Facultad de Ciencias Exactas, Ingeniería y Agrimensura

Departamento de Matemática - Escuela de Ciencias Exactas y Naturales

ANÁLISIS MATEMÁTICO II

Licenciatura y Profesorado en Física, Licenciatura en Ciencias de la Computación, Licenciatura y Profesorado en Matemática - Año 2020

Trabajo Práctico 1: Cálculo Integral

---

1. Utilizando el método de inducción matemática, demuestre que para cada $n \in \mathbb{N}$ vale:

   a) $1 + 2 + \cdots + n = \frac{n}{n+1}2$.

   b) $1^2 + 2^2 + \cdots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

2. Sea A un conjunto acotado de números reales y sea $c \in \mathbb{R}$.

   a) Sea $cA = \{cx : x \in A\}$. Pruebe que $\text{ínf}(cA) = c\,\text{ínf}\, A$, $\sup(cA) = c \sup A$.

   b) Sea $A' \subset A$. Pruebe que $\text{ínf}\, A \leq \text{ínf}\, A'$ y $\sup A' \leq \sup A$.

3. Dada dos particiones P, P' del intervalo $[a, b]$, se dice que la partición P' es más fina que la partición P si $P \subset P'$.

   Pruebe que dadas dos particiones P, P' del intervalo $[a, b]$ existe una partición P'' que es más fina que las otras dos.

4. Una partición $P = \{t_0, \cdots, t_n\}$ del intervalo $[a, b]$ se dice **regular** si $t_i - t_{i-1} = \frac{b-a}{n}$ para cada $i = 1, \cdots, n$. Utilice particiones regulares para $n = 3$, 4 y 5 para acotar inferior y superiormente el área de la región $R(f)$ para la función f y el intervalo $[a, b]$ dados en cada caso.

   a) $f(x) = 3x^2 + 1$, $a = 0$, $b = 1$.

   b) $f(x) = -2x + 1$, $a = -1$, $b = 0$.

   c) $f(x) = x^3 - x^2$, $a = 1$, $b = 2$.

5. Denotemos por P_r una partición regular del intervalo $[a, b]$. Supongamos que $inf\{U(f, P_r)\} = \sup\{L(f, P_r)\}$, donde estos conjuntos se toman sobre todas las particiones regulares del intervalo $[a, b]$. Pruebe que f es integrable.

6. Pruebe que si $b < 0$, la función $f(x) = x$ es integrable en $[b, 0]$ y vale $\int_b^0 x dx = -\frac{b^2}{2}$. Concluya que cualesquiera sean $a < b \in \mathbb{R}$, f es integrable en $[a, b]$ y

$$\int_a^b x dx = \frac{b^2}{2} - \frac{a^2}{2}.$$

7. Pruebe que si $b < 0$, la función $f(x) = x^2$ es integrable en $[b, 0]$ y vale $\int_b^0 x^2 dx = -\frac{b^3}{3}$. Concluya que cualesquiera sean $a < b \in \mathbb{R}$, f es integrable en $[a, b]$ y

$$\int_a^b x^2 dx = \frac{b^3}{3} - \frac{a^3}{3}.$$

8. Sean $a < b < c < d$ y f una función integrable en $[a, d]$. Pruebe que f es integrable en $[b, c]$.

9. Sean f y g funciones integrables en $[a, b]$.

   a) Pruebe que si $f \geq 0$, entonces $\int_a^b f(x)dx \geq 0$.

   b) Pruebe que si $f(x) \geq g(x)$ para todo $x \in [a, b]$, entonces $\int_a^b f(x)dx \geq \int_a^b g(x)dx$.

10. Supongamos que f es una función integrable en cualquier intervalo cerrado de $\mathbb{R}$. Pruebe que cualesquiera sean $a, b, c \in \mathbb{R}$,

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx.$$

11. Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{si } x \in \mathbb{Z} \\ 0 & \text{si } x \notin \mathbb{Z} \end{cases}.$$

    Pruebe que f es integrable en $[a, b]$ para cualquier $a < b$ y que $\int_a^b f(x)dx = 0$.

12. Determine el área de la región comprendida entre las gráficas de las funciones f y g (en caso de que no se indique, las bandas laterales están determinadas por los puntos de intersección de ambas gráficas).

    a) $f(x) = x^2$, $g(x) = \frac{x^2}{2} + 2$.

    b) $f(x) = x^2 + 1$, $g(x) = -x + 1$

    c) $f(x) = x^2$, $g(x) = x^2 - 2x + 4$, y la región está acotada por izquierda por el eje y.

13. Demuestre que $\int_a^b f(x)\, dx = \int_{a+c}^{b+c} f(x - c)\, dx$

14. Suponga que f es no decreciente en $[a, b]$.

    a) Si $P = \{t_0, t_1, \ldots t_n\}$ es una partición de $[a, b]$, ¿Cómo son $L(f, P)$ y $U(f, P)$?

    b) Suponga que $t_i - t_{i-1} = \delta$ para todo i. Demuestre que $U(f, P) - L(f, P) = \delta(f(b) - f(a))$.

    c) Demuestre que f es integrable.