Facultad de Ciencias Exactas, Ingeniería y Agrimensura

Departamento de Matemática - Escuela de Ciencias Exactas y Naturales

ANÁLISIS MATEMÁTICO II

Licenciatura y Profesorado en Física, Licenciatura en Ciencias de la Computación,

Licenciatura y Profesorado en Matemática - Año 2020

Apéndice Unidad 9: Conjuntos y curvas de nivel - Funciones lineales.

---

1. Gráfica de una función, conjuntos y curvas de nivel.

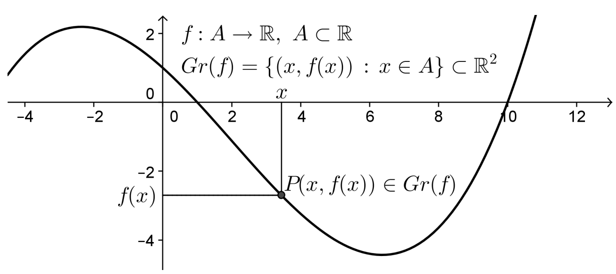
Si $f : A \to B$ es una función cualquiera, entonces tiene sentido definir su gráfica como el subconjunto de $A \times B$ dado por

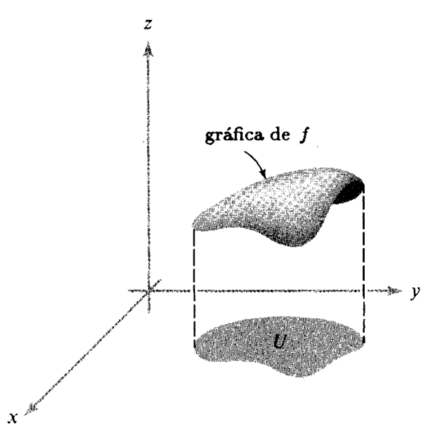
$$Gr(f) = \{(x, f(x)) \, : \, x \in A\}.$$

En particular, si $f : D \to \mathbb{R}^m$ es una función con $D \subset \mathbb{R}^n$, entonces $Gr(f) \subset \mathbb{R}^{n+m}$.

Cuando $n = m = 1$, obtenemos la gráfica usual de una función real $f : A \to \mathbb{R}$, con $A \subset \mathbb{R}$, que se representa como un subconjunto del plano $\mathbb{R}^2$,

$$Gr(f) = \{(x, f(x)) \, : \, x \in A\} = \{(x, y) \, : \, x \in A \, y = f(x)\}$$





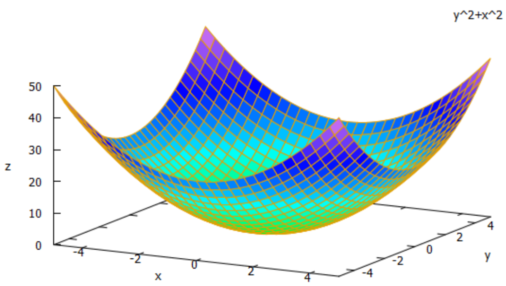
En casi todos los casos, es imposible representar gráficamente el conjunto $Gr(f)$. Esto sólo es posible si $f : U \to \mathbb{R}$, con $U \subset \mathbb{R}^2$. En este caso,

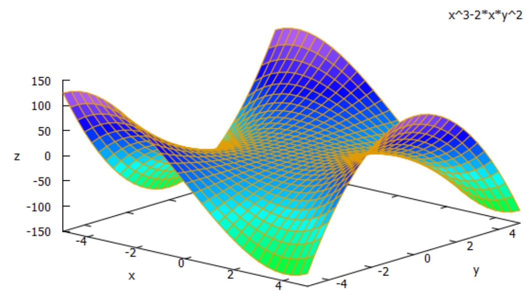
$$\begin{aligned} Gr(f) &= \{(x, y, f(x, y) \, : \, (x, y) \in D\} \\ &= \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \, : \, (x, y) \in D, \, z = f(x, y)\} \end{aligned}$$

tiene la forma típica de una superficie que se proyecta sobre U.

En general utilizaremos algún software como máxima para realizar las gráficas de este tipo de funciones.

En la siguiente figura mostramos las gráficas realizadas con máxima de las funciones $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x, y) = x^2 + y^2$, y $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x, y) = x^3 - 2xy$ utilizando el comando plot3d.



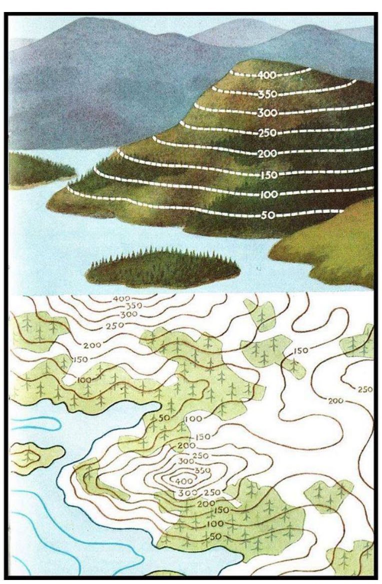


Otro recurso que graficamente puede ayudar a comprender el comportamiento de una función es el de los denominados *conjuntos de nivel*:

Definición: Sea $f : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ una función y sea $k \in \mathbb{R}$. Se denomina **conjunto de nivel** del valor k, al conjunto de los puntos $x \in U$ tales que $f(x) = k$. Si $n = 3$, el conjunto de nivel se denomina una **superficie de nivel**, y si $n = 2$, el conjunto de nivel se denomina una **curva de nivel**.

Claramente las curvas y superficies de nivel son los únicos subconjuntos de nivel que admiten una representación gráfica en el espacio bidimensional o tridimensional. Es importante notar que estos conjuntos son subconjuntos del dominio de la función.

Los conjuntos de nivel aparecen naturalmente en muchas aplicaciones.



En la imagen de la derecha, en la figura inferior se observa lo que se conoce como *mapa topográfico*. Estos mapas presentan curvas donde los puntos que pertenecen a una misma curva representan la misma altitud. Ésta es una manera de representar en un mapa (una figura bidimensiona) las características de un objeto tridimensional (en este caso un terreno montuoso).

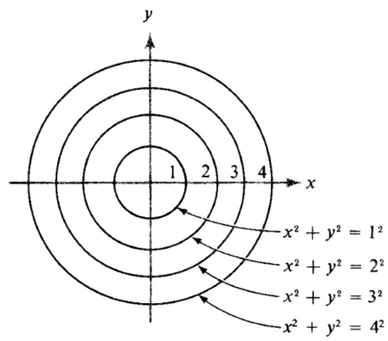
Matemáticamente, podemos pensar en la función $f : U \to \mathbb{R}$, con $U \subset \mathbb{R}^2$ es el terreno a mapear, tal que $f(x, y)$ es la altitud respecto del nivel del mar del punto de coordenadas (x, y). Entonces el mapa topográfico es intuitivamente el conjunto de las curvas de nivel de la función f.

Observemos que no necesariamente los conjuntos de nivel de una función $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ son curvas. En el ejemplo anterior, si U fuese un terreno plano, a altura cero sobre el nivel del mar, la función f sería constante igual a cero en U y el conjunto de nivel de 0 sería todo U.

Consideremos algunos ejemplos más. Si tomamos la función $f(x, y) = x^2 + y^2$, los conjuntos de nivel están dados por

$$C_k = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \, : \, x^2 + y^2 = k\}.$$

La función f mide la distancia al cuadrado del punto (x, y) al origen de coordenadas. Por lo tanto $C_k = \emptyset$ si $k < 0$, $C_k = \{(0, 0)\}$ si $k = 0$ y C_k es una circunferencia centrada en el origen de radio $\sqrt{k}$ si $k > 0$.



De forma similar, si consideramos $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ dada por $g(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$, los conjuntos de nivel representan esferas concéntricas centradas en el origen para $k > 0$, y un punto (el origen) si $k = 0$.

2. Funciones lineales

En la Unidad 9 hemos visto que las funciones lineales constituyen ejemplos de funciones continuas. Profundizaremos aquí sus propiedades, que serán útiles para el estudio de la diferenciabilidad de funciones de varias variables.

Recordemos que una función $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ se dice **lineal** si verifica:

- $f(u + v) = f(u) + f(v)$ para todo $u, v \in \mathbb{R}^n$;
- $f(\lambda u) = \lambda f(u)$ para cada $\lambda \in \mathbb{R}$, $u \in \mathbb{R}^n$.

Consideremos por ejemplo la función $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $f(x, y) = (2x + y, 3y)$. Entonces

$$\begin{aligned}
f((x_0, y_0) + (x_1, y_1)) &= f(x_0 + x_1, y_0 + y_1) = (2(x_0 + x_1) + (y_0 + y_1), 3(y_0 + y_1)) \\
&= (2x_0 + y_0 + 2x_1 + y_1, 3y_0 + 3y_1) = f(x_0, y_0) + f(x_1, y_1); \\
f(\lambda(x_0, y_0)) &= f(\lambda x_0, \lambda y_0) = (2\lambda x_0 + \lambda y_0, 3\lambda y_0) \\
&= \lambda(2x_0 + y_0, 3y_0) = \lambda f(x_0, y_0).
\end{aligned}$$

con lo cual f es lineal.

Veremos una manera de representar todas las funciones lineales. Para ello necesitamos introducir el concepto de matriz.

Una **matriz** $n \times m$ es una especie de "tabla" numérica de n filas y m columnas. Normalmente se utiliza la notación $A = (a_{ij})$ para indicar una matriz cuya entrada numérica en la fila i y la columna j es el número real a_{ij}.

Consideremos los siguientes ejemplos:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 4 \\ 3 & 1 & 2 & 5 \end{pmatrix}.$$

A, B y C consituyen ejemplos de **matrices cuadradas**, es decir, donde el número de filas es igual al número de columnas. A es una matriz 2×2, mientras que B y C son matrices 3×3. D es una **matriz rectangular** 2×4, o sea, tiene 2 filas y 4 columnas.

En A, observamos que $a_{ij} = 1$ para todo i, j.

En B, tenemos que $b_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{si } i \neq j \end{cases}$. B se denomina matriz identidad 3×3, y es un caso particular de una matriz diagonal. En efecto, una matriz cuadrada $n \times n$, $X = (x_{ij})$, se dice **diagonal**, si $x_{ij} = 0$ siempre que $i \neq j$. O sea, todas las entradas fuera de la diagonal son nulas. Cuando además todas las entradas de la diagonal son iguales a 1, la matriz se denomina **matriz identidad** $n \times n$.

C es una ejemplo de una **matriz triangular superior**. O sea, una matriz cuyas entradas por debajo de la diagonal son nulas. Si las entradas por encima de la diagonal son nulas, la matriz se dice **triangular inferior**. En C tenemos

$$c_{11} = 1,\ c_{12} = 2,\ c_{13} = 5,\ c_{21} = 0,\ c_{22} = 1,\ c_{23} = 1,\ c_{31} = 0,\ c_{32} = 0,\ c_{33} = 4.$$

Consideremos ahora un vector de $v \in \mathbb{R}^n$. Para poder introducir el producto de una matriz por un vector, deberemos hacer una distinción entre **vector fila** y **vector columna**. Ambos representan esencialmente al mismo objeto v, solo que en el primer caso las componentes del vector se presentan como una fila (es decir dispuestas horizontalmente una al lado de la otra) y en el segundo como una columna (es decir dispuestas verticalmente una debajo de la otra). Tomemos un ejemplo concreto, el vector v de $\mathbb{R}^3$ cuyas componentes son $(1, 2, 3)$. Tendremos entonces:

$$v = (1, 2, 3) \leftarrow \text{vector fila}; \quad v = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \leftarrow \text{vector columna}.$$

En la mayoría de las aplicaciones esta distinción es superflua (por ejemplo si consideramos funciones de $\mathbb{R}^n$ a $\mathbb{R}^m$ no importa si damos las componentes como filas, como lo hacemos usualmente, o como columnas). Sin embargo, esta distinción se vuelve importante a la hora de introducir la multiplicación de una matriz por un vector.

Observemos que un vector fila no es más que una matriz $1 \times n$, y un vector columna es una matriz $n \times 1$. Para multiplicar una matriz por un vector necesitaremos considerar a los vectores como vectores columna.

Si A es una matriz $n \times m$ y v es un vector columna de $\mathbb{R}^m$, definimos el producto $A \cdot v$ como el vector w de $\mathbb{R}^n$ cuya componente i-ésima se obtiene de realizar el producto escalar de la fila i de A con el vector v. Analicemos algunos ejemplos. Consideremos $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ y $v = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$. Para multiplicar $A \cdot v$ es usual disponer A y v como en el siguiente diagrama:

$$\begin{array}{cccc} & \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} & & \\ \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 1 \cdot 1 + 2 \cdot 2 \\ 3 \cdot 1 + 4 \cdot 2 \end{pmatrix} & = & \begin{pmatrix} 5 \\ 11 \end{pmatrix} = A \cdot v \end{array}$$

Tomemos ahora $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 4 \\ 3 & 1 & 2 & 5 \end{pmatrix}$ y $w = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$. Entonces:

$$\begin{array}{cccc} & \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} & & \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 4 \\ 3 & 1 & 2 & 5 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 1 \cdot 1 + 0 \cdot 0 + 2 \cdot 2 + 4 \cdot 1 \\ 3 \cdot 1 + 1 \cdot 0 + 2 \cdot 2 + 5 \cdot 1 \end{pmatrix} & = & \begin{pmatrix} 9 \\ 12 \end{pmatrix} = A \cdot v \end{array}$$

En términos generales, podemos multiplicar una matriz A por un vector que tenga tantas componentes como columnas tiene A, y el resultado será un vector con tantas componentes como filas tiene A. Si $A = (a_{ij})$ es una matriz $n \times m$ y v es un vector columna de m componentes (v_j), entonces la componente i-ésima de $A \cdot v$ será

$$(A \cdot v)_i = \sum_{j=1}^{m} a_{ij} v_j.$$

A partir de esta descripción, es fácil ver que una función $f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ tal que $f(u) = A \cdot u$, donde A es una matriz $n \times m$, es una función lineal.

En efecto si $u = (u_j)$ y $v = (v_j)$ son vectores de $\mathbb{R}^m$, la i-ésima componente de $f(u+v)$ será

$$(A \cdot (u+v))_i = \sum_{j=1}^{m} a_{ij}(u_j + v_j) = \sum_{j=1}^{m} a_{ij} u_j + \sum_{j=1}^{m} a_{ij} v_j = (A \cdot u)_i + (A \cdot v)_i$$

con lo cual tendremos $A \cdot (u + v) = A \cdot u + A \cdot v$. De manera similar, se prueba que $A \cdot (\lambda u) = \lambda(A \cdot u)$.

Lo interesante es que todas las funciones lineales son de esta forma. Supongamos que tenemos una función lineal $f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ y consideremos los vectores $e_1 = (1, 0, 0, ..,0)$, $e_2 = (0, 1, 0, ..., 0)$, $\cdots$, $e_m = (0, 0, ..., 1)$. Es decir, el vector e_j es aquel cuya j-ésima componente es 1 y el resto es 0. Entonces si $v = (v_1, \cdots, v_m)$, es claro que v puede escribirse como

$$v = v_1 e_1 + v_2 e_2 + \cdots v_m e_m.$$

Como f es una función lineal, resultará

$$f(v) = v_1 f(e_1) + v_2 f(e_2) + \cdots + v_m f(e_m).$$

Es decir, f queda completamente determinada por los valores que toma en $e_1, \cdots, e_m$. Ahora bien, $f(e_j)$ es un vector de $\mathbb{R}^n$. Podemos entonces armar la matriz A cuyas columnas sean los vectores $f(e_1), \cdots, f(e_m)$. De esta manera, A será una matriz $m \times n$ y puede verse que en efecto $f(v) = A \cdot v$. No haremos la prueba formal de este hecho (aunque no es dificil de verificar). Veamos un ejemplo.

Consideremos la función lineal dada al inicio de esta sección. Es decir, $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $f(x, y) = (2x + y, 3y)$. Consideremos los vectores $e_1 = (1, 0)$ y $e_2 = (0, 1)$. Entonces $f(e_1) = (2, 0)$, $f(e_2) = (1, 3)$. Tomemos finalmente la matriz A cuyas columnas sean $f(e_1)$ y $f(e_2)$, esto es

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Entonces si $v = (x, y)$, tendremos

$$\begin{array}{ccc} & \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} & \\ \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 2x + y \\ 0x + 3y \end{pmatrix} & = f(x, y) \end{array}$$