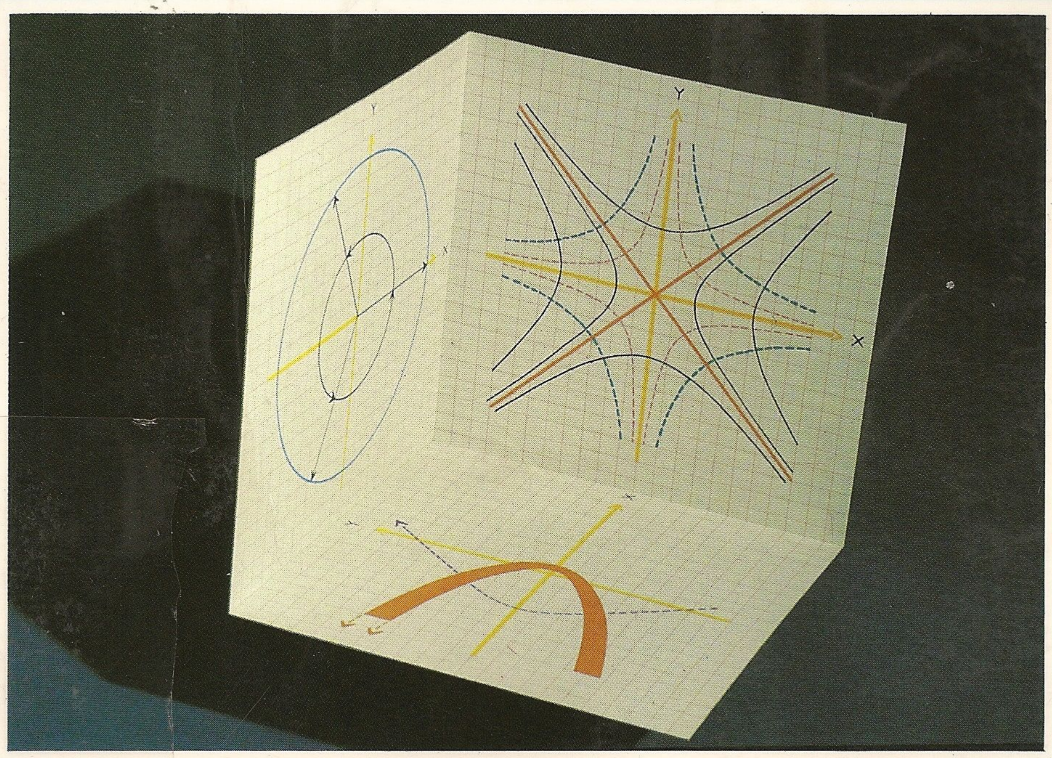
Schaum

VARIABLE COMPLEJA

Murray R. Spiegel



McGraw Hill

Prólogo

La teoría de funciones de una variable compleja, llamada también por brevedad variable compleja o análisis complejo, es una de las más bellas, así como de las más útiles ramas de las matemáticas. Aunque nació en una atmósfera de misterio y desconfianza, como lo indican los términos "imaginario" y "complejo" que subsisten en la literatura contemporánea sobre la materia, se colocó sobre una base sólida en el siglo XIX, gracias a los esfuerzos de Cauchy, Riemann, Weierstrass, Gauss y otros grandes matemáticos.

Hoy se reconoce esta materia como parte esencial de la formación matemática de ingenieros, físicos, matemáticos y otros científicos. Desde el punto de vista teórico, esto se debe a que muchos conceptos matemáticos se aclaran y unifican cuando se examinan a la luz de la teoría de variable compleja. Desde el punto de vista práctico, la teoría es de gran valor para la solución de problemas de flujo de calor, teoría potencial, mecánica de fluidos, teoría electromagnética, aerodinámica, elasticidad y muchos otros campos de la ciencia y la ingeniería.

Este libro se ha preparado como suplemento para cualquiera de los textos corrientes, o como texto para un curso formal de la teoría de variable compleja y sus aplicaciones. También será de gran valor para los que siguen cursos de matemáticas, física, aerodinámica, elasticidad o cualquier otro de los innumerables campos en los cuales se utilizan los métodos de la variable compleja.

Cada capítulo empieza con enunciados claros de las correspondientes definiciones, principios y teoremas, junto con ilustraciones y otros materiales descriptivos. A esto siguen grupos graduados de problemas resueltos y propuestos. Los problemas resueltos sirven para ilustrar y ampliar la teoría, y arrojan plena luz sobre aquellos puntos sutiles sin cuya explicación el estudiante se siente inseguro, y constituyen una repetición de los principios básicos, tan vitales para un aprendizaje efectivo. En los problemas resueltos se incluyen muchas demostraciones de teoremas y derivaciones de fórmulas.

El gran número de problemas propuestos, con sus respectivas respuestas, sirven como un repaso completo de cada capítulo.

Entre los temas tratados se encuentran: el álgebra y la geometría de números complejos; diferenciación compleja y cálculo integral; series infinitas, incluyendo las de Taylor y Laurent; la teoría de residuos con aplicaciones a la evaluación de integrales y series, y aplicación conforme, con ejemplos tomados de varios campos. Una novedad adicional es el capítulo sobre temas especiales que será de utilidad como introducción a estudios más avanzados.

En este libro se ha incluido mucho más material del que generalmente se puede ver en un primer curso a fin de hacer el libro más flexible, más útil como obra de consulta y para estimular más interés en estos temas.

Aprovecho la oportunidad para agradecer al personal de la Schaum Publishing Company su magnífica colaboración.

M. R. SPIEGEL

TABLA DE MATERIAS

Página

Capítulo *1* **NUMEROS COMPLEJOS** 1

El sistema numérico real. Representación gráfica de los números reales. El sistema de los números complejos. Operaciones fundamentales con números complejos. Valor absoluto. Fundamentos axiomáticos del sistema de números complejos. Representación gráfica de números complejos. Forma polar de números complejos. El teorema de De Moivre. Raíces de números complejos. Fórmula de Euler. Ecuaciones polinomias. Las raíces n-ésimas de la unidad. Interpretación vectorial de números complejos. Representación esférica de números complejos. Proyección estereográfica. Producto escalar y vectorial. Coordenadas conjugadas complejas. Conjuntos de puntos.

Capítulo *2* **FUNCIONES, LIMITES Y CONTINUIDAD** 33

Variables y funciones. Funciones unívocas y multívocas. Funciones inversas. Trasformaciones. Coordenadas curvilíneas. Las funciones elementales. Puntos de ramificación y ramas. Superficies de Riemann. Límites. Teoremas sobre límites. Infinito. Continuidad. Continuidad en una región. Teoremas sobre continuidad. Continuidad uniforme. Sucesiones. Límite de una sucesión. Teoremas sobre límites de sucesiones. Series infinitas.

Capítulo *3* **DIFERENCIACION COMPLEJA Y LAS ECUACIONES DE CAUCHY-RIEMANN** 64

Derivadas. Funciones analíticas. Ecuaciones de Cauchy-Riemann. Funciones armónicas. Interpretación geométrica de la derivada. Diferenciales. Reglas de diferenciación. Derivadas de funciones elementales. Derivadas de orden superior. La regla de L'Hôpital. Puntos singulares. Familias ortogonales. Curvas. Aplicaciones a la geometría y la mecánica. Operadores diferenciales complejos. Gradiente, divergencia, rotor y laplaciano. Algunas identidades donde intervienen gradiente, rotor y divergencia.

Capítulo *4* **INTEGRACION COMPLEJA Y TEOREMA DE CAUCHY** 93

Integrales complejas de línea. Integrales reales de línea. Conexión entre integrales real y compleja de línea. Propiedades de las integrales. Cambio de variables. Regiones simple y múltiplemente conexas. Teorema de la curva de Jordan. Convención relativa a la orientación de caminos cerrados. Teorema de Green en el plano. Forma compleja del teorema de Green. Teorema de Cauchy. El teorema de Cauchy-Goursat. Teorema de Morera. Integrales indefinidas. Integrales de funciones especiales. Algunas consecuencias del teorema de Cauchy.

Capítulo *5* **FORMULAS INTEGRALES DE CAUCHY Y TEOREMAS RELACIONADOS** 119

Fórmulas integrales de Cauchy. Algunos teoremas importantes. Teorema de Morera. Desigualdad de Cauchy. Teorema de Liouville. Teorema fundamental del álgebra. Teorema del valor medio de Gauss. Teorema del módulo máximo. Teorema del módulo mínimo. El teorema del argumento. Teorema de Rouché. Fórmulas integrales de Poisson para un círculo. Fórmulas integrales de Poisson para un semi-plano.

TABLA DE MATERIAS

Página

Capítulo 6 SERIES INFINITAS. SERIES DE TAYLOR Y DE LAURENT 140
Sucesiones de funciones. Series de funciones. Convergencia absoluta. Convergencia uniforme de sucesiones y series. Series de potencias. Algunos teoremas importantes. Teoremas generales. Teoremas sobre convergencia absoluta. Criterios especiales para convergencia. Teoremas sobre convergencia uniforme. Teoremas sobre series de potencias. Teorema de Taylor. Algunas series especiales. Teorema de Laurent. Clasificación de singularidades. Funciones enteras. Funciones meromorfas. Desarrollo de Lagrange. Prolongación analítica.

Capítulo 7 EL TEOREMA DEL RESIDUO. CALCULO DE INTEGRALES Y SERIES 173
Residuos. Cálculo de residuos. El teorema del residuo. Cálculo de integrales definidas. Teoremas especiales que se utilizan en el cálculo de integrales. El valor principal de Cauchy para integrales. Diferenciación bajo el signo integral. Regla de Leibnitz. Suma de series. Teorema del desarrollo de Mittag-Leffler. Algunos desarrollos especiales.

Capítulo 8 APLICACION CONFORME 201
Trasformaciones o aplicaciones. Jacobiano de una trasformación. Aplicaciones complejas. Aplicación conforme. El teorema de la aplicación de Riemann. Puntos fijos o invariantes de una trasformación. Algunas trasformaciones generales. Trasformaciones sucesivas. La trasformación lineal. La trasformación bilineal o racional. Aplicación de un semi-plano sobre un círculo. La trasformación de Christoffel-Schwarz. Trasformaciones de fronteras en forma paramétrica. Algunas aplicaciones especiales.

Capítulo 9 APLICACIONES FISICAS DE LA APLICACION CONFORME 233
Problemas de frontera. Funciones conjugadas y armónicas. Problemas de Dirichlet y Neumann. El problema de Dirichlet para el círculo unidad. Fórmula de Poisson. El problema de Dirichlet para un semi-plano. Soluciones a los problemas de Dirichlet y Neumann por aplicación conforme. Aplicaciones a flujo de fluidos. Suposiciones básicas. El potencial complejo. Líneas y trayectorias equipotenciales. Fuentes y sumideros. Algunos flujos especiales. Flujos alrededor de obstáculos. Teorema de Bernoulli. Teoremas de Blasius. Aplicaciones a electrostática. Ley de Coulomb. Intensidad de campo eléctrico. Potencial electrostático. Teorema de Gauss. El potencial complejo electrostático. Línea de cargas. Conductores. Capacitancia. Aplicaciones a flujo de calor. Flujo de calor. La temperatura compleja.

Capítulo 10 TEMAS ESPECIALES 266
Prolongación analítica. Principio de reflexión de Schwarz. Productos infinitos. Convergencia absoluta, condicional y uniforme de productos infinitos. Algunos teoremas importantes sobre productos infinitos. Teorema de Weierstrass para productos infinitos. Algunos productos infinitos especiales. La función gamma. Propiedades de la función gamma. La función beta. Ecuaciones diferenciales. Solución de ecuaciones diferenciales por integrales de contorno. Funciones de Bessel. Funciones de Legendre. La función hipergeométrica. La función zeta. Series asintóticas. El método del punto silla. Desarrollos asintóticos especiales. Funciones elípticas.

INDICE 308

Capítulo 1

Números complejos

EL SISTEMA NUMERICO REAL

El sistema numérico, como nosotros lo conocemos, es el resultado de una evolución gradual, tal como lo indica la siguiente descripción.

1. **Los números naturales,** 1, 2, 3, 4, . . ., o *enteros positivos,* fueron usados primero para contar. Los símbolos han cambiado con las épocas, pues los romanos, por ejemplo, utilizaban I, II, III, IV, ... La suma $a + b$ y el *producto* $a \cdot b$ o ab de dos números naturales a y b son también números naturales, lo cual se suele expresar diciendo que el conjunto de los números naturales es *cerrado* respecto de las operaciones de *adición, multiplicación,* o que cumple la *propiedad de clausura* con relación a estas operaciones.

2. **Los enteros negativos y el cero,** denotados por -1, -2, -3, . . . y 0, respectivamente, que permiten resolver ecuaciones como $x + b = a$ con a y b naturales, llevan a la operación de *sustracción* o *inversa de la adición,* que se escribe $x = a - b$.

   El conjunto de los enteros positivos y negativos con el cero se llama el conjunto de los enteros y es cerrado bajo las operaciones de adición, multiplicación y sustracción.

3. **Los números racionales** o *fracciones,* tales como $\frac{3}{4}, -\frac{8}{3}, \ldots$ permiten resolver ecuaciones de la forma $bx = a$ para enteros cualesquiera a y b, con $b \neq 0$, los cuales conducen a la operación de *división* o *inversa de la multiplicación,* que se representa como $x = a/b$ o $a \div b$ (llamado el *cociente* de a y b) donde a es el *numerador* y b el *denominador.*

   El conjunto de los enteros es un *subconjunto* de los números racionales, puesto que los enteros corresponden a los números racionales con $b = 1$.

   El conjunto de números racionales es cerrado bajo las operaciones de adición, sustracción, multiplicación y división, excluyendo la división por cero.

4. **Los números irracionales,** tales como $\sqrt{2} = 1{,}41423 \cdots$ y $\pi = 3{,}14159 \cdots$ son números que no son racionales, es decir, no pueden ser expresados como a/b, donde a y b son enteros y $b \neq 0$.

El conjunto de números racionales e irracionales es llamado el conjunto de los números *reales.* Se supone que el estudiante está ya familiarizado con las diversas operaciones con números reales.

REPRESENTACION GRAFICA DE LOS NUMEROS REALES

Los números reales pueden representarse por puntos de una recta llamada *eje real,* como se ve en la figura 1-1. El punto correspondiente a cero, se llama el *origen.*

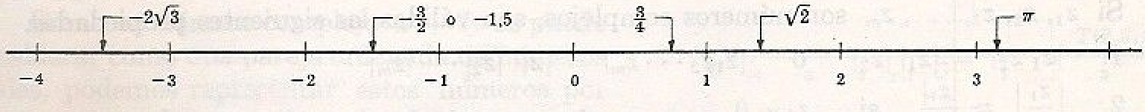


Fig. 1-1

Recíprocamente, para cada punto sobre la recta hay uno y solamente un número real. Si un punto A correspondiente a un número real a está ubicado a la derecha de un punto B

correspondiente a un número real b, decimos que a es mayor que b o que b es menor que a y escribimos respectivamente $a > b$ o $b < a$.

El conjunto de todos los valores de x, tal que $a < x < b$ se llama un *intervalo abierto* sobre el eje real, mientras que $a \leqq x \leqq b$, el cual incluye los extremos a y b, se llama un intervalo cerrado. El símbolo x, que puede representar a cualquier elemento del conjunto de números reales, es llamado una *variable real.*

El *valor absoluto* de un número real a, denotado por $|a|$ es igual a a si $a > 0$, a $-a$ si $a < 0$ y a 0 si $a = 0$. La distancia entre dos puntos a y b sobre el eje real es $|a - b|$.

EL SISTEMA DE LOS NUMEROS COMPLEJOS

No existe un número real x que satisfaga la ecuación polinómica $x^2 + 1 = 0$. Para resolver este tipo de ecuaciones, es necesario introducir los números complejos.

Podemos considerar un *número complejo* como una expresión de la forma $a + bi$, donde a y b son números reales, e i, denominada la *unidad imaginaria*, con la propiedad de que $i^2 = -1$. Si $z = a + bi$, a se llama la *parte real* de z y b la *parte imaginaria* de z y se denotan por $\operatorname{Re}\{z\}$ e $\operatorname{Im}\{z\}$, respectivamente. El símbolo z, que puede representar cualquier elemento del conjunto de números complejos, es llamado una *variable compleja.*

Dos números complejos $a + bi$ y $c + di$ son *iguales* si y solamente si $a = c$ y $b = d$. Podemos considerar los números reales como el subconjunto del conjunto de los números complejos con $b = 0$. En este caso por ejemplo, los números complejos $0 + 0i$ y $-3 + 0i$ representan los números reales 0 y -3 respectivamente. Si $a = 0$, el número complejo $0 + bi$ o bi se llama un *número imaginario puro.*

El *conjugado complejo*, o *conjugado* simplemente, de un número complejo $a + bi$ es $a - bi$. El conjugado complejo de un número complejo z se indica frecuentemente por $\bar{z}$ o z^*.

OPERACIONES FUNDAMENTALES CON NUMEROS COMPLEJOS

Al efectuar operaciones con números complejos, podemos proceder como en el álgebra de números reales, remplazando i^2 por -1.

1. *Adición*
$$(a + bi) + (c + di) = a + bi + c + di = (a + c) + (b + d)i$$

2. *Sustracción*
$$(a + bi) - (c + di) = a + bi - c - di = (a - c) + (b - d)i$$

3. *Multiplicación*
$$(a + bi)(c + di) = ac + adi + bci + bdi^2 = (ac - bd) + (ad + bc)i$$

4. *División*
$$\frac{a+bi}{c+di} = \frac{a+bi}{c+di}\cdot\frac{c-di}{c-di} = \frac{ac-adi+bci-bdi^2}{c^2-d^2i^2}$$
$$= \frac{ac+bd+(bc-ad)i}{c^2+d^2} = \frac{ac+bd}{c^2+d^2} + \frac{bc-ad}{c^2+d^2}i$$

VALOR ABSOLUTO

El *valor absoluto* o *módulo* de un número complejo $a + bi$ está definido como $|a + bi| = \sqrt{a^2 + b^2}$.

Ejemplo: $|-4+2i| = \sqrt{(-4)^2 + (2)^2} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$

Si $z_1, z_2, z_3, \ldots, z_m$ son números complejos, son válidas las siguientes propiedades.

1. $|z_1 z_2| = |z_1|\,|z_2|$ o $|z_1 z_2 \cdots z_m| = |z_1|\,|z_2| \cdots |z_m|$
2. $\left|\dfrac{z_1}{z_2}\right| = \dfrac{|z_1|}{|z_2|}$ si $z_2 \neq 0$
3. $|z_1 + z_2| \leqq |z_1| + |z_2|$ o $|z_1 + z_2 + \cdots + z_m| \leqq |z_1| + |z_2| + \cdots + |z_m|$
4. $|z_1 + z_2| \geqq |z_1| - |z_2|$ o $|z_1 - z_2| \geqq |z_1| - |z_2|$

FUNDAMENTOS AXIOMATICOS DEL SISTEMA DE NUMEROS COMPLEJOS

Desde un punto de vista estrictamente lógico, es conveniente definir un número complejo como una pareja ordenada (a, b) de números reales a y b sometida a ciertas definiciones operacionales que resultan ser equivalentes a las anteriores. Estas definiciones se dan a continuación, donde todas las letras representan números reales:

A. Igualdad $(a, b) = (c, d)$ si y solamente si $a = c, b = d$

B. Suma $(a, b) + (c, d) = (a + c, b + d)$

C. Producto $(a, b) \cdot (c, d) = (ac - bd, ad + bc)$

$$m(a, b) = (ma, mb)$$

De aquí, podemos demostrar (problema 14) que $(a, b) = a(1, 0) + b(0, 1)$ y asociamos esto con $a + bi$ donde i es realmente el símbolo $(0, 1)$ con la propiedad de que $i^2 = (0, 1)(0, 1) = (-1, 0)$ (el cual se puede considerar equivalente al número real -1) y $(1, 0)$ se puede considerar equivalente al número real 1. La pareja ordenada $(0, 0)$ corresponde al número real 0.

De lo anterior, podemos probar que si z_1, z_2, z_3 pertenece al conjunto S de números complejos, entonces

1. $z_1 + z_2$ y $z_1 z_2$ pertenece a S — ley de clausura
2. $z_1 + z_2 = z_2 + z_1$ — ley conmutativa de la adición
3. $z_1 + (z_2 + z_3) = (z_1 + z_2) + z_3$ — ley asociativa de la adición
4. $z_1 z_2 = z_2 z_1$ — ley conmutativa de la multiplicación
5. $z_1(z_2 z_3) = (z_1 z_2) z_3$ — ley asociativa de la multiplicación
6. $z_1(z_2 + z_3) = z_1 z_2 + z_1 z_3$ — ley distributiva
7. $z_1 + 0 = 0 + z_1 = z_1$, $1 \cdot z_1 = z_1 \cdot 1 = z_1$, 0 es llamado el *elemento neutro* o *idéntico de la adición*, y 1 es llamado el *elemento neutro* o *idéntico de la multiplicación*.
8. Para cualquier número complejo $z_1 \neq 0$, existe un número único z en S tal que $z + z_1 = 0$; z se llama el *opuesto* (*o recíproco*) *de* z_1 *con respecto a la adición* y es denotado por $-z_1$.
9. Para cualquier $z_1 \neq 0$, existe un número único z en S tal que $z_1 z = z z_1 = 1$; z se llama el *inverso* (*o recíproco*) *de* z_1 *con respecto a la multiplicación* y es denotado por z_1^{-1} o $1/z_1$.

En general, cualquier conjunto, tal como S, cuyos elementos satisfagan las propiedades anteriores, se dice que es un *cuerpo*.

REPRESENTACION GRAFICA DE NUMEROS COMPLEJOS

Si se eligen ejes reales sobre dos rectas perpendiculares $X'OX$ y $Y'OY$ (los *ejes* x y y respectivamente), como en la figura 1-2, podemos situar cualquier punto del plano determinado por estas rectas mediante la pareja ordenada de números reales (x, y) o *coordenadas cartesianas* del punto. En la figura 1-2 se indican ejemplos de localización de los puntos P, Q, R, S y T en esta forma.

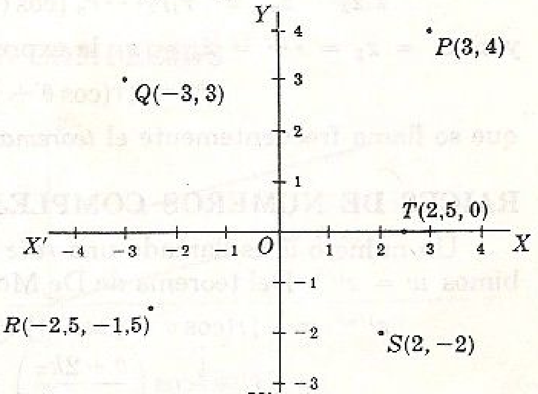


Fig. 1-2

Como un número complejo $x + iy$ se puede considerar como una pareja ordenada de números reales, podemos representar estos números por puntos en un plano xy, llamado el *plano complejo* o *diagrama de Argand*. El número complejo representado por P, por ejemplo, se puede entonces leer como $(3, 4)$ o $3 + 4i$. Así, a cada número complejo corresponde uno y solamente un punto en el plano y recíprocamente a cada punto en el plano corresponde uno y solamente un número complejo. A causa de esto, a menudo mencionamos al número complejo z como al *punto* z. Algunas veces nos referimos a los ejes x y y como a los ejes *real* e *imaginario* respectivamente y al plano complejo como al *plano* z. La distancia entre dos puntos $z_1 = x_1 + iy_1$ y $z_2 = x_2 + iy_2$ en el plano complejo está dada por $|z_1 - z_2| = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$.

FORMA POLAR DE NUMEROS COMPLEJOS

Si P es un punto en el plano complejo correspondiente al número complejo (x, y) o $x + iy$, entonces vemos que, según la figura 1-3,

$$x = r\cos\theta, \qquad y = r\,\text{sen}\,\theta$$

donde $r = \sqrt{x^2 + y^2} = |x + iy|$ se llama el *módulo* o *valor absoluto* de $z = x + iy$ (denotado por *mod* z o $|z|$); y θ, llamado *amplitud* o *argumento* de $z = x + iy$ (denotado por *arg* z), es el ángulo que forma la recta OP con el eje positivo x.

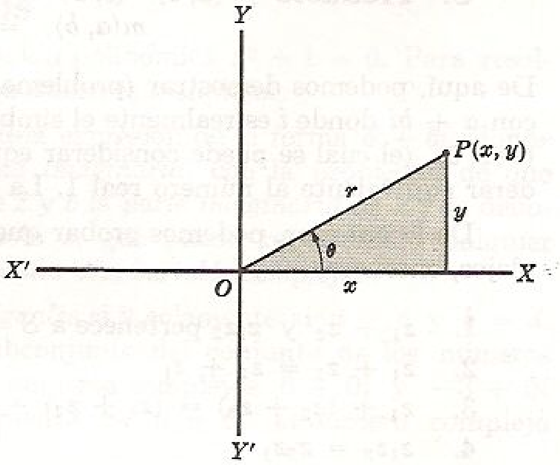


Fig. 1-3

Se deduce que

$$z = x + iy = r(\cos\theta + i\,\text{sen}\,\theta) \qquad (1)$$

llamada la *forma polar* del número complejo, y r y θ se llaman *coordenadas polares*. Algunas veces es conveniente escribir la abreviatura cis θ por $\cos\theta + i\,\text{sen}\,\theta$.

Para cualquier número complejo $z \neq 0$ corresponde solamente un valor de θ en $0 \leqq \theta < 2\pi$. No obstante, cualquier otro intervalo de longitud 2π, por ejemplo $-\pi < \theta \leqq \pi$, se puede emplear. Cualquier elección particular, tomada anticipadamente, se llama la *parte principal* y el valor de θ se llama su *valor principal*.

EL TEOREMA DE DE MOIVRE

Si $z_1 = x_1 + iy_1 = r_1(\cos\theta_1 + i\,\text{sen}\,\theta_1)$ y $z_2 = x_2 + iy_2 = r_2(\cos\theta_2 + i\,\text{sen}\,\theta_2)$, demostrar que (véase el problema 19)

$$z_1 z_2 = r_1 r_2\{\cos(\theta_1 + \theta_2) + i\,\text{sen}(\theta_1 + \theta_2)\} \qquad (2)$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2}\{\cos(\theta_1 - \theta_2) + i\,\text{sen}(\theta_1 - \theta_2)\} \qquad (3)$$

Una generalización de (2) conduce a

$$z_1 z_2 \cdots z_n = r_1 r_2 \cdots r_n\{\cos(\theta_1 + \theta_2 + \cdots + \theta_n) + i\,\text{sen}(\theta_1 + \theta_2 + \cdots + \theta_n)\} \qquad (4)$$

y si $z_1 = z_2 = \cdots = z_n = z$, la expresión anterior queda

$$z^n = \{r(\cos\theta + i\,\text{sen}\,\theta)\}^n = r^n(\cos n\theta + i\,\text{sen}\,n\theta) \qquad (5)$$

que se llama frecuentemente el *teorema de De Moivre*.

RAICES DE NUMEROS COMPLEJOS

Un número w es llamado una *raíz* n-ésima de un número complejo z si $w^n = z$, y escribimos $w = z^{1/n}$. Del teorema de De Moivre, podemos demostrar que si n es un entero positivo,

$$\begin{aligned} z^{1/n} &= \{r(\cos\theta + i\,\text{sen}\,\theta)\}^{1/n} \\ &= r^{1/n}\left\{\cos\left(\frac{\theta + 2k\pi}{n}\right) + i\,\text{sen}\left(\frac{\theta + 2k\pi}{n}\right)\right\} \qquad k = 0, 1, 2, \ldots, n-1 \qquad (6) \end{aligned}$$

de lo cual se deduce que hay n valores diferentes para $z^{1/n}$, esto es, n diferentes raíces n-ésimas de z, si $z \neq 0$.

FORMULA DE EULER

Al suponer que el desarrollo de la serie infinita $e^x = 1 + x + x^2/2! + x^3/3! + \cdots$ del cálculo elemental se aplica cuando $x = i\theta$, podemos llegar al resultado

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i \operatorname{sen}\theta \qquad e = 2{,}71828\ldots \tag{7}$$

llamada la *fórmula de Euler*. Es más conveniente, no obstante, tomar simplemente (7) como una definición de $e^{i\theta}$. En general, definimos

$$e^z = e^{x+iy} = e^x e^{iy} = e^x(\cos y + i \operatorname{sen} y) \tag{8}$$

En el caso especial en que $y = 0$, se reduce a e^x.

Se puede ver que en términos de (7) el teorema de De Moivre se reduce esencialmente a $(e^{i\theta})^n = e^{in\theta}$.

ECUACIONES POLINOMICAS

A menudo en la práctica necesitamos resolver ecuaciones polinómicas de la forma

$$a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + a_2 z^{n-2} + \cdots + a_{n-1} z + a_n = 0 \tag{9}$$

donde $a_0 \neq 0, a_1, \ldots, a_n$ son números complejos dados y n es un entero positivo llamado el *grado* de la ecuación. Tales soluciones se llaman *ceros* del polinomio de la izquierda de (9) o *raíces de la ecuación*.

Un teorema muy importante, llamado el *teorema fundamental del álgebra* (que será probado en el capítulo 5) establece que cada ecuación polinómica de la forma (9) tiene por lo menos una raíz compleja. Según esto, podemos demostrar que tiene en realidad n raíces complejas, algunas de las cuales o todas podrían ser idénticas.

Si $z_1, z_2, \ldots, z_n$ son las n raíces, (9) se puede escribir como

$$a_0(z - z_1)(z - z_2)\cdots(z - z_n) = 0 \tag{10}$$

llamada la *forma factorizada* de la ecuación polinómica. Recíprocamente, si podemos escribir (9) en la forma (10), es fácil determinar las raíces.

LAS RAICES n-ésimas DE LA UNIDAD

Las soluciones de la ecuación $z^n = 1$, donde n es un entero positivo, se llaman las *raíces n-ésimas de la unidad* y están dadas por

$$z = \cos 2k\pi/n + i \operatorname{sen} 2k\pi/n = e^{2k\pi i/n} \qquad k = 0, 1, 2, \ldots, n-1 \tag{11}$$

Si hacemos $\omega = \cos 2\pi/n + i \operatorname{sen} 2\pi/n = e^{2\pi i/n}$, las n raíces son $1, \omega, \omega^2, \ldots, \omega^{n-1}$. Geométricamente, representan los n vértices de un polígono regular de n lados inscritos en una circunferencia de radio unidad con centro en el origen. Esta circunferencia tiene como ecuación $|z| = 1$ y es llamada la *circunferencia unidad*.

INTERPRETACION VECTORIAL DE NUMEROS COMPLEJOS

Un número complejo $z = x + iy$ se puede considerar como un vector OP cuyo *punto inicial* es el origen O y cuyo *punto final* P es el punto (x, y), como en la figura 1-4. Algunas veces llamamos $OP = x + iy$ el *vector posición* de P. Dos vectores que tienen la misma *longitud* o *magnitud* y *dirección*, pero con puntos iniciales diferentes, tal como OP y AB en la figura 1-4, se consideran iguales. Por tanto, escribimos $OP = AB = x + iy$.

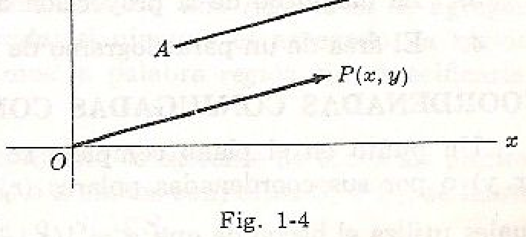


Fig. 1-4

La suma de números complejos corresponde a la ley del paralelogramo para la suma de vectores (Fig. 1-5). En este caso, para sumar el número complejo z_1 y z_2, completamos el paralelogramo $OABC$ cuyos lados OA y OC corresponden a z_1 y z_2. La diagonal OB de este paralelogramo corresponde a $z_1 + z_2$. Véase el problema 5.

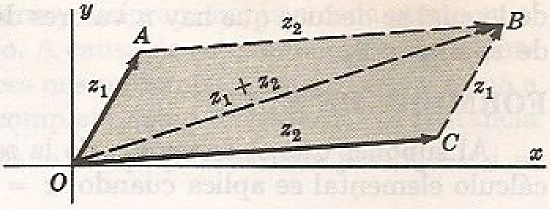


Fig. 1-5

REPRESENTACION ESFERICA DE NUMEROS COMPLEJOS. PROYECCION ESTEREOGRAFICA

Sea $\mathcal{P}$ (Fig. 1-6) el plano complejo y considérese una esfera unidad $\mathcal{S}$ (de radio uno) tangente a $\mathcal{P}$ en $z = 0$. El diámetro NS es perpendicular a $\mathcal{P}$ y llamamos a los puntos N y S los polos norte y sur de $\mathcal{S}$. Para cualquier punto A sobre $\mathcal{P}$ podemos construir una recta NA que corta $\mathcal{S}$ en el punto A'. En este caso, a cada punto del plano complejo $\mathcal{P}$ corresponde uno y solamente un punto de la esfera $\mathcal{S}$, y podemos representar cualquier número complejo por un punto sobre la esfera. Para terminar, decimos que el punto N corresponde al punto en el "infinito" del plano. El conjunto de todos los puntos del plano, incluyendo el punto en el infinito, recibe los nombres de *plano complejo entero*, el *plano entero z* o el *plano complejo extendido*.

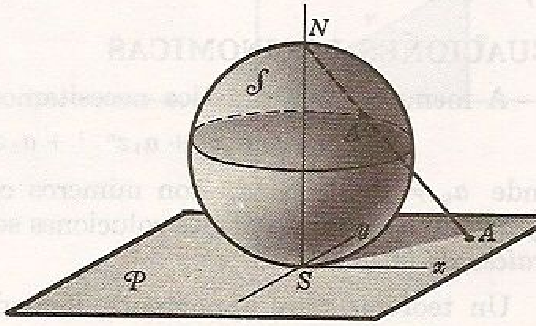


Fig. 1-6

El método explicado anteriormente para aplicar el plano sobre la esfera, se denomina *proyección estereográfica*. La esfera se llama generalmente la *esfera de Riemann*.

PRODUCTO ESCALAR Y VECTORIAL

Sean $z_1 = x_1 + iy_1$ y $z_2 = x_2 + iy_2$ dos números complejos (vectores). El *producto escalar* (también llamado el *producto interno*) de z_1 y z_2 está definido por

$$z_1 \circ z_2 = |z_1|\,|z_2| \cos\theta = x_1x_2 + y_1y_2 = \operatorname{Re}\{\bar{z}_1 z_2\} = \tfrac{1}{2}\{\bar{z}_1 z_2 + z_1 \bar{z}_2\} \tag{12}$$

donde θ es el ángulo entre z_1 y z_2 que está entre 0 y π.

El *producto vectorial* de z_1 y z_2 está definido por

$$z_1 \times z_2 = |z_1|\,|z_2| \operatorname{sen}\theta = x_1y_2 - y_1x_2 = \operatorname{Im}\{\bar{z}_1 z_2\} = \frac{1}{2i}\{\bar{z}_1 z_2 - z_1 \bar{z}_2\} \tag{13}$$

Claramente,

$$\bar{z}_1 z_2 = (z_1 \circ z_2) + i(z_1 \times z_2) = |z_1|\,|z_2|\, e^{i\theta} \tag{14}$$

Si z_1 y z_2 son distintos de cero, entonces

1. Una condición necesaria y suficiente para que z_1 y z_2 sean perpendiculares es que $z_1 \circ z_2 = 0$.
2. Una condición necesaria y suficiente para que z_1 y z_2 sean paralelos es que $z_1 \times z_2 = 0$.
3. La magnitud de la proyección de z_1 sobre z_2 es $|z_1 \circ z_2|/|z_2|$.
4. El área de un paralelogramo de lados z_1 y z_2 es $|z_1 \times z_2|$.

COORDENADAS CONJUGADAS COMPLEJAS

Un punto en el plano complejo se puede localizar por sus coordenadas rectangulares (x, y) o por sus coordenadas polares (r, θ). Existen muchas otras posibilidades, una de las cuales utiliza el hecho de que $x = \frac{1}{2}(z + \bar{z})$, $y = \dfrac{1}{2i}(z - \bar{z})$, donde $z = x + iy$. Las coordenadas $(z, \bar{z})$ que localizan un punto, se llaman *coordenadas conjugadas complejas* o, abreviadamente, *coordenadas conjugadas* del punto. (Véanse los problemas 43 y 44.)

CONJUNTOS DE PUNTOS

Cualquier colección de puntos en el plano complejo se denomina un conjunto (*bidimensional*) de puntos, y cada punto es un *miembro* o *elemento* del conjunto. Las definiciones fundamentales siguientes son dadas aquí por referencia.

1. **Vecindades.** Una *vecindad* de *radio delta, o* δ, de un punto z_0 es el conjunto de todos los puntos z tales que $|z - z_0| < \delta$ donde δ es cualquier número positivo dado. Una *vecindad reducida* δ de z_0 es una vecindad de z_0 en la que el punto z_0 se omite, es decir, $0 < |z - z_0| < \delta$.

2. **Puntos límites.** Un punto z_0 se llama un *punto límite* o *punto de acumulación* de un conjunto S si cada vecindad δ reducida de z_0 contiene puntos de S.

   Puesto que δ puede ser cualquier número positivo, se deduce que S debe tener infinitos puntos. Obsérvese que z_0 puede pertenecer o no al conjunto S.

3. **Conjuntos cerrados.** Un conjunto S se dice que es *cerrado* si cada punto límite de S pertenece a S, esto es, si S contiene todos sus puntos límites. Por ejemplo, el conjunto de todos los z tales que $|z| \leqq 1$ es un conjunto cerrado.

4. **Conjuntos acotados.** Un conjunto S se dice que es *acotado* si podemos encontrar una constante M tal que $|z| < M$ para cada punto z en S. Un *conjunto ilimitado* es un conjunto que no es acotado. Un conjunto que es acotado y cerrado se llama, algunas veces, *compacto*.

5. **Puntos interior, exterior y frontera.** Un punto z_0 se llama un *punto interior* de un conjunto S si podemos encontrar una vecindad de z_0 cuyos puntos pertenecen todos a S. Si cada vecindad δ de z_0 contiene puntos pertenecientes a S y también puntos no pertenecientes a S, entonces z_0 se llama un *punto frontera.* Si un punto no es punto interior ni punto frontera de un conjunto S, es un *punto exterior* de S.

6. **Conjuntos abiertos.** Un *conjunto abierto* es un conjunto que consiste solamente de puntos interiores. Por ejemplo, el conjunto de puntos z tales que $|z| < 1$ es un conjunto abierto.

7. **Conjuntos conexos.** Un conjunto abierto S es *conexo* si cualquier par de puntos del conjunto pueden ser unidos por un camino formado por segmentos de recta (esto es, un *camino poligonal*) contenidos en S.

8. **Regiones abiertas o dominios.** Un conjunto abierto conexo es llamado una región *abierta* o *dominio.*

9. **Clausura de un conjunto.** Si a un conjunto S agregamos todos los puntos límite de S, el nuevo conjunto se llama la *clausura* de S y es un conjunto cerrado.

10. **Regiones cerradas.** La clausura de una región abierta o dominio se llama una *región cerrada.*

11. **Regiones.** Si a una región abierta o dominio agregamos alguno, todos o ninguno de sus puntos límites, obtenemos un conjunto llamado una *región.* Si se agregan todos los puntos límites, la región está *cerrada;* si ninguno es agregado, la región está *abierta.* En este libro, siempre que usamos la palabra *región* sin especificarla, queremos significar *región abierta* o *dominio.*

12. **Unión e intersección de conjuntos.** Un conjunto consistente de todos los puntos pertenecientes al conjunto S_1 o al conjunto S_2 o a ambos conjuntos S_1 y S_2, se llama la *unión* de S_1 y S_2 y se denota por $S_1 + S_2$ o $S_1 \cup S_2$.

Un conjunto consistente de todos los puntos pertenecientes a ambos conjuntos S_1 y S_2, se llama la *intersección* de S_1 y S_2 y se denota por S_1S_2 o $S_1 \cap S_2$.

13. **Complemento de un conjunto.** Un conjunto que consiste de todos los puntos que no pertenecen a S, se llama el *complemento* de S y se representa por $\tilde{S}$.

14. **Conjuntos vacíos y subconjuntos.** Es conveniente considerar un conjunto sin puntos. Este conjunto se llama el *conjunto vacío* y se denota por $\varnothing$. Si dos conjuntos S_1 y S_2 no tienen puntos en común (caso en el cual se denominan *conjuntos disjuntos*), podemos escribir $S_1 \cap S_2 = \varnothing$.

    Cualquier conjunto formado por elección de alguno, todos o ninguno de los puntos de un conjunto S se llama un *subconjunto* de S. Si excluimos el caso en que todos los puntos de S son escogidos, el conjunto se denomina un *subconjunto propio* de S.

15. **Numerabilidad de un conjunto.** Si los miembros o elementos de un conjunto se pueden colocar punto por punto en correspondencia con los números naturales 1, 2, 3,..., el conjunto es llamado *numerable* o *enumerable;* de lo contrario es *no-numerable* o *no-enumerable.*

Los siguientes son dos teoremas importantes sobre conjuntos de puntos:

1. **Teorema de Bolzano-Weierstrass.** Todo conjunto infinito acotado tiene por lo menos un punto de acumulación.

2. **Teorema de Heine-Borel.** Sea S un conjunto compacto tal que cada punto está contenido en uno o más de los conjuntos abiertos $A_1, A_2, \ldots$ (los cuales forman lo que llamaremos un *recubrimiento* de S). Entonces existe un número finito de los conjuntos $A_1, A_2, \ldots$ que cubren a S.

Problemas resueltos

OPERACIONES FUNDAMENTALES CON NUMEROS COMPLEJOS

1. Efectuar cada una de las operaciones indicadas

(a) $(3+2i)+(-7-i) = 3-7+2i-i = -4+i$
(b) $(-7-i)+(3+2i) = -7+3-i+2i = -4+i$

Los resultados (*a*) y (*b*) ilustran la *ley conmutativa de la adición.*

(c) $(8-6i)-(2i-7) = 8-6i-2i+7 = 15-8i$

(d) $(5+3i)+\{(-1+2i)+(7-5i)\} = (5+3i)+\{-1+2i+7-5i\} = (5+3i)+(6-3i) = 11$

(e) $\{(5+3i)+(-1+2i)\}+(7-5i) = \{5+3i-1+2i\}+(7-5i) = (4+5i)+(7-5i) = 11$

Los resultados (*d*) y (*e*) ilustran la *ley asociativa de la adición.*

(f) $(2-3i)(4+2i) = 2(4+2i)-3i(4+2i) = 8+4i-12i-6i^2 = 8+4i-12i+6 = 14-8i$

(g) $(4+2i)(2-3i) = 4(2-3i)+2i(2-3i) = 8-12i+4i-6i^2 = 8-12i+4i+6 = 14-8i$

Los resultados (*f*) y (*g*) ilustran la *ley conmutativa de la multiplicación.*

(h) $(2-i)\{(-3+2i)(5-4i)\} = (2-i)\{-15+12i+10i-8i^2\}$
$= (2-i)(-7+22i) = -14+44i+7i-22i^2 = 8+51i$

(i) $\{(2-i)(-3+2i)\}(5-4i) = \{-6+4i+3i-2i^2\}(5-4i)$
$= (-4+7i)(5-4i) = -20+16i+35i-28i^2 = 8+51i$

Los resultados (*h*) e (*i*) ilustran la *ley asociativa de la multiplicación.*

(j) $(-1+2i)\{(7-5i)+(-3+4i)\} = (-1+2i)(4-i) = -4+i+8i-2i^2 = -2+9i$

Otro método. $(-1+2i)\{(7-5i)+(-3+4i)\} = (-1+2i)(7-5i)+(-1+2i)(-3+4i)$
$= \{-7+5i+14i-10i^2\}+\{3-4i-6i+8i^2\}$
$= (3+19i)+(-5-10i) = -2+9i$

Este resultado ilustra la *ley distributiva*.

(*k*) $\dfrac{3-2i}{-1+i} = \dfrac{3-2i}{-1+i}\cdot\dfrac{-1-i}{-1-i} = \dfrac{-3-3i+2i+2i^2}{1-i^2} = \dfrac{-5-i}{2} = -\dfrac{5}{2}-\dfrac{1}{2}i$

Otro método. Por definición, $(3-2i)/(-1+i)$ es el número $a+bi$, donde a y b son reales, tal que $(-1+i)(a+bi) = -a-b+(a-b)i = 3-2i$. Entonces $-a-b=3$, $a-b=-2$ y se resuelven simultáneamente, $a=-5/2$, $b=-1/2$ o $a+bi = -5/2-i/2$.

(*l*) $\dfrac{5+5i}{3-4i}+\dfrac{20}{4+3i} = \dfrac{5+5i}{3-4i}\cdot\dfrac{3+4i}{3+4i}+\dfrac{20}{4+3i}\cdot\dfrac{4-3i}{4-3i}$

$= \dfrac{15+20i+15i+20i^2}{9-16i^2}+\dfrac{80-60i}{16-9i^2} = \dfrac{-5+35i}{25}+\dfrac{80-60i}{25} = 3-i$

(*m*) $\dfrac{3i^{30}-i^{19}}{2i-1} = \dfrac{3(i^2)^{15}-(i^2)^9 i}{2i-1} = \dfrac{3(-1)^{15}-(-1)^9 i}{-1+2i}$

$= \dfrac{-3+i}{-1+2i}\cdot\dfrac{-1-2i}{-1-2i} = \dfrac{3+6i-i-2i^2}{1-4i^2} = \dfrac{5+5i}{5} = 1+i$

2. Si $z_1 = 2+i$, $z_2 = 3-2i$ y $z_3 = -\dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}i$, hallar el valor numérico de cada una de las siguientes expresiones.

(*a*) $|3z_1-4z_2| = |3(2+i)-4(3-2i)| = |6+3i-12+8i|$
$= |-6+11i| = \sqrt{(-6)^2+(11)^2} = \sqrt{157}$

(*b*) $z_1^3-3z_1^2+4z_1-8 = (2+i)^3-3(2+i)^2+4(2+i)-8$
$= \{(2)^3+3(2)^2(i)+3(2)(i)^2+i^3\}-3(4+4i+i^2)+8+4i-8$
$= 8+12i-6-i-12-12i+3+8+4i-8 = -7+3i$

(*c*) $(\bar{z}_3)^4 = \left(\overline{-\dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}i}\right)^4 = \left(-\dfrac{1}{2}-\dfrac{\sqrt{3}}{2}i\right)^4 = \left[\left(-\dfrac{1}{2}-\dfrac{\sqrt{3}}{2}i\right)^2\right]^2$

$= \left[\dfrac{1}{4}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}i+\dfrac{3}{4}i^2\right]^2 = \left(-\dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}i\right)^2 = \dfrac{1}{4}-\dfrac{\sqrt{3}}{2}i+\dfrac{3}{4}i^2 = -\dfrac{1}{2}-\dfrac{\sqrt{3}}{2}i$

(*d*) $\left|\dfrac{2z_2+z_1-5-i}{2z_1-z_2+3-i}\right|^2 = \left|\dfrac{2(3-2i)+(2+i)-5-i}{2(2+i)-(3-2i)+3-i}\right|^2$

$= \left|\dfrac{3-4i}{4+3i}\right|^2 = \dfrac{|3-4i|^2}{|4+3i|^2} = \dfrac{(\sqrt{(3)^2+(-4)^2})^2}{(\sqrt{(4)^2+(3)^2})^2} = 1$

3. Encontrar números reales x y y tales que $3x+2iy-ix+5y = 7+5i$.

La ecuación dada se puede escribir como $3x+5y+i(2y-x) = 7+5i$. Entonces, igualando las partes real e imaginaria, $3x+5y=7$, $2y-x=5$. Resolviendo simultáneamente, $x=-1$, $y=2$.

4. Probar: (*a*) $\overline{z_1+z_2} = \bar{z}_1+\bar{z}_2$, (*b*) $|z_1z_2| = |z_1|\,|z_2|$.

Sea $z_1 = x_1+iy_1$, $z_2 = x_2+iy_2$. Entonces

(*a*) $\overline{z_1+z_2} = \overline{x_1+iy_1+x_2+iy_2} = \overline{x_1+x_2+i(y_1+y_2)}$
$= x_1+x_2-i(y_1+y_2) = x_1-iy_1+x_2-iy_2 = \overline{x_1+iy_1}+\overline{x_2+iy_2} = \bar{z}_1+\bar{z}_2$

(*b*) $|z_1z_2| = |(x_1+iy_1)(x_2+iy_2)| = |x_1x_2-y_1y_2+i(x_1y_2+y_1x_2)|$
$= \sqrt{(x_1x_2-y_1y_2)^2+(x_1y_2+y_1x_2)^2} = \sqrt{(x_1^2+y_1^2)(x_2^2+y_2^2)} = \sqrt{x_1^2+y_1^2}\sqrt{x_2^2+y_2^2} = |z_1|\,|z_2|$

Otro método.

$$|z_1z_2|^2 = (z_1z_2)(\overline{z_1z_2}) = z_1z_2\bar{z}_1\bar{z}_2 = (z_1\bar{z}_1)(z_2\bar{z}_2) = |z_1|^2|z_2|^2 \quad \text{o} \quad |z_1z_2| = |z_1|\,|z_2|$$

donde hemos aplicado el hecho de que el conjugado de un producto de dos números complejos es igual al producto de sus conjugados (véase el problema 55).

DANIELUSER

REPRESENTACION GRAFICA DE NUMEROS COMPLEJOS. VECTORES

5. Efectuar las operaciones indicadas en forma analítica y gráficamente
(a) $(3+4i)+(5+2i)$, (b) $(6-2i)-(2-5i)$, (c) $(-3+5i)+(4+2i)+(5-3i)+(-4-6i)$.

(a) *Analíticamente.* $(3+4i)+(5+2i) = 3+5+4i+2i = 8+6i$

Gráficamente. Representamos los dos números complejos por los puntos P_1 y P_2 respectivamente, como en la figura 1-7. Completamos el paralelogramo con OP_1 y OP_2 como los lados adyacentes. El punto P representa la suma, $8+6i$, de los dos números complejos dados. Obsérvese la semejanza con la ley del paralelogramo para suma de vectores OP_1 y OP_2 para obtener el vector OP. Por esta razón, a menudo es conveniente considerar un número complejo $a+bi$ como un vector que tiene *componentes* a y b en las direcciones de los ejes positivos x y y respectivamente.

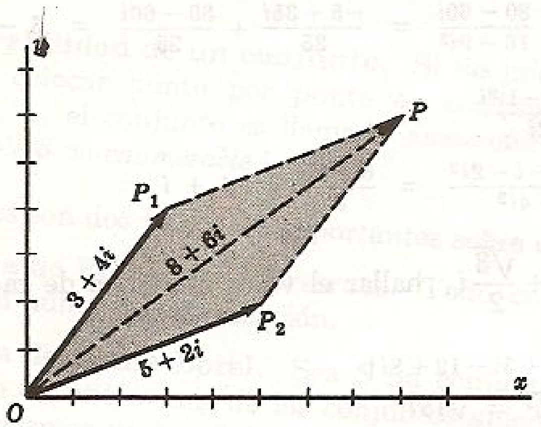


Fig. 1-7

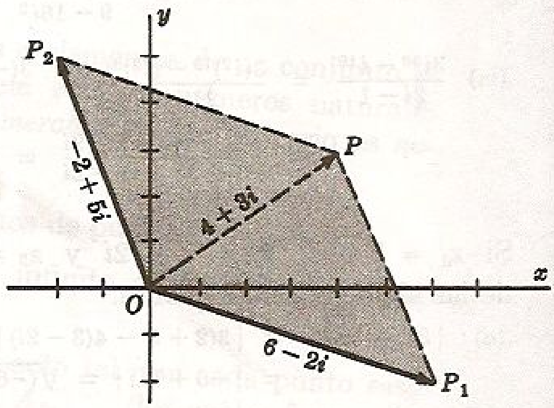


Fig. 1-8

(b) *Analíticamente.* $(6-2i)-(2-5i) = 6-2-2i+5i = 4+3i$
Gráficamente. $(6-2i)-(2-5i) = 6-2i+(-2+5i)$. Ahora sumamos $6-2i$ y $(-2+5i)$ como en la parte (a). El resultado se indica por OP en la figura 1-8.

(c) *Analíticamente.*

$$(-3+5i)+(4+2i)+(5-3i)+(-4-6i) = (-3+4+5-4)+(5i+2i-3i-6i) = 2-2i$$

Gráficamente. Representamos los números que se suman por z_1, z_2, z_3, z_4 respectivamente, los cuales se muestran gráficamente en la figura 1-9. Para encontrar la suma requerida se procede como se muestra en la figura 1-10. En el punto final del vector z_1 se construye el vector z_2. En el punto final de z_2 se construye el vector z_3, y en el punto final de z_3 se construye el vector z_4. La suma requerida, algunas veces llamada la *resultante*, se obtiene construyendo el vector OP desde el punto inicial de z_1 al punto final de z_4, o sea $OP = z_1+z_2+z_3+z_4 = 2-2i$.

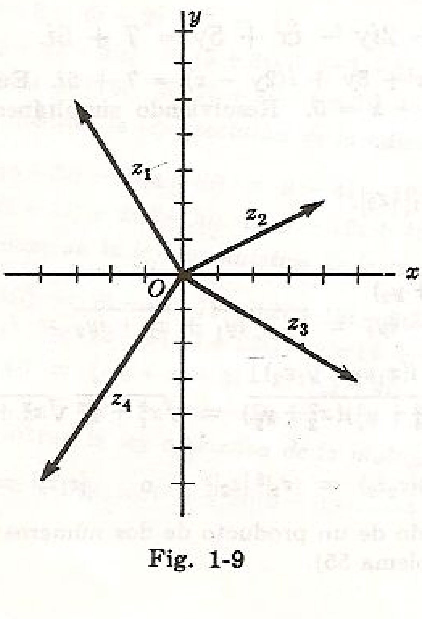


Fig. 1-9

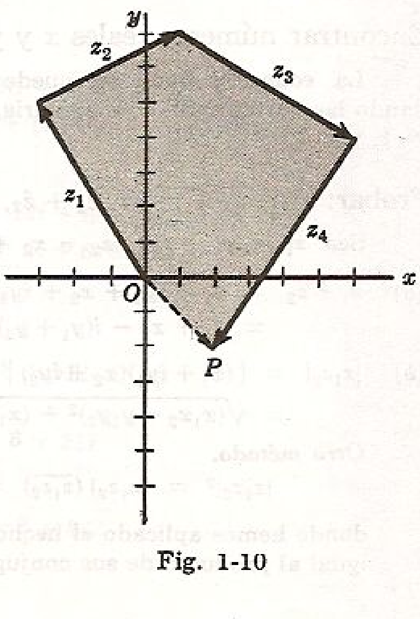


Fig. 1-10

6. Si z_1 y z_2 son dos números complejos (vectores) como los de la figura 1-11, construir gráficamente
(*a*) $3z_1 - 2z_2$ (*b*) $\frac{1}{2}z_2 + \frac{5}{3}z_1$

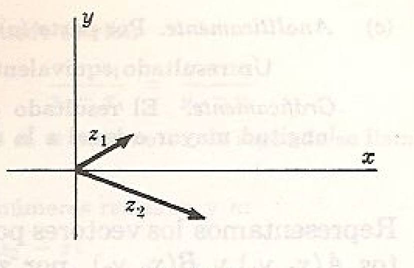


Fig. 1-11

(*a*) En la figura 1-12, $OA = 3z_1$ es un vector que tiene longitud igual a 3 veces la del vector z_1 y la misma dirección.

$OB = -2z_2$ es un vector que tiene longitud igual a 2 veces la del vector z_2 y la dirección opuesta.

Entonces, el vector $OC = OA + OB = 3z_1 - 2z_2$.

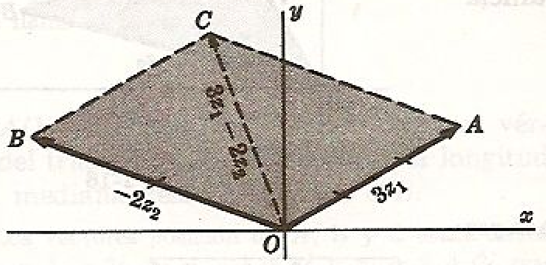


Fig. 1-12

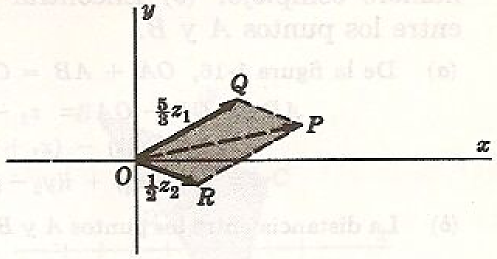


Fig. 1-13

(*b*) El vector buscado (número complejo) está representado por OP en la figura 1-13.

7. Probar, (*a*) $|z_1 + z_2| \leqq |z_1| + |z_2|$, (*b*) $|z_1 + z_2 + z_3| \leqq |z_1| + |z_2| + |z_3|$, (*c*) $|z_1 - z_2| \geqq |z_1| - |z_2|$ y dar una interpretación gráfica.

(*a*) *Analíticamente.* Sea $z_1 = x_1 + iy_1$, $z_2 = x_2 + iy_2$. Entonces debemos demostrar que

$$\sqrt{(x_1+x_2)^2 + (y_1+y_2)^2} \leqq \sqrt{x_1^2+y_1^2} + \sqrt{x_2^2+y_2^2}$$

Elevando al cuadrado ambos lados, esto será verdadero si

$$(x_1+x_2)^2 + (y_1+y_2)^2 \leqq x_1^2 + y_1^2 + 2\sqrt{(x_1^2+y_1^2)(x_2^2+y_2^2)} + x_2^2 + y_2^2$$

es decir, si
$$x_1x_2 + y_1y_2 \leqq \sqrt{(x_1^2+y_1^2)(x_2^2+y_2^2)}$$

o si (elevando al cuadrado ambos lados otra vez)

$$x_1^2x_2^2 + 2x_1x_2y_1y_2 + y_1^2y_2^2 \leqq x_1^2x_2^2 + x_1^2y_2^2 + y_1^2x_2^2 + y_1^2y_2^2$$

o
$$2x_1x_2y_1y_2 \leqq x_1^2y_2^2 + y_1^2x_2^2$$

Pero es equivalente a $(x_1y_2 - x_2y_1)^2 \geqq 0$ que es verdadero. Invirtiendo los pasos, que son reversibles, probamos el resultado.

Gráficamente. El resultado se deriva gráficamente del hecho que $|z_1|, |z_2|, |z_1 + z_2|$ representan las longitudes de los lados de un triángulo (Fig. 1-14) y que la suma de las longitudes de dos lados de un triángulo es mayor, o igual a la longitud del tercer lado.

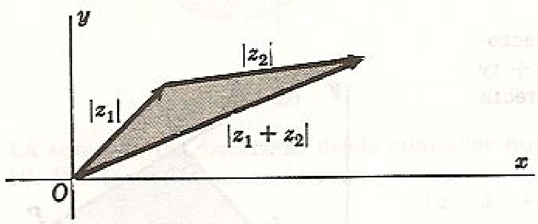


Fig. 1-14

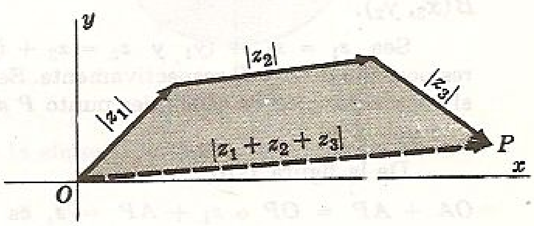


Fig. 1-15

(*b*) *Analíticamente.* Por la parte (*a*)

$$|z_1 + z_2 + z_3| = |z_1 + (z_2 + z_3)| \leqq |z_1| + |z_2 + z_3| \leqq |z_1| + |z_2| + |z_3|$$

Gráficamente. El resultado es una consecuencia del hecho geométrico que en un plano una línea recta es la distancia más corta entre dos puntos O y P (Fig. 1-15).

(c) *Analíticamente.* Por parte (a), $|z_1| = |z_1 - z_2 + z_2| \leqq |z_1 - z_2| + |z_2|$. Luego $|z_1 - z_2| \geqq |z_1| - |z_2|$.
Un resultado equivalente, que se obtiene remplazando z_2 por $-z_2$, es $|z_1 + z_2| \geqq |z_1| - |z_2|$.

Gráficamente. El resultado es equivalente al enunciado de que un lado de un triángulo tiene longitud mayor o igual a la diferencia de las longitudes de los otros dos lados.

8. Representamos los vectores posición de los puntos $A(x_1, y_1)$ y $B(x_2, y_2)$ por z_1 y z_2 respectivamente. (a) Representar el vector AB como un número complejo. (b) Encontrar la distancia entre los puntos A y B.

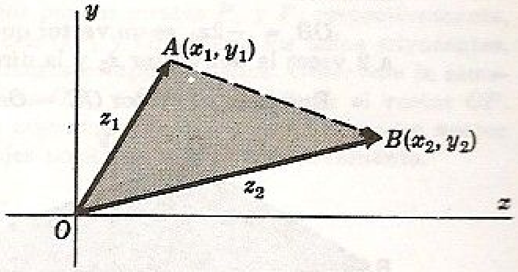


Fig. 1-16

(a) De la figura 1-16, $OA + AB = OB$ o

$$AB = OB - OA = z_2 - z_1 = (x_2 + iy_2) - (x_1 + iy_1) = (x_2 - x_1) + i(y_2 - y_1)$$

(b) La distancia entre los puntos A y B está dada por

$$|AB| = |(x_2 - x_1) + i(y_2 - y_1)| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

9. Sea $z_1 = x_1 + iy_1$ y $z_2 = x_2 + iy_2$ dos vectores no colineales o no paralelos. Si a y b son números reales (escalares) tales que $az_1 + bz_2 = 0$, probar que $a = 0$ y $b = 0$.

La condición dada $az_1 + bz_2 = 0$ es equivalente a $a(x_1 + iy_1) + b(x_2 + iy_2) = 0$ o $ax_1 + bx_2 + i(ay_1 + by_2) = 0$. Luego $ax_1 + bx_2 = 0$ y $ay_1 + by_2 = 0$. Estas ecuaciones tienen las soluciones simultáneas $a = 0$ y $b = 0$ si $y_1/x_1 \neq y_2/x_2$, es decir, si los vectores no son colineales o no paralelos.

10. Probar que las diagonales de un paralelogramo se dividen en partes iguales.

Sea $OABC$ (Fig. 1-17) el paralelogramo dado con diagonales que se cortan en P.

Puesto que $z_1 + AC = z_2$, $AC = z_2 - z_1$. Entonces $AP = m(z_2 - z_1)$ donde $0 \leqq m \leqq 1$.

Puesto que $OB = z_1 + z_2$, $OP = n(z_1 + z_2)$ donde $0 \leqq n \leqq 1$.

Pero $OA + AP = OP$, es decir, $z_1 + m(z_2 - z_1) = n(z_1 + z_2)$ o $(1 - m - n)z_1 + (m - n)z_2 = 0$. En consecuencia por 9, $1 - m - n = 0$, $m - n = 0$ o $m = \frac{1}{2}$, $n = \frac{1}{2}$ y así P es el punto medio de ambas diagonales.

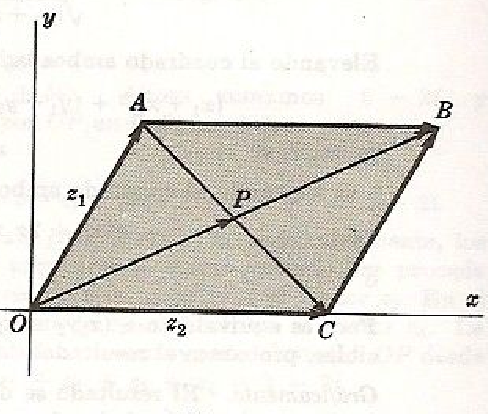


Fig. 1-17

11. Encontrar una ecuación para la línea recta que pasa por dos puntos dados $A(x_1, y_1)$ y $B(x_2, y_2)$.

Sea $z_1 = x_1 + iy_1$ y $z_2 = x_2 + iy_2$ los vectores posición de A y B respectivamente. Sea $z = x + iy$ el vector posición de cualquier punto P sobre la recta que une A y B.

De la figura 1-18,

$$OA + AP = OP \text{ o } z_1 + AP = z, \text{ es decir}$$
$$AP = z - z_1$$
$$OA + AB = OB \text{ o } z_1 + AB = z_2, \text{ es decir}$$
$$AB = z_2 - z_1$$

Puesto que AP y AB son colineales $AP = t\,AB$ o $z - z_1 = t(z_2 - z_1)$ donde t es real, y la ecuación requerida es

$$z = z_1 + t(z_2 - z_1) \quad \text{o} \quad z = (1 - t)z_1 + tz_2$$

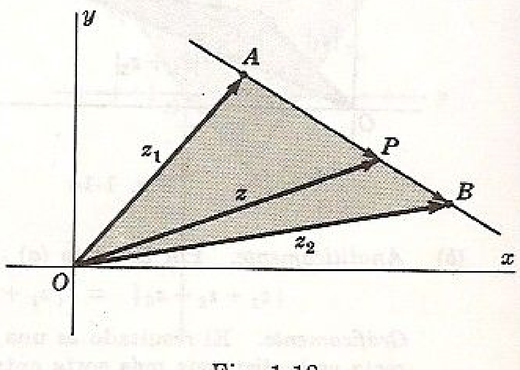


Fig. 1-18

Usando $z_1 = x_1 + iy_1$, $z_2 = x_2 + iy_2$ y $z = x + iy$, esto se puede escribir

$$x - x_1 = t(x_2 - x_1), \quad y - y_1 = t(y_2 - y_1) \quad \text{o} \quad \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1}$$

Las dos primeras se llaman, *ecuaciones paramétricas* de la recta y t es el parámetro; la segunda se llama la ecuación de la recta en *forma normal*.

Otro método. Puesto que AP y PB son colineales, tenemos para números reales m y n:

$$mAP = nPB \quad \text{o} \quad m(z - z_1) = n(z_2 - z)$$

Resolviendo, $$z = \frac{mz_1 + nz_2}{m+n} \quad \text{o} \quad x = \frac{mx_1 + nx_2}{m+n}, \quad y = \frac{my_1 + ny_2}{m+n}$$
que se llama la *forma simétrica*.

12. Sea $A(1, -2)$, $B(-3, 4)$, $C(2, 2)$ los tres vértices del triángulo ABC. Encontrar la longitud de la mediana desde C al lado AB.

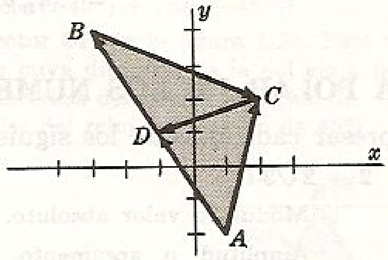


Fig. 1-19

Los vectores posición de A, B y C están dados por $z_1 = 1 - 2i$, $z_2 = -3 + 4i$ y $z_3 = 2 + 2i$ respectivamente. Entonces, de la figura 1-19,

$$AC = z_3 - z_1 = 2 + 2i - (1 - 2i) = 1 + 4i$$
$$BC = z_3 - z_2 = 2 + 2i - (-3 + 4i) = 5 - 2i$$
$$AB = z_2 - z_1 = -3 + 4i - (1 - 2i) = -4 + 6i$$
$$AD = \tfrac{1}{2}AB = \tfrac{1}{2}(-4 + 6i) = -2 + 3i \quad \text{puesto que } D \text{ es el punto medio de } AB.$$
$$AC + CD = AD \quad \text{o} \quad CD = AD - AC = -2 + 3i - (1 + 4i) = -3 - i.$$

Luego, la longitud de la mediana CD es $|CD| = |-3 - i| = \sqrt{10}$.

13. Encontrar una ecuación para (*a*) una circunferencia de radio 4 con centro en $(-2, 1)$, (*b*) una elipse con eje mayor de longitud 10 y foco en $(-3, 0)$ y $(3, 0)$.

(*a*) El centro se puede representar por el número complejo $-2 + i$. Si z es un punto de la circunferencia (Fig. 1-20), la distancia de z a $-2 + i$ es

$$|z - (-2 + i)| = 4$$

Luego $|z + 2 - i| = 4$ es la ecuación exigida. En forma rectangular está dado por

$$|(x+2) + i(y-1)| = 4, \quad \text{o sea } (x+2)^2 + (y-1)^2 = 16$$

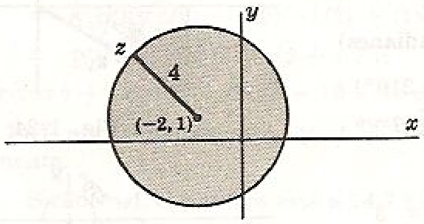


Fig. 1-20

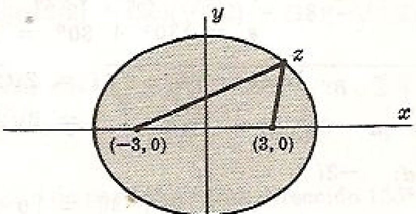


Fig. 1-21

(*b*) La suma de las distancias desde cualquier punto z de la elipse (Fig. 1-21) al foco debe ser igual a 10. Por tanto, la ecuación requerida es

$$|z + 3| + |z - 3| = 10$$

En forma rectangular se reduce a $x^2/25 + y^2/16 = 1$ (véase el problema 74).

FUNDAMENTOS AXIOMATICOS DEL SISTEMA DE NUMEROS COMPLEJOS

14. Use la definición de un número complejo como una pareja ordenada de números reales y las definiciones de la página 3 para probar que $(a, b) = a(1, 0) + b(0, 1)$ donde $(0, 1)(0, 1) = (-1, 0)$.

De las definiciones de suma y producto de la página 3, tenemos

$$(a, b) = (a, 0) + (0, b) = a(1, 0) + b(0, 1)$$

en donde $$(0,1)(0,1) = (0\cdot 0 - 1\cdot 1,\ 0\cdot 1 + 1\cdot 0) = (-1, 0)$$

Identificando $(1, 0)$ con 1, y $(0, 1)$ con i vemos que $(a, b) = a + bi$.

15. Si $z_1 = (a_1, b_1)$, $z_2 = (a_2, b_2)$ y $z_3 = (a_3, b_3)$, probar la ley distributiva: $z_1(z_2 + z_3) = z_1z_2 + z_1z_3$.

Tenemos
$$\begin{aligned} z_1(z_2+z_3) &= (a_1, b_1)\{(a_2, b_2) + (a_3, b_3)\} = (a_1, b_1)(a_2 + a_3,\ b_2 + b_3) \\ &= \{a_1(a_2+a_3) - b_1(b_2+b_3),\ a_1(b_2+b_3) + b_1(a_2+a_3)\} \\ &= (a_1a_2 - b_1b_2 + a_1a_3 - b_1b_3,\ a_1b_2 + b_1a_2 + a_1b_3 + b_1a_3) \\ &= (a_1a_2 - b_1b_2,\ a_1b_2 + b_1a_2) + (a_1a_3 - b_1b_3,\ a_1b_3 + b_1a_3) \\ &= (a_1, b_1)(a_2, b_2) + (a_1, b_1)(a_3, b_3) = z_1z_2 + z_1z_3 \end{aligned}$$

FORMA POLAR DE LOS NUMEROS COMPLEJOS

16. Expresar cada uno de los siguientes números complejos en forma polar.

(a) $2 + 2\sqrt{3}\,i$

Módulo o valor absoluto, $r = |2 + 2\sqrt{3}\,i| = \sqrt{4+12} = 4$.

Amplitud o argumento, $\theta = \operatorname{sen}^{-1} 2\sqrt{3}/4 = \operatorname{sen}^{-1} \sqrt{3}/2 = 60° = \pi/3$ (radianes).

Luego

$$2 + 2\sqrt{3}\,i = r(\cos\theta + i\operatorname{sen}\theta) = 4(\cos 60° + i\operatorname{sen} 60°) = 4(\cos\pi/3 + i\operatorname{sen}\pi/3)$$

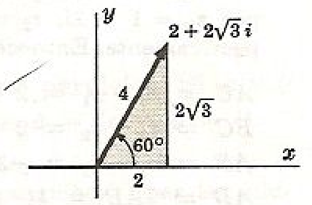


Fig. 1-22

El resultado se puede también escribir como $4 \operatorname{cis} \pi/3$ o, usando la fórmula de Euler, como $4e^{\pi i/3}$.

(b) $-5 + 5i$

$$r = |-5+5i| = \sqrt{25+25} = 5\sqrt{2}$$

$$\theta = 180° - 45° = 135° = 3\pi/4 \text{ (radianes)}$$

Luego $$-5 + 5i = 5\sqrt{2}(\cos 135° + i\operatorname{sen} 135°) = 5\sqrt{2} \operatorname{cis} 3\pi/4 = 5\sqrt{2}\, e^{3\pi i/4}$$

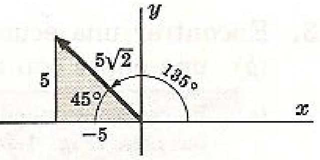


Fig. 1-23

(c) $-\sqrt{6} - \sqrt{2}\,i$

$$r = |-\sqrt{6} - \sqrt{2}\,i| = \sqrt{6+2} = 2\sqrt{2}$$

$$\theta = 180° + 30° = 210° = 7\pi/6 \text{ (radianes)}$$

Luego $$-\sqrt{6} - \sqrt{2}\,i = 2\sqrt{2}(\cos 210° + i\operatorname{sen} 210°) = 2\sqrt{2} \operatorname{cis} 7\pi/6 = 2\sqrt{2}\, e^{7\pi i/6}$$

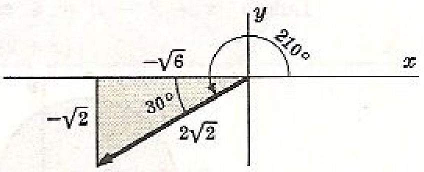


Fig. 1-24

(d) $-3i$

$$r = |-3i| = |0 - 3i| = \sqrt{0+9} = 3$$

$$\theta = 270° = 3\pi/2 \text{ (radianes)}$$

Luego $$-3i = 3(\cos 3\pi/2 + i\operatorname{sen} 3\pi/2) = 3 \operatorname{cis} 3\pi/2 = 3e^{3\pi i/2}$$

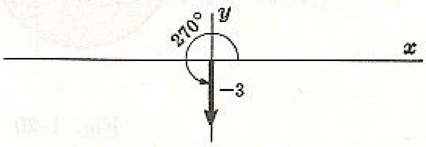


Fig. 1-25

17. Construir la gráfica de, (a) $6(\cos 240° + i\operatorname{sen} 240°)$, (b) $4e^{3\pi i/5}$, (c) $2e^{-\pi i/4}$.

(a) $$6(\cos 240° + i\operatorname{sen} 240°) = 6 \operatorname{cis} 240° = 6 \operatorname{cis} 4\pi/3 = 6\, e^{4\pi i/3}$$

se puede representar gráficamente por OP en la figura 1-26.

Si comenzamos con el vector OA, cuya magnitud es 6 y cuya dirección es la del eje x positivo, podemos obtener OP rotando OA, en sentido contrario al movimiento de las manecillas del reloj, un ángulo de 240°. En general, $re^{i\theta}$ es un vector que se obtiene rotando un vector de magnitud r y dirección la del eje x positivo, en sentido contrario al movimiento de las manecillas del reloj, un ángulo θ.

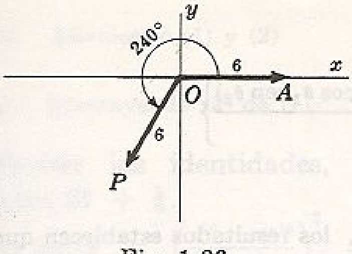


Fig. 1-26

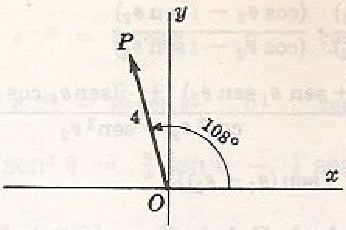


Fig. 1-27

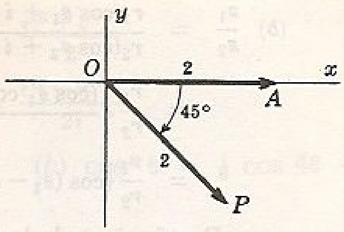


Fig. 1-28

(b) $$4\,e^{3\pi i/5} \;=\; 4(\cos 3\pi/5 \,+\, i\,\text{sen}\,3\pi/5) \;=\; 4(\cos 108^\circ + i\,\text{sen}\,108^\circ)$$

está representado por OP en la figura 1-27.

(c) $$2\,e^{-\pi i/4} \;=\; 2\{\cos(-\pi/4) + i\,\text{sen}\,(-\pi/4)\} \;=\; 2\{\cos(-45^\circ) + i\,\text{sen}\,(-45^\circ)\}$$

Este número complejo está representado por el vector OP en la figura 1-28. Este vector se obtiene partiendo del vector OA, cuya magnitud es 2 y cuya dirección es la del eje x positivo y rotándolo, en sentido contrario al movimiento de las manecillas del reloj, un ángulo de $-45°$ (que es lo mismo que rotándolo, a la manera de las manecillas del reloj, un ángulo de 45°).

18. Un hombre viaja 12 kilómetros en dirección noreste, 20 kilómetros en dirección 30° al noroeste y luego, 18 kilómetros en dirección 60° al suroeste. Determinar, (a) analíticamente, y (b) gráficamente a qué distancia y en qué dirección está él de su punto de partida.

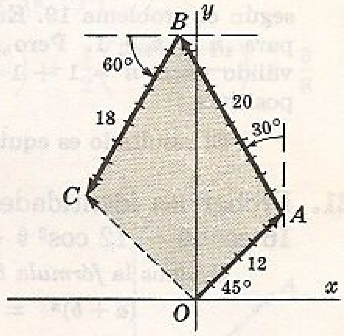


Fig. 1-29

(a) *Analíticamente.* Sea O el punto de partida (Fig. 1-29). Luego, los desplazamientos sucesivos están representados por los vectores OA, AB y BC. El resultado de todos los tres desplazamientos está representado por el vector

$$OC \;=\; OA + AB + BC$$

Ahora
$$\begin{aligned} OA &= 12(\cos 45^\circ + i\,\text{sen}\,45^\circ) \;=\; 12\,e^{\pi i/4} \\ AB &= 20\{\cos(90^\circ+30^\circ) + i\,\text{sen}(90^\circ+30^\circ)\} \;=\; 20\,e^{2\pi i/3} \\ BC &= 18\{\cos(180^\circ+60^\circ) + i\,\text{sen}\,(180^\circ+60^\circ)\} \;=\; 18\,e^{4\pi i/3} \end{aligned}$$

Entonces

$$\begin{aligned} OC &= 12\,e^{\pi i/4} + 20\,e^{2\pi i/3} + 18\,e^{4\pi i/3} \\ &= \{12\cos 45^\circ + 20\cos 120^\circ + 18\cos 240^\circ\} + i\{12\,\text{sen}\,45^\circ + 20\,\text{sen}\,120^\circ + 18\,\text{sen}\,240^\circ\} \\ &= \{(12)(\sqrt{2}/2) + (20)(-1/2) + (18)(-1/2)\} + i\{(12)(\sqrt{2}/2) + (20)(\sqrt{3}/2) + (18)(-\sqrt{3}/2)\} \\ &= (6\sqrt{2} - 19) + (6\sqrt{2} + \sqrt{3})i \end{aligned}$$

Si $r(\cos\theta + i\,\text{sen}\,\theta) = 6\sqrt{2} - 19 + (6\sqrt{2} + \sqrt{3})i$, entonces $r = \sqrt{(6\sqrt{2}-19)^2 + (6\sqrt{2}+\sqrt{3})^2}$ $= 14{,}7$ aproximadamente, y $\theta = \cos^{-1}(6\sqrt{2}-19)/r = \cos^{-1}(-0{,}717) = 135°49'$ aproximadamente.

Siendo así, el hombre está a 14,7 kilómetros de su punto de partida en una dirección $135°49' - 90° = 45°49'$ al noroeste.

(b) *Gráficamente.* Usando una unidad conveniente de longitud, tal como PQ en la figura 1-29, que representa 2 kilómetros, y un trasportador para medir ángulos, construimos los vectores OA, AB y BC. Luego, determinando el número de unidades en OC y el ángulo que OC hace con el eje y, obtenemos los resultados aproximados de (a).

EL TEOREMA DE DE MOIVRE

19. Si $z_1 = r_1(\cos\theta_1 + i\,\text{sen}\,\theta_1)$ y $z_2 = r_2(\cos\theta_2 + i\,\text{sen}\,\theta_2)$, probar

(a) $z_1z_2 = r_1r_2\{\cos(\theta_1+\theta_2) + i\,\text{sen}(\theta_1+\theta_2)\}$

(b) $\dfrac{z_1}{z_2} = \dfrac{r_1}{r_2}\{\cos(\theta_1-\theta_2) + i\,\text{sen}(\theta_1-\theta_2)\}$.

(a) $$\begin{aligned} z_1z_2 &= \{r_1(\cos\theta_1 + i\,\text{sen}\,\theta_1)\}\{r_2(\cos\theta_2 + i\,\text{sen}\,\theta_2)\} \\ &= r_1r_2\{(\cos\theta_1\cos\theta_2 - \text{sen}\,\theta_1\,\text{sen}\,\theta_2) + i(\text{sen}\,\theta_1\cos\theta_2 + \cos\theta_1\,\text{sen}\,\theta_2)\} \\ &= r_1r_2\{\cos(\theta_1+\theta_2) + i\,\text{sen}\,(\theta_1+\theta_2)\} \end{aligned}$$

$$(b)\quad \frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1(\cos\theta_1 + i\,\text{sen}\,\theta_1)}{r_2(\cos\theta_2 + i\,\text{sen}\,\theta_2)}\cdot\frac{(\cos\theta_2 - i\,\text{sen}\,\theta_2)}{(\cos\theta_2 - i\,\text{sen}\,\theta_2)}$$

$$= \frac{r_1}{r_2}\left\{\frac{(\cos\theta_1\cos\theta_2 + \text{sen}\,\theta_1\,\text{sen}\,\theta_2) + i(\text{sen}\,\theta_1\cos\theta_2 - \cos\theta_1\,\text{sen}\,\theta_2)}{\cos^2\theta_2 + \text{sen}^2\theta_2}\right\}$$

$$= \frac{r_1}{r_2}\{\cos(\theta_1 - \theta_2) + i\,\text{sen}(\theta_1 - \theta_2)\}$$

En términos de la fórmula de Euler $e^{i\theta} = \cos\theta + i\,\text{sen}\,\theta$, los resultados establecen que si $z_1 = r_1 e^{i\theta_1}$ y $z_2 = r_2 e^{i\theta_2}$, entonces $z_1 z_2 = r_1 r_2 e^{i(\theta_1+\theta_2)}$ y $\dfrac{z_1}{z_2} = \dfrac{r_1 e^{i\theta_1}}{r_2 e^{i\theta_2}} = \dfrac{r_1}{r_2} e^{i(\theta_1-\theta_2)}$.

20. Probar el teorema de De Moivre: $(\cos\theta + i\,\text{sen}\,\theta)^n = \cos n\theta + i\,\text{sen}\,n\theta$ donde n es un entero positivo.

Usamos el *principio de inducción matemática*. Se supone que el resultado es válido para el entero positivo k, es decir, se supone $(\cos\theta + i\,\text{sen}\,\theta)^k = \cos k\theta + i\,\text{sen}\,k\theta$. Luego, multiplicando ambos lados por $\cos\theta + i\,\text{sen}\,\theta$, encontramos

$$(\cos\theta + i\,\text{sen}\,\theta)^{k+1} = (\cos k\theta + i\,\text{sen}\,k\theta)(\cos\theta + i\,\text{sen}\,\theta) = \cos(k+1)\theta + i\,\text{sen}(k+1)\theta$$

según el problema 19. En este caso, *si* el resultado es válido para $n = k$, entonces también es válido para $n = k + 1$. Pero puesto que el resultado es claramente válido para $n = 1$, debe también ser válido para $n = 1 + 1 = 2$ y $n = 2 + 1 = 3$, etc., y así, debe ser válido para todos los enteros positivos.

El resultado es equivalente al enunciado $(e^{i\theta})^n = e^{ni\theta}$.

21. Probar las identidades, (*a*) $\cos 5\theta = 16\cos^5\theta - 20\cos^3\theta + 5\cos\theta$; (*b*) $(\text{sen}\,5\theta)/(\text{sen}\,\theta) = 16\cos^4\theta - 12\cos^2\theta + 1$, si $\theta \neq 0, \pm\pi, \pm 2\pi, \ldots$

Usamos la *fórmula binomial*

$$(a+b)^n = a^n + \tbinom{n}{1}a^{n-1}b + \tbinom{n}{2}a^{n-2}b^2 + \cdots + \tbinom{n}{r}a^{n-r}b^r + \cdots + b^n$$

donde los coeficientes $\binom{n}{r} = \dfrac{n!}{r!\,(n-r)!}$, también denotados por ${}_nC_r$, se llaman los *coeficientes binomiales*. El número $n!$ o *factorial de n* está definido como el producto $1\cdot 2\cdot 3\cdots n$ y definimos $0! = 1$.

Del problema 20, con $n = 5$, y la fórmula binomial,

$$\begin{aligned}
\cos 5\theta + i\,\text{sen}\,5\theta &= (\cos\theta + i\,\text{sen}\,\theta)^5 \\
&= \cos^5\theta + \tbinom{5}{1}(\cos^4\theta)(i\,\text{sen}\,\theta) + \tbinom{5}{2}(\cos^3\theta)(i\,\text{sen}\,\theta)^2 \\
&\quad + \tbinom{5}{3}(\cos^2\theta)(i\,\text{sen}\,\theta)^3 + \tbinom{5}{4}(\cos\theta)(i\,\text{sen}\,\theta)^4 + (i\,\text{sen}\,\theta)^5 \\
&= \cos^5\theta + 5i\cos^4\theta\,\text{sen}\,\theta - 10\cos^3\theta\,\text{sen}^2\theta \\
&\quad - 10i\cos^2\theta\,\text{sen}^3\theta + 5\cos\theta\,\text{sen}^4\theta + i\,\text{sen}^5\theta \\
&= \cos^5\theta - 10\cos^3\theta\,\text{sen}^2\theta + 5\cos\theta\,\text{sen}^4\theta \\
&\quad + i(5\cos^4\theta\,\text{sen}\,\theta - 10\cos^2\theta\,\text{sen}^3\theta + \text{sen}^5\theta)
\end{aligned}$$

Por esto,

$$\begin{aligned}
(a)\quad \cos 5\theta &= \cos^5\theta - 10\cos^3\theta\,\text{sen}^2\theta + 5\cos\theta\,\text{sen}^4\theta \\
&= \cos^5\theta - 10\cos^3\theta\,(1-\cos^2\theta) + 5\cos\theta\,(1-\cos^2\theta)^2 \\
&= 16\cos^5\theta - 20\cos^3\theta + 5\cos\theta
\end{aligned}$$

y

$$(b)\quad \text{sen}\,5\theta = 5\cos^4\theta\,\text{sen}\,\theta - 10\cos^2\theta\,\text{sen}^3\theta + \text{sen}^5\theta$$

o

$$\begin{aligned}
\frac{\text{sen}\,5\theta}{\text{sen}\,\theta} &= 5\cos^4\theta - 10\cos^2\theta\,\text{sen}^2\theta + \text{sen}^4\theta \\
&= 5\cos^4\theta - 10\cos^2\theta\,(1-\cos^2\theta) + (1-\cos^2\theta)^2 \\
&= 16\cos^4\theta - 12\cos^2\theta + 1
\end{aligned}$$

si $\text{sen}\,\theta \neq 0$, o sea $\theta \neq 0, \pm\pi, \pm 2\pi, \ldots$.

22. Demostrar que, (*a*) $\cos\theta = \dfrac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}$, (*b*) $\text{sen}\,\theta = \dfrac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}$.

Tenemos (*1*) $e^{i\theta} = \cos\theta + i\,\text{sen}\,\theta$, (*2*) $e^{-i\theta} = \cos\theta - i\,\text{sen}\,\theta$

(*a*) Añadiendo (*1*) y (*2*) $\quad e^{i\theta} + e^{-i\theta} = 2\cos\theta \quad$ o $\quad \cos\theta = \dfrac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2}$

(*b*) Sustrayendo (*2*) de (*1*) $\quad e^{i\theta} - e^{-i\theta} = 2i\,\mathrm{sen}\,\theta \quad$ o $\quad \mathrm{sen}\,\theta = \dfrac{e^{i\theta}-e^{-i\theta}}{2i}$

23. Probar las identidades, (*a*) $\mathrm{sen}^3\,\theta = \frac{3}{4}\,\mathrm{sen}\,\theta - \frac{1}{4}\,\mathrm{sen}\,3\theta$, (*b*) $\cos^4\theta = \frac{1}{8}\cos 4\theta + \frac{1}{2}\cos 2\theta + \frac{3}{8}$.

$$(a)\ \mathrm{sen}^3\,\theta = \left(\frac{e^{i\theta}-e^{-i\theta}}{2i}\right)^3 = \frac{(e^{i\theta}-e^{-i\theta})^3}{8i^3} = -\frac{1}{8i}\{(e^{i\theta})^3 - 3(e^{i\theta})^2(e^{-i\theta}) + 3(e^{i\theta})(e^{-i\theta})^2 - (e^{-i\theta})^3\}$$

$$= -\frac{1}{8i}(e^{3i\theta} - 3e^{i\theta} + 3e^{-i\theta} - e^{-3i\theta}) = \frac{3}{4}\left(\frac{e^{i\theta}-e^{-i\theta}}{2i}\right) - \frac{1}{4}\left(\frac{e^{3i\theta}-e^{-3i\theta}}{2i}\right)$$

$$= \frac{3}{4}\,\mathrm{sen}\,\theta - \frac{1}{4}\,\mathrm{sen}\,3\theta$$

$$(b)\ \cos^4\theta = \left(\frac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2}\right)^4 = \frac{(e^{i\theta}+e^{-i\theta})^4}{16}$$

$$= \frac{1}{16}\{(e^{i\theta})^4 + 4(e^{i\theta})^3(e^{-i\theta}) + 6(e^{i\theta})^2(e^{-i\theta})^2 + 4(e^{i\theta})(e^{-i\theta})^3 + (e^{-i\theta})^4\}$$

$$= \frac{1}{16}(e^{4i\theta} + 4e^{2i\theta} + 6 + 4e^{-2i\theta} + e^{-4i\theta}) = \frac{1}{8}\left(\frac{e^{4i\theta}+e^{-4i\theta}}{2}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{e^{2i\theta}+e^{-2i\theta}}{2}\right) + \frac{3}{8}$$

$$= \frac{1}{8}\cos 4\theta + \frac{1}{2}\cos 2\theta + \frac{3}{8}$$

24. Dado un número complejo (vector) z, interpretar geométricamente $ze^{i\alpha}$ donde α es real.

Sea $z = re^{i\theta}$, representado gráficamente por el vector OA en la figura 1-30. Entonces

$$ze^{i\alpha} = re^{i\theta}\cdot e^{i\alpha} = re^{i(\theta+\alpha)}$$

es el vector representado por OB.

Por esto, la multiplicación de un vector z por $e^{i\alpha}$ consiste en rotar z, en sentido contrario al movimiento de las manecillas del reloj, un ángulo α. Podemos considerar $e^{i\alpha}$ como un operador que actúa sobre z para producir esta rotación.

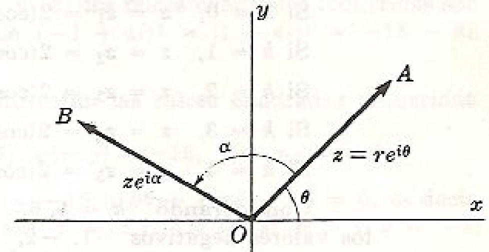


Fig. 1-30

25. Probar: $e^{i\theta} = e^{i(\theta+2k\pi)}$, $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$.

$$e^{i(\theta+2k\pi)} = \cos(\theta+2k\pi) + i\,\mathrm{sen}(\theta+2k\pi) = \cos\theta + i\,\mathrm{sen}\,\theta = e^{i\theta}$$

26. Hallar el valor numérico de cada una de las siguientes expresiones.

$$(a)\ [3(\cos 40^\circ + i\,\mathrm{sen}\,40^\circ)][4(\cos 80^\circ + i\,\mathrm{sen}\,80^\circ)] = 3\cdot 4[\cos(40^\circ+80^\circ) + i\,\mathrm{sen}(40^\circ+80^\circ)]$$

$$= 12(\cos 120^\circ + i\,\mathrm{sen}\,120^\circ)$$

$$= 12\left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) = -6 + 6\sqrt{3}\,i$$

$$(b)\ \frac{(2\,\mathrm{cis}\,15^\circ)^7}{(4\,\mathrm{cis}\,45^\circ)^3} = \frac{128\,\mathrm{cis}\,105^\circ}{64\,\mathrm{cis}\,135^\circ} = 2\,\mathrm{cis}\,(105^\circ - 135^\circ)$$

$$= 2[\cos(-30^\circ) + i\,\mathrm{sen}(-30^\circ)] = 2[\cos 30^\circ - i\,\mathrm{sen}\,30^\circ] = \sqrt{3} - i$$

$$(c)\ \left(\frac{1+\sqrt{3}\,i}{1-\sqrt{3}\,i}\right)^{10} = \left\{\frac{2\,\mathrm{cis}\,(60^\circ)}{2\,\mathrm{cis}\,(-60^\circ)}\right\}^{10} = (\mathrm{cis}\,120^\circ)^{10} = \mathrm{cis}\,1200^\circ = \mathrm{cis}\,120^\circ = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$$

Otro método.

$$\left(\frac{1+\sqrt{3}\,i}{1-\sqrt{3}\,i}\right)^{10} = \left(\frac{2e^{\pi i/3}}{2e^{-\pi i/3}}\right)^{10} = (e^{2\pi i/3})^{10} = e^{20\pi i/3}$$

$$= e^{6\pi i}\,e^{2\pi i/3} = (1)[\cos(2\pi/3) + i\,\mathrm{sen}(2\pi/3)] = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$$

27. Probar que, (*a*) $\arg(z_1z_2) = \arg z_1 + \arg z_2$, (*b*) $\arg(z_1/z_2) = \arg z_1 - \arg z_2$, enunciando condiciones apropiadas de validez.

Sea $z_1 = r_1(\cos\theta_1 + i\,\text{sen}\,\theta_1)$, $z_2 = r_2(\cos\theta_2 + i\,\text{sen}\,\theta_2)$. Luego $\arg z_1 = \theta_1$, $\arg z_2 = \theta_2$.

(*a*) Ya que $z_1z_2 = r_1r_2\{\cos(\theta_1+\theta_2) + i\,\text{sen}(\theta_1+\theta_2)\}$, $\arg(z_1z_2) = \theta_1 + \theta_2 = \arg z_1 + \arg z_2$.

(*b*) Ya que $\dfrac{z_1}{z_2} = \dfrac{r_1}{r_2}\{\cos(\theta_1-\theta_2) + i\,\text{sen}(\theta_1-\theta_2)\}$, $\arg\left(\dfrac{z_1}{z_2}\right) = \theta_1 - \theta_2 = \arg z_1 - \arg z_2$.

Como hay muchos valores posibles para $\theta_1 = \arg z_1$ y $\theta_2 = \arg z_2$, podemos únicamente decir que los dos lados en las igualdades anotadas arriba, son iguales para *algunos* valores de $\arg z_1$ y $\arg z_2$. Ellas pueden no ser válidas, aún si los valores principales son usados.

RAICES DE NUMEROS COMPLEJOS

28. (*a*) Encontrar todos los valores de z para que $z^5 = -32$, y (*b*) localizar estos valores en el plano complejo.

(*a*) En forma polar, $-32 = 32\{\cos(\pi + 2k\pi) + i\,\text{sen}(\pi + 2k\pi)\}$, $k = 0, \pm 1, \pm 2 \cdots$

Sea $z = r(\cos\theta + i\,\text{sen}\,\theta)$. Luego, por el teorema de De Moivre,

$$z^5 = r^5(\cos 5\theta + i\,\text{sen}\,5\theta) = 32\{\cos(\pi + 2k\pi) + i\,\text{sen}(\pi + 2k\pi)\}$$

y así $r^5 = 32$, $5\theta = \pi + 2k\pi$, de lo cual $r = 2$, $\theta = (\pi + 2k\pi)/5$. Por tanto

$$z = 2\left\{\cos\left(\frac{\pi + 2k\pi}{5}\right) + i\,\text{sen}\left(\frac{\pi + 2k\pi}{5}\right)\right\}$$

Si $k = 0$, $z = z_1 = 2(\cos\pi/5 + i\,\text{sen}\,\pi/5)$.
Si $k = 1$, $z = z_2 = 2(\cos 3\pi/5 + i\,\text{sen}\,3\pi/5)$.
Si $k = 2$, $z = z_3 = 2(\cos 5\pi/5 + i\,\text{sen}\,5\pi/5) = -2$.
Si $k = 3$, $z = z_4 = 2(\cos 7\pi/5 + i\,\text{sen}\,7\pi/5)$.
Si $k = 4$, $z = z_5 = 2(\cos 9\pi/5 + i\,\text{sen}\,9\pi/5)$.

Considerando $k = 5, 6, \ldots$ así como los valores negativos $-1, -2, \ldots$, obtendremos repeticiones de los cinco valores de z antes mencionados. Por tanto, estas son las únicas *soluciones* o *raíces* de la ecuación dada. Estas cinco raíces se llaman las *raíces quintas de* -32, y se denotan por $(-32)^{1/5}$. En general, $a^{1/n}$ representa las raíces n-ésimas de a y existen n de tales raíces.

(*b*) Los valores de z están indicados en la figura 1-31. Obsérvese que ellos están igualmente espaciados a lo largo de la circunferencia de centro en el origen y radio 2. En otras palabras, las raíces están representadas por los vértices de un polígono regular.

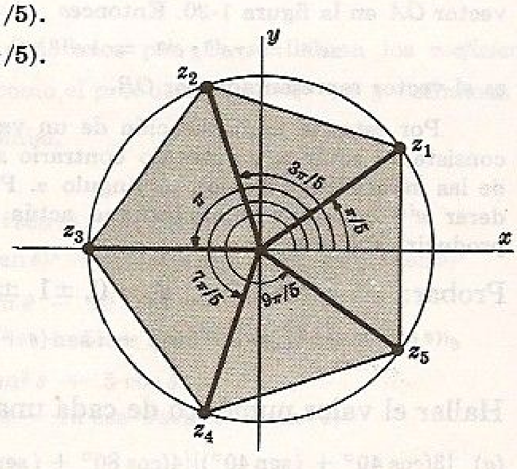


Fig. 1-31

29. Encontrar cada una de las raíces indicadas y localizarlas gráficamente.

(*a*) $(-1+i)^{1/3}$

$$-1 + i = \sqrt{2}\{\cos(3\pi/4 + 2k\pi) + i\,\text{sen}(3\pi/4 + 2k\pi)\}$$

$$(-1+i)^{1/3} = 2^{1/6}\left\{\cos\left(\frac{3\pi/4 + 2k\pi}{3}\right) + i\,\text{sen}\left(\frac{3\pi/4 + 2k\pi}{3}\right)\right\}$$

Si $k = 0$, $z_1 = 2^{1/6}(\cos\pi/4 + i\,\text{sen}\,\pi/4)$.
Si $k = 1$, $z_2 = 2^{1/6}(\cos 11\pi/12 + i\,\text{sen}\,11\pi/12)$.
Si $k = 2$, $z_3 = 2^{1/6}(\cos 19\pi/12 + i\,\text{sen}\,19\pi/12)$.

Estas están representadas gráficamente en la figura 1-32.

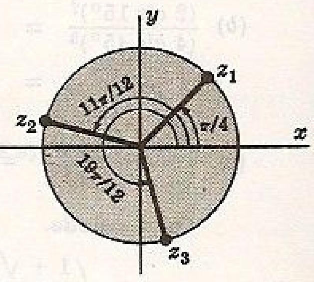


Fig. 1-32

(*b*) $(-2\sqrt{3}-2i)^{1/4}$

$$-2\sqrt{3}-2i \;=\; 4\{\cos(7\pi/6+2k\pi) \;+\; i\,\text{sen}\,(7\pi/6+2k\pi)\}$$

$$(-2\sqrt{3}-2i)^{1/4} \;=\; 4^{1/4}\left\{\cos\left(\frac{7\pi/6+2k\pi}{4}\right) + i\,\text{sen}\left(\frac{7\pi/6+2k\pi}{4}\right)\right\}$$

Si $k = 0,\quad z_1 = \sqrt{2}\,(\cos 7\pi/24 + i\,\text{sen}\,7\pi/24)$.

Si $k = 1,\quad z_2 = \sqrt{2}\,(\cos 19\pi/24 + i\,\text{sen}\,19\pi/24)$.

Si $k = 2,\quad z_3 = \sqrt{2}\,(\cos 31\pi/24 + i\,\text{sen}\,31\pi/24)$.

Si $k = 3,\quad z_4 = \sqrt{2}\,(\cos 43\pi/24 + i\,\text{sen}\,43\pi/24)$.

Estas están representadas gráficamente en la figura 1-33.

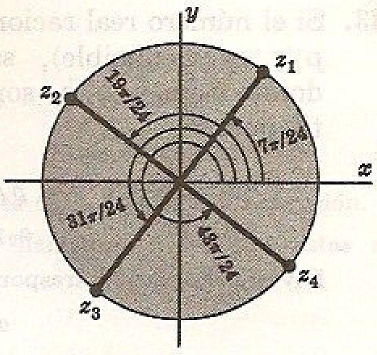


Fig. 1-33

30. Encontrar las raíces cuadradas de $-15-8i$.

Método 1.

$$-15-8i = 17\{\cos(\theta+2k\pi) + i\,\text{sen}\,(\theta+2k\pi)\} \quad \text{donde } \cos\theta = -15/17,\ \text{sen}\,\theta = -8/17.$$

Luego, las raíces cuadradas de $-15-8i$ son

$$\sqrt{17}\,(\cos\theta/2 + i\,\text{sen}\,\theta/2) \tag{1}$$

y

$$\sqrt{17}\,\{\cos(\theta/2+\pi) + i\,\text{sen}\,(\theta/2+\pi)\} = -\sqrt{17}\,(\cos\theta/2 + i\,\text{sen}\,\theta/2) \tag{2}$$

Ahora,

$$\cos\theta/2 = \pm\sqrt{(1+\cos\theta)/2} = \pm\sqrt{(1-15/17)/2} = \pm 1/\sqrt{17}$$

$$\text{sen}\,\theta/2 = \pm\sqrt{(1-\cos\theta)/2} = \pm\sqrt{(1+15/17)/2} = \pm 4/\sqrt{17}$$

Puesto que θ es un ángulo en el tercer cuadrante, $\theta/2$ es un ángulo en el segundo cuadrante. En consecuencia, $\cos\theta/2 = -1/\sqrt{17}$, $\text{sen}\,\theta/2 = 4/\sqrt{17}$ y así de (*1*) y (*2*) las raíces cuadradas requeridas son $-1+4i$ y $1-4i$. Como una verificación se puede ver que $(-1+4i)^2 = (1-4i)^2 = -15-8i$.

Método 2.

Suponiendo que $p+iq$, donde p y q son reales, representan las raíces cuadradas requeridas. Entonces

$$(p+iq)^2 = p^2-q^2+2pqi = -15-8i \quad \text{o} \quad (3)\ p^2-q^2 = -15, \quad (4)\ pq = -4$$

Sustituyendo $q = -4/p$ de (*4*) en (*3*), queda $p^2 - 16/p^2 = -15$ o $p^4 + 15p^2 - 16 = 0$, es decir, $(p^2+16)(p^2-1) = 0$ o $p^2 = -16, p^2 = 1$. Como p es real, $p = \pm 1$. De (*4*) si $p = 1, q = -4$; si $p = -1, q = 4$. En este caso las raíces son $-1+4i$ y $1-4i$.

ECUACIONES POLINOMICAS

31. Resolver la *ecuación de segundo grado* $az^2+bz+c = 0,\ a \neq 0$.

Trasponiendo c y dividiendo por $a \neq 0$

$$z^2 + \frac{b}{a}z = -\frac{c}{a}$$

Añadiendo $\left(\frac{b}{2a}\right)^2$ (completando el cuadrado)

$$z^2 + \frac{b}{a}z + \left(\frac{b}{2a}\right)^2 = -\frac{c}{a} + \left(\frac{b}{2a}\right)^2$$

Entonces

$$\left(z+\frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2-4ac}{4a^2}$$

Tomando raíces cuadradas,

$$z + \frac{b}{2a} = \frac{\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

Por tanto

$$z = \frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

32. Resolver la ecuación $z^2+(2i-3)z+5-i = 0$.

Del problema 31, $a = 1,\ b = 2i-3,\ c = 5-i$ y así las soluciones son

$$z = \frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a} = \frac{-(2i-3)\pm\sqrt{(2i-3)^2-4(1)(5-i)}}{2(1)} = \frac{3-2i\pm\sqrt{-15-8i}}{2}$$

$$= \frac{3-2i\pm(1-4i)}{2} = 2-3i \quad \text{o} \quad 1+i$$

aprovechando el hecho de que las raíces cuadradas de $-15-8i$ son $\pm(1-4i)$ (véase el problema 30), éstas satisfacen la ecuación.

33. Si el número real racional p/q (donde p y q no tienen factor común, excepto ± 1, es decir p/q es irreducible), satisface la ecuación polinómica $a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \cdots + a_n = 0$ donde $a_0, a_1, \ldots, a_n$ son enteros, mostrar que p y q deben ser factores de a_n y a_0 respectivamente.

Sustituyendo $z = p/q$ en la ecuación dada y multiplicando por q^n tenemos

$$a_0 p^n + a_1 p^{n-1} q + \cdots + a_{n-1} p q^{n-1} + a_n q^n = 0 \qquad (1)$$

Dividiendo por p y trasponiendo el último término,

$$a_0 p^{n-1} + a_1 p^{n-2} q + \cdots + a_{n-1} q^{n-1} = -\frac{a_n q^n}{p} \qquad (2)$$

Puesto que el lado izquierdo de (2) es un entero, así debe serlo el lado derecho. Pero, como p no tiene factor común con q, él no puede dividir q^n y así, debe dividir a_n.

Análogamente, al dividir (1) por q y trasponiendo el primer término encontramos que q debe dividir a_0.

34. Resolver $6z^4 - 25z^3 + 32z^2 + 3z - 10 = 0$.

Los divisores de 6 y -10 son respectivamente $\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 6$ y $\pm 1, \pm 2, \pm 5, \pm 10$. Por tanto, según el problema 33, las posibles soluciones racionales son

$$\pm 1, \pm 1/2, \pm 1/3, \pm 1/6, \pm 2, \pm 2/3, \pm 5, \pm 5/2, \pm 5/3, \pm 5/6, \pm 10, \pm 10/3.$$

Para prueba, encontramos que $z = -1/2$ y $z = 2/3$ son soluciones, y así el polinomio $(2z+1)(3z-2) = 6z^2 - z - 2$ es un factor de $z^2 - 4z + 5$, siendo el otro factor $6z^4 - 25z^3 + 32z^2 + 3z - 10$, encontrado por división. Por tanto

$$6z^4 - 25z^3 + 32z^2 + 3z - 10 = (6z^2 - z - 2)(z^2 - 4z + 5) = 0$$

Las soluciones de $z^2 - 4z + 5 = 0$ son (véase el problema 31)

$$z = \frac{4 \pm \sqrt{16-20}}{2} = \frac{4 \pm \sqrt{-4}}{2} = \frac{4 \pm 2i}{2} = 2 \pm i$$

Luego, las soluciones son $-1/2, 2/3, 2+i, 2-i$.

35. Probar que la suma y producto de todas las raíces de $a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \cdots + a_n = 0$ donde $a_0 \neq 0$, son $-a_1/a_0$ y $(-1)^n a_n/a_0$ respectivamente.

Si $z_1, z_2, \ldots, z_n$ son las n raíces, la ecuación se puede escribir en forma factorizada como

$$a_0(z-z_1)(z-z_2)\cdots(z-z_n) = 0$$

La multiplicación directa muestra que

$$a_0\{z^n - (z_1 + z_2 + \cdots + z_n)z^{n-1} + \cdots + (-1)^n z_1 z_2 \cdots z_n\} = 0$$

de donde se deduce que $-a_0(z_1 + z_2 + \cdots + z_n) = a_1$ y $a_0(-1)^n z_1 z_2 \cdots z_n = a_n$, de lo cual

$$z_1 + z_2 + \cdots + z_n = -a_1/a_0, \qquad z_1 z_2 \cdots z_n = (-1)^n a_n/a_0$$

como queríamos.

36. Si $p + qi$ es una raíz de $a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \cdots + a_n = 0$ donde $a_0 \neq 0, a_1, \ldots, a_n$, p y q son reales, probar que $p - qi$ es también una raíz.

Sea $p + qi = re^{i\theta}$ en la forma polar. Puesto que satisface la ecuación,

$$a_0 r^n e^{in\theta} + a_1 r^{n-1} e^{i(n-1)\theta} + \cdots + a_{n-1} r e^{i\theta} + a_n = 0$$

Tomando el conjugado de ambos lados

$$a_0 r^n e^{-in\theta} + a_1 r^{n-1} e^{-i(n-1)\theta} + \cdots + a_{n-1} r e^{-i\theta} + a_n = 0$$

vemos que $re^{-i\theta} = p - qi$ es también una raíz. El resultado no vale si $a_0, \ldots, a_n$ no son todos reales (véase el problema 32).

El teorema se expresa a veces diciendo que: Los ceros de un polinomio con coeficientes reales aparecen en parejas conjugadas.

LAS RAICES n-ésimas DE LA UNIDAD

37. Hallar todas las raíces quintas de la unidad.

$$z^5 = 1 = \cos 2k\pi + i \operatorname{sen} 2k\pi = e^{2k\pi i} \quad \text{donde } k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

Luego $$z = \cos \frac{2k\pi}{5} + i \operatorname{sen} \frac{2k\pi}{5} = e^{2k\pi i/5}$$

donde basta tomar $k = 0, 1, 2, 3, 4$ puesto que todos los otros valores de k conducen a repetición.

En este caso, las raíces son $1, e^{2\pi i/5}, e^{4\pi i/5}, e^{6\pi i/5}, e^{8\pi i/5}$. Si llamamos $e^{2\pi i/5} = \omega$, estas se pueden expresar como $1, \omega, \omega^2, \omega^3, \omega^4$.

38. Si $n = 2, 3, 4, \ldots$, probar que

(a) $$\cos\frac{2\pi}{n} + \cos\frac{4\pi}{n} + \cos\frac{6\pi}{n} + \cdots + \cos\frac{2(n-1)\pi}{n} = -1$$

(b) $$\operatorname{sen}\frac{2\pi}{n} + \operatorname{sen}\frac{4\pi}{n} + \operatorname{sen}\frac{6\pi}{n} + \cdots + \operatorname{sen}\frac{2(n-1)\pi}{n} = 0$$

Considerar la ecuación $z^n - 1 = 0$ cuyas soluciones son las raíces n-ésimas de la unidad,

$$1, \; e^{2\pi i/n}, \; e^{4\pi i/n}, \; e^{6\pi i/n}, \; \ldots, \; e^{2(n-1)\pi i/n}$$

Según el problema 35, la suma de estas raíces es cero. Entonces

$$1 + e^{2\pi i/n} + e^{4\pi i/n} + e^{6\pi i/n} + \cdots + e^{2(n-1)\pi i/n} = 0$$

es decir,

$$\left\{1 + \cos\frac{2\pi}{n} + \cos\frac{4\pi}{n} + \cdots + \cos\frac{2(n-1)\pi}{n}\right\} + i\left\{\operatorname{sen}\frac{2\pi}{n} + \operatorname{sen}\frac{4\pi}{n} + \cdots + \operatorname{sen}\frac{2(n-1)\pi}{n}\right\} = 0$$

de lo cual se deducen los resultados exigidos.

PRODUCTO VECTORIAL Y ESCALAR

39. Si $z_1 = 3 - 4i$ y $z_2 = -4 + 3i$, hallar (a) $z_1 \circ z_2$, (b) $z_1 \times z_2$.

(a) $z_1 \circ z_2 = \operatorname{Re}\{\bar{z}_1 z_2\} = \operatorname{Re}\{(3+4i)(-4+3i)\} = \operatorname{Re}\{-24-7i\} = -24$

Otro método. $z_1 \circ z_2 = (3)(-4) + (-4)(3) = -24$

(b) $z_1 \times z_2 = \operatorname{Im}\{\bar{z}_1 z_2\} = \operatorname{Im}\{(3+4i)(-4+3i)\} = \operatorname{Im}\{-24-7i\} = -7$

Otro método $z_1 \times z_2 = (3)(3) - (-4)(-4) = -7$

40. Encontrar el ángulo agudo entre los vectores del problema 39.

Según el problema 39(a), se tiene $\cos\theta = \dfrac{z_1 \circ z_2}{|z_1|\,|z_2|} = \dfrac{-24}{|3-4i|\,|-4+3i|} = \dfrac{-24}{25} = -0{,}96.$

Entonces, el ángulo agudo es $\cos^{-1} 0{,}96 = 16°16'$ aproximadamente.

41. Probar que el área de un paralelogramo de lados z_1 y z_2 es $|z_1 \times z_2|$.

Area del paralelogramo (Fig. 1-34)

$= $ (base) (altura)

$= (|z_2|)(|z_1| \operatorname{sen} \theta)$

$= |z_1||z_2| \operatorname{sen}\theta = |z_1 \times z_2|$

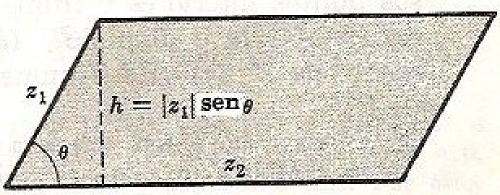


Fig. 1-34

42. Encontrar el área de un triángulo con vértices en $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$ y $C(x_3, y_3)$.

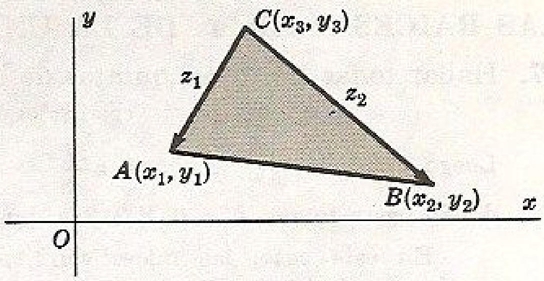


Fig. 1-35

Los vectores de C a A y a B (Fig. 1-35) se dan respectivamente por

$$z_1 = (x_1 - x_3) + i(y_1 - y_3), \quad z_2 = (x_2 - x_3) + i(y_2 - y_3)$$

Puesto que el área de un triángulo de lados z_1 y z_2 es la mitad del área del correspondiente paralelogramo, tenemos, según el problema 41:

$$\begin{aligned}
\text{Area del triángulo} \quad \tfrac{1}{2}|z_1 \times z_2| &= \tfrac{1}{2}|\operatorname{Im}\{[(x_1 - x_3) - i(y_1 - y_3)][(x_2 - x_3) + i(y_2 - y_3)]\}| \\
&= \tfrac{1}{2}|(x_1 - x_3)(y_2 - y_3) - (y_1 - y_3)(x_2 - x_3)| \\
&= \tfrac{1}{2}|x_1y_2 - y_1x_2 + x_2y_3 - y_2x_3 + x_3y_1 - y_3x_1| \\
&= \tfrac{1}{2}\left|\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}\right|
\end{aligned}$$

en forma de determinantes.

COORDENADAS CONJUGADAS COMPLEJAS

43. Expresar cada ecuación en términos de las coordenadas conjugadas (*a*) $2x + y = 5$, (*b*) $x^2 + y^2 = 36$.

(*a*) Como $z = x + iy$, $\bar{z} = x - iy$, $x = \dfrac{z + \bar{z}}{2}$, $y = \dfrac{z - \bar{z}}{2i}$. Entonces $2x + y = 5$ será

$$2\left(\frac{z+\bar{z}}{2}\right) + \left(\frac{z-\bar{z}}{2i}\right) = 5 \qquad \text{o} \qquad (2i+1)z + (2i-1)\bar{z} = 10i$$

La ecuación representa una línea recta en el plano z

(*b*) *Método 1.* La ecuación es $(x + iy)(x - iy) = 36$ o $z\bar{z} = 36$.

Método 2. Sustituyendo $x = \dfrac{z + \bar{z}}{2}$, $y = \dfrac{z - \bar{z}}{2i}$ en $x^2 + y^2 = 36$ para obtener $z\bar{z} = 36$.

La ecuación representa una circunferencia en el plano z de radio 6 con centro en el origen.

44. Demostrar que la ecuación de una circunferencia o recta en el plano z se puede escribir como $\alpha z\bar{z} + \beta z + \bar{\beta}\bar{z} + \gamma = 0$ donde α y γ son constantes reales, mientras que β puede ser una constante compleja.

La ecuación general de una circunferencia en el plano xy se puede escribir

$$A(x^2 + y^2) + Bx + Cy + D = 0$$

que en coordenadas conjugadas será

$$Az\bar{z} + B\left(\frac{z+\bar{z}}{2}\right) + C\left(\frac{z-\bar{z}}{2i}\right) + D = 0 \qquad \text{o} \qquad Az\bar{z} + \left(\frac{B}{2} + \frac{C}{2i}\right)z + \left(\frac{B}{2} - \frac{C}{2i}\right)\bar{z} + D = 0$$

Llamando $A = \alpha$, $\dfrac{B}{2} + \dfrac{C}{2i} = \beta$ y $D = \gamma$, el resultado requerido se deduce.

En el caso especial en que $A = \alpha = 0$, la circunferencia degenera en una recta.

CONJUNTOS DE PUNTOS

45. Dado el conjunto de puntos $S: \{i, \frac{1}{2}i, \frac{1}{3}i, \frac{1}{4}i, \ldots\}$ o brevemente $\{i/n\}$. (*a*) ¿Es S acotado? (*b*) ¿Cuáles son sus puntos de acumulación, si tiene? (*c*) ¿Es S cerrado? (*d*) ¿Cuáles son sus puntos interiores y fronteras? (*e*) ¿Es S abierto? (*f*) ¿Es S conexo? (*g*) ¿Es S una región abierta o dominio? (*h*) ¿Cuál es la clausura de S? (*i*) ¿Cuál es el complemento de S? (*j*) ¿Es S numerable? (*k*) ¿Es S compacto? (*l*) ¿Es compacta la clausura de S?

(*a*) S es acotado puesto que para cada punto z en S, $|z| < 2$ (por ejemplo), es decir, todos los puntos de S están dentro de un círculo de radio 2 con centro en el origen.

(*b*) Como toda vecindad reducida de $z = 0$ contiene puntos de S, un punto de acumulación es $z = 0$. Este es el único punto de acumulación.

Obsérvese que como S es acotado e infinito, el teorema de Bolzano-Weierstrass predice por lo menos un punto de acumulación.

(c) S no es cerrado puesto que el punto de acumulación $z = 0$ no pertenece a S.

(d) Cada vecindad reducida de radio δ de un punto i/n (o sea, cada círculo de radio δ con centro en i/n) contiene puntos que pertenecen a S y puntos que no pertenecen a S. En este caso, cada punto de S, así como el punto $z = 0$, es un punto frontera. S *no* tiene puntos interiores.

(e) S no consiste de puntos interiores. Por tanto, no puede ser abierto. En este caso, S ni es abierto ni es cerrado.

(f) Si unimos dos puntos cualesquiera de S por un camino poligonal, hay puntos en este camino que no pertenecen a S. En este caso, S no es conexo.

(g) Puesto que S no es un conjunto abierto conexo, no es una región abierta o dominio.

(h) La clausura de S consiste del conjunto S junto con el punto de acumulación cero, o sea $\{0, i, \frac{1}{2}i, \frac{1}{3}i, \ldots\}$.

(i) El complemento de S es el conjunto de todos los puntos no pertenecientes a S, es decir, todos los puntos $z \neq i, i/2, i/3, \ldots$

(j) Existe una correspondencia punto por punto entre los elementos de S y los números naturales $1, 2, 3, \ldots$, como se indica a continuación.

$$\begin{array}{ccccc} i & \frac{1}{2}i & \frac{1}{3}i & \frac{1}{4}i & \ldots \\ \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \\ 1 & 2 & 3 & 4 & \end{array}$$

Por tanto, S es numerable.

(k) S es acotado pero no cerrado. Por esto, no es compacto.

(l) La clausura de S es acotado y cerrado, y así es compacto.

46. Dados los conjuntos de puntos $A = \{3, -i, 4, 2+i, 5\}$, $B = \{-i, 0, -1, 2+i\}$, $C = \{-\sqrt{2}\,i, \frac{1}{2}, 3\}$.
Hallar, (a) $A+B$ o $A \cup B$, (b) AB o $A \cap B$, (c) AC o $A \cap C$, (d) $A(B+C)$ o $A \cap (B \cup C)$, (e) $AB + AC$ o $(A \cap B) \cup (A \cap C)$, (f) $A(BC)$ o $A \cap (B \cap C)$.

(a) $A + B = A \cup B$ consiste de puntos pertenecientes a A o B o a ambos y está dado por $\{3, -i, 4, 2+i, 5, 0, -1\}$.

(b) AB o $A \cap B$, consiste de puntos pertenecientes a A y B y está dado por $\{-i, 2+i\}$.

(c) AC o $A \cap C = \{3\}$, consiste únicamente del elemento 3.

(d) $B + C$ o $B \cup C = \{-i, 0, -1, 2+i, -\sqrt{2}\,i, \frac{1}{2}, 3\}$.

Por esto, $A(B+C)$ o $A \cap (B \cup C) = \{3, -i, 2+i\}$ consiste de los puntos pertenecientes a ambos A y $B + C$.

(e) $AB = \{-i, 2+i\}$, $AC = \{3\}$ de partes (b) y (c). Por tanto $AB + AC = \{-i, 2+i, 3\}$.

De esto y el resultado de (d) vemos que $A(B+C) = AB + AC$ o $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$, que ilustran con ejemplos el hecho de que A, B, C satisfacen la *ley distributiva.* Podemos mostrar que los conjuntos gozan de muchas de las propiedades válidas en el álgebra de números. Esto es de gran importancia en teoría y aplicación.

(f) $BC = B \cap C = \varnothing$, el *conjunto vacío,* puesto que no hay puntos comunes a B y C. En consecuencia $A(BC) = \varnothing$ también.

PROBLEMAS VARIOS

47. Un número se llama un *número algebraico* si es una solución de una ecuación pólinómica $a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \cdots + a_{n-1} z + a_n = 0$ donde $a_0, a_1, \ldots, a_n$ son enteros. Probar que, (a) $\sqrt{3} + \sqrt{2}$, y (b) $\sqrt[3]{4} - 2i$ son números algebraicos.

(a) Sea $z = \sqrt{3} + \sqrt{2}$ o $z - \sqrt{2} = \sqrt{3}$. Elevando al cuadrado, $z^2 - 2\sqrt{2}\,z + 2 = 3$ o $z^2 - 1 = 2\sqrt{2}\,z$. Elevando al cuadrado otra vez, $z^4 - 2z^2 + 1 = 8z^2$ o $z^4 - 10z^2 + 1 = 0$, una ecuación polinomial con coeficientes enteros que tiene $\sqrt{3} + \sqrt{2}$ como una raíz. Por tanto, $\sqrt{3} + \sqrt{2}$ es un número algebraico.

(b) Sea $z = \sqrt[3]{4} - 2i$ o $z + 2i = \sqrt[3]{4}$. Elevando al cubo, $z^3 + 3z^2(2i) + 3z(2i)^2 + (2i)^3 = 4$ o $z^3 - 12z - 4 = i(8 - 6z^2)$. Elevando al cuadrado, $z^6 + 12z^4 - 8z^3 + 48z^2 + 96z + 80 = 0$, una ecuación polinomial con coeficientes enteros que tiene $\sqrt[3]{4} - 2i$ como una raíz. Por esto, $\sqrt[3]{4} - 2i$ es un número algebraico.

Números que no son algebraicos, o sea que no satisfacen ninguna ecuación con coeficientes enteros, se llaman *números trascendentes*. Ha sido probado que los números $\pi = 3{,}14159\ldots$ y $e = 2{,}71828\ldots$ son trascendentes. No obstante, no se conoce todavía si números tales como $e\pi$ o $e + \pi$ por ejemplo, son trascendentes o no.

48. Representar gráficamente el conjunto de valores de z para los cuales,

$$(a)\ \left|\frac{z-3}{z+3}\right| = 2, \quad (b)\ \left|\frac{z-3}{z+3}\right| < 2.$$

(*a*) La ecuación dada es equivalente a $|z-3| = 2|z+3|$ o, si $z = x+iy$, $|x+iy-3| = 2|x+iy+3|$, es decir,

$$\sqrt{(x-3)^2+y^2} \;=\; 2\sqrt{(x+3)^2+y^2}$$

Elevando al cuadrado y simplificando, esto será $x^2+y^2+10x+9 = 0$ o $(x+5)^2+y^2 = 16$ o sea $|z+5| = 4$, una circunferencia de radio 4 con centro en $(-5,0)$ como se muestra en la figura 1-36.

Geométricamente, un punto P sobre esta circunferencia es tal que la distancia de P al punto $B(3,0)$ es dos veces la distancia de P al punto $A(-3,0)$.

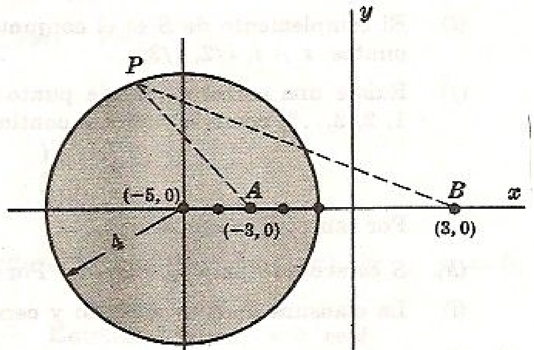


Fig. 1-36

Otro método.

$$\left|\frac{z-3}{z+3}\right| = 2 \text{ es equivalente a}$$

$$\left(\frac{z-3}{z+3}\right)\left(\frac{\bar z-3}{\bar z+3}\right) = 4 \quad \text{o} \quad z\bar z + 5\bar z + 5z + 9 = 0$$

o sea $(z+5)(\bar z+5) = 16$ o $|z+5| = 4$.

(*b*) La desigualdad dada es equivalente a $|z-3| < 2\,|z+3|$ o $\sqrt{(x-3)^2+y^2} < 2\sqrt{(x+3)^2+y^2}$. Elevando al cuadrado y simplificando, esto será $x^2+y^2+10x+9 > 0$ o $(x+5)^2+y^2 > 16$, o sea, $|z+5| > 4$.

El conjunto requerido en este caso, se compone de todos los puntos exteriores al círculo de la figura 1-36.

49. Dados los conjuntos A y B representados por $|z-1| < 3$ y $|z-2i| < 2$ respectivamente. Representar geométricamente, (*a*) $A \cap B$ o AB, (*b*) $A \cup B$ o $A + B$.

Los conjuntos de puntos requeridos, están sombreados en las figuras 1-37 y 1-38 respectivamente.

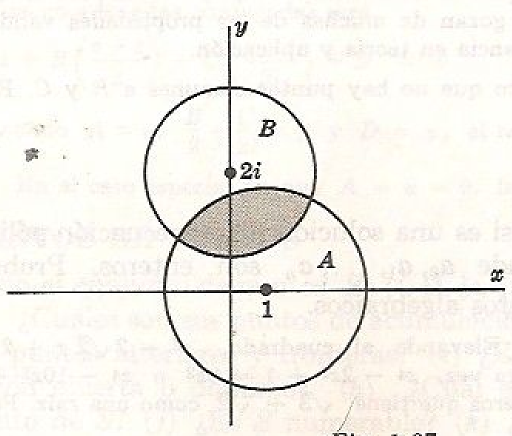


Fig. 1-37

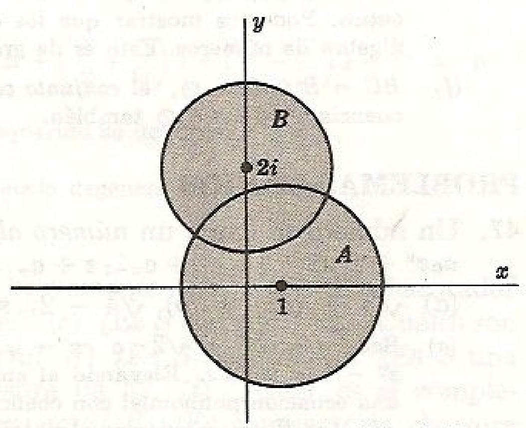


Fig. 1-38

50. Resolver $z^2(1-z^2) = 16$.

Método 1. La ecuación puede escribirse $z^4 - z^2 + 16 = 0$ o sea $z^4 + 8z^2 + 16 - 9z^2 = 0$, $(z^2+4)^2 - 9z^2 = 0$ o $(z^2+4+3z)(z^2+4-3z) = 0$. Entonces, las soluciones requeridas son las soluciones de $z^2 + 3z + 4 = 0$ y $z^2 - 3z + 4 = 0$ o $-\frac{3}{2} \pm \frac{\sqrt{7}}{2}i$ y $\frac{3}{2} \pm \frac{\sqrt{7}}{2}i$.

Método 2. Sea $w = z^2$, la ecuación puede escribirse $w^2 - w + 16 = 0$ y $w = \frac{1}{2} \pm \frac{3}{2}\sqrt{7}\,i$. Para obtener soluciones de $z^2 = \frac{1}{2} \pm \frac{3}{2}\sqrt{7}\,i$, los métodos del problema 30 se pueden aplicar.

51. Si z_1, z_2, z_3 representan vértices de un triángulo equilátero, probar que

$$z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 = z_1z_2 + z_2z_3 + z_3z_1$$

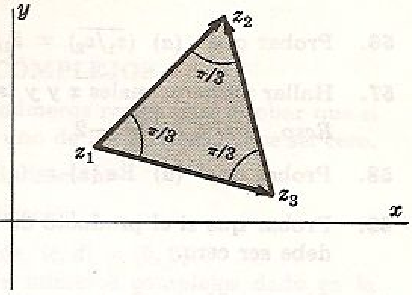


Fig 1-39

De la figura 1-39 vemos que

$$z_2 - z_1 = e^{\pi i/3}(z_3 - z_1)$$
$$z_1 - z_3 = e^{\pi i/3}(z_2 - z_3)$$

Entonces dividiendo, $\dfrac{z_2 - z_1}{z_1 - z_3} = \dfrac{z_3 - z_1}{z_2 - z_3}$ o

$$z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 = z_1z_2 + z_2z_3 + z_3z_1$$

52. Probar que para $m = 2, 3, \ldots$

$$\operatorname{sen}\frac{\pi}{m}\operatorname{sen}\frac{2\pi}{m}\operatorname{sen}\frac{3\pi}{m}\cdots\operatorname{sen}\frac{(m-1)\pi}{m} = \frac{m}{2^{m-1}}$$

Las raíces de $z^m = 1$ son $z = 1, e^{2\pi i/m}, e^{4\pi i/m}, \ldots, e^{2(m-1)\pi i/m}$. Entonces, podemos escribir

$$z^m - 1 = (z-1)(z - e^{2\pi i/m})(z - e^{4\pi i/m})\cdots(z - e^{2(m-1)\pi i/m})$$

Dividiendo ambos lados por $z - 1$ y después haciendo $z = 1$ (dese cuenta que $(z^m - 1)/(z - 1) = 1 + z + z^2 + \cdots + z^{m-1}$) hallamos

$$m = (1 - e^{2\pi i/m})(1 - e^{4\pi i/m})\cdots(1 - e^{2(m-1)\pi i/m}) \qquad (1)$$

Tomando el conjugado complejo de ambos lados de (*1*), obtenemos

$$m = (1 - e^{-2\pi i/m})(1 - e^{-4\pi i/m})\cdots(1 - e^{-2(m-1)\pi i/m}) \qquad (2)$$

Multiplicando (*1*) por (*2*) aplicando $(1 - e^{2k\pi i/m})(1 - e^{-2k\pi i/m}) = 2 - 2\cos(2k\pi/m)$, tenemos

$$m^2 = 2^{m-1}\left(1 - \cos\frac{2\pi}{m}\right)\left(1 - \cos\frac{4\pi}{m}\right)\cdots\left(1 - \cos\frac{2(m-1)\pi}{m}\right) \qquad (3)$$

Puesto que $1 - \cos(2k\pi/m) = 2\operatorname{sen}^2(k\pi/m)$, (*3*) será

$$m^2 = 2^{2m-2}\operatorname{sen}^2\frac{\pi}{m}\operatorname{sen}^2\frac{2\pi}{m}\cdots\operatorname{sen}^2\frac{(m-1)\pi}{m} \qquad (4)$$

Después, tomando la raíz cuadrada positiva de ambos lados, obtenemos el resultado exigido.

Problemas propuestos

OPERACIONES FUNDAMENTALES CON NUMEROS COMPLEJOS

53. Efectuar cada una de las operaciones indicadas:

(*a*) $(4 - 3i) + (2i - 8)$

(*b*) $3(-1 + 4i) - 2(7 - i)$

(*c*) $(3 + 2i)(2 - i)$

(*d*) $(i - 2)\{2(1 + i) - 3(i - 1)\}$

(*e*) $\dfrac{2 - 3i}{4 - i}$

(*f*) $(4 + i)(3 + 2i)(1 - i)$

(*g*) $\dfrac{(2 + i)(3 - 2i)(1 + 2i)}{(1 - i)^2}$

(*h*) $(2i - 1)^2\left\{\dfrac{4}{1 - i} + \dfrac{2 - i}{1 + i}\right\}$

(*i*) $\dfrac{i^4 + i^9 + i^{16}}{2 - i^5 + i^{10} - i^{15}}$

(*j*) $3\left(\dfrac{1 + i}{1 - i}\right)^2 - 2\left(\dfrac{1 - i}{1 + i}\right)^3$

Resp. (*a*) $-4 - i$ (*b*) $-17 + 14i$ (*c*) $8 + i$ (*d*) $-9 + 7i$ (*e*) $11/17 - (10/17)i$ (*f*) $21 + i$ (*g*) $-15/2 + 5i$ (*h*) $-11/2 - (23/2)i$ (*i*) $2 + i$ (*j*) $-3 - 2i$

54. Si $z_1 = 1 - i$, $z_2 = -2 + 4i$, $z_3 = \sqrt{3} - 2i$, hallar el valor numérico de cada una de las siguientes expresiones

(*a*) $z_1^2 + 2z_1 - 3$

(*b*) $|2z_2 - 3z_1|^2$

(*c*) $(z_3 - \bar{z}_3)^5$

(*d*) $|z_1\bar{z}_2 + z_2\bar{z}_1|$

(*e*) $\left|\dfrac{z_1 + z_2 + 1}{z_1 - z_2 + i}\right|$

(*f*) $\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{z_3}{\bar{z}_3} + \dfrac{\bar{z}_3}{z_3}\right)$

(*g*) $\overline{(z_2 + z_3)(z_1 - z_3)}$

(*h*) $|z_1^2 + \bar{z}_2^2|^2 + |\bar{z}_3^2 - z_2^2|^2$

(*i*) $\operatorname{Re}\{2z_1^3 + 3z_2^2 - 5z_3^2\}$

(*j*) $\operatorname{Im}\{z_1z_2/z_3\}$

Resp. (*a*) $-1-4i$ (*c*) $1024i$ (*e*) $3/5$ (*g*) $-7+3\sqrt{3}+\sqrt{3}\,i$ (*i*) -35
(*b*) 170 (*d*) 12 (*f*) $-1/7$ (*h*) $765+128\sqrt{3}$ (*j*) $(6\sqrt{3}+4)/7$

55. Probar que (*a*) $(\overline{z_1 z_2}) = \bar{z}_1\bar{z}_2$, (*b*) $(\overline{z_1 z_2 z_3}) = \bar{z}_1\bar{z}_2\bar{z}_3$. Generalice estos resultados.

56. Probar que (*a*) $(\overline{z_1/z_2}) = \bar{z}_1/\bar{z}_2$, (*b*) $|z_1/z_2| = |z_1|/|z_2|$ si $z_2 \neq 0$.

57. Hallar números reales x y y tales que $2x - 3iy + 4ix - 2y - 5 - 10i = (x+y+2) - (y-x+3)i$.
Resp. $x = 1,\ y = -2$

58. Probar que (*a*) $\text{Re}\{z\} = (z+\bar{z})/2$, (*b*) $\text{Im}\{z\} = (z-\bar{z})/2i$.

59. Probar que si el producto de dos números complejos es cero, entonces por lo menos uno de los números debe ser cero.

60. Si $w = 3iz - z^2$ y $z = x + iy$, hallar $|w|^2$ en términos de x y y.
Resp. $x^4 + y^4 + 2x^2y^2 - 6x^2y - 6y^3 + 9x^2 + 9y^2$

REPRESENTACION GRAFICA DE NUMEROS COMPLEJOS. VECTORES

61. Efectuar las operaciones indicadas analítica y gráficamente.
(*a*) $(2+3i)+(4-5i)$ (*c*) $3(1+2i)-2(2-3i)$ (*e*) $\frac{1}{2}(4-3i)+\frac{3}{2}(5+2i)$
(*b*) $(7+i)-(4-2i)$ (*d*) $3(1+i)+2(4-3i)-(2+5i)$
Resp. (*a*) $6-2i$, (*b*) $3+3i$, (*c*) $-1+12i$, (*d*) $9-8i$, (*e*) $19/2+(3/2)i$

62. Si z_1, z_2 y z_3 son los vectores indicados en la figura 1-40, construir gráficamente
(*a*) $2z_1 + z_3$ (*c*) $z_1 + (z_2 + z_3)$ (*e*) $\frac{1}{3}z_2 - \frac{3}{4}z_1 + \frac{2}{3}z_3$
(*b*) $(z_1+z_2)+z_3$ (*d*) $3z_1 - 2z_2 + 5z_3$

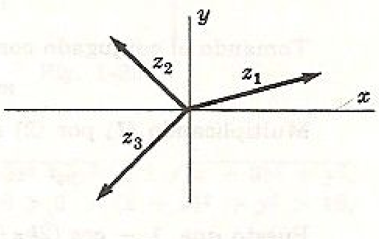


Fig. 1-40

63. Si $z_1 = 4-3i$ y $z_2 = -1+2i$, obtener gráfica y analíticamente (*a*) $|z_1+z_2|$, (*b*) $|z_1-z_2|$, (*c*) $\bar{z}_1 - \bar{z}_2$, (*d*) $|2\bar{z}_1 - 3\bar{z}_2 - 2|$.
Resp. (*a*) $\sqrt{10}$, (*b*) $5\sqrt{2}$, (*c*) $5+5i$, (*d*) 15

64. Los vectores posición de los puntos A, B y C del triángulo ABC están dados por $z_1 = 1+2i$, $z_2 = 4-2i$ y $z_3 = 1-6i$ respectivamente. Probar que ABC es un triángulo isósceles y encontrar las longitudes de los lados. *Resp.* 5, 5, 8

65. Sea z_1, z_2, z_3, z_4 los vectores posición de los vértices del cuadrilátero $ABCD$. Probar que $ABCD$ es un paralelogramo si y solamente si $z_1 - z_2 - z_3 + z_4 = 0$.

66. Si las diagonales de un cuadrilátero se bisecan, probar que el cuadrilátero es un paralelogramo.

67. Probar que las medianas de un triángulo se interceptan en un punto.

68. Sea $ABCD$ un cuadrilátero y E, F, G, H los puntos medios de los lados. Probar que $EFGH$ es un paralelogramo.

69. En el paralelogramo $ABCD$, el punto E biseca el lado AD. Probar que el punto donde BE se intercepta con AC divide en tres partes iguales a AC.

70. Los vectores posición de los puntos A y B son $2+i$ y $3-2i$ respectivamente. (*a*) Hallar una ecuación para la recta AB. (*b*) Hallar una ecuación para la recta perpendicular a AB en su punto medio.
Resp. (*a*) $z-(2+i) = t(1-3i)$ o $x = 2+t,\ y = 1-3t$ o $3x+y = 7$
(*b*) $z-(5/2-i/2) = t(3+i)$ o $x = 3t+5/2,\ y = t-1/2$ o $x-3y = 4$

71. Describir y construir la gráfica del lugar representado por cada una de las ecuaciones siguientes, (*a*) $|z-i| = 2$, (*b*) $|z+2i|+|z-2i| = 6$, (*c*) $|z-3|-|z+3| = 4$, (*d*) $z(\bar{z}+2) = 3$, (*e*) $\text{Im}\{z^2\} = 4$.
Resp. (*a*) circunferencia, (*b*) elipse, (*c*) hipérbola, (*d*) círculo, (*e*) hipérbola

72. Hallar una ecuación para (*a*) una circunferencia de radio 2 con centro en $(-3, 4)$, (*b*) una elipse con foco en $(0, 2)$ y $(0, -2)$ cuyo eje mayor tenga longitud 10.
Resp. (*a*) $|z+3-4i| = 2$ o $(x+3)^2+(y-4)^2 = 4$, (*b*) $|z+2i|+|z-2i| = 10$

73. Describir gráficamente la región representada por cada una de las siguientes desigualdades:
(*a*) $1 < |z+i| \leqq 2$, (*b*) $\operatorname{Re}\{z^2\} > 1$, (*c*) $|z+3i| > 4$, (*d*) $|z+2-3i| + |z-2+3i| < 10$.

74. Demostrar que la elipse $|z+3| + |z-3| = 10$ se puede representar en forma rectangular como $x^2/25 + y^2/16 = 1$ (véase el problema 13(*b*)).

FUNDAMENTOS AXIOMATICOS DEL SISTEMA DE NUMEROS COMPLEJOS

75. Emplear la definición de número complejo como pareja ordenada de números reales para probar que si el producto de dos números complejos es cero, entonces por lo menos uno de los números debe ser cero.

76. Probar las leyes conmutativas con respecto a la, (*a*) suma, (*b*) multiplicación.

77. Probar las leyes asociativas con respecto a la, (*a*) suma, (*b*) multiplicación.

78. (*a*) Hallar números reales x y y tales que $(c, d)\cdot(x, y) = (a, b)$ donde $(c, d) \neq (0, 0)$.
(*b*) ¿Cuál es la relación de (x, y) con el resultado para división de números complejos dado en la página 2?

79. Probar que
$$(\cos\theta_1, \operatorname{sen}\theta_1)(\cos\theta_2, \operatorname{sen}\theta_2)\cdots(\cos\theta_n, \operatorname{sen}\theta_n) = (\cos[\theta_1+\theta_2+\cdots+\theta_n], \operatorname{sen}[\theta_1+\theta_2+\cdots+\theta_n])$$

80. (*a*) ¿Cómo definiría usted $(a, b)^{1/n}$ donde n es un entero positivo?
(*b*) Determinar $(a, b)^{1/2}$ en términos de a y b.

FORMA POLAR DE LOS NUMEROS COMPLEJOS

81. Expresar cada uno de los siguientes números complejos en forma polar.
(*a*) $2-2i$, (*b*) $-1+\sqrt{3}\,i$, (*c*) $2\sqrt{2}+2\sqrt{2}\,i$, (*d*) $-i$, (*e*) -4, (*f*) $-2\sqrt{3}-2i$, (*g*) $\sqrt{2}\,i$, (*h*) $\sqrt{3}/2 - 3i/2$.
Resp. (*a*) $2\sqrt{2}\operatorname{cis}315°$ o $2\sqrt{2}\,e^{7\pi i/4}$, (*b*) $2\operatorname{cis}120°$ o $2e^{2\pi i/3}$, (*c*) $4\operatorname{cis}45°$ o $4e^{\pi i/4}$, (*d*) $\operatorname{cis}270°$ o $e^{3\pi i/2}$, (*e*) $4\operatorname{cis}180°$ o $4e^{\pi i}$, (*f*) $4\operatorname{cis}210°$ o $4e^{7\pi i/6}$, (*g*) $\sqrt{2}\operatorname{cis}90°$ o $\sqrt{2}\,e^{\pi i/2}$, (*h*) $\sqrt{3}\operatorname{cis}300°$ o $\sqrt{3}\,e^{5\pi i/3}$.

82. Demostrar que $2+i = \sqrt{5}\,e^{i\tan^{-1}(1/2)}$.

83. Expresar en forma polar (*a*) $-3-4i$, (*b*) $1-2i$.
Resp. (*a*) $5\,e^{i(\pi+\tan^{-1}4/3)}$, (*b*) $\sqrt{5}\,e^{-i\tan^{-1}2}$

84. Construir la gráfica y expresar en forma rectangular.
(*a*) $6(\cos 135° + i\operatorname{sen}135°)$, (*b*) $12\operatorname{cis}90°$, (*c*) $4\operatorname{cis}315°$, (*d*) $2e^{5\pi i/4}$, (*e*) $5e^{7\pi i/6}$, (*f*) $3e^{-2\pi i/3}$.
Resp. (*a*) $-3\sqrt{2}+3\sqrt{2}\,i$, (*b*) $12i$, (*c*) $2\sqrt{2}-2\sqrt{2}\,i$, (*d*) $-\sqrt{2}-\sqrt{2}\,i$, (*e*) $-5\sqrt{3}/2-(5/2)i$, (*f*) $-3\sqrt{3}/2-(3/2)i$

85. Un aeroplano viaja 150 km en dirección sudeste, 100 km en dirección directa al oeste, 225 km 30° hacia el noreste y después, 200 km hacia el noreste. Determinar, (*a*) analíticamente, y (*b*) gráficamente a qué distancia y en qué dirección está él de su punto de partida.

Resp. 375 km, 23° al noreste (aproximadamente).

86. Tres fuerzas, como se muestra en la figura 1-41, actúan en un plano sobre un objeto colocado en O. Determinar, (*a*) gráficamente, y (*b*) analíticamente, qué fuerza es necesaria para evitar un movimiento del objeto. (Esta fuerza es algunas veces llamada, fuerza *equilibrante*.)

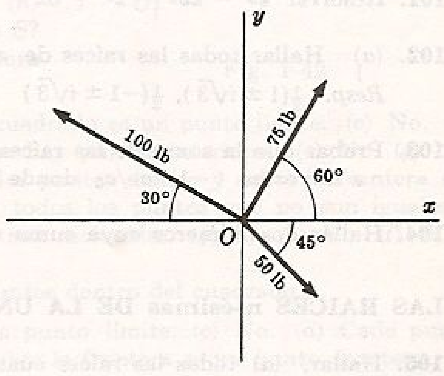


Fig. 1-41

87. Probar que sobre el círculo $z = Re^{i\theta}$, $|e^{iz}| = e^{-R\operatorname{sen}\theta}$.

88. (*a*) Probar que $r_1e^{i\theta_1} + r_2e^{i\theta_2} = r_3e^{i\theta_3}$ donde
$$r_3 = \sqrt{r_1^2 + r_2^2 + 2r_1r_2\cos(\theta_1-\theta_2)}$$
$$\theta_3 = \tan^{-1}\left(\frac{r_1\operatorname{sen}\theta_1 + r_2\operatorname{sen}\theta_2}{r_1\cos\theta_1 + r_2\cos\theta_2}\right)$$
(*b*) Generalice el resultado en (*a*).

EL TEOREMA DE DE MOIVRE

89. Hallar el valor numérico de cada una de las siguientes expresiones:
(*a*) $(5\operatorname{cis}20°)(3\operatorname{cis}40°)$
(*b*) $(2\operatorname{cis}50°)^6$
(*c*) $\dfrac{(8\operatorname{cis}40°)^3}{(2\operatorname{cis}60°)^4}$ (*d*) $\dfrac{(3e^{\pi i/6})(2e^{-5\pi i/4})(6e^{5\pi i/3})}{(4e^{2\pi i/3})^2}$ (*e*) $\left(\dfrac{\sqrt{3}-i}{\sqrt{3}+i}\right)^4\left(\dfrac{1+i}{1-i}\right)^5$

Resp. (*a*) $15/2 + (15\sqrt{3}/2)i$, (*b*) $32 - 32\sqrt{3}\,i$, (*c*) $-16 - 16\sqrt{3}\,i$, (*d*) $3\sqrt{3}/2 - (3\sqrt{3}/2)i$, (*e*) $-\sqrt{3}/2 - (1/2)i$

90. Probar que, (*a*) $\operatorname{sen} 3\theta = 3 \operatorname{sen} \theta - 4 \operatorname{sen}^3 \theta$, (*b*) $\cos 3\theta = 4 \cos^3 \theta - 3 \cos \theta$.

91. Probar que las soluciones de $z^4 - 3z^2 + 1 = 0$ están dadas por $z = 2\cos 36°, 2\cos 72°, 2\cos 216°, 2\cos 252°$.

92. Demostrar que (*a*) $\cos 36° = (\sqrt{5} + 1)/4$, (*b*) $\cos 72° = (\sqrt{5} - 1)/4$. (*Sugerencia:* Use problema 91.)

93. Probar que (*a*) $\dfrac{\operatorname{sen} 4\theta}{\operatorname{sen} \theta} = 8\cos^3\theta - 4 = 2\cos 3\theta + 6\cos\theta - 4$

(*b*) $\cos 4\theta = 8 \operatorname{sen}^4\theta - 8\operatorname{sen}^2\theta + 1$

94. Probar el teorema de De Moivre para, (*a*) enteros negativos, (*b*) números racionales.

RAICES DE NUMEROS COMPLEJOS

95. Hallar cada una de las raíces indicadas y localizarlas gráficamente.

(*a*) $(2\sqrt{3} - 2i)^{1/2}$, (*b*) $(-4 + 4i)^{1/5}$, (*c*) $(2 + 2\sqrt{3}\,i)^{1/3}$, (*d*) $(-16i)^{1/4}$, (*e*) $(64)^{1/6}$, (*f*) $(i)^{2/3}$.

Resp. (*a*) 2 cis 165°, 2 cis 345°. (*b*) $\sqrt{2}$ cis 27°, $\sqrt{2}$ cis 99°, $\sqrt{2}$ cis 171°, $\sqrt{2}$ cis 243°, $\sqrt{2}$ cis 315°. (*c*) $\sqrt[3]{4}$ cis 20°, $\sqrt[3]{4}$ cis 140°, $\sqrt[3]{4}$ cis 260°. (*d*) 2 cis 67,5°, 2 cis 157,5°, 2 cis 247,5°, 2 cis 337,5°. (*e*) 2 cis 0°, 2 cis 60°, 2 cis 120°, 2 cis 180°, 2 cis 240°, 2 cis 300°. (*f*) cis 60°, cis 180°, cis 300°.

96. Hallar todas las raíces indicadas y localizarlas en el plano complejo.
(*a*) Raíces cúbicas de 8, (*b*) raíces cuadradas de $4\sqrt{2} + 4\sqrt{2}\,i$, (*c*) raíces quintas de $-16 + 16\sqrt{3}\,i$, (*d*) raíces sextas de $-27i$.

Resp. (*a*) 2 cis 0°, 2 cis 120°, 2 cis 240°. (*b*) $\sqrt{8}$ cis 22.5°, $\sqrt{8}$ cis 202.5°. (*c*) 2 cis 48°, 2 cis 120°, 2 cis 192°, 2 cis 264°, 2 cis 336°. (*d*) $\sqrt{3}$ cis 45°, $\sqrt{3}$ cis 105°, $\sqrt{3}$ cis 165°, $\sqrt{3}$ cis 225°, $\sqrt{3}$ cis 285°, $\sqrt{3}$ cis 345°.

97. Resolver las ecuaciones (*a*) $z^4 + 81 = 0$, (*b*) $z^6 + 1 = \sqrt{3}\,i$.

Resp. (*a*) 3 cis 45°, 3 cis 135°, 3 cis 225°, 3 cis 315°
(*b*) $\sqrt[6]{2}$ cis 40°, $\sqrt[6]{2}$ cis 100°, $\sqrt[6]{2}$ cis 160°, $\sqrt[6]{2}$ cis 220°, $\sqrt[6]{2}$ cis 280°, $\sqrt[6]{2}$ cis 340°

98. Hallar las raíces cuadradas de (*a*) $5 - 12i$, (*b*) $8 + 4\sqrt{5}\,i$.

Resp. (*a*) $3 - 2i$, $-3 + 2i$. (*b*) $\sqrt{10} + \sqrt{2}\,i$, $-\sqrt{10} - \sqrt{2}\,i$

99. Hallar las raíces cúbicas de $-11 - 2i$. *Resp.* $1 + 2i$, $\frac{1}{2} - \sqrt{3} + (1 + \frac{1}{2}\sqrt{3})i$, $-\frac{1}{2} - \sqrt{3} + (\frac{1}{2}\sqrt{3} - 1)i$

ECUACIONES POLINOMIALES

100. Resolver las siguientes ecuaciones, obteniendo todas las raíces: (*a*) $5z^2 + 2z + 10 = 0$, (*b*) $z^2 + (i - 2)z + (3 - i) = 0$. *Resp.* (*a*) $(-1 \pm 7i)/5$, (*b*) $1 + i$, $1 - 2i$

101. Resolver $z^5 - 2z^4 - z^3 + 6z - 4 = 0$. *Resp.* $1, 1, 2, -1 \pm i$

102. (*a*) Hallar todas las raíces de $z^4 + z^2 + 1 = 0$, y (*b*) localizarlas en el plano complejo.

Resp. $\frac{1}{2}(1 \pm i\sqrt{3})$, $\frac{1}{2}(-1 \pm i\sqrt{3})$

103. Probar que la suma de las raíces de $a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + a_2 z^{n-2} + \cdots + a_n = 0$ donde $a_0 \neq 0$ tomada r a la vez es $(-1)^r a_r/a_0$ donde $0 < r < n$.

104. Hallar dos números cuya suma es 4 y cuyo producto es 8. *Resp.* $2 + 2i$, $2 - 2i$

LAS RAICES n-ésimas DE LA UNIDAD

105. Hallar, (*a*) todas las raíces cuartas, (*b*) las raíces séptimas de la unidad y mostrarlas gráficamente.

Resp. (*a*) $e^{2\pi ik/4} = e^{\pi ik/2}$, $k = 0, 1, 2, 3$ (*b*) $e^{2\pi ik/7}$, $k = 0, 1, \ldots, 6$

106. (*a*) Probar que $1 + \cos 72° + \cos 144° + \cos 216° + \cos 288° = 0$.
(*b*) Dar una interpretación gráfica del resultado en (*a*).

107. Probar que $\cos 36° + \cos 72° + \cos 108° + \cos 144° = 0$ e interpretar gráficamente.

108. Probar que la suma de los productos de todas las raíces n-ésimas de la unidad, tomadas 2, 3, 4, ..., $(n-1)$ a la vez, es cero.

109. Hallar todas las raíces de $(1+z)^5 = (1-z)^5$.

Resp. $0, (\omega-1)/(\omega+1), (\omega^2-1)/(\omega^2+1), (\omega^3-1)/(\omega^3+1), (\omega^4-1)/(\omega^4+1)$, donde $\omega = e^{2\pi i/5}$

EL PRODUCTO VECTORIAL Y ESCALAR

110. Si $z_1 = 2+5i$ y $z_2 = 3-i$, hallar (*a*) $z_1 \circ z_2$, (*b*) $z_1 \times z_2$, (*c*) $z_2 \circ z_1$, (*d*) $z_2 \times z_1$, (*e*) $|z_1 \circ z_2|$, (*f*) $|z_2 \circ z_1|$, (*g*) $|z_1 \times z_2|$, (*h*) $|z_2 \times z_1|$.

Resp. (*a*) 1, (*b*) -17, (*c*) 1, (*d*) 17, (*e*) 1, (*f*) 1, (*g*) 17, (*h*) 17

111. Probar que (*a*) $z_1 \circ z_2 = z_2 \circ z_1$, (*b*) $z_1 \times z_2 = -z_2 \times z_1$.

112. Si $z_1 = r_1 e^{i\theta_1}$ y $z_2 = r_2 e^{i\theta_2}$, probar que (*a*) $z_1 \circ z_2 = r_1 r_2 \cos(\theta_2 - \theta_1)$, (*b*) $z_1 \times z_2 = r_1 r_2 \operatorname{sen}(\theta_2 - \theta_1)$.

113. Probar que (*a*) $z_1 \circ (z_2 + z_3) = z_1 \circ z_2 + z_1 \circ z_3$, (*b*) $z_1 \times (z_2 + z_3) = z_1 \times z_2 + z_1 \times z_3$.

114. Hallar el área de un triángulo con vértices en $-4-i$, $1+2i$, $4-3i$. *Resp.* 17

115. Hallar el área de un cuadrilátero de vértices $(2,-1)$, $(4,3)$, $(-1,2)$ y $(-3,-2)$. *Resp.* 18

COORDENADAS CONJUGADAS

116. Describir cada uno de los siguientes lugares geométricos expresándolos en términos de las coordenadas conjugadas $z, \bar{z}$.

(*a*) $z\bar{z} = 16$, (*b*) $z\bar{z} - 2z - 2\bar{z} + 8 = 0$, (*c*) $z + \bar{z} = 4$, (*d*) $\bar{z} = z + 6i$.

Resp. (*a*) $x^2 + y^2 = 16$, (*b*) $x^2 + y^2 - 4x + 8 = 0$, (*c*) $x = 2$, (*d*) $y = -3$

117. Escribir cada una de las siguientes ecuaciones en términos de las coordenadas conjugadas.

(*a*) $(x-3)^2 + y^2 = 9$, (*b*) $2x - 3y = 5$, (*c*) $4x^2 + 16y^2 = 25$.

Resp. (*a*) $(z-3)(\bar{z}-3) = 9$, (*b*) $(2i-3)z + (2i+3)\bar{z} = 10i$, (*c*) $3(z^2+\bar{z}^2) - 10z\bar{z} + 25 = 0$

CONJUNTOS DE PUNTOS

118. Sea S el conjunto de todos los puntos $a+bi$, donde a y b son números racionales, que están dentro del cuadro que aparece sombreado en la figura 1-42. (*a*) ¿Es S acotado? (*b*) ¿Cuáles son los puntos límites de S, si existen? (*c*) ¿Es S cerrado? (*d*) ¿Cuáles son sus puntos interiores y fronteras? (*e*) ¿Es S abierto? (*f*) ¿Es S conexo? (*g*) ¿Es S una región abierta o dominio? (*h*) ¿Cuál es la clausura de S? (*i*) ¿Cuál es el complemento de S? (*j*) ¿Es S numerable? (*k*) ¿Es S compacto? (*l*) ¿Es la clausura de S compacta?

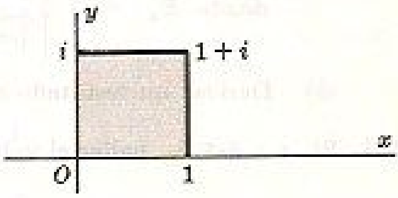


Fig. 1-42

Resp. (*a*) Sí. (*b*) Cada punto dentro o sobre la frontera del cuadrado es un punto límite. (*c*) No. (*d*) Todos los puntos del cuadrado son puntos fronteras; no hay puntos interiores. (*e*) No. (*f*) No. (*g*) No. (*h*) La clausura de S es el conjunto de todos los puntos dentro y sobre la frontera del cuadrado. (*i*) El complemento de S es el conjunto de todos los puntos que no son iguales a $a+bi$ cuando a y b (donde $0<a<1$, $0<b<1$) son racionales. (*j*) Sí. (*k*) No. (*l*) Sí.

119. Responder el problema 118 si S es el conjunto de todos los puntos dentro del cuadrado.

Resp. (*a*) Sí. (*b*) Cada punto dentro o sobre el cuadrado es punto límite. (*c*) No. (*d*) Cada punto dentro es un punto interior, mientras que cada punto sobre la frontera es un punto frontera. (*e*) Sí. (*f*) Sí. (*g*) Sí. (*h*) La clausura de S es el conjunto de todos los puntos dentro y sobre la frontera del cuadrado. (*i*) El complemento de S es el conjunto de todos los puntos exteriores al cuadrado sobre su frontera. (*j*) No. (*l*) Sí.

120. Responder el problema 118 si S es el conjunto de todos los puntos dentro o sobre el cuadrado.

Resp. (*a*) Sí. (*b*) Cada punto de S es un punto límite. (*c*) Sí. (*d*) Cada punto dentro del cuadrado es un punto interior, mientras que cada punto sobre la frontera es un punto frontera. (*e*) No.

140. Hallar una ecuación para el círculo que pasa al través de los puntos $1 - i, 2i, 1 + i$.
Resp. $|z + 1| = \sqrt{5}$ o $(x + 1)^2 + y^2 = 5$

141. Demostrar que el lugar de z tal que $|z - a|\,|z + a| = a^2$, $a > 0$ es una *lemniscata* como la de la figura 1-43.

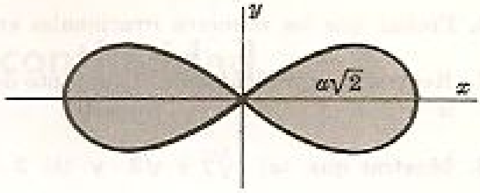


Fig. 1-43

142. Sea $p_n = a_n^2 + b_n^2$, $n = 1, 2, 3, \ldots$ donde a_n y b_n son enteros positivos. Probar que para cada entero positivo M podemos siempre encontrar enteros positivos A y B tales que $p_1 p_2 \cdots p_M = A^2 + B^2$. (Ejemplo: Si $5 = 2^2 + 1^2$ y $25 = 3^2 + 4^2$, entonces $5 \cdot 25 = 2^2 + 11^2$.)

143. Probar que

(*a*) $\cos\theta + \cos(\theta + \alpha) + \cdots + \cos(\theta + n\alpha) = \dfrac{\operatorname{sen}\frac{1}{2}(n+1)\alpha}{\operatorname{sen}\frac{1}{2}\alpha}\cos(\theta + \tfrac{1}{2}n\alpha)$

(*b*) $\operatorname{sen}\theta + \operatorname{sen}(\theta + \alpha) + \cdots + \operatorname{sen}(\theta + n\alpha) = \dfrac{\operatorname{sen}\frac{1}{2}(n+1)\alpha}{\operatorname{sen}\frac{1}{2}\alpha}\operatorname{sen}(\theta + \tfrac{1}{2}n\alpha)$

144. Probar que (*a*) $\operatorname{Re}\{z\} > 0$ y (*b*) $|z - 1| < |z + 1|$ son proposiciones equivalentes.

145. Una rueda con radio 4 pies (Fig. 1-44) está volteando en sentido contrario al movimiento de las manecillas del reloj alrededor de un eje que pasa por su centro, 30 revoluciones por minuto. (*a*) Mostrar que la posición y velocidad de cualquier punto P sobre la rueda, están dados respectivamente por $4e^{i\pi t}$ y $4\pi i e^{i\pi t}$, donde t es el tiempo en segundos, medido desde el instante cuando P estaba sobre el eje x positivo. (*b*) Hallar la posición y velocidad cuando $t = 2/3$ y $t = 15/4$.

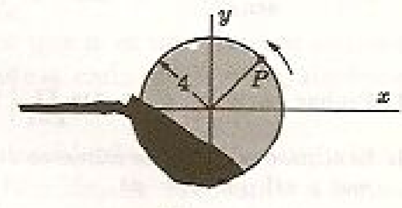


Fig. 1-44

146. Probar que para un entero $m > 1$,

$$(z + a)^{2m} - (z - a)^{2m} = 4maz \prod_{k=1}^{m-1} \{z^2 + a^2 \cot^2(k\pi/2m)\}$$

donde $\prod\limits_{k=1}^{m-1}$ denota el producto de todos los factores indicados desde $k = 1$ a $m - 1$.

147. Si los puntos P_1 y P_2 representados por z_1 y z_2 respectivamente, son tales que $|z_1 + z_2| = |z_1 - z_2|$, probar que, (*a*) z_1/z_2 es un número imaginario puro, (*b*) $\angle P_1 O P_2 = 90°$.

148. Probar que para un entero $m > 1$,

$$\cot\frac{\pi}{2m}\cot\frac{2\pi}{2m}\cot\frac{3\pi}{2m}\cdots\cot\frac{(m-1)\pi}{2m} = 1$$

149. Probar y generalizar:
(*a*) $\csc^2(\pi/7) + \csc^2(2\pi/7) + \csc^2(4\pi/7) = 2$
(*b*) $\tan^2(\pi/16) + \tan^2(3\pi/16) + \tan^2(5\pi/16) + \tan^2(7\pi/16) = 28$

150. Si masas m_1, m_2, m_3 están localizadas en puntos z_1, z_2, z_3 respectivamente, probar que el centro de masa está dado por

$$\hat{z} = \frac{m_1 z_1 + m_2 z_2 + m_3 z_3}{m_1 + m_2 + m_3}$$

Generalice a n masas.

151. Encontrar el punto sobre la recta que une los puntos z_1 y z_2 que la divide en la razón $p{:}q$.
Resp. $(qz_1 + pz_2)/(q + p)$

152. Mostrar que una ecuación para una circunferencia que pasa por 3 puntos z_1, z_2, z_3 está dada por

$$\left(\frac{z - z_1}{z - z_2}\right)\bigg/\left(\frac{z_3 - z_1}{z_3 - z_2}\right) = \left(\frac{\bar{z} - \bar{z}_1}{\bar{z} - \bar{z}_2}\right)\bigg/\left(\frac{\bar{z}_3 - \bar{z}_1}{\bar{z}_3 - \bar{z}_2}\right)$$

153. Probar que las medianas de un triángulo con vértices en z_1, z_2, z_3 se cortan en el punto $\frac{1}{3}(z_1 + z_2 + z_3)$.

154. Probar que los números racionales entre 0 y 1 son numerables.

(*Sugerencia*: arreglar los números como $0, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{4}, \frac{3}{4}, \frac{1}{5}, \frac{2}{5}, \frac{3}{5}, \ldots$.)

155. Probar que todos los números reales racionales son numerables.

156. Probar que los números irracionales entre 0 y 1 no son numerables.

157. Representar gráficamente el conjunto de valores de z para los cuales (*a*) $|z| > |z-1|$, (*b*) $|z+2| > 1 + |z-2|$.

158. Mostrar que (*a*) $\sqrt[3]{2} + \sqrt{3}$ y (*b*) $2 - \sqrt{2}\,i$ son números algebraicos.

159. Probar que $\sqrt{2} + \sqrt{3}$ es un número irracional.

160. Sea $ABCD\cdots PQ$ un polígono regular de n lados inscrito en una circunferencia de radio unidad. Probar que el producto de las longitudes de las diagonales $AC, AD, \ldots, AP$ es $\frac{1}{4}n \csc^2(\pi/n)$.

161. Probar que si $\operatorname{sen}\theta \neq 0$,

(*a*) $$\frac{\operatorname{sen} n\theta}{\operatorname{sen}\theta} = 2^{n-1}\prod_{k=1}^{n-1}\{\cos\theta - \cos(k\pi/n)\}$$

(*b*) $$\frac{\operatorname{sen}(2n+1)\theta}{\operatorname{sen}\theta} = (2n+1)\prod_{k=1}^{n}\left\{1 - \frac{\operatorname{sen}^2\theta}{\operatorname{sen}^2 k\pi/(2n+1)}\right\}.$$

162. Probar $$\cos 2n\theta = (-1)^n \prod_{k=1}^{n}\left\{1 - \frac{\cos^2\theta}{\cos^2(2k-1)\pi/4n}\right\}.$$

163. Si el producto de dos números complejos z_1 y z_2 es real y diferente de cero, probar que existe un número real p tal que $z_1 = p\bar{z}_2$.

164. Si z es un punto sobre la circunferencia $|z-1| = 1$, probar que $\arg(z-1) = 2\arg z = \frac{2}{3}\arg(z^2 - z)$ y dar una interpretación geométrica.

165. Probar que bajo restricciones convenientes, (*a*) $z^m z^n = z^{m+n}$, (*b*) $(z^m)^n = z^{mn}$.

166. Probar (*a*) $\operatorname{Re}\{z_1 z_2\} = \operatorname{Re}\{z_1\}\operatorname{Re}\{z_2\} - \operatorname{Im}\{z_1\}\operatorname{Im}\{z_2\}$

(*b*) $\operatorname{Im}\{z_1 z_2\} = \operatorname{Re}\{z_1\}\operatorname{Im}\{z_2\} + \operatorname{Im}\{z_1\}\operatorname{Re}\{z_2\}$.

167. Hallar el área del polígono con vértices en $2+3i$, $3+i$, $-2-4i$, $-4-i$, $-1+2i$.
Resp. 47/2

168. Sea $a_1, a_2, \ldots, a_n$ y $b_1, b_2, \ldots, b_n$ números complejos. Probar la *desigualdad de Schwarz*,

$$\left|\sum_{k=1}^{n} a_k b_k\right|^2 \leqq \left(\sum_{k=1}^{n}|a_k|^2\right)\left(\sum_{k=1}^{n}|b_k|^2\right)$$