} = P_{\sigma_m \circ \sigma_{m-1} \circ ... \circ \sigma_1}$$

Ahora, descomponiendo σ como composición de trasposiciones

$$\sigma = \tau_1 \circ \tau_2 \circ ... \circ \tau_k$$

obtenemos que

$$P_\sigma = P_{\tau_k \circ \tau_{k-1} \circ ... \circ \tau_1} = P_{\tau_1} P_{\tau_2} ... P_{\tau_k}$$

y, consecuentemente,

$$\det P_\sigma = \det P_{\tau_1} \det P_{\tau_2} ... \det P_{\tau_k}.$$

Para completar la prueba, solo falta notar que la matriz de permutación asociada a una transposición es una matriz que se obtiene intercambiando dos filas de la matriz identidad (¡probarlo!). Luego, el determinante de cada matriz P_{τ_j}, $j = 1, ..., k$, es igual a -1 y, en consecuencia, $\det P_\sigma = (-1)^k = P_\sigma$.

30. Sean $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -8 \\ -8 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$ y $B = A - \alpha I$. Hallar los valores de α de manera que B no sea invertible.

Solución:

Observemos que la matriz B es de la forma

$$\begin{aligned} B &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -8 \\ -8 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} - \alpha \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1-\alpha & 0 & 0 & -8 \\ -8 & 1-\alpha & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1-\alpha & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 5-\alpha \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Ahora, sabemos que una matriz cuadrada es invertible si y solo si su determinante es distinto de cero. Calculemos el determinante de B, desarrollándolo por la tercera columna (elgimos la tercera por que es la que tiene más ceros en sus entradas),

$$\begin{aligned} \det(B) &= (1-\alpha)\det \begin{pmatrix} 1-\alpha & 0 & -8 \\ -8 & 1-\alpha & 0 \\ 1 & 0 & 5-\alpha \end{pmatrix} \\ &= (1-\alpha)(1-\alpha)((1-\alpha)(5-\alpha)+8). \end{aligned}$$

Así, tenemos que

$$\det(B) = 0 \Leftrightarrow (1-\alpha)(1-\alpha)((1-\alpha)(5-\alpha)+8) = 0$$

y, por lo tanto (recordando que $(1-\alpha)(1-\alpha)((1-\alpha)(5-\alpha)+8) = 0$ si y solo si $1-\alpha = 0$ o $(1-\alpha)(5-\alpha)+8 = \alpha^2 - 6\alpha + 13 = 0$), resulta que

$$\det(B) = 0 \Leftrightarrow \alpha = 1 \text{ o } \alpha = 3-2i \text{ o } \alpha = 3+2i.$$

Luego, la matriz B no es invertible si y solo si $\alpha = 1$, $\alpha = 3-2i$ o $\alpha = 3+2i$.