

Introducción a la Matemática

Iker M. Canut

March 25, 2020

Contents

1	Unidad 1: Numeros Reales
---	--------------------------

3

1 Unidad 1: Numeros Reales

Propiedad Cancelativa de la Suma

Sea $d = a + b$, y por ende, $d = b + c$, por el Axioma 5, existe y que es opuesto a a , entonces:

$$y + d = y + (a + b) \stackrel{A2}{=} (y + a) + b = 0 + b \stackrel{A4}{=} b$$

$$y + d = y + (a + c) \stackrel{A2}{=} (y + a) + c = 0 + c \stackrel{A4}{=} c$$
$$b = c$$

□

Unicidad del Elemento Neutro de la suma

Supongamos que $0'$ es un numero que tambien funciona como neutro de la suma, entonces

$$a + 0 = a \wedge a + 0' = a$$

$$a + 0 = a + 0'$$

Y por propiedad cancelativa de la suma

$$0 = 0'$$

□

Unicidad del Elemento Opuesto

La existencia de un numero b esta dada por el axioma 5, hay que demostrar que es unico. Suponiendo que existe $b' / a + b' = b' + a = 0$, tenemos que

$$a + b = 0 \wedge a + b' = 0$$

$$a + b = a + b'$$

Y por propiedad cancelativa de la suma

$$b = b'$$

□

$-(-a) = a$

Sea b el opuesto de a , se puede concluir que $a + b = 0 \wedge b = (-a) \wedge a = (-b)$

(1) \wedge (2) \wedge (3)

$$-(-a) \stackrel{(2)}{=} -b \stackrel{(3)}{=} a$$

□

$-0 = 0$

Por el axioma 5, todo numero real tiene su opuesto. Llamemos $0'$ al opuesto de 0 , siendo $0 + 0' = 0$ y Del axioma 3 se concluye que $0 + 0 = 0$

$$si \ 0 + 0' = 0 \wedge 0 + 0 = 0 \Rightarrow 0' = 0$$

□

$$0 \cdot a = 0$$

$$\begin{aligned} a \cdot 0 &\stackrel{A4}{=} a \cdot 0 + 0 \stackrel{A5}{=} a \cdot 0 + (a + (-a)) \stackrel{A2}{=} (a \cdot 0 + a) + (-a) \stackrel{A4}{=} (a \cdot 0 + a \cdot 1) + (-a) \stackrel{A3}{=} \\ &a(0 + 1) + (-a) \stackrel{A4}{=} a \cdot 1 + (-a) \stackrel{A4}{=} a + (-a) \stackrel{A5}{=} 0 \end{aligned}$$

□

$$a(-b) = -(ab) = (-a)b$$

$$\begin{aligned} a(-b) &\stackrel{A4}{=} a(-b) + 0 \stackrel{A5}{=} a(-b) + (ab + -(ab)) \stackrel{A2}{=} (a(-b) + ab) + -(ab) \stackrel{A3}{=} \\ &a((-b) + b) + -(ab) \stackrel{A5}{=} a \cdot 0 + -(ab) \stackrel{T2.3}{=} 0 + -(ab) \stackrel{A4}{=} -(ab) \end{aligned}$$

Y análogamente

$$\begin{aligned} (-a)b &\stackrel{A4}{=} (-a)b + 0 \stackrel{A5}{=} (-a)b + (ab + -(ab)) \stackrel{A2}{=} ((-a)b + ab) + -(ab) \stackrel{A3}{=} \\ &b((-a) + a) + -(ab) \stackrel{A5}{=} b \cdot 0 + -(ab) \stackrel{T2.3}{=} 0 + -(ab) \stackrel{A4}{=} -(ab) \end{aligned}$$

Reescribiendo

$$a(-b) = -(ab) = (-a)b$$

□

$$(-a)(-b) = ab$$

Analizamos la expresión $(-a)(-b)$, llamemos $c = -b$. Por el teorema anterior obtenemos:

$$(-a)c = -(ac)$$

Pero reemplazando por nuestra definición de $c = -b$, queda:

$$-(ac) = -(a(-b))$$

Que por la aplicación del mismo teorema nos da:

$$-(a(-b)) = -(-(ab))$$

Y finalmente por el teorema $-(-a) = a$:

$$-(-(ab)) = ab$$

Reescribiendo:

$$(-a)(-b) = ab$$

□

$$a(b - c) = ab - ac$$

Por la definición de diferencia, se puede reescribir como:

$$a(b + (-c)) \stackrel{A3}{=} ab + a(-c) \stackrel{T2.4}{=} ab + -(ac)$$

Que por la definición de diferencia, se puede reescribir como: $ab - ac$

□

Propiedad cancelativa del producto

Analicemos $ab = ac$, llamemos $d = ab = ba$ y además $d = ac = ca$:

$$da^{-1} \stackrel{Def}{=} (ba)a^{-1} \stackrel{Asoc}{=} b(aa^{-1}) \stackrel{Asoc}{=} b.1 \stackrel{Neutro}{=} b$$

Y análogamente:

$$da^{-1} \stackrel{Def}{=} (ca)a^{-1} \stackrel{Asoc}{=} c(aa^{-1}) \stackrel{Recip}{=} c.1 \stackrel{Neutro}{=} c$$

Reescribiendo:

$$b = c$$

□

Unidad del elemento neutro del producto

Sabemos que existe 1, tal que $\forall a, a.1 = a$, supongamos que existe $1'$ que cumple lo mismo, entonces:

$$a.1 = a \wedge a.1' = a$$

Entonces:

$$a.1 = a.1'$$

Y por el teorema anterior:

$$1 = 1'$$

□

Unidad del elemento recíproco

Sabemos que $\forall a \exists b \in \mathbb{R} / ab = 1$, supongamos que existe b' que cumple lo mismo, entonces:

$$a.b = 1 \wedge a.b' = 1$$

Entonces:

$$a.b = a.b'$$

Y por el teorema anterior:

$$b = b'$$

□

$\nexists 0^{-1}$

Asumimos $\exists 0^{-1} \in \mathbb{R}$ tal que

$$0.0^{-1} = 1$$

Pero por $a.0 = 0.a = 0, \forall a \in \mathbb{R}$

$$0.0^{-1} = 0$$

Esto es una contradicción a lo supuesto.

$$\therefore \nexists 0^{-1}$$

□

$1^{-1} = 1$

$$1^{-1} =$$

<Existencia del elemento neutro del producto>

$$1.1^{-1} =$$

<Existencia del elemento recíproco>

$$1$$

□

$$\frac{a}{1} = a; a \neq 0, \frac{1}{a} = a^{-1}$$

Analizamos $\frac{a}{1}$

$$\frac{a}{1} =$$

<Definición de cociente>

$$a \cdot 1^{-1} =$$

< $1^{-1} = 1$ >

$$a \cdot 1 =$$

<Elemento neutro del producto>

$$a$$

A

Analizando $\frac{1}{a}$ cuando $a \neq 0$

$$\frac{1}{a} =$$

<Definición de cociente>

$$1 \cdot a^{-1} =$$

<Elemento neutro del producto>

$$a^{-1}$$

□

$$ab = 0 \Rightarrow a = 0 \vee b = 0$$

Hay dos casos posibles para la expresión $ab = 0$:

$$ab = 0 \Rightarrow$$

< $a = b \Rightarrow ac = bc$ >

$$ab \cdot b^{-1} = 0b^{-1} \Rightarrow$$

< $a \cdot 0 = 0$ >

$$ab \cdot b^{-1} = 0 \Rightarrow$$

<Propiedad asociativa>

$$a \cdot (bb^{-1}) = 0 \Rightarrow$$

<Existencia del elemento recíproco>

$$a \cdot 1 = 0 \Rightarrow$$

<Existencia del elemento neutro del producto>

$$a = 0$$

$$ab = 0 \Rightarrow$$

< $a = b \Rightarrow ca = cb$ >

$$a^{-1} \cdot ab = b^{-1}0 \Rightarrow$$

< $0 \cdot a = 0$ >

$$a^{-1} \cdot ab = 0 \Rightarrow$$

<Propiedad asociativa>

$$(a^{-1}a) \cdot b = 0 \Rightarrow$$

<Existencia del elemento recíproco>

$$1 \cdot b = 0 \Rightarrow$$

<Existencia del elemento neutro del producto>

$$b = 0$$

Como las dos afirmaciones son válidas:

$$ab = 0 \Rightarrow a = 0 \vee b = 0$$

□

$$b \neq 0 \wedge d \neq 0 \Rightarrow (bd)^{-1} = b^{-1}.d^{-1}$$

Analizamos la expresión $1 = 1$ que, por existencia del elemento neutro del producto, resulta ser equivalente a:

$$1 = 1.1$$

Observamos 3 cosas, por existencia y unicidad del elemento recíproco:

$$bc.(bc)^{-1} = 1$$

$$b.b^{-1} = 1$$

$$c.c^{-1} = 1$$

Y reemplazando en la expresión $1 = 1.1$:

$$bc.(bc)^{-1} = (b.b^{-1}).(c.c^{-1})$$

Que por propiedad asociativa y conmutativa del producto, reescribimos como:

$$bc.(bc)^{-1} = bc.(b^{-1}.c^{-1})$$

Y finalmente, por cancelativa del producto, obtenemos:

$$(bc)^{-1} = b^{-1}.c^{-1}$$

□

$$b \neq 0 \wedge d \neq 0 \Rightarrow \frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad+cb}{bd}$$

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} =$$

<Definición de cociente>

$$ab^{-1} + cd^{-1} =$$

<Existencia del elemento neutro del producto>

$$1.ab^{-1} + 1.cd^{-1} =$$

<Existencia del elemento recíproco>

$$(dd^{-1}).(ab^{-1}) + (bb^{-1}).(cd^{-1}) =$$

<Reescribiendo con propiedad conmutativa y asociativa>

$$(ad).(b^{-1}d^{-1}) + (cb).(b^{-1}d^{-1}) =$$

< $(ab)^{-1} = a^{-1}b^{-1}$ >

$$(ad).(bd)^{-1} + (cb).(bd)^{-1} =$$

<Propiedad distributiva>

$$(ad + cb).(bd)^{-1} =$$

<Definición de cociente>

$$\frac{ad + cb}{bd}$$

$$\therefore \frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad + cb}{bd}$$

□

$$b \neq 0 \wedge d \neq 0 \Rightarrow \frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$$

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} =$$

<Definición de cociente>

$$(ab^{-1}).(cd^{-1}) =$$

<Reescribiendo con propiedad conmutativa y asociativa>

$$(ac).(b^{-1}d^{-1}) =$$

< $(ab)^{-1} = a^{-1}b^{-1}$ >

$$(ac).(bd)^{-1} =$$

<Definición de cociente>

$$\frac{ac}{bd}$$

$$\therefore \frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$$

□

$$a \neq 0 \wedge b \neq 0 \Rightarrow \left(\frac{a}{b}\right)^{-1} = \frac{a^{-1}}{b^{-1}}$$

$$\left(\frac{a}{b}\right)^{-1}$$

<Definición de cociente>

$$(ab^{-1})^{-1}$$

$$<(ab)^{-1} = a^{-1} \cdot b^{-1}>$$

$$a^{-1}(b^{-1})^{-1}$$

<Definición de cociente>

$$\frac{a^{-1}}{b^{-1}}$$

□

$$(-1) \cdot a = -a$$

$$-1 \cdot a =$$

<Existencia del elemento neutro de la suma>

$$-1 \cdot a + 0 =$$

<Existencia del elemento opuesto>

$$-1 \cdot a + (a + -a) =$$

<Propiedad asociativa de la suma>

$$(-1 \cdot a + a) + -a =$$

<Existencia del elemento neutro de la multiplicacion>

$$(-1 \cdot a + 1 \cdot a) + -a =$$

<Propiedad distributiva>

$$a \cdot (-1 + 1) + -a =$$

<Existencia del elemento opuesto>

$$a \cdot 0 + -a =$$

$$<a \cdot 0 = 0>$$

$$0 + -a =$$

<Existencia del elemento neutro de la suma>

$$-a$$

□

Suponemos $\mathbb{R}^+ \subset \mathbb{R}$, tal que cumple:

- $a, b \in \mathbb{R}^+ \Rightarrow a + b, ab \in \mathbb{R}^+$
- $\forall a \neq 0 \in \mathbb{R}, a \in \mathbb{R}^+ \vee -a \in \mathbb{R}^+$
- $0 \notin \mathbb{R}^+$

Llamamos a estos números "positivos". Definimos $<, >, \geq, \leq$ de la forma que está en el apunte.

$$a > 0 \Leftrightarrow a \in \mathbb{R}^+$$

Sea $a > 0, a \in \mathbb{R}$:

$$a > 0$$

<Definición de $<$ >

$$a - 0 \in \mathbb{R}^+$$

<Definición de resta>

$$a + (-0) \in \mathbb{R}^+$$

$$<0 = -0>$$

$$a + 0 \in \mathbb{R}^+$$

<Elemento neutro de la suma>

$$a \in \mathbb{R}^+$$

<Elemento neutro de la suma>

Sea $a \in \mathbb{R}^+$:

$$a \in \mathbb{R}^+$$

<Elemento neutro de la suma>

$$a + 0 \in \mathbb{R}^+$$

$$\langle 0 = -0 \rangle$$

$$a + (-0) \in \mathbb{R}^+$$

<Definición de resta>

$$a - 0 \in \mathbb{R}^+$$

<Definición de <>>

$$a > 0$$

$$\therefore a > 0 \Leftrightarrow a \in \mathbb{R}^+$$

□

$$a > 0 \Leftrightarrow -a < 0$$

Sea $a > 0, a \in \mathbb{R}$:

$$a > 0$$

$$\langle a > 0 \Leftrightarrow a \in \mathbb{R}^+ \rangle$$

$$a \in \mathbb{R}^+$$

$$\langle a = -(-a) \rangle$$

$$-(-a) \in \mathbb{R}^+$$

<Elemento neutro de la suma>

$$0 + -(-a) \in \mathbb{R}^+$$

<Definición de resta>

$$0 - (-a) \in \mathbb{R}^+$$

<Definición de <>>

$$-a < 0$$

<Definición de <>>

□

$$a < 0 \Leftrightarrow -a > 0$$

Sea $a < 0, a \in \mathbb{R}$:

$$a < 0$$

<Definición de <>>

$$0 - a \in \mathbb{R}^+$$

<Definición de resta>

$$0 + (-a) \in \mathbb{R}^+$$

<Elemento neutro de la suma>

$$-a \in \mathbb{R}^+$$

$$\langle a \in \mathbb{R}^+ \Leftrightarrow a > 0 \rangle$$

$$-a > 0$$

□

Como llamamos a los números en \mathbb{R}^+ positivos, a sus opuestos los llamaremos "negativos". Además Si $a \geq 0$, es "no negativo".

Propiedad de Tricotomía

Para demostrar proposiciones mutuamente excluyentes, optaremos por probar que la ocurrencia de una implica la no ocurrencia de las otras, para todo posible caso.

Sean $a, b \in \mathbb{R}$:

- Caso 1, $a < b$ o sea $b - a \in \mathbb{R}^+$:
Supongamos que además $a = b$, entonces

$$b - a = 0$$

pero por axioma

$$0 \notin \mathbb{R}^+$$

Contradicción.

Supongamos que además $a > b$, entonces

$$a - b \in \mathbb{R}^+$$

pero

$$b - a = -(a - b)$$

entonces por axioma

$$-(a - b) \notin \mathbb{R}^+$$

Contradicción.

- Caso 2, $a = b$ o sea $b - a = 0$:
Supongamos que además $a < b$, entonces

$$b - a \in \mathbb{R}^+$$

pero por axioma

$$0 \notin \mathbb{R}^+$$

Contradicción.

Supongamos que además $a > b$, entonces

$$a - b \in \mathbb{R}^+$$

pero

$$b - a = -(a - b)$$

y por axioma

$$0 = -0 \notin \mathbb{R}^+$$

Contradicción.

- Caso 3, $a > b$ o sea $a - b \in \mathbb{R}^+$:
Supongamos que además $a = b$, entonces

$$a - b = 0$$

pero por axioma

$$0 \notin \mathbb{R}^+$$

Contradicción.

Supongamos que además $a < b$, entonces

$$b - a \in \mathbb{R}^+$$

pero

$$a - b = -(b - a)$$

entonces por axioma

$$-(b-a) \notin \mathbb{R}^+$$

Contradicción.

$$\therefore a < b \vee a = b \vee a > b$$

□

Propiedad Transitiva del Menor

Sean $a, b, c \in \mathbb{R}$, tal que $a < b$ y $b < c$:
Observamos que $b-a, c-b \in \mathbb{R}^+$

$$b-a \in \mathbb{R}^+$$

<Axioma $a, b \in \mathbb{R}^+ \Rightarrow a+b \in \mathbb{R}^+$

$$(b-a) + (c-b) \in \mathbb{R}^+$$

<Reescribiendo>

$$(c-a) + (b-b) \in \mathbb{R}^+$$

<Existencia del opuesto>

$$(c-a) + 0 \in \mathbb{R}^+$$

<Elemento neutro de la suma>

$$c-a \in \mathbb{R}^+$$

<Definición de <>

$$a < c$$

<Definición de <>

□

$$a < b \Rightarrow a+c < b+c$$

Sean $a, b, c \in \mathbb{R}$:

$$a < b$$

Def <

$$b-a \in \mathbb{R}^+$$

<Elemento neutro de la suma>

$$(b-a) + 0 \in \mathbb{R}^+$$

<Existencia del opuesto>

$$(b-a) + (c-c) \in \mathbb{R}^+$$

<Definición de <>

$$(b-a) + (c-c) \in \mathbb{R}^+$$

<Reescribiendo>

$$(b+c) + (-a-c) \in \mathbb{R}^+$$

< $-(a+b) = (-a) + (-b)$

$$(b+c) + -(a+c) \in \mathbb{R}^+$$

<Definición de resta>

$$(b+c) - (a+c) \in \mathbb{R}^+$$

Definición de <>

$$a+c < b+c$$

□

$$a < b \wedge c < d \Rightarrow a+c < b+d$$

Sean $a, b, c, d \in \mathbb{R}$

$a < b$ o sea $b-a \in \mathbb{R}^+$, $c < d$ o sea $d-c \in \mathbb{R}^+$:

$$a < b$$

<Definición de <>

$$b-a \in \mathbb{R}^+$$

<Axioma $a, b \in \mathbb{R}^+ \Rightarrow a+b \in \mathbb{R}^+$

$$(b - a) + (d - c) \in \mathbb{R}^+$$

<Reescribiendo>

$$(b + d) - a - c \in \mathbb{R}^+$$

$$<-a - b = -(a + b)>$$

$$(b + d) - (a + c) \in \mathbb{R}^+$$

<Definición de <>

$$a + c < b + d$$

□

$$a < b \wedge c > 0 \Rightarrow ac < bc$$

Sean $a, b, c \in \mathbb{R}, c > 0$:

Observamos $c > 0 \Rightarrow c \in \mathbb{R}^+$

$$a < b$$

<Definición de <>

$$b - a \in \mathbb{R}^+$$

<Axioma $a, b \in \mathbb{R}^+ \Rightarrow ab \in \mathbb{R}^+$

$$(b - a)c \in \mathbb{R}^+$$

<Propiedad distributiva>

$$bc - ac \in \mathbb{R}^+$$

<Definición de <>

$$ac < bc$$

□

$$a < b \wedge c < 0 \Rightarrow ac > bc$$

Sean $a, b, c \in \mathbb{R}, c < 0$:

Observamos $c < 0 \Rightarrow -c \in \mathbb{R}^+$

$$a < b$$

<Definición de <>

$$b - a \in \mathbb{R}^+$$

<Axioma $a, b \in \mathbb{R}^+ \Rightarrow ab \in \mathbb{R}^+$

$$(b - a)(-c) \in \mathbb{R}^+$$

$$<a = (-1) \cdot a>$$

$$(b - a)c \cdot (-1) \in \mathbb{R}^+$$

<Propiedad distributiva>

$$(bc - ac) \cdot (-1) \in \mathbb{R}^+$$

$$<a = (-1) \cdot a>$$

$$-(bc - ac) \in \mathbb{R}^+$$

$$<-(a - b) = b - a>$$

$$ac - bc \in \mathbb{R}^+$$

<Definición de >>

$$ac > bc$$

□

$$a \neq 0 \Rightarrow a^2 > 0$$

Sea $a \in \mathbb{R}, a \neq 0$ Por la propiedad tricotómica, $a \neq 0 \vee a > 0 \vee a < 0$. Pero $a \neq 0$, entonces $a > 0 \vee a < 0$.

- Caso 1, $a > 0$ o sea $a \in \mathbb{R}^+$:
Por axioma $a, b \in \mathbb{R}^+ \Rightarrow ab \in \mathbb{R}^+$

$$aa \in \mathbb{R}^+ \Leftrightarrow a^2 \in \mathbb{R}^+$$

- Caso 2, $a < 0$ o sea $-a \in \mathbb{R}^+$:

Por axioma $a, b \in \mathbb{R}^+ \Rightarrow ab \in \mathbb{R}^+$

$$(-a)(-a) \in \mathbb{R}^+$$

Que por $(-a)(-a) = aa$

$$aa \in \mathbb{R}^+ \Leftrightarrow a^2 \in \mathbb{R}^+$$

□

$$1 \in \mathbb{R}^+$$

Existen neutros, 0 y 1, $0 \neq 1$

Por axioma $1 \in \mathbb{R}^+ \vee -1 \in \mathbb{R}^+$. Supongo $-1 \in \mathbb{R}^+$, entonces $1 \notin \mathbb{R}^+$
 $-1 \in \mathbb{R}^+$

<Axioma $a, b \in \mathbb{R}^+ \Leftrightarrow ab \in \mathbb{R}^+$

$$(-1) \cdot (-1) \in \mathbb{R}^+$$

$$<aa = (-a)(-a)>$$

$$1 \in \mathbb{R}^+$$

Pero esto es una contradicción con lo supuesto.

□

$$a < b \Leftrightarrow -b < -a$$

Sean $a, b \in \mathbb{R}, a < b$:

$$a < b$$

<Definición de <

$$b - a \in \mathbb{R}^+$$

<Definición de resta>

$$b + (-a) \in \mathbb{R}^+$$

$$<a = -(-a)>$$

$$-(-b) + (-a) \in \mathbb{R}^+$$

<Conmutativa>

$$(-a) + -(-b) \in \mathbb{R}^+$$

<Definición de resta>

$$(-a) - (-b) \in \mathbb{R}^+$$

<Definición de <>

$$-b < -a$$

□

$$ab > 0 \Leftrightarrow a, b \in \mathbb{R}^+ \vee (-a), (-b) \in \mathbb{R}^+$$

Sean $a, b \in \mathbb{R}, a < b$:

$$a < b$$

<Definición de <

$$b - a \in \mathbb{R}^+$$

<Definición de resta>

$$b + (-a) \in \mathbb{R}^+$$

$$<a = -(-a)>$$

$$-(-b) + (-a) \in \mathbb{R}^+$$

<Conmutativa>

$$(-a) + -(-b) \in \mathbb{R}^+$$

<Definición de resta>

$$(-a) - (-b) \in \mathbb{R}^+$$

<Definición de <>

$$-b < -a$$

□