Práctica conjuntos - página 5

23) a) $A_3 = [-2\cdot 3, 3\cdot 3] = [-6, 9]$

c) $A_3 - A_4 = [-6, 9] - [-8, 12] = \emptyset$

Antes de continuar, observamos que si $n \in \mathbb{N}$, $A_n \subset A_{n+1}$, es decir, al crecer n, A_n es cada vez "más grande", en efecto: si $n \in \mathbb{N}$:

$-2(n+1) = -2n-2 < -2n < 3n < 3n+3 = 3(n+1)$

Luego $A_n = [-2n, 3n] \subset [-2(n+1), 3(n+1)] = A_{n+1}$

f) $\bigcap_{n=1}^{7} A_n = A_1 = [-2, 3]$, dado que $A_1 \subset A_2 \subset A_3 \subset A_4 \subset A_5 \subset A_6 \subset A_7$.

h) $\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n = A_1 = [-2, 3]$. Demostraremos la igualdad probando la doble

contención:

1) $\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n \supseteq A_1$.

Sea $x \in A_1$, como $A_1 \subset A_2$ resulta $x \in A_2$. Recordando que $A_n \subset A_{n+1}$ $\forall n \in \mathbb{N}$ podemos repetir el razonamiento y concluir que $x \in A_n$ $\forall n \in \mathbb{N}$. Luego por def. de intersección generalizada $x \in \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$. $\therefore \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n \supseteq A_1$

2) $\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n \subseteq A_1$ es trivial a partir de la definición de intersección generalizada, en efecto:

Sea $x \in \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n \Rightarrow x \in A_n \; \forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow x \in A_1$.

$\therefore \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n \subseteq A_1 \quad \therefore \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n = A_1$ //

3

Obs: el f) no esta formalmente demostrado, hay sólo una explicación del por qué del resultado. Puede demostrarse análogamente al item h)

25) a) Aprovecho para corregir el enunciado: $A_j \subseteq B$ para cada $j \in I$ si y sólo si $\bigcup_{i\in I} A_i \subseteq B$

Demostración: $\Rightarrow$ Supongamos que $A_j \subseteq B$ para cada $j \in I$. Queremos probar que $\bigcup_{i\in I} A_i \subseteq B$, es decir una contención.

Sea $x \in \bigcup_{i\in I} A_i \overset{\text{def unión gralizada}}{\Rightarrow} x \in A_{\tilde{i}}$ para algún $\tilde{i} \in I \overset{A_i \subseteq B\ \forall i \in I}{\Rightarrow}$

$x \in B$

$\therefore \bigcup_{i\in I} A_i \subseteq B$

4

25) a) $\Leftarrow$

Supongamos que $\bigcup_{i\in I} A_i \subseteq B$. Queremos probar que $A_j \subseteq B$ para cada $j \in I$

Sea $j \in I$ y $x \in A_j \overset{\text{def unión gralizada}}{\Rightarrow} x \in \bigcup_{i\in I} A_i \overset{\bigcup_{i\in I} A_i \subseteq B}{\Rightarrow}$

$x \in B$.

Luego para todo $j \in I$, $A_j \subseteq B$ //

Queda entonces probado que

$A_j \subseteq B$ para cada $j \in I$ si y sólo si

$\bigcup_{i\in I} A_i \subseteq B$.