Introducción a la Matemática

Iker M. Canut

March 8, 2020

Contents

1 Unidad 1: Numeros Reales

Los números reales son elementos de un conjunto denominado R entre los que existen dos operaciones que, por definición, satisfacen ciertas propiedades específicas llamadas axiomas.
Las operaciones son la suma y el producto. Si $a, b \in R$

- Y la operación suma les asigna el elemento $c \in R$, escribimos: $a + b = c$
- Y la operación producto les asigna el elemento $d \in R$, escribimos $a.b = d$

1.1 Axiomas de los Numeros Reales

Axioma de Cuerpo 1: Conmutativa

$$a + b = b + a \wedge a.b = b.a$$

Axioma de Cuerpo 2: Asociativa

$$(a + b) + c = a + (b + c) \wedge (a.b).c = a.(b.c)$$

Axioma de Cuerpo 3: Distributiva de la Multiplicacion respecto a la Suma

$$a.(b + c) = a.b + a.c$$

Axioma de Cuerpo 4: Existencia de Elementos Neutros

Existen dos numeros reales, notados 0 y 1 / $\forall a \in R$

$$0 + a = a + 0 = a \wedge 1.a = a.1 = a$$

Axioma de Cuerpo 5: Existencia de Elementos Opuestos

$$\forall a \in R, \exists\, b \in R \;/\; a + b = b + a = 0$$

Axioma de Cuerpo 6: Existencia de Elementos Reciprocos

$$\forall a \in R - \{0\}, \exists\, b \in R \;/\; a.b = b.a = 1$$

Teorema 1: Propiedad Cancelativa de la Suma

$$a, b, c \in R, si\ a + b = a + c,\ entonces\ b = c$$

Demostracion de la Propiedad Cancelativa de la Suma

Sea $d = a + b$, y por ende, $d = b + c$, por el Axioma 5, existe y que es opuesto a a, entonces:

$$y + d = y + (a + b) \overset{A2}{=} (y + a) + b = 0 + b \overset{A4}{=} b$$

$$y + d = y + (a + c) \overset{A2}{=} (y + a) + c = 0 + c \overset{A4}{=} c$$

$$b = c$$

$\square$

Junto con los axiomas, se presupone la validez de las siguientes propiedades de la igualdad:

- Propiedad de Reflexibidad: $\forall a, a = a$
- Propiedad de Simetria: $si\ a = b \Rightarrow b = a$
- Propiedad de Transitividad: $si\ a = b \wedge b = c \Rightarrow a = c$

Unicidad del Elemento Neutro de la suma

Si $0'$ es un numero que verifica que $a + 0' = 0' + a = a$, $\forall a \in R$, entonces $0' = 0$

Demostracion de la Unicidad del Elemento Neutro de la suma

Supongamos que 0' es un numero que tambien funciona como neutro de la suma, entonces

$$a + 0 = a \wedge a + 0' = a$$

$$a + 0 = a + 0'$$

Y por propiedad cancelativa de la suma

$$0 = 0'$$

□

Unicidad del Elemento Opuesto

$\forall a \in R, \exists$ un unico numero $b\ /\ a + b = b + a = 0$

Demostracion de la Unicidad del Elemento Opuesto

La existencia de un numero b esta dada por el axioma 5, hay que demostrar que es unico. Suponiendo que existe $b'\ /\ a + b' = b' + a = 0$, tenemos que

$$a + b = 0 \wedge a + b' = 0$$

$$a + b = a + b'$$

Y por propiedad cancelativa de la suma

$$b = b'$$

□

Para cualquier numero a, denotamos con $-a$ al unico elemento opuesto de a.

Llamamos *diferencia* entre dos numeros reales a y b, y lo denotamos como $a - b$, al numero dado por la suma de a y el opuesto de b.

$$a - b = a + (-b)$$

Teorema 2

$$-(-a) = a$$

$$-0 = 0$$

$$0.a = 0$$

$$a(-b) = -(ab) = (-a)b$$

$$(-a)(-b) = ab$$

$$a(b - c) = ab - ac$$

Demostracion de que el opuesto al opuesto de a es a

Sea b el opuesto de a, se puede concluir que $a+b=0 \wedge b=(-a) \wedge a=(-b)$ $\qquad (1) \wedge (2) \wedge (3)$

$$-(-a) \overset{(2)}{=} -b \overset{(3)}{=} a$$

$\square$

Demostracion de que el opuesto de 0 es 0

Por el axioma 5, todo numero real tiene su opuesto. Llamemos 0' al opuesto de 0, siendo $0+0'=0$ y Del axioma 3 se concluye que $0+0=0$

$$si\ 0+0'=0 \wedge 0+0=0 \Rightarrow 0'=0$$

$\square$

Demostracion de que el producto de 0 con cualquier otro numero es 0

$$a.0 \overset{A4}{=} a.0+0 \overset{A5}{=} a.0+(a+(-a)) \overset{A2}{=} (a.0+a)+(-a) \overset{A4}{=} (a.0+a.1)+(-a) \overset{A3}{=}$$
$$a(0+1)+(-a) \overset{A4}{=} a.1+(-a) \overset{A4}{=} a+(-a) \overset{A5}{=} 0$$

$\square$

$a(-b)=-(ab)=(-a)b$

$$a(-b) \overset{A4}{=} a(-b)+0 \overset{A5}{=} a(-b)+(ab+-(ab)) \overset{A2}{=} (a(-b)+ab)+-(ab) \overset{A3}{=}$$
$$(a((-b)+b)+-(ab)) \overset{A5}{=} a.0+-(ab) \overset{T2.3}{=} 0+-(ab) \overset{A4}{=} -(ab)$$

$\square$

$(-a)(-b)=ab$

$$(-a)(-b) \overset{T2.4}{=} -((-a)(-(-b))) \overset{T2.1}{=} -((-a)b) \overset{T2.4}{=} -(-(ab)) \overset{T2.1}{=} ab$$

$\square$

$a(b-c)=ab-ac$

Por la definicion de diferencia, se puede reescribir como:

$$a(b+(-c)) \overset{A3}{=} ab+a(-c) \overset{T2.4}{=} ab+-(ac)$$

Que por la definicion de diferencia, se puede reescribir como: $ab-ac$ $\square$