Introducción a la Matemática

Iker M. Canut

February 14, 2020

Contents

1 Conjuntos

1.1 Definiciones Básicas

Un Conjunto es una colección de objetos. Los conjuntos se denominan con letras mayúsculas. Y los elementos que lo forman con letras minúsculas. El conjunto vacio se denomina $\emptyset$.

1.2 Representación de conjuntos

- **Por Extensión**: Se lista todo entre llaves. $\{a, b, c, d, ...\}$
- **Por Comprension**: Se dicen las propiedades. $\{x/x...\}$

1.3 Subconjuntos

El conjunto B es subconjunto de A si y sólo si todo elemento de B, es también de A.

$$\boxed{B \subset A \iff (x \in B \Rightarrow x \in A)}$$

Dos conjuntos serán iguales cuando posean los mismos elementos.

$$\boxed{B = A \iff (A \subset B \wedge B \subset A)}$$

Al conjunto que contiene a todos los datos en un contexto específico lo denominaremos **Conjunto Universal** y se denota con la letra **U**.

1.4 Operaciones

- **Intersección de Conjuntos**: $A \cap B = \{x/x \in A \wedge x \in B\}$
- **Unión de Conjuntos**: $A \cup B = \{x/x \in A \vee x \in B\}$

Si dos conjuntos no tienen elementos en comun, entonces son **disjuntos**. A y B disjuntos $\iff A \cap B = \emptyset$

Propiedades	UNIÓN	INTERSECCIÓN
Conmutativa	$A \cup B = B \cup A$	$A \cap B = B \cap A$
Asociativa	$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$	$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$
Distributiva	$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$	$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$
Idempotencia	$A \cup A = A$	$A \cap A = A$

- **Diferencia**: $A - B = \{x/x \in A \wedge x \notin B\}$
- **Complemento**: $C_A = \overline{A} = U - A$. Se cumple que $A - B = A \cap \overline{B}$

Propiedades	
Complemento	$\overline{\overline{A}} = A$ $A \cup \overline{A} = U$ $A \cap \overline{A} = \emptyset$ $\overline{\emptyset} = U \wedge \overline{U} = \emptyset$
Leyes de Morgan	$\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$ $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$

- **Cardinal de un conjunto**: Es el número de elementos. $|A| = card(A)$

2 Números Reales

- **Naturales** N: $\{1,2,3,...\}$
- **Naturales con cero** N_0: $\{0,1,2,3,...\}$
- **Enteros** Z: $\{...,-3,-2,-1,0,1,2,3,...\}$
- **Racionales** Q=$\left\{x/x=\frac{p}{q}, p\in Z, q\in Z, q\neq 0\right\}$
- **Irracionales** I=$Q\cap I=\emptyset \wedge Q\cup I=R$

$$N\subset N_0\subset Z\subset Q\subset R\wedge I\subset R$$

2.1 Suma y Producto

	Suma	Producto
Conmutativa	$a+b=b+a$	$a.b=b.a$
Asociativa	$(a+b)+c=a+(b+c)$	$(a.b).c=a.(b.c)$
$\exists$ *Elemento Neutro*	$a+0=a$	$a.1=a$
$\exists$ *Elemento Inverso*	$a+(-a)=0$	$a.\frac{1}{a}=1$
Cancelativa	$a+b=a+c\Rightarrow b=c$	$a.b=a.c\Rightarrow b=c, a\neq 0$
Uniforme	$a=b\Rightarrow a+c=b+c$	$a=b\Rightarrow a.c=b.c$
Distributiva	$a.(b+c)=a.b+a.c$	

2.2 Resta y División

- $a-b=a+(-b)$
- $a:b=\dfrac{a}{b}=a.\dfrac{1}{b}$
- $\dfrac{p}{q}+\dfrac{r}{s}=\dfrac{ps+rq}{qs}, q\neq 0\wedge s\neq 0$
- $\dfrac{p}{q}.\dfrac{r}{s}=\dfrac{pr}{qs}, q\neq 0\wedge s\neq 0$
- $\dfrac{p}{q}\div\dfrac{r}{s}=\dfrac{ps}{qr}, q\neq 0\wedge s\neq 0\wedge r\neq 0$

2.3 Potenciación

- Si $a\neq 0, a^0=1$
- $a^1=a$
- Si $n\in N, n>1, a^n=\underbrace{a.a.....a}_{\text{n factores "a"}}$
- Si $a\in R\wedge a\neq 0\wedge n\in N, a^{-n}=\dfrac{1}{a^n}=\dfrac{1}{\underbrace{a.a.....a}_{\text{n veces}}}$

Distributiva respecto a la multiplicación	$(a.b)^n=a^n.b^n$
Distributiva respecto al cociente	$\left(\dfrac{a}{b}\right)^n=\dfrac{a^n}{b^n}, b\neq 0$
Producto de potencias de igual base	$a^n.a^m=a^{n+m}$
Cociente de potencias de igual base	$a^n\div a^m=a^{n-m}$
Potencia de potencia	$(a^n)^m=a^{n.m}$

2.4 Radicación

$\sqrt[n]{a} = b \iff b^n = a$ y se nombra $\sqrt[indice]{radicando}$ = raiz enesima

No existe en los reales la raiz cuadrada (y de ningún índice par) de números negativos. Es decir:

- Si **n** es un numero natural **impar**, entonces es valida para todo número real **a**.
- Si **n** es un numero natural **par**, entonces es valida para todo número real **a no negativo**.

$$\boxed{a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m} \wedge a^{-\frac{m}{n}} = \frac{1}{\sqrt[n]{a^m}}, a \neq 0}$$

Distributiva respecto al producto	$\sqrt[n]{a.b} = \sqrt[n]{a}.\sqrt[n]{b}$
Distributiva respecto al cociente	$\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$
Raiz de raiz	$\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[m.n]{a}$

2.5 Logaritmo

El logaritmo en base a de x es y y lo notamos $\log_a(x) = y$, como el numero al cual tengo que elevar a **a** para obtener **x**.

$$log_a(x) = y \iff a^y = x, \text{ se necesita que } a > 0 \wedge x > 0 \wedge a \neq 1$$

- $log_a(1) = 0$
- $log_a(a) = 1$
- $log_a(x.y) = log_a(x) + log_a(y)$
- $log_a\left(\frac{x}{y}\right) = log_a(x) - log_a(y)$
- $log_a(x^c) = c.log_a(x)$
- $a^{log_a(x)} = x$

$$\boxed{log_b(x) = \frac{log_a(x)}{log_a(b)}}$$

2.6 Formas Especiales

Binomio al Cuadrado ↔ Trinomio Cuadrado Perfecto

$$\boxed{(x+y)^2 = x^2 + 2xy + y^2}$$

Binomio al Cubo ↔ Cuatrinomio Cubo Perfecto

$$\boxed{(x+y)^3 = x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3}$$

Diferencia de Cuadrados

$$\boxed{(a-b).(a+b) = a^2 - b^2}$$

2.7 Relacion de Orden del Conjunto de los Numeros Reales

- $a < b$ si $0 < b - a$
- $a > b$ si $b < a$
- $a < b \wedge b < c \Rightarrow a < c$
- $a < b \Rightarrow a + c < b + c$
- $a < b \wedge c > 0 \Rightarrow a.c < b.c$
- $a < b \wedge c < 0 \Rightarrow a.c > b.c$

2.8 Valor Absoluto

Es la distancia que hay, en la recta numérica, desde su punto representativo al origen de coordenadas. El valor absoluto es será siempre un número positivo (o cero).

$$|x| = \begin{cases} x & \text{si } x \geq 0 \\ -x & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

- $|a| \geq 0$
- $|a|.|b| = |a|.|b|$
- $|a| = 0 \iff a = 0$
- $\left|\frac{a}{b}\right| = \frac{|a|}{|b|}, b \neq 0$
- $|-a| = |a|$
- $\sqrt{a^2} = |a|$

$\forall a, b \in R \wedge k > 0$

- $|a+b| \leq |a| + |b|$
- $|a-b| \geq ||a| - |b||$
- $|a| < k \iff -k < a < k$
- $|a| > k \iff (a > k \vee a < (-k))$

3 Números Complejos

Se define i como: $\boxed{i^2 = -1}$

3.1 Forma Binómica de un Número Complejo

$\boxed{z = a + bi}$ donde **a** y **b** son numeros reales, e **i** se define por la relacion $i^2 = -1$

El numero **a** = $Re(z)$ es la parte real de z y **b** = $Im(z)$ es la parte imaginaria de z.

3.2 La Unidad Imaginaria

El número **i** recibe el nombre de unidad imaginaria, aceptandose que se comporta como un número real.

- $i^r.i^s = i^{r+s}$
- $(i^r)^s = i^{r.s}$, con $r, s \in Z$
- $i^0 = 1$
- $i^1 = i$
- $i^2 = -1$
- $i^3 = -i$

$$\boxed{i^n = i^r, \text{ donde r=n\%4}}$$

3.3 El conjunto de los Números Complejos

Se simboliza con la C y contiene los números de la forma $a + bi$, donde $a, b \in R$ e **i** es la unidad imaginaria.

$$\boxed{C = \{z = a + bi / a, b \in R \wedge i^2 = -1\}}$$

- Los números reales son complejos $R \subset C$, ya que si $x \in R \Rightarrow x = x + 0i$.
- A los complejos de la forma bi (aquellos que su parte real es nula), se los llama imaginarios puros.

3.4 Definiciones

- **Igualdad de Números Complejos**: $z_1 = z_2 \iff (a_1 = a_2 \wedge b_1 = b_2)$.
- **Opuesto de un Número Complejo**: $-z = (-a) + (-b)i$.
- **Suma y Resta**: $z_1 + z_2 = (a_1 + a_2) + (b_1 + b_2)i$. De manera analoga, $z_1 - z_2 = (a_1 - a_2) + (b_1 - b_2)i$
- **Multiplicación**: $z_1.z_2 = (a_1.a_2 - b_1.b_2) + (a_2.b_1 + a_1.b_2)i$.
- **División**: $\dfrac{a+bi}{c+di} = \dfrac{ac+bd}{c^2+d^2} + \dfrac{bc-ad}{c^2+d^2}i$

3.5 Conjugado de un complejo

El conjugado de un número complejo $z = a + bi$ es $\overline{z} = a - bi$.

- $z = \overline{z} \iff z \in R$
- $z + \overline{z} = 2a$
- $z - \overline{z} = 2bi$
- $\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}$
- $\overline{z_1.z_2} = \overline{z_1}.\overline{z_2}$
- $-\overline{z} = \overline{-z}$
- $z.\overline{z} = a^2 + b^2 = Re(z)^2 + Im(z)^2$

3.6 Reciproco de un Complejo NO nulo

Definimos el reciproco de $z \neq 0, z \in C$, como aquel complejo w / $z \times w = 1$ y lo denotamos $z^{-1} = \frac{1}{z}$.

- $\overline{\left(\dfrac{z_1}{z_2}\right)} = \dfrac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}}, z_2 \neq 0$
- $\overline{\left(\dfrac{1}{z}\right)} = \dfrac{1}{\overline{z}}, z \neq 0$

4 Ecuaciones e Inecuaciones

Una **ecuación** es una igualdad entre dos expresiones algebraicas: $P(x) = Q(x)$. Resolverla consta de encontrar el o los valores numéricos de la incógnita que verifican la ecuación.

4.1 Ecuaciones Lineales

Una ecuación es **lineal** cuando se puede escribir de la forma: $\boxed{a.x + b = 0, \text{ con } a \neq 0}$

4.2 Ecuaciones Cuadráticas

Una ecuación es **cuadratica** cuando se puede escribir de la forma: $\boxed{a.x^2 + b.x + c = 0, \text{ con } a \neq 0}$

$$\boxed{x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}}$$

El numero $\triangle = b^2 - 4ac$ se llama ***discriminante*** y decide la naturaleza de las soluciones.

- Si $\triangle > 0$ entonces las dos soluciones son reales y distintas.
- Si $\triangle = 0$ entonces tiene una solución doble.
- Si $\triangle < 0$ entonces las dos soluciones son numeros complejos conjugados.

$$\boxed{\begin{aligned} x_1 + x_2 &= -\frac{b}{a} \\ x_1.x_2 &= \frac{c}{a} \end{aligned}}$$

4.3 Ecuaciones Bicuadrática

Una ecuación es **bicuadratica** cuando se puede escribir de la forma: $\boxed{a.x^4 + b.x^2 + c = 0, \text{ con } a \neq 0}$
Para resolverlas, primero se sustituye $y = x^2$ y despues se sigue normal.

4.4 Inecuaciones

Una **inecuación** es una desigualdad entre dos expresiones algebraicas: $P(x) \leq Q(x)$. Resolverla consta de encontrar el o los valores numéricos de la incógnita que verifican la ecuación.

5 Geometría

5.1 Ángulos

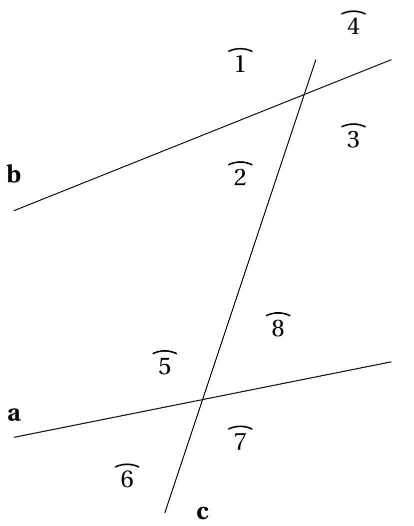
Se pueden clasificar como:

- Llano
- Recto
- Agudo
- Obtuso
- Nulo
- De una vuelta

Y los pares de ángulos se pueden clasificar como:

- Complementarios (90º)
- Suplementarios (180º)
- Consecutivos
- Adyacentes

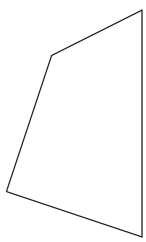
5.2 Ángulos Determinados por Dos Rectas y Una Transversal



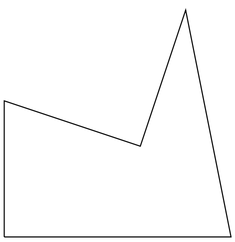
- $\widehat{2}$ y $\widehat{8}$ son alternos internos
- $\widehat{4}$ y $\widehat{6}$ son alternos externos
- $\widehat{4}$ y $\widehat{8}$ son correspondientes
- $\widehat{3}$ y $\widehat{8}$ son conjugados internos
- $\widehat{4}$ y $\widehat{7}$ son conjugados externos
- $\widehat{1}$ y $\widehat{3}$ son opuestos por el vértice

- Los ángulos correspondientes son congruentes $\iff$ las rectas a y b son paralelas.
- Los ángulos opuestos por el vértice son congruentes.
- Los ángulos alternos internos (externos) son congruentes $\iff$ las rectas a y b son paralelas.
- Los ángulos conjugados internos (externos) son suplementarios $\iff$ las rectas a y b son paralelas.

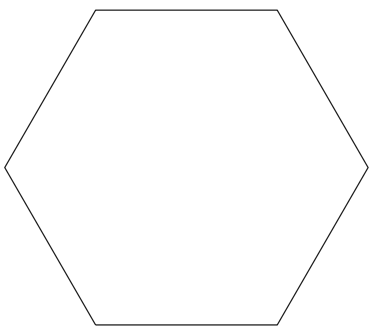
5.3 Polígonos



Polígono convexo



Polígono concavo



Polígono convexo regular

5.4 Triángulos

- Los triángulos se pueden clasificar...

- **según sus lados:**
  - Equilátero
  - Isósceles
  - Escaleno

- **según sus ángulos:**
  - Acutángulo
  - Rectángulo
  - Obtusángulo

- Los elementos de un triángulo son:

- **Mediana**: es el segmento que une el punto medio de un lado con el vértice opuesto al mismo.
- **Mediatriz**: es una recta perpendicular a un lado que pasa por su punto medio.
- **Altura**: es el segmento perpendicular a un lado que pasa por su vértice opuesto.
- **Bisectriz**: es la bisectriz de un ángulo.

- Y algunos puntos notables de un triángulo son:

- **Baricentro**: Las medianas se intersecan en un punto llamado baricentro, tal que su distancia a cada vértice es el doble a la distancia al punto medio del lado opuesto.
- **Circuncentro**: Las mediatrices se intersecan en un punto llamado circuncentro, que es el centro de la circunferencia circunscripta al triángulo.
- **Ortocentro**: Las rectas que contienen a las alturas se intersecan en un punto denominado ortocentro.
- **Incentro**: Las bisectrices se intersecan en un punto denominado incentro, que es el centro de una circunferencia inscripta en el triángulo.

5.5 Algunas Propiedades Importantes

- En un $\triangle$ cada lado es menor que la suma de los otros dos, y mayor que su diferencia.
- La suma de los ángulos interiores de un $\triangle$ es igual a un llano (180º).
- El ángulo exterior a un $\triangle$ es igual a la suma de los dos interiores no adyacentes a él.
- En un $\triangle$, a lados congruentes se oponen ángulos congruentes y viceversa.
- En un $\triangle$, a mayor lado se opone mayor ángulo y viceversa.

5.6 Congruencia de Triángulos

Dos triángulos son ***congruentes*** si tienen su lados y su ángulos respectivamente congruentes.
Dos triángulos son congruentes $\Longleftrightarrow$

- Sus **tres lados** son respectivamente congruentes.
- **Dos de sus lados y el ángulo comprendido** entre ellos son respectivamente congruentes.
- **Un lado y los ángulos con vértice en los extremos de dicho lado** son respectivamente congruentes.
- **Dos de sus lados y el ángulo opuesto al mayor de los lados** son respectivamente congruentes.

5.7 Semejanza de Triángulos

Dos $\triangle$ son ***semejantes*** si tienen sus ángulos congruentes y sus lados homólogos proporcionales.
Dos triángulos son semejantes $\iff$

- Sus **tres lados** son proporcionales.
- **Dos de sus lados** son proporcionales **y los ángulos comprendidos** entre ellos son congruentes.
- **Tiene un par de ángulos** respectivamente congruentes.

5.8 Polígonos (de más de tres lados)

Propiedades de polígonos convexos:
La suma de los ángulos interiores de un polígono de n lados se representa como:

$$\boxed{S_n = (n-2).180^{\text{o}}}$$

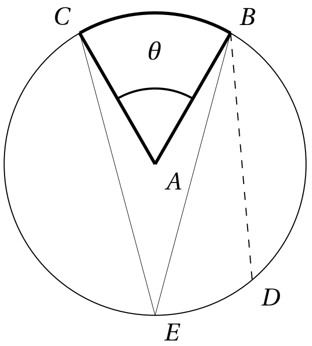
Esto es porque la suma de los ángulos exteriores de un polígono de n lados es igual a 360º.

5.9 Circunferencias

Se define a una circunferencia como el lugar geométrico de los puntos del plano que equidistan de uno fijo, llamado centro. Las posiciones relativas de una recta y una circunferencia, y entre dos circunferencias, son:

- Una recta es **exterior** a una circunferencia si no tienen puntos en común.
- Una recta es **tangente** a una circunferencia si tienen **solo** un punto en común.
- Una recta es **secante** a una circunferencia si se intersecan en dos puntos.
- Dos circunferencias son **secantes** si tienen dos puntos en común.
- Dos circunferencias son **tangentes** si tienen solo un punto en común.
- Dos circunferencias son **conceéntricas** si tienen el mismo centro.

5.10 Elementos de una Circunferencia



- **BD Cuerda**, segmento cuyos extremos están en la circunferencia.
- **CD Diámetro**, mayor de las cuerdas y contiene al centro de la circunferencia.
- **AC Radio**, segmento cuyos extremos son el centro de la circunferencia y un punto de la misma.
- $\widehat{CB}$ **arco**, subconjunto de la circunferencia.

- $C\hat{A}B$ **ángulo central** que se relaciona con el arco $\widehat{CB}$ es un ángulo cuyo vértice es el centro de la circunferencia y sus lados pasan por los extremos del arco al cual se lo relaciona.
- $C\hat{E}B$ **ángulo inscripto** en la circunferencia que abarca el arco $\widehat{CB}$, es un ángulo cuyo vértice está en la circunferencia y sus lados pasan por los extremos del arco al cual se lo relaciona.

Propiedades:

- $\boxed{C\hat{E}B = \frac{1}{2}C\hat{A}B}$ Un ángulo inscripto es congruente con la mitad del central que abarca el mismo arco.
- $\boxed{C\hat{E}B = C\hat{D}B}$ Los ángulos inscriptos en un mismo arco son congruentes.