Introducción a la Matemática

Iker M. Canut

February 11, 2020

Contents

1 Conjuntos

1.1 Definiciones Básicas

Un Conjunto es una colección de objetos. Los conjuntos se denominan con letras mayúsculas. Y los elementos que lo forman con letras minúsculas. El conjunto vacio se denomina $\emptyset$.

1.2 Representación de conjuntos

- **Por Extensión**: Se lista todo entre llaves. $\{a, b, c, d, ...\}$
- **Por Comprension**: Se dicen las propiedades. $\{x/x...\}$

1.3 Subconjuntos

El conjunto B es subconjunto de A si y sólo si todo elemento de B, es también de A.

$$\boxed{B \subset A \iff (x \in B \Rightarrow x \in A)}$$

Dos conjuntos serán iguales cuando posean los mismos elementos.

$$\boxed{B = A \iff (A \subset B \wedge B \subset A)}$$

Al conjunto que contiene a todos los datos en un contexto específico lo denominaremos **Conjunto Universal** y se denota con la letra **U**.

1.4 Operaciones

- **Intersección de Conjuntos**: $A \cap B = \{x/x \in A \wedge x \in B\}$
- **Unión de Conjuntos**: $A \cup B = \{x/x \in A \vee x \in B\}$

Si dos conjuntos no tienen elementos en comun, entonces son **disjuntos**. A y B disjuntos $\iff A \cap B = \emptyset$

Propiedades	UNIÓN	INTERSECCIÓN
Conmutativa	$A \cup B = B \cup A$	$A \cap B = B \cap A$
Asociativa	$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$	$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$
Distributiva	$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$	$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$
Idempotencia	$A \cup A = A$	$A \cap A = A$

- **Diferencia**: $A - B = \{x/x \in A \wedge x \notin B\}$
- **Complemento**: $C_A = \overline{A} = U - A$. Se cumple que $A - B = A \cap \overline{B}$

Propiedades	
Complemento	$\overline{\overline{A}} = A$ $A \cup \overline{A} = U$ $A \cap \overline{A} = \emptyset$ $\overline{\emptyset} = U \wedge \overline{U} = \emptyset$
Leyes de Morgan	$\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$ $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$

- **Cardinal de un conjunto**: Es el número de elementos. $|A| = card(A)$

2 Números Reales

- **Naturales** N: $\{1, 2, 3, ...\}$
- **Naturales con cero** N_0: $\{0, 1, 2, 3, ...\}$
- **Enteros** Z: $\{..., -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, ...\}$
- **Racionales** Q=$\left\{x/x = \frac{p}{q}, p \in Z, q \in Z, q \neq 0\right\}$
- **Irracionales** I=$Q \cap I = \emptyset \wedge Q \cup I = R$

$$N \subset N_0 \subset Z \subset Q \subset R \wedge I \subset R$$

2.1 Suma y Producto

	Suma	Producto
Conmutativa	$a + b = b + a$	$a.b = b.a$
Asociativa	$(a + b) + c = a + (b + c)$	$(a.b).c = a.(b.c)$
$\exists$ *Elemento Neutro*	$a + 0 = a$	$a.1 = a$
$\exists$ *Elemento Inverso*	$a + (-a) = 0$	$a.\frac{1}{a} = 1$
Cancelativa	$a + b = a + c \Rightarrow b = c$	$a.b = a.c \Rightarrow b = c, a \neq 0$
Uniforme	$a = b \Rightarrow a + c = b + c$	$a = b \Rightarrow a.c = b.c$
Distributiva	$a.(b + c) = a.b + a.c$	

2.2 Resta y División

- $a - b = a + (-b)$
- $a : b = \dfrac{a}{b} = a.\dfrac{1}{b}$
- $\dfrac{p}{q} + \dfrac{r}{s} = \dfrac{ps + rq}{qs}, q \neq 0 \wedge s \neq 0$
- $\dfrac{p}{q}.\dfrac{r}{s} = \dfrac{pr}{qs}, q \neq 0 \wedge s \neq 0$
- $\dfrac{p}{q} \div \dfrac{r}{s} = \dfrac{ps}{qr}, q \neq 0 \wedge s \neq 0 \wedge r \neq 0$

2.3 Potenciación

- Si $a \neq 0, a^0 = 1$
- $a^1 = a$
- Si $n \in N, n > 1, a^n = \underbrace{a.a.....a}_{\text{n factores "a"}}$
- Si $a \in R \wedge a \neq 0 \wedge n \in N, a^{-n} = \dfrac{1}{a^n} = \dfrac{1}{\underbrace{a.a.....a}_{\text{n veces}}}$

Distributiva respecto a la multiplicación	$(a.b)^n = a^n.b^n$
Distributiva respecto al cociente	$\left(\dfrac{a}{b}\right)^n = \dfrac{a^n}{b^n}, b \neq 0$
Producto de potencias de igual base	$a^n.a^m = a^{n+m}$
Cociente de potencias de igual base	$a^n \div a^m = a^{n-m}$
Potencia de potencia	$(a^n)^m = a^{n.m}$

2.4 Radicación

$\sqrt[n]{a} = b \iff b^n = a$ y se nombra $\sqrt[indice]{radicando}$ = raiz enesima

No existe en los reales la raiz cuadrada (y de ningún índice par) de números negativos. Es decir:

- Si **n** es un numero natural **impar**, entonces es valida para todo número real **a**.
- Si **n** es un numero natural **par**, entonces es valida para todo número real **a no negativo**.

$$\boxed{a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m} \wedge a^{-\frac{m}{n}} = \frac{1}{\sqrt[n]{a^m}}, a \neq 0}$$

Distributiva respecto al producto	$\sqrt[n]{a.b} = \sqrt[n]{a}.\sqrt[n]{b}$
Distributiva respecto al cociente	$\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$
Raiz de raiz	$\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[m.n]{a}$

2.5 Logaritmo

El logaritmo en base a de x es y y lo notamos $\log_a(x) = y$, como el numero al cual tengo que elevar a **a** para obtener **x**.

$$log_a(x) = y \iff a^y = x, \text{ se necesita que } a > 0 \wedge x > 0 \wedge a \neq 1$$

- $log_a(1) = 0$
- $log_a(a) = 1$
- $log_a(x.y) = log_a(x) + log_a(y)$
- $log_a\left(\frac{x}{y}\right) = log_a(x) - log_a(y)$
- $log_a(x^c) = c.log_a(x)$
- $a^{log_a(x)} = x$

$$\boxed{log_b(x) = \frac{log_a(x)}{log_a(b)}}$$

2.6 Formas Especiales

Binomio al Cuadrado ↔ Trinomio Cuadrado Perfecto

$$\boxed{(x+y)^2 = x^2 + 2xy + y^2}$$

Binomio al Cubo ↔ Cuatrinomio Cubo Perfecto

$$\boxed{(x+y)^3 = x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3}$$

Diferencia de Cuadrados

$$\boxed{(a-b).(a+b) = a^2 - b^2}$$

2.7 Relacion de Orden del Conjunto de los Numeros Reales

- $a < b$ si $0 < b - a$
- $a > b$ si $b < a$
- $a < b \wedge b < c \Rightarrow a < c$
- $a < b \Rightarrow a + c < b + c$
- $a < b \wedge c > 0 \Rightarrow a.c < b.c$
- $a < b \wedge c < 0 \Rightarrow a.c > b.c$

2.8 Valor Absoluto

Es la distancia que hay, en la recta numérica, desde su punto representativo al origen de coordenadas. El valor absoluto es será siempre un número positivo (o cero).

$$|x| = \begin{cases} x & \text{si } x \geq 0 \\ -x & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

- $|a| \geq 0$
- $|a|.|b| = |a|.|b|$
- $|a| = 0 \iff a = 0$
- $\left|\frac{a}{b}\right| = \frac{|a|}{|b|}, b \neq 0$
- $|-a| = |a|$
- $\sqrt{a^2} = |a|$

$\forall a, b \in R \wedge k > 0$

- $|a + b| \leq |a| + |b|$
- $|a - b| \geq ||a| - |b||$
- $|a| < k \iff -k < a < k$
- $|a| > k \iff (a > k \vee a < (-k))$

3 Números Complejos

Se define i como: $\boxed{i^2 = -1}$

3.1 Forma Binómica de un Número Complejo

$\boxed{z = a + bi}$ donde **a** y **b** son numeros reales, e **i** se define por la relacion $i^2 = -1$

El numero $\mathbf{a} = Re(z)$ es la parte real de z y $\mathbf{b} = Im(z)$ es la parte imaginaria de z.

3.2 La Unidad Imaginaria

El número **i** recibe el nombre de unidad imaginaria, aceptandose que se comporta como un número real.

- $i^r.i^s = i^{r+s}$
- $(i^r)^s = i^{r.s}$, con $r, s \in Z$
- $i^0 = 1$
- $i^1 = i$
- $i^2 = -1$
- $i^3 = -i$

$$\boxed{i^n = i^r, \text{ donde r=n\%4}}$$

3.3 El conjunto de los Números Complejos

Se simboliza con la C y contiene los números de la forma $a+bi$, donde $a, b \in R$ e **i** es la unidad imaginaria.

$$\boxed{C = \{z = a + bi/a, b \in R \wedge i^2 = -1\}}$$

- Los números reales son complejos $R \subset C$, ya que si $x \in R \Rightarrow x = x + 0i$.
- A los complejos de la forma bi (aquellos que su parte real es nula), se los llama imaginarios puros.

3.4 Definiciones

- **Igualdad de Números Complejos**: $z_1 = z_2 \iff (a_1 = a_2 \wedge b_1 = b_2)$.
- **Opuesto de un Número Complejo**: $-z = (-a) + (-b)i$.
- **Suma y Resta**: $z_1 + z_2 = (a_1 + a_2) + (b_1 + b_2)i$. De manera analoga, $z_1 - z_2 = (a_1 - a_2) + (b_1 - b_2)i$
- **Multiplicación**: $z_1.z_2 = (a_1.a_2 - b_1.b_2) + (a_2.b_1 + a_1.b_2)i$.
- **División**: $\dfrac{a+bi}{c+di} = \dfrac{ac+bd}{c^2+d^2} + \dfrac{bc-ad}{c^2+d^2}i$

3.5 Conjugado de un complejo

El conjugado de un número complejo $z = a + bi$ es $\overline{z} = a - bi$.

- $z = \overline{z} \iff z \in R$
- $z + \overline{z} = 2a$
- $z - \overline{z} = 2bi$
- $\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}$
- $\overline{z_1.z_2} = \overline{z_1}.\overline{z_2}$
- $-\overline{z} = \overline{-z}$
- $z.\overline{z} = a^2 + b^2 = Re(z)^2 + Im(z)^2$

3.6 Reciproco de un Complejo NO nulo

Definimos el reciproco de $z \neq 0, z \in C$, como aquel complejo w / $z \times w = 1$ y lo denotamos $z^{-1} = \frac{1}{z}$.

- $\overline{\left(\dfrac{z_1}{z_2}\right)} = \dfrac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}}, z_2 \neq 0$
- $\overline{\left(\dfrac{1}{z}\right)} = \dfrac{1}{\overline{z}}, z \neq 0$