19) b) Vector dirección de r_1) $\vec{u} = (-4, 3, 2)$

Vector dirección de r_2) $\vec{v} = (1, 5, -1) \wedge (1, 3, 1)$

$$\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 5 & -1 \\ 1 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 8\vec{i} - 2\vec{j} - 2\vec{k}$$

Ahora hacemos $\vec{u} \wedge \vec{v}$ (para obtener un vector perpendicular a ambas rectas): $\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -4 & 3 & 2 \\ 8 & -2 & -2 \end{vmatrix} = \underbrace{-2\vec{i} + 8\vec{j} - 16\vec{k}}_{\vec{w}}$

La recta pedida se puede obtener como intersección del siguiente par de planos: $\pi_1 \cap \pi_2$, donde:

π_1) plano paralelo a $\vec{w}$ que contiene a r_1)

π_2) 〃 〃 〃 〃 〃 〃 r_2)

Ecuación de π_1 Vector normal a $\pi_1 = \vec{n}_1 = \vec{w} \wedge \vec{u}$

$$\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -2 & 8 & -16 \\ -4 & 3 & 2 \end{vmatrix} = 64\vec{i} + 68\vec{j} + 26\vec{k}.$$

Punto de paso de π_1: cualquiera perteneciente a r_1), por ej $P_1(-3, 6, 0)$

$\therefore \pi_1)\ 64x + 68y + 26z + d_1 = 0$; $64(-3) + 68 \cdot 6 + d_1 = 0$

$d_1 = 216$

Ecuación de π_2 Vector normal a $\pi_2 = \vec{n}_2 = \vec{w} \wedge \vec{v}$

$$\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -2 & 8 & -16 \\ 8 & -2 & -2 \end{vmatrix} = -48\vec{i} - 132\vec{j} - 60\vec{k}.$$

Punto de paso de π_2:

Elijo (arb.) $z = 0$ y queda $\begin{cases} x + 5y + 9 = 0 \\ x + 3y - 5 = 0 \end{cases}$

(resto) $2y + 14 = 0 \Rightarrow y = -7$

$x + 3(-7) - 5 = 0$; $x - 21 - 5 = 0$; $x = 26$ $\therefore P_2(26, -7, 0)$

$\therefore \pi_2)\ -48x-132y-60z+d_2=0$; $-48\cdot 26-132\cdot(-7)+d_2=0$

$-1248+924+d_2=0$

$d_2=324$

Luego, la recta pedida es:

$r)\begin{cases}\pi_1\\ \pi_2\end{cases}$ $\boxed{r)\begin{cases}64x+68y+26z+216=0\\ -48x-132y-60z+324=0\end{cases}}$

Observemos que r) efectivamente cumple las condiciones pedidas:

i) $\left.\begin{array}{l} r_1\subset\pi_1\\ r\subset\pi_1\end{array}\right\}$ Luego r_1 y r son coplanares. Luego, si $r_1 \not\parallel r$ entonces $r_1\cap r\neq\emptyset$

Vector dirección de r : $\vec{n}_1\wedge\vec{n}_2=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 64 & 68 & 26\\ -48 & -132 & -60\end{vmatrix}=$

$\left.\begin{array}{l}=-648\vec{i}+2592\vec{j}-5184\vec{k}\\ \text{Vector dirección de } r_1:\ \vec{u}=(-4,3,2)\end{array}\right]$ no son $\parallel$

ii) $\left.\begin{array}{l} r_2\subset\pi_2\\ r\subset\pi_2\end{array}\right\}$ Luego r_2 y r son coplanares. Luego, si $r_2\not\parallel r$ entonces $r_2\cap r\neq\emptyset$

$(-648,2592,-5184)\not\parallel(8,-2,-2)$

iii) $r_1\perp r$ pues $(-4,3,2)\times(-648,2592,-5184)=0$

iv) $r_2\perp r$ pues $(8,-2,-2)\times(-648,2592,-5184)=0$