Facultad de Ciencias Exactas, Ingeniería y Agrimensura

Departamento de Matemática - Escuela de Ciencias Exactas y Naturales

ANÁLISIS MATEMÁTICO II

Licenciatura y Profesorado en Física, Licenciatura en Ciencias de la Computación,

Licenciatura y Profesorado en Matemática - Año 2020

Unidad 8: Polinomios de Taylor

Para muchas de las funciones "elementales" que hemos estudiado, el cálculo, aunque sea aproximado, del valor de función en un elemento arbitrario de su dominio puede resultar muy complicado. Pensemos por ejemplo en la función $f(x) = \ln(x)$. Tenemos que

$$f(x) = \int_0^x \frac{1}{t}\,dt$$

y por lo tanto para hallar $f(x_0)$ para un valor de x_0 arbitario, podemos recurrir a aproximaciones más o menos exactas de este valor por medio de sumas inferiores o superiores (pueden verse, por ejemplo, las acotaciones que hemos hecho para aproximar $\ln(2)$ en la Unidad 3). El cálculo de $e^x = \ln^{-1}(x)$ sería todavía más difícil: deberíamos calcular $\ln(a)$ para muchos valores de a hasta encontrar a tal que $\ln(a)$ sea aproximadamente x.

Esta misma dificultad aparece al momento de intentar determinar $\cos(x)$ o $\operatorname{sen}(x)$ para valores de x distintos de los "usuales" (0, $\pi/4$, $\pi/2$, etc.).

En el otro extremo tenemos las funciones que involucran operaciones elementales (sumas y productos) para las cuales es posible determinar exactamente $f(x)$ para cualquier valor de x. Estas son las funciones polinómicas, de la forma

$$p(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n. \tag{1}$$

En esta unidad utilizaremos polinomios para aproximar funciones no polinómicas. Es claro que no cualquier polinomio aproxima cualquier función: un polinomio p que aproxime "correctamente" una función f deberá compartir con f algunas propiedades.

Antes de continuar debemos notar que cuando hablamos de aproximar una función por un polinomio, tal aproximación será necesariamente alrededor de un punto que hayamos fijado de entrada. No podemos esperar que un polinomio fijo aproxime correctamente todos los valores de una función f dada. Por ejemplo, los polinomios crecen o decrecen hacia $\pm\infty$ cuando x tiende a $\pm\infty$. Por lo tanto ningún polinomio servirá para aproximar "globalmente" una función que no tenga este comportamiento.

Comencemos analizando el polinomio más sencillo que podemos usar para aproximar una función, el polinomio de grado 1, cuya gráfica es una recta. Se ha visto en el curso de Análisis Matemático 1 que dicho polinomio está asociado a la recta tangente a la gráfica de f por el punto $(x_0, f(x_0))$ (ver AM1, Unidad 4, 1.9). O sea, que el polinomio de grado 1 que mejor aproxima a f alrededor de x_0 es de la forma

$$p(x) = a_1(x - x_0) + a_0, \quad \text{con} \quad a_1 = f'(x_0), \quad a_0 = f(x_0)$$

Observemos además que $a_0 = p(x_0)$ y $a_1 = p'(x_0)$, con lo cual el polinomio de grado 1 que mejor aproxima a f en un entorno de x_0 es aquel tal que $p(x_0) = f(x_0), \quad p'(x_0) = f'(x_0)$.

Es de esperar que para obtener una buena aproximación de x por un polinomio de grado n, estas propiedades deban cumplirse hasta la n-ésima derivada.

Por otra parte, observemos que es posible "reconstruir" completamente un polinomio p de grado n conociendo el valor de $p(x_0)$ y de sus n derivadas evaluadas en x_0. En efecto, supongamos que

$$p(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + \cdots + a_n(x - x_0)^n.$$

Entonces tenemos

$$a_0 = p(x_0)$$

$$p'(x) = a_1 + 2a_2(x - x_0) + \cdots + na_n(x - x_0)^{n-1} \;\Rightarrow\; a_1 = p'(x_0)$$

$$p''(x) = 2a_2 + 2 \cdot 3 \cdot a_3(x - x_0) + \cdots + (n-1) \cdot n \cdot a_n(x - x_0)^{n-2} \;\Rightarrow\; a_2 = \frac{p''(x_0)}{2}$$

y así siguiendo, obtenemos

$$a_k = \frac{p^{(k)}(x_0)}{k!} \tag{2}$$

donde $k! = k \cdot (k-1) \cdot (k-2) \cdots 2 \cdot 1$ y $p^{(k)}$ representa la k-ésima derivada de p. Observemos que si convenimos que $p^{(0)} = p$, como $0! = 1$, la fórmula 2 tiene sentido incluso para $k = 0$. De esta manera, el polinomio p se escribe como

$$p(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{p^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k$$

Supongamos ahora que f es una función cualquiera, n-veces derivable en x_0. Si definimos

$$p(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k,$$

tendremos polinomio de grado n que tiene las mismas derivadas de orden k que f en x_0, para $0 \leq k \leq n$:

Definición 75: Sea f una función n-veces derivable en un punto a de su dominio. Se denomina **polinomio de Taylor** de grado n para f en a al polinomio

$$P_{n,a}(x) = a_0 + a_1(x - a) + a_2(x - a)^2 + \cdots + a_n(x - a)^n$$

donde

$$a_k = \frac{f^{(k)}(a)}{k!}, \; 0 \leq k \leq n.$$

Dicho de otra forma, el polinomio de Taylor de grado n para f en a es el **único polinomio** de grado n tal que $p^{(k)}(a) = f^{(k)}(a)$ para todo $0 \leq k \leq n$.

Ejemplo 76: Consideremos la función $f(x) = \operatorname{sen}(x)$ y fijemos $a = 0$. Observemos que

$$f^{(0)}(x) = \operatorname{sen}(x), \quad f'(x) = \cos(x), \quad f''(x) = -\operatorname{sen}(x), \quad f'''(x) = -\cos(x), \quad f^{(4)}(x) = \operatorname{sen}(x)$$

y el ciclo vuelve a empezar, es decir, las derivadas de f (empezando de $f^{(0)}$) se repiten en un ciclo de 4. En particular en $a = 0$, resulta

$$f^{(0)}(0) = 0, \quad f'(0) = 1, \quad f''(0) = 0, \quad f'''(0) = -1$$

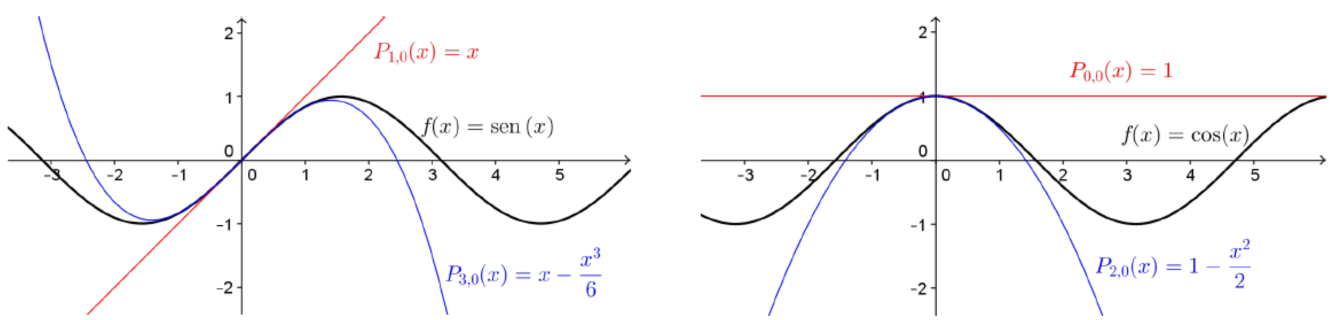
con lo cual para cada k par, será $f^{(k)}(0) = 0$. Por otra parte si k es impar, $k = 2j+1$ para alún j y resultará $a_k = 1$ si j es par, $a_k = -1$ si j es impar. Es decir, $a_k = (-1)^j$. Observemos que por lo tanto todo polinomio de Taylor de f en 0 tendrá grado impar y será de la forma

$$P_{2n+1,0}(x) = \sum_{j=0}^{n} \frac{(-1)^j}{(2j+1)!} x^{2j+1} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots + \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1}.$$

Consideremos ahora $f(x) = \cos(x)$ y $a = 0$. Un razonamiento análogo muestra que el polinomio de Taylor de f en a deberá tener siempre grado par, y que está dado por

$$P_{2n,0}(x) = \sum_{j=0}^{n} \frac{(-1)^j}{(2j)!} x^{2j} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots + \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n}$$

Mostramos en la siguiente figura los dos primeros polinomios de Taylor no nulos asociados a las funciones anteriores:



Ejemplo 77: Calcularemos ahora el polinomio de Taylor para $f(x) = e^x$. Este caso es particularmente sencillo, ya que $f^{(k)}(x) = e^x$ cualquiera sea k. Luego en $a = 0$, el coeficiente a_k de cualquier polinomio de Taylor será $\frac{e^0}{k!} = \frac{1}{k!}$. Tenemos así que

$$P_{n,0}(x) = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k!} x^k = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!}.$$

Intentaremos precisar a qué nos referimos con que el polinomio de Taylor nos da una "buena aproximación" de la función x alrededor del punto a en el cual está calculado.

Observemos que $P_{n,a}(a) = f(a)$ para cualquier n, y por lo tanto tendremos

$$\lim_{x\to a} (f(x) - P_{n,a}(x)) = 0.$$

Este hecho sin embargo es cierto para cualquier función continua que coincida con el valor de f en a.

Consideremos en primer lugar el polinomio de Taylor de grado 1 de f. Tenemos que

$$P_{1,a}(x) = f'(a)(x-a) + f(a) \quad \Rightarrow \quad \frac{f(x) - P_{1,a}(x)}{x-a} = \frac{f(x) - f(a)}{x-a} - f'(a)$$

y por lo tanto tendremos que $\lim_{x\to a} \frac{f(x)-P_{1,a}(x)}{x-a} = 0$. Esto no es cierto para cualquier otro polinomio de grado 1 que coincida con el valor de f en a. En efecto si $p(x) = A(x-a) + f(a)$, tendremos de manera análoga que

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x) - p(x)}{x-a} = f'(a) - A$$

y por lo tanto si $A \neq f'(a)$ dicho límite no será cero.

En otras palabras, el polinomio de Taylor de grado 1 (o sea, la recta tangente a f) no sólo es tal que la diferencia $f(x) - p(x)$ se hace pequeña (tanto como queramos) cuando x se aproxima a a, sino que esta diferencia es también pequeña incluso en comapración con $(x-a)$.

Veremos en el siguiente resultado que, en general, el polinomio de Taylor de grado n es aquel que no sólo hace pequeña la diferencia entre $f(x)$ y $p(x)$ cuando x se aproxima a a, sino que esta diferencia es también pequeña incluso en comparación con $(x-a)^n$. Resulta evidente que para un valor fijo de x cercano a a, esta diferencia es cada vez más pequeña cuanto más grande sea n, y por lo tanto a mayor grado del polinomio de Taylor considerado, mejor también será la aproximación de f.

Teorema 78: Sea f una función n veces derivable en a y sea $P_{n,a}(x)$ el polinomio de Taylor de grado n de f en a. Entonces

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x) - P_{n,a}(x)}{(x-a)^n} = 0.$$

Demostración:

Observemos primero que

$$\frac{f(x) - P_{n,a}(x)}{(x-a)^n} = \frac{f(x) - \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k}{(x-a)^n} - \frac{f^{(n)}(a)}{n!}.$$

Pongamos $Q(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k$ y $g(x) = (x-a)^n$. Entonces debemos probar que

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x) - Q(x)}{g(x)} = \frac{f^{(n)}(a)}{n!}.$$

Recordemos que los coeficientes de un polinomio pueden recuperarse a partir de sus derivadas como en 2. Tendremos por lo tanto que para cada $0 \leq k \leq n-1$,

$$Q^{(k)}(a) = f^{(k)}(a) \quad \Rightarrow \quad \lim_{x \to a} (f^{(k)}(x) - Q^{(k)}(x)) = 0$$

$$g^{(k)}(x) = \frac{n!}{(n-k)!}(x-a)^{n-k} \quad \Rightarrow \quad \lim_{x \to a} g^{(k)}(x) = 0.$$

Además como Q es un polinomio de grado $n-1$, $Q^{(n-1)}(x) = Q^{(n-1)}(a) = f^{(n-1)}(a)$ para todo x.

Aplicando la regla de L'Hôpital $n-1$ veces, tendremos que

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - Q(x)}{(x-a)^n} = \lim_{x \to a} \frac{f^{(n-1)}(x) - Q^{(n-1)}(x)}{n!(x-a)} = \lim_{x \to a} \frac{f^{(n-1)}(x) - f^{(n-1)}(a)}{n!(x-a)} = \frac{f^{(n)}(a)}{n!}$$

como queríamos probar. $\square$

Como consecuencia de este resultado, podemos mejorar el Teorema 51 de la Unidad 5:

Teorema 79: Sea f una función n veces derivable en a tal que

$$f'(a) = f''(a) = \cdots = f^{(n-1)}(a) = 0, \quad f^{(n)}(a) \neq 0.$$

Entonces:

1. Si n es par y $f^{(n)}(a) > 0$, f tiene un mínimo local en a.
2. Si n es par y $f^{(n)}(a) < 0$, f tiene un máximo local en a.
3. Si n es impar, entonces a no es un extremo local de f.

Demostración:

Supongamos primero que $f(a) = 0$. Entonces $f^{(k)}(a) = 0$ para cada $0 \leq k \leq n-1$ y por lo tanto el polinomio de Taylor de grado n de f en a es

$$P_{n,a}(x) = \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n.$$

Aplicando el Teorema 79, tenemos que

$$0 = \lim_{x \to a} \left[\frac{f(x)}{(x-a)^n} - \frac{f^{(n)}(a)}{n!} \right].$$

Por lo tanto en un entorno suficientemente pequeño de a, $\frac{f(x)}{(x-a)^n}$ tiene el mismo signo que $f^{(n)}(a)$.

Si n es par, $(x-a)^n \geq 0$ y por lo tanto $f(x)$ tiene el mismo signo que $f^{(n)}(a)$ en un entorno de a. Recordemos que estamos suponiendo que $f(a) = 0$, entonces si $f^{(n)}(a) > 0$, tendremos que para valores cercanos a a, $f(x) > 0 = f(a)$ y por lo tanto f tendrá un mínimo local en a. La prueba cuando $f^{(n)}(x) < 0$ es análoga.

Si n es impar, entonces $\frac{f(x)}{(x-a)^n}$ tiene el mismo signo que $f^{(n)}(a)$, en un entorno de a, y por lo tanto el signo de este cociente es constante. Pero en este caso, $(x-a)^n > 0$ si $x > a$ y $(x-a)^n < 0$ si $x < a$. Luego $f(x)$ cambiará de signo alrededor de a, con lo cual a no será un estremo relativo de f.

Para el caso en que $f(a) \neq 0$, dejamos la prueba como ejercicio, aplicando el resultado anterior a la función $g(x) = f(x) - f(a)$. □

Ejemplo 80: Consideremos las funciones $f(x) = x^3$ y $g(x) = x^4$. Sabemos que en $x = 0$ f tiene un punto de inflexión y g tiene un mínimo local (que en este caso es global). A partir del Teorema 80 es fácil probar este hecho. En efecto, $f'(0) = f''(0) = 0$, $f'''(0) = 6 \neq 0$. Como la primer derivada no nula es de orden impar, $x = 0$ no es ni un máximo ni un mínimo de f y, en este caso, es un punto de inflexión.

Por otra parte, $g'(0) = g''(0) = g'''(0) = 0$ y $g^{(4)}(0) = 24 > 0$. En este caso, la primer derivada no nula es de orden par y positiva, y por lo tanto g tiene un mínimo local en $x = 0$. Observemos que nuevamente el Teorema 80 no nos permite afirmar que x es un mínimo global. Para ello es necesario realizar un análisis general de la función.

Después de esta breve aplicación, continuamos con el estudio de los polinomios de Taylor. En los ejemplos 76 y 77 fue relativemanete sencillo obtener el polinomio de Taylor de las funciones consideradas. Sin embargo para funciones cuyas derivadas no presenten tanta "regularidad" el cálculo directo de los coeficientes a_k puede llegar a complejizarse rápidamente.

Si tomamos por ejemplo $f(x) = \arctan(x)$, tendremos

$$f'(x) = \frac{1}{1+x^2}, \quad f''(x) = \frac{-2x}{(1+x^2)^2}, \quad f'''(x) = \frac{-2(1+x^2)^2 + 8x^2(1+x^2)}{(1+x^2)^4}$$

y a partir de aquí el cálculo de la derivada se complica cada vez más.

Intentaremos desarrollar algunas herramientas que nos permitan encontrar los polinomios de Taylor de alguna otra forma. Comenzamos reformulando la propiedad del Teorema 78 en una definición:

Definición 81: Decimos que dos funciones f y g son **iguales hasta el orden n en a** si

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x) - g(x)}{(x-a)^n} = 0$$

El Teorema 78 establece que una función f y su polinomio de Taylor de grado n en a, $P_{n,a}$, son iguales hasta el orden n en a. La recíproca también es cierta. La obtendremos como consecuencia del siguiente resultado.

Observación 82: Observemos primero que si f y g son iguales hasta el orden n, entonces son iguales hasta el orden k para todo $k \leq n$. En efecto,

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x) - g(x)}{(x-a)^k} = \lim_{x\to a} (x-a)^{n-k} \frac{f(x) - g(x)}{(x-a)^n} = 0$$

Teorema 83: Sean P y Q dos polinomios en $(x-a)$, de grado menor o igual que n, y supongamos que P y Q son iguales hasta el orden n en a. Entonces $P = Q$.

Demostración:

Sea $R = P - Q$. Entonces R es un polinomio de grado menor o igual a n tal que $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{R(x)}{(x-a)^n} = 0$, es decir, R es igual a la función nula $g(x) = 0$ hasta el orden n. Debemos demostrar que entonces $R = 0$, de donde resultará $P = Q$. Supongamos que

$$R(x) = b_0 + b_1(x-a) + \cdots + b_n(x-a)^n.$$

Como R es igual a $g \equiv 0$ hasta el orden n, de la Observación 82, R es igual a g hasta el orden k para todo $0 \leq k \leq n$, o sea,

$$\lim_{x\to a} \frac{R(x)}{(x-a)^k} = 0. \tag{3}$$

Demostraremos inductivamente que $b_k = 0$ para cada $k = 0, \cdots, n$.

De la ecuación (3) para $k = 0$, se tiene

$$\lim_{x\to a} R(x) = 0 \ \Rightarrow \ b_0 = 0.$$

Supongamos inductivamente que $b_0 = b_1 = \cdots = b_l = 0$ para $l < n$. Veamos que entonces $b_{l+1} = 0$. De la hipótesis inductiva tenemos que $Q(x) = b_{l+1}(x-a)^{l+1} + \cdots + b_n(x-a)^n$. Aplicando la ecuación (3) para $k = l+1$ tenemos

$$0 = \lim_{x\to a} \frac{Q(x)}{(x-a)^{l+1}} = b_{l+1}.$$

Luego $b_{l+1} = 0$ como queríamos ver. □

Corolario 84: Sea f n-veces derivable en a y supongamos que $p(x)$ es un polinomio en $(x-a)$ de grado menor o igual a n en a, igual a f hasta el orden n en a. Entonces $p = P_{n,a}$.

Demostración: Veamos que p y $P_{n,a}$ son iguales hasta el orden n. En efecto,

$$\lim_{x\to a} \frac{p(x) - P_{n,a}(x)}{(x-a)^n} = \lim_{x\to a} \frac{p(x) - f(x) + f(x) - P_{n,a}(x)}{(x-a)^n} = \lim_{x\to a} \left[\frac{p(x) - f(x)}{(x-a)^n} + \frac{f(x) - P_{n,a}(x)}{(x-a)^n}\right]$$

Como tanto p como $P_{n,a}$ son iguales a f hasta el orden n, ambos términos del límite anterior tienden a 0 cuando x tiende a a. Luego p y $P_{n,a}$ son iguales hasta el orden n y por el Teorema 83 deberá ser $p = P_{n,a}$. □

Ejemplo 85: Intentemos calcular nuevamente el polinomio de Taylor de $f(x) = \arctan(x)$ en 0. Recordemos que

$$\arctan(x) = \int_0^x \frac{1}{1+t^2} dt.$$

Deberíamos intentar obtener un polinomio para $1/(1+t^2)$ y posteriormente integrarlo. Claramente hacerlo a partir de la definición supone las mismas dificultades que arrancar directamente con $\arctan(x)$. Intentaremos expresar a 1 de una manera "original". Observemos que $t^k(1+t^2) = t^k + t^{k+2}$. Luego

$$\begin{aligned}
1 &= 1 + t^2 - t^2 - t_4 + t^4 + t^6 - t^6 + \cdots - t^{2n} + t^{2n} - t^{2n+2} + t^{2n+2} \\
&= 1 \cdot (1+t^2) - t^2(1+t^2) + t^4(1+t^2) - t^6(1+t^2) + \cdots + (-1)^n t^{2n}(1+t^2) + (-1)^{n+1} t^{2n+2}
\end{aligned}$$

Concluimos que

$$\frac{1}{1+t^2} = 1 - t^2 + t^4 - t^6 + \cdots + (-1)^n t^{2n} + \frac{(-1)^{n+1} t^{2n+2}}{1+t^2}$$

Integrando término a término entre 0 y x, tenemos

$$\arctan(x) = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + (-1)^{n+1} \int_0^x \frac{t^{2n+2}}{1+t^2} dt.$$

Pongamos entonces $p(x) = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$. Tenemos que

$$f(x) - p(x) = (-1)^{n+1} \int_0^x \frac{t^{2n+2}}{1+t^2} dt.$$

Probaremos que

$$\lim_{x \to 0} \frac{\displaystyle\int_0^x \frac{t^{2n+2}}{1+t^2} dt}{x^{2n+1}} = 0. \tag{4}$$

De esta manera habremos probado que f y p son iguales hasta el orden $2n+1$ y por lo tanto, en función del Corolario 84, p es el polinomio de Taylor de f de grado $2n+1$ en 0. Ahora, para cualquier t, $1 + t^2 \geq 1$, y por lo tanto $\frac{t^{2n+2}}{1+t^2} \leq t^{2n+2}$ y por lo tanto

$$\left| \int_0^x \frac{t^{2n+2}}{1+t^2} \right| \leq \left| \int_0^x t^{2n+2} dt \right| = \frac{|x|^{2n+3}}{2n+3}$$

de donde resulta claro que el límite (4) vale.

Los teoremas hasta aquí demostrados han examinado siempre el comportamiento del polinomio de Taylor $P_{n,a}$ para n fijo, cuando x tiende a a. Nos proponemos ahora comparar los polinomios de Taylor $P_{n,a}$ para a fijo y distintos n.

Si f es una función que admite un polinomio de Taylor $P_{n,a}(x)$, definimos el **resto** $R_{n,a}(x)$ del siguiente modo:

$$f(x) = P_{n,a}(x) + R_{n,a}(x).$$

Buscaremos disponer de una expresión para $R_{n,a}(x)$ que nos permita estimar su magnitud.

Empecemos analizando el caso $n = 0$:

$$f(x) = f(a) + R_{0,a}(x).$$

Si f' es integrable en $[a, x]$, el teorema fundamental del cálculo infinitesimal permite escribir

$$f(x) = f(a) + \int_a^x f'(t)\ dt,$$

de manera que comparando las expresiones resulta

$$R_{0,a}(x) = \int_a^x f'(t)\ dt.$$

Por otra parte, para cada x fijo tenemos

$$\int_a^x f'(t)\ dt = f'(t)v(t)\Big|_a^x - \int_a^x f''(t)(t-x)\ dt,$$

donde estamos usando la integración por partes considerando $u(t) = f'(t)$ y $v(t) = t - x$. Observemos que $v(x) = 0$ y por lo tanto obtenemos

$$\begin{aligned} f(x) &= f(a) + \int_a^x f'(t)\ dt = f(a) - u(a)v(a) + \int_a^x f''(t)(x-t)\ dt \\ &= f(a) + f'(a)(x-a) + \int_a^x f''(t)(x-t)\ dt \end{aligned}$$

Con lo cual $R_{1,a}(x) = \int_a^x f''(t)(x-t)\ dt$. Con un razonamiento similar y pensando ahora

$$u(t) = f''(t) \qquad\qquad v(t) = \frac{-(x-t)^2}{2},$$

entonces $v'(t) = (x-t)$ y por lo tanto

$$\int_a^x f''(t)(x-t)\ dt = f''(a)\frac{(x-a)^2}{2} + \int_a^x \frac{f'''(t)}{2}(x-t)^2\ dt.$$

Esto demuestra que $R_{2,a}(x) = \displaystyle\int_a^x \frac{f^{(3)}(t)}{2}(x-t)^2 dt.$

Con un razonamiento inductivo y suponiendo que $f^{(n+1)}$ es continua se prueba que

$$\boxed{R_{n,a}(x) = \int_a^x \frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(x-t)^n\ dt.}$$

Esta fórmula es llamada la **forma integral del resto**. De ella se pueden obtener otras dos formas:

- **forma de Cauchy** del resto

$$R_{n,a}(x) = \frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(x-t)^n(x-a) \quad \text{para algún } t \in (a,x),$$

- y la **forma de Lagrange** del resto

$$R_{n,a}(x) = \frac{f^{(n+1)}(t)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}.$$

Teorema 86: (Teorema de Taylor) Suponga que f es una función tal que $f', \ldots, f^{(n+1)}$ están definidas sobre $[a,x]$ y que $R_{n,a}(x)$ está definido por

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \cdots + \frac{f^n(a)}{n!}(x-a)^n + R_{n,a}(x).$$

Entonces

1. $R_{n,a}(x) = \frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(x-t)^n(x-a)$ para algún t de (a,b).

2. $R_{n,a}(x) = \frac{f^{(n+1)}(t)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}$ para algún t de (a,x).

Además si $f^{(n+1)}$ es integrables sobre $[a,x]$ entonces

3. $R_{n,a}(x) = \int_a^x \frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(x-t)^n \; dt.$

(Si $x < a$ entonces la hipótesis debería decir que f es derivable $n+1$ veces sobre $[x,a]$, el número t arriba, debería estar entonces en (x,a) y para el último item se debe pedir $f^{(n+1)}$ integrable en $[x,a]$.)

Demostración:

Para todo t de $[a,x]$ tenemos

$$(*) \quad f(x) = f(t) + f'(t)(x-t) + \cdots + \frac{f^{(n)}(t)}{n!}(x-t)^n + R_{n,t}(x).$$

es decir, $f(x) = P_{n,t}(x) + R_{n,t}(x)$. Para cada x fijo, designamos $R_{n,t}(x)$ por $S(t)$, lo cual nos da una función en t definida sobre $[a,x]$. Antes que nada, observemos que podemos despejar $S(t)$ de $(*)$ como sumas y productos de funciones derivables en t y por lo tanto $S(t)$ es derivable.

Derivaremos la expresión $(*)$ respecto de t. Observemos que si

$$g(t) = f(x) \quad \text{ para todo } t$$

se tiene $g'(t) = 0$ y si

$$g(t) = \frac{f^{(k)}(t)}{k!}(x-t)^k,$$

entonces $g'(t) = \dfrac{f^{(k+1)}(t)}{k!}(x-t)^k + \dfrac{f^{(k)}(t)}{k!}k(x-t)^{k-1}(-1)$, es decir que

$$g'(t) = \frac{f^{(k+1)}(t)}{k!}(x-t)^k - \frac{f^{(k)}(t)}{(k-1)!}(x-t)^{k-1}.$$

Aplicando estas fórmulas a cada uno de los términos de $(*)$, obtenemos

$$\begin{aligned} 0 \;\; = \;\; & f'(t) + \left[-f'(t) + \frac{f''(t)}{1!}(x-t)\right] + \left[-\frac{f''(t)}{1!}(x-t) + \frac{f^{(3)}(t)}{2!}(x-t)^2\right] \\ & + \cdots + \left[\frac{-f^{(n)}(t)}{(n-1)!}(x-t)^{n-1} + \frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(x-t)^n\right] + S'(t). \end{aligned}$$

Como se puede ver, en esta fórmula se cancela casi todo y queda

$$S'(t) = -\frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(x-t)^n.$$

Aplicando el Teorema del valor medio a la función S sobre $[a,x]$, tenemos que existe un $t \in (a,x)$ tal que

$$\frac{S(x) - S(a)}{x-a} = S'(t) = -\frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(x-t)^n.$$

Y como $S(t) = R_{n,t}(x)$, entonces $S(x) = R_{n,x}(x) = 0$ y $S(a) = R_{n,a}(x)$.

Así pues

$$\frac{0 - R_{n,a}(x)}{x - a} = -\frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(x-t)^n$$

o

$$R_{n,a}(x) = \frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(x-t)^n(x-a);$$

ésta es la fórmula de Cauchy del resto.

Para deducir la forma de Lagrange aplicamos el teorema del valor medio de Cauchy a las funciones S y $g(t) = (x-t)^{n+1}$: existe algún $t \in (a, x)$ tal que

$$\frac{S(x) - S(a)}{g(x) - g(a)} = \frac{S'(t)}{g'(t)} = \frac{-\frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(x-t)^n}{-(n+1)(x-t)^n}.$$

De donde

$$\frac{R_{n,a}(x)}{(x-a)^{n+1}} = \frac{f^{(n+1)}(t)}{(n+1)!}$$

equivalentemente

$$R_{n,a}(x) = \frac{f^{(n+1)}(t)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}.$$

Finalmente si $f^{(n+1)}$ es integrable sobre $[a, x]$ entonces

$$S(x) - S(a) = \int_a^x S'(t)\ dt = -\int_a^x \frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(x-t)^n\ dt$$

o

$$R_{n,a}(x) = -\int_a^x \frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(x-t)^n\ dt. \quad \square$$

Veamos cómo se aplican estas fórmulas en los siguientes ejemplos.

Ejemplo 87: Veamos cómo se aplican estas fórmulas en los siguientes ejemplos, donde tomamos los desarrollos alrededor de $a = 0$.

$$\begin{aligned}
\operatorname{sen}(x) &= x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \int_0^x \frac{\operatorname{sen}^{(2n+2)}(t)}{(2n+1)!}(x-t)^{2n+1}\ dt \\
\cos(x) &= 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \int_0^x \frac{\cos^{(2n+1)}(t)}{(2n)!}(x-t)^{2n}\ dt \\
e^x &= 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \int_0^x \frac{e^t}{n!}(x-t)^n\ dt
\end{aligned}$$

Para precisar mejor el error, necesitamos trabajar esas integrales. En el primer caso puesto que $|\operatorname{sen}(x)| \leq 1$ para todo x, tenemos

$$\left| \int_0^x \frac{\operatorname{sen}^{2n+2}(t)}{(2n+1)!}(x-t)^{2n+1}\ dt \right| \leq \frac{1}{(2n+1)!} \left| \int_0^x (x-t)^{2n+1}\ dt \right|.$$

Puesto que

$$\int_0^x (x-t)^{2n+1}\ dt = -\left.\frac{(x-t)^{2n+2}}{2n+2}\right|_{t=0}^{t=x} = \frac{x^{2n+2}}{2n+2},$$

obtenemos
$$\left|\int_0^x \frac{\operatorname{sen}^{(2n+2)}(t)}{(2n+1)!}(x-t)^{2n+1}\ dt\right| \leq \frac{|x|^{2n+2}}{(2n+2)!}.$$
Análogamente se puede probar (**ejercicio**)
$$\left|\int_0^x \frac{\cos^{(2n+1)}(t)}{(2n)!}(x-t)^{2n}\ dt\right| \leq \frac{|x|^{2n+1}}{(2n+1)!}.$$
Apliquemos esto para estimar $\operatorname{sen}(1)$:
$$\operatorname{sen}(1) = P_{n,0}(1) + R, \qquad \text{donde } |R| < \frac{1}{(2n+2)!}.$$
Si queremos que este resto sea menor que un ε dado, entonces bastaría
$$\frac{1}{(2n+2)!} < \varepsilon.$$
Así que se completa lo requerido eligiendo n tal que $(2n+2)! > \frac{1}{\varepsilon}$.

Para la función arcotangente tenemos
$$\arctan(x) = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + \int_0^x \frac{(-1)^{n+1}t^{2n+2}}{1+t^2!}\ dt.$$
Como ya hemos estimado, se tiene
$$\left|\int_0^x \frac{(-1)^{n+1}t^{2n+2}}{1+t^2!}\ dt\right| \leq \left|\int_0^x t^{2n+2}\ dt\right| = \frac{|x|^{2n+2}}{2n+3}.$$
Nuevamente, si queremos aproximar $\arctan(1)$, calcularemos el polinomio de Taylor $P_{n,0}(1)$ y necesitamos estimar n de modo que el resto sea tan chico como querramos. Si queremos un resto menor que 10^{-4} por ejemplo, necesitamos n tal que $2n+3 > 10^4$ o sea
$$n > (10^4 - 3)/2.$$
Aunque esto es efectivo, existen algunas maneras de mejorar este cálculo con artificios que se verán en la práctica.

Para $|x| \geq 1$ y $t \in [0, x]$ tendremos $1 + t^2 \leq 1 + x^2 \leq 2x^2$, de modo que
$$\left|\int_0^x \frac{t^{2n+2}}{1+t^2}\ dt\right| \geq \frac{1}{2x^2}\left|\int_0^x t^{2n+2}\ dt\right| = \frac{|x|^{2n+1}}{4n+6}.$$
Para $f(x) = \log(1+x)$ podemos empezar por
$$\frac{1}{1+t} = 1 - t + t^2 - \cdots + (-1)^{n-1}t^{n-1} + \frac{(-1)^n t^n}{1+t},$$
lo cual implica que
$$\log(1+x) = \int_0^x \frac{1}{1+t}dt = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \cdots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + (-1)^n \int_0^x \frac{t^n}{1+t}\ dt,$$
para todo $x > -1$. En particular si $x \geq 0$ entonces
$$\int_0^x \frac{t^n}{1+t}\ dt \leq \int_0^x t^n\ dt = \frac{t^{n+1}}{n+1},$$
y con esto podemos estimar el error.