

Unidad 6: Inducción
Álgebra y Geometría Analítica I (R-111)
Licenciatura en Ciencias de la Computación

Iker M. Canut

2020

1. Inducción

Objetivo general: Demostrar enunciados del estilo: $\forall n, P(n)$, donde $P(n)$ es una proposición que depende del número natural n .

Axiomas: $\forall a, b, c \in \mathbb{R}$:

$$S_1) (a + b) + c = a + (b + c)$$

$$P_1) (a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$$

$$S_2) (a + b) = (b + a)$$

$$P_2) (a \cdot b) = (b \cdot a)$$

$$S_3) \exists 0 \in \mathbb{R} : a + 0 = a$$

$$P_3) \exists 1 \in \mathbb{R} : 1 \neq 0 \wedge a \cdot 1 = a$$

$$S_4) \exists (-a) \in \mathbb{R} : a + (-a) = 0$$

$$P_4) (a \neq 0) \Rightarrow \exists a^{-1} \in \mathbb{R} : a \cdot a^{-1} = 1$$

$$D) a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$$

$$O_1) (a = b) \vee (a < b) \vee (a > b)$$

$$O_2) [(a < b) \wedge (b < c)] \Rightarrow (a < c)$$

$$CS) (a < b) \Rightarrow (a + c < b + c)$$

$$CP) [(a < b) \wedge (0 < c)] \Rightarrow (a \cdot c < b \cdot c)$$

AS Axioma del Supremo

Un subconjunto $H \subset \mathbb{R}$ se llama **inductivo** si:

- $1 \in H$
- $x \in H \Rightarrow x + 1 \in H$

Lema 1: La intersección de una familia arbitraria de subconjuntos inductivos de \mathbb{R} es un subconjunto inductivo.

D/ Dada una familia $\{X_i : i \in I\}$ en donde $X_i \subset \mathbb{R}$ es inductivo $\forall i \in I$. Luego:

- $1 \in X_i \forall i \in I$, luego $1 \in \bigcap_{i \in I} X_i$
- Si $x \in X_i \Rightarrow x + 1 \in X_i \forall i \in I$, luego $x \in \bigcap_{i \in I} X_i \Rightarrow x + 1 \in \bigcap_{i \in I} X_i$

Entonces tenemos que $\bigcap_{i \in I} X_i$ es un subconjunto inductivo. ■

Se define a los **Naturales** \mathbb{N} como la intersección de todos los subconjuntos inductivos de \mathbb{R} . Como el único valor que debe estar por definición es el 1 (y sus sucesores), entonces $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, 5, \dots\}$

Teorema: Principio de Inducción: Sea $P(n)$ una proposición que depende de $n \in \mathbb{N}$. Si:

1. $P(1)$ es verdadera
2. $P(k) \Rightarrow P(k + 1) \forall k \in \mathbb{N}$

Entonces $P(n)$ es verdadera $\forall n \in \mathbb{N}$.

D/ Sea $H = \{k \in \mathbb{N} : P(k) \text{ es verdadera}\}$, sabemos que $1 \in H$ y que si $k \in H \Rightarrow k + 1 \in H$. Luego, H es un subconjunto inductivo de \mathbb{R} , contenido en \mathbb{N} . Y como \mathbb{N} es el menor de subconjunto inductivo de \mathbb{R} , resulta $H = \mathbb{N}$ y $\therefore P(n)$ es verdadera $\forall n \in \mathbb{N}$. ■

Teorema: Sea $P(n)$ una proposición que depende de $n \in \mathbb{N}$. Si:

1. $P(n_0)$ es verdadera
2. $P(k) \Rightarrow P(k+1) \forall k \geq n_0$

Entonces $P(n)$ es verdadera $\forall k \geq n_0$

D/ Sea $Q(n) = P(n_0 + n - 1)$, sabemos que $Q(1) = P(n_0)$ es verdadera. Y sea $k \geq 1$, vemos que si $Q(k) = P(n_0 + k - 1)$ es verdadera, entonces $Q(k+1) = P(n_0 + k)$ también lo es. Y por el principio de inducción, $Q(n)$ es verdadera $\forall n \in \mathbb{N}$. I.e $P(n)$ es verdadera $\forall n \geq n_0$. ■

Observación: $P(n) \Rightarrow P(n+1)$ ocurre siempre. Pero que $P(1) \Rightarrow P(2)$ no quiere decir que $P(2)$ sea verdadera... Es decir, $P(1)$ puede ser falso y sin importar el valor de $P(2)$, la proposición es verdadera.

Propiedades elementales de los \mathbb{N}

1. $n \in \mathbb{N} \wedge n \neq 1 \Rightarrow n - 1 \in \mathbb{N}$, es decir, $\exists m \in \mathbb{N} : n = m + 1$
 $P(1)$ es falsa, $P(2)$ es verdadera. Suponemos $P(n)$ y probamos $P(n+1)$: $(n+1) - 1 = n$.
Luego es verdadera $\forall n \geq 2$, que es equivalente a decir $P(n)$, ($\forall n \in \mathbb{N} \wedge n \neq 1$) ■
2. $m, n \in \mathbb{N} \Rightarrow (m+n \in \mathbb{N} \wedge m \cdot n \in \mathbb{N})$
Fijamos m , inducción en n . $P(n) = m+n$, $Q(n) = m \cdot n$. Luego, $P(1)$ y $Q(1)$ son verdaderas.
 $P(n) \Rightarrow P(n+1) = m + (n+1) = (m+n) + 1 \in \mathbb{N}$.
 $Q(n) \Rightarrow Q(n+1) = m(n+1) = mn + m \in \mathbb{N}$ ■
3. $m, n \in \mathbb{N} \wedge m < n \Rightarrow n - m \in \mathbb{N}$
Fijamos n y hacemos inducción en m . $P(1) : 1 < n \Rightarrow n - 1 \in \mathbb{N}$. Luego $P(m) \Rightarrow P(m+1) : (m+1) < n \Rightarrow n - (m+1) \in \mathbb{N}$. Tenemos que $m < n$ y por HI. tenemos que $1 < n - m$. Luego, $n - (m+1) = (n - m) - 1 \in \mathbb{N}$ ■
4. $n \in \mathbb{N} \wedge (a \in \mathbb{R} : n - 1 < a < n) \Rightarrow a \notin \mathbb{N}$ $P(1)$ es verdadera, pues $0 < a < 1 \Rightarrow a \notin \mathbb{N}$.
 $P(n) \Rightarrow P(n+1)$: $n < a < n+1$. Suponemos que $a \in \mathbb{N}$, luego $0 < a - n < 1$, pero es absurdo ya que $a > n \Rightarrow a - n \in \mathbb{N}$. ■

2. Definiciones Recursivas

Una sucesión u_1, u_2, \dots, u_n está **definida recursivamente** si puede obtenerse de la siguiente manera:

- Se explicita el/los primer/os elemento/s $u_1[, u_2, \dots, u_{n_0}]$.
- Hay una regla para obtener el elemento u_{n+1} con $n \geq 1$ [o $n \geq n_0$] en función de los elementos anteriores de la sucesión.

2.1. Sumatoria

Dados n números x_1, x_2, \dots, x_n , podemos definir recursivamente su suma $\sum_{i=1}^n x_i$ como:

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^n x_i = x_1 \\ \sum_{i=1}^{k+1} x_i = \sum_{i=1}^k x_i + x_{k+1}, \quad 2 \leq k \leq n-1 \end{cases}$$

2.2. Productoria

Dados n números x_1, x_2, \dots, x_n , podemos definir recursivamente su producto $\prod_{i=1}^n x_i$ como:

$$\begin{cases} \prod_{i=1}^n x_i = x_1 \\ \prod_{i=1}^{k+1} x_i = \prod_{i=1}^k x_i \cdot x_{k+1}, \quad 2 \leq k \leq n-1 \end{cases}$$

3. Orden

Un subconjunto A de \mathbb{R} tiene **primer elemento** si $\exists a \in A : a \leq x, \forall x \in A$ (se dice que a es el mínimo, no hay que confundirlo con el ínfimo).

Un subconjunto A de \mathbb{R} se dice **bien ordenado** si todo subconjunto no vacío de A tiene primer elemento. Hay que tener cuidado porque el conjunto vacío está bien ordenado.

Sea $a < b$, los intervalos (a, b) y $(a, b]$ no tienen primer elemento, mientras que $[a, b)$ y $[a, b]$ sí tienen. De todas maneras, ninguno de éstos está bien ordenado, ya que se puede encontrar un intervalo dentro del mismo en donde no se tenga un primer elemento!

Teorema: Principio de buena ordenación: \mathbb{N} es un conjunto bien ordenado.

D/ Por el absurdo, suponemos $X \subset \mathbb{N}$: que no tiene primer elemento.

Sea $H = \{n \in \mathbb{N} : \{1, \dots, n\} \subset \mathbb{N} - X\}$; la idea es demostrar que H es inductivo, ergo X es \emptyset .

Comenzamos con que $1 \in H$ (si no sucede es primer elemento de X).

Luego, si tenemos que el natural $k \in H$, hay dos posibilidades para $k+1$, que esté en H o que no esté, significando esto que pertenece a X . Pero si perteneciera a X , éste sería el primer elemento, lo cual es absurdo. Entonces $k+1 \in H$ y H es inductivo $\Rightarrow H = \mathbb{N}$ y $X = \emptyset$.

\therefore Todo subconjunto no vacío de \mathbb{N} tiene primer elemento. ■

Teorema: Principio de Inducción Fuerte Sea $P(n)$ una proposición que depende del natural n :

1. Si $P(1)$ es verdadera
2. Si $\forall k \geq 1$, si $P(1), P(2), \dots, P(k)$ son verdaderas, entonces $P(k+1)$ es verdadera.

Entonces $P(n)$ es verdadera para todo $n \in \mathbb{N}$.

D/ Sea $X = \{n \in \mathbb{N} : P(n) \text{ es falsa}\}$, queremos ver que $X = \emptyset$.

Supongamos $X \neq \emptyset$ y que n_0 es el primer elemento de X . Observar que $n_0 \geq 2$, pues $P(1)$ es verdadera. Luego, $1, \dots, n_0 - 1 \notin X$, o equivalentemente, $P(1), \dots, P(n_0 - 1)$ son verdaderas. Pero el *item 2* nos dice implica que $P(n_0)$ tiene que ser verdadera, y por ende no pertenecer a X , lo cual es absurdo. ■

Paradoja de los Caballos “Teorema” Todos los caballos son del mismo color.

- Si $n = 1$, hay un único caballo y claramente todos son del mismo color.
- Supongamos que la afirmación es cierta para conjuntos de n caballos.
- Si tenemos un conjunto con $n + 1$ caballos podemos retirar un caballo del conjunto y por la hipótesis inductiva los n caballos restantes son del mismo color.
- Para ver que el caballo que sacamos es del mismo color que los anteriores simplemente lo intercambiamos por alguno de los otros caballos y nuevamente en un conjunto de n caballos, todos deben ser del mismo color, y por el Principio de Inducción, todos son del mismo color.

El error está en suponer que los dos subconjuntos de n caballos tienen caballos el mismo color. Lo único que se puede afirmar es que tienen la misma cardinalidad, pero nada de los colores. E.g al tener $n = 2$, la premisa es claramente falsa, pues al quitar un caballo del grupo, tenemos un grupo de 1, y al intercambiarlo, tenemos otro grupo de 1. Es decir, necesitamos una intersección no vacía.