



Facultad de Ciencias Exactas, Ingeniería y Agrimensura

Departamento de Matemática - Escuela de Ciencias Exactas y Naturales

ANÁLISIS MATEMÁTICO II

Licenciatura y Profesorado en Física, Licenciatura en Ciencias de la Computación,

Licenciatura y Profesorado en Matemática - Año 2020

Práctica 5: Aplicaciones del cálculo diferencial.

1. Represente gráficamente las siguientes funciones y halle, si es posible sus extremos relativos y absolutos.

$i) f_1 : [-1, 0] \longrightarrow \mathbb{R}$	tal que $f_1(x) = 2 - 2x^2;$
$ii) f_2 : (-3, 1) \longrightarrow \mathbb{R}$	tal que $f_2(x) = 2x^2 + 3x - 2;$
$iii) f_3 : [0, 2) \longrightarrow \mathbb{R}$	tal que $f_3(x) = -x^2 + 2x - 2;$
$iv) f_4 : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$	tal que $f_4(x) = x^2 + 2 - 4x + 1;$
$v) f_5(x) = \begin{cases} \cos(2x) & \text{si } x \geq 0, \\ \arctan x & \text{si } x < 0; \end{cases}$	$vi) f_6(x) = \begin{cases} x^3 + 1 & \text{si } x \leq 0, \\ \frac{1}{2} x - 2 & \text{si } x > 0. \end{cases}$

2. Sea la función $f(x) = ax^2 + bx + 1$. Determine los valores de a y b de manera que el máximo absoluto de f sea 3 y alcance el mismo en $x = 1$.
3. Determine para qué valores de a y b la función $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + 2$ tiene un máximo relativo en $x = -3$ y un mínimo relativo en $x = -1$.
4. Sea $k \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$. Muestre que la función $f : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}$ con $f(x) = x^k - kx$ posee un extremo relativo en $x = 1$, tratándose de un máximo relativo si $0 < k < 1$ y de un mínimo relativo si $k > 1$.
5. Halle los valores máximos y mínimos absolutos de las siguientes funciones en el intervalo indicado en cada caso:

$i) f_1(x) = 2x^3 - 9x^2 + 12x$	en $[0, 3];$	$ii) f_2(x) = x^2 + \frac{16}{x}$	en $[1, 3];$
$iii) f_3(x) = x\sqrt{1-x}$	en $[-1, 1];$	$iv) f_4(x) = x - \sin x$	en $[-\pi, \pi];$
$v) f_5(x) = \frac{\cos x}{2 + \sin x}$	en $[0, 2\pi];$	$vi) f_6(x) = (x-1)^{1/3} + \frac{1}{2}(x+1)^{2/3}$	en $[-2, 7].$

6. Calcule los siguientes límites:

$$\begin{aligned}
 a) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{3x^2 + 2x - 16}{x^2 - x - 2}, & \quad b) \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 4x + 3}{2x^2 - 13x + 21}, & \quad c) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sinh x - \sin x}{x^3}, \\
 d) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(2x - 1)e^x - x - 2}{x^3}, & \quad e) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(\cos(ax))}{\ln(\cos(bx))}, & \quad f) \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x - \sin x}{(x \sin x)^{\frac{3}{2}}}, \\
 g) \lim_{x \rightarrow a^+} \frac{\sqrt{x} - \sqrt{a} + \sqrt{x - a}}{\sqrt{x^2 - a^2}}, & \quad h) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsen(2x) - 2 \arcsen x}{x^3}, & \quad i) \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x^x - x}{1 - x + \ln x}. \\
 j) \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\left(a \arctan \frac{\sqrt{x}}{a} - b \arctan \frac{\sqrt{x}}{b}\right)}{x\sqrt{x}}, & \quad k) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sum_{k=1}^n x^k - n}{x - 1}, & \quad l) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{a^x}{x^b}, \quad a > 1, \\
 m) \lim_{x \rightarrow 0^+} \left[\frac{\ln x}{(1+x)^2} - \ln \left(\frac{x}{1+x} \right) \right], & \quad n) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\cosh(x+1)}{e^x}, & \quad o) \lim_{x \rightarrow 0^+} x^{x^x} - 1.
 \end{aligned}$$

7. ¿Para qué valores de las constantes a y b es $\lim_{x \rightarrow 0} (x^{-3} \sin(3x) + ax^{-2} + b) = 0$?

8. Halle c de modo que $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x+c}{x-c} \right)^x = 4$.

9. Represente gráficamente una función que satisfaga simultáneamente las condiciones dadas en cada caso.

$$\begin{aligned}
 a) \quad & g(-1) = 4, \quad g(1) = 0, \quad g'(-1) = 0, \quad g'(1) \text{ no existe}, \\
 & g'(x) > 0 \text{ si } |x| > 1, \quad g'(x) < 0 \text{ si } |x| < 1, \quad g''(x) < 0 \text{ si } |x| \neq 1.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 b) \quad & f'(2) = 0, \quad f'(0) = 1, \quad f'(x) > 0 \text{ si } 0 < x < 2, \quad f'(x) < 0 \text{ si } x > 2, \\
 & f''(x) < 0 \text{ si } 0 < x < 4, \quad f''(x) > 0 \text{ si } x > 4, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0, \\
 & f(-x) = -f(x) \text{ para todo } x \in \mathbb{R}.
 \end{aligned}$$

c) Suponga que $f'(x) > g'(x)$ para todo x y que $f(a) = g(a)$. Demuestre que $f(x) > g(x)$ para $x > a$ y $f(x) < g(x)$ para $x < a$.

Busque un ejemplo donde se muestre que lo anterior no es válido sin la hipótesis $f(a) = g(a)$.

d) Suponga que f es continua y derivable en $[0,1]$, que $f(x)$ está en $[0,1]$ para todo x y que $f'(x) \neq 1$ para todo $x \in [0,1]$. Demuestre que existe exactamente un $x_0 \in [0,1]$ tal que $f(x) = x$.

e) Demuestre que si f y g son convexas y f es creciente, entonces $g \circ f$ es convexa.

10. Para cada una de las siguientes funciones se pide:

- a) determine el dominio de f y estudiar su paridad;
- b) determine los intervalos de crecimiento y de decrecimiento y la existencia de extremos relativos;
- c) determine los intervalos de concavidad y de convexidad y la existencia de puntos de inflexión;
- d) analice la existencia o no de asíntotas horizontales y/o verticales para f ;
- e) construya un boceto de la gráfica de f utilizando la información de los items anteriores;
- f) analice la existencia de máximo o mínimo absoluto para esta función.

$$i) f(x) = x^3 - 4x,$$

$$ii) f(x) = (x - 1)^2 (x + 2),$$

$$iii) f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x + 5,$$

$$iv) f(x) = 2 + (x - 1)^4,$$

$$v) f(x) = x + \frac{1}{x^2},$$

$$vi) f(x) = \frac{1}{(x - 1)(x - 3)},$$

$$vii) f(x) = \frac{x}{1 + x^2},$$

$$viii) f(x) = \frac{x^2 - 4}{x^2 - 9},$$

$$ix) f(x) = \sin^2 x,$$

$$x) f(x) = x - \sin x,$$

$$xi) f(x) = x e^x,$$

$$xii) f(x) = \ln(x^2 + x + 1).$$

11. Suponga que f es una función tal que $f'(x) = 1/x$ para todo $x > 0$ y que $f(1) = 0$. Demuestre que $f(xy) = f(x) + f(y)$ (sin usar la función vista en apunte anterior!).

Ayuda: Halle $g'(x)$ cuando $g(x) = f(xy)$.

12. Demuestre que entre todos los rectángulos de igual perímetro, el de mayor área es el cuadrado.

13. Convengamos en medir las alturas hacia arriba desde el nivel del suelo. Si $s(t)$ representa la posición de un cuerpo en tiempo t al ser arrojado hacia arriba, entonces su aceleración es $s''(t) = -9,8m/s^2$.

- a) Si se lanza un cuerpo con velocidad inicial $v_0 m/s$ y a 1 metro del suelo, ¿a qué altura llegará?
- b) ¿Cuál será su velocidad al tocar el suelo? (calcule una velocidad inicial de modo que el golpe en la mano no sea muy duro, suponiendo que su mano está a 1 m del suelo...)
- c) ¿Cuánto tardará en llegar al suelo?