



Facultad de Ciencias Exactas, Ingeniería y Agrimensura

Departamento de Matemática - Escuela de Ciencias Exactas y Naturales

## ANÁLISIS MATEMÁTICO II

Licenciatura y Profesorado en Física, Licenciatura en Ciencias de la Computación,

Licenciatura y Profesorado en Matemática - Año 2020

### Unidad 7: Integrales Impropias

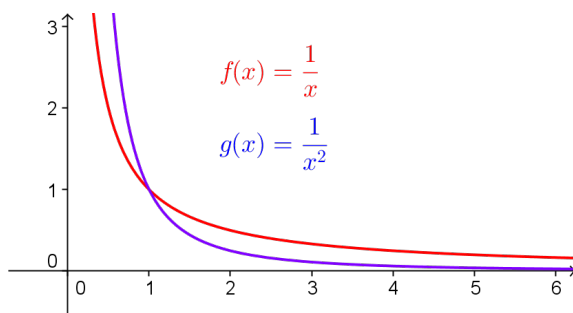
Cuando en la Unidad 1 definimos la integrabilidad de una función  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  consideramos antes que nada dos condiciones:

1. que el dominio de  $f$  sea un intervalo cerrado y acotado  $[a, b]$ ;
2. que  $f$  sea una función acotada en su dominio.

Veremos en esta unidad que ambas condiciones pueden ser debilitadas, dando lugar a un nuevo tipo de integrales, denominadas *integrales impropias*.

Consideremos algunos ejemplos.

Sean  $f : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $g : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = \frac{1}{x}$ ,  $g(x) = \frac{1}{x^2}$ .



Para cada  $x > 1$ , las funciones  $f$  y  $g$  son continuas, y por lo tanto integrables, en el intervalo  $[1, x]$ . Además tenemos

$$\int_1^x f(t)dt = \int_1^x \frac{1}{t}dt = \ln(x), \quad \int_1^x g(t)dt = \int_1^x \frac{1}{t^2}dt = -\frac{1}{t}\Big|_1^x = 1 - \frac{1}{x}.$$

Tanto  $f$  como  $g$  son funciones acotadas en  $[1, \infty)$ . Sin embargo, tenemos: Tenemos por lo tanto que

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \int_1^x f(t)dt = \lim_{x \rightarrow \infty} \ln(x) = \infty, \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \int_1^x g(t)dt = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{x}\right) = 1.$$

Por lo tanto tendrá sentido definir una “integral entre 1 e  $\infty$ ” de  $g$ , pero esto no será posible para  $f$ .

Estos ejemplos motivan la siguiente definición

**Definición 69:** Sea  $f$  una función integrable en  $[a, x]$  para cada  $x > a$ . Si existe

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \int_a^x f(t) dt = I$$

denominamos a este límite *integral impropia de  $f$  en  $[a, \infty)$*  y la denotamos

$$\int_a^\infty f(x) dx = I.$$

En caso que el límite anterior sea  $\pm\infty$  decimos que la integral impropia de  $f$  en  $[a, \infty)$  es *divergente*.

Si  $f$  es integrable en  $[x, a]$  para cada  $x < a$  y existe el límite

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \int_x^a f(t) dt = I'$$

denominamos a este límite *integral impropia de  $f$  en  $(-\infty, a]$*  y la denotamos

$$\int_{-\infty}^a f(x) dx = I'.$$

En caso que el límite anterior sea  $\pm\infty$  decimos que la integral impropia de  $f$  en  $(-\infty, a]$  es *divergente*.

Si  $f$  es integrable en cualquier intervalo cerrado  $[a, b]$  de  $\mathbb{R}$  y existen las integrales impropias de  $f$  en  $(-\infty, 0]$  y en  $[0, \infty)$  denotamos por

$$\int_{-\infty}^\infty f(x) dx = \int_{-\infty}^0 f(x) dx + \int_0^\infty f(x) dx.$$

Volviendo a los ejemplos anteriores, tenemos que

$$\int_1^\infty g(x) dx = 1$$

pero la integral impropia de  $f$  en  $[1, \infty)$  es divergente.

**Observación 70:** Antes de continuar, hagamos una observación sobre las integrales impropias en  $(-\infty, \infty)$ .

Consideremos la función  $f(x) = x$ . Entonces  $f$  es integrable en cualquier intervalo cerrado  $[a, b]$ . Consideremos la integral de  $f$  en intervalos de la forma  $[-x, x]$ . Tenemos:

$$\int_{-x}^x f(t) dt = 0 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow \infty} \int_{-x}^x f(t) dt = 0.$$

Esto nos puede hacer pensar que existe la integral impropia  $\int_{-\infty}^\infty x dx = 0$ . Sin embargo esto es **falso**, pues un simple cálculo muestra que las integrales impropias de  $f$  en  $[0, \infty)$  y en  $(-\infty, 0]$  son ambas divergentes.

**Observación 71:** Si existe el límite de  $f(x)$  cuando  $x$  tiende a infinito, una condición necesaria para que existe la integral impropia de  $f$  en  $[a, \infty)$  es

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0.$$

Dejamos la prueba de este resultado como **ejercicio**.

**Ejemplo 72:** Analicemos la existencia de las integrales impropias de la función  $f : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ ,

$$f(x) = \frac{1}{x^p}$$

con  $p \in \mathbb{Q}^+$ . Ya hemos visto que para  $p = 1$  la integral impropia de  $f$  en  $[1, \infty)$  es divergente.

Para  $p \neq 1$ , tenemos para cada  $x > 1$ ,

$$\int_1^x f(t)dt = \frac{1}{1-p} \left( \frac{1}{x^{p-1}} - 1 \right)$$

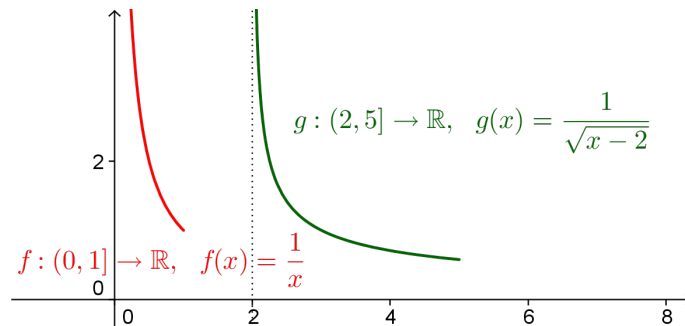
Tendremos por lo tanto

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \int_1^x f(t)dt = \begin{cases} \frac{1}{p-1} & \text{si } p > 1 \\ \infty & \text{si } p < 1. \end{cases}$$

Por lo tanto existe la integral impropia de  $f$  en  $[1, \infty)$  solo si  $p > 1$ . Si  $p < 1$  la integral impropia es divergente.

Analizamos un segundo caso en el que será posible definir integrales impropias. La función  $f$  podría no ser acotada en un intervalo  $(a, b]$  o  $[a, b)$  por tener en  $a$  o en  $b$  respectivamente una asíntota vertical.

Consideremos por ejemplo las funciones  $f : (0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = \frac{1}{x}$  y  $g : (2, 5] \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $g(x) = \frac{1}{\sqrt{x-2}}$ .



Es fácil ver que  $f$  tiene una asíntota vertical en  $x = 0$  y  $g$  tiene una asíntota vertical en  $x = 2$ . Por lo tanto no tiene sentido definir las integrales usuales

$$\int_0^1 f(x)dx, \quad \int_2^5 g(x)dx$$

pues ni  $f$  ni  $g$  son acotadas en estos intervalos.

Sin embargo  $f$  es integrable en cualquier intervalo de la forma  $[x, 1]$  con  $0 < x < 1$  y  $g$  es integrable en cualquier intervalo de la forma  $[x, 5]$  con  $2 < x < 5$ . En esos casos tenemos

$$\int_x^1 f(t)dt = -\ln(x), \quad \int_x^5 g(t)dt = 2(\sqrt{3} - \sqrt{x-2})$$

Tendremos por lo tanto

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \int_x^1 f(t)dt = \infty, \quad \lim_{x \rightarrow 2^+} \int_x^5 g(t)dt = 2\sqrt{3}.$$

Concluimos que no será posible definir una integral impropia de  $f$  entre 0 y 1 pero sí será posible dar una noción de integral de  $g$  entre 2 y 5.

**Definición 73:** Sea  $f$  una función integrable en  $[x, b]$  para cada  $a < x < b$  tal que  $f$  tiene una asíntota vertical en  $x = a$ . Si existe

$$\lim_{x \rightarrow a^+} \int_x^a f(t) dt = I$$

denominamos a este límite *integral impropia de  $f$  en  $(a, b]$*  y la denotamos

$$\int_a^b f(x) dx = I.$$

En caso que este límite sea  $\pm\infty$ , decimos que la integral impropia de  $f$  en  $(a, b]$  es *divergente*.

Si  $f$  una función integrable en  $[a, x]$  para cada  $a < x < b$  y  $f$  tiene una asíntota vertical en  $x = b$ , si existe

$$\lim_{x \rightarrow b^-} \int_a^x f(t) dt = I'$$

denominamos a este límite *integral impropia de  $f$  en  $[a, b)$*  y la denotamos

$$\int_a^b f(x) dx = I'.$$

En caso que este límite sea  $\pm\infty$ , decimos que la integral impropia de  $f$  en  $[a, b)$  es *divergente*.

Si  $a < c < b$ ,  $f$  tiene una asíntota vertical en  $x = c$  y existen las integrales impropias de  $f$  en  $[a, c)$  y en  $(c, b]$ , denominamos *integral impropia de  $f$  en  $(a, b)$*  a

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx.$$

**Ejemplo 74:** En este ejemplo veremos lo importante de no aplicar a ciegas la regla de Barrow. Consideremos la función  $f(x) = \frac{1}{x-1}$  y supongamos que queremos calcular  $\int_0^3 f(x) dx$ . Una primitiva de  $f$  está dada por

$$\int \frac{1}{x-1} dx = \ln|x-1|$$

lo que nos puede inducir a pensar que

$$\int_0^3 \frac{1}{x-1} dx = \ln|x-1| \Big|_0^3 = \ln(2) - \ln(1) = \ln(2).$$

Sin embargo esto es un error. La función  $f$  tiene una asíntota vertical en  $x = 1 \in [0, 3]$ . Tenemos

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \int_1^x f(t) dt = \lim_{x \rightarrow 1^-} \ln(1-x) = -\infty$$

con lo cual la integral impropia de  $f$  en  $[0, 1)$  es divergente y entonces no existe la integral impropia de  $f$  en  $[0, 3]$  (no necesitamos verificar si existe la integral impropia de  $f$  en  $(1, 3]$ ).