Funciones integrables

Sea f una función acotada en $[a, b]$. Consideremos los conjuntos

$$\{L(f, P) \, : \, P \text{ es una partición de } [a, b]\}$$

$$\{U(f, P) \, : \, P \text{ es una partición de } [a, b]\}$$

Vimos que

- $L(f, P) \leq U(f, P)$;

Funciones integrables

Sea f una función acotada en $[a, b]$. Consideremos los conjuntos

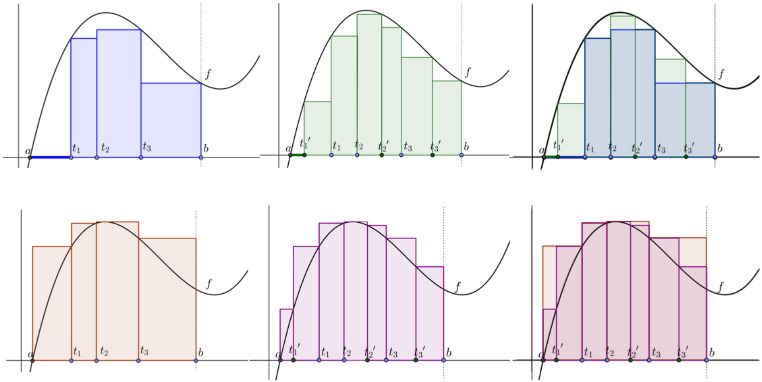
$$\{L(f, P) \ : \ P \text{ es una partición de } [a, b]\}$$

$$\{U(f, P) \ : \ P \text{ es una partición de } [a, b]\}$$

Vimos que

- $L(f, P) \leq U(f, P)$;
- La actividad inicial parece indicar que si $P \subset Q$ son dos particiones de $[a, b]$, entonces

$$L(f, P) \leq L(f, Q), \quad U(f, P) \geq U(f, Q)$$


a t_1 t_2 t_3 b f
a t_1' t_1 t_2 t_2' t_3 t_3' b f
a t_1' t_1 t_2 t_2' t_3 t_3' b f
a t_1 t_2 t_3 b f
a t_1' t_1 t_2 t_2' t_3 t_3' b f
a t_1' t_1 t_2 t_2' t_3 t_3' b f

Lema 0.1

Sea f una función acotada definida sobre un intervalo $[a, b]$ y sean P y Q dos particiones de $[a, b]$ tales que $P \subset Q$ (es decir, todos los puntos de P están en Q). Entonces

1. $L(f, P) \leq L(f, Q)$,
2. $U(f, P) \geq U(f, Q)$.

Lema 0.1

Sea f una función acotada definida sobre un intervalo $[a, b]$ y sean P y Q dos particiones de $[a, b]$ tales que $P \subset Q$ (es decir, todos los puntos de P están en Q). Entonces

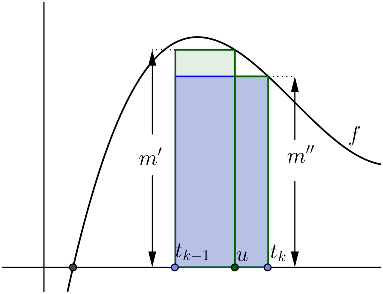
1. $L(f, P) \leq L(f, Q)$,
2. $U(f, P) \geq U(f, Q)$.

Ideas de la prueba:

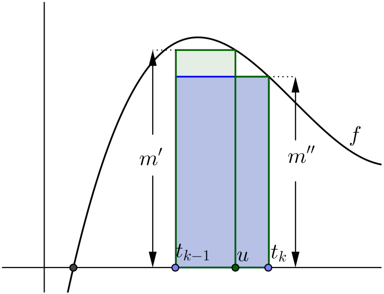
Supongamos que $Q = P \cup \{u\}$, $P = \{t_0 = a, t_1, \cdots, t_n = b\}$, $Q = \{t_0 = a, t_1, \cdots, t_{k-1}, u, t_k, \cdots, t_n = b\}$, o sea,

$$u \in [t_{k-1}, t_k].$$

Sean $m' = \inf\{f(x) \,:\, t_{k-1} \leq x \leq u\}$, $m'' = \inf\{f(x) \,:\, u \leq x \leq t_k\}$



Sean $m' = \text{ínf}\{f(x) \,:\, t_{k-1} \leq x \leq u\}$, $\quad m'' = \text{ínf}\{f(x) \,:\, u \leq x \leq t_k\}$



Entonces

$$L(f,P) = (t_1-t_0)m_1+(t_2-t_1)m_2+\cdots+\boxed{(t_k-t_{k-1})m_k}+\cdots+(t_n-t_{n-1})m_n$$

$$\begin{aligned} L(f,Q) \quad &= \quad (t_1-t_0)m_1+(t_2-t_1)m_2+\cdots+\boxed{(u-t_{k-1})m'+(t_k-u)m''} \\ &\quad + \cdots + (t_n-t_{n-1})m_n \end{aligned}$$

Para ver que $L(f, P) \leq L(f, Q)$, bastará probar que

$$(t_k - t_{k-1})m_k \leq (u - t_{k-1})m' + (t_k - u)m'' \tag{1}$$

Para ver que $L(f, P) \leq L(f, Q)$, bastará probar que

$$(t_k - t_{k-1})m_k \leq (u - t_{k-1})m' + (t_k - u)m'' \tag{1}$$

Observemos que $\{f(x) : t_{k-1} \leq x \leq u\} \subset \{f(x) : t_{k-1} \leq x \leq t_k\}$ de donde $m_k \leq m'$.

Para ver que $L(f, P) \leq L(f, Q)$, bastará probar que

$$(t_k - t_{k-1})m_k \leq (u - t_{k-1})m' + (t_k - u)m'' \tag{1}$$

Observemos que $\{f(x) : t_{k-1} \leq x \leq u\} \subset \{f(x) : t_{k-1} \leq x \leq t_k\}$ de donde $m_k \leq m'$.
Análogamente, $m_k \leq m''$ y por lo tanto

$$\begin{aligned} m'(u - t_{k-1}) + m''(t_k - u) &\geq m_k(u - t_{k-1}) + m_k(t_k - u) \\ &= m_k(u - t_{k-1} + t_k - u) = m_k(t_k - t_{k-1}) \end{aligned}$$

lo que prueba (1).

Supongamos ahora que $Q = P \cup \{u_1, \cdots, u_l\}$.

Supongamos ahora que $Q = P \cup \{u_1, \cdots, u_l\}$. Pongamos $Q_1 = P \cup \{u_1\}$, $Q_2 = P \cup \{u_1, u_2\} = Q_1 \cup \{u_2\}$ y, en general, para $j = 2, \cdots, l$,

$$Q_j = Q_{j-1} \cup \{u_j\} = P \cup \{u_1, \cdots, u_j\}$$

con lo cual $Q = Q_l$.

Supongamos ahora que $Q = P \cup \{u_1, \cdots, u_l\}$. Pongamos $Q_1 = P \cup \{u_1\}$, $Q_2 = P \cup \{u_1, u_2\} = Q_1 \cup \{u_2\}$ y, en general, para $j = 2, \cdots, l$,

$$Q_j = Q_{j-1} \cup \{u_j\} = P \cup \{u_1, \cdots, u_j\}$$

con lo cual $Q = Q_l$.

Q_j tiene exactamente un punto más que Q_{j-1}, para $j = 2, \cdots, l$ de donde $L(f, Q_{j-1}) \leq L(f, Q_j)$. Tendremos entonces que

$$L(f, Q_1) \leq L(f, Q_2) \leq \cdots \leq L(f, Q_{l-1}) \leq L(f, Q_l) = L(f, Q).$$

Supongamos ahora que $Q = P \cup \{u_1, \cdots, u_l\}$. Pongamos $Q_1 = P \cup \{u_1\}$, $Q_2 = P \cup \{u_1, u_2\} = Q_1 \cup \{u_2\}$ y, en general, para $j = 2, \cdots, l$,

$$Q_j = Q_{j-1} \cup \{u_j\} = P \cup \{u_1, \cdots, u_j\}$$

con lo cual $Q = Q_l$.
Q_j tiene exactamente un punto más que Q_{j-1}, para $j = 2, \cdots, l$ de donde $L(f, Q_{j-1}) \leq L(f, Q_j)$. Tendremos entonces que

$$L(f, Q_1) \leq L(f, Q_2) \leq \cdots \leq L(f, Q_{l-1}) \leq L(f, Q_l) = L(f, Q).$$

Por otra parte, $Q_1 = P \cup \{u_1\}$, y por lo tanto tendremos $L(f, P) \leq L(f, Q_1)$, de donde resulta que

$$L(f, P) \leq L(f, Q)$$

Dejamos la prueba de que $U(f, P) \geq U(f, Q)$ como **ejercicio**. $\square$

Teorema 0.2

Sea f una función acotada definida sobre $[a, b]$. Sean P_1 y P_2 particiones cualesquiera de $[a, b]$. Entonces $L(f, P_1) \leq U(f, P_2)$.

Prueba:

Consideremos $P = P_1 \cup P_2$. Entonces $L(f, P) \leq U(f, P)$ y por el lema anterior

$$L(f, P_1) \leq L(f, P) \leq U(f, P) \leq U(f, P_2). \quad \square$$

Teorema 0.2

Sea f una función acotada definida sobre $[a,b]$. Sean P_1 y P_2 particiones cualesquiera de $[a,b]$. Entonces $L(f,P_1) \le U(f,P_2)$.

Prueba:

Consideremos $P = P_1 \cup P_2$. Entonces $L(f,P) \le U(f,P)$ y por el lema anterior

$$L(f,P_1) \le L(f,P) \le U(f,P) \le U(f,P_2). \quad \square$$

Como consecuencia:

- $\{L(f,P) \,:\, P$ es una partición de $[a,b]\}$ es acotado superiormente;
- $\{U(f,P) \,:\, P$ es una partición de $[a,b]\}$ es acotado inferiormente.

Definición 0.3

Sea f una función acotada definida sobre un intervalo cerrado $[a, b]$, y sea $\mathcal{P}_{[a,b]}$ el conjunto de todas las particiones de $[a, b]$. Decimos que f es **integrable** *en $[a, b]$ si*

$$\sup\{L(f, P) \,:\, P \in \mathcal{P}_{[a,b]}\} = \text{ínf}\{U(f, P) \,:\, P \in \mathcal{P}_{[a,b]}\} = I.$$

En tal caso, el número real I se denomina **integral** *de f en $[a, b]$ y se denota*

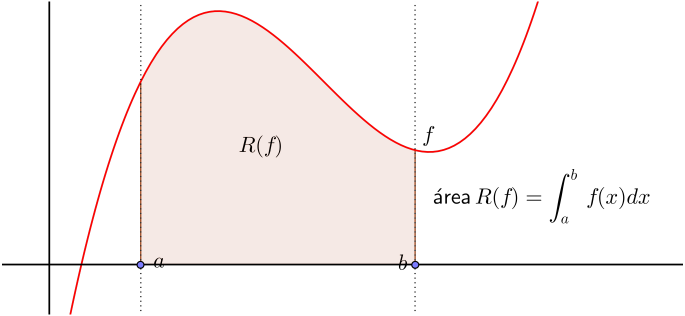
$$\int_a^b f \quad o \quad \int_a^b f(x)dx.$$

Definición 0.4

Sea f una función integrable y no negativa en un intervalo $[a, b]$ y sea $R(f)$ la región comprendida entre la gráfica de la función y el eje x, esto es

$$R(f) = \{(x, y) \,:\, a \leq x \leq b,\ 0 \leq y \leq f(x)\}.$$

Entonces la integral de f sobre $[a, b]$ es, por definición, el **área** *de $R(f)$.*



Caracterización de la integral

Teorema 0.5

Sea f una función acotada sobre el intervalo $[a, b]$. Entonces f es integrable si y sólo si para cada $\varepsilon > 0$ existe una partición P_ε de $[a, b]$ tal que

$$U(f, P_\varepsilon) - L(f, P_\varepsilon) < \varepsilon.$$

En ese caso, $\int_a^b f(x)dx$ es el único número real I que verifica

$$L(f, P_\varepsilon) \leq I \leq U(f, P_\varepsilon)$$

para cada $\varepsilon > 0$.

Ejemplos:

Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = c$ y $P = \{t_0 = a, \cdots, t_n = b\}$ una partición de $[a, b]$. Entonces para todo $i = 1, \cdots, n$, $m_i = M_i = c$.

Ejemplos:

Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = c$ y $P = \{t_0 = a, \cdots, t_n = b\}$ una partición de $[a, b]$. Entonces para todo $i = 1, \cdots, n$, $m_i = M_i = c$. Luego

$$
\begin{aligned}
L(f, P) &= \sum_{i=1}^{n} (t_i - t_{i-1}) m_i = c \sum_{i=1}^{n} (t_i - t_{i-1}) \\
&= c\,(t_1 - a + t_2 - t_1 + t_3 - t_2 + \cdots + t_{n-1} - t_{n-2} + b - t_{n-1}) \\
&= c\,(b - a).
\end{aligned}
$$

Ejemplos:

Sea $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = c$ y $P = \{t_0 = a, \cdots, t_n = b\}$ una partición de $[a,b]$. Entonces para todo $i = 1, \cdots, n$, $m_i = M_i = c$. Luego

$$\begin{aligned} L(f,P) &= \sum_{i=1}^{n}(t_i - t_{i-1})m_i = c\sum_{i=1}^{n}(t_i - t_{i-1}) \\ &= c\,(t_1 - a + t_2 - t_1 + t_3 - t_2 + \cdots + t_{n-1} - t_{n-2} + b - t_{n-1}) \\ &= c\,(b-a). \end{aligned}$$

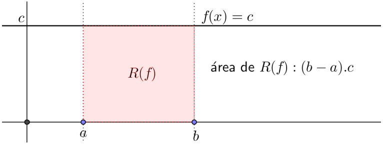
Analogamente $U(f,P) = c(b-a)$.

Ejemplos:

Sea $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = c$ y $P = \{t_0 = a, \cdots, t_n = b\}$ una partición de $[a,b]$. Entonces para todo $i = 1, \cdots, n$, $m_i = M_i = c$. Luego

$$\begin{aligned} L(f,P) &= \sum_{i=1}^{n}(t_i - t_{i-1})m_i = c\sum_{i=1}^{n}(t_i - t_{i-1}) \\ &= c\,(t_1 - a + t_2 - t_1 + t_3 - t_2 + \cdots + t_{n-1} - t_{n-2} + b - t_{n-1}) \\ &= c\,(b-a). \end{aligned}$$

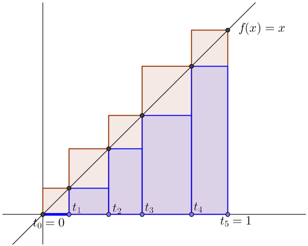
Analogamente $U(f,P) = c(b-a)$. Luego f es integrable y



$$\boxed{\int_a^b c\,dx = c(b-a)}$$

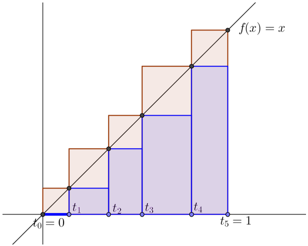
Sea $f : [0, b] \to \mathbb{R}$, $f(x) = x$. Para $P = \{t_0 = 0, t_1, \cdots, t_n = b\}$ resultan

$$L(f, P) = \sum_{i=1}^{n} (t_{i-1} - t_i) t_{i-1}, \quad U(f, P) = \sum_{i=1}^{n} (t_{i-1} - t_i) t_i.$$



Sea $f : [0, b] \to \mathbb{R}$, $f(x) = x$. Para $P = \{t_0 = 0, t_1, \cdots, t_n = b\}$ resultan

$$L(f, P) = \sum_{i=1}^{n} (t_{i-1} - t_i) t_{i-1}, \quad U(f, P) = \sum_{i=1}^{n} (t_{i-1} - t_i) t_i.$$



Luego $U(f, P) - L(f, P) = \sum_{i=1}^{n} (t_{i-1} - t_i)^2$.

Fijemos $\varepsilon > 0$ y sea $n \in \mathbb{N}$ tal que $b^2 < n\varepsilon$.

Fijemos $\varepsilon > 0$ y sea $n \in \mathbb{N}$ tal que $b^2 < n\varepsilon$.
Pongamos $P_\varepsilon = \{t_0, \cdots, t_n\}$ con

$$t_0 = 0,\ \ t_k = k\frac{b}{n} = t_{k-1} + \frac{b}{n}, k = 1, \cdots, n.$$

Fijemos $\varepsilon > 0$ y sea $n \in \mathbb{N}$ tal que $b^2 < n\varepsilon$.
Pongamos $P_\varepsilon = \{t_0, \cdots, t_n\}$ con

$$t_0 = 0, \;\; t_k = k\frac{b}{n} = t_{k-1} + \frac{b}{n}, k = 1, \cdots, n.$$

Entonces $t_k - t_{k-1} = \frac{b}{n}$ y por lo tanto

$$U(f, P_n) - L(f, P_n) = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{b}{n}\right)^2 = \frac{b^2}{n} < \varepsilon$$

Fijemos $\varepsilon > 0$ y sea $n \in \mathbb{N}$ tal que $b^2 < n\varepsilon$.
Pongamos $P_\varepsilon = \{t_0, \cdots, t_n\}$ con

$$t_0 = 0, \; t_k = k\frac{b}{n} = t_{k-1} + \frac{b}{n}, k = 1, \cdots, n.$$

Entonces $t_k - t_{k-1} = \frac{b}{n}$ y por lo tanto

$$U(f, P_n) - L(f, P_n) = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{b}{n}\right)^2 = \frac{b^2}{n} < \varepsilon$$

Conluimos que f es integrable en $[0, b]$.

Fijemos $\varepsilon > 0$ y sea $n \in \mathbb{N}$ tal que $b^2 < n\varepsilon$.
Pongamos $P_\varepsilon = \{t_0, \cdots, t_n\}$ con

$$t_0 = 0, \;\; t_k = k\frac{b}{n} = t_{k-1} + \frac{b}{n}, k = 1, \cdots, n.$$

Entonces $t_k - t_{k-1} = \frac{b}{n}$ y por lo tanto

$$U(f, P_n) - L(f, P_n) = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{b}{n}\right)^2 = \frac{b^2}{n} < \varepsilon$$

Conluimos que f es integrable en $[0, b]$.

¿Cómo podemos encontrar la integral de f?

Para cada partición P_n, resulta

$$L(f, P_n) = \sum_{k=1}^{n} \frac{b}{n} \left((k-1)\frac{b}{n} \right) = \left(\frac{b}{n} \right)^2 \sum_{k=1}^{n} (k-1).$$

Para cada partición P_n, resulta

$$L(f, P_n) = \sum_{k=1}^{n} \frac{b}{n} \left((k-1)\frac{b}{n} \right) = \left(\frac{b}{n} \right)^2 \sum_{k=1}^{n} (k-1).$$

Recordemos que $1 + 2 + \cdots + N = \frac{N(N+1)}{2}$ y por lo tanto

$$L(f, P_n) = \frac{b^2}{n^2} \frac{(n-1)n}{2} = \frac{n-1}{n} \frac{b^2}{2}$$

Para cada partición P_n, resulta

$$L(f, P_n) = \sum_{k=1}^{n} \frac{b}{n} \left((k-1) \frac{b}{n} \right) = \left(\frac{b}{n} \right)^2 \sum_{k=1}^{n} (k-1).$$

Recordemos que $1 + 2 + \cdots + N = \frac{N(N+1)}{2}$ y por lo tanto

$$L(f, P_n) = \frac{b^2}{n^2} \frac{(n-1)n}{2} = \frac{n-1}{n} \frac{b^2}{2}$$

De manera análoga, obtenemos que $U(f, P_n) = \sum_{k=1}^{n} \frac{b}{n} \left(k \frac{b}{n} \right) = \frac{n+1}{n} \frac{b^2}{2}$

Para cada partición P_n, resulta

$$L(f, P_n) = \sum_{k=1}^{n} \frac{b}{n} \left((k-1)\frac{b}{n} \right) = \left(\frac{b}{n} \right)^2 \sum_{k=1}^{n} (k-1).$$

Recordemos que $1 + 2 + \cdots + N = \frac{N(N+1)}{2}$ y por lo tanto

$$L(f, P_n) = \frac{b^2}{n^2} \frac{(n-1)n}{2} = \frac{n-1}{n} \frac{b^2}{2}$$

De manera análoga, obtenemos que $U(f, P_n) = \sum_{k=1}^{n} \frac{b}{n} \left(k \frac{b}{n} \right) = \frac{n+1}{n} \frac{b^2}{2}$

Como $\frac{n-1}{n} < 1$, resulta $L(f, P_n) < \frac{b^2}{2}$. Del mismo modo $U(f, P_n) > \frac{b^2}{2}$.

Para cada partición P_n, resulta

$$L(f,P_n)=\sum_{k=1}^{n}\frac{b}{n}\left((k-1)\frac{b}{n}\right)=\left(\frac{b}{n}\right)^2\sum_{k=1}^{n}(k-1).$$

Recordemos que $1+2+\cdots+N=\frac{N(N+1)}{2}$ y por lo tanto

$$L(f,P_n)=\frac{b^2}{n^2}\frac{(n-1)n}{2}=\frac{n-1}{n}\frac{b^2}{2}$$

De manera análoga, obtenemos que $U(f,P_n)=\sum_{k=1}^{n}\frac{b}{n}\left(k\frac{b}{n}\right)=\frac{n+1}{n}\frac{b^2}{2}$

Como $\frac{n-1}{n}<1$, resulta $L(f,P_n)<\frac{b^2}{2}$. Del mismo modo $U(f,P_n)>\frac{b^2}{2}$.

Conluimos que cada $\varepsilon>0$ tiene asociada una partición P_n tal que

$$L(f,P_n)<\frac{b^2}{2}<U(f,P_n)\quad\Rightarrow\quad\boxed{\int_0^b x\,dx=\frac{b^2}{2}}.$$

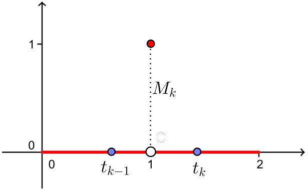
Otros ejemplos

- Con los mismos métodos que antes, puede probarse que la función $f(x) = x^2$ es integrable en $[0, b]$ y que $\boxed{\int_0^b x^2\, dx = \frac{b^3}{3}.}$

Otros ejemplos

- Con los mismos métodos que antes, puede probarse que la función $f(x) = x^2$ es integrable en $[0, b]$ y que $\boxed{\displaystyle\int_0^b x^2\,dx = \frac{b^3}{3}.}$

- Consideremos ahora $f : [0, 2] \to \mathbb{R}$ tal que $f(x) = 0$ si $x \neq 1$, $f(1) = 1$, y una partición $P = \{t_0, \cdots, t_n\}$ tal que $1 \in (t_{k-1}, t_k)$ p.a. k. Entonces



  - $m_i = 0, \ \forall\, i = 1, \cdots, n,$
  - $M_i = 0 \ \forall\, i \neq k.$
  - $M_k = 1.$

Luego se tiene

$$L(f, P) = 0, \quad U(f, P) = t_k - t_{k-1}.$$

Luego se tiene

$$L(f, P) = 0, \quad U(f, P) = t_k - t_{k-1}.$$

Como para cada $\varepsilon > 0$ es posible elegir una partición con $t_k - t_{k-1} < \varepsilon$, resulta $U(f, P) - L(f, P) < \varepsilon$ y por lo tanto f es integrable.

Luego se tiene

$$L(f,P)=0,\quad U(f,P)=t_k-t_{k-1}.$$

Como para cada $\varepsilon>0$ es posible elegir una partición con $t_k-t_{k-1}<\varepsilon$, resulta $U(f,P)-L(f,P)<\varepsilon$ y por lo tanto f es integrable.
Más aún, para cualquier partición se verifica $L(f,P)\le 0\le U(f,P)$, con lo cual $\boxed{\int_0^1 f(x)\,dx=0}$.

- Consideremos finalmente $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ dada por

$$f(x)=\begin{cases}0 & \text{si } x \text{ es racional}\\ 1 & \text{si } x \text{ es irracional}\end{cases}.$$

Luego se tiene

$$L(f, P) = 0, \quad U(f, P) = t_k - t_{k-1}.$$

Como para cada $\varepsilon > 0$ es posible elegir una partición con $t_k - t_{k-1} < \varepsilon$, resulta $U(f, P) - L(f, P) < \varepsilon$ y por lo tanto f es integrable.

Más aún, para cualquier partición se verifica $L(f, P) \leq 0 \leq U(f, P)$, con lo cual $\boxed{\int_0^1 f(x)\, dx = 0}$.

- Consideremos finalmente $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ dada por

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \text{ es racional} \\ 1 & \text{si } x \text{ es irracional} \end{cases}.$$

Entonces

$$\text{ínf}\{U(f, P) \, : \, P \in \mathcal{P}_{[a,b]}\} = 1, \quad \sup\{L(f, P) \, : \, P \in \mathcal{P}_{[a,b]}\} = 0$$

para cualquier partición, con lo cual f **no es integrable**.

Propiedades de la integral

Teorema 0.6

Si f es continua en $[a, b]$, entonces f es integrable en $[a, b]$.

Propiedades de la integral

Teorema 0.6

Si f es continua en $[a, b]$, entonces f es integrable en $[a, b]$.

Teorema 0.7

Sea f integrable en $[a, b]$, $c \in [a, b]$ entonces:
f es integrable en $[a, b]$ si y sólo si f es integrable en $[a, c]$ y $[c, b]$. En este caso vale

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx.$$

Ideas de la prueba:

$\Rightarrow$) Supongamos que f es integrable en $[a,b]$ y tomemos $\varepsilon > 0$. Por la Caracterización de la integral, existirá una partición $P = \{t_0, \cdots, t_n\}$ de $[a,b]$ tal que

$$U(f,P) - L(f,P) < \varepsilon.$$

Ideas de la prueba:

$\Rightarrow$) Supongamos que f es integrable en $[a, b]$ y tomemos $\varepsilon > 0$. Por la Caracterización de la integral, existirá una partición $P = \{t_0, \cdots, t_n\}$ de $[a, b]$ tal que

$$U(f, P) - L(f, P) < \varepsilon.$$

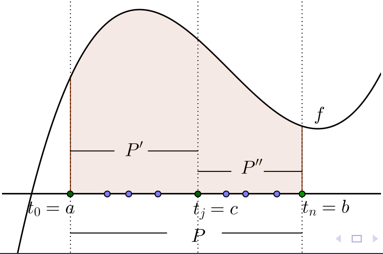
Podemos suponer que existe j tal que $t_j = c$ (si no tomamos la partición $Q = P \cup \{c\}$).

Ideas de la prueba:

$\Rightarrow$) Supongamos que f es integrable en $[a, b]$ y tomemos $\varepsilon > 0$. Por la Caracterización de la integral, existirá una partición $P = \{t_0, \cdots, t_n\}$ de $[a, b]$ tal que

$$U(f, P) - L(f, P) < \varepsilon.$$

Podemos suponer que existe j tal que $t_j = c$ (si no tomamos la partición $Q = P \cup \{c\}$). Sean $P' = \{t_0 = a, t_1, \cdots, t_j = c\}$ y $P'' = \{t_j = c, \cdots, t_n = b\}$. Entonces P' es una partición de $[a, c]$ y P'' es una partición de $[c, b]$.



Entonces

$$L(f,P) = L(f,P') + L(f,P''), \quad U(f,P) = U(f,P') + U(f,P'').$$

Restando miembro a miembro las igualdades anteriores, tenemos

$$[U(f,P') - L(f,P')] + [U(f,P'') - L(f,P'')] = U(f,P) - L(f,P) < \varepsilon.$$

Entonces

$$L(f, P) = L(f, P') + L(f, P''), \quad U(f, P) = U(f, P') + U(f, P'').$$

Restando miembro a miembro las igualdades anteriores, tenemos

$$[U(f, P') - L(f, P')] + [U(f, P'') - L(f, P'')] = U(f, P) - L(f, P) < \varepsilon.$$

Como ambos sumandos del primer término son no negativos,

$$U(f, P') - L(f, P') < \varepsilon, \quad U(f, P'') - L(f, P'') < \varepsilon.$$

Luego f integrable en $[a, c]$ y en $[c, b]$.

Entonces

$$L(f,P) = L(f,P') + L(f,P''), \quad U(f,P) = U(f,P') + U(f,P'').$$

Restando miembro a miembro las igualdades anteriores, tenemos

$$[U(f,P') - L(f,P')] + [U(f,P'') - L(f,P'')] = U(f,P) - L(f,P) < \varepsilon.$$

Como ambos sumandos del primer término son no negativos,

$$U(f,P') - L(f,P') < \varepsilon, \qquad U(f,P'') - L(f,P'') < \varepsilon.$$

Luego f integrable en $[a,c]$ y en $[c,b]$.
Además

$$L(f,P') \leq \int_a^c f(x)dx \leq U(f,P'), \quad L(f,P'') \leq \int_c^b f(x)dx \leq U(f,P'').$$

y entonces

$$L(f,P) \leq \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx \leq U(f,P) \quad \square$$

Teorema 0.8

Sea $c \in \mathbb{R}$. Si f es integrable en $[a, b]$, entonces cf es integrable en $[a, b]$ y vale

$$\int_a^b cf(x)dx = c\int_a^b f(x)dx.$$

Teorema 0.8

Sea $c \in \mathbb{R}$. *Si* f *es integrable en* $[a, b]$, *entonces* cf *es integrable en* $[a, b]$ *y vale*

$$\int_a^b cf(x)dx = c\int_a^b f(x)dx.$$

Teorema 0.9

Sean f *y* g *funciones integrables en* $[a, b]$. *Entonces* $f + g$ *es integrable en* $[a, b]$ *y vale*

$$\int_a^b (f+g)(x)dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx.$$

Extendiendo la noción de integral

Definición 0.10

Sea f una función. Donde tenga sentido, se define:

- $\int_a^a f(x)dx = 0;$
- *si* $b < a$, $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx.$

Extendiendo la noción de integral

Definición 0.10

Sea f una función. Donde tenga sentido, se define:

- $\int_a^a f(x)dx = 0$;
- *si* $b < a$, $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$.

Con estas nociones vale, donde tenga sentido,

$$\int_a^b f(x)\, dx = \int_a^c f(x)\, dx + \int_c^b f(x)\, dx$$

sin importar qué relación existe entre a, b y c.

Ejemplos

Sea $f(x) = x$ y sean $0 \leq a < b$. Entonces f es integrable en $[0, a]$ y en $[0, b]$, y como $a \in [0, b]$ también es integrable en $[a, b]$. Además vale:

$$\int_0^a f(x)dx = \frac{a^2}{2}, \quad \int_0^b f(x)dx = \frac{b^2}{2}$$

y por lo tanto

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^0 f(x)dx + \int_0^b f(x)dx = -\int_0^a f(x)dx + \int_0^b f(x)dx = \frac{b^2}{2} - \frac{a^2}{2}$$

Ejemplos

Sea $f(x) = x$ y sean $0 \leq a < b$. Entonces f es integrable en $[0, a]$ y en $[0, b]$, y como $a \in [0, b]$ también es integrable en $[a, b]$. Además vale:

$$\int_0^a f(x)dx = \frac{a^2}{2}, \quad \int_0^b f(x)dx = \frac{b^2}{2}$$

y por lo tanto

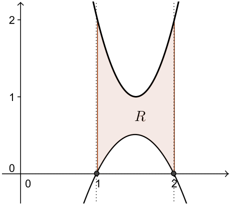
$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^0 f(x)dx + \int_0^b f(x)dx = -\int_0^a f(x)dx + \int_0^b f(x)dx = \frac{b^2}{2} - \frac{a^2}{2}$$

De manera análoga, si $0 \leq a \leq b$, $f(x) = x^2$ es integrable en $[a, b]$ y se tiene

$$\int_a^b x^2\,dx = \frac{b^3}{3} - \frac{a^3}{3}.$$

Consideremos la región

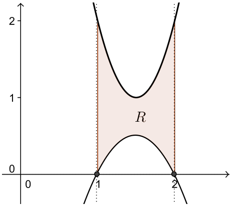
$$R = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \, : \, 1 \leq x \leq 2, \;\; -2x^2 + 6x - 4 \leq y \leq 4x^2 - 12x + 10\}$$



R es la región comprendida entre las graficas de las funciones $f(x) = -2x^2 + 6x - 4$ y $g(x) = 4x^2 - 12x + 10$.

Consideremos la región

$$R = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, 1 \leq x \leq 2,\ -2x^2 + 6x - 4 \leq y \leq 4x^2 - 12x + 10\}$$

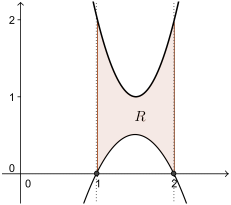


R es la región comprendida entre las graficas de las funciones $f(x) = -2x^2 + 6x - 4$ y $g(x) = 4x^2 - 12x + 10$. f y g son continuas y entonces son integrables en $[1, 2]$. El área de la región R se obtiene de restar al área de la región $R(g)$ el área de la región $R(f)$. Tenemos entonces

$$\text{Área}(R) = \int_1^2 (g - f)(x)dx = \int_1^2 (6x^2 - 18x + 14)dx = \ \textbf{?}$$

Consideremos la región

$$R = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, 1 \leq x \leq 2,\ -2x^2+6x-4 \leq y \leq 4x^2-12x+10\}$$



R es la región comprendida entre las graficas de las funciones $f(x) = -2x^2+6x-4$ y $g(x) = 4x^2-12x+10$. f y g son continuas y entonces son integrables en $[1,2]$. El área de la región R se obtiene de restar al área de la región $R(g)$ el área de la región $R(f)$. Tenemos entonces

$$\text{Área}(R) = \int_1^2 (g-f)(x)dx = \int_1^2 (6x^2-18x+14)dx = 1$$

Alguna propiedades más

Lema 0.11

Sea f una función integrable en $[a,b]$. Si g es una función acotada en $[a,b]$ tal que $g(x) = f(x)$ para todo $x \in [a,b]$ salvo para un número finito de puntos $x_1, \cdots, x_n$, entonces g es integrable en $[a,b]$ y $\int_a^b g(x)dx = \int_a^b f(x)dx$.

Alguna propiedades más

Lema 0.11

Sea f una función integrable en $[a,b]$. Si g es una función acotada en $[a,b]$ tal que $g(x) = f(x)$ para todo $x \in [a,b]$ salvo para un número finito de puntos $x_1, \cdots, x_n$, entonces g es integrable en $[a,b]$ y $\int_a^b g(x)dx = \int_a^b f(x)dx$.

Teorema 0.12

Sea f integrable en $[a,b]$ y supongamos que $m \leq f(x) \leq M$ para todo x en $[a,b]$. Entonces

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x)dx \leq M(b-a).$$