

Unidad 3: Conjuntos
Álgebra y Geometría Analítica I (R-111)
Licenciatura en Ciencias de la Computación

Iker M. Canut

2020

1. Teoría de Conjuntos

Conjunto: Colección bien definida de elementos. Los conjuntos se escriben con letras mayúsculas, los elementos con minúsculas.

- $a \in A$: El elemento a **pertenece** al conjunto A .
- $a \notin A$: El elemento a **no pertenece** al conjunto A .

Definimos un conjunto por **extensión** si enumeramos todos los elementos que pertenecen. Definimos un conjunto por **comprensión** si damos una característica, una ley que define si un elemento pertenece o no al conjunto.

El universo en el cual están todos los elementos, se lo denomina **universal**, \mathbb{U} .

.....

- C es un **subconjunto** de $D \iff C \subseteq D \iff \forall x[x \in C \Rightarrow x \in D]$
- $C \not\subseteq D \iff \exists x[x \in C \wedge x \notin D]$ ▪ $C \subseteq D \Rightarrow |C| \leq |D|$
- C es un **subconjunto propio** de $D \iff C \subset D \iff C \subseteq D \wedge C \neq D$
- $C \not\subset D \iff C \not\subseteq D \vee C = D$ ▪ $C \subset D \Rightarrow |C| < |D|$
- C es **igual** a $D \iff C = D \iff C \subseteq D \wedge D \subseteq C \iff \forall x[x \in C \iff x \in D]$
- C es **distinto** a $D \iff C \neq D \iff C \not\subseteq D \vee D \not\subseteq C$

.....

Sean $A, B, C \subseteq U$

- Si $A \subseteq B \wedge B \subseteq C \Rightarrow A \subseteq C$ ▪ Si $A \subset B \wedge B \subseteq C \Rightarrow A \subset C$
- Si $A \subseteq B \wedge B \subset C \Rightarrow A \subset C$ ▪ Si $A \subset B \wedge B \subset C \Rightarrow A \subset C$

.....

Se llama **conjunto vacío**, \emptyset o $\{\}$ al conjunto que no tiene elementos. $|\emptyset| = 0$

Para cualquier \mathbb{U} , $A \subseteq U$ se tiene que $\emptyset \subseteq A$. Y si $a \neq \emptyset \Rightarrow \emptyset \subset A$

.....

Dado un conjunto A , se llama **conjunto de partes** de A al conjunto cuyos elementos son todos los subconjuntos de A . $P(A) = \{F.F \subseteq A\}$

.....

2. Operaciones de Conjuntos

- **Unión** de A y B : Es el conjunto cuyos elemento pertenecen a A o a B .

$$A \cup B = \{x \in \mathbb{U}. x \in A \vee x \in B\}$$

.....

- **Intersección** de A y B : Es el conjunto cuyos elementos pertenecen a A y a B .

$$A \cap B = \{x \in \mathbb{U}. x \in A \wedge x \in B\}$$

Dos conjuntos son **disjuntos** si la intersección es el conjunto vacío.

$$A \text{ y } B \text{ son disjuntos} \iff A \cup B = A \Delta B$$

.....

- **Diferencia** de A y B : Es el conjunto de elementos que pertenecen a A y no a B .

$$A - B = \{x \in \mathbb{U}. x \in A, x \notin B\} = A \cap \overline{B}$$

$$\bullet A - A = \emptyset$$

$$\bullet A - \emptyset = A$$

$$\bullet \emptyset - A = \emptyset$$

$$\bullet (A - B = B - A) \iff A = B$$

$$\bullet (A - B) - C = A - (B - C)$$

.....

- **Complemento** de B respecto de A : es la diferencia.

$$\mathbb{C}_A B = A - B = \{x. x \in A, x \notin B\}$$

Si tomamos $A = \mathbb{U}$, notamos $\mathbb{C}_U B = \mathbb{C}B = \overline{B}$

$$\bullet \mathbb{C}\mathbb{U} = \emptyset$$

$$\bullet \mathbb{C}(\mathbb{C}A) = A$$

$$\bullet \mathbb{C}(A \cap B) = \mathbb{C}A \cup \mathbb{C}B$$

$$\bullet \mathbb{C}\emptyset = \mathbb{U}$$

$$\bullet \mathbb{C}(A \cup B) = \mathbb{C}A \cap \mathbb{C}B$$

$$\bullet A \subseteq B \Rightarrow A \cup \mathbb{C}_B A = B$$

.....

- **Diferencia Simetrica** de A y B : son los elementos que pertenecen a A o a B , pero no a ambos.

$$A \Delta B = \{x \in \mathbb{U}. x \in A \underline{\vee} x \in B\}$$

$$= (A \cup B) - (A \cap B) = (A \cap \overline{B}) \cup (\overline{A} \cap B)$$

$$= (A \cup B) \cap \overline{(A \cap B)} = (A - B) \cup (B - A)$$

.....

- **Producto Cartesiano** de A y B : es el conjunto de pares ordenados (a, b) tal que la primer componente pertenece a A y la segunda pertenece a B .

$$A \times B = \{(a, b). a \in A, b \in B\}$$

Si $A = B$ se escribe $A \times A = A^2$

.....

3. Generalizaciones

Sean $E_1, E_2, \dots, E_n \subseteq U$ se llama:

- **unión** de E_1, E_2, \dots, E_n al conjunto $E_1 \cup E_2 \cup \dots \cup E_n = \bigcup_{i=1}^n E_i = \{x \in \mathbb{U}. x \in E_i, \text{ para algun } i = 1..n\}$
- **intersección** de E_1, E_2, \dots, E_n al conjunto $E_1 \cap E_2 \cap \dots \cap E_n = \bigcap_{i=1}^n E_i = \{x \in \mathbb{U}. x \in E_i, \forall i = 1..n\}$

.....

Sea I un conjunto no vacío, U el conjunto universal,
 $\forall i \in I$ sea $A_i \subseteq \mathbb{U}$. Cada i es un índice, e I es el conjunto de índices.

- $\bigcup_{i \in I} A_i = \{x \in \mathbb{U}. x \in A_i, \text{ para algun } i \in I\}$
- $\bigcap_{i \in I} A_i = \{x \in \mathbb{U}. x \in A_i, \text{ para todo } i \in I\}$

Equivalentemente,

- $x \in \bigcup_{i \in I} A_i \iff \exists i \in I. (x \in A_i)$
- $x \in \bigcap_{i \in I} A_i \iff \forall i \in I. (x \in A_i)$

.....

- $\overline{\bigcup_{i \in I} A_i} = \bigcap_{i \in I} \overline{A_i}$
- $\overline{\bigcap_{i \in I} A_i} = \bigcup_{i \in I} \overline{A_i}$

.....

4. Leyes

1.	$\overline{\overline{A}} = A$		Doble negación
2.	$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$	$\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$	De Morgan
3.	$A \cup B = B \cup A$	$A \cap B = B \cap A$	Conmutativa
4.	$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$	$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$	Asociativa
5.	$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$	$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$	Distributiva
6.	$A \cup A = A$	$A \cap A = A$	Idempotente
7.	$A \cup \emptyset = A$	$A \cap \mathbb{U} = A$	Neutro
8.	$A \cup \overline{A} = \mathbb{U}$	$A \cap \overline{A} = \emptyset$	Inverso
9.	$A \cup \mathbb{U} = \mathbb{U}$	$A \cap \emptyset = \emptyset$	Dominación
10.	$A \cup (A \cap B) = A$	$A \cap (A \cup B) = A$	Absorción

.....

5. Cardinalidad

La cardinalidad de un conjunto finito es la cantidad de elementos que contiene.

- $|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$
- $|\overline{A \cap B \cap C}| = |\overline{A \cup B \cup C}| = |\mathbb{U}| = |A \cup B \cup C|$
 $= |\mathbb{U}| - |A| - |B| - |C| + |A \cap B| + |A \cap C| + |B \cap C| - |A \cap B \cap C|$

6. Dual

Para conseguir el dual de un conjunto, se reemplazan:

- \emptyset por \mathbb{U} y \mathbb{U} por \emptyset .
- \cup por \cap y \cap por \cup .