Práctica de Álgebra y Geometría 1

Luciano N. Barletta & Iker M. Canut

April 1, 2020

Contents

1 Ejercicio 2

1.1 Inciso c

Sean $P(x) = 3x^4 - x^2 + ix - 2$ y $Q(x) = 5x - 4 = 5(x - \frac{4}{5})$.
Por algoritmo de la división, existen únicos $C, R \in \mathbb{C}[x]$ tal que:

$$P = C.Q + R$$

$$P = C.5(x - \frac{4}{5}) + \frac{5R}{5}$$

$$\frac{P}{5} = C.(x - \frac{4}{5}) + \frac{R}{5}$$

Llamemos $P' = \frac{P}{5}$, $Q' = x - \frac{4}{5}$, $R' = \frac{R}{5}$. Por regla de Ruffini podemos encontrar C y R con la definición del teorema porque Q' es de la forma $x - \alpha$. C se define recursivamente:

$$\begin{aligned} C(x) = & \frac{3}{5}x^3 + && (1)\\ & (\frac{0}{5} + \frac{4}{5}.\frac{3}{5})x^2 = \frac{12}{5^2}x^2 + && (2)\\ & (-\frac{1}{5} + \frac{4}{5}.\frac{12}{5^2})x = \frac{23}{5^3}x + && (3)\\ & \frac{i}{5} + \frac{4}{5}.\frac{23}{5^3} = \frac{4.23}{5^4} + \frac{1}{5}i && (4) \end{aligned}$$

Y R' siempre queda definido como $a_0 + \alpha.b_0$.

$$\begin{aligned} R' &= -\frac{2}{5} + \frac{4}{5}.(\frac{4.23}{5^4} + \frac{1}{5}i) && (5)\\ &= \frac{4.4.23}{5^5} + \frac{4}{5^2}i - \frac{2}{5} && (6)\\ &= -\frac{4.4.23 - 2.5^4}{5^5} + \frac{4}{5^2}i && (7) \end{aligned}$$

Pero $R' = \frac{R}{5}$

$$R = -\frac{4.4.23 - 2.5^4}{5^4} + \frac{4}{5}i$$

1.2 Inciso d

Sean $P(x) = 3x^6 - x^4 + ix^3 - 2x^2$ y $Q(x) = 5x^3 - 4x^2 = 5x^2(x - \frac{4}{5})$.
Por algoritmo de la división, existen únicos $C, R \in \mathbb{C}[x]$ tal que:

$$P = C.Q + R$$

$$P = C.5x^2(x - \frac{4}{5}) + \frac{5x^2.R}{5x^2}$$

$$\frac{P}{5x^2} = C.(x - \frac{4}{5}) + \frac{R}{5x^2}$$

Llamemos $P' = \frac{P}{5x^2}$, $Q' = x - \frac{4}{5}$, $R' = \frac{R}{5x^2}$. Notamos que P' y Q' son iguales al inciso anterior, entonces C y R también son iguales.

2 Ejercicio 3

En los incisos $2c$ y $2d$ el resultado es el mismo, pues la división entre P y Q en ambos ejercicios es equivalente. En otras palabras, los polinomios están multiplicados por la misma expresión.

3 Ejercicio 4

3.1 Inciso e

Sea $P(x) = x^4 - ix^3 - ix + 1 + i$. Calcular $P(i+1)$ es lo mismo que averiguar el resto de dividir por $Q(x) = (x - i + 1)$, por teorema del resto.

Aplicando el teorema de la regla de ruffini, podemos definir C recursivamente:

$$C(x) = x^3 + \quad (-i + (1+i).1)x^2 = x^2 + (0 + (1+i).1)x = (1+i)x + \quad -i + (1+i).(1+i) = i \tag{8}$$

Entonces el resto se calcula de la siguiente manera

$$r = 1 + i + (1+i).i$$

$$r = (1+i)(1+i)$$

$$r = 2i$$

Por lo tanto $P(i+1) = 2i$.

3.2 Inciso h

Calcular $P(2-i)$ es lo mismo que averiguar el resto de dividir por $Q(x) = (x - 2 - i)$, por teorema del resto.

Aplicando el teorema de la regla de ruffini, podemos definir C recursivamente:

$$C(x) = x^3 + \quad (-i + (2-i).1)x^2 = (2-2i)x^2 + (0 + (2-i).(2-2i))x = (2-6i)x + \quad -i + (2-i).(2-6i) = -2 - 15i \tag{9}$$

Entonces el resto se calcula de la siguiente manera

$$r = 1 + i + (2-i)(-2-15i)r \quad = 1 + i + -19 - 28ir = -18 - 27i \tag{10}$$

Por lo tanto $P(2-i) = -18 - 27i$

3.3 Ejercicio 5

Sea $P(x) = kx^4 + kx^3 - 33x^2 + 17x - 10$, calcular $P(4)$ sabiendo que $P(5) = 0$.
Que $P(5) = 0$ significa que

$$k.5^4 + k.5^3 - 33.5^2 + 17.5 - 10 = 0k.5^4 + k.5^3 \quad = 10 - 17.5 + 33.5^2 k.(5^4 + 5^3) = 10 - 17.5 + 33.5^2 k \quad = \frac{10 - 17.5 + 33.5^2}{5^4 + 5^3} k = \frac{(2-1}{(5^3} \tag{11}$$

Entonces, por teorema del resto, $P(4)$ se obitene de calcular el resto de dividir P por $Q(x) = x - 4$. Aplicamos Ruffini.

$$C = 1.x^3 + \tag{12}$$
$$(1 + 4.1)x^2 = 5x^2 + \tag{13}$$
$$(-33 + 4.5)x = -12x + \tag{14}$$
$$(17 + 4.(-12)) = -31 \tag{15}$$

Bajo este contexto

$$r = P(4) = -31 + 4.(-10) = -71$$

4 Ejercicio 7

4.1 Inciso c

Para que un polinomio P tenga

- 2, raíz simple
- i, raíz triple
- $gr(P) = 4$
- $P(1) = 3i$

Por teorema de descomposición factorial, puedo llamar $Q(x) = (x-2)^1.(x-i)^3$ y este debe dividir a P con resto 0. Observamos que $gr(Q) = 4$. Por lo tanto Q y P difieren por el producto de una constante $k \in \mathbb{C}$.

$$P(x) = k(x-2)(x-i)^3$$

Si además sabemos $P(1) = 3i$, deducimos k.

$$P(1) = k(1-2)(1-i)^3$$

$$3i = k.(-1).(-2-2i)$$
$$k = -3i.(-2-2i)^{-1}$$
$$k = -3i.(-2-2i)^{-1}$$
$$k = \frac{3}{4} + \frac{3}{4}i$$

Se puede demostrar que este polinomio es único.

5 Ejercicio 8

5.1 Inciso h

Sea $P(x) = (x^7 + x^4 - 9x^3 - 9)(x^3 + 1)$, factorizarlo.
Primero tratamos de reescribir el polinomio como producto de polinomios más fáciles de tratar.

$$(x^7 + x^4 - 9x^3 - 9)(x^3 + 1)$$

$$(x^4(x^3 + 1) - 9(x^3 + 1))(x^3 + 1)$$
$$(x^3 + 1)(x^4 - 9)(x^3 + 1)$$
$$(x^4 - 9)(x^3 + 1)^2$$

Luego simplemennte encontramos las raíces de $A(x) = x^4 - 9$ y $B = (x^3 + 1)$
Comenzando con $A(x) = 0$:

$$x^4 - 9 = 0$$

$$x^4 = 9$$

$$x = \sqrt[4]{9}$$

Luego x puede adquirir 4 valores, por teorema de De Moivre. $\pm\sqrt{3}, \pm\sqrt{3}i$
Siguiendo con $B(x) = 0$:

$$x^3 + 1 = 0$$

$$x^3 = -1$$

$$x = \sqrt[3]{-1}$$

Luego x puede adquirir 3 valores, por teorema de De Moivre. $-1, \left(\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)$
Finalmente expresamos el resultado final. Donde si $P(\alpha) = 0$, entonces $P = C.(x - \alpha)$

$$P(x) = \left(x + \sqrt{3}\right)\left(x - \sqrt{3}\right)\left(x + \sqrt{3}i\right)\left(x - \sqrt{3}i\right)(x+1)^2\left(x - \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)\right)^2\left(x - \left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)\right)^2$$

6 Ejercicio 9

6.1 Inciso a

$P(\alpha) = 0 \Leftrightarrow Q(x) = P(-x), Q(-\alpha) = 0$

Sea $P(\alpha) = 0$.
Llamemos $Q(x) = P(-x)$

$$Q(-\alpha) = P(-(-\alpha)) = P(\alpha) = 0$$

Sea $Q(x) = P(-x), Q(-\alpha) = 0$

$$P(\alpha)$$

Llamemos $-\alpha' = \alpha$

$$P(-\alpha') = Q(\alpha')$$

Pero $\alpha' = -\alpha$

$$Q(\alpha') = Q(-\alpha) = 0$$

□

6.2 Inciso b

$P(\alpha) = 0 \Rightarrow (P.Q)(\alpha) = 0$

Sea $P(\alpha) = 0, Q \in \mathbb{C}[x]$.

$$(P.Q)(\alpha)$$

Pero por teorema del algoritmo de la división. $(P.Q)(x)$ puede ser escrito como $P(x).Q(x)$

$$P(\alpha).Q(\alpha) = 0.Q(\alpha) = 0$$

□

6.3 Inciso c

Todo polinomio de grado impar admite al menos una raíz real

Sea $P \in \mathbb{C}[x], gr(P) = 2k + 1, k \in \mathbb{N}$.
Construyo $P(x) = x - i$. $gr(P) = 2.0 + 1 = 1$
Por teorema fundamental del álgebra, P tiene al menos una raíz compleja, y por corolario tiene exactamente una. La raíz es $i \notin \mathbb{R}$. Contradicción. □

6.4 Inciso d

Todo polinomio a coeficientes reales de grado impar admite al menos una raíz real

Sea $P \in \mathbb{R}[x], gr(P) = 2k+1, k \in \mathbb{N}$.
Supongamos que todas las raíces son no reales. O sea, todas son de la forma $a+bi$ con $b \neq 0$. Pero por teorema

$$P \in \mathbb{R}[x], P(\alpha) = 0 \Rightarrow P(\overline{\alpha}) = 0, \alpha \in \mathbb{C}$$

Si $P(a+bi) = 0 \Rightarrow P(a-bi) = 0$.
Por teorema fundamental del álgebra y su corolario, P tiene $2k+1$ raíces. Pero por cada raíz $a+bi$, también es raíz $a-bi$, y vale $a+bi \neq a-bi$. Entonces la cantidad de raíces es dos veces la cantidad de raíces de la forma $a+bi$, digamos que la cantidad de raíces $a+bi$ es igual a $k' \in \mathbb{N}$. Por lo tanto

$$2k+1 = 2k'$$

Pero esto no tiene sentido en los naturales. Esto es una contradicción a la suposición de que no existe raíz de la forma $a+bi$ con $b \neq 0$. Por lo tanto existe al menos una. □

6.5 Inciso e

$P = Q \Leftrightarrow \forall \alpha P(\alpha) = 0 \Rightarrow Q(\alpha) = 0$

Sean $P, Q \in \mathbb{C}[x], P = Q$.
Como son iguales, todo valor $P(\alpha) = Q(\alpha)$, eso incluye cuando $P(\alpha) = 0$. Por lo tanto tienen las mismas raíces.

Sean $P, Q \in \mathbb{C}[x], \forall \alpha P(\alpha) = 0 \Rightarrow Q(\alpha) = 0$.
Si construyo $P = x$ y $Q = x^2$. Son polinomios distintos pero aún así cumplen la condición, pues 0 es raíz de P y de Q. Esto es una contradicción con la hipótesis. Por lo tanto es falsa. □

6.6 Inciso f

Sean P y Q de grado n, son iguales si coinciden en n evaluaciones distintas

Sean P, Q de grado $n = 1$. $P(x) = a_1(x-k), Q(x) = b_1.(x-k)$.
Coinciden en $n = 1$ evaluaciones, pues $P(k) = Q(k)$. Pero $P \neq Q$, pues sus coeficientes son distintos.
Esto es una contradicción con la hipótesis. □