Curvas diferenciables

Una *curva* en $\mathbb{R}^n$ es una función $\alpha : I \to \mathbb{R}^n$, donde I es un intervalo abierto en $\mathbb{R}$. Decimos que α es derivable en el punto $t_0 \in I$ si existe el límite

$$\alpha'(t_0) = \lim_{h \to 0} \frac{\alpha(t_0 + h) - \alpha(t_0)}{h},$$

llamado la derivada de α.

$$\alpha(t) = (\alpha_1(t), \alpha_2(t), \ldots, \alpha_n(t)).$$

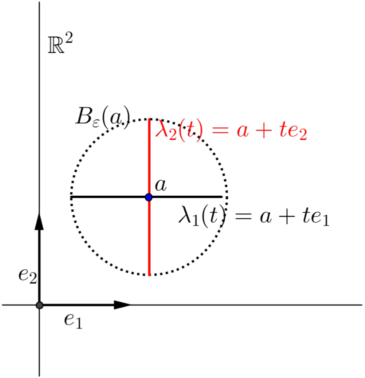
La derivada $\alpha'(t_0)$ existe si y sólo si existen las derivadas $\alpha_i'(t_0)$ esto es,

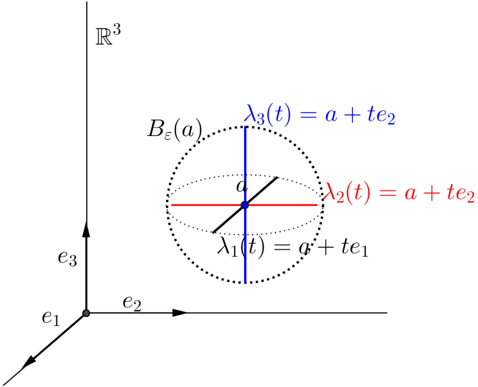
$$\alpha_i'(t_0) = \lim_{h \to 0} \frac{\alpha_i(t_0 + h) - \alpha_i(t_0)}{h}, \qquad i = 1, \ldots, n$$

donde $\alpha_i = p_i \circ \alpha : I \to \mathbb{R}$. Entonces α_i es derivable en el sentido que ya conocemos como función de I en $\mathbb{R}$.

Derivadas parciales

Sea un abierto $U \subseteq \mathbb{R}^n$. Como U es abierto, dado un $a \in U$,$B_r(a) \subseteq U$. $\Rightarrow$ existe un $\delta > 0$ tal que $a + te_i \in U$ para $t \in (-\delta, \delta)$ y donde e_i denota el vector de la base canónica: $e_i = (0, \ldots, 1, \ldots, 0)$, con 1 en lugar i.





Si ahora $f : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ es una función cualquiera, están bien definidas la funciones $f \circ \lambda_i : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ en un entorno de 0.

La i-ésima derivada parcial de f

en el punto $a \in U$ es la derivada en $t = 0$ de $f \circ \lambda_i$ y se denota por $\frac{\partial f}{\partial x_i}(a)$:

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(a) = \lim_{t \to 0} \frac{f(a + te_i) - f(a)}{t} = \lim_{t \to 0} \frac{f(a_1, a_2, \ldots, a_i + te_i, \ldots, a_n) - f(a)}{t},$$

si esta derivada existe.

Ejemplo 117: Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dada por $f(x, y) = xy/(x^2 + y^2)$, si $(x, y) \neq (0, 0)$, y $f(0, 0) = 0$.
Existen las derivadas parciales pero f No es CONTINUA en $(0, 0)$.

$\Rightarrow$ Diferenciabilidad en $\mathbb{R}^2$ debe ser mejor.

Diferenciable

Una función $f : U \to \mathbb{R}$ definida en el abierto $U \subseteq \mathbb{R}^n$ se dice *diferenciable* en el punto $a \in U$ cuando cumple las siguientes condiciones

1. Existen las derivadas parciales $\frac{\partial f}{\partial x_1}(a), \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(a)$.
2. Para todo $v = (v_1, \ldots, v_n)$ tal que $a + v \in U$, se tiene

$$f(a+v) - f(a) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(a).v_i + r(v), \qquad \text{donde} \qquad \lim_{|v| \to 0} \frac{r(v)}{|v|} = 0.$$

Toda función diferenciable en el punto a es continua en ese punto.

$f : U \to \mathbb{R}^n$ definida en el abierto $U \subseteq \mathbb{R}^m$ se dice de clase C^1 cuando cada una $f_1, \ldots, f_n : U \to \mathbb{R}$ es de clase C^1, o sea, las derivadas parciales de las f_i son continuas.

Toda función $f : U \to \mathbb{R}$ de clase C^1 es diferenciable.

Gradiente

Sea $f : U \to \mathbb{R}$ en el punto a y donde $U \subseteq \mathbb{R}^n$ es un abierto, el gradiente es el vector

$$\mathrm{grad} f(a) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_n} \right).$$

Si v es cualquier vector en $\mathbb{R}^n$, la *derivada direccional* de f en el punto a en la dirección de v es por definición

$$\frac{\partial f}{\partial v}(a) = \lim_{t \to 0} \frac{f(a + tv) - f(a)}{t}. \tag{1}$$

Corolario 122. Sea $f : U \to \mathbb{R}$ diferenciable en el abierto $U \subseteq \mathbb{R}^n$ con $a \in U$. Si $\lambda : (-\delta, \delta) \to U$ es cualquier curva diferenciable tal que $\lambda(0) = a$ y $\lambda'(0) = v$, se tiene

$$(f \circ \lambda)'(0) = \langle\, \mathrm{grad} f(a), v \,\rangle = \frac{\partial f}{\partial v}(a) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(a) v_i. \tag{2}$$

Propiedades del gradiente

Sea $f : U \to \mathbb{R}$ una función diferenciable de clase C^1. Fijemos $a \in U$ y supongamos $\mathrm{grad} f(a) \neq 0$. Entonces

(i) El gradiente apunta en la dirección en la cual la función es *creciente* .

(ii) De entre todas las direcciones a lo largo de las cuales f crece, la dirección del gradiente es la de *crecimiento más rápido*.

(iii) El gradiente de f en el punto a es *ortogonal* al conjunto de nivel que pasa por a.

Una aplicación $f : U \to \mathbb{R}^n$ definida en un abierto $U \subseteq \mathbb{R}^m$ se dice *diferenciable* en el punto $a \in U$ cuando cada una de sus funciones coordenadas $f_1, \ldots, f_n : U \to \mathbb{R}$ son diferenciables en ese punto a.

Si este es el caso entonces para todo $v = (v_1, v_2, \ldots, v_n)$ tal que $a + v \in U$ y para cada $i = 1, \ldots, n$ se tiene

$$f_i(a+v) - f_i(a) = \sum_{j=1}^{m} \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(a) v_j + r_i(v) \quad \text{con } \lim_{v \to 0} \frac{r_i(v)}{||v||} = 0.$$

La matrix $n \times m$ cuya fila i es el vector gradiente de f_i y que se denota $Jf(a) = \left[\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(a)\right]$ se denomina *matriz jacobiana* de f en el punto a.
La transformación lineal $f'(a) : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ cuya matriz en las bases canónicas de $\mathbb{R}^m$ y $\mathbb{R}^n$ es $Jf(a)$, se llama *la diferencial de* f en el punto a. A veces $f'(a)$ también se escribe df_a.
De acuerdo con la definición de matriz de una transformación real, para todo $v = (v_1, \ldots, v_m) \in \mathbb{R}^m$, tenemos

$$f'(a)v = (w_1, \ldots, w_n) \quad \text{donde} \quad w_i = \sum_{j=1}^{m} \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(a) v_j = \frac{\partial f_i}{\partial v}(a).$$

La *derivada direccional* de f en el punto a y en la dirección del vector v como

$$\frac{\partial f}{\partial v}(a) = \lim_{t \to 0} \frac{f(a+tv) - f(a)}{t},$$

de donde obtenemos inmediatamente que

$$\frac{\partial f_i}{\partial v}(a) = \left(\frac{\partial f_1}{\partial v}(a), \ldots, \frac{\partial f_n}{\partial v}(a) \right) = f'(a)v.$$

De la regla de la cadena y de la definición de arriba, surge que

$$\frac{\partial f}{\partial v}(a) = (f \circ \lambda)'(0)$$

Teorema

Sea $U \subseteq \mathbb{R}^m$ un abierto y sea $f : U \to \mathbb{R}^n$ una función. Son equivalentes:

1. (i) f es diferenciable.
2. (ii) Existe una transformación lineal $T_a : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ tal que cada vez que $a + v \in U$, el siguiente límite existe y vale

$$\lim_{v \to 0} \frac{||f(a+v) - f(a) - T_a(v)||}{||v||} = 0. \tag{3}$$

Observemos que si se satisface (3) entonces la transformación lineal que da el límite debe satisfacer

$$T_a = f'(a).$$