- Hemos definido una función integrable en términos de la existencia del supremo y el ínfimo de las sumas inferiores y superiores respectivamente.
- Los ejemplos en qué pudimos calcular explícitamente la integral $\int_a^b f(x)\,dx$ muestran que intentar el cálculo de integrales usando únicamente la definición es un problema complejo.

  La pregunta entonces es:

  ¿Existe una forma de calcular integrales en términos elementales?

Supongamos que f es integrable en el intervalo $[a, b]$.
Para cada $x \in [a, b]$, f es integrable en $[a, b]$ y por lo tanto tiene sentido determinar

$$\int_a^x f(t)\, dt.$$

Entonces:

Teorema 28. *Si f es integrable en el intervalo $[a, b]$ y F está definida sobre $[a, b]$ como*

$$F(x) = \int_a^x f(t)\, dt, \tag{1}$$

entonces F es continua sobre $[a, b]$.

Ideas de la prueba:

Como f es integrable en $[a,b]$, entonces por definición, f es acotada. O sea, existe M tal que

$$|f(x)| \leq M \ \ \forall\, x \in [a,b] \ \Rightarrow \ -M \leq f(x) \leq M \ \ \forall\, x \in [a,b].$$

Fijemos $c \in [a,b]$. Sea $h > 0$, entonces

$$F(c+h) - F(c) = \int_a^{c+h} f(t)\,dt - \int_a^{c} f(t)\,dt = \int_c^{c+h} f(t)\,dt.$$

De la acotación dada arriba, se tiene

$$-Mh \leq \int_c^{c+h} f(t)\,dt \leq Mh;$$

es decir que

$$-\,M\,h \leq F(c+h) - F(c) \leq M\,h. \tag{2}$$

Si $h < 0$ puede deducirse una desigualdad semejante.

Concluimos que

$$|F(c+h) - F(c)| \leq M\,|h|.$$

Por lo tanto para $\varepsilon > 0$, se tiene

$$|F(c+h) - F(c)| < \varepsilon,$$

si vale $|h| < \varepsilon/M$, lo cual demuestra que

$$\lim_{h \to 0} F(c+h) = F(c),$$

es decir F es continua en c. $\square$

Teorema Fundamental del Cálculo

Basta que f sea integrable para que la función F sea continua. En un cierto sentido, F "mejora" las propiedades de f.
Si f es continua, tenemos

Teorema 29. *Sea f integrable en el intervalo $[a, b]$ y sea F definida por la ecuación (1). Si f es continua en $c \in [a, b]$, entonces F es derivable en c y*

$$F'(c) = f(c).$$

(Si $c = a$ o b, entonces $F'(c)$ se entiende que representa la derivada por derecha o por izquierda respectivamente).

Recordemos que si F y G son funciones derivable tales que $G' = F'$ entonces existe una constante $c \in \mathbb{R}$ tal que

$$F(x) = G(x) + c \text{ para todo } x$$

Demos f una función continua en $[a, b]$ y supongamos que **conocemos** una función g tal que $g' = f$. Definamos a $F(x) = \int_a^x f(t)dt$.
El teorema anterior nos dice que entonces

$$F(x) = g(x) + c$$

para todo x, para alguna constante c.
Observemos que $F(a) = 0$ y $F(b) = \int_a^b f(t)dt$, y además

$$F(b) - F(a) = g(b) - g(a) \quad \Rightarrow \quad \int_a^b f(t)dt = g(b) - g(a).$$

Corolario 30. *Sea f continua en el intervalo $[a, b]$ y $f = g'$ para alguna función g. Entonces*

$$\int_a^b f(t)\,dt = g(b) - g(a).$$

Ejemplos

Aplicando el corolario (conocido como **Regla de Barrow**) tenemos:

- Si $f(x) = x$, poniendo $g(x) = \frac{x^2}{2}$, se tiene $g'(x) = f(x)$. Luego

  $$\int_a^b f(t)dt = g(b) - g(a) = \frac{b^2}{2} - \frac{a^2}{2}.$$

  De la misma manera obtenemos la fórmula que vimos en la Unidad anterior para x^2.

- Más generalmente, si $f(x) = x^n$ para $n\mathbb{N}$, una función cuya derivada es f es $g(x) = \frac{x^{n+1}}{n+1}$.
  Luego
$$\int_a^b x^n\,dx = \frac{b^{n+1}}{n+1} - \frac{a^{n+1}}{n+1}.$$
- Un razonamiento análogo muestra que esta fórmula es válida para cualquier $n \in \mathbb{Z}$ con $n \neq -1$.
- Consideremos $f(x) = \frac{1}{x}$. f es continua en cualquier intervalo cerrado $[a, b]$ que no contenga a 0. Sabemos que $F(x) = \int_1^x \frac{1}{t}\,dt$, $x > 0$ es entonces derivable y $F'(x) = \frac{1}{x}$, pero no podemos expresar a F en términos elementales.

Recordemos que para las funciones trigonométricas tenemos

$$\operatorname{sen}'(x) = \cos(x), \qquad \cos'(x) = -\operatorname{sen}(x)$$

$$\tan'(x) = \frac{1}{\cos^2(x)}, \qquad \operatorname{cotan}'(x) = -\frac{1}{\operatorname{sen}^2(x)}.$$

Tenemos entonces por ejemplo:

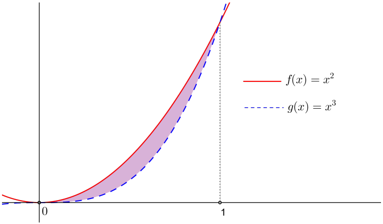
- $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(x)\,dx = \operatorname{sen}(\pi/2) - \operatorname{sen}(0) = 1$
- $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{sen}(x)\,dx = (-\cos(\pi/2)) - (-\cos(0)) = -0 - (-1) = 1.$

Cálculo de áreas

Problema: hallar el área de la región limitada por las gráficas de

$$f(x) = x^2 \qquad \text{y} \qquad g(x) = x^3.$$

en el intervalo $[0, 1]$.



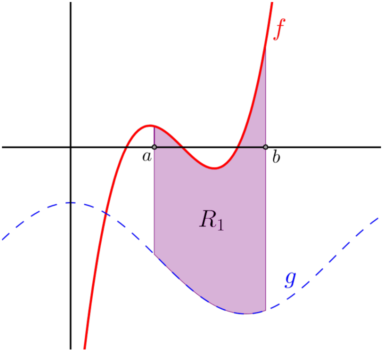
Procedemos calculando el área bajo la gráfica de x^2 en el $[0, 1]$ y restamos el área bajo la gráfica de x^3 en el $[0, 1]$, es decir

$$\text{área } R(f, 0, 1) - \text{ área } R(g, 0, 1),$$

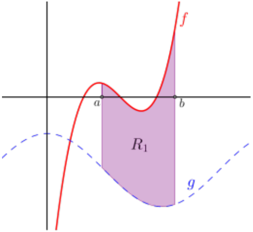
El área entonces puede expresarse como

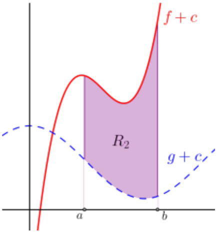
$$\int_0^1 x^2\,dx - \int_0^1 x^3\,dx = 1/3 - 1/4 = 1/12 = \int_0^1 (f-g)(x)\,dx.$$

Más generalmente, siempre que $g(x) \le f(x)$ para todo $x \in [a,b]$, $\int_a^b (f-g)(x)\,dx$. coincide con el área limitada por f y g, aunque f y g sean algunas veces negativas, como se puede ver en la figura siguiente.



En efecto, si c es un número tal que $f+c$ y $g+c$ son no negativas sobre $[a,b]$, entonces la región limitada por f y g, R_1, tiene la misma área que la región R_2, limitada por $f+c$ y $g+c$.





Luego,

$$\begin{aligned}
\text{área } R_1 = \text{área } R_2 &= \int_a^b (f+c)(x)\,dx - \int_a^b (g+c)(x)\,dx \\
&= \int_a^b [(f+c)-(g+c)](x)\,dx \\
&= \int_a^b (f-g)(x)\,dx.
\end{aligned}$$

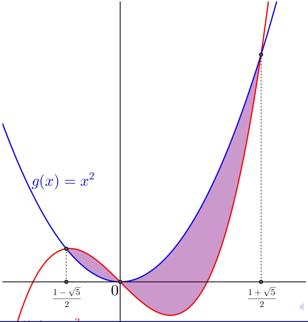
Problema: Hallar el área de la región limitada por las gráficas de

$$f(x) = x^3 - x \qquad \text{y} \qquad g(x) = x^2.$$

Lo primero es *determinar precisamente* la región. Para ello planteamos

$$x^3 - x = x^2 \quad \Leftrightarrow \quad 0 = x^3 - x - x^2 = x(x^2 - 1 - x).$$

Una de las soluciones es $x = 0$ y las restantes son las soluciones de la ecuación cuadrática, $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$, $\frac{1-\sqrt{5}}{2}$.



Observemos que

- $x^3 - x \geq x^2$ en el intervalo $(\frac{1-\sqrt{5}}{2}, 0)$,
- $x^2 \geq x^3 - x$ en el intervalo $(0, \frac{1+\sqrt{5}}{2})$.

Con lo cual $f - g$ no cambia de signo sobre los intervalos $(\frac{1-\sqrt{5}}{2}, 0)$ y $(0, \frac{1+\sqrt{5}}{2})$.
Para comprobar las desigualdades de arriba elegimos puntos en esos intervalos y realizamos las operaciones, por ejemplo en $-1/2$ y en 1 y se tiene

$$\left(\frac{-1}{2}\right)^3 - \left(\frac{-1}{2}\right) - \left(\frac{-1}{2}\right)^2 = \frac{-1}{8} + \frac{1}{2} - \frac{1}{4} = \frac{1}{8} > 0, \qquad 1^3 - 1 - 1^2 = -1 < 0,$$

Entonces el área que buscamos resulta de las siguientes integrales

$$\int_{\frac{1-\sqrt{5}}{2}}^{0} (x^3 - x - x^2)\, dx + \int_{0}^{\frac{1+\sqrt{5}}{2}} [x^2 - (x^3 - x)]\, dx = ...$$

Observación final

Para poder obtener el Corolario 30 como consecuencia del Teorema Fundamental del Cálculo hemos pedido como hipótesis que la función f sea continua.

En realidad esta hipótesis no es necesaria, y se tiene:

Teorema 31. *Sea f integrable sobre $[a, b]$ y supongamos que $f = g'$ para alguna función g, entonces*

$$\int_a^b f(t)\,dt = g(b) - g(a).$$