Análisis Matemático I - 2020
(Lic. y Prof. en Matemática, Lic. en Cs. de la Computación, Lic. y Prof. en Física)

Unidad 4 – Cálculo Diferencial

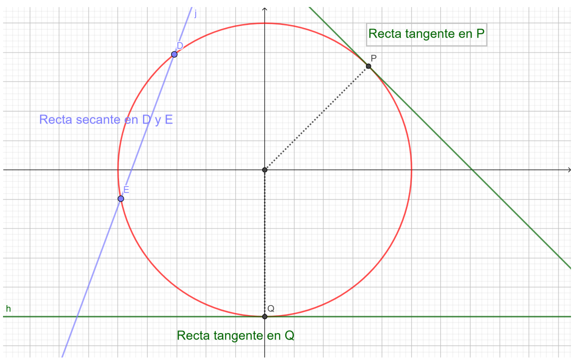
1. Derivada

1.1. Motivaciones

En esta unidad trabajaremos el concepto de derivada. Para introducirlo, generalmente se recurre a dos problemas, uno geométrico, y otro físico.
El primero es la definición de la recta tangente a la gráfica de una función en un punto, y el segundo el cálculo de la velocidad instantánea de una partícula móvil.

Motivación Geométrica: Recta Tangente

En Geometría, dado un punto P de una circunferencia, se define como *recta tangente a la circunferencia en* P a la recta que pasa por dicho punto y es perpendicular al radio –por P– de la circunferencia. Con esta definición, una recta que sea tangente es la única que corta a la circunferencia en un único punto; además la circunferencia se ubica enteramente en uno de los semiplanos definidos que define la recta. Por último, la recta tangente a una circunferencia es la que, *localmente* –en las inmediaciones de P–, más se asemeja a ella.



Para generalizar la definición de recta tangente a una curva en general, no podemos usar el concepto de radio; pero podríamos apelar a alguna de las dos propiedades citadas anteriormente. Específicamente, nos interesa ver cuál de las rectas que cortan a la gráfica de una función en un punto, se parece más a la gráfica, localmente.

Consideremos el gráfico de la Figura 1.

Allí, fijemos el punto A sobre la curva, y otro punto cualquiera $P \neq A$. La recta AP es una recta secante a la curva y su pendiente es la tangente trigonométrica del ángulo $B\widehat{A}P$

$$\text{pendiente de } AP = \tan(B\widehat{A}P) = \frac{f(x)-f(a)}{x-a}.$$

Si el punto P se acerca al punto A sobre la curva, la recta AP tiende a una posición límite que corresponde a la recta tangente a la curva en el punto A.

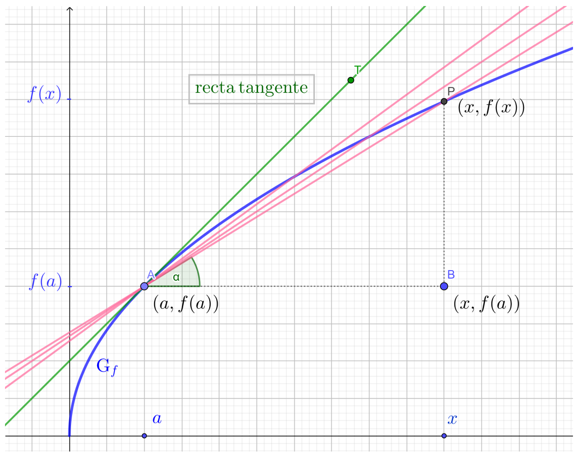


Figura 1: Recta tangente a G_f en $(a, f(a))$

La pendiente de esta recta "límite" es la tangente trigonométrica del ángulo $B\widehat{A}T$, es decir,

$$\text{pendiente de } AT \;=\; \tan(B\widehat{A}T) \;=\; \lim_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}\ .$$

Motivación Física: Velocidad Instantánea

Consideremos una partícula P que se mueve sobre el eje x (movimiento rectilíneo), y que en cada instante se encuentra en una posición $x = f(t)$. A $f(t)$ se la llama ley de movimiento de la partícula. El movimiento rectilíneo del punto P puede representarse gráficamente como en la Figura 2.

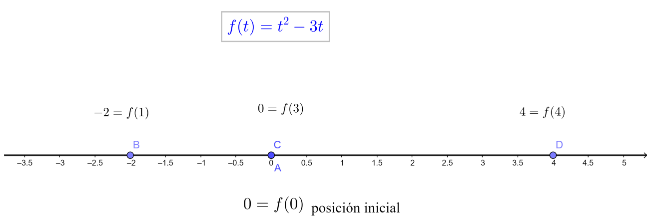
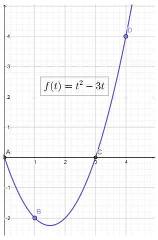


Figura 2: Movimiento rectilíneo

Por ejemplo, para la ley de movimiento $f(t) = t^2 - 3t$, en $t = 0$, $f(0) = 0$ nos dice que la partícula se encuentra en el origen, en $t = 1$, $f(1) = -2$, que se encuentra 2 unidades a la izquierda del origen, y en $t = 3$, $f(3) = 0$, que la partícula se encuentra nuevamente en el origen.
Observemos en este caso que, aunque el móvil se desplaza sobre una recta, si se quiere hacer el gráfico de la ley de movimiento, se obtiene una parábola.
Lo mismo pasa, por ejemplo, con la caida libre, desde el estado de reposo, de un cuerpo en un medio sin roce. La ecuación correspondiente (usando la variable y para notar "verticalidad") es:

$$y = f(t) = y_0 - \tfrac{1}{2}gt^2.$$



Volviendo al ejemplo anterior, cuando la partícula viaja de izquierda a derecha, pasa de la posición A a la posición B, la variación de la posición del punto es $f(4) - f(3)$, haciéndolo en el intervalo de tiempo de duración $4 - 3 = 1$. Así, el cociente

$$\frac{f(4) - f(3)}{4 - 3}$$

representa la velocidad media del móvil en el intervalo $[3,4]$.

Si quisiéramos tener una idea de la velocidad del mismo en un instante determinado, por ejemplo, para $t = 3$, podemos considerar intervalos de tiempo cada vez más pequeños que contengan al punto $t = 3$.

Se define así, la velocidad instantánea en el tiempo $t = a$, como el límite

$$v(a) = \lim_{t \to a} \frac{f(t) - f(a)}{t - a}.$$

1.2. Definición de Derivada

Definición (Derivada).
Sea f una función definida en un intervalo abierto y a un punto cualquiera de dicho intervalo. Se dice que la función f tiene derivada en el punto a si y sólo existe el límite

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}.$$

De manera alternativa, proponiendo el cambio de variable $h = x - a$, f es derivable en el punto a, si y solamente si existe el límite

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}.$$

Llamamos cociente incremental a cualquiera de las expresiones

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a} \quad \text{o} \quad \frac{f(a+h) - f(a)}{h},$$

y al límite, si existe, lo denominamos derivada de f en a, y lo denotamos con $f'(a)$.

Ejemplo.

1. Sea la función $f(x) = 2$ (función constante). Veamos si f es derivable en el punto $a = 1$. Por definición, calculamos el límite

$$\begin{aligned} \lim_{x \to 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} &= \lim_{x \to 1} \frac{2 - 2}{x - 1} \\ &= \lim_{x \to 1} \frac{2 - 2}{x - 1} = \lim_{x \to 1} \frac{0}{x - 1} = 0 \end{aligned}$$

   y entonces, f es derivable en $a = 1$, y vale $f'(1) = 0$.

2. Para la función $f(x) = 5x + 1$, analicemos la derivabilidad en el punto $a = -1$. Nuevamente, calculamos el límite del cociente incremental

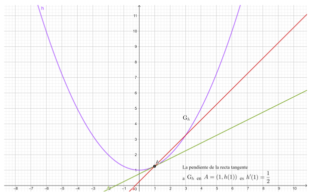
$$\lim_{x \to -1} \frac{f(x) - f(-1)}{x - (-1)} = \lim_{x \to -1} \frac{(5x+1) - (-4)}{x+1} = \lim_{x \to -1} \frac{5x+5}{x+1} = 5$$

y así f es derivable en $a = -1$, con $f'(-1) = 5$.

3. Veamos la derivabilidad de la función $h(x) = \frac{1}{4}x^2 + 1$ en el punto $a = 1$, planteamos el límite del cociente incremental

$$\lim_{x \to 1} \frac{h(x) - h(1)}{x - 1} = \lim_{x \to 1} \frac{(\frac{1}{4}x^2 + 1) - \frac{5}{4}}{x - 1} = \lim_{x \to 1} \frac{\frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{4}}{x - 1} =$$
$$= \lim_{x \to 1} \frac{\frac{1}{4}(x^2 - 1)}{x - 1} = \lim_{x \to 1} \frac{\frac{1}{4}(x-1)(x+1)}{x - 1} = \lim_{x \to 1} \frac{1}{4}(x+1) = \frac{1}{2},$$

y entonces h es derivable en $a = 1$ y la derivada de h en 1 vale $h'(1) = \frac{1}{2}$. En la gráfica se

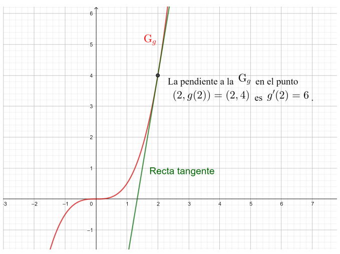


observa la recta tangente a la G_h en $(1, h(1))$ y una recta secante en los puntos $(1, h(1))$ y $(3, h(3))$.

4. Calculemos, si existe, la derivada de la función $g(x) = \frac{1}{2}x^3$ en el punto $a = 2$,

$$\lim_{x \to 2} \frac{g(x) - g(2)}{x - 2} = \lim_{x \to 2} \frac{\frac{1}{2}x^3 - 4}{x - 2} = \lim_{x \to 2} \frac{\frac{1}{2}(x^3 - 8)}{x - 2}$$
$$= \lim_{x \to 2} \frac{1}{2} \frac{(x-2)(x^2+2x+4)}{x-2} = \lim_{x \to 2} \frac{1}{2}(x^2 + 2x + 4) = 6,$$

luego podemos afirmar que g es derivable en 2 y vale $g'(2) = 6$.



5. Sea la función h tal que $h(x) = |x|$, consideremos el punto $a = 0$, y analicemos su derivabilidad allí,

$$\lim_{x \to 0} \frac{h(x) - h(0)}{x - 0} = \lim_{x \to 0} \frac{|x| - 0}{x - 0} = \lim_{x \to 0} \frac{|x|}{x},$$

límite que no existe, como ya sabemos de la unidad anterior, pues tiene límites laterales diferentes.

Luego, la función Valor Absoluto, no es derivable en el punto $a = 0$.

Sin embargo, sí lo es en cualquier otro punto.

En efecto, para $a > 0$, cabe aclarar, que existe un entorno reducido de a donde los x del entorno son positivos

$$\lim_{x\to a} \frac{h(x)-h(a)}{x-a} = \lim_{x\to a} \frac{|x|-|a|}{x-a} = \lim_{x\to a} \frac{x-a}{x-a} = 1$$

con lo que h es derivable en a y vale

$$h'(a) = 1,$$

mientras que para $a < 0$, análogamente, existe un entorno reducido de a donde los x del entorno son negativos

$$\lim_{x\to a} \frac{h(x)-h(a)}{x-a} = \lim_{x\to a} \frac{|x|-|a|}{x-a} = \lim_{x\to a} \frac{-x-(-a)}{x-a} = -1$$

y se tiene

$$h'(a) = -1.$$

Nota.
Algunas notaciones para referir a la derivada de la función f en un punto a, son

$$f'(a), \qquad Df(a), \qquad \frac{df}{dx}(a), \qquad \frac{dy}{dx}(a), \text{ donde } y = f(x).$$

Cuando la variable independiente se interpreta como temporal, esto es, si una función $x = x(t)$ representa el valor de una cantidad al transcurrir la variable temporal t, suele notarse a la derivada de la función x en el punto t_0 como

$$\dot{x}(t_0).$$

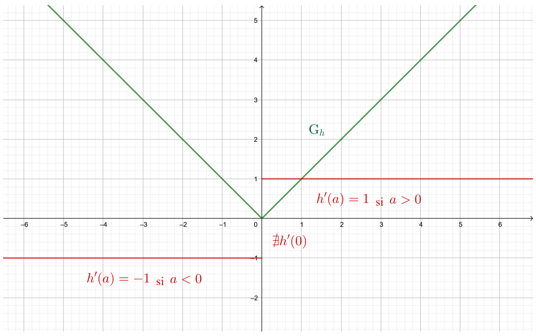
Función Derivada y Derivadas Sucesivas

Para los valores $x \in \mathrm{Dom}(f)$ donde f es derivable, existe el valor $f'(x)$ (derivada de f en x), para esos puntos es posible definir una función f' llamada función derivada (o función derivada primera) de f.
El dominio de f' está formado por todos los puntos x del dominio de f, en los cuales existe $f'(x)$, es decir,

$$\mathrm{Dom}(f') = \{x \in \mathrm{Dom}(f) : f \text{es derivable en } x\} \subseteqq \mathrm{Dom}(f).$$

Definición. En el conjunto $\{x \in \mathrm{Dom}(f) : f \text{es derivable en } x\}$, definimos, la función f' derivada de f (o función derivada primera de f) como

$$\begin{aligned} f' : \mathrm{Dom}(f') &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longrightarrow f'(x) \end{aligned}$$



Ejemplo. Por ejemplo la función $h(x) = |x|$ cuyo $\mathrm{Dom}(h) = \mathbb{R}$ es derivable en $\mathbb{R} - \{0\}$, luego para los $x \neq 0$ podemos definir la función h' derivada de la función h, con dominio $\mathrm{Dom}(h') = \mathbb{R} - \{0\}$ como

$$h'(x) = \begin{cases} 1 & \mathrm{si}\, x > 0 \\ -1 & \mathrm{si}\, x < 0 \end{cases}$$

Ahora bien, como f' es una función, podemos pensar en los puntos x en donde f' sea derivable, es decir, para los valores $x \in \mathrm{Dom}(f')$ donde f' es derivable, existe el valor $(f')'(x)$, para esos puntos es posible definir una función $(f')'$ llamada función derivada de f', o derivada segunda de f, que notamos $(f')' = f''$.
El dominio de $(f')' = f''$ es

$$\mathrm{Dom}((f')') = \mathrm{Dom}(f'') = \{x \in \mathrm{Dom}(f') : f' \text{es derivable en } x\} \subsetneqq \mathrm{Dom}(f').$$

Definición. En el conjunto $\{x \in \mathrm{Dom}(f') : f' \text{es derivable en } x\}$, definimos la función $(f')' = f''$ derivada de f' (o función derivada segunda de f) como

$$\begin{aligned} f'' : \mathrm{Dom}(f'') &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longrightarrow f''(x) = (f')'(x) \end{aligned}$$

En general,

Definición. Dada la función derivada $(n-1)$-ésima de la función f, se llama derivada n-ésima de la función f (o de derivada de orden n de f) a la función derivada primera de la función $f^{(n-1)}$, y se la nota $f^{(n)} = (f^{(n-1)})'$.

Notación: para las funciones derivadas de orden n,

$$f^{(n)}, \qquad D^n f, \qquad \frac{d^n f}{dx^n}, \qquad \frac{d^n y}{dx^n}, \quad \text{donde } y = f(x).$$

Por ejemplo, la derivada segunda

$$f^{(2)} = f'' = (f')',$$

la derivada tercera

$$f^{(3)} = f''' = (f'')' = ((f')')'.$$

También se suele indicar a las derivadas de orden superior con números romanos

$$f^{(4)} = f^{IV}.$$

1.3. Interpretaciones de la Derivada

Rectas Tangente y Normal a una Curva

Definición.
Si f es una función derivable en un punto a, la recta tangente a la gráfica de f en el punto $(a, f(a))$ es la recta que pasa por dicho punto, de pendiente $f'(a)$. Esto es, la recta de ecuación

$$\frac{y - f(a)}{x - a} = f'(a)$$

o, en forma cartesiana explícita,

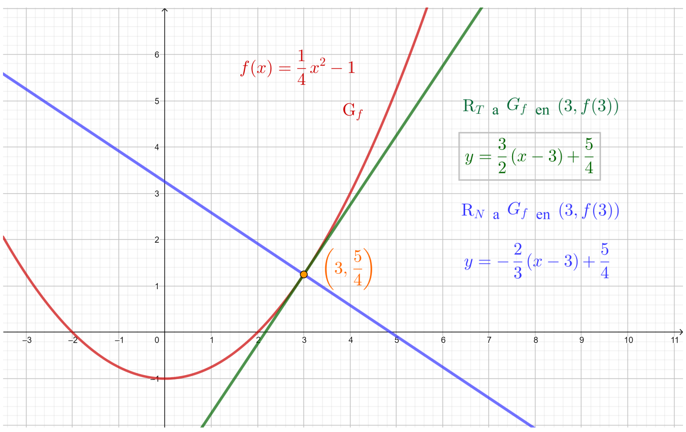
$$y = f'(a)(x-a) + f(a).$$

Si el cociente incremental no tiene límite en el punto, pero sí tiene límites laterales diferentes a derecha y a izquierda, al punto del gráfico se lo suele llamar *anguloso*, como sucede con el origen para la función $f(x) = |x|$. Esta función no es derivable en el origen, y por lo tanto su gráfica no cuenta con recta tangente allí.

Definición.
La recta normal a la gráfica de una función f en el punto $(a, f(a))$ es la recta que pasa por dicho punto, de pendiente $\dfrac{-1}{f'(a)}$ si $f'(a) \neq 0$, de ecuación

$$y = -\frac{1}{f'(a)}(x-a) + f(a)$$

y para los a tales que $f'(a) = 0$, la recta de ecuación $x = a$.



Razón de Cambio

Ya hemos visto que si una función $x = x(t)$ representa la posición de una partícula en movimiento rectilíneo en el tiempo, la derivada x' de la función en un instante t_0, admite como interpretación a la velocidad de la partícula en t_0, esto es, a la razón con la que cambia la posición del móvil, en el instante de tiempo $t = t_0$.

La razón de cambio de la velocidad, es la aceleración. En el caso de un cuerpo cayendo desde el reposo, en caída libre, desde una altura y_0, con ley de movimiento

$$y(t) = y_0 - \tfrac{1}{2}gt^2,$$

la velocidad es

$$v(t) = \dot{y}(t) = -gt,$$

y la aceleración,

$$a(t) = \dot{v}(t) = \ddot{y}(t) = -g$$

es constante en el tiempo.
En general, dada una función $y = f(x)$, el valor de la derivada $f'(a)$ se interpreta como la *razón o tasa de cambio* de la variable y, respecto a la variable x, cuando $x = a$, es decir $\dfrac{dy}{dx}(a) = f'(a)$ si $y = f(x)$.

Ejemplo.
Una partícula se desplaza con ley de movimiento

$$x(t) = t^2 + 1.$$

La derivada de esta función es la velocidad

$$v(t) = \dot{x}(t) = 2t.$$

Así, la velocidad de la partícula es 0 en el tiempo $t = 0$ y 4 en el tiempo $t = 2$. Y la aceleración

$$a(0) = \ddot{x}(0) = \dot{v}(0) = \lim_{t\to 0} \frac{v(t) - v(0)}{t - 0} = \lim_{t\to 0} \frac{2t - 0}{t} = 2.$$

1.4. Algunas Derivadas

Proposición 1.
La función lineal $f(x) = mx + h$ es derivable en todo $a \in \mathbb{R}$, y vale

$$f'(a) = m.$$

Demostración: Aplicando la definición de derivada, en cualquier punto $a \in \mathbb{R}$,

$$f'(a) = \lim_{x\to a} \frac{mx + h - (ma + h)}{x - a} = \lim_{x\to a} \frac{m(x - a)}{x - a} = m. \qquad \textit{Q.E.D.}$$

A continuación mostraremos la derivabilidad de las funciones de exponente natural en todo punto $a \in \mathbb{R}$. La prueba hace uso de la Fórmula para el Desarrollo del Binomio de Newton, que establece que, si x y y son números reales y n es un natural, entonces

$$(x + y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k} y^k.$$

Esta fórmula puede no ser conocida aún, y por eso daremos una demostración alternativa en la Sección de Álgebra de Derivadas.

Proposición 2.
Para $n \in \mathbb{N}$, la función $f(x) = x^n$ es derivable en todo $a \in \mathbb{R}$, y vale

$$f'(a) = n \cdot a^{n-1}.$$

Demostración. Aplicando la definición de derivada en cualquier punto $a \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}
f'(a) = \lim_{h\to 0} \frac{(a+h)^n - a^n}{h} &= \lim_{h\to 0} \frac{\left(\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} h^k\right) - a^n}{h} \\
= \lim_{h\to 0} \frac{\left(a^n + \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} h^k\right) - a^n}{h} &= \lim_{h\to 0} \frac{\sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} h^k}{h} \\
= \lim_{h\to 0} \frac{\binom{n}{1} a^{n-1} h + \sum_{k=2}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} h^k}{h} &= \lim_{h\to 0} n \cdot a^{n-1} + \sum_{k=2}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} h^{k-1} \\
&= n \cdot a^{n-1} + 0 = n \cdot a^{n-1}.
\end{aligned}$$

Q.E.D.

Antes de mostrar la derivabilidad de las funciones trigonométricas, recordemos dos límites previos:

$$\lim_{h\to 0} \frac{\operatorname{sen} h}{h} = 1 \qquad \text{y} \qquad \lim_{h\to 0} \frac{\cos h - 1}{h} = 0$$

y algunas identidades trigonométricas:

$$\operatorname{sen}(a+h) = \operatorname{sen} a \, \cos h + \cos a \, \operatorname{sen} h \qquad \text{y} \qquad \cos(a+h) = \cos a \, \cos h - \operatorname{sen} a \, \operatorname{sen} h.$$

Proposición 3.
Las funciones $f(x) = \operatorname{sen} x$ y $g(x) = \cos x$, son derivables en todo punto $a \in \mathbb{R}$ y valen

$$f'(a) = \cos a \quad \text{y} \quad g'(a) = -\operatorname{sen} a.$$

Demostración. Aplicando la definición de derivada de las respectivas funciones en el punto a y aplicando Álgebra de Límites, se tiene

$$\begin{aligned}
f'(a) &= \lim_{h\to 0} \frac{\operatorname{sen}(a+h) - \operatorname{sen} a}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{(\operatorname{sen} a \, \cos h + \cos a \, \operatorname{sen} h) - \operatorname{sen} a}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \operatorname{sen} a \cdot \frac{\cos h - 1}{h} + \cos a \cdot \frac{\operatorname{sen} h}{h} \\
&= \operatorname{sen} a \cdot 0 + \cos a \cdot 1 = \cos a
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
g'(a) &= \lim_{h\to 0} \frac{\cos(a+h) - \cos a}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{(\cos a \, \cos h - \operatorname{sen} a \, \operatorname{sen} h) - \cos a}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \cos a \cdot \frac{\cos h - 1}{h} - \operatorname{sen} a \cdot \frac{\operatorname{sen} h}{h} \\
&= \cos a \cdot 0 - \operatorname{sen} a \cdot 1 = -\operatorname{sen} a
\end{aligned}$$

Q.E.D.

Nota.
También podríamos probar estas derivadas tomando $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$ y recordando las identidades:

$$\operatorname{sen}x-\operatorname{sen}a=2\ \operatorname{sen}(\frac{x-a}{2})\ \cos(\frac{x+a}{2})\qquad \text{y}\qquad \cos x-\cos a=-2\ \operatorname{sen}(\frac{x-a}{2})\ \operatorname{sen}(\frac{x+a}{2}),$$

para obtener

$$\begin{aligned}
f'(a) &= \lim_{x\to a}\ \frac{\operatorname{sen}x-\operatorname{sen}a}{x-a} = \\
&= \lim_{x\to a}\ \frac{2\ \operatorname{sen}\left(\dfrac{x-a}{2}\right)\cos\left(\dfrac{x+a}{2}\right)}{x-a} \\
&= \lim_{x\to a}\ \left(\frac{\operatorname{sen}\left(\dfrac{x-a}{2}\right)}{\dfrac{x-a}{2}}\right)\cos\left(\frac{x+a}{2}\right) \\
&= 1\cdot\cos a=\cos a
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
g'(a) &= \lim_{x\to a}\ \frac{\cos x-\cos a}{x-a} = \\
&= \lim_{x\to a}\ \frac{-2\ \operatorname{sen}\left(\dfrac{x-a}{2}\right)\operatorname{sen}\left(\dfrac{x+a}{2}\right)}{x-a} \\
&= \lim_{x\to a}\ -\left(\frac{\operatorname{sen}\left(\dfrac{x-a}{2}\right)}{\dfrac{x-a}{2}}\right)\operatorname{sen}\left(\frac{x+a}{2}\right) \\
&= -1\cdot\operatorname{sen}a=-\operatorname{sen}a
\end{aligned}$$

Q.E.D.

1.5. Continuidad de las Funciones Derivables

Para una función, la propiedad de ser derivable es más fuerte que la de ser continua. Es decir, si una función es derivable en un punto, entonces es continua en él, mientras que la implicación recíproca no siempre es válida: hay funciones continuas en un punto, que allí no son derivables.

Ejemplo. La función

$$f(x)=|x|,$$

es continua en el punto 0, y allí no es derivable.

Teorema 1.
Si una función tiene derivada en un punto, entonces es continua en dicho punto.

Demostración. Para una función f derivable en un punto a, y $x\neq a$,

$$f(x)-f(a)=\frac{f(x)-f(a)}{x-a}\cdot(x-a).$$

Calculando el límite en el punto a de la expresión anterior, utilizando el apartado del límite de un producto de funciones del Álgebra de Límites en el lado derecho, dado que ambos límites existen, se tiene

$$\lim_{x\to a}\ f(x)-f(a)=\lim_{x\to a}\ \frac{f(x)-f(a)}{x-a}\cdot\lim_{x\to a}\ (x-a)=f'(a)\cdot 0=0$$

y por lo tanto

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$$

Luego, f es continua en el punto a. *Q.E.D.*

Nota.
Hemos probado que si una función es derivable en un punto, entonces allí es continua. Vimos además que la proposición recíproca no siempre es válida, existen funciones que son continuas en puntos en los cuales no son derivables.

Más aún, en cursos un poco más avanzados de Análisis, puede demostrarse que existen funciones continuas en todo un intervalo, o incluso en toda la recta, que no son derivables en **ningún** punto, y que en cierto sentido que puede precisarse en cursos más avanzados, las funciones de este tipo son muchas más que las funciones continuas que son derivables en **algún** punto.

Pueden encontrarse dos casos concretos de este tipo de funciones en el Capítulo 11, Párrafo 11.2, del libro The Theory of Functions, de E.C. Tichmarsh.

1.6. Álgebra de Derivadas

En esta sección mostraremos resultados que nos permitirán encontrar las derivadas de funciones suma, multiplicación y división de funciones derivables, como se trabajó en la unidad anterior en el cálculo de límites.

Teorema 2.
Si f y g son dos funciones derivables en un punto a y c es una constante real, entonces,

1. *la función $f+g$ es derivable en el punto a y vale*
$$(f+g)'(a) = f'(a) + g'(a),$$
2. *la función $c \cdot f$ es derivable en el punto a y vale*
$$(c \cdot f)'(a) = c \cdot f'(a),$$
3. *la función $f-g$ es derivable en el punto a y vale*
$$(f-g)'(a) = f'(a) - g'(a).$$

Demostración:

1. Aplicando la definición de derivabilidad de la función $f+g$ en el punto a,
$$(f+g)'(a) = \lim_{x \to a} \frac{(f+g)(x) - (f+g)(a)}{x-a},$$
que trabajando algebraicamente es equivalente a
$$\begin{aligned}(f+g)'(a) &= \lim_{x \to a} \frac{f(x)+g(x)-f(a)-g(a)}{x-a} \\ &= \lim_{x \to a} \left(\frac{f(x)-f(a)}{x-a} + \frac{g(x)-g(a)}{x-a} \right).\end{aligned}$$

Aplicando en el lado derecho de esta expresión el apartado de límite de la función suma del Álgebra de límite, dado que los límites de los sumandos existen, se tiene

$$\begin{aligned}(f+g)'(a) &= \lim_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} + \lim_{x\to a} \frac{g(x)-g(a)}{x-a} \\ &= f'(a)+g'(a).\end{aligned}$$

2. En este caso,

$$\begin{aligned}(c\cdot f)'(a) &= \lim_{x\to a} \frac{(c\cdot f)(x)-(c\cdot f)(a)}{x-a} \\ &= \lim_{x\to a} \frac{c\cdot f(x)-c\cdot f(a)}{x-a} = \lim_{x\to a} c\cdot \frac{f(x)-f(a)}{x-a}.\end{aligned}$$

Aplicando en el lado derecho el apartado correspondiente de Álgebra de Límite, dado que f es derivable en el punto a,

$$\begin{aligned}(c\cdot f)'(a) &= \lim_{x\to a} c\cdot \frac{f(x)-f(a)}{x-a} \\ &= c\cdot \lim_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = c\cdot f'(a).\end{aligned}$$

3. La derivabilidad de la función resta, resulta de la combinación de los apartados anteriores y resultados del Álgebra de Límites.

Q.E.D.

Teorema 3.
Si f y g son dos funciones derivables en un punto a, entonces la función $f\cdot g$ es derivable en el punto a, y vale

$$(f\cdot g)'(a) = f'(a)\cdot g(a) + f(a)\cdot g'(a).$$

Demostración. Aplicando la definición de derivabilidad de la función $f\cdot g$ en el punto a,

$$\begin{aligned}(f\cdot g)'(a) &= \lim_{x\to a} \frac{(f\cdot g)(x)-(f\cdot g)(a)}{x-a} \\ &= \lim_{x\to a} \frac{f(x)\cdot g(x)-f(a)\cdot g(a)}{x-a} \\ &= \lim_{x\to a} \frac{f(x)\cdot g(x)-f(a)\cdot g(x)+f(a)\cdot g(x)-f(a)\cdot g(a)}{x-a} \\ &= \lim_{x\to a} \frac{(f(x)-f(a))\cdot g(x)+f(a)\cdot (g(x)-g(a))}{x-a} \\ &= \lim_{x\to a} \left(\frac{f(x)-f(a)}{x-a}\cdot g(x) + f(a)\cdot \frac{g(x)-g(a)}{x-a}\right),\end{aligned}$$

aplicando los apartados de límites de sumas y productos de funciones del Álgebra de Límites en el lado derecho de la última igualdad, y la continuidad de la función g en a,

$$\begin{aligned}(f\cdot g)'(a) &= \lim_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}\cdot \lim_{x\to a} g(x) + f(a)\cdot \lim_{x\to a} \frac{g(x)-g(a)}{x-a} \\ &= f'(a)\cdot g(a) + f(a)\cdot g'(a)\end{aligned}$$

Q.E.D.

ESCUELA DE CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
Av. Pellegrini 250. Rosario
+54 0341 - 480 2649 internos 216 - 119

Derivada de una Potencia de Exponente Natural

Haremos otra demostración de esta proposición enunciada anteriormente.

Proposición 4.
Si $n \in \mathbb{N}$ entonces $f(x) = x^n$ es derivable en a y vale $f'(a) = na^{n-1}$.

Demostración. Demostraremos por inducción sobre n. Si $n = 1$, $f(a) = a$ y $f'(a) = 1 = 1 \cdot a^{1-1}$. Supongamos que el enunciado es cierto para un natural n, es decir, si $f(x) = x^n$ entonces $f'(a) = na^{n-1}$. Sea $f(x) = x^{n+1}$, entonces podemos escribir $f(x) = g(x) \cdot h(x)$, con $g(x) = x^n$ y $h(x) = x$ (ambas funciones derivables en a)

$$\begin{aligned} f'(a) &= g'(a) \cdot h(a) + g(a) \cdot h'(a) \\ &= n \cdot a^{n-1} \cdot a + a^n \cdot 1 \\ &= n \cdot a^n + a^n = (n+1) \cdot a^n. \end{aligned}$$

y el enunciado vale para el natural $n+1$. Entonces para todo $n \in \mathbb{N}$ vale que si $f(x) = x^n$, entonces $f'(a) = (n+1) \cdot a^n, \forall a \in \mathbb{R}$. *Q.E.D.*

Ejemplo.

1. La función $f(x) = x \operatorname{sen} x$ es derivable en todo $a \in \mathbb{R}$ y $f'(a) = 1 \cdot \operatorname{sen} a + a \cdot \cos a$.

2. La función $f(x) = x^7$ es derivable en todo $a \in \mathbb{R}$ y $f'(a) = 7 \cdot a^6$.

Teorema 4.
Si f y g son dos funciones derivables en un punto a y además $g(a) \neq 0$, entonces la función $\dfrac{f}{g}$ es derivable en el punto a y vale

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(a) = \frac{f'(a) \cdot g(a) - f(a) \cdot g'(a)}{(g(a))^2}.$$

Demostración. En este caso, por definición de derivada de la función f/g en el punto a y manipulaciones algebraicas, tenemos

$$\begin{aligned} \left(\frac{f}{g}\right)'(a) &= \lim_{x \to a} \frac{\left(\frac{f}{g}\right)(x) - \left(\frac{f}{g}\right)(a)}{x-a} \\ &= \lim_{x \to a} \frac{\frac{f(x)}{g(x)} - \frac{f(a)}{g(a)}}{x-a} = \lim_{x \to a} \frac{f(x)g(a) - f(a)g(x)}{g(x)g(a)(x-a)} \\ &= \lim_{x \to a} \frac{f(x)g(a) - f(a)g(a) + f(a)g(a) - f(a)g(x)}{g(x)g(a)(x-a)} \\ &= \lim_{x \to a} \frac{(f(x) - f(a))\ g(a) + f(a)\ (g(a) - g(x))}{g(x)g(a)(x-a)} \\ &= \lim_{x \to a} \frac{\frac{f(x)-f(a)}{x-a}\ g(a) - f(a)\ \frac{g(x)-g(a)}{x-a}}{g(x)g(a)}. \end{aligned}$$

Por Álgebra de Límites y continuidad de la función g en el punto a, con $g(a) \neq 0$, se obtiene la tesis.

Q.E.D.

Derivada de Potencias de Exponentes Enteros Negativos

Proposición 5.
Si $n \in \mathbb{N}$ *entonces* $f(x) = x^{-n} = \dfrac{1}{x^n}$ *es derivable en todo* $a \neq 0$ *y vale* $f'(a) = -na^{-n-1}$.

Demostración. Definimos $h(x) = 1$ y $g(x) = x^n$ entonces $f = \dfrac{h}{g}$. Como h y g son derivables en $a \neq 0$ y $g(a) \neq 0$, por teorema anterior es $f'(a) = \dfrac{0 \cdot a^n - 1 \cdot na^{n-1}}{a^{2n}} = -na^{-n-1}$ *Q.E.D.*

Nota.
Combinando los resultados de esta sección se concluye que los polinomios son derivables en todo $\mathbb{R}$, y también las funciones racionales en todo su dominio.

Ejemplo.

1. la función $f(x) = 2x^3 - x^2 + 3x - 5$, es derivable en todo $a \in \mathbb{R}$, y vale $f'(a) = 6a^2 - 2a + 3$.
2. La función $f(x) = \dfrac{1}{x} = x^{-1}$, es derivable en todo $a \neq 0$, y vale $f'(a) = -1 \cdot a^{-2} = -\dfrac{1}{a^2}$.
3. La función $f(x) = \dfrac{2x^2 - 1}{x + 1}$, es derivable en todo $a \neq -1$, y vale
$$f'(a) = \frac{4a \cdot (a+1) - (2a^2 + 1) \cdot 1}{(a+1)^2}.$$
4. La función $f(x) = \dfrac{\operatorname{sen} x}{x^2}$, es derivable en todo $a \neq 0$, y $f'(a) = \dfrac{\cos a \cdot a^2 - \operatorname{sen} a \cdot 2a}{a^4}$.
5. Si $f(x) = \tan x = \dfrac{\operatorname{sen} x}{\cos x}$, entonces f es derivable en todo $a \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, y
$$\begin{aligned} f'(a) &= \frac{\cos a \cos a - \operatorname{sen} a(-\operatorname{sen} a)}{\cos^2 a} \\ &= \frac{\cos^2 a + \operatorname{sen}^2 a}{\cos^2 a} = \frac{1}{\cos^2 a} = \sec^2 a. \end{aligned}$$

1.7. Derivada de la Composición de Funciones. Regla de la Cadena

Teorema 5 (Regla de la Cadena).
Sean f y g dos funciones tales que $\mathrm{Rec}(g) \subseteq \mathrm{Dom}(f)$ *y sea a un punto tal que g es derivable en a y f es derivable en $g(a)$. Entonces, la composición $f \circ g$ es derivable en a y vale*

$$(f \circ g)'(a) = f'(g(a)) \cdot g'(a).$$

Demostración. Si para un incremento de h unidades en la variable a, notamos con la variable auxiliar k al incremento de la función g, tendremos

$$k = g(a+h) - g(a),$$

o sea

$$g(a+h) = g(a)+k,$$

y trabajando algebraicamente en la definición de derivada,

$$\begin{aligned}
(f\circ g)'(a) = \lim_{h\to 0} & \frac{(f\circ g)(a+h)-(f\circ g)(a)}{h} \\
= \lim_{h\to 0} & \frac{f(g(a+h))-f(g(a))}{h} \\
= \lim_{h\to 0} & \frac{f(g(a)+k)-f(g(a))}{h} \qquad (1) \\
= \lim_{h\to 0} & \left(\frac{f(g(a)+k)-f(g(a))}{k}\cdot\frac{g(a+h)-g(a)}{h}\right),
\end{aligned}$$

donde el paso de la ecuación (1) a la siguiente supone una hipótesis adicional: que el valor k sea no nulo para todos los valores h suficientemente chicos. El Teorema es válido aún sin esta suposición adicional, pero no presentaremos aquí la demostración completa. Los lectores interesados en conocerla pueden remitirse al Párrafo 6, del Capítulo 3 del libro Cálculo 1 de S. Lang.

Ahora bien, en la última expresión, para asegurar que podemos calcular el apartado del límite de la función producto del Álgebra de Límites, veamos que ambos límites existen.

En primer lugar, notemos que, como g es derivable en el punto a, se tiene que g es continua en el punto a, por el Teorema 1, y por lo tanto,

$$h\longrightarrow 0 \;\Rightarrow\; k = g(a+h)-g(a)\longrightarrow 0;$$

y como f es derivable en $g(a)$,

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(g(a)+k)-f(g(a))}{k} = \lim_{k\to 0}\frac{f(g(a)+k)-f(g(a))}{k} = f'(g(a)).$$

Por otro lado, como la función g es derivable en el punto a,

$$\lim_{h\to 0}\frac{g(a+h)-g(a)}{h} = g'(a).$$

Siendo lícito entonces aplicar Álgebra de Límites, se llega a que la función $f\circ g$ es derivable en el punto a y vale

$$(f\circ g)'(a) = f'(g(a))\,g'(a).$$

Q.E.D.

Ejemplo.

1. Sean las funciones f y g tales que $f(x) = x^{10}$ y $g(x) = x^2+1$. Entonces, la composición $f\circ g$, está definida en todo $\mathbb{R}$, y vale

   $$(f\circ g)(x) = (x^2+1)^{10}\ .$$

   Como f y g son derivables en $\mathbb{R}$, el teorema anterior nos dice que la composición es derivable en todo $a\in\mathbb{R}$, y

   $$(f\circ g)'(a) = 10\cdot(a^2+1)^9\cdot 2a = 20\ a\ (a^2+1)^9\ .$$

2. Sean las funciones f y g tales que $f(x) = |x|$ y $g(x) = \operatorname{sen} x$. Entonces, la composición $f \circ g$, está definida en todo $\mathbb{R}$, y vale
$$(f \circ g)(x) = |\operatorname{sen} x| \ .$$
Ahora bien, en este caso, f no es derivable en todo $\mathbb{R}$, sino que lo es para $x \neq 0$.

   En este caso, la Regla de la Cadena nos dice que $(f \circ g)$ es derivable en los puntos a tales que g es derivable en a, y f es derivable en $g(a)$. En este caso, $(f \circ g)$ será derivable en todos los puntos a tales que $\operatorname{sen} a \neq 0$, esto es, en todo $a \neq k\pi$, con $k \in \mathbb{Z}$.

   Observemos que la Regla de la Cadena **NO** afirma que en esos puntos la función composición no sea derivable.

Nota.
Si ahora consideramos la composición de tres funciones,
$$(f \circ g \circ h),$$
observando que
$$(f \circ g \circ h) = (f \circ (g \circ h)),$$
tendremos que esta función será derivable en los puntos a tales que $(g \circ h)$ es derivable en a y f es derivable en $(g \circ h)(a)$.
Esto es, en los puntos a tales que h es derivable en a, g es derivable en $h(a)$ y f es derivable en $g(h(a))$. Para esos puntos,
$$\begin{aligned}(f \circ (g \circ h))(a) &= f'((g \circ h)(a)) \cdot (g \circ h)'(a) \\ &= f'((g \circ h)(a)) \left[g'(h(a))\, h'(a)\right] \\ &= f'(g(h(a)))\, g'(h(a))\, h'(a).\end{aligned}$$

Ejemplo.
Sean $f(x) = \operatorname{sen} x$, $g(x) = x^7$ y $h(x) = 5x+1$, entonces la función
$$(f \circ g \circ h)(x) = \operatorname{sen}((5x+1)^7)$$
es derivable en todo $a \in \mathbb{R}$ y
$$(f \circ g \circ h)'(a) = f'(g(h(a)))\, g'(h(a))\, h'(a) = \cos\left((5a+1)^7\right)\, 7 \cdot (5a+1)^6\, 5.$$

Nota.
Luego de haber probado la Regla de la Cadena, cobra sentido la notación de Leibniz para la derivada
$$\frac{df}{dx}.$$
Si en la composición $f \circ g$, evaluada en un punto x arbitrario, notamos $u = g(x)$, la Regla de la Cadena nos dice que
$$\frac{d(f \circ g)}{dx} = \frac{df}{du} \cdot \frac{du}{dx}.$$
Así, la derivada se comporta como si pudiéramos cancelar la cantidad du.

Ejemplo.
Un cuadrado se expande de manera que su lado crece a razón de 2 centímetros por segundo. Calculemos la razón de cambio del área del cuadrado, cuando su lado mide 6 centímetros.

Para ello, notemos que en cada instante, el área del cuadrado es

$$A(t) = \ell(t)^2$$

donde notamos con $\ell(t)$ a la longitud del cuadrado en el tiempo t.

Entonces, la tasa de cambio del área con respecto al tiempo es, por definición,

$$\frac{d(A(\ell(t)))}{dt}$$

Utilizando la Regla de la Cadena, tendremos que

$$\frac{dA}{dt} = \frac{dA}{d\ell} \cdot \frac{d\ell}{dt} = 2 \cdot \ell(t) \cdot \frac{d\ell}{dt}$$

donde sabemos que $\dfrac{d\ell}{dt}$ es la constante 2. Así, cuando $\ell(t) = 6$ (sin saber para qué t esto ocurre)

$$\frac{dA}{dt} = 2 \cdot 6 \text{ cm} \cdot 2 \ \frac{\text{cm}}{\text{s}} = 24 \ \frac{\text{cm}^2}{\text{s}}.$$

1.8. Derivada de la Función Inversa

Teorema 6. *[Derivada de la Función Inversa]*
Sea f una función biyectiva, definida en un intervalo abierto I y que es derivable en un punto $a \in I$, con $f'(a) \neq 0$.
Entonces, su función inversa, f^{-1}, es derivable en el punto $f(a)$, y vale

$$(f^{-1})'(f(a)) = \frac{1}{f'(a)} \ .$$

Demostración. Escribiendo el límite del cociente incremental de la definición de derivabilidad de la función f^{-1} en el punto $f(a)$, tenemos

$$\lim_{h\to 0} \frac{f^{-1}(f(a)+h) - f^{-1}(f(a))}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{f^{-1}(f(a)+h) \ - \ a}{h}.$$

Ahora, todo punto $f(a)+h$ en el dominio de f^{-1}, es un punto en el recorrido de f, y por lo tanto puede ser escrito como

$$f(a)+h \ = \ f(a+k) \ ,$$

para un único k, por la biyectividad de la función f. Entonces, el límite anterior nos queda

$$\lim_{h\to 0} \frac{f^{-1}(f(a)+h) \ - \ a}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{f^{-1}(f(a+k)) \ - \ a}{f(a+k)-f(a)} = \lim_{h\to 0} \frac{k}{f(a+k)-f(a)}.$$

Ahora, de la definición del valor k, surge que

$$f(a)+h = f(a+k) \ \Rightarrow \ f^{-1}(f(a)+h) = a+k \ \Rightarrow \ k = f^{-1}(f(a)+h) - f^{-1}(f(a)),$$

y por el Teorema de Continuidad de la Función Inversa, f^{-1} es continua en el punto $f(a)$, que implica

$$h \longrightarrow 0 \;\Rightarrow\; k \longrightarrow 0,$$

y retomando el límite,

$$\lim_{h\to 0} \frac{k}{f(a+k)-f(a)} = \lim_{k\to 0} \frac{k}{f(a+k)-f(a)} = \lim_{k\to 0} \frac{1}{\dfrac{f(a+k)-f(a)}{k}} = \frac{1}{f'(a)},$$

donde en la última igualdad aplicamos el apartado del límite de la función recíproca del Álgebra de Límites, por $f'(a)$ el límite del denominador, no nulo por hipótesis. *Q.E.D.*

Derivada de Potencias de Exponente Racional

Proposición 6.

1. *Si $n \in \mathbb{N}$ entonces $f(x) = x^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{x}$ es derivable en todo a del dominio, con $a \neq 0$ y vale*

$$f'(a) = \tfrac{1}{n} a^{\frac{1}{n}-1}$$

.

2. *Si $n = \frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$ entonces $f(x) = x^{\frac{p}{q}} = (x^{\frac{1}{q}})^p$ es derivable en todo a del dominio, con $a \neq 0$ y vale*

$$f'(a) = \tfrac{p}{q} a^{\frac{p}{q}-1}$$

.

Demostración.

- Comencemos calculando, para $n \in \mathbb{N}$, la derivada de la función f, de ley

$$f(x) = \sqrt[n]{x} = x^{\frac{1}{n}},$$

definida en el conjunto $\mathbb{R}$ si n es un natural impar, o $\mathbb{R}_0^+$ si n es un natural par, inversa de la función g tal que

$$g(x) = x^n.$$

El Teorema 6 nos dice que la función f es derivable en todo punto $b = g(a)$, donde sea $g'(a) \neq 0$. En nuestro caso queda entonces, con $g'(x) = nx^{n-1}$, f derivable en todo $b \neq 0$, y allí vale

$$f'(b) = (g^{-1})'(g(a)) = \tfrac{1}{g'(a)} = \tfrac{1}{na^{n-1}} = \tfrac{1}{n(\sqrt[n]{b})^{n-1}} =$$

$$= \tfrac{1}{nb^{\frac{n-1}{n}}} = \tfrac{1}{nb^{1-\frac{1}{n}}} = \tfrac{1}{n} b^{\frac{1}{n}-1}.$$

- Ahora, para $n = \dfrac{p}{q} \in \mathbb{Q}$, con $p \in \mathbb{Z}$ y $q \in \mathbb{N}$, si

$$f(x) = x^{\frac{p}{q}} = (x^{\frac{1}{q}})^p \;,$$

f es derivable en todo a del dominio de la función, con $a \neq 0$, y por la Regla de la Cadena,

$$f'(a) = p\,(a^{\frac{1}{q}})^{p-1}\,\frac{1}{q}\,a^{\frac{1}{q}-1} = \frac{p}{q}\,a^{\frac{p-1}{q}+\frac{1}{q}-1} =$$

$$= \frac{p}{q}\,a^{\frac{p}{q}-\frac{1}{q}+\frac{1}{q}-1} = \frac{p}{q}\,a^{\frac{p}{q}-1} \qquad Q.E.D.$$

Ejemplo.

1. La función $f(x) = x^{\frac{1}{2}} = \sqrt{x}$, es derivable en todo $a > 0$, y vale
$$f'(a) = \frac{1}{2}a^{\frac{1}{2}-1} = \frac{1}{2}a^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2\sqrt{a}}.$$

2. La función $f(x) = x^{-\frac{3}{2}} = \dfrac{1}{(\sqrt{x})^3}$, es derivable en todo $a > 0$, con
$$f'(a) = -\frac{3}{2}a^{-\frac{3}{2}-1} = -\frac{3}{2}a^{-\frac{5}{2}} = -\frac{3}{2\,(\sqrt{a})^5}.$$

3. La función $f(x) = \sqrt{\operatorname{sen}(4-x^2)}$ es derivable para $a \in (-2,2)$, con
$$f'(a) = \frac{1}{2\sqrt{\operatorname{sen}(4-a^2)}}\cos(4-a^2)\,(-2a).$$

Derivada de Funciones Trigonométricas Inversas

1. Sea la función
$$f : \left[-\tfrac{\pi}{2}, \tfrac{\pi}{2}\right] \to [-1,1]$$
$$f(x) = \operatorname{sen} x,$$
con función inversa
$$f^{-1} : [-1,1] \to \left[-\tfrac{\pi}{2}, \tfrac{\pi}{2}\right]$$
$$f^{-1}(x) = \operatorname{arc\,sen} x\ .$$
Por el Teorema 6, para todos los puntos a donde sea $f'(a) = \cos a \neq 0$, o sea si $a \neq \pm\frac{\pi}{2}$, se tendrá que f^{-1} es derivable en $b = f(a)$, y será
$$(f^{-1})'(f(a)) = \frac{1}{\cos a} = \frac{1}{\sqrt{1-\operatorname{sen}^2 a}} = \frac{1}{\sqrt{1-(f(a))^2}}.$$
Limpiando notación, para todo $b \neq \pm 1 = f(\pm\frac{\pi}{2})$, arco seno es derivable, y vale
$$(\operatorname{arc\,sen})'(b) = \frac{1}{\sqrt{1-b^2}}.$$

2. Sea ahora la función
$$g : [0,\pi] \to [-1,1]$$
$$g(x) = \cos x,$$
con función inversa
$$g^{-1} : [-1,1] \to [0,\pi]$$
$$g^{-1}(x) = \arccos x.$$
En este caso para los a donde sea $g'(a) = -\operatorname{sen}\ a \neq 0$, o sea si $a \neq 0$ y $a \neq \pi$, se tendrá que g^{-1} es derivable en $b = g(a)$, y
$$(g^{-1})'(g(a)) = \frac{1}{-\operatorname{sen} a} = -\frac{1}{\sqrt{1-\cos^2 a}} = -\frac{1}{\sqrt{1-(g(a))^2}},$$
y entonces aquí, para $b \neq 1 = g(0)$ y $b \neq -1 = g(\pi)$, arco coseno es derivable, y vale
$$(\arccos)'(b) = -\frac{1}{\sqrt{1-b^2}}.$$

3. Para la derivada de la función arco tangente, primero recordemos la identidad trigonométrica siguiente.
$$\sec^2 x = \frac{1}{\cos^2 x} = \frac{\cos^2 x + \operatorname{sen}^2 x}{\cos^2 x} = \frac{\cos^2 x}{\cos^2 x} + \frac{\operatorname{sen}^2 x}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x.$$
Ahora sí, para la función
$$h : \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \to \mathbb{R}$$
$$h(x) = \tan x,$$
de inversa
$$h^{-1} : \mathbb{R} \to \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$$
$$h^{-1}(x) = \arctan x,$$
para a tal que $h'(a) = \dfrac{1}{\cos^2\ a} = \sec^2\ a \neq 0$ se tendrá que h^{-1} es derivable en $b = h(a)$, y
$$(h^{-1})'(h(a)) = \frac{1}{\sec^2 a} = \frac{1}{1+\tan^2 a} = \frac{1}{1+(h(a))^2},$$
y entonces para todo $b \in \mathbb{R}$, arco tangente es derivable, con
$$(\arctan)'(b) = \frac{1}{1+b^2}.$$

Ejemplo.

1. La función $f(x) = \operatorname{arcsen}(2x)$, es derivable en todo $a \in \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$, con
$$f'(a) = \frac{2}{\sqrt{1-4a^2}}.$$

2. La función $f(x) = \arctan(x^3+5)$, es derivable en todo $a \in \mathbb{R}$, con
$$f'(a) = \frac{3a^2}{1+(a^3+5)^2}.$$

1.9. Diferenciabilidad y Aproximación de Primer Orden

Definición (Diferenciabilidad).
Decimos que una función f es diferenciable en un punto a, si existen un número real α y una función θ, definida en un entorno del punto a, tales que, para $h > 0$,

$$f(a+h) = f(a) + \alpha \cdot h + h \cdot \theta(h),$$

donde

$$\lim_{h \to 0} \theta(h) = 0.$$

Teorema 7.
Una función f es derivable en un punto a si y sólo si es diferenciable en a.

Demostración. En primer lugar, supongamos que la función f es derivable en el punto a. Entonces, por definición de derivabilidad

$$f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}.$$

Sea la función θ definida por

$$\theta(h) = \begin{cases} \dfrac{f(a+h) - f(a)}{h} - f'(a) & \text{si} \quad h \neq 0 \\ 0 & \text{si} \quad h = 0 \end{cases}$$

Por construcción, la función θ, junto al número real $\alpha = f'(a)$, verifican la condición de diferenciabilidad en el punto a. Esto es,

$$f(a+h) = f(a) + f'(a) \cdot h + h \cdot \theta(h), \tag{2}$$

$$\lim_{h \to 0} \theta(h) = 0.$$

Observemos antes de pasar a la prueba de la otra parte del teorema, que la definición del valor $\theta(0) = 0$ es arbitraria. Necesitamos un valor que haga que tenga sentido la ecuación (2) para $h = 0$, pero cualquiera sirve, dado que vale 0 el producto $h \cdot \theta(h)$ para $h = 0$.

Recíprocamente, supongamos f es diferenciable en a, y sean el número α y una función $\theta(h)$, los requeridos en la definición de diferenciabilidad. Entonces,

$$f(a+h) = f(a) + \alpha \cdot h + h\theta(h),$$

$$\lim_{h \to 0} \theta(h) = 0.$$

Así, para $h \neq 0$,

$$\frac{f(a+h) - f(a)}{h} = \alpha + \theta(h),$$

y tomando límite cuando $h \to 0$,

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = \alpha + \lim_{h \to 0} \theta(h) = \alpha,$$

y por lo tanto la función f es derivable en el punto a, y vale $f'(a) = \alpha$. *Q.E.D.*

Nota.
Cuando una función f es continua en un punto a, entonces, para h chico, podemos aproximar el valor de $f(a+h)$ por el valor $f(a)$, ya que

$$f(a+h) = f(a) + (f(a+h) - f(a)) = f(a) + e_0(h),$$

donde $\lim\limits_{h\to 0} e_0(h) = 0$.

Ahora, hemos visto que si una función f es diferenciable en un punto a, o lo que es lo mismo, por el teorema anterior, derivable en el punto a, entonces podemos afirmar que

$$f(a+h) = f(a) + f'(a)\cdot h + e_1(h),$$

donde no sólo $\lim\limits_{h\to 0} e_1(h) = 0$, sino que e_1 se aproxima a cero tan rápido para que también resulta válido el límite

$$\lim_{h\to 0} \frac{e_1(h)}{h} = 0,$$

y la nueva aproximación resulta entonces mejor que la obtenida para funciones continuas.

A la aproximación de la función que utiliza el concepto de diferenciabilidad, se la llama aproximación de primer orden, o aproximación por linealización, de la función f en el punto a.

Observemos que en el caso de continuidad, la aproximación corresponde a aproximar los valores de la curva $y = f(x)$ por los de la recta horizontal $y = f(a)$, mientras que en el caso de la aproximación de primer orden, se aproximan, cerca del punto a, a los valores de la curva por los de la recta tangente a la gráfica de f en el punto a.

2. Teoremas de Valor Medio

2.1. Extremos Relativos de una Función. Teorema de Fermat

La derivación se puede utilizar para determinar los *extremos* de una función, es decir los máximos y mínimos.

En la Unidad 3, hemos definido los conceptos de máximos y mínimos de funciones, y demostrado que toda función continua en un intervalo cerrado y acotado admite la existencia de tales valores.

Vimos además que las condiciones de ser la función continua, y el intervalo cerrado y acotado, son imprescindibles.

Definiremos en esta parte los conceptos de máximos y mínimos locales de funciones. Éstos serán valores que actúen como los máximos y mínimos globales, si se restringe la atención a entornos de puntos en el dominio de la función.

Definición (Extremos Locales).
Sean f una función y un número $x_0 \in \mathrm{Dom}(f)$. Diremos que:

1. f alcanza un *máximo relativo* en x_0 (o que $f(x_0)$ es un máximo relativo de f) si existe un entorno de x_0, $E(x_0,\delta)$, tal que, para todo $x \in E(x_0,\delta)$,

$$f(x) \leqq f(x_0).$$

2. f alcanza un *mínimo relativo* en x_0 (o que $f(x_0)$ es un mínimo relativo de f) si existe un entorno de x_0, $E(x_0,\delta)$, tal que, para todo $x \in E(x_0,\delta)$,
$$f(x_0) \leqq f(x).$$
3. f tiene un *extremo relativo* en x_0 si tiene un máximo o un mínimo relativo en x_0.

Nota.
Un máximo relativo en x_0 es un máximo absoluto en cierto entorno de x_0, si bien no necesariamente es absoluto en todo el dominio de f.
Naturalmente además, todo máximo absoluto es, en particular, máximo relativo.
Notaremos MA (máximo absoluto), MR (máximo relativo), ma (mínimo absoluto) y mr (mínimo relativo). También se suele usar el término extremo local en lugar de relativo.

Veremos una condición necesaria de existencia de extremos para funciones derivables.

Teorema 8 (Teorema de Fermat).
Sea f definida en un entorno de un punto x_0 y supongamos que f tiene en x_0 un extremo relativo. Entonces, si f es derivable en x_0, se tiene
$$f'(x_0) = 0.$$

Demostración. Por el absurdo, supongamos que $f'(x_0) \neq 0$. Es decir, $f'(x_0) > 0$ o $f'(x_0) < 0$.
Supongamos que fuese $f'(x_0) > 0$. Entonces,
$$f'(x_0) = \lim_{x\to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} > 0$$
Por el Teorema de Conservación del Signo, existirá un entorno $E(x_0,\delta)$ de x_0, donde
$$0 < |x - x_0| < \delta \ \Rightarrow\ \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} > 0\ .$$
Analizando las posiciones relativas de los valores x y x_0, tenemos:
Si x es tal que
$$x_0 - \delta < x < x_0 \quad \text{y} \quad \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} > 0 \quad\Rightarrow\quad x - x_0 < 0 \quad \text{y} \quad \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} > 0 \quad\Rightarrow$$
$$\Rightarrow\quad f(x) - f(x_0) < 0 \quad\Rightarrow\quad f(x) < f(x_0),$$
Si x es tal que
$$x_0 < x < x_0 + \delta \quad \text{y} \quad \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} > 0 \quad\Rightarrow\quad x - x_0 > 0 \quad \text{y} \quad \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} > 0 \quad\Rightarrow$$
$$\Rightarrow f(x) - f(x_0) > 0 \quad\Rightarrow\quad f(x) > f(x_0).$$
De lo anterior se concluye que f no podría tener un extremo relativo en x_0, lo cual contradice la hipótesis del teorema, y por lo tanto no puede ser $f'(x_0) > 0$.
Por un razonamiento similar, que se deja como ejercicio, se llega a concluir que no podrá ser $f'(x_0) < 0$.
Luego, $f'(x_0) = 0$. *Q.E.D.*

Nota.

1. El teorema anterior nos dice que si f es derivable en x_0, esto es existe $f'(x_0)$ y f tiene un extremo relativo en x_0, entonces $f'(x_0) = 0$.

   La proposición recíproca no es siempre cierta. Si f es derivable en x_0 y $f'(x_0) = 0$, no necesariamente en x_0 se encuentra un extremo relativo de f.

   Por ejemplo, la función $f(x) = x^3$, es derivable en $x_0 = 0$, con $f'(0) = 0$ y f no tiene extremo relativo en 0.

2. Por otro lado, se afirma que si f tiene un extremo relativo en x_0, o bien $f'(x_0) = 0$ o bien f no es derivable en x_0.

   Por ejemplo, la función $f(x) = |x|$ tiene un mínimo absoluto (por lo tanto relativo) en 0, donde no es derivable.

Definición (Punto Crítico). Decimos que $x_0 \in \mathrm{Dom}(f)$ es un *punto crítico* de f si $f'(x_0) = 0$ o si f no es derivable en x_0.

Nota.

1. El Teorema de Fermat nos dice que si f tiene un extremo relativo en x_0, entonces x_0 es un punto crítico de f.

   Por lo tanto, para hallar extremos relativos de una función, luego de localizar sus puntos críticos, necesitamos establecer un criterio para analizar si en ellos hay o no extremos y de qué tipo.

2. El teorema de Weierstrass nos asegura la existencia de máximo y mínimo absolutos para una función continua en $[a,b]$.

   Éstos pueden alcanzarse en a, en b o en puntos interiores del intervalo.

   Así, para hallar los extremos absolutos, deberemos localizar los puntos críticos de f en (a,b) y comparar el valor de f en ellos con $f(a)$ y $f(b)$.

   El mayor de todos será el máximo absoluto y el menor, el mínimo absoluto.

Ejemplo. Hallar los extremos de $f(x) = x^3 - 3x^2 + 1$ en el intervalo $[-\frac{1}{2}, 4]$.

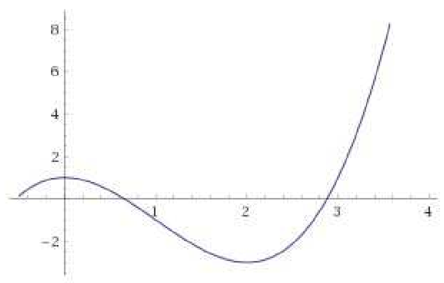


Figura 3: Teorema de Fermat

Como f es derivable en $(-\frac{1}{2},4)$, no hay puntos críticos donde la derivada no exista. Busquemos en los x tales $f'(x)=0$, es decir, donde $f'(x)=3x^2-6x=0$. Esto nos da, $x=0$ o $x=2$, ambos valores están en $(-\frac{1}{2},4)$.
A continuación calculamos f en los extremos del intervalo,

$$f\left(-\tfrac{1}{2}\right)=\tfrac{1}{8} \quad \text{y} \quad f(4)=17,$$

y en los puntos críticos

$$f(0)=1 \quad \text{y} \quad f(2)=-3,$$

y comparamos todos los valores, concluyendo que

$$f(2)=-3 \text{ es el valor mínimo absoluto}$$

y

$$f(4)=17 \text{ es el valor máximo absoluto}$$

de f en el intervalo dado.

2.2. Teoremas de Valor Medio del Cálculo Diferencial

Teorema 9 (Teorema de Rolle). *Sea f definida en un intervalo cerrado y acotado $[a,b]$, tal que f es continua en $[a,b]$ y derivable en (a,b). Si además vale que $f(a)=f(b)$, entonces existe (al menos) un $c\in(a,b)$ tal que*

$$f'(c)=0.$$

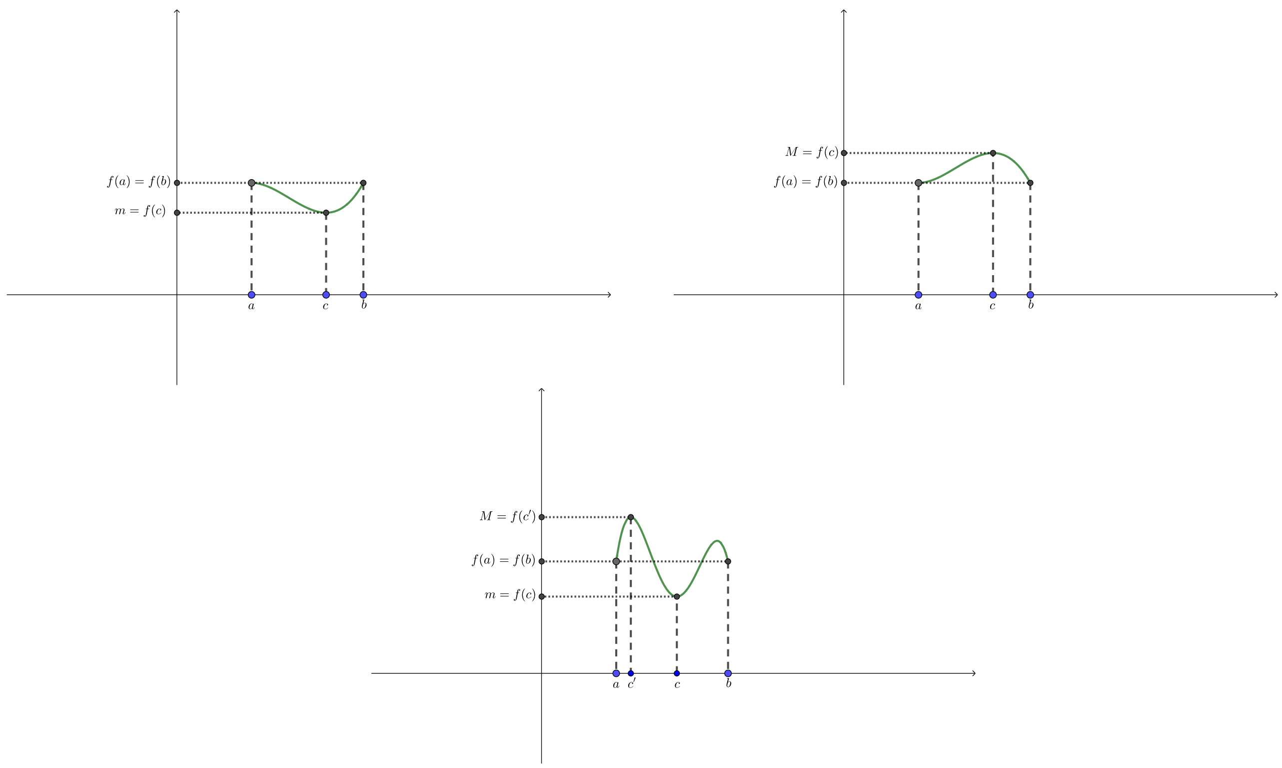


Figura 4: Teorema de Rolle

Demostración. Por ser f continua en $[a,b]$, el Teorema de Weierstrass asegura la existencia de extremos de f en $[a,b]$.
Sean M y m los valores máximo y mínimo absolutos de f en ese intervalo. Entonces $m \leqq M$.

Si fuese $m = M$, resultaría $f(x) = cte = m = M$ en $[a,b]$ y por lo tanto tendríamos $f'(x) = 0$, para todo $x \in (a,b)$, y el teorema queda demostrado.

Si $m < M$, por ser $f(a) = f(b)$, al menos uno de los valores, m o M, será asumido en un punto interior $c \in (a,b)$, y f tendrá un extremo relativo en el punto c. En la Figura 4 se ilustran tres casos de esta situación.

En cualquier caso, siendo f derivable en (a,b), será, por el Teorema de Fermat,

$$f'(c) = 0.$$

Q.E.D.

Teorema 10 (Teorema de Lagrange).
Sea f definida en un intervalo cerrado y acotado $[a,b]$ y supongamos que f es continua en $[a,b]$ y derivable en (a,b).
Entonces existe (al menos) un $c \in (a,b)$ tal que

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c),$$

o, de manera alternativa, tal que

$$f(b) - f(a) = f'(c)(b - a).$$

Antes de pasar a la demostración del Teorema de Lagrange, observemos la gráfica de la Figura 5.

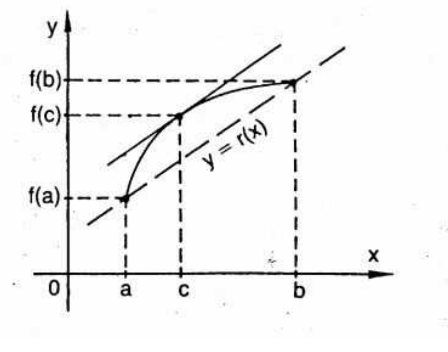


Figura 5: Teorema de Lagrange

Sabemos que la pendiente de la recta secante a la gráfica de f, $y = r(x)$, que pasa por los puntos $(a, f(a))$ y $(b, f(b))$ es

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Con esta observación, notamos que el Teorema de Lagrange nos dice que, dada la recta secante a la gráfica de f que pasa por los puntos $(a, f(a))$ y $(b, f(b))$, existe un c en el interior del intervalo (a,b), tal que recta tangente a la gráfica de f en el punto $(c, f(c))$ tiene la misma pendiente. Esto es, ambas rectas son paralelas.

Demostración. Definamos la función auxiliar, F, en el intervalo $[a,b]$, de la siguiente manera

$$F(x) = f(x) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a).$$

Esta función F verifica las condiciones del Teorema de Rolle. En efecto,

* F es continua en el intervalo $[a,b]$, al ser f continua en $[a,b]$ y utilizando resultados del Álgebra de Funciones Continuas;

* F es derivable en el intervalo (a,b), por ser f derivable en (a,b), y resultados del Álgebra de Derivadas; y

* $F(a) = F(b)$, en efecto

$$F(a) = f(a) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(a-a) = f(a)$$

y

$$F(b) = f(b) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(b-a) = f(b) - f(b) + f(a) = f(a).$$

Así, podemos afirmar que existe un valor $c \in (a,b)$, tal que

$$F'(c) = 0.$$

Si calculamos F', vemos que, para $x \in (a,b)$, es

$$F'(x) = f'(x) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a},$$

y en consecuencia, calculado en c será

$$0 = F'(c) = f'(c) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a},$$

que implica la tesis de nuestro teorema. *Q.E.D.*

Corolario 1.
Si f es una función continua en un intervalo $[a,b]$ y derivable en (a,b), tal que en todos los puntos de (a,b) la derivada es nula, entonces f es constante en $[a,b]$.

Demostración. Consideremos un intervalo cualquiera $[x_1,x_2] \subsetneqq [a,b]$. Entonces la función f satisface las condiciones del Teorema 10 en el intervalo $[x_1,x_2]$, y en consecuencia, existe $c \in (x_1,x_2)$, donde

$$\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} = f'(c) \quad \text{y por hipótesis } f'(c) = 0 \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad f(x_2) - f(x_1) = 0 \quad \Rightarrow \quad f(x_2) = f(x_1).$$

Como x_1 y x_2 son puntos cualesquiera en el intervalo $[a,b]$, entonces para todo $x \in [a,b]$ debe ser $f(x) = f(x_1) = f(x_2) = k$. *Q.E.D.*

El corolario anterior nos permite demostrar que si dos funciones tienen la misma derivada en un intervalo, entonces ambas difieren en una constante.

Corolario 2.
Sean f y g dos funciones continuas en un intervalo $[a,b]$ y derivables en (a,b), tal que para todo $x \in (a,b)$, es $f'(x) = g'(x)$, entonces, existe $k \in \mathbb{R}$, tal que, para todo $x \in [a,b]$,

$$f(x) = g(x) + k.$$

Demostración. Para todo $x \in [a,b]$, se tiene

$$\begin{aligned} 0 &= f'(x) - g'(x) = (f' - g')(x) \\ &= (f-g)'(x). \end{aligned}$$

Por el Corolario 1, existe $k \in \mathbb{R}$, tal que, para todo $x \in [a,b]$, $k = (f-g)(x) = f(x) - g(x)$, o lo que es lo mismo, $f(x) = g(x) + k$. *Q.E.D.*

Aplicación del Teorema de Lagrange. Propagación de Errores.

El valor de la derivada en la forma alternativa de la tesis del Teorema de Lagrange,

$$f(\tilde{x}) - f(x^*) = f'(c)(\tilde{x} - x^*) \ , \quad \text{con } c \text{ entre } \tilde{x} \text{ y } x^* \ ,$$

proporciona una idea de cómo se propaga un error, cuando en una medición directa de un valor x^* se considera cierto un valor observado $\tilde{x}$, al aproximar como valor de la verdadera cantidad $f(x^*)$ a la cantidad $f(\tilde{x})$.
Veamos en un ejemplo concreto.

Ejemplo.
Supongamos que contamos con una regla, de apreciación $0,1$ cm, y con ella medimos el verdadero valor x^* del radio de un círculo, observando el valor $\tilde{x} = 2$ cm.
Con esta información, con $f(x) = \pi x^2$, podemos afirmar que el valor del área del círculo es aproximadamente

$$f(\tilde{x}) = 4\pi \text{ cm}^2,$$

con un error acotado por

$$\begin{aligned} |f(\tilde{x}) - f(x^*)| &= |f'(c)||\tilde{x} - x^*| \\ &= \ 2\pi c \ |\tilde{x} - x^*| \ \leqq \ 2\pi \times 2,1 \text{ cm} \times 0,1 \text{ cm}, \end{aligned}$$

donde, si bien no conocemos el verdadero valor x^*, y menos aún el valor c, sabemos que no puede ser mayor al valor observado más la apreciación de la regla.
Finalmente, si acotamos π por 3,142, afirmamos que la superficie del círculo es $12,56$ cm^2, con un error acotado por $1,319$ cm^2, esto es, con un error relativo del $10,5\%$.
Notemos finalmente, que la cota de error crece, al considerar mediciones de radios mayores, aún para la misma apreciación del instrumento.

Teorema 11 (Teorema de Cauchy).
Sean f y g dos funciones definidas en un intervalo cerrado y acotado $[a,b]$, tal que ambas son continuas en $[a,b]$ y derivables en (a,b). Entonces existe $c \in (a,b)$ tal que

$$f'(c)\,(g(b) - g(a)) = g'(c)\,(f(b) - f(a)).$$

Nota. El teorema de Rolle es un caso particular del teorema de Lagrange y éste, a su vez, un caso particular del teorema de Cauchy, cuando $g(x) = x$.

2.3. † La Propiedad de los Valores Intermedios para Derivadas

Teorema 12 (Propiedad de los Valores Intermedios de Darboux).
Sea f una función derivable en un intervalo $[a,b]$, supongamos que $f'(a) < f'(b)$, y sea z un valor tal que $f'(a) < z < f'(b)$. Entonces, existe un valor $c \in (a,b)$, tal que

$$f'(c) = z.$$

La misma tesis vale si se supone que $f'(b) < f'(a)$ y $f'(b) < z < f'(a)$.

Demostración. Consideremos la función auxiliar definida en el intervalo $[a,b]$, como sigue

$$g(x) = f(x) - zx.$$

Como la función f es derivable en el conjunto $[a,b]$, allí es continua. Por lo tanto, también resulta derivable, y por tanto continua, en el intervalo $[a,b]$ la función g.

Por el Teorema de Weierstrass, existe $c \in [a,b]$, donde g alcanza su valor mínimo y como g es derivable por teorema de Fermat, debe ser $g'(c) = 0$. Luego c no puede ser ni a ni b, ya que

$$g'(a) = f'(a) - z < 0, \quad \text{y} \quad g'(b) = f'(b) - z > 0.$$

Luego, $c \in (a,b)$. Además, como $g(c)$ es mínimo, debe ser $0 = g'(c) = f'(c) - z$, o lo que es lo mismo, $f'(c) = z$. *Q.E.D.*

En el Teorema 1 hemos demostrado que una función derivable en un punto, es continua en dicho punto. Luego, una función derivable en un intervalo, será continua en el intervalo.

Supongamos que una función f es derivable en un conjunto A, y sea f' su función derivada, definida sobre el conjunto A. Cabe preguntarse si la nueva función f' será continua en el conjunto A.

El siguiente ejemplo, da respuesta negativa a esta pregunta.

Ejemplo.
Sea la función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definida por la ley

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \cos\left(\frac{1}{x}\right) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

Cuando $x \neq 0$, por la Regla de la Cadena, f es derivable, y vale

$$\begin{aligned} f'(x) &= 2\ x\ \cos\left(\tfrac{1}{x}\right) + x^2\left(-\operatorname{sen}\left(\tfrac{1}{x}\right)\right)\left(-\tfrac{1}{x^2}\right) \\ &= 2\ x\ \cos\left(\tfrac{1}{x}\right) + \operatorname{sen}\left(\tfrac{1}{x}\right). \end{aligned}$$

Para $x = 0$, no podemos utilizar la Regla de la Cadena. Planteamos entonces el cociente incremental, en $x = 0$, e intentamos calcular su límite.

$$\begin{aligned} f'(0) &= \lim_{x\to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x\to 0} \frac{x^2 \cos\left(\frac{1}{x}\right) - 0}{x - 0} \\ &= \lim_{x\to 0} \frac{x^2 \cos\left(\frac{1}{x}\right)}{x} = \lim_{x\to 0} x\ \cos\left(\tfrac{1}{x}\right) = 0. \end{aligned}$$

Juntando lo anterior, vemos que en todo $\mathbb{R}$, la función f es derivable (por tanto continua), y vale

$$f'(x) = \begin{cases} 2x\cos\left(\frac{1}{x}\right) + \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right) & \text{si} \quad x \neq 0 \\ 0 & \text{si} \quad x = 0 \end{cases}$$

Como existe el límite

$$\lim_{x \to 0} 2x\cos\left(\frac{1}{x}\right) = 0,$$

afirmamos que la función f' no es continua en $x = 0$. Si lo fuera, valdría, por Álgebra de Límites (bien usada),

$$\lim_{x \to 0} \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right) = 0,$$

lo cual sabemos que no es cierto, habiendo estudiado el comportamiento de esta función en torno al origen.

Luego, la función f es continua y derivable en todo $\mathbb{R}$, pero la función f' no es continua en este conjunto.

La gráfica de la función f' del ejemplo anterior, cerca del origen, se asemeja a la de la función $h(x) = \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right)$, y se muestra en la Figura 6.

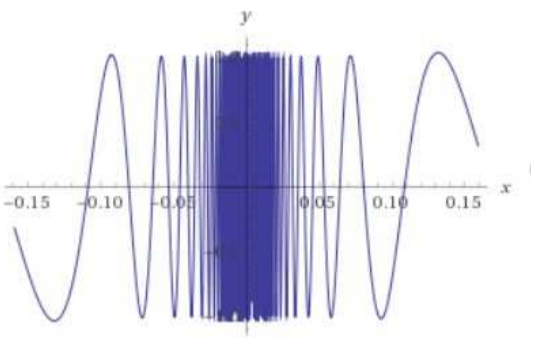


Figura 6: Derivada no continua en 0

Hemos visto que la derivada de una función, puede no ser continua. Ahora bien, aún sin ser continua, el Teorema de Darboux nos permite afirmar que para las funciones derivadas, sigue valiendo la Propiedad de los Valores Intermedios, como puede observarse en el ejemplo mostrado. Además, nos permite arribar al siguiente resultado.

Corolario 3.
Si f es derivable en un conjunto $[a,b]$, la función derivada f' no puede tener discontinuidades evitables ni de salto en $[a,b]$. Esto es, las posibles discontinuidades de f', son esenciales.