- Ejercicio 7:

Dar en cada caso un polinomio P que cumple con las condiciones pedidas, explicitando si es único o no.

(a) P tiene a 2 como raíz simple y a i como raíz triple.

$$\boxed{P(x) = (X-2)\cdot(X^2+1)^3 = X^7-2X^6+3X^5-6X^4+3X^3-6X^2+X-2}$$

- No es único.

(b) P tiene a 2 como raíz simple, a i como raíz simple y es de grado cuatro.

$$\boxed{P(x) = (X-2)(X-i)^3 = X^4-(2+3i)X^3-(3-6i)X^2+(6+i)X-2i}$$

- No es único. Cualquier polinomio de la forma $K(X-2)(X-i)^3$ $K\in\mathbb{R}$ cumple con las condiciones pedidas.

(c) P tiene a 2 como raíz simple, a i como raíz triple y es de grado 4 y $P(1)=3i$

$P(x) = K(X-2)(X-i)^3$ → cumple las 3 primeras condiciones.

Debo hallar el valor de $K / P(1) = 3i$

$$\left.\begin{array}{l} P(1) = K(1-2)(1-i)^3 = K(-1)(-2-2i) = K(2+2i) \\ P(1) = 3i \end{array}\right\} \Rightarrow K(2+2i) = 3i$$

Si $K\in\mathbb{C}$, entonces $K = a+ib$ ~~$\nexists K / K(2+2i) = 3i$~~

$(a+ib)(2+2i) = 3i \Rightarrow (2a-2b)+(2a+2b)i = 3i$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2a-2b=0 \\ 2a+2b=3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=b \\ 4a=3 \end{cases} \Rightarrow a=b=\frac{3}{4} \Rightarrow K=\frac{3}{4}+\frac{3}{4}i=\frac{3}{4}(1+i)$$

$$\boxed{\therefore P(x) = \frac{3}{4}(1+i)(X-2)(X-i)^3}$$

- Es único

- Ejercicio 9:

Sea $P(x) = 2X^4 - 6X^3 + 7X^2 + aX + a$. Determinar $a \in \mathbb{R}$ sabiendo que $(1+i)$ es raíz de P. Luego hallar las restantes raíces de P.

- Para hallar a, dividimos $P(x)$ por $Q_1(x) = X - (1+i)$ y utilizamos el teorema del resto.

$$\begin{array}{c|cccc|c}
 & 2 & -6 & 7 & a & a \\
1+i & & 2+2i & -6-2i & 3-i & a+4+(a+2)i \\
\hline
 & 2 & -4+2i & 1-2i & a+3-i & 2a+4+(a+2)i
\end{array}$$

$R = 2(a+2) + (a+2)i$

Por teorema del resto $R = P(1+i)$ y como $1+i$ es una raíz de $P(x) \Rightarrow P(1+i) = 0$

$\Rightarrow 2(a+2) + (a+2)i = 0 \iff a = -2$

Por lo tanto:

$$P(x) = 2X^4 - 6X^3 + 7X^2 - 2X - 2$$

$$= (X - (1+i))\overbrace{(2X^3 + (-4+2i)X^2 + (1-2i)X + 1 - i)}^{C_1(x)}$$

- Dado que $P(x)$ es a coeficientes reales, $1-i$ es raíz de $P(x)$ por ser el conjugado de $1+i$

$$\begin{array}{c|ccc|c}
 & 2 & -4+2i & 1-2i & 1-i \\
1-i & & 2-2i & -2+2i & -1+i \\
\hline
 & 2 & -2 & -1 & 0
\end{array}$$

$C_2(x) = 2X^2 - 2X - 1$

Ahora tenemos: $P(x) = (X - (1+i))(X - (1-i))(2X^2 - 2X - 1)$

Para hallar las dos restantes raíces de $P(x)$ podemos usar la resolvente de una ecuación de 2do grado

$$X = \frac{2 \pm \sqrt{(-2)^2 - 4 \cdot 2(-1)}}{2 \cdot 2} = \frac{2 \pm \sqrt{4+8}}{4} = \frac{2 \pm 2\sqrt{3}}{4} = \frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$\therefore$ Las raíces de $P(x)$ son: $X_1 = (1+i)$; $X_2 = (1-i)$; $X_3 = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}$; $X_4 = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}$