Unidad 5 – Introducción al Cálculo Integral

1 Primitiva de una función

Unidad 5 – Introducción al Cálculo Integral

1 Primitiva de una función

Integración y derivación
Aunque el cálculo diferencial y el cálculo integral surgieron de problemas en apariencia no relacionados, el de la tangente y el del área, Isaac Barrow (1630-1677) descubrió que estos dos problemas estaban íntimamente relacionados. De hecho, se dió cuenta que la derivación y la integración son, de alguna forma, procesos inversos. Newton y Leibnitz explotaron esta relación y lograron transformar el cálculo en un método matemático sistemático.

1.1 Primitivas de funciones elementales

Unidad 5 – Introducción al Cálculo Integral

1 Primitiva de una función

Integración y derivación
Aunque el cálculo diferencial y el cálculo integral surgieron de problemas en apariencia no relacionados, el de la tangente y el del área, Isaac Barrow (1630-1677) descubrió que estos dos problemas estaban íntimamente relacionados. De hecho, se dió cuenta que la derivación y la integración son, de alguna forma, procesos inversos. Newton y Leibnitz explotaron esta relación y lograron transformar el cálculo en un método matemático sistemático.

1.1 Primitivas de funciones elementales

Definición. Decimos que F es una *primitiva* de f sobre el conjunto I si $F'(x) = f(x)\ \forall x \in I$. También suele decirse que F es una *antiderivada* de f en I.

Unidad 5 – Introducción al Cálculo Integral

1 Primitiva de una función

1.1 Primitivas de funciones elementales

Definición. Decimos que F es una *primitiva* de f sobre el conjunto I si $F'(x) = f(x)\ \forall x \in I$. También suele decirse que F es una *antiderivada* de f en I.

Ejemplo.

1) Si $f(x) = 1$ entonces $F(x) = x$ es una primitiva de $f(x)$

pues $F'(x) = (x)' = 1 = f(x)$.

Unidad 5 – Introducción al Cálculo Integral

1 Primitiva de una función

1.1 Primitivas de funciones elementales

Definición. Decimos que F es una *primitiva* de f sobre el conjunto I si $F'(x) = f(x)$ $\forall x \in I$. También suele decirse que F es una *antiderivada* de f en I.

Ejemplo.

1) Si $f(x) = 1$ entonces $F(x) = x$ es una primitiva de $f(x)$

$$\text{pues } F'(x) = (x)' = 1 = f(x).$$

2) Si $f(x) = 2x$ entonces $F(x) = x^2$ es una primitiva de $f(x)$

$$\text{pues } F'(x) = (x^2)' = 2x = f(x)$$

Unidad 5 – Introducción al Cálculo Integral

1 Primitiva de una función

1.1 Primitivas de funciones elementales

Definición. Decimos que F es una *primitiva* de f sobre el conjunto I si $F'(x) = f(x)$ $\forall x \in I$. También suele decirse que F es una *antiderivada* de f en I.

Ejemplo.

1) Si $f(x) = 1$ entonces $F(x) = x$ es una primitiva de $f(x)$

$$\text{pues } F'(x) = (x)' = 1 = f(x).$$

2) Si $f(x) = 2x$ entonces $F(x) = x^2$ es una primitiva de $f(x)$

$$\text{pues } F'(x) = (x^2)' = 2x = f(x)$$

3) Si $f(x) = \cos x$ entonces $F(x) = \sin x$ es una primitiva de $f(x)$

$$\text{pues } F'(x) = (\sin x)' = \cos x = f(x)$$

Unidad 5 – Introducción al Cálculo Integral

1 Primitiva de una función

1.1 Primitivas de funciones elementales

Definición. Decimos que F es una *primitiva* de f sobre el conjunto I si $F'(x) = f(x)\ \forall x \in I$. También suele decirse que F es una *antiderivada* de f en I.

Observación.

• Si F es una primitiva de f y si c es una constante cualquiera, entonces $F + c$ también es una primitiva de f. En efecto $(F+c)' = F' + c' = f + 0 = f$.

Unidad 5 – Introducción al Cálculo Integral

1 Primitiva de una función

1.1 Primitivas de funciones elementales

Definición. Decimos que F es una *primitiva* de f sobre el conjunto I si $F'(x) = f(x)\ \forall x \in I$. También suele decirse que F es una *antiderivada* de f en I.

Observación.

• Si F es una primitiva de f y si c es una constante cualquiera, entonces $F + c$ también es una primitiva de f. En efecto $(F+c)' = F' + c' = f + 0 = f$.

• Si F y G son dos primitivas cualesquiera de f, entonces dichas funciones difieren en una constante, es decir, $G - F = c$ o bien $G(x) = F(x) + c\ \forall x \in I$.

Unidad 5 – Introducción al Cálculo Integral

1 Primitiva de una función

1.1 Primitivas de funciones elementales

Definición. Decimos que F es una *primitiva* de f sobre el conjunto I si $F'(x) = f(x)\ \forall x \in I$. También suele decirse que F es una *antiderivada* de f en I.

Observación.
• Si F es una primitiva de f y si c es una constante cualquiera, entonces $F+c$ también es una primitiva de f. En efecto $(F+c)' = F' + c' = f + 0 = f$.

• Si F y G son dos primitivas cualesquiera de f, entonces dichas funciones difieren en una constante, es decir, $G - F = c$ o bien $G(x) = F(x) + c\ \forall x \in I$.

• Por lo tanto, $F(x) + c$ (donde F es una primitiva particular de f y c es una constante arbitraria) describe la *familia de todas las primitivas* de f sobre I.

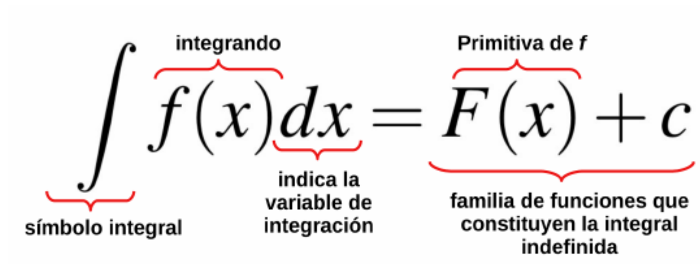
Definición. Llamamos *integral indefinida* de una función f al conjunto de todas las primitivas de f, y la notamos $\int f(x)dx$. Luego, si F es una primitiva de f

$$\int f(x)dx = F(x) + c$$

Definición. Llamamos *integral indefinida* de una función f al conjunto de todas las primitivas de f, y la notamos $\int f(x)dx$. Luego, si F es una primitiva de f

$$\int f(x)dx = F(x) + c$$

Es decir, $\int f(x)dx$ nos da una familia de funciones, todas ellas primitivas de f, que difieren entre sí en una constante.



Definición. Llamamos *integral indefinida* de una función f al conjunto de todas las primitivas de f, y la notamos $\int f(x)dx$. Luego, si F es una primitiva de f

$$\int f(x)dx = F(x) + c$$

Es decir, $\int f(x)dx$ nos da una familia de funciones, todas ellas primitivas de f, que difieren entre sí en una constante.

$$\underbrace{\int}_{\text{símbolo integral}} \overbrace{f(x)}^{\text{integrando}} \underbrace{dx}_{\substack{\text{indica la}\\ \text{variable de}\\ \text{integración}}} = \underbrace{\overbrace{F(x)}^{\text{Primitiva de } f} + c}_{\substack{\text{familia de funciones que}\\ \text{constituyen la integral}\\ \text{indefinida}}}$$

Ejemplo.

1) Si $f(x) = 1$ entonces $F(x) = x$ es una primitiva de $f(x)$ pues $F'(x) = (x)' = 1 = f(x)$, entonces la integral de f será,

$$\int 1\, dx = x + c$$

Definición. Llamamos *integral indefinida* de una función f al conjunto de todas las primitivas de f, y la notamos $\int f(x)dx$. Luego, si F es una primitiva de f

$$\int f(x)dx = F(x) + c$$

Es decir, $\int f(x)dx$ nos da una familia de funciones, todas ellas primitivas de f, que difieren entre sí en una constante.

$$\underbrace{\int}_{\text{símbolo integral}} \overbrace{f(x)}^{\text{integrando}} \underbrace{dx}_{\substack{\text{indica la}\\ \text{variable de}\\ \text{integración}}} = \underbrace{\overbrace{F(x)}^{\text{Primitiva de } f} + c}_{\substack{\text{familia de funciones que}\\ \text{constituyen la integral}\\ \text{indefinida}}}$$

Ejemplo.

1) Si $f(x) = 1$ entonces $F(x) = x$ es una primitiva de $f(x)$ pues $F'(x) = (x)' = 1 = f(x)$, entonces la integral de f será,

$$\int 1\,dx = x + c$$

2) Si $f(x) = 2x$ entonces $F(x) = x^2$ es una primitiva de $f(x)$ pues $F'(x) = (x^2)' = 2x = f(x)$, entonces la integral de f será,

$$\int 2x\,dx = x^2 + c$$

Definición. Llamamos *integral indefinida* de una función f al conjunto de todas las primitivas de f, y la notamos $\int f(x)dx$. Luego, si F es una primitiva de f

$$\int f(x)dx = F(x) + c$$

Es decir, $\int f(x)dx$ nos da una familia de funciones, todas ellas primitivas de f, que difieren entre sí en una constante.

$$\underbrace{\int}_{\text{símbolo integral}} \overbrace{f(x)}^{\text{integrando}} \underbrace{dx}_{\text{indica la variable de integración}} = \underbrace{\overbrace{F(x)}^{\text{Primitiva de } f} + c}_{\text{familia de funciones que constituyen la integral indefinida}}$$

Ejemplo.

1) Si $f(x) = 1$ entonces $F(x) = x$ es una primitiva de $f(x)$ pues $F'(x) = (x)' = 1 = f(x)$, entonces la integral de f será,

$$\int 1\,dx = x + c$$

2) Si $f(x) = 2x$ entonces $F(x) = x^2$ es una primitiva de $f(x)$ pues $F'(x) = (x^2)' = 2x = f(x)$, entonces la integral de f será,

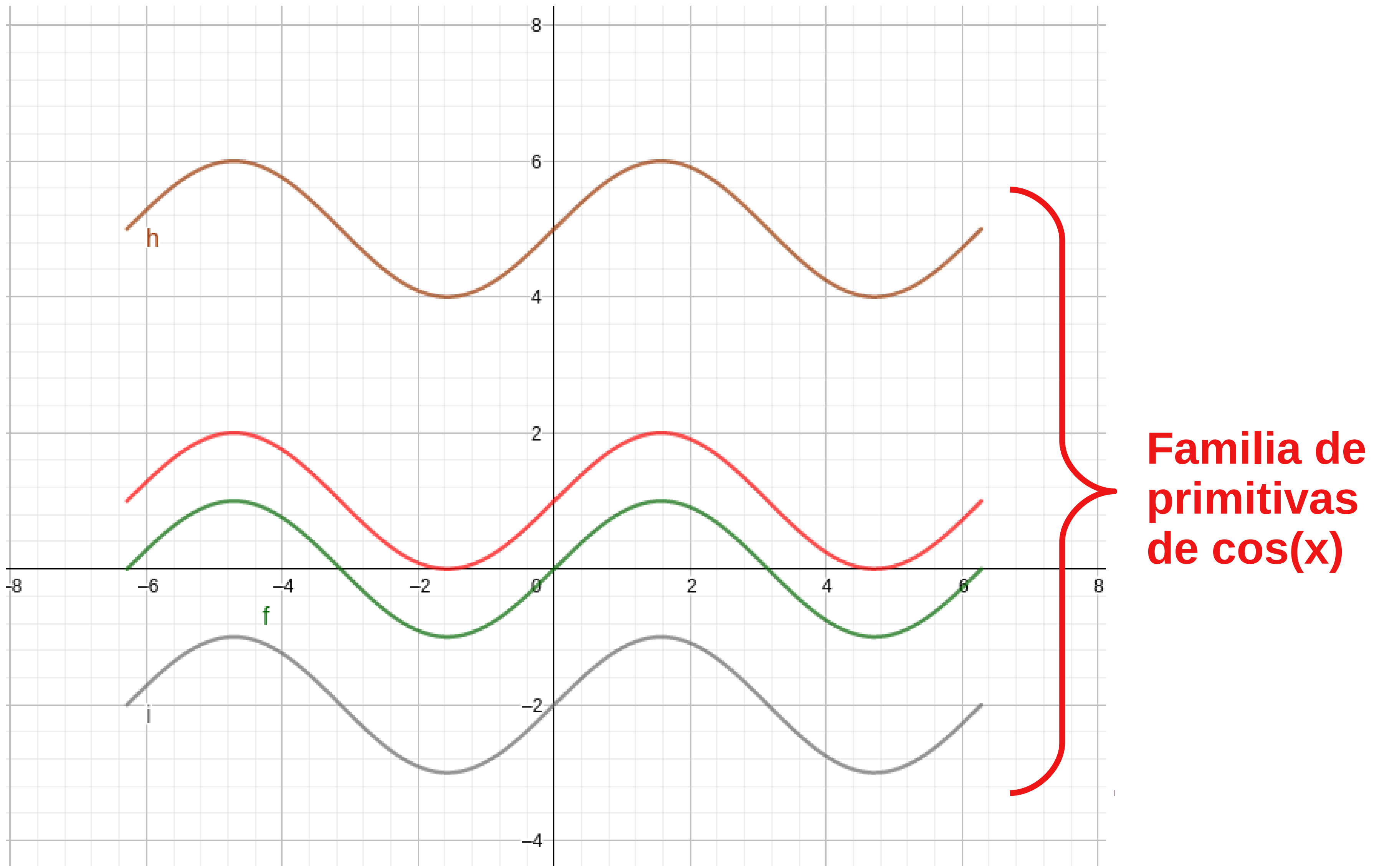
$$\int 2x\,dx = x^2 + c$$

3) Si $f(x) = \cos x$ entonces $F(x) = \sin x$ es una primitiva de $f(x)$ pues $F'(x) = (\sin x)' = \cos x = f(x)$, entonces la integral de f será,

$$\int \cos x\,dx = \sin x + c$$

Observación. Las gráficas de las funciones primitivas de una función dada, definida sobre I, son traslaciones verticales una de la otra.

Por ejemplo $\sin x$ y $\sin x + 5$ son primitivas de la función $\cos x$



De lo expuesto, conociendo las derivadas de algunas funciones elementales, podemos confeccionar una primera tabla de antiderivadas o integrales indefinidas.

Tabla de integrales inmediatas.

$$\int 1dx = x + c \qquad \int x^{\alpha}dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + c, \ \text{si } \alpha \neq -1$$

$$\int \sin x\, dx = -\cos x + c \qquad \int \cos x\, dx = \sin x + c$$

$$\int \frac{1}{\cos^2 x}\, dx = \tan x + c \qquad \int \frac{1}{\sin^2 x}\, dx = \text{cotan} x + c$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx = \arcsin x + c \qquad \int \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}dx = \arccos x + c$$

$$\int \frac{1}{1+x^2}dx = \arctan x + c \qquad \int \frac{1}{x}dx = \ln|x| + c$$

$$\int e^x dx = e^x + c \qquad \int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + c$$

De lo expuesto, conociendo las derivadas de algunas funciones elementales, podemos confeccionar una primera tabla de antiderivadas o integrales indefinidas.

Tabla de integrales inmediatas.

$\int 1dx = x + c$

$\int x^{\alpha}dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + c, \text{ si } \alpha \neq -1$

$$(x)' = 1$$

$$(x^{\alpha+1})' = (\alpha+1)x^{\alpha} \implies \frac{1}{(\alpha+1)}(x^{\alpha+1})' = \left(\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}\right)' = x^{\alpha}$$

$\int e^{x}dx = e^{x} + c$

$\int a^{x}dx = \frac{a^{x}}{\ln a} + c$

De lo expuesto, conociendo las derivadas de algunas funciones elementales, podemos confeccionar una primera tabla de antiderivadas o integrales indefinidas.

Tabla de integrales inmediatas.

$$\int 1 dx = x + c \qquad \int x^{\alpha} dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + c, \ \text{si } \alpha \neq -1$$

$$\int \sin x \, dx = -\cos x + c \qquad \int \cos x \, dx = \sin x + c$$

$$(\cos x)' = -\sin x \implies (-\cos x)' = -(-\sin x) = \sin x$$

$$(\sin x)' = \cos x$$

$$\int e^x dx = e^x + c \qquad \int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + c$$

De lo expuesto, conociendo las derivadas de algunas funciones elementales, podemos confeccionar una primera tabla de antiderivadas o integrales indefinidas.

Tabla de integrales inmediatas.

$$\int 1dx = x + c \qquad \int x^{\alpha}dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + c, \ \text{si } \alpha \neq -1$$

$$\int \sin x\, dx = -\cos x + c \qquad \int \cos x\, dx = \sin x + c$$

$$\int \frac{1}{\cos^2 x}\, dx = \tan x + c \qquad \int \frac{1}{\sin^2 x}\, dx = \text{cotan} x + c$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \arcsin x + c \qquad \int \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \arccos x + c$$

$$\int \frac{1}{1+x^2} dx = \arctan x + c \qquad \int \frac{1}{x} dx = \ln |x| + c$$

$$\int e^x dx = e^x + c \qquad \int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + c$$

De lo expuesto, conociendo las derivadas de algunas funciones elementales, podemos confeccionar una primera tabla de antiderivadas o integrales indefinidas.

Tabla de integrales inmediatas.

$$\ln|x| = \begin{cases} \ln x & x > 0 \\ \ln(-x) & x < 0 \end{cases}$$

$$(\ln|x|)' = \begin{cases} \frac{1}{x} & x > 0 \\ \frac{1}{(-x)}(-1) & x < 0 \end{cases}$$

$$(\ln|x|)' = \frac{1}{x} \quad \forall x \neq 0$$

$$\int x^{\alpha} dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + c, \text{ si } \alpha \neq -1$$

$$\int \cos x \, dx = \sin x + c$$

$$\int \frac{1}{\sin^2 x} dx = \operatorname{cotan} x + c$$

$$\int \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \arccos x + c$$

$$\int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + c$$

$$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + c$$

De lo expuesto, conociendo las derivadas de algunas funciones elementales, podemos confeccionar una primera tabla de antiderivadas o integrales indefinidas.

Tabla de integrales inmediatas.

$$\int 1 dx = x + c \qquad \int x^{\alpha} dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + c, \ \text{si } \alpha \neq -1$$

$$\int \sin x \, dx = -\cos x + c \qquad \int \cos x \, dx = \sin x + c$$

$$\int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \tan x + c \qquad \int \frac{1}{\sin^2 x} dx = \text{cotan} x + c$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \arcsin x + c \qquad \int \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \arccos x + c$$

$$\int \frac{1}{1+x^2} dx = \arctan x + c \qquad \int \frac{1}{x} dx = \ln |x| + c$$

$$\int e^x dx = e^x + c \qquad \int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + c$$

De lo expuesto, conociendo las derivadas de algunas funciones elementales, podemos confeccionar una primera tabla de antiderivadas o integrales indefinidas.

Tabla de integrales inmediatas.

$$\int 1 dx = x + c \qquad \int x^{\alpha} dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + c, \ \text{si } \alpha \neq -1$$

$$\int \sin x \, dx = -\cos x + c \qquad \int \cos x \, dx = \sin x + c$$

$$a^x = e^{\ln(a^x)} = e^{x \ln a} \implies (a^x)' = \ln a \, e^{x \ln a} = \ln a \, a^x$$

$$\left(\frac{1}{\ln a} a^x\right)' = a^x$$

$$\int e^x dx = e^x + c \qquad \int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + c$$

De lo expuesto, conociendo las derivadas de algunas funciones elementales, podemos confeccionar una primera tabla de antiderivadas o integrales indefinidas.

Tabla de integrales inmediatas.

$$\int 1dx = x + c \qquad \int x^{\alpha}dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + c, \ \text{si } \alpha \neq -1$$

$$\int \sin x\, dx = -\cos x + c \qquad \int \cos x\, dx = \sin x + c$$

$$\int \frac{1}{\cos^2 x}\, dx = \tan x + c \qquad \int \frac{1}{\sin^2 x}\, dx = \text{cotan} x + c$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \arcsin x + c \qquad \int \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \arccos x + c$$

$$\int \frac{1}{1+x^2} dx = \arctan x + c \qquad \int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + c$$

$$\int e^x dx = e^x + c \qquad \int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + c$$

Proposición 1. *(Linealidad) Si F y G son primitivas de f y g respectivamente, y a es una constante real entonces*

a) aF *es una primitiva de* af*, es decir*

$$\int af(x)\,dx = aF(x) + c$$

b) $F + G$ *es una primitiva de* $f + g$*, es decir*

$$\int (f(x) + g(x))\,dx = F(x) + G(x) + c$$

Proposición 1. *(Linealidad) Si F y G son primitivas de f y g respectivamente, y a es una constante real entonces*

a) aF es una primitiva de af, es decir

$$\int af(x)\,dx = aF(x) + c$$

b) $F+G$ es una primitiva de $f+g$, es decir

$$\int (f(x)+g(x))\,dx = F(x) + G(x) + c$$

Demostración:

a) Como F es una primitiva de f, es $F' = f$, luego $(aF)' = aF' = af$ y entonces aF es una primitiva de af.

Proposición 1. *(Linealidad) Si F y G son primitivas de f y g respectivamente, y a es una constante real entonces*

a) aF es una primitiva de af, es decir

$$\int af(x)\,dx = aF(x) + c$$

b) $F+G$ es una primitiva de $f+g$, es decir

$$\int (f(x)+g(x))\,dx = F(x)+G(x)+c$$

Demostración:

a) Como F es una primitiva de f, es $F' = f$, luego $(aF)' = aF' = af$ y entonces aF es una primitiva de af.

b) Por ser F es una primitiva de f y G una primitiva de g, tenemos que $(F+G)' = F'+G' = f+g$, luego $F+G$ es una primitiva de $f+g$. $\square$

Proposición 1. *(Linealidad) Si F y G son primitivas de f y g respectivamente, y a es una constante real entonces*

a) aF es una primitiva de af, es decir

$$\int af(x)\,dx = aF(x) + c$$

b) $F+G$ es una primitiva de $f+g$, es decir

$$\int (f(x)+g(x))\,dx = F(x)+G(x)+c$$

Demostración:

a) Como F es una primitiva de f, es $F' = f$, luego $(aF)' = aF' = af$ y entonces aF es una primitiva de af.

b) Por ser F es una primitiva de f y G una primitiva de g, tenemos que $(F+G)' = F' + G' = f + g$, luego $F+G$ es una primitiva de $f+g$. $\square$

En general es válido:

$$\int (af(x)+bg(x))\,dx = a\int f(x)\,dx + b\int g(x)\,dx$$

Ejemplo.

1. $\int(4x-2)dx = 4\int x dx - 2\int dx = 4\frac{x^2}{2} - 2x + c = 2x^2 - 2x + c$

Ejemplo.

1. $\int(4x-2)dx = 4\int xdx - 2\int dx = 4\frac{x^2}{2} - 2x + c = 2x^2 - 2x + c$

2. $\int \frac{x^3+4x-2}{x^2}dx = \int\left(\frac{x^3}{x^2} + 4\frac{x}{x^2} - \frac{2}{x^2}\right)dx = \int xdx + 4\int \frac{1}{x}dx - 2\int x^{-2}dx$

$= \frac{x^2}{2} + 4\ln|x| + \frac{2}{x} + c$

Ejemplo.

1. $\int (4x-2)dx = 4\int xdx - 2\int dx = 4\frac{x^2}{2} - 2x + c = 2x^2 - 2x + c$

2. $\int \frac{x^3+4x-2}{x^2}dx = \int \left(\frac{x^3}{x^2} + 4\frac{x}{x^2} - \frac{2}{x^2}\right)dx = \int xdx + 4\int \frac{1}{x}dx - 2\int x^{-2}dx$

   $= \frac{x^2}{2} + 4\ln|x| + \frac{2}{x} + c$

3. $\int \frac{3+x^2}{1+x^2}dx = \int \frac{1+x^2+2}{1+x^2}dx = x + 2\arctan x + c$

Ejemplo.

1. $\int(4x-2)dx = 4\int xdx - 2\int dx = 4\frac{x^2}{2} - 2x + c = 2x^2 - 2x + c$

2. $\int \frac{x^3+4x-2}{x^2}dx = \int\left(\frac{x^3}{x^2} + 4\frac{x}{x^2} - \frac{2}{x^2}\right)dx = \int xdx + 4\int \frac{1}{x}dx - 2\int x^{-2}dx$

   $= \frac{x^2}{2} + 4\ln|x| + \frac{2}{x} + c$

3. $\int \frac{3+x^2}{1+x^2}dx = \int \frac{1+x^2+2}{1+x^2}dx = x + 2\arctan x + c$

4. $\int\left(\frac{e^x}{2} + 3\sin x\right)dx = \frac{1}{2}e^x - 3\cos x + c$

Ejemplo.

1. $\int (4x-2)dx = 4\int xdx - 2\int dx = 4\frac{x^2}{2} - 2x + c = 2x^2 - 2x + c$

2. $\int \frac{x^3+4x-2}{x^2}dx = \int \left(\frac{x^3}{x^2} + 4\frac{x}{x^2} - \frac{2}{x^2}\right)dx = \int xdx + 4\int \frac{1}{x}dx - 2\int x^{-2}dx$

   $= \frac{x^2}{2} + 4\ln|x| + \frac{2}{x} + c$

3. $\int \frac{3+x^2}{1+x^2}dx = \int \frac{1+x^2+2}{1+x^2}dx = x + 2\arctan x + c$

4. $\int \left(\frac{e^x}{2} + 3\sin x\right)dx = \frac{1}{2}e^x - 3\cos x + c$

5. $\int \tan^2 x\, dx = \int \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}dx = \int \frac{1-\cos^2 x}{\cos^2 x}dx = \tan x - x + c$