Resolución de algunos ejercicios pertenecientes a la Práctica 2 (2da parte)

☞ **15. a)** A partir de la gráfica de la función cuadrática $f(x) = x^2$ se pide representar gráficamente las funciones definidas de la siguiente manera:

II. $f_2(x) = -x^2 + 4x - 3$

b) Utilizar las representaciones gráficas previas para hallar los conjuntos soluciones de las siguientes inecuaciones:

I. $-x^2 + 4x - 3 \geq 0$

✎ **a)** ¿Cómo podemos representar gráficamente a $f_2(x) = -x^2 + 4x - 3$ a partir de la gráfica de $f(x) = x^2$? En una primera instancia podríamos pensar en, por ejemplo, seguir los siguientes pasos:

- Comenzamos con la gráfica de $f(x) = x^2$.
- Seguimos con $g_1(x) = -f(x) = -x^2$ (reflexión de la gráfica de f respecto del eje y).
- Seguimos con $g_2(x) = g_1(x) - 3 = -x^2 - 3$ (traslación vertical de la gráfica de g_1 hacia abajo en 3 unidades).
- Finalizamos con $f_2(x) = g_2(x) + 4x = -x^2 + 4x - 3$.

Sin embargo, todo este procedimiento no sirve ya que este último paso (sumar $4x$) no corresponde a una de las transformaciones para graficar funciones a partir de otras ya conocidas.

¿Qué hacemos entonces? Debemos de alguna manera reescribir la ley de la función $f_2(x) = -x^2+4x-3$ para que pueda ser representada mediante transformaciones de la gráfica de $f(x) = x^2$.

Observemos que f_2 es una función cuadrática (polinomio de grado 2). Lo que podemos hacer entonces es el procedimiento conocido como **completar cuadrados** para reescribir la ley de:

$$f_2(x) = -x^2 + 4x - 3.$$

En primer lugar, sacamos de factor común el coeficiente principal, es decir el que acompaña a x^2 (en este caso -1), en los dos primeros sumandos:

$$f_2(x) = -(x^2 - 4x) - 3.$$

La idea va a ser formar un cuadrado binomio perfecto en el paréntesis, es decir una expresión de la forma $x^2 + 2ax + a^2$. Para ello, reescribamos f_2 del siguiente modo:

$$f_2(x) = -(x^2 + 2 \cdot \underbrace{(-2)}_{a} \cdot x) - 3.$$

Ya tenemos x^2+2ax dentro del paréntesis. Nos está faltando sumar a^2 para que sea un cuadrado binomio perfecto. Como no podemos alterar el resultado, sumamos y restamos $a^2 = (-2)^2$:

$$f_2(x) = -(x^2 + 2 \cdot \underbrace{(-2)}_{a} \cdot x + \underbrace{(-2)^2}_{a^2} - \underbrace{(-2)^2}_{a^2}) - 3 = -(x^2 + 2 \cdot \underbrace{(-2)}_{a} \cdot x + \underbrace{(-2)^2}_{a^2} - 4) - 3.$$

Distribuimos el factor común (-1) con el término que acabamos de restar $(-a^2 = -4)$ para sacarlo del paréntesis:

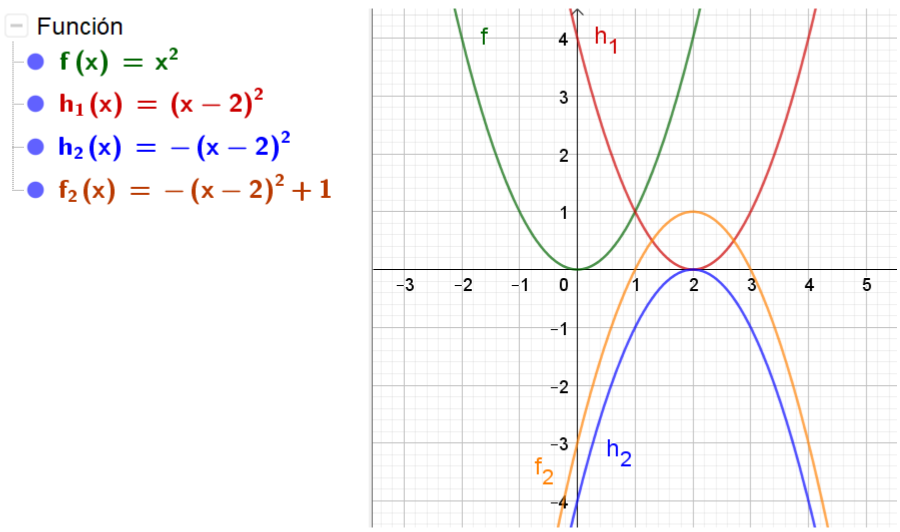
$$f_2(x) = -(x^2 + 2 \cdot \underbrace{(-2)}_{a} \cdot x + \underbrace{(-2)^2}_{a^2}) + 4 - 3 = -(x^2 + 2 \cdot \underbrace{(-2)}_{a} \cdot x + \underbrace{(-2)^2}_{a^2}) + 1.$$

Ahora sí, la expresión que está entre paréntesis corresponde a un binomio cuadrado perfecto, y recordando que $x^2 + 2ax + a^2 = (x + a)^2$ finalmente resulta:

$$f_2(x) = -(x + \underbrace{(-2)}_{a})^2 + 1 = -(x - 2)^2 + 1.$$

Y ahora sí, estamos en condiciones de graficar f_2 a partir de la gráfica de $f(x) = x^2$:

- Comenzamos con la gráfica de $f(x) = x^2$.
- Seguimos con $h_1(x) = f(x - 2) = (x - 2)^2$ (traslación horizontal de la gráfica de f hacia la derecha en 2 unidades).
- Seguimos con $h_2(x) = -h_1(x) = -(x - 2)^2$ (reflexión de la gráfica de h_1 respecto del eje y).
- Finalizamos con $f_2(x) = h_2(x) + 1 = -(x - 2)^2 + 1$ (traslación vertical de la gráfica de h_2 hacia arriba en 1 unidad).



Observación: Para ver cómo se completa cuadrados en el caso general de una función cuadrática, ver página 11 de la teoría de la Unidad 2.

b) Lo que estamos buscando son los valores de x para los cuales $f_2(x) \geq 0$. Gráficamente, esto se puede ver como los valores de x (abscisa) para los cuales la imagen de f_2 (ordenada) está por encima o justo sobre el eje y. Entonces, utilizando la representación gráfica del apartado anterior, deducimos que el conjunto solución de $f_2(x) \geq 0$ es el intervalo cerrado $[1, 3]$.

ESCUELA DE CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
Av. Pellegrini 250. Rosario
+54 0341 - 480 2649 internos 216 - 119

☞ **16. a)** Hallar los valores del parámetro $\alpha \in \mathbb{R}$ para los cuales la función $f(x) = -x^2 + x + 4\alpha$ no posee ceros reales.

b) Hallar los valores del parámetro $\alpha \in \mathbb{R}$ para los cuales la gráfica de la función $f(x) = x^2 + 3\alpha x + 4$ interseca a la gráfica de la función $g(x) = x$ en dos puntos distintos.

c) Demostrar la siguiente proposición:

$$x \in \mathbb{R} \implies 4x^2 - x \geq -\frac{1}{16}.$$

✎ **a)** Buscamos α / $f(x) = -x^2 + x + 4\alpha$ no tenga ceros reales. Es decir, queremos hallar:

$\alpha / f(x) \neq 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Para ello veamos las raíces de la ecuación cuadrática $ax^2+bx+c = 0$ con $a = -1, b = 1, c = 4\alpha$:

$$x_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4(-1)(4\alpha)}}{2(-1)} = \frac{-1 \pm \sqrt{1 + 16\alpha}}{2(-1)}.$$

Dado que el término $\Delta = b^2 - 4ac = 1 + 16\alpha$ está dentro de la raíz cuadrada, no existirán raíces reales cuando Δ sea menor que cero. Por lo tanto, $f(x)$ no tendrá ceros reales cuando:

$\Delta < 0 \Rightarrow 1 + 16\alpha < 0 \Rightarrow \alpha < -\dfrac{1}{16}$.

b) Buscamos $\alpha / f(x) = g(x)$ para dos valores distintos de x. Es decir, queremos encontrar:

α tal que $x^2 + 3\alpha x + 4 = x$ para dos valores diferentes de x,

o lo que es lo mismo, queremos hallar:

α tal que $x^2 + 3\alpha x + 4 - x = 0$ tenga dos soluciones diferentes.

Esto es equivalente a buscar los α que hacen que la función:

$h(x) = x^2 + 3\alpha x + 4 - x = x^2 + (3\alpha - 1)x + 4$ tenga dos raíces reales.

De manera similar a lo que hicimos en el apartado **a**, podemos encontrar las raíces de $h(x)$ resolviendo:

$$x_{1,2} = \frac{-(3\alpha - 1) \pm \sqrt{(3\alpha - 1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 4}}{2 \cdot 1}.$$

Para que $h(x)$ posea dos raíces reales, el término $\Delta = (3\alpha - 1)^2 - 16$ tiene que ser positivo. Por lo tanto, el resultado deseado lo conseguiremos resolviendo:

$\Delta = (3\alpha - 1)^2 - 16 > 0 \Rightarrow (3\alpha - 1)^2 > 16 \Rightarrow |3\alpha - 1| > 4 \Rightarrow (3\alpha - 1 > 4) \vee (3\alpha - 1 < -4) \Rightarrow \left(\alpha > \dfrac{5}{3}\right) \vee (\alpha < -1)$.

c) $x \in \mathbb{R} \Rightarrow \exists f(x) : \mathbb{R} \to \mathbb{R} / f(x) = 4x^2 - x$.

Dado que es una función cuadrática con $a = 4 > 0$, podemos asegurar que tendrá un mínimo en $x_v = \dfrac{-b}{2a} = \dfrac{1}{8}$.

$$f(x_v) = 4 \cdot \frac{1}{64} - \frac{1}{8} = \frac{1}{16} - \frac{1}{8} = -\frac{1}{16}.$$

Por lo tanto, $\min f(x) = -\dfrac{1}{16} \Rightarrow f(x) \geq -\dfrac{1}{16}$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

Es decir, demostramos que $x \in \mathbb{R} \Rightarrow 4x^2 - x \geq -\dfrac{1}{16}$.

☞ **17.** Se arroja una pelota hacia arriba con una velocidad inicial de $30m/seg$ por lo que la altura h que alcanza t segundos después está dada por la expresión

$$h = (30t - 4{,}9t^2)m.$$

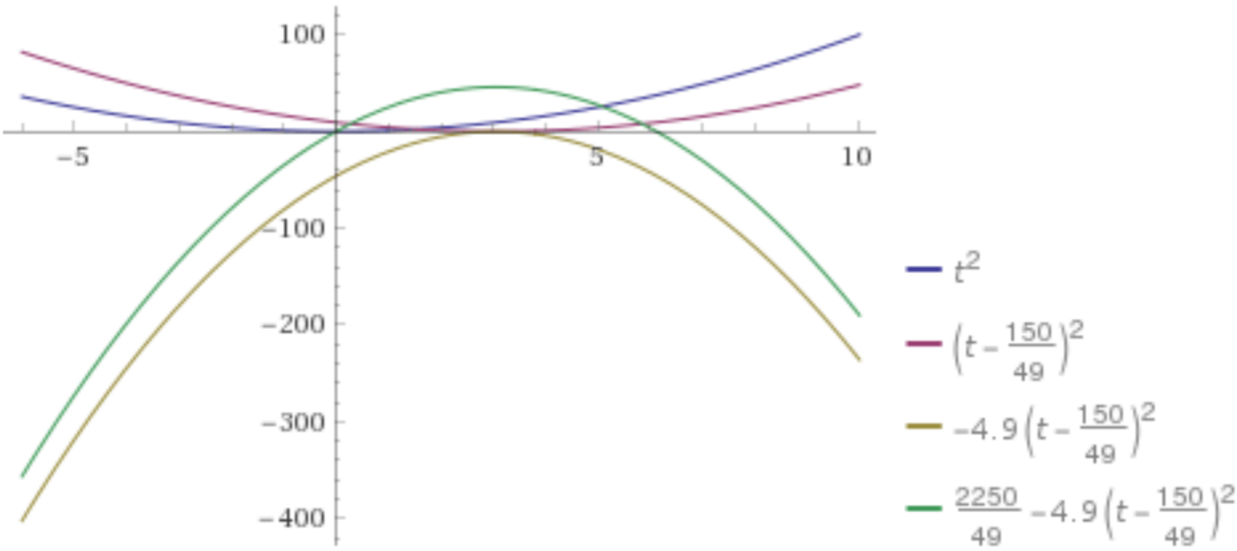
Determinar la altura máxima que alcanza la pelota, representando la gráfica de la altura h como función del tiempo t.

✎

$h(t) = (30t - 4,9t^2)m = (-4,9t^2 + 30t)m$ es una función cuadrática con $a = -4,9 < 0 \Rightarrow \exists \max h(t)$. Para graficarla, nos armamos el binomio cuadrado perfecto (los pasos se dejan de tarea, el método es idéntico al enunciado en la página 11 del apunte de funciones reales, y trabajados en un ejemplo en el Ejercicio 15):

$$h(t) = -4,9\left(t - \frac{150}{49}\right)^2 + \frac{2250}{49}$$

A continuación se muestran los pasos para graficar $h(x)$ desde la función conocida $f(t) = t^2$:



El máximo está en $t_v = \dfrac{150}{49}$ y vale $h(t_v) = \dfrac{2250}{49}$.

Observación: Además de utilizar un método gráfico, como pedía el ejercicio, podíamos hacer dos cosas diferentes para encontrar el máximo.

Por un lado, se podría encontrar el máximo de forma analítica, buscando el valor de t_v en el vértice de la parábola:
$t_v = \dfrac{-b}{2a} = \dfrac{-30}{-4,9} = \dfrac{150}{49}$. Para obtener el máximo, evaluamos la función en este valor, es decir, calculamos: $h(t_v) = \dfrac{2250}{49} \simeq 45{,}918m$.

ESCUELA DE CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
Av. Pellegrini 250. Rosario
+54 0341 - 480 2649 internos 216 - 119

Por otro lado, una vez que tenemos la función escrita en forma de binomio cuadrado $h(t) = -4,9\left(t - \dfrac{150}{49}\right)^2 + \dfrac{2250}{49}$, podiamos darnos cuenta del resultado sin hacer la gráfica, notando que el primer término de $h(t)$, es decir, $-4,9\left(t - \dfrac{150}{49}\right)^2$ es siempre negativo (dado que es un número negativo multiplicado por un número al cuadrado), es decir que el máximo debe darse cuando ese término es cero, y por lo tanto deducimos que el valor máximo debe ser $h(t_v) = \dfrac{2250}{49}$.

☞ **18.** Entre todos los pares de números reales x e y tales que $x + y = 1$, hallar aquéllos pares para los cuales el producto $x \cdot y$ es máximo.

✎ Debemos encontrar dos números tales que su multiplicación sea máxima, sujeto a la condición de que $x + y = 1$, es decir

$$\text{máx} \;\; x \cdot y$$
$$s/a \;\; x + y = 1$$

Entonces, hasta ahora tenemos un problema que está involucrando a dos incógnitas, es decir, x e y. Sin embargo, si miramos la condición s/a, podemos elaborar una expresión que dependa solo de una incógnita. En efecto,

$$x + y = 1 \Rightarrow y = 1 - x. \;\; (1)$$

Luego, si en $x \cdot y$ reemplazamos por la expresión en (1), tenemos que

$$x \cdot y = x \cdot (1 - x) = x - x^2. \;\; (2)$$

Ahora tenemos una expresión que depende solo de x, por lo que podemos considerar la función f cuya ley es $f(x) = x - x^2$. Por lo tanto, la función f es una función cuadrática con $a = -1 < 0$.

Notemos que el x que maximiza a $x \cdot y$ es el mismo que valor de abscisa del vértice de la parábola, es decir, de la gráfica de f

Luego,

$$x_v = \frac{-b}{2a} = \frac{-1}{2 \cdot (-1)} = \frac{1}{2}.$$

Ahora, para determinar el valor de y, volvemos a (1)

$$y = 1 - x = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}.$$

Por lo tanto, los números son

$$x = y = \frac{1}{2}.$$

☞ **24.** Hallar el dominio y la ley de cada una de las funciones compuestas $h = f \circ g$ y $r = g \circ f$ si :

a) $f(x) = \sqrt{x+1}, \quad g(x) = x^2$.

b) $f(x) = \sqrt{3x+1}, \quad g(x) = f^{-1}(x)$.

✎

a) Veamos primero cuáles son los dominios de las funciones f y g:

$$Dom\ f = \{x \in \mathbb{R} /\ x+1 \geq 0\} = \{x \in \mathbb{R} /\ x \geq -1\} = [-1, +\infty) \quad y \quad Dom\ g = \mathbb{R}.$$

- Ahora obtengamos el dominio de la función $h = f \circ g$ y luego su ley.

$$Dom\ h = \{x \in Dom\ g /\ g(x) \in Dom\ f\} = \{x \in \mathbb{R} /\ x^2 \in [-1, +\infty)\} = \mathbb{R}.$$

Sea $x \in Dom\ h$, resulta:

$$h(x) = (f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(x^2) = \sqrt{x^2+1}.$$

- A continuación hallamos el dominio de la función $r = g \circ f$ y su ley.

$$Dom\ r = \{x \in Dom\ f /\ f(x) \in Dom\ g\} = \{x \in [-1, +\infty) /\ \sqrt{x+1} \in \mathbb{R}\} = [-1, +\infty).$$

Sea $x \in Dom\ r$, luego:

$$r(x) = (g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(\sqrt{x+1}) = \left(\sqrt{x+1}\right)^2 = x+1.$$

b) Determinemos el dominio de las funciones f, g y la ley de g para luego poder obtener la composición de dichas funciones.

$$Dom\ f = \{x \in \mathbb{R} /\ 3x+1 \geq 0\} = \left\{x \in \mathbb{R} /\ x \geq \frac{-1}{3}\right\} = \left[\frac{-1}{3}, +\infty\right).$$

Veamos que $Rec\ f = \mathbb{R}_0^+$, para eso probemos la doble contención:

$\subseteq$ Sea $y \in Rec\ f$ luego existe $x \in Dom\ f$ tal que $f(x) = y$, luego

$x \in Dom\ f \Leftrightarrow x \geq \dfrac{-1}{3} \Leftrightarrow 3x \geq -1 \Leftrightarrow 3x+1 \geq 0 \Leftrightarrow \sqrt{3x+1} \geq 0 \Leftrightarrow f(x) = y \geq 0$.

Así tenemos que $Rec\ f \subseteq \mathbb{R}_0^+ \quad (i)$.

$\supseteq$ Sea $y \in \mathbb{R}_0^+$, ¿$y \in Rec\ f$? es decir ¿existe $x \in Dom\ f\ /\ f(x) = y$?

Considero $x = \dfrac{y^2-1}{3}$ (ver Cálculos auxiliares abajo en $(*)$).

- $y \geq 0 \Rightarrow y^2 \geq 0 \Rightarrow y^2 - 1 \geq -1 \Rightarrow x = \dfrac{y^2-1}{3} \geq \dfrac{-1}{3} \Rightarrow x \geq \dfrac{-1}{3} \Rightarrow x \in Dom\ f$.

ESCUELA DE CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
Av. Pellegrini 250. Rosario
+54 0341 - 480 2649 internos 216 - 119

- $f(x) = f(\frac{y^2-1}{3}) = y$
  Por lo tanto $y \in Rec\ f$.

Así tenemos que $\mathbb{R}_0^+ \subseteq Rec\ f$ (ii).
De (i) y (ii) $Rec\ f = \mathbb{R}_0^+$.

$(*)$ Cálculos auxiliares :

$$f(x) = y \Leftrightarrow \sqrt{3x+1} = y \underbrace{\Leftrightarrow}_{y \in \mathbb{R}_0^+} 3x+1 = y^2 \Leftrightarrow 3x = y^2 - 1 \Leftrightarrow x = \frac{y^2-1}{3}.$$

Así $f^{-1} : \mathbb{R}_0^+ \to \left[\frac{-1}{3}, +\infty\right)$ y $Dom\ g = Dom\ f^{-1} = \mathbb{R}_0^+$.
Buscamos la ley de $g = f^{-1}$, por definición de función inversa sabemos que:

$$f(x) = y \Leftrightarrow f^{-1}(y) = x,$$

luego,

$$\sqrt{3x+1} = y \underbrace{\Leftrightarrow}_{y \in \mathbb{R}_0^+} 3x+1 = y^2 \Leftrightarrow 3x = y^2 - 1 \Leftrightarrow x = \frac{y^2-1}{3} \Leftrightarrow f^{-1}(y) = \frac{y^2-1}{3}.$$

Por lo tanto,

$$g : \mathbb{R}_0^+ \to \left[\frac{-1}{3}, +\infty\right)$$

$$x \mapsto g(x) = \frac{x^2-1}{3}$$

- Calculamos el dominio de la función $h = f \circ g$ y luego su ley

$$Dom\ h = \{x \in Dom\ g\ /\ \ g(x) \in Dom\ f\} = \left\{x \in \mathbb{R}_0^+ /\ \ \frac{x^2-1}{3} \in \left[\frac{-1}{3}, +\infty\right)\right\} = \mathbb{R}_0^+.$$

  Sea $x \in Dom\ h$, resulta:

$$h(x) = (f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(f^{-1}(x)) = x.$$

- El dominio de la función $r = g \circ f$ y su ley es:

$$\begin{aligned} Dom\ r = &\ \ \{x \in Dom\ f /\ \ f(x) \in Dom\ g\} = \\ = &\ \ \left\{x \in \left[\frac{-1}{3}, +\infty\right) /\ \sqrt{3x+1} \in \mathbb{R}_0^+\right\} = \left[\frac{-1}{3}, +\infty\right). \end{aligned}$$

$$r(x) = (g \circ f)(x) = g(f(x)) = f^{-1}(f(x)) = x.$$

☞ **25.** Dadas las siguientes funciones:

$$f_1(x) = x^2 + 3 \quad si\ x \le 0, \qquad f_2(x) = \frac{x-2}{x+2}, \text{ si } x > -2, \qquad f_3(x) = \begin{cases} x & \text{si } x < 1, \\ x^2 & \text{si } 1 \le x \le 4, \\ 8\sqrt{x} & \text{si } 4 < x. \end{cases}$$

Para cada $i \in \{1, 2, 3\}$, se pide:

a) Demostrar que la función f_i es inyectiva.

b) Simbolizar con g_i la inversa de la función f_i, describir su dominio.

c) Hallar una expresión para obtener $g_i(y)$ para todo y perteneciente al dominio de la función g_i.

d) A partir de la gráfica de la función f_i, representar gráficamente la función g_i.

✎ Se presenta a continuación la resolución de este ejercicio para la función f_2.

Cálculos auxiliares: $\dfrac{x-2}{x+2} = \dfrac{x+2-2-2}{x+2} = \dfrac{x+2-4}{x+2} = 1 - \dfrac{4}{x+2}$.

Por lo tanto $f_2(x) = 1 - \dfrac{4}{x+2}$ si $x > -2$.

a) $Dom\ f_2 = (-2, +\infty)$

Sean $x_1, x_2 \in Dom\ f_2$ tal que $x_1 \neq x_2$, luego:

$$x_1 \neq x_2 \Rightarrow$$

$$x_1 + 2 \neq x_2 + 2 \underbrace{\Rightarrow}_{x_1+2>0,\ x_2+2>0} \frac{1}{x_1+2} \neq \frac{1}{x_2+2} \Rightarrow$$

$$\frac{4}{x_1+2} \neq \frac{4}{x_2+2} \Rightarrow -\frac{4}{x_1+2} \neq -\frac{4}{x_2+2} \Rightarrow$$

$$1 - \frac{4}{x_1+2} \neq 1 - \frac{4}{x_2+2} \Rightarrow f_2(x_1) \neq f_2(x_2)$$

Por lo tanto, f_2 es una función inyectiva.

b) Para hallar g_2 (función inversa de f_2) veamos primero cuál es el recorrido de f_2 ya que el $Rec\ f_2 = Dom\ g_2$.

Sea $x \in Dom\ f_2 = (-2, +\infty)$,

$x > -2 \Leftrightarrow x + 2 > 0 \Leftrightarrow \dfrac{1}{x+2} > 0 \Leftrightarrow \dfrac{4}{x+2} > 0 \Leftrightarrow -\dfrac{4}{x+2} < 0 \Leftrightarrow$

$1 - \dfrac{4}{x+2} < 1 \Leftrightarrow f_2(x) < 1. \quad (*)$

Veamos que $Rec\ f_2 = (-\infty, 1)$, para eso probemos la doble contención:

$\subseteq$ Sea $y \in Rec\ f_2$ luego existe $x \in Dom\ f_2$ tal que $f_2(x) = y$, luego por lo realizado en $(*)$ resulta que $y = f_2(x) \in (-\infty, 1)$.

Así tenemos que $Rec\ f_2 \subseteq (-\infty, 1) \quad (i)$.

$\supseteq$ Sea $y \in (-\infty, 1)$, ¿$y \in Rec\ f_2$? es decir ¿existe $x \in Dom\ f_2\ /\ f_2(x) = y$?

Considero $x = \dfrac{4}{1-y} - 2$ (ver Cálculos Auxiliares abajo en $(**)$).

ESCUELA DE CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
Av. Pellegrini 250. Rosario
+54 0341 - 480 2649 internos 216 - 119

- $f_2(x) = f_2\left(\frac{4}{1-y} - 2\right) = 1 - \frac{4}{\frac{4}{1-y} - 2 + 2} = 1 - \frac{4}{\frac{4}{1-y}} = 1 - 4\frac{1-y}{4} = 1 - (1-y) = 1 - 1 + y = y.$

- Veamos que $x = \frac{4}{1-y} - 2 \in Dom\ f_2$, en efecto:

$$y < 1 \Rightarrow -y > -1 \Rightarrow 1 - y > 0 \Rightarrow \frac{1}{1-y} > 0 \Rightarrow \frac{4}{1-y} > 0 \Rightarrow \frac{4}{1-y} - 2 > -2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x = \frac{4}{1-y} - 2 \in Dom\ f_2 = (-2, +\infty)$$

Por lo tanto $y \in Rec\ f_2$.

Así tenemos que $(-\infty, 1) \subseteq Rec\ f_2 \quad (ii)$.
De (i) y (ii), $Rec\ f_2 = (-\infty, 1)$.
Por lo tanto,

$$Rec\ f_2 = (-\infty, 1) = Dom\ g_2.$$

$(**)$ Cálculos Auxiliares:

$$f(x) = 1 - \frac{4}{x+2} = y \ \Rightarrow\ 1 - \frac{4}{x+2} = y \ \Rightarrow$$
$$\Rightarrow\ \frac{4}{x+2} = -y + 1 \ \Rightarrow\ \frac{1}{x+2} = \frac{1-y}{4} \ \Rightarrow$$
$$\Rightarrow\ x + 2 = \frac{4}{1-y} \ \Rightarrow\ x = \frac{4}{1-y} - 2$$

c) Por definición de función inversa sabemos que $f_2(x) = y \Leftrightarrow g_2(y) = x$, luego:

$$1 - \frac{4}{x+2} = y \ \Rightarrow\ 1 - \frac{4}{x+2} = y \ \Rightarrow$$
$$\Rightarrow\ \frac{4}{x+2} = -y + 1 \ \Rightarrow\ \frac{1}{x+2} = \frac{1-y}{4} \ \Rightarrow$$
$$\Rightarrow\ x + 2 = \frac{4}{1-y} \ \Rightarrow\ x = \frac{4}{1-y} - 2 \ \Rightarrow$$
$$\Rightarrow\ g_2(y) = \frac{4}{1-y} - 2.$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned} g_2 : (-\infty, 1) &\quad\to\quad (-2, +\infty) \\ x &\quad\longmapsto\quad g_2(x) = \frac{4}{1-x} - 2. \end{aligned}$$

d) Dejamos este ítem para que lo grafiquen ustedes.

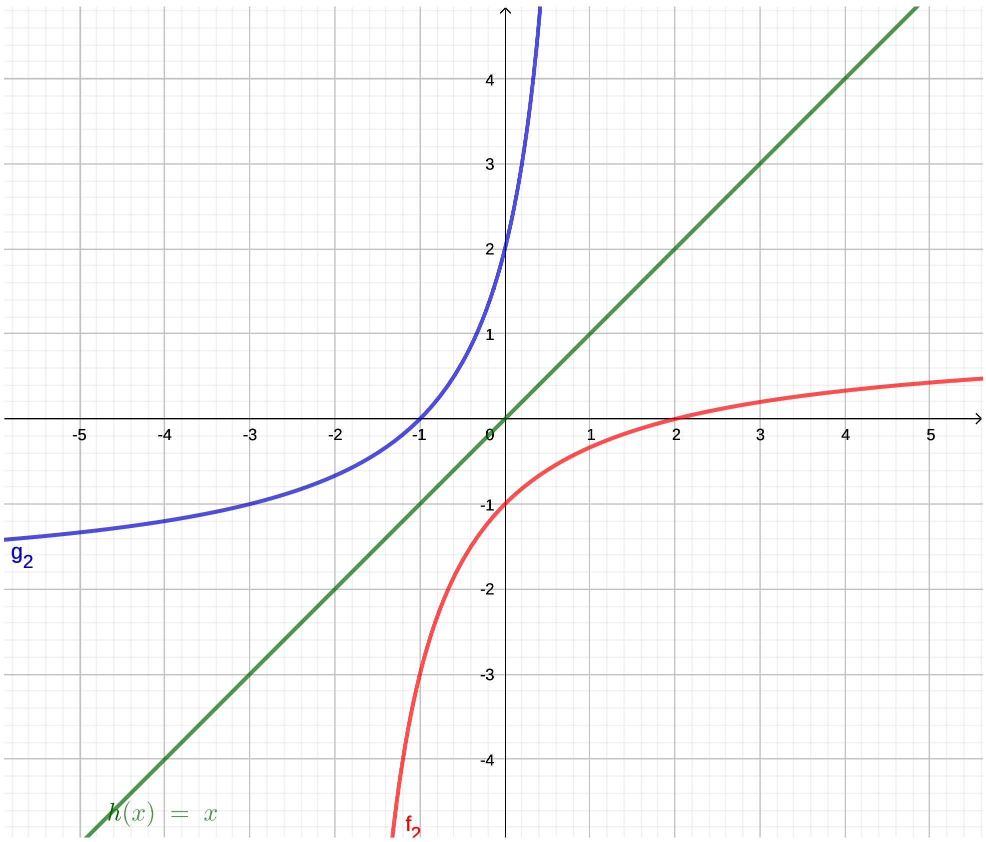
Ayuda: Les sugerimos que dibujen primero la gráfica de la función f_2 a partir de corrimientos de la gráfica de $\frac{1}{x}$ en el dominio indicado. Es decir, graficar:

1. $h_1(x) = \frac{1}{x}$.
2. $h_2(x) = \frac{1}{x+2}$ ¿Cuál es el corrimiento que debemos realizar para graficar h_2 a partir de h_1?
3. $h_3(x) = -\frac{4}{x+2}$ ¿Cómo obtenemos su gráfica a partir de la gráfica de h_2?
4. $f_2(x) = 1 - \frac{4}{x+2}$ ¿Cómo obtenemos su gráfica a partir de la gráfica de h_3?

A continuación realiza la grafica la función $h(x) = x$.

Luego la gráfica de la función g_2 es la simétrica de la de f_2 respecto de la recta $y = x$ (gráfica de la función h).

Así obtendrás el siguiente gráfico:



☞ **29.** Hallar dominio e imagen de cada una de las siguientes funciones y representarlas gráficamente. Estudiar crecimiento y decrecimiento.

$$f_1(x) = \arccos\left(\frac{x}{2}\right).$$

ESCUELA DE CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
Av. Pellegrini 250. Rosario
+54 0341 - 480 2649 internos 216 - 119

✎ Para analizar las propiedades de la función $f_1(x) = \arccos\left(\frac{x}{2}\right)$ podemos observar que se trata de una composición:

$$\left.\begin{array}{l} g_1(x) = \arccos(x) \\ h_1(x) = \dfrac{x}{2} \end{array}\right\} \Rightarrow f_1 = g_1 \circ h_1.$$

Siendo h_1 una función lineal, $\text{Dom}(h_1) = \mathbb{R}$.

Para analizar el recorrido de h_1, sea $z \in \mathbb{R}$. Luego, considerando $x = z \cdot 2$, se tiene que $w \in \mathbb{R}$ y resulta $h_1(w) = \frac{w}{2} = \frac{z \cdot 2}{2} = z$, es decir, w es una preimagen de z. Por lo tanto, $\text{Im}(h_1) = \mathbb{R}$.

La función g_1 es la inversa de la función coseno.

Como la función coseno no es inyectiva en su dominio natural $\mathbb{R}$, para poder definir su inversa se restringe el dominio a donde sí lo sea, por ejemplo, en $[0, \pi]$. Luego,

$$\begin{array}{rccc} \cos: & [0,\pi] & \longrightarrow & [-1,1] \\ \arccos: & [-1,1] & \longrightarrow & [0,\pi] \end{array}$$

Entonces, $\text{Dom}(g_1) = \text{Im}(\cos) = [-1, 1]$ y $\text{Im}(g_1) = \text{Dom}(\cos) = [0, \pi]$.

Ahora podemos analizar el dominio de f_1 recordando que es una composición.

$$\begin{aligned} \text{Dom}(f_1) = \text{Dom}(g_1 \circ h_1) = &\ \{x \in \text{Dom}(h_1)\ /\ h_1(x) \in \text{Dom}(g_1)\} = \\ = &\ \{x \in \mathbb{R}\ /\ h_1(x) \in [-1,1]\} = \\ = &\ \{x \in \mathbb{R}\ /\ -1 \leqq h_1(x) \leqq 1\} = \\ = &\ \left\{x \in \mathbb{R}\ /\ -1 \leqq \frac{x}{2} \leqq 1\right\} = \\ = &\ \{x \in \mathbb{R}\ /\ -2 \leqq x \leqq 2\} = [-2, 2]. \end{aligned}$$

Como $\text{Im}(g_1) = [0, \pi]$, se sabe que

$$\text{Im}(f_1) \subset [0, \pi]. \tag{1}$$

Sea $\tilde{z} \in [0, \pi]$. Como $\arccos$ es biyectiva (por tener inversa), sabemos que $\exists\, \tilde{y} \in [-1, 1]$ / $g_1(\tilde{y}) = \tilde{z}$. Luego, considerando $\tilde{x} = 2\tilde{y} \in \mathbb{R}$, resulta

$$f_1(\tilde{x}) = (g_1 \circ h_1)(\tilde{x}) = g_1[h_1(\tilde{x})] = g_1\left[\frac{\tilde{x}}{2}\right] = g_1\left[\frac{\tilde{y}2}{2}\right] = g_1[\tilde{y}] = \tilde{z},$$

es decir, $\tilde{x} \in f_1^{-1}(\tilde{z})$. Por lo que

$$[0, \pi] \subset \text{Im}(f_1). \tag{2}$$

Por lo tanto, de (1) y (2), se tiene que $\text{Im}(f_1) = [0, \pi]$.

Para analizar el crecimiento o decrecimiento de la función f_1 podemos utilizar alguna identidad trigonométrica. Por ejemplo,

$$\cos(a) - \cos(b) = -2\sin\left(\frac{a-b}{2}\right)\sin\left(\frac{a+b}{2}\right), \quad a, b \in \mathbb{R}. \tag{3}$$

Primero, vamos a mostrar que la función coseno es decreciente en $[0, \pi]$ y luego, que dicha propiedad la hereda su función inversa.

Para esto, consideremos $0 \leqq x_1 < x_2 \leqq \pi$. Utilizando (3), resulta

$$\cos(x_2) - \cos(x_1) = -2 \sin\left(\frac{x_2 - x_1}{2}\right) \sin\left(\frac{x_2 + x_1}{2}\right). \tag{4}$$

Como $\cos(x_2) < \cos(x_1) \Leftrightarrow \cos(x_2) - \cos(x_1) < 0$, vamos a analizar el signo de la parte derecha de la igualdad (4).

$$x_1,\ x_2 \in [0, \pi] \Rightarrow 0 < x_2 - x_1 \leqq \pi \Rightarrow 0 < \frac{x_2 - x_1}{2} \leqq \frac{\pi}{2} \Rightarrow \sin\left(\frac{x_2 - x_1}{2}\right) > 0. \tag{5}$$

Además,

$$x_1 < \frac{x_1 + x_2}{2} < x_2 \Rightarrow \frac{x_1 + x_2}{2} \in (0, \pi) \Rightarrow \sin\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) > 0. \tag{6}$$

Por lo tanto, de (5) y (6), vemos que $\cos(x_2) - \cos(x_1) < 0$ y entonces la función coseno es estrictamente decreciente en $[0, \pi]$.

Para analizar si su inversa también es decreciente, sean $-1 \leqq x_1 < x_2 \leqq 1$. LLamando a sus imágenes $y_1 = \arccos(x_1)$ y $y_2 = \arccos(x_2)$, tenemos que $y_i \in [0, \pi]$, $i = 1, 2$.

Luego, por definición de función inversa, $\cos(y_1) = x_2$ y $\cos(y_2) = x_2$.

Por como habíamos elegido a x_1 y x_2, resulta $\cos(y_1) < \cos(y_2)$ y como la función coseno vimos que es estrictamente decreciente en $[0, \pi]$, debe entonces ser $y_1 > y_2$, es decir,
$\arccos(x_1) > \arccos(x_2)$, resultando así la función $\arccos$ estrictamente decreciente en $[-1, 1]$.

Por último, sean $x_1,\ x_2 \in \mathrm{Dom}(f_1) = [-2, 2]$, tales que $x_1 < x_2$. Luego,

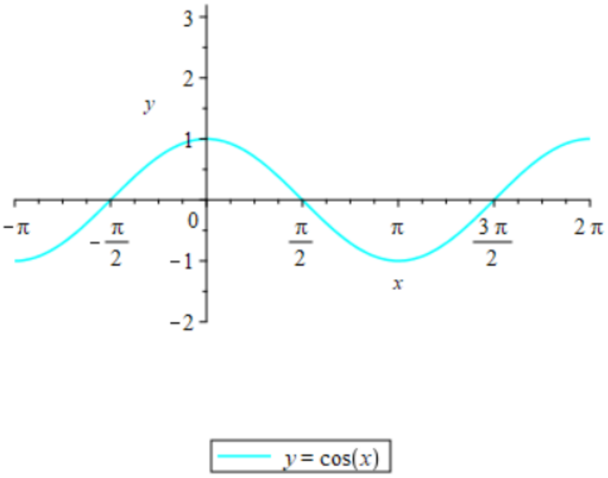
$$x_1 < x_2 \underbrace{\Rightarrow}_{\frac{1}{2}>0} \frac{x_1}{2} < \frac{x_2}{2} \underbrace{\Rightarrow}_{\arccos \text{ decrec}} \arccos\left(\frac{x_1}{2}\right) > \arccos\left(\frac{x_1}{2}\right) \Rightarrow f_1(x_1) > f_1(x_2),$$

es decir, f_1 es estrictamente decreciente en su dominio $[-2, 2]$.

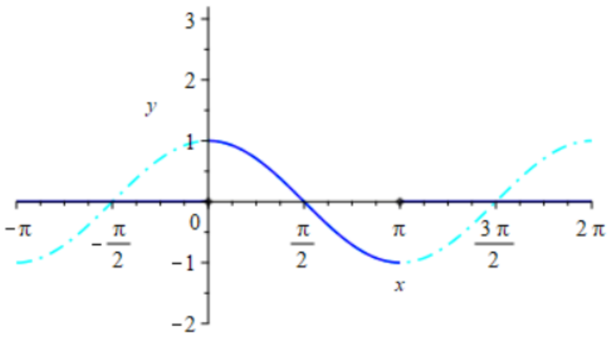
Para realizar la gráfica de f_1 podemos comenzar con la gráfica de la función coseno, que ya es conocida, y realizar adecuadas transformaciones.

ESCUELA DE CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
Av. Pellegrini 250. Rosario
+54 0341 - 480 2649 internos 216 - 119

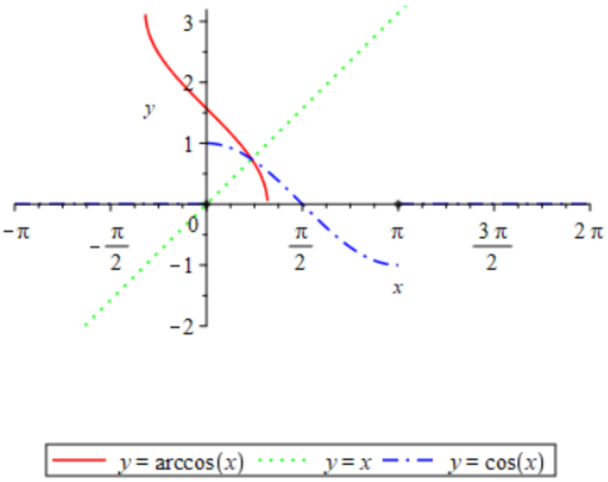
Partiendo de la gráfica conocida



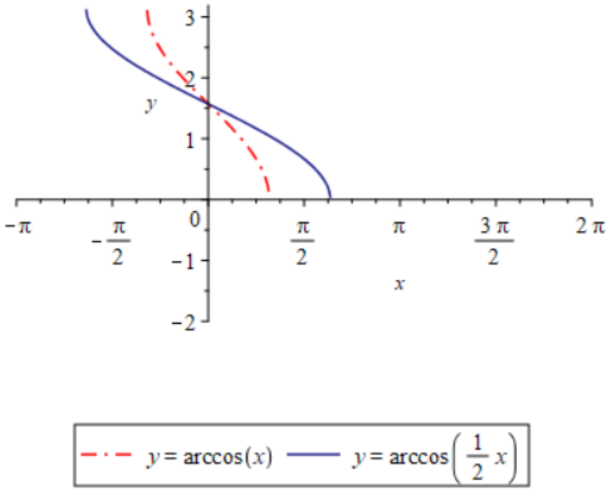
Se restringe el dominio para conseguir la biyectividad



Se rebate respecto de la recta identidad para obtener la inversa



Se dilata horizontalmente para conseguir la gráfica deseada



☞ **30.** Un granjero posee L metros de alambre para cercar un terreno de pastoreo rectangular, adyacente a un muro de piedra. ¿Qué dimensiones deberá dar a dicho terreno para que posea el área máxima?

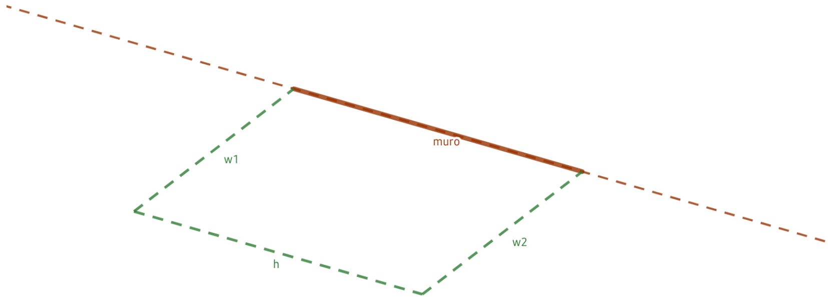
✎ Consideremos un terreno de pastoreo rectangular de largo h y ancho hasta el muro w.

El perímetro total del terreno de pastoreo rectangular sería

$$p_t = 2w + 2h,$$

pero como está el muro, sobre ese costado no es necesario poner alambre para cercarlo. Entonces, el perímetro del borde con alambre, p_c, resulta

$$p_c = 2w + h = L, \qquad (7)$$



considerando que utilizaremos todo el alambre disponible así queda lo más grande posible.

Lo que se quiere maximizar es el área del terreno de pastoreo, a_p, que al ser un terreno rectangular, se calcula como $a_p = w \cdot h$. Despejando de (7), para que solo nos quede una variable, resulta

$$\left.\begin{array}{rl} h = & L - 2w \\ a_p = & w \cdot h \end{array}\right\} \Rightarrow \; a_p = w(L - 2w). \qquad (8)$$

A partir de la relación obtenida en (8), podemos pensar que el área depende de la longitud w,

$$a(w) = Lw - 2w^2.$$

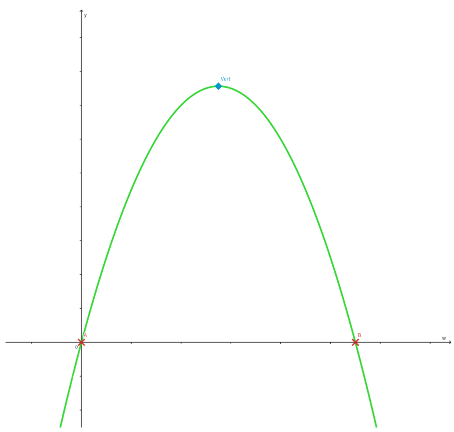
Como resulta una función cuadrática, podemos graficarla. Al ser el coeficiente que acompaña a w^2 negativo, las ramas de la parábola están hacia abajo.

Para ayudarnos a realizar la gráfica, calculemos el lugar en donde ésta interseca al eje horizontal.

$$¿\; \exists\, w \in \mathbb{R} / \; a(w) = 0 \; ?$$

$$w_{1,2} = \frac{-L \pm \sqrt{L^2 - 4 \cdot (-2) \cdot 0}}{2 \cdot (-2)} = \frac{-L \pm L}{-4} \;\Rightarrow\; w_1 = 0 \;\wedge\; w_2 = \frac{L}{2}.$$

Es decir, la gráfica de la función área, $a(w)$, interseca al eje horizontal en el origen y en el punto $B(L/2, 0)$.



ESCUELA DE CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
Av. Pellegrini 250. Rosario
+54 0341 - 480 2649 internos 216 - 119

Luego, podemos observar que la máxima área la vamos a obtener en el vértice de la parábola. Un forma para obtener las coordenadas de dicho vértice es reescribir a la función a completando cuadrados:

$$\begin{aligned} a(w) &= Lw - 2w^2 = -2\left(w^2 - \frac{Lw}{2}\right) = \\ &= -2\left(w^2 - \frac{Lw}{2} + \left(\frac{L}{4}\right)^2 - \left(\frac{L}{4}\right)^2\right) = \\ &= -2\left(w - \frac{L}{4}\right)^2 + \frac{L^2}{8}. \end{aligned}$$

De esta expresión podemos ver que el vértice tiene abscisa $x_v = \dfrac{L}{4}$ y ordenada $y_v = \dfrac{L^2}{8}$. Por lo tanto, conseguiremos el área máxima cuando utilicemos

$$\hat{w} = \frac{L}{4}.$$

Entonces, recordando la relación (7), resulta necesario que la otra dimensión del terreno sea

$$\hat{h} = L - 2\hat{w} = L - 2\frac{L}{4} = \frac{L}{2}.$$