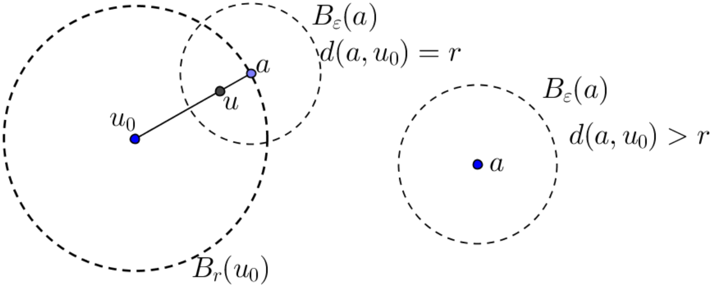
Funciones de varias variables

Definición 93: Sea A un subconjunto de $\mathbb{R}^n$ y sea $u \in \mathbb{R}^n$. Decimos que u es un *punto de acumulación* de A, si para cada $\varepsilon > 0$, $B_\varepsilon(a) - \{a\}$ interseca a A.
Ejemplo 94: Consideremos por ejemplo una bola abierta $A = B_r(u_0)$ en $\mathbb{R}^2$.
Si $d(a, u_0) = r \Rightarrow a$ es un punto de acumulación de A.



Definición 95: Sea $D \subseteq \mathbb{R}^n$ un conjunto no vacío. Y sean

- $f : D \to \mathbb{R}^m$.
- $a \in \mathbb{R}^n$ un punto de acumulación de D

Decimos que existe el *límite cuando u tiende a a de $f(u)$, y que ese límite es L*, y lo

$$\lim_{u \to a} f(u) = L,$$

límite

si para cada $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que si $u \in D$ y $0 < d(u, a) < \delta$, entonces $d(f(u), L) < \varepsilon$.

O sea, $\lim\limits_{u \to a} f(u) = L$ sii

$$u \in (B_\delta(a) - \{a\}) \cap D \;\Rightarrow\; f(u) \in B_\varepsilon(L)$$

o equivalentemente

$$u \in D \text{ y } \; 0 < \|u - a\| < \delta \;\Rightarrow\; \|f(u) - L\| < \varepsilon.$$

Decimos que *f es continua en a* si f está definida en a y

El límite es único.

$$\text{Si} \quad \lim_{u \to u_0} f(u) = L_1 \quad \text{y} \quad \lim_{u \to u_0} f(u) = L_2 \Rightarrow L_1 = L_2.$$

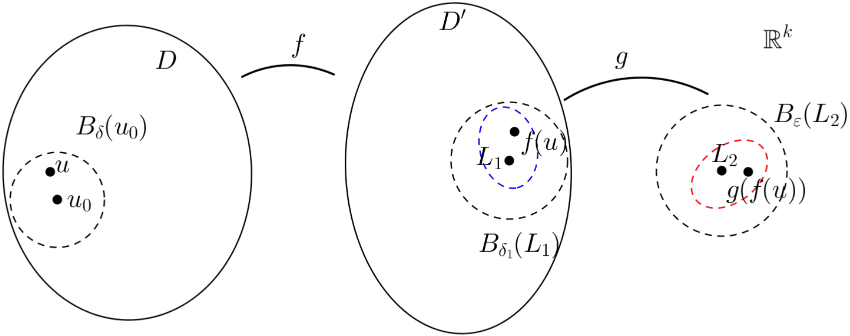
Teorema 100: Álgebra de los límites. Sean $f, g : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ funciones tales que $\lim\limits_{u \to u_0} f(u) = L_1$ y $\lim\limits_{u \to u_0} g(u) = L_2$. Entonces:

1. $\lim\limits_{u \to u_0} (f(u) + g(u)) = L_1 + L_2$.
2. $\lim\limits_{u \to u_0} (\lambda f(u)) = \lambda L_1$, para cualquier $\lambda \in \mathbb{R}$.
3. si $m = 1$, $\lim\limits_{u \to u_0} (f(u)g(u)) = L_1 L_2$ e, inductivamente, para cada $k \in \mathbb{N}$, $\lim\limits_{u \to u_0} (f(u))^k = L_1^k$.
4. si $m = 1$, $L_1 \neq 0$ y $f(u) \neq 0$ para todo u en un abierto que contenga a u_0, excepto tal vez en u_0, entonces $\lim\limits_{u \to u_0} \dfrac{1}{f(u)} = \dfrac{1}{L_1}$.

Tenemos un resultado análogo para las funciones continuas

Teorema 104: Límite de la función compuesta. Sean $f : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ y $g : D' \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^k$ funciones tales que $f(D) \subset D'$. Si existen $\lim_{u \to u_0} f(u) = L$ y g es continua en L, entonces

$$\lim_{u \to u_0} (g \circ f)(u) = g(L).$$



Corolario: Si f es continua en u_0 y g es continua en $f(u_0)$, entonces $g \circ f$ es continua en u_0.

Pregunta: El Teorema 104 vale sin pedir g continua? ¿ Puede reemplazarse esta hipótesis por una menos restrictitva?

Teorema 107: Sea $f : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ una función y sean $f_i = p_i \circ f : D \to \mathbb{R}^m$, $i = 1, \cdots, m$ sus funciones componentes. Entonces f es continua en u_0 si y sólo si todas las funciones componentes f_i son continuas en u_0, para $i = 1, \cdots, m$.

Teorema 109: Sea $f : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ una función. Supongamos que existe $\lim_{u \to a} f(u) = L$ con $L > 0$ (y $u \in D$). Entonces existe $\delta > 0$ tal que si $0 < \|u - a\| < \delta$ se tiene $f(u) > 0$.

Corolario 110: Sean $f, g : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ funciones tales que $f(u) \leq g(u)$ para todo $u \in D$. Supongamos que existen los límites $\lim_{u \to a} f(u)$ y $\lim_{u \to a} g(u)$. Entonces $\lim_{u \to a} f(u) \leq \lim_{u \to a} g(u)$.