Unidad 1: Presentación Axiomatica de los Números Reales
Analisis Matemático I (R-112)
Licenciatura en Ciencias de la Computación

Iker M. Canut

2020

1. Axiomas de Cuerpo

A1) Propiedad **Conmutativa**: $a + b = b + a$ y $a \cdot b = b \cdot a$

A2) Propiedad **Asociativa**: $a + (b + c) = (a + b) + c$ y $a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$

A3) Propiedad **Distributiva**: $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$

A4) Existencia de **Elementos Neutros**: $\forall a \in \mathbb{R}, a + 0 = a$ y $a \cdot 1 = a$

A5) Existencia de **Elementos Opuestos**: $\forall a \in \mathbb{R}\ \exists b : a + b = b + a = 0$

A6) Existencia de **Elementos Recíprocos**: $\forall a \neq 0,\ \exists b : a \cdot b = b \cdot a = 1$

$a = a$ $\qquad a = b \Rightarrow b = a$ $\qquad a = b \wedge b = c \Rightarrow a = c$

Teorema 1: Propiedad Cancelativa de la Suma: $a + b = a + c \Rightarrow b = c$
D/ Sea $d = a + b = a + c$, por $A5$ $\exists y : a + y = y + a = 0$. Luego
$b = 0 + b = (y + a) + b = y + (a + b) = y + d = y + (a + c) = (y + a) + c = 0 + c = c$ ■

Corolario 1: Unicidad del Elemento Neutro de la Suma. $a + 0' = 0' + a = a \Rightarrow 0' = 0$
D/ Por $A4$ $a + 0 = a$. Por H $a + 0' = a$. Luego $a = a \Rightarrow a + 0 = a + 0'$ y por $T1$ $0 = 0'$ ■

Corolario 2: Unicidad del Elemento Opuesto. $a + b = a + b' = 0 \Rightarrow b = b'$
D/ Por $A5$ $\exists b : a + b = 0$. Por H $\exists b' : a + b' = 0$. Luego $a + b = a + b'$ y por $T1$ $b = b'$ ■

Teorema 2:

- $-(-a) = a$
  D/ Por existencia de elemento opuesto de a, $a + (-a) = 0$. Por existencia de elemento opuesto de $-a$, $-(-a) + (-a) = 0$. Luego, $0 = 0 \Rightarrow a + (-a) = (-a) + -(-a)$ y por $T1$, $a = -(-a)$ ■
- $-0 = 0$
  D/ Por $A5$ $0 + (-0) = 0$. Por $A4$ $0 + 0 = 0$. Luego, $0 = 0 \Rightarrow 0 + (-0) = 0 + 0$, por $T1$, $-0 = 0$ ■
- $0 \cdot a = 0$
  D/ $0 \cdot a = 0 \cdot a + 0 = 0 \cdot a + (a + -a) = (0 \cdot a + a) + -a = (0 \cdot a + 1 \cdot a) + -a =$
  $= a \cdot (0 + 1) + -a = a \cdot 1 + -a = a + -a = 0$ ■
- $a \cdot (-b) = (-a) \cdot b = -(a \cdot b)$
  D/ $a(-b) = a(-b) + 0 = a(-b) + (ab + -(ab)) = (a(-b) + ab) + -(ab) =$
  $= a((-b) + b) + -(ab) = a \cdot 0 + -(ab) = 0 + -(ab) = -(ab)$ ■
- $(-a) \cdot (-b) = a \cdot b$
  D/ $0 = (-a) \cdot (b + (-b)) = (-a)b + (-a)(-b)$. Por otro lado, $0 = (-a)b + ab$.
  Luego $0 = 0 \Rightarrow (-a)b + (-a)(-b) = (-a)b + ab$ y por $T1$ $(-a)(-b) = ab$ ■
- $a \cdot (b - c) = a \cdot b - a \cdot c$
  D/ Se puede reescribir como $a \cdot (b + (-c))$ y por el $A3$ es igual a $a \cdot b - a \cdot c$ ■

Teorema 3: Propiedad Cancelativa del Producto: $a \cdot b = a \cdot c \wedge a \neq 0 \Rightarrow b = c$
D/ $ab = ac \Rightarrow a^{-1}(ab) = a^{-1}(ac) = (a^{-1}a)b = (a^{-1}a)c = 1 \cdot b = 1 \cdot c = b = c$ ■

Corolario 3: Unicidad del Elemento Neutro del Producto. $a \cdot 1 = a \cdot 1' = a \Rightarrow 1 = 1'$
D/ Por $A4$, $a \cdot 1 = a$. Por H, $a \cdot 1' = a$. Luego, $a = a \Rightarrow a \cdot 1 = a \cdot 1'$ y por $T3$, $1 = 1'$ ■

Corolario 4: Unicidad del Recíproco. $\forall a \neq 0$, existe un único $b : a \cdot b = b \cdot a = 1$
D/ Por $A6$ $a \cdot b = 1$, suponemos $a \cdot b' = 1$. Luego, $1 = 1 \Rightarrow a \cdot b = a \cdot b'$ y por $T3$, $b = b'$ ■

Teorema 4:

- 0 no tiene recíproco.
  D/ Por definición de recíproco, $\forall a \in \mathbb{R} - \{0\},\ \exists b : ab = ba = 1$ ■

- $1^{-1} = 1$
  D/ $1^{-1} = 1 \cdot 1^{-1}$ y como $a \cdot a^{-1} = 1$, con $a = 1$, $1 \cdot 1^{-1} = 1$ ■

- $\frac{a}{1} = a$, si $a \neq 0$, $\frac{1}{a} = a^{-1}$
  D/ $\frac{a}{1} = a \cdot 1^{-1} = a \cdot 1 = a$. Además, $\frac{1}{a}$ se puede reescribir por definición como a^{-1} ■

- $a \cdot b = 0 \Rightarrow a = 0 \vee b = 0$
  D/ Si $a \neq 0$, por $T3$ tenemos que $b = 0$. Análogamente el caso de $b \neq 0$. Sino, ambos son 0. ■

- $b \neq 0 \wedge d \neq 0$:
  - $(b \cdot d)^{-1} = b^{-1} \cdot d^{-1}$
    D/ Como $1 = (bd)(bd)^{-1} \wedge 1 = b(b)^{-1} \wedge 1 = d(d^{-1})$, luego
    $1 = 1 \cdot 1 \Rightarrow (bd)(bd)^{-1} = b(b)^{-1}d(d)^{-1}$ y por $T4$ $(bd)^{-1} = b^{-1}d^{-1}$ ■
  - $\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{a \cdot d + b \cdot c}{b \cdot d}$
    D/ $\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = ab^{-1} \cdot 1 + cd^{-1} \cdot 1 = ab^{-1}(dd^{-1}) + cd^{-1}(bb^{-1}) = b^{-1}d^{-1}(ad + cb) =$
    $= (bd)^{-1}(ad + cb) = \frac{ad + cb}{bd}$ ■
  - $\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{a \cdot c}{b \cdot d}$
    D/ $\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = ab^{-1}cd^{-1} = acb^{-1}d^{-1} = ac(bd)^{-1} = \frac{ac}{bd}$ ■

- $a \neq 0, b \neq 0, \left(\frac{a}{b}\right)^{-1} = \frac{a^{-1}}{b^{-1}}$
  D/ $\left(\frac{a}{b}\right)^{-1} = (a \cdot (b^{-1}))^{-1} = a^{-1} \cdot (b^{-1})^{-1}$ y reescribiendo llegamos a que $\frac{a^{-1}}{b^{-1}}$ ■

- $-a = (-1) \cdot a$
  D/ $-a = 1 \cdot -a = (-1) \cdot a$ ■

2. Axiomas de Orden

A7) Si $a, b \in \mathbb{R}_0^+ \Rightarrow\ a + b \in \mathbb{R}_0^+$ y $a \cdot b \in \mathbb{R}_0^+$

A8) $\forall a \in \mathbb{R} : a \neq 0 \Rightarrow$ o bien $a \in \mathbb{R}^+$ o $-a \in \mathbb{R}^+$

A9) $0 \notin \mathbb{R}^+$

- $a < b \Rightarrow b - a \in \mathbb{R}^+$
- $a > b \Rightarrow a - b \in \mathbb{R}^+$
- $a \leq b \Rightarrow$ o bien $b - a \in \mathbb{R}^+$ o $a = b$
- $a \geq b \Rightarrow$ o bien $a - b \in \mathbb{R}^+$ o $a = b$
- $a > 0 \iff a \in \mathbb{R}^+$

Teorema 5: Propiedad de Tricotomía: Dados $a, b \in \mathbb{R}$ sucede solo una de las siguientes proposiciones:

$a < b$ $\qquad$ $a > b$ $\qquad$ $a = b$

Caso 1. $a < b \wedge a = b \Rightarrow b - a \in \mathbb{R}^+ \wedge a = b \Rightarrow 0 \in \mathbb{R}^+$ y llegamos asi a una contradicción.

Caso 2. $a < b \wedge a > b \Rightarrow b - a \in \mathbb{R}^+ \wedge a - b \in \mathbb{R}^+ \Rightarrow (b - a) + (a - b) \in \mathbb{R}^+ \Rightarrow 0 \in \mathbb{R}^+$, contradicción.

El resto de los casos se resuelve de manera análoga, llegando a las mismas contradicciones. ■

Teorema 6: Propiedad Transitiva de la Relación Menor: Si $a < b \wedge b < c \Rightarrow a < c$
D/ $a < b \Rightarrow b - a \in \mathbb{R}^+,\ b < c \Rightarrow c - b \in \mathbb{R}^+$. Por $A7$, $(b - a) + (c - b) \in \mathbb{R}^+ \Rightarrow$
$\Rightarrow b - a + c - b \in \mathbb{R}^+ \Rightarrow c - a \in \mathbb{R}^+ \Rightarrow a < c$ ■

Teorema 7:

- $a < b \Rightarrow a + c < b + c$
  D/ $a < b \Rightarrow b - a \in \mathbb{R}^+ \Rightarrow b - a + (c - c) \in \mathbb{R}^+ \Rightarrow (b + c) - (a + c) \in \mathbb{R}^+ \Rightarrow a + c < b + c$ ■

- $a < b \wedge c < d \Rightarrow a + c < b + d$
  D/ $a < b \Rightarrow b - a \in \mathbb{R}^+ \wedge c < d \Rightarrow d - c \in \mathbb{R}^+$. Y por $A7$, $(b - a) + (d - c) \in \mathbb{R}^+ \Rightarrow$
  $\Rightarrow (b + d) - (a + c) \in \mathbb{R}^+ \Rightarrow a + c < b + d$ ■

- $a < b \wedge c > 0 \Rightarrow a \cdot c < b \cdot c$
  D/ $a < b \wedge c > 0 \Rightarrow (b - a) \cdot c \in \mathbb{R}^+ \Rightarrow bc - ac \in \mathbb{R}^+ \Rightarrow ac < bc$ ■

- $a < b \wedge c < 0 \Rightarrow a \cdot c > b \cdot c$
  D/ $c < 0 \Rightarrow (-c) > 0$. Luego, $(b - a)(-c) \in \mathbb{R}^+ \Rightarrow ac - bc \in \mathbb{R}^+ \Rightarrow ac > bc$ ■

- $a \neq 0 \Rightarrow a^2 > 0$
  D/ Por tricotomia, $a < 0 \veebar a = 0 \veebar a > 0$

Caso 1. $a < 0 \Rightarrow (-a) \in \mathbb{R}^+ \Rightarrow (-a)(-a) \in \mathbb{R}^+ \Rightarrow aa \in \mathbb{R}^+ \Rightarrow a^2 \in \mathbb{R}^+ \Rightarrow a^2 > 0$
Caso 2. Este caso no puede suceder por Hipotesis.
Caso 3. $a > 0 \Rightarrow a \in \mathbb{R}^+ \Rightarrow aa \in \mathbb{R}^+ \Rightarrow a^2 \in \mathbb{R}^+ \Rightarrow a^2 > 0$ ■

- $1 > 0$
  D/ Por $A4$ sabemos que $1 \neq 0$. Por $A8$ sabemos que $-1 \in \mathbb{R}^+ \veebar 1 \in \mathbb{R}^+$.
  Suponemos $-1 \in \mathbb{R}^+ \Rightarrow 1 \notin \mathbb{R}^+$. Por $A7$, $(-1)(-1) \in \mathbb{R}^+ \Rightarrow 1 \in \mathbb{R}^+$,
  llegando asi a una contradicción. Luego, $1 \in \mathbb{R}^+ \Rightarrow 1 > 0$ ■

- $a < b \Rightarrow -b < -a$
  D/ $a < b \Rightarrow b - a \in \mathbb{R}^+ \Rightarrow -(-b + a) \in \mathbb{R}^+ \Rightarrow (-a) - (-b) \in \mathbb{R}^+ \Rightarrow -b < -a$ ■

- $a \cdot b > 0 \iff a$ y b son los dos positivos o los dos negativos.

- $a \cdot b < 0 \iff a$ positivo y b negativo, o a negativo y b positivo.

Caso 1. $a, b \in \mathbb{R}^+ \Rightarrow a \cdot b \in \mathbb{R}^+$
Caso 2. $a \in \mathbb{R}^+, (-b) \in \mathbb{R}^+ \Rightarrow a(-b) = -(ab) \in \mathbb{R}^+ \Rightarrow 0 + -(ab) \in \mathbb{R}^+ \Rightarrow ab < 0$
Caso 3. $(-a) \in \mathbb{R}^+, b \in \mathbb{R}^+ \Rightarrow (-a)b = -(ab) \in \mathbb{R}^+ \Rightarrow 0 + -(ab) \in \mathbb{R}^+ \Rightarrow ab < 0$
Caso 4. $(-a), (-b) \in \mathbb{R}^+ \Rightarrow (-a)(-b) = ab \in \mathbb{R}^+$ ■

- $a > 0 \iff \dfrac{1}{a} > 0$
  $\Rightarrow) a > 0$, suponemos $\dfrac{1}{a} < 0 \Rightarrow -a^{-1} \in \mathbb{R}^+$ y como $a \in \mathbb{R}^+$, $-a^{-1} \cdot a \in \mathbb{R} \Rightarrow -1 \in \mathbb{R}^+$.
  Llegando asi a una contradicción, ergo $a > 0 \Rightarrow \dfrac{1}{a} > 0$
  $\Leftarrow) \dfrac{1}{a} > 0$, suponemos $a < 0 \Rightarrow -a \in \mathbb{R}^+ \Rightarrow -a \cdot \dfrac{1}{a} \in \mathbb{R}^+ \Rightarrow -1 \in \mathbb{R}^+$. Contradicción, i.e $a > 0$ ■

- $0 < a < b \Rightarrow 0 < \frac{1}{b} < \frac{1}{a}$
  D/ Sabemos que $\frac{1}{a}, \frac{1}{b} \in \mathbb{R}^+ \Rightarrow \frac{1}{a}\frac{1}{b} \in \mathbb{R}^+$. Además, $a < b \Rightarrow b - a \in \mathbb{R}^+$. Entonces, $(b-a)(a^{-1}b^{-1}) \in \mathbb{R}^+ \Rightarrow (ba^{-1}b^{-1} - aa^{-1}b^{-1}) \in \mathbb{R}^+ \Rightarrow a^{-1} - b^{-1} \in \mathbb{R}^+ \Rightarrow$
  $$\Rightarrow b^{-1} < a^{-1} \therefore 0 < \frac{1}{b} < \frac{1}{a}$$ ■

2.1. Números Naturales, Enteros, Racionales e Irracionales

Números Naturales: $\mathbb{N}$. El conjuntos inductivo más pequeño:

1. El número 1 pertenece al conjunto.
2. Si a pertenece al conjunto, $a+1$ también pertenece.

Destacamos que 1 es el primer elemento de $\mathbb{N}$, i.e es el menor. Ergo, si $a < 1 \Rightarrow a \notin \mathbb{N}$

Números Enteros: $\mathbb{Z} = \{x \in \mathbb{R} : x \in \mathbb{N} \vee -x \in \mathbb{N} \vee x = 0\}$
La suma, la diferencia y el producto son operaciones cerradas en $\mathbb{Z}$.

Números Racionales: $\mathbb{Q} = \left\{x \in \mathbb{R} : \exists p, q \in \mathbb{Z}, q \neq 0 : x = \frac{p}{q}\right\}$

Notas:

- $\mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$
- Dados $a, b \in \mathbb{R}, c, d \in \mathbb{R} - \{0\}, \frac{a}{c} = \frac{b}{d} \iff ad = bc$
  D/ $\frac{a}{c} = \frac{b}{d} \iff \frac{d}{d}\frac{a}{c} = \frac{b}{d}\frac{c}{c} \iff \frac{ad}{dc} = \frac{bc}{dc} \iff$ por cancelación del producto, $ad = bc$ ■

2.2. Representación Geometrica de los numeros reales: la recta real

En una recta se elige un punto para representar al 0 y otro punto distinto para representar al 1 (esta elección fija la escala). Cada punto de la recta representa a un único número real y cada número real está representado por un único punto de la recta.

1. Si los puntos A y B representan los números reales a y b, A está a la izquierda de $B \iff a < b$.
2. Si los puntos A, B, C, D representan a los números reales a, b, c, d. con $a < b$ y $c < d$, entonces $\overline{AB}$ y $\overline{CD}$ son congruentes $\iff b - a = d - c$.

Además, los números positivos quedan a la derecha del 0, y los negativos a la izquierda del mismo.

2.3. Intervalos Reales

- $(a, b) = \{x \in \mathbb{R} : a < x < b\}$
- $[a, b) = \{x \in \mathbb{R} : a \leq x < b\}$
- $(a, b] = \{x \in \mathbb{R} : a < x \leq b\}$
- $[a, b] = \{x \in \mathbb{R} : a \leq x \leq b\}$
- $(a, +\infty) = \{x \in \mathbb{R} : a < x\}$
- $[a, +\infty) = \{x \in \mathbb{R} : a \leq x\}$
- $(-\infty, b) = \{x \in \mathbb{R} : x < b\}$
- $(-\infty, b] = \{x \in \mathbb{R} : x \leq b\}$

2.4. Valor absoluto de un número

Dado $x \in \mathbb{R}$, su valor absoluto es el número real $|x|$:

$$|x| = \begin{cases} x & , \text{si } x \geq 0 \\ -x & , \text{si } x < 0 \end{cases}$$

Geométricamente, $|x|$ es la distancia en la recta real entre los puntos 0 y x. También puede verse que la distancia entre dos puntos cualesquiera $x, y \in \mathbb{R}$ está dada por el valor $|x - y| = |y - x|$.

Proposición:

- $|x| \geq 0$. Además, $|x| = 0 \iff x = 0$

Caso 1. $x > 0 \Rightarrow x \in \mathbb{R}^+ \wedge |x| = x \Rightarrow |x| \in \mathbb{R}^+ \Rightarrow |x| > 0$
Caso 2. $x = 0 \Rightarrow |x| = x \Rightarrow |x| = 0$
Caso 3. $x < 0 \Rightarrow (-x) \in \mathbb{R}^+ \wedge |x| = -x \Rightarrow |x| \in \mathbb{R}^+ \Rightarrow |x| > 0$ ■

- $|x| = |-x|$

Caso 1. $x > 0 \Rightarrow |x| = x \wedge |-x| = -(-x) = x \therefore |x| = |-x|$
Caso 2. $x = 0 \Rightarrow |x| = 0 \wedge |-x| = -0 = 0 \therefore |x| = |-x|$
Caso 3. $x < 0 \Rightarrow |x| = -x \wedge |-x| = -x \therefore |x| = |-x|$ ■

- $-|x| \leq x \leq |x|$

Caso 1. $x > 0 \Rightarrow -x \leq x \leq x$. Además, $-x < 0$. Entonces $-x < 0 < x \therefore -x < x \wedge x \leq x$
Caso 2. $x = 0 \Rightarrow 0 \leq 0 \leq 0$
Caso 3. $x < 0 \Rightarrow -(-x) \leq x \leq -x$. Además, $-x > 0$. Entonces $x < 0 < -x \therefore x \leq x \leq -x$ ■

- Sea $a > 0$: $|x| < a \iff -a < x < a$

$\Rightarrow$) Caso 1. $x > 0 \Rightarrow |x| = x \wedge -a < 0 \therefore -a < 0 < x < a$
Caso 2. $x = 0 \Rightarrow |x| = 0 \wedge -a < 0 \therefore -a < 0 = x < a$
Caso 3. $x < 0 \Rightarrow |x| = -x \wedge -a < 0$. Además, como $-x < a$, entonces $-a < x \therefore -a < x < 0 < a$ □
$\Leftarrow$) Caso 1. $x > 0 \Rightarrow |x| = x \therefore -a < |x| < a$
Caso 2. $x = 0 \Rightarrow |x| = 0 \wedge -a < 0 < a \therefore -a < |x| < a$
Caso 3. $x < 0 \Rightarrow |x| = -x$. Entonces $-|x| = x \Rightarrow -a < -|x| < a \therefore a > |x| > -a$ ■

- Sea $a > 0$: $|x| > a \iff x < -a \veebar a < x$

$\Rightarrow$) Caso 1. $x > 0 \Rightarrow |x| = x \therefore a < x$
Caso 2. $x = 0$ No puede suceder, pues $0 < a < |x|$
Caso 3. $x < 0 \Rightarrow |x| = -x \Rightarrow -x > a \therefore x < -a$ □
$\Leftarrow$) Caso 1. $0 < a < x \Rightarrow |x| = x \therefore a < |x|$
Caso 2. $x < -a < 0 \Rightarrow 0 < a < -x \Rightarrow |x| = -x \therefore a < |x|$ ■

- $|x + y| \leq |x| + |y|$
  D/ Sabemos que $-|x| \leq x \leq |x| \wedge -|y| \leq y \leq |y| \Rightarrow -|x| + -|y| \leq x + y \leq |x| + |y| \Rightarrow$
  $\Rightarrow -(|x| + |y|) \leq x + y \leq |x| + |y|$. Llamando $a = |x| + |y| \Rightarrow$
  $\Rightarrow -a \leq x + y < a \Rightarrow |x + y| \leq a \therefore |x + y| \leq |x| + |y|$ ■

- $|x \cdot y| = |x| \cdot |y|$

Caso 1. $x \geq 0, y \geq 0 \Rightarrow xy > 0 \Rightarrow |xy| = xy$. Luego $|x| = x \wedge |y| = y \therefore |xy| = xy = |x||y|$
Caso 2. $x \geq 0, y < 0 \Rightarrow xy < 0 \Rightarrow |xy| = -(xy)$. Luego $|x| = x \wedge |y| = -y \therefore |xy| = -(xy) = |x||y|$
Caso 3. $x < 0, y \geq 0 \Rightarrow xy < 0 \Rightarrow |xy| = -(xy)$. Luego, $|x| = -x \wedge |y| = y \therefore |x||y| = -(xy) = |x||y|$
Caso 4. $x < 0, y < 0 \Rightarrow xy > 0 \Rightarrow |xy| = xy$. Luego, $|x| = -x \wedge |y| = -y \therefore |xy| = (-x)(-y) = |x||y|$
■

- $\left|\dfrac{1}{a}\right| = \dfrac{1}{|a|}$

Caso 1. $a > 0$, $|a| = a$. Luego $\dfrac{1}{a} > 0 \Rightarrow \left|\dfrac{1}{a}\right| = \dfrac{1}{a} \therefore \left|\dfrac{1}{a}\right| = \dfrac{1}{a} = \dfrac{1}{|a|}$

Caso 2. $a < 0$, $|a| = -a$. Luego $\dfrac{1}{a} < 0 \Rightarrow \left|\dfrac{1}{a}\right| = -\dfrac{1}{a} \therefore \left|\dfrac{1}{a}\right| = -\dfrac{1}{a} = \dfrac{1}{-a} = \dfrac{1}{|a|}$ ■

- Sea $y \neq 0$, $\left|\dfrac{x}{y}\right| = \dfrac{|x|}{|y|}$

  D/ $\left|\dfrac{x}{y}\right| = |x \cdot y^{-1}| = |x||y^{-1}| = |x| \cdot \left|\dfrac{1}{y}\right| = |x| \cdot \dfrac{1}{|y|} = \dfrac{|x|}{|y|}$ ■

3. Introducción A10

Sea A un subconjunto no vacio de $\mathbb{R}$

- **Cota Superior**: Sea $b \in \mathbb{R}$, b es una cota superior de A si $a \leq b\ \forall a \in A$.
- **Cota Inferior**: Sea $b \in \mathbb{R}$, b es una cota inferior de A si $a \geq b\ \forall a \in A$.

- **Supremo**: b es supremo de $A \iff (a \leq b\ \forall a \in A) \wedge (c < b \Rightarrow c$ no es una cota superior de $A)$.
- **Ínfimo**: b es ínfimo de $A \iff (b \leq a\ \forall a \in A) \wedge (b < c \Rightarrow c$ no es una cota inferior de $A)$.

- **Máximo**: b es máximo de A si $a \leq b\ \forall a \in A \wedge b \in A$.
- **Mínimo**: b es mínimo de A si $b \leq a\ \forall a \in A \wedge b \in A$.

Teorema 8: Unicidad del supremo: Dos números distintos no pueden ser supremos de un mismo conjunto. Por esto tenemos una notación: $b = sup(A)$.
D/ Sean b y b' supremos de un mismo conjunto, ambos son cotas superiores. Luego, considerando a b como supremo y a b' como cota superior, $b \leq b'$. Análogamente, $b' \leq b \therefore b = b'$ ■

Teorema 9: Caracterización del Supremo: $b = sup(A) \iff b$ es una cota superior de A tal que $\forall \epsilon > 0$ existe algun elemento $a \in A$ tal que $b - \epsilon < a$.
$\Rightarrow$) Supongamos que no ocurre, entonces $a \leq b - \epsilon$ y es cota superior de A, pero contradice que b es supremo de A, porque $a \leq b - \epsilon < b$.
$\Leftarrow$) Queremos demostrar que $c < b$ no es cota superior de A. Sea $\epsilon_c = b - c > 0$ y como $\exists a \in A : b - \epsilon_c < a$, entonces $a > b - \epsilon_c = b - (b - c) = c$ i.e c no es cota superior de A. Luego, $b = sup(A)$. ■

Proposición 3: $b = \text{máx}(A) \iff b \in A \wedge b = \sup(A)$.
$\Rightarrow$) $b = \text{máx}(A) \Rightarrow a \leq b\ \forall a \in A \wedge b \in A$. Suponiendo que existe c cota superior del conjunto, como $b \in A$, contradice que c es cota superior, ergo b es supremo de A y $b \in A$
$\Leftarrow$) $b \in A \wedge b = \sup(A) \Rightarrow b \in A \wedge a \leq b \forall a \in A \Rightarrow b = \text{máx}(A)$ ■

Proposición 4: $b = \text{mín}(A) \iff b \in A \wedge b = \text{ínf}(A)$.
$\Rightarrow$) $b = \text{mín}(A) \Rightarrow b \leq a\ \forall a \in A \wedge b \in A$. Suponiendo que existe c cota inferior del conjunto, como $b \in A$, contradice que c es cota inferior, ergo b es infimo de A y $b \in A$
$\Leftarrow$) $b \in A \wedge b = \text{ínf}(A) \Rightarrow b \in A \wedge b \leq a \forall a \in A \Rightarrow b = \text{ínf}(A)$ ■

3.1. Axioma del Supremo

A10) Todo conjunto no vacío de números reales que sea acotado superiormente tiene un supremo.

Teorema 10: Existencia de Raices Cuadradas: Dado $a \geq 0$, existe un único $x \in \mathbb{R} : x \geq 0$ y $x^2 = a$.
D/ Si $a = 0$ es trivial. Si $a > 0$, sabemos que tiene dos soluciones (solo una es positiva). Se define el conjunto $S_a = \{x \in \mathbb{R} : x^2 \leq a\}$. Vemos que $S_a \neq \emptyset$ y que está acotado superiormente. Luego existe $b = sup(A)$. Luego, por tricotomía sacamos que $b^2 = a$. ■

Teorema 11: Propiedad Arquimediana de los Reales: Sean $x, y \in \mathbb{R}, x > 0 \Rightarrow \exists n \in \mathbb{N} : y < n \cdot x$.
D/ Va por absurdo, suponiendo $n \cdot x \leq y \ \forall n \in \mathbb{N}$. Definimos $S = \{n \cdot x : n \in \mathbb{N}\}$. S no es vacio, ergo existe $b = sup(S)$. Luego $\exists a \in S : b - x < a$ (Caracterización). Y se podria escribir como $a = m \cdot x$, $m \in \mathbb{N}$. Es decir, $b < mx + x = (m+1) \cdot x$. Pero $(m+1) \cdot x \in S$, y b no es cota superior de S, lo que contradice que $b = sup(S)$. Se contradice por suponer S acotado superiormente. Luego $\exists n \in \mathbb{N} : y < n \cdot x$ ■

Corolario 5:

- $\forall y \in \mathbb{R}, \exists n \in \mathbb{N} : y < N$.

Caso 1. Si $y \leq 0$ podemos tomar $n = 1$ i.e $y < n$

Caso 2. Si $y > 0$, aplicando la propiedad arquimediana, con $x = 1$, tenemos que $y < n$ ■

- $\mathbb{N}$ no está acotado superiormente.
  D/ Por contradicción, si $\mathbb{N}$ estuviese acotado, por $A10$ tiene supremo $b \in \mathbb{R}$. Sea $n \in \mathbb{N}$, podemos asegurar que $b < nx$ (con $x > 0$), por lo tanto $b < nx$, contradiciendo la $P.A.$ ■

- Sea $x > 0$, $\exists n \in \mathbb{N} : \frac{1}{n} < x$
  D/ $\frac{1}{n} < x \Rightarrow 1 < nx$ y al cumplir las hipótesis de la $P.A$, podemos asegurar que es válido. ■

- $x, y, z \in \mathbb{R}, z > 0$, si $x \leq y < x + \frac{z}{n} \ \forall n \in \mathbb{N}$ entonces $x = y$.
  D/ Supongo $x < y < x + \frac{z}{n}$, luego $0 < y - x < \frac{z}{n}$. Reemplazando $y - x$ por y', tenemos que $0 < y'n < z$, que contradice el teorema anterior. Luego, $x = y$ ■

- Si $|x| < \frac{1}{n} \ \forall n \in \mathbb{N}$, entonces $x = 0$.
  D/ Sabemos que $|x| \geq 0$. Pero si fuese $|x| > 0$, entonces $\exists n \in \mathbb{N} : \frac{1}{n} < x \therefore |x| = 0 \Rightarrow x = 0$ ■

- Si $|x| < \epsilon \ \forall \epsilon > 0$ entonces $x = 0$.
  D/ $0 \leq x < \epsilon \wedge 0 < \epsilon \Rightarrow 0 = x$ ■

Teorema 12: Si A está acotado inferiormente, entonces posee ínfimo.
D/ Sea m una cota inferior de A y H el conjunto de todas las cotas inferiores (no esta vacio pues $m \in H$), entonces H está acotado superiormente cualquier elemento de A, luego tiene supremo por $A10$. Sea $\mu = \sup(H) \Rightarrow \mu = \inf(A)$, pues $\forall x \in A \mu \leq x$ (pues es cota inferior de A) y además $\forall y \in H, y \leq \mu$ (pues es supremo de H). Luego μ es el ínfimo de A. ■

Corolario 6: Dado $x \in \mathbb{R}$, existe un único número p entero tal que $p \leq x < p+1$.

- Si $x \in \mathbb{Z}$, $p = x$ verifica.
- Sino, si $0 < x < 1$, entonces $p = 0$ verifica.
- Sino, sea $S = \{n \in \mathbb{N} : x < n\}$ es distinto de $\emptyset$. Está acotado inferiormente por x, y por la propiedad arquimediana, existe $n_0 > x$ y $n_0 \in S$. Luego existe un minimo m y $m - 1 \leq x < m$ $\notin S$. Luego, llamando $p = m - 1$, tenemos que $p \leq x < p+1$, siendo p único.
- Si $x < 0 \Rightarrow -x > 0$ y es análogo.

Y queda demostrado que cuaquiera sea $x \in \mathbb{R}$, existe un unico $p \in \mathbb{Z}$:

$$p \leq x < p+1$$

que suele notarse como $[x]$ y se denomina **parte entera** de x:

$$[x] \leq x < [x] + 1$$

$\blacksquare$