Facultad de Ciencias Exactas, Ingeniería y Agrimensura

Departamento de Matemática - Escuela de Ciencias Exactas y Naturales

ANÁLISIS MATEMÁTICO II

Licenciatura y Profesorado en Física, Licenciatura en Ciencias de la Computación,

Licenciatura y Profesorado en Matemática - Año 2020

Unidad 1: Cálculo Integral.

---

1. El problema del área.

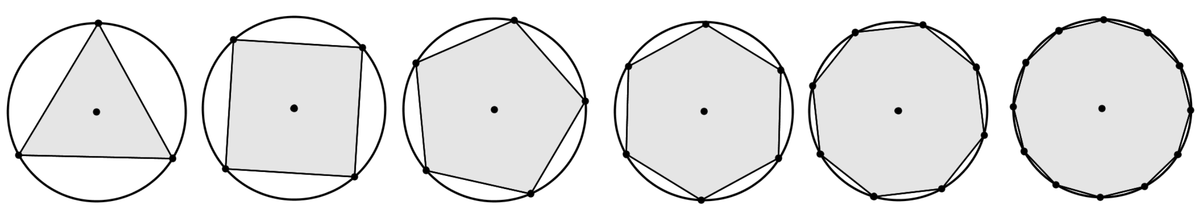
El concepto de área es uno de los más complejos de definir en la geometría elemental. Es un problema que se remonta a la antigüedad y al que se ha prestado particular atención en toda la historia de la matemática, desde la aparición de los *Elementos* de Euclides en el siglo IV a.C. hasta el desarrollo del Cálculo integral entre los siglos XVI y XVII con los trabajos de Fermat, Barrow, Newton y Leibniz.

La definición más elemental de área se basa en fijar una figura determinada (en general un cuadrado de lado 1, denominado cuadrado unidad, cuya área se define como 1) a partir de la cual se deducen las fórmulas de las áreas de las demás figuras elementales.

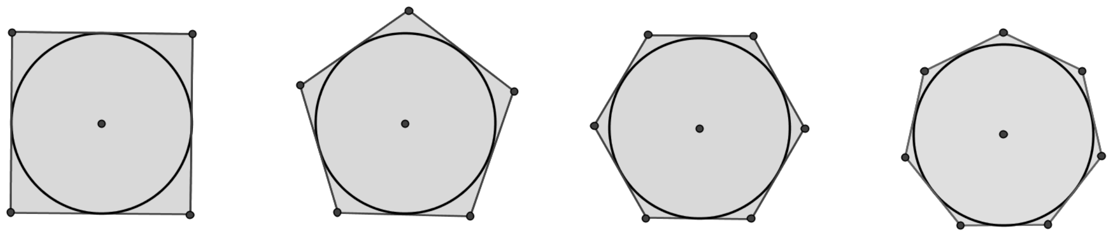
A partir del cuadrado unidad es relativamente fácil determinar el área de un rectángulo (dada por la fórmula clásica $b.h$, base por altura) y a partir de ésta la de un triángulo (base por altura sobre dos). Luego es muy sencillo calcular el área de cualquier polígono a través de su descomposición en triángulos, siguiendo algunos principios básicos que verifica la función de área:

1. El área es un número no negativo
2. Este número es el mismo para figuras congruentes.
3. Para una región descompuesta en secciones el área total es igual a la suma de las áreas de las secciones.

Esta teoría es claramente inadecuada para definir el área de regiones más generales. Pensemos simplemente en un círculo de radio r. Esta figura no es descomponible en secciones poligonales más pequeñas. Para definir su área, podemos considerar los polígonos inscriptos y circunscriptos al círculo. Las áreas de estos polígonos se aproximarán, a medida que aumentamos el número de lados, cada vez más al área del círculo.



triángulo cuadrado pentágono hexágono octógono dodecágono



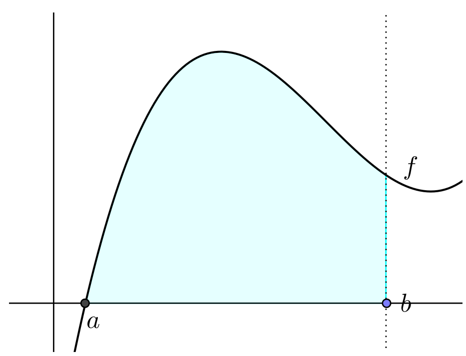
cuadrado, pentágono, hexágono y heptágono
circunscriptos a un círculo

En el límite, cuando hacemos tender la cantidad de lados a infinito, y por lo tanto sus longitudes tienden a cero, las áreas de los polígonos interiores y exteriores tienden ambas a un mismo número. Este número límite es lo que se define como área del círculo, y da lugar a la conocida fórmula πr^2.

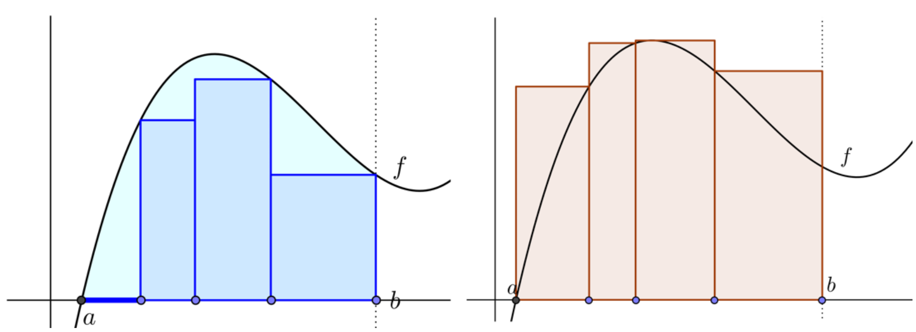
Este método para definir el área del círculo se llama *método de exhaución*, fue aplicado por Arquímedes en el siglo III a.C. y constituye la base del cálculo integral.

Para poder aplicar los conceptos propios del cálculo a la resolución del problema del área, nos concentraremos en intentar definir el concepto de "área bajo la gráfica de una función".

Consideremos entonces una función acotada $f : [a, b] \to \mathbb{R}$. Supondremos por el momento que la función en cuestión es no negativa. Queda determinada una región acotada inferiormente por el eje x, superiormente por la gráfica de f y lateralmente por las rectas $x = a$ y $x = b$ como se muestra en la siguiente figura:



Podemos considerar ahora una serie de rectángulos "interiores" y "exteriores" a esta región que aproximen su área:



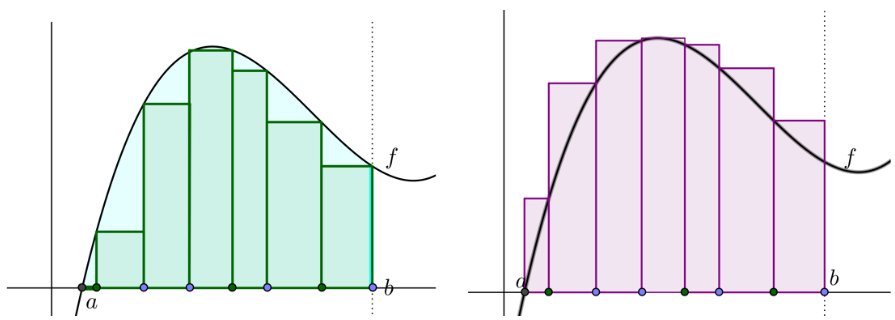
Para poder sistematizar el trabajo, supondremos que los rectángulos no se superponen y sus bases cubren todo el intervalo $[a, b]$, y su altura "toque" en algún punto de la gráfica de la función. Elegiremos entonces puntos $x_0, x_1, \cdots, x_n$ tales que

$$a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$$

y consideraremos rectángulos cuya base sea $x_{i+1} - x_i$, $i = 0, \cdots, n-1$.

En el caso de los rectángulos interiores, podremos considerar como altura el "valor más pequeño" que alcanza la función en cada intervalo $[x_i, x_{i+1}]$ (o sea el mínimo, o en su defecto el ínfimo de la función en ese intervalo), y para el caso de los rectángulos exteriores podemos considerar el máximo o el supremo de la función.

Cuántos más rectángulos tomemos y más pequeñas sean sus bases, mejor aproximarán las sumas de las áreas de los rectángulos interiores y exteriores al área bajo la gráfica de la función:



Si llamamos A al área e la región que queremos calcular, s a la suma de las áreas de los rectángulos interiores y S a la suma de las áreas de los rectángulos exteriores, tendremos

$$s \leq A \leq S.$$

Es de esperar que en una situación "límite", cuando las bases de los rectángulos sean infinitamente pequeñas y la función sea adecuada, las sumas s y S "tiendan" a un mismo valor y nos permitan dar una definición del área que estamos buscando.

Formalizaremos estos conceptos en la próxima sección.

2. Sumas inferiores y superiores - Funciones integrables

Comencemos definiendo adecuadamente cuáles serán las bases de los rectángulos que consideraremos:

Definición 1. *Sean a y b números reales con $a < b$. Se denomina* ***partición*** *del intervalo $[a, b]$ a una colección finita de puntos $P = \{t_0, t_1, \cdots, t_n\}$ de $[a, b]$ tales que*

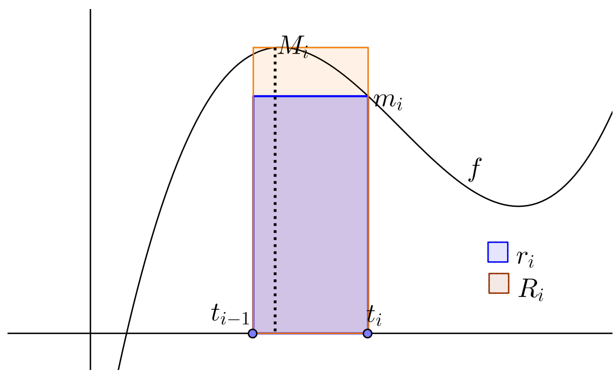
$$a = t_0 < t_1 < t_2 < \cdots < t_{n-1} < t_n = b.$$

Consideremos una función acotada y no negativa $f : [a, b] \to \mathbb{R}$. Sea $P = \{t_0 = a, t_1, \cdots, t_n = b\}$ una partición del intervalo $[a, b]$. Condideremos ahora para cada $i = 1, \cdots, n$, dos rectángulos r_i y R_i cuya base sea el segmento de extremos t_{i-1} y t_i y cuyas alturas son, respectivamente,

$$m_i = \text{ínf}\{f(x) \,:\, t_{i-1} \leq x \leq t_i\}$$

$$M_i = \sup\{f(x) \,:\, t_{i-1} \leq x \leq t_i\}$$

como se muestra en la siguiente figura.



Tendremos entonces que

$$\mathcal{A}(r_i) = (t_i - t_{i-1})m_i$$

$$\mathcal{A}(R_i) = (t_i - t_{i-1})M_i$$

Las sumas de las áreas de los rectángulos inferiores y superiores serán por lo tanto

$$s = \sum_{i=1}^{n} \mathcal{A}(r_i) = \sum_{i=1}^{n} (t_i - t_{i-1})m_i, \qquad S = \sum_{i=1}^{n} \mathcal{A}(R_i) = \sum_{i=1}^{n} (t_i - t_{i-1})M_i.$$

Para poder definir el área A bajo la gráfica de la función, es de esperar que

$$s \leq A \leq S$$

cualquiera sea la partición de $[a, b]$ que estemos considerando.

Estas observaciones motivan la siguiente definición, que haremos sin recurrir al concepto de área:

Definición 2. *Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una función acotada, es decir, existen $m, M \in \mathbb{R}$ tales que $m \leq f(x) \leq M$ para cada $x \in [a, b]$. Sea $P = \{t_0 = a, t_1, \cdots, t_n = b\}$ una partición de $[a, b]$. Para cada $i = 1, \cdots, n$ sean*

$$m_i = \text{ínf}\{f(x) \,:\, t_{i-1} \leq x \leq t_i\}$$

$$M_i = \sup\{f(x) \,:\, t_{i-1} \leq x \leq t_i\}$$

Se denomina ***suma inferior de*** f ***para la partición*** P*, y se denota* $L(f,P)$*, a*

$$L(f,P) = \sum_{i=1}^{n} (t_i - t_{i-1}) m_i.$$

Se denomina ***suma superior de*** f ***para la partición*** P*, y se denota* $U(f,P)$*, a*

$$U(f,P) = \sum_{i=1}^{n} (t_i - t_{i-1}) M_i.$$

Antes de continuar realizaremos algunas observaciones importantes:

Observación 3. Observemos primero que para definir las sumas inferior y superior no hemos pedido que la función sea no negativa. En el caso que $f \geq 0$, $L(f,P)$ coincide con la suma de las áreas de los rectángulos inferiores s, y $U(f,P)$ coincide con la suma de las áreas de los rectángulos superiores S del análisis anterior.

Observación 4. La condición de que f sea acotada en $[a,b]$ es fundamental para que existan los valores m_i y M_i. Por otra parte, como no estamos pidiendo que f sea continua, m_i y M_i no tienen por qué ser el mínimo y el máximo de la función en el intervalo $[t_{i-1}, t_i]$.

Observación 5. Como claramente $m_i \leq M_i$ para cada $i = 1, \cdots, n$, se tiene que

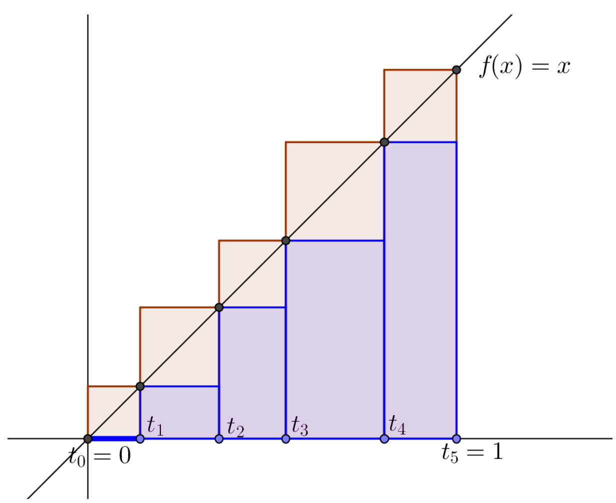
$$m_i \leq M_i \;\Rightarrow\; (t_i - t_{i-1}) m_i \leq (t_i - t_{i-1}) M_i \;\Rightarrow\; L(f,P) \leq U(f,P)$$

para cualquier partición P de $[a,b]$. Sin embargo no sabemos qué relación existe entre $L(f,P)$ y $U(f,P')$ para dos particios P y P' distintas. Es de esperar, para poder definir una noción adecuada de área, que se verifique una relación análoga a cuando $P = P'$.

Ejemplo 6. Consideremos la función $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = x$. Sea P una partición cualquiera de $[0,1]$. Como la función es continua y creciente, tenemos que para cada $i = 1, \cdots n$,

$$m_i = f(t_{i-1}) = t_{i-1}, \quad M_i = f(t_i) = t_i.$$

En la siguiente figura se ilustra esta situación para una partición de $[0,1]$ con $n = 5$.



Tendremos entonces

$$L(f,P)=\sum_{i=1}^{n}(t_i-t_{i-1})m_i=\sum_{i=1}^{n}(t_i-t_{i-1})t_{i-1},\quad U(f,P)=\sum_{i=1}^{n}(t_i-t_{i-1})M_i=\sum_{i=1}^{n}(t_i-t_{i-1})t_i.$$

Ejemplo 7. Sea $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ dada por

$$f(x)=\begin{cases}0 & \text{si } x \text{ es racional}\\ 1 & \text{si } x \text{ es irracional}\end{cases}$$

f es una función acotada, no negativa y claramente no continua. Como los números racionales e irracionales son **densos** en $[0,1]$ (es decir, en cualquier entorno de cualquier punto, por más pequeño que sea, existen infinitos números racionales e irracionales), cualquiera sea la partición de $[0,1]$ que tomemos, en cada intervalo $[t_{i-1},t_i]$, $i=0,\cdots,n$, existirán números racionales e irracionales, y por lo tanto tendremos

$$m_i=0,\quad M_i=1.$$

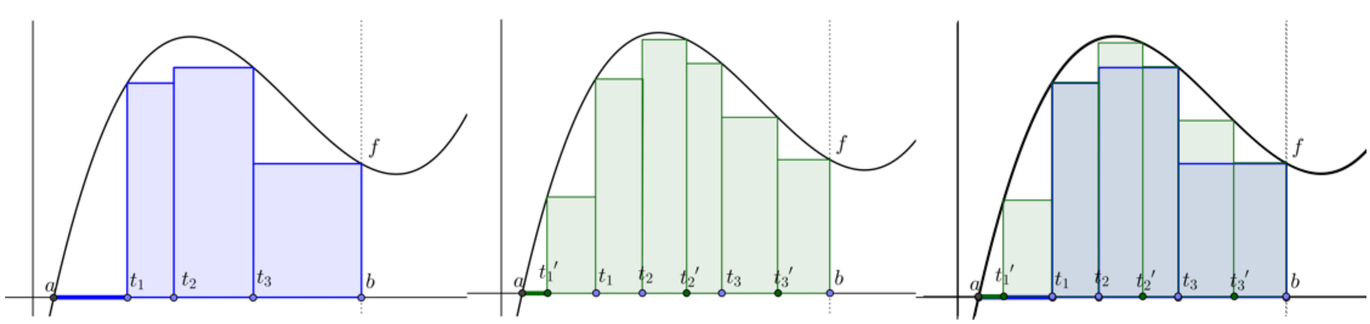
Por lo tanto es claro que $L(f,P)=0$ y

$$U(f,P)=(t_1-t_0)+(t_2-t_1)+\cdots+(t_{n-1}-t_{n-2})+(t_n-t_{n-1})=t_n-t_0=1$$

Con lo cual, para cualquier partición las sumas inferiores son iguales a 0 y las sumas superiores son siempre iguales a 1. En este caso, $f\geq 0$ y no hay esperanzas en de definir una noción de área bajo la gráfica de la función, aunque esto era esperable por las características de la función misma.

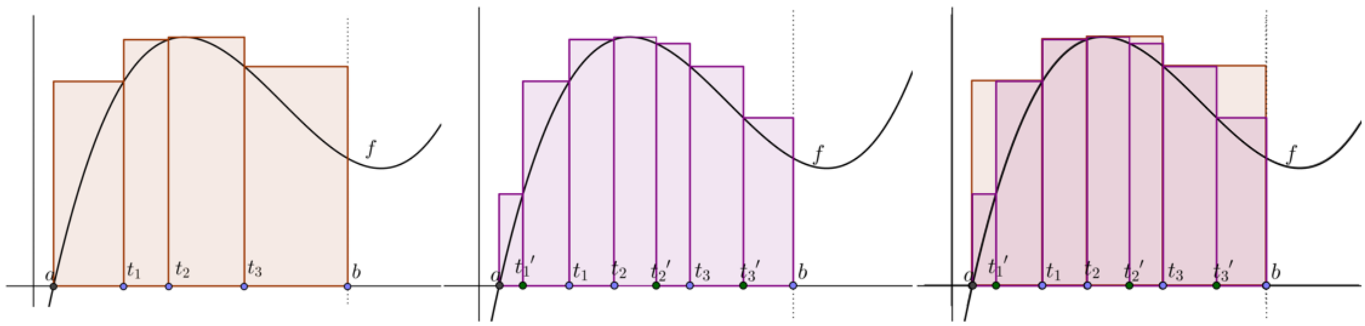
Continuaremos analizando la situación que planteamos en la Observación 5. Puntualmente, nos interesa probar que para cualquier par de particiones P_1 y P_2 del intervalo $[a,b]$, se verifica que $L(f,P_1)\leq U(f,P_2)$.

Comenzaremos demostrando un lema sobre el comportamiento de las sumas cuando agregamos puntos a una partición dada. Observemos en la siguiente figura qué ocurre con las sumas asociadas a las particiones $P=\{t_0=a,t_1,t_2,t_3,t_4=b\}$ y $P'=P\cup\{t_1',t_2',t_3'\}$:



Resulta bastante intuitivo que $L(f,P) \leq L(f,P')$.

Si consideramos las sumas superiores, parece verificarse una relación inversa, esto es, $U(f,P) \geq U(f,P')$:



Lema 8. *Sea f una función acotada definida sobre un intervalo $[a,b]$ y sean P y Q dos particiones de $[a,b]$ tales que $P \subset Q$ (es decir, todos los puntos de P están en Q). Entonces*

1. $L(f,P) \leq L(f,Q)$,
2. $U(f,P) \geq U(f,Q)$.

Demostración:

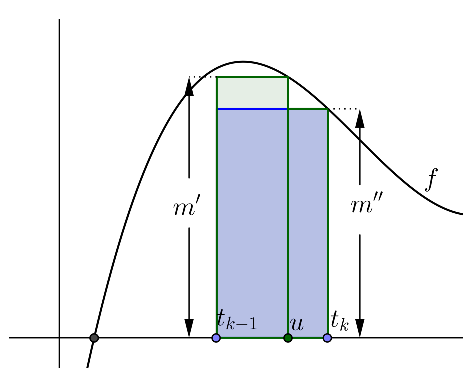
Haremos la demostración de 1 y dejaremos la prueba de 2 como **ejercicio**.

Supongamos primero que Q contiene exactamente un punto más que P, es decir, $Q = P \cup \{u\}$. Si $P = \{t_0 = a, t_1, \cdots, t_n = b\}$, existirá un índice k tal que $u \in [t_{k-1}, t_k]$. O sea,

$$Q = \{t_0 = a, t_1, \cdots, t_{k-1}, u, t_k, \cdots, t_n = b\}.$$

Sean

$$m' = \inf\{f(x) : t_{k-1} \leq x \leq u\}, \quad m'' = \inf\{f(x) : u \leq x \leq t_k\}$$



Tendremos entonces

$$L(f,P) = (t_1 - t_0)m_1 + (t_2 - t_1)m_2 + \cdots + \boxed{(t_k - t_{k-1})m_k} + \cdots + (t_n - t_{n-1})m_n$$

$$L(f,Q) = (t_1 - t_0)m_1 + (t_2 - t_1)m_2 + \cdots + \boxed{(u - t_{k-1})m' + (t_k - u)m''} + \cdots + (t_n - t_{n-1})m_n$$

donde enmarcados aparecen los únicos términos diferentes de ambas sumas. Para probar que $L(f,P) \leq L(f,Q)$ bastará por lo tanto probar que

$$(t_k - t_{k-1})m_k \leq (u - t_{k-1})m' + (t_k - u)m'' \tag{1}$$

Observemos que como $[t_{k-1}, u] \subset [t_{k-1}, t_k]$ tendremos

$$\{f(x) \,:\, t_{k-1} \leq x \leq u\} \subset \{f(x) \,:\, t_{k-1} \leq x \leq t_k\}$$

es decir que el segundo conjunto contendrá todos los valores presentes en el primero y algunos más, posiblemente más pequeños. Por lo tanto el ínfimo del conjunto de la derecha deberá ser menor o igual que el ínfimo del conjunto de la izquierda, esto es

$$m_k \leq m'.$$

Un razonamiento análogo muestra que $m_k \leq m''$. Por lo tanto tendremos

$$m'(u - t_{k-1}) + m''(t_k - u) \geq m_k(u - t_{k-1}) + m_k(t_k - u) = m_k(u - t_{k-1} + t_k - u) = m_k(t_k - t_{k-1})$$

lo que prueba (1).

Supongamos ahora que Q tiene l puntos más que P. Es decir,

$$Q = P \cup \{u_1, \cdots, u_l\}$$

Denotemos por $Q_1 = P \cup \{u_1\}$, $Q_2 = P \cup \{u_1, u_2\} = Q_1 \cup \{u_2\}$ y, en general, para $j = 2, \cdots, l$,

$$Q_j = Q_{j-1} \cup \{u_j\} = P \cup \{u_1, \cdots, u_j\}$$

con lo cual $Q = Q_l$. Como Q_j tiene exactamente un punto más que Q_{j-1}, para $j = 2, \cdots, l$, aplicando el razonamiento anterior tendremos que $L(f, Q_{j-1}) \leq L(f, Q_j)$. Tendremos entonces que

$$L(f, Q_1) \leq L(f, Q_2) \leq \cdots \leq L(f, Q_{l-1}) \leq L(f, Q_l) = L(f, Q).$$

Por otra parte, $Q_1 = P \cup \{u_1\}$, y por lo tanto tendremos $L(f,P) \leq L(f, Q_1)$, de donde resulta que

$$L(f,P) \leq L(f,Q)$$

como queríamos probar $\square$

Teorema 9. *Sea f una función acotada y no negativa definida sobre $[a,b]$. Sean P_1 y P_2 particiones cualesquiera de $[a,b]$. Entonces $L(f,P_1) \leq U(f,P_2)$.*

Demostración:

Sea $P = P_1 \cup P_2$ la partición de $[a, b]$ que contiene a todos los puntos de P_1 y de P_2. Por la observación 5 de esta sección tendremos que $L(f, P) \leq U(f, P)$.

Por otra parte, como $P_1 \subset P$, en función del Lema 8 tendremos $L(f, P_1) \leq L(f, P)$, y como $P_2 \subset P$, también por el Lema 8 resultará $U(f, P) \leq U(f, P_2)$. Combinando estos resultados tenemos

$$L(f, P_1) \leq L(f, P) \leq U(f, P) \leq U(f, P_2)$$

como queríamos probar. □

Como consecuencia inmediata del Teorema 9 obtenemos que fijada una partición P_0 cualquiera de $[a, b]$, la suma superior $U(f, P_0)$ resulta una cota superior para el conjunto de todas las sumas inferiores $L(f, P)$, variando P entre todas las particiones de $[a, b]$. Más precisamente, si denotamos $\mathcal{P}_{[a,b]}$ al conjunto de todas las particiones de $[a, b]$ tendremos que el conjunto

$$\{L(f, P) \,:\, P \in \mathcal{P}_{[a,b]}\}$$

es acotado superiormente (siendo $U(f, P_0)$ es una cota superior) y por lo tanto posee un supremo.

De la misma manera, $L(f, P_0)$ es una cota inferior del conjunto

$$\{U(f, P) \,:\, P \in \mathcal{P}_{[a,b]}\}$$

y por lo tanto este conjunto posee un ínfimo. Para poder definir con precisión el área bajo la gráfica de una función es de esperar que estos dos números reales coincidan.

Observemos antes que nada que tanto el ínfimo como el supremo anteriores están definidos para cualquier función acotada y no negativa sobre $[a, b]$, sin necesidad que esta función tenga propiedades adicionales (como por ejemplo continuidad). Sin embargo, estos números no siempre coinciden como es fácil comprobar en la función del Ejemplo 7. Ya hemos notado que esta función es demasiado "irregular" para poder definir una noción de área bajo su gráfica.

Definición 10. *Sea f una función acotada definida sobre un intervalo cerrado $[a, b]$, y sea $\mathcal{P}_{[a,b]}$ el conjunto de todas las particiones de $[a, b]$. Decimos que f es* ***integrable*** *en $[a, b]$ si*

$$\sup\{L(f, P) \,:\, P \in \mathcal{P}_{[a,b]}\} = \text{ínf}\{U(f, P) \,:\, P \in \mathcal{P}_{[a,b]}\} = I.$$

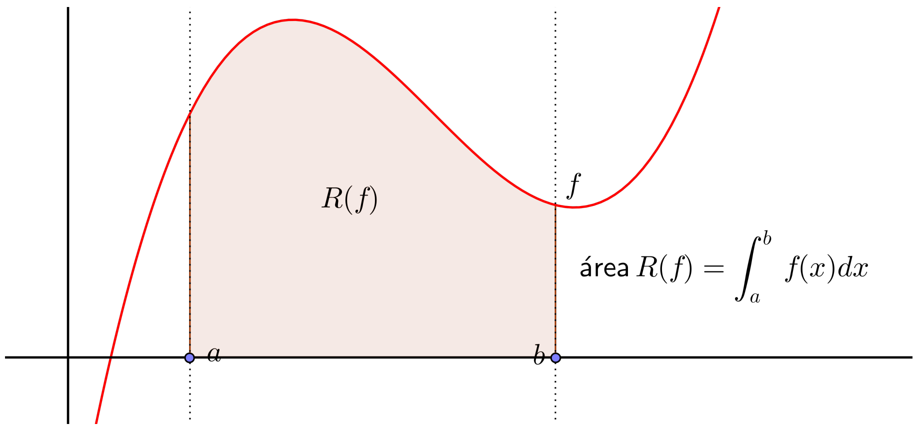
En tal caso, el número real I se denomina ***integral*** *de f en $[a, b]$ y se denota*

$$\int_a^b f \quad o \quad \int_a^b f(x)dx.$$

Definición 11. *Sea f una función integrable y no negativa en un intervalo $[a, b]$ y sea $R(f)$ la región comprendida entre la gráfica de la función y el eje x, esto es*

$$R(f) = \{(x, y) \,:\, a \leq x \leq b,\ 0 \leq y \leq f(x)\}.$$

Entonces la integral de f sobre $[a, b]$ es, por definición, el ***área*** *de $R(f)$.*



Antes de continuar realicemos una observación sobre la notación utilizada para designar la integral de f. La notación $\int_a^b f$ muestra que la integral de f en $[a, b]$ es única y es independiente del nombre que demos a la variable de la función. Sin embargo en muchos casos es importante explicitar sobre qué variable estamos integrando, de donde resulta más usual la notación $\int_a^b f(x)dx$. Por otra parte esta última muestra la intuición geométrica detrás de la definición de la integral. Fue introducida por Leibniz, quien interpretó el símbolo $\int$ como una S alargada que representaba una especie de suma de las áreas de los infinitos rectángulos de base infinitamente pequeña dx y altura $f(x)$ (cuya área sería $f(x)dx$).

Teorema 12. *Sea f una función acotada sobre el intervalo $[a, b]$. Entonces f es integrable si y sólo si para cada $\varepsilon > 0$ existe una partición P_ε de $[a, b]$ tal que*

$$U(f, P_\varepsilon) - L(f, P_\varepsilon) < \varepsilon.$$

En ese caso, $\int_a^b f(x)dx$ es el único número real I que verifica

$$L(f, P_\varepsilon) \leq I \leq U(P, \varepsilon)$$

para cada $\varepsilon > 0$.

<u>**Demostración:**</u>

Recordemos primero la caracterización del ínfimo y el supremo de un conjunto de números reales. Si A es un conjunto de números reales, tenemos que $S = \sup A$ si y sólo si S es una cota superior de A y para cada $\varepsilon > 0$ existe un elemento $a \in A$ tal que $S < a + \varepsilon$ (ver Teorema 9, Unidad 1 de AMI).

De manera similar, se tiene que $s = \text{ínf}\, A$, si y sólo si s es una cota inferior de A y para cada $\varepsilon > 0$ existe un elemento $a' \in A$ tal que $a' - \varepsilon < s$.

$\Rightarrow$) Supongamos primero que f es integrable en $[a,b]$ y sea $I = \int_a^b f(x)dx$. Entonces

$$I = \sup\{L(f,P) \,:\, P \in \mathcal{P}_{[a,b]}\} = \text{ínf}\{U(f,P) \,:\, P \in \mathcal{P}_{[a,b]}\}.$$

Por las caracterizaciones del ínfimo y del supremo, tendremos que fijado $\varepsilon > 0$, existirán particiones P', P'' de $[a,b]$ tales que

$$I < L(f,P') + \frac{\varepsilon}{2}, \quad U(f,P'') - \frac{\varepsilon}{2} < I.$$

O sea, tendremos

$$U(f,P'') - \frac{\varepsilon}{2} < L(f,P') + \frac{\varepsilon}{2} \;\Rightarrow\; U(f,P'') - L(f,P') < \varepsilon. \tag{2}$$

Sea $P_\varepsilon = P' \cup P''$. Entonces por el Lema 8 tendremos que $L(f,P') \geq L(f,P_\varepsilon)$ y $U(f,P_\varepsilon) \leq U(f,P'')$. Resultará

$$U(f,P_\varepsilon) - L(f,P_\varepsilon) \leq U(f,P'') - L(f,P') < \varepsilon$$

como queríamos ver.

$\Leftarrow$) Supongamos ahora que para cada $\varepsilon > 0$ existe una partición P_ε de $[a,b]$ tal que $U(f,P_\varepsilon) - L(f,P_\varepsilon) < \varepsilon$.

Sea $I = \text{ínf}\{U(f,P) \,:\, P \in \mathcal{P}_{[a,b]}\}$. Entonces para cada $P \in \mathcal{P}_{[a,b]}$ se tiene

$$I \leq U(f,P). \tag{3}$$

Veamos que también resulta $I = \sup\{L(f,P) \,:\, P \in \mathcal{P}_{[a,b]}\}$. Utilizaremos la caracterización del supremo.

Recordemos primero que para cualquier partición P de $[a,b]$, $L(f,P)$ es una cota inferior del conjunto $\{U(f,P) \,:\, P \in \mathcal{P}_{[a,b]}\}$, con lo cual $L(f,P) \leq I$. Luego I es una cota superior de $\{L(f,P) \,:\, P \in \mathcal{P}_{[a,b]}\}$.

Fijemos ahora $\varepsilon > 0$. Existe entonces una partición $P_\varepsilon \in \mathcal{P}_{[a,b]}$ tal que

$$U(f,P_\varepsilon) < L(f,P_\varepsilon) + \varepsilon.$$

Luego por (3) tenemos

$$I \leq U(f,P_\varepsilon) < L(f,P_\varepsilon) + \varepsilon$$

de donde resulta $I = \sup\{L(f,P) \,:\, P \in \mathcal{P}_{[a,b]}\}$. Concluimos que f es integrable.

Para ver la segunda parte del Teorema, observemos primero que por la definición de integral es inmediato que $L(f,P) \leq I \leq U(f,P)$ cualquiera sea la partición P de $[a,b]$.

Supongamos que existe un número real I' que verifica que

$$L(f,P_\varepsilon) \leq I' \leq U(f,P_\varepsilon)$$

para cada $\varepsilon > 0$.

Entonces tendremos

$$L(f, P_\varepsilon) \leq I \leq U(f, P_\varepsilon)$$

$$L(f, P_\varepsilon) \leq I' \leq U(f, P_\varepsilon)$$

de donde

$$L(f, P_\varepsilon) - U(f, P_\varepsilon) \leq I - I' \leq U(f, P_\varepsilon) - L(f, P_\varepsilon) \;\Rightarrow\; -\varepsilon < I - I' < \varepsilon.$$

O sea que $0 \leq |I - I'| < \varepsilon$, y como ε es arbitrario, resulta $|I - I'| = 0$ de donde $I = I'$. □

Ejemplo 13. Consideremos la función $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ dada por

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \text{ es racional} \\ 1 & \text{si } x \text{ es irracional} \end{cases}.$$

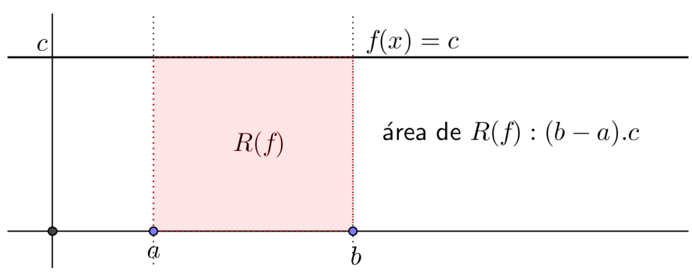
Vimos en el Ejemplo 7 que

$$\text{ínf}\{U(f, P) \,:\, P \in \mathcal{P}_{[a,b]}\} = 1, \quad \sup\{L(f, P) \,:\, P \in \mathcal{P}_{[a,b]}\} = 0.$$

con lo cual f no es integrable.

Ejemplo 14. Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = c$ una función constante.

Si $c > 0$, la intuición geométrica indica que f será integrable y que $\int_a^b f(x)dx = c\,(b - a)$, pues la región $R(f)$ es un rectángulo de base $b - a$ y altura c.



Haremos el análisis para c arbitrario, sin suponer nada sobre su signo.

Consideremos una partición $P = \{t_0 = a, \cdots, t_n = b\}$ de $[a, b]$. Como f es constante, es claro que para todo $i = 1, \cdots, n$,

$$m_i = M_i = c$$

y por lo tanto

$$\begin{aligned} L(f, P) &= \sum_{i=1}^{n}(t_i - t_{i-1})m_i = c\sum_{i=1}^{n}(t_i - t_{i-1}) \\ &= c\,(t_1 - a + t_2 - t_1 + t_3 - t_2 + \cdots + t_{n-1} - t_{n-2} + b - t_{n-1}) \\ &= c\,(b - a) \end{aligned}$$

De manera análoga obtenemos que

$$U(f,P)=\sum_{i=1}^{n}(t_i-t_{i-1})M_i=c\sum_{i=1}^{n}(t_i-t_{i-1})=c(b-a)=L(f,P)$$

con lo cual es claro que

$$\sup\{L(f,P)\,:\,P\in\mathcal{P}_{[a,b]}\}=\text{ínf}\{U(f,P)\,:\,P\in\mathcal{P}_{[a,b]}\}=c(b-a).$$

Concluimos que f es integrable y que

$$\int_a^b c\,dx=c(b-a)$$

Ejemplo 15. Consideremos la función $f:[0,2]\to\mathbb{R}$ dada por

$$f(x)=\begin{cases}1 & \text{si } x=1\\ 0 & \text{si } x\neq 1\end{cases}$$

Observemos que f coincide con la función constante igual a 0, salvo en el punto $x=1$.

Para determinar si f es integrable, consideremos una partición cualquiera $P=\{t_0,t_1,\cdots,t_n\}$ de $[1,2]$. Supongamos que para algún $k\in\{1,\cdots,n\}$ se tiene que $t_{k-1}<1<t_k$ (para una partición arbitraria, podría ocurrir que 1 coincida con uno de los puntos de la partición, pero como veremos podemos evitar este caso).

Luego para cada $i\neq k$, es claro que

$$m_i=M_i=0$$

pues f es idénticamente nula en $[t_{i-1},t_i]$. Por otra parte, para $i=k$ tenemos

$$m_k=0,\quad M_k=1$$

de donde resulta

$$L(f,P)=m_k(t_k-t_{k-1})=0,\quad U(f,P)=(t_k-t_{k-1})M_k=t_k-t_{k-1}.$$

Tomemos ahora $\epsilon>0$ arbitrario y elijamos $n\in\mathbb{N}$ suficientemente grande de modo que $\frac{1}{n}<\varepsilon$. Consideremos la partición

$$P_\varepsilon=\left\{t_0=a,t_1=\frac{2}{n},t_2=\frac{4}{n},\cdots,t_n=\frac{2n}{n}=2\right\}$$

de $[0,2]$. Observemos que basta tomar $n>2$ para que 1 no coincida con ninguno de los puntos de la partición. Por el análisis anterior, resultará entonces que para algún k,

$$U(f,P_\varepsilon)-L(f,P_\varepsilon)=t_k-t_{k-1}=\frac{1}{n}<\varepsilon.$$

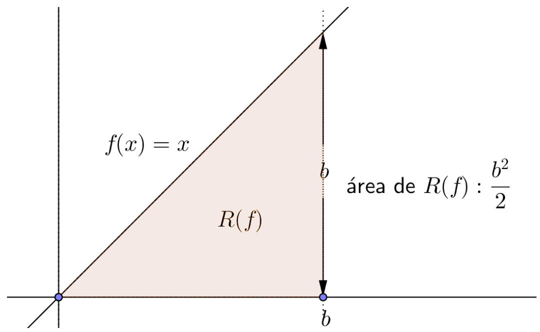
Luego por el Teorema 12, f es integrable.

Por otra parte, para cualquier partición P resulta claro que

$$L(f,P)=0\leq U(f,P).$$

de donde $\int_0^2 f(x)dx=0$.

Ejemplo 16. Consideremos la función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x$. Veremos que f es integrable en $[0, b]$ cualquiera sea $b > 0$. Siguiendo nuestra definición del área bajo la gráfica de la función, deberíamos tener $I = \int_0^b x dx = \frac{b^2}{2}$:



Ya vimos en el Ejemplo 6 que para una partición $P = \{t_0 = 0, t_1, \cdots, t_n = b\}$ de $[0, b]$, resultan

$$L(f, P) = \sum_{i=1}^{n} (t_{i-1} - t_i) t_{i-1}, \quad U(f, P) = \sum_{i=1}^{n} (t_{i-1} - t_i) t_i.$$

Por lo tanto

$$U(f, P) - L(f, P) = \sum_{i=1}^{n} (t_{i-1} - t_i)^2.$$

Fijemos $\varepsilon > 0$. Por la Propiedad Arquimediana de los Números Reales (ver Teorema 11, Unidad 1, AMI), existirá $n \in \mathbb{N}$ tal que

$$b^2 < n\varepsilon. \tag{4}$$

Pongamos

$$t_0 = 0, \; t_k = k\frac{b}{n} = t_{k-1} + \frac{b}{n}$$

para cada $k = 1, \cdots, n$. Observemos que $t_n = n\frac{b}{n} = b$ y entonces $P_n = \{t_0, \cdots, t_n\}$ es una partición de $[0, b]$. Además, para cada $k = 1, \cdots, n$ resulta

$$t_k - t_{k-1} = \frac{b}{n}.$$

Concluimos que

$$U(f, P_n) - L(f, P_n) = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{b}{n}\right)^2 = \frac{b^2}{n} < \varepsilon$$

y por lo tanto, en función del Teorema 12, f es integrable en $[0, b]$.

Como para cada número $\varepsilon > 0$ existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $U(f, P_n) - L(f, P_n) < \varepsilon$, en virtud del Teorema 12, tendremos que $I = \int_a^b f(x)dx$ si para cada $n \in \mathbb{N}$, $L(f, P_n) \leq I \leq U(f, P_n)$.

Para cada partición P_n, resulta

$$L(f, P_n) = \sum_{k=1}^{n} \frac{b}{n} \left((k-1)\frac{b}{n}\right) = \left(\frac{b}{n}\right)^2 \sum_{k=1}^{n} (k-1)$$

Recordemos que para cualquier número natural N, $1+2+\cdots+N=\frac{N(N+1)}{2}$ y por lo tanto

$$L(f,P_n)=\frac{b^2}{n^2}\frac{(n-1)n}{2}=\frac{n-1}{n}\frac{b^2}{2}$$

De manera análoga, obtenemos que

$$U(f,P_n)=\sum k=1^n\frac{b}{n}\left(k\frac{b}{n}\right)=\frac{n+1}{n}\frac{b^2}{2}$$

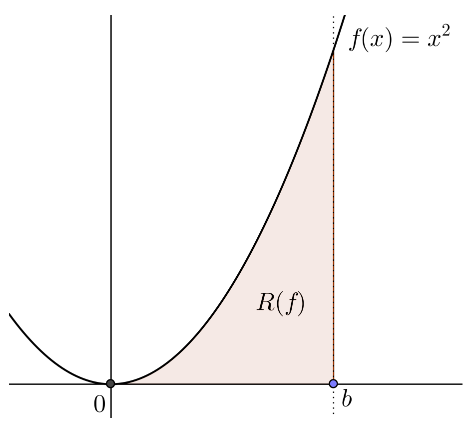
Como $\frac{n-1}{n}<1$, resulta $L(f,P_n)<\frac{b^2}{2}$. Del mismo modo, como $\frac{n+1}{n}>1$, resulta $U(f,P_n)>\frac{b^2}{2}$. Luego se tiene

$$L(f,P_n)<\frac{b^2}{2}<U(f,P_n).$$

Como $n\in\mathbb{N}$ es arbitrario, tenemos que $\int_0^b xdx=\frac{b^2}{2}$. De manera similar (aunque recurriremos a un resultado que veremos más adelante para probarlo) puede verse que

$$\int_a^b xdx=\frac{b^2}{2}-\frac{a^2}{2}.$$

Ejemplo 17. Consideremos ahora la función $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2$. Veremos que f es integrable en $[0,b]$, cualquiera sea $b>0$. Este es el primer resultado nuevo que obtendremos, dado que no existe una fórmula elemental para calcular el área de la región $R(f)$.

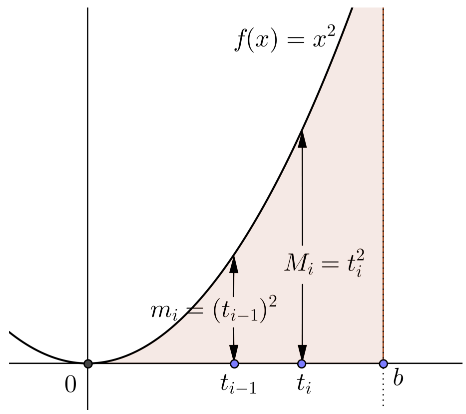


Como f es una función creciente en $[0,b]$, nuevamente para cualquier partición $P=\{t_0,\cdots,t_n\}$ de $[0,b]$ resultará

$$m_i=f(t_{i-1})=t_{i-1}^2,\quad M_i=f(t_i)=t_i^2$$

y por lo tanto tendremos

$$L(f,P)=\sum_{i=1}^n(t_i-t_{i-1})(t_{i-1})^2,\quad U(f,P)=\sum_{i=1}^n(t_i-t_{i-1})t_i^2.$$



Como en el caso anterior, para cada $n \in \mathbb{N}$, tomemos una partición $P_n = \{t_0, \cdots, t_n\}$ de $[0, b]$ de modo que

$$t_k = k\frac{b}{n}, \quad t_k - t_{k-1} = \frac{b}{n}$$

para todo $k = 0, \cdots, n$. Entonces

$$L(f, P_n) = \frac{b}{n}\sum_{k=0}^{n} t_{k-1}^2, \quad U(f, P_n) = \frac{b}{n}\sum_{k=1}^{n} t_k^2$$

de donde obtenemos que

$$U(f, P_n) - L(f, P_n) = \frac{b}{n}\left(\sum_{k=1}^{n} t_k^2 - \sum_{k=1}^{n} t_{k-1}^2\right).$$

Recordando que $1 + 2^2 + \cdots + n^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$ es fácil comprobar que

$$U(f, P_n) - L(f, P_n) = \frac{b^3}{n}$$

Luego, con un argumento similar al del ejemplo anterior, es fácil ver que para cada $\varepsilon > 0$, existe una partición P_n tal que $U(f, P_n) - L(f, P_n) < \varepsilon$.

Dejamos como **ejercicio** comprobar que además para cada $n \in \mathbb{N}$,

$$L(f, P_n) \leq \frac{b^3}{3} \leq U(f, P_n)$$

de donde concluimos que $\int_0^b x^2\, dx = \frac{b^3}{3}$. Veremos más adelante que para cada $a < b$,

$$\int_a^b x^2\, dx = \frac{b^3}{3} - \frac{a^2}{3}.$$

3. Propiedades de la integral

Del análisis de los ejemplos de la sección anterior resulta evidente la dificultad que conlleva la definición de integral al momento de calcular la integral de una función, incluso de las más elementales, o simplemente de determinar si la función es o no integrable en un intervalo $[a, b]$. Debemos esperar a enunciar el Teorema Fundamental del Cálculo en la próxima Unidad para obtener una herramienta realmente potente que nos permita resolver de manera sencilla este problema. En esta sección nos ocuparemos de probar algunas propiedades de la integral que resultarán de gran utilidad.

Comenzaremos estableciendo un resultado que nos proporciona una familia muy grande de funciones integrables: las funciones continuas. El resultado es bastante intuitivo, pues si f es continua, tomando una partición de modo que la longitud de cada subintervalo sea suficientemente pequeña, la diferencia entre el supremo y el ínfimo de la función resultará tan chiquito como queramos. La demostración formal sin embargo escapa a las herramientas que tenemos hasta el momento. Quien tenga interés puede encontrarla en el libro *Calculus*, 4ta. Edición, M. Spivak, Ed. Reverte, Teorema 3, Capítulo 13.

Teorema 18. *Si f es una función continua en $[a, b]$, entonces f es integrable en $[a, b]$.*

Observación 19. La continuidad es una **condición suficiente** de integrabilidad, pero **no es necesaria**. De hecho la función del Ejemplo 15 no es continua en $[0, 2]$ (tiene una discontinuidad de tipo salto en $x = 1$) pero sí es integrable en $[0, 2]$.

Teorema 20. *Sean $a < c < b$. f es integrable en $[a, b]$ si y sólo si f es integrable en $[a, c]$ y $[c, b]$. En este caso vale*

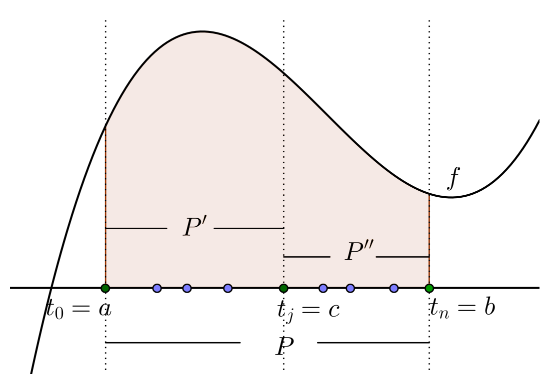
$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx.$$

<u>Demostración:</u>

$\Rightarrow$) Supongamos que f es integrable en $[a, b]$ y tomemos $\varepsilon > 0$. Por el Teorema 12, existirá una partición $P = \{t_0, \cdots, t_n\}$ de $[a, b]$ tal que

$$U(f, P) - L(f, P) < \varepsilon.$$

Podemos suponer que $c \in P$, o sea, que existe j tal que $t_j = c$ (si no fuese así, consideramos la partición $Q = P \cup \{c\}$ que también verifica $U(f, Q) - L(f, Q) < \varepsilon$). Sean $P' = \{t_0 = a, t_1, \cdots, t_j = c\}$ y $P'' = \{t_j = c, \cdots, t_n = b\}$. Entonces P' es una partición de $[a, c]$ y P'' es una partición de $[c, b]$.



Entonces

$$L(f,P) = L(f,P') + L(f,P''), \quad U(f,P) = U(f,P') + U(f,P'').$$

Restando miembro a miembro las igualdades anteriores, tenemos

$$\big[U(f,P') - L(f,P')\big] + \big[U(f,P'') - L(f,P'')\big] = U(f,P) - L(f,P) < \varepsilon.$$

Como ambos sumandos del primer término son no negativos, deberán ser ambos menores que ε, esto es,

$$U(f,P') - L(f,P') < \varepsilon, \quad U(f,P'') - L(f,P'') < \varepsilon$$

Luego, en virtud del Teorema 12 resulta f integrable en $[a,c]$ y en $[c,b]$.

Además

$$L(f,P') \leq \int_a^c f(x)dx \leq U(f,P'), \quad L(f,P'') \leq \int_c^b f(x)dx \leq U(f,P'').$$

Sumando miembro a miembro ambas desigualdades, tenemos que

$$L(f,P) \leq \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx \leq U(f,P).$$

En función de la segunda parte del Teorema 12 resulta

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx. \tag{5}$$

$\Leftarrow$) Supongamos ahora que f es integrable en $[a,c]$ y en $[c,b]$. Fijemos $\varepsilon > 0$ y consideremos particiones P' y P'' de $[a,c]$ y $[c,b]$ respectivamente tales que

$$U(f,P') - L(f,P') < \frac{\varepsilon}{2}, \quad U(f,P'') - L(f,P'') < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Entonces $P = P' \cup P''$ es una partición de $[a,b]$ para la cual

$$L(f,P) = L(f,P') + L(f,P''), \quad U(f,P) = U(f,P') + U(f,P'').$$

Restando miembro a miembro ambas igualdades, resulta claro que $U(f,P) - L(f,P) < \varepsilon$. Luego f es integrable en $[a,b]$. Como la integral es única, debe valer la ecuación 5. $\square$

La integral $\int_a^b f(x)dx$ fue definida sólo cuando $a < b$. Ampliaremos ahora la definición a casos más generales. La definición siguiente constituye simplemente una convención respecto de la notación a utilizar:

Definición 21. *Sea f una función. Donde tenga sentido, se define:*

- $\int_a^a f(x)dx = 0$;
- *si* $b < a$, $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$.

Con estas notaciones, el resultado del Teorema 20 es válido para a, b y c cualesquiera, incluso si no se verifica que c esté entre a y b, siempre que la función sea integrable en todos los intervalos involucrados. Dejamos la prueba como **ejercicio**.

Ejemplo 22. Consideremos la función $f(x) = x$ y sean $0 \leq a < b$. Vimos en el Ejemplo 16 que

$$\int_0^a f(x)dx = \frac{a^2}{2}, \quad \int_0^b f(x)dx = \frac{b^2}{2}.$$

Luego, en función de la observación anterior, tenemos que

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^0 f(x)dx + \int_0^b f(x)dx = -\int_0^a f(x)dx + \int_0^b f(x)dx = \frac{b^2}{2} - \frac{a^2}{2}$$

como habíamos afirmado.

De la misma manera puede probarse que $\int_a^b x^2dx = \frac{b^3}{3} - \frac{a^3}{3}$.

Teorema 23. *Sea $c \in \mathbb{R}$. Si f es integrable en $[a, b]$, entonces cf es integrable en $[a, b]$ y vale*

$$\int_a^b cf(x)dx = c\int_a^b f(x)dx.$$

Demostración:

Supondremos que $c \geq 0$. Dejamos la demostración del caso $c < 0$ como **ejercicio**.

Sea P una partición cualquiera de $[a, b]$. Es fácil ver que como $c \geq 0$, $L(cf, P) = cL(f, P)$ y que $U(cf, P) = cU(f, P)$ (dejamos los detalles como **ejercicio**). Por lo tanto

$$\sup\{L(cf, P) \,:\, P \in \mathcal{P}_{[a,b]}\} = c \sup\{L(f, P) \,:\, P \in \mathcal{P}_{[a,b]}\} = c\int_a^b f(x)dx$$

$$\inf\{U(cf, P) \,:\, P \in \mathcal{P}_{[a,b]}\} = c \inf\{U(f, P) \,:\, P \in \mathcal{P}_{[a,b]}\} = c\int_a^b f(x)dx$$

de donde resulta que cf es integrable y $\int_a^b cf(x)dx = c\int_a^b f(x)dx$. $\square$

Teorema 24. *Sean f y g funciones integrables en $[a, b]$. Entonces $f + g$ es integrable en $[a, b]$ y vale*

$$\int_a^b (f + g)(x)dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx.$$

Demostración:

Sean f y g funciones integrables en $[a, b]$ y sea $P = \{t_0, \cdots, t_n\}$ una partición de $[a, b]$. Observemos que como f y g son acotadas, $f + g$ es acotada y tiene sentido definir para cada $i = 1, \cdots, n$

$$m_i = \inf\{(f + g)(x) \,:\, t_{i-1} \leq x \leq t_i\}, \quad m_i' = \inf\{f(x) \,:\, t_{i-1} \leq x \leq t_i\}, \quad m_i'' = \inf\{g(x) \,:\, t_{i-1} \leq x \leq t_i\}.$$

$M_i = \sup\{(f+g)(x) \,:\, t_{i-1} \le x \le t_i\}$, $M_i' = \sup\{f(x) \,:\, t_{i-1} \le x \le t_i\}$, $M_i'' = \sup\{g(x) \,:\, t_{i-1} \le x \le t_i\}$.

Observemos que para cada $i = 1, \cdots, n$ y cada $x \in [t_{i-1}, t_i]$, se tiene

$$m_i' \le f(x),\ m_i'' \le g(x) \ \Rightarrow\ m_i' + m_i'' \le f(x) + g(x)$$

Luego $m_i' + m_i''$ es una cota inferior de $\{(f+g)(x) \,:\, t_{i-1} \le x \le t_i\}$ y como el ínfimo de un conjunto es la mayor de las cotas inferiores, resulta

$$m_i \ge m_i' + m_i''.$$

Con un razonamiento análogo se prueba que

$$M_i \le M_i' + M_i''.$$

De aquí resulta que

$$L(f+g,P) \ge L(f,P) + L(g,P), \quad U(f+g,P) \le U(f,P) + U(g,P) \tag{6}$$

para cualquier partición P de $[a,b]$.

Fijemos ahora $\varepsilon > 0$. Como f y g son integrables, existirán particiones P' y P'' de $[a,b]$ tales que

$$U(f,P') - L(f,P') < \frac{\varepsilon}{2}, \quad U(f,P'') - L(f,P'') < \frac{\varepsilon}{2} \tag{7}$$

Sea $P_\varepsilon = P' \cup P''$. Entonces las relaciones (7) valen también para P_ε y de (6) resulta

$$U(f+g,P_\varepsilon) - L(f+g,P_\varepsilon) \le [U(f,P_\varepsilon) - L(f,P_\varepsilon)] + [U(g,P_\varepsilon) - L(g,P_\varepsilon)] < \varepsilon.$$

Conluimos que $f+g$ es integrable en $[a,b]$.

Ahora, por (6) tenemos que

$$L(f,P_\varepsilon) + L(g,P_\varepsilon) \le L(f+g,P_\varepsilon) \le \int_a^b (f+g)(x)dx \le U(f+g,P_\varepsilon) \le U(f,P_\varepsilon) + U(g,P_\varepsilon)$$

y por otro lado

$$L(f,P_\varepsilon) + L(g,P_\varepsilon) \le \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx \le U(f,P_\varepsilon) + U(g,P_\varepsilon).$$

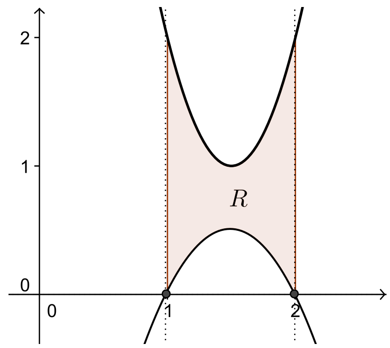
Restando miembro a miembro ambas desigualdades, de (7) tenemos

$$-\varepsilon < \int_a^b (f+g)(x)dx - \left(\int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx\right) < \varepsilon$$

Como $\varepsilon > 0$ es arbitrario, resulta $\int_a^b (f+g)(x)dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx$ como queríamos ver. □

Ejemplo 25. Consideremos la región

$$R = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, 1 \le x \le 2,\ -2x^2 + 6x - 4 \le y \le 4x^2 - 12x + 10\}$$



R es la región comprendida entre las graficas de las funciones $f(x) = -2x^2 + 6x - 4$ y $g(x) = 4x^2 - 12x + 10$. Como las funciones f y g son continuas, son integrables en $[1,2]$ y el área de la región R se obtiene de restar al área de la región $R(g)$ el área de la región $R(f)$. Tenemos entonces

$$\text{Área}(R) = \int_1^2 (g-f)(x)dx = \int_1^2 (6x^2 - 18x + 14)dx$$

Además, combinando los Teoremas 23 y 24 tenemos

$$\begin{aligned} \int_1^2 (6x^2 - 18x + 14)dx &= 6\int_1^2 x^2 dx - 18\int_1^2 x dx + \int_1^2 14 dx \\ &= 6\left(\frac{2^3}{3} - \frac{1^3}{3}\right) - 18\left(\frac{2^2}{2} - \frac{1^2}{2}\right) + 14(2-1) \\ &= 14 - 27 + 14 = 1 \end{aligned}$$

Luego Área$(R) = 1$.

Aplicaremos ahora los resultados de esta sección para generalizar lo que ocurre en el Ejemplo 15. Observemos primero que, con el mismo análisis que hicimos, podemos generalizar el dominio de la función de este ejemplo a cualquier intervalo $[a,b]$. Esto es, si $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ esá dada por

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x = x_0 \\ 0 & \text{si } x \neq x_0 \end{cases}$$

para algún $x_0 \in [a,b]$, entonces f es integrable y $\int_a^b f(x)dx = 0$.

Si ahora $g : [a,b] \to \mathbb{R}$ está dada por

$$g(x) = \begin{cases} c & \text{si } x = x_0 \\ 0 & \text{si } x \neq x_0 \end{cases}$$

para algún $x_0 \in [a,b]$ y algún $c \in \mathbb{R}$, entonces $g = cf$ y en virtud del Teorema 23 resulta g integrable y $\int_a^b g(x)dx = c\int_a^b f(x)dx = 0$.

Como consecuencia obtenemos:

Lema 26. *Sea f una función integrable en $[a, b]$. Si g es una función acotada en $[a, b]$ tal que $g(x) = f(x)$ para todo $x \in [a, b]$ salvo para un número finito de puntos $x_1, \cdots, x_n$, entonces g es integrable en $[a, b]$ y $\int_a^b g(x)dx = \int_a^b f(x)dx$.*

Demostración:

Supongamos primero que g difiere de f sólo en un punto $x_0 \in [a, b]$. Consideremos la función $h = g - f$ y pongamos $c = g(x_0) - f(x_0)$. Entonces $h : [a, b] \to \mathbb{R}$ está dada por

$$h(x) = \begin{cases} c & \text{si } x = x_0 \\ 0 & \text{si } x \neq x_0 \end{cases}$$

Luego h es integrable y $\int_a^b h(x)dx = 0$.

Por otra parte, $g = h + f$. Aplicando el Teorema 24 resulta g integrable y

$$\int_a^b g(x)dx = \int_a^b h(x)dx + \int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(x)dx.$$

El caso general se obtiene de combinar este resultado con el Teorema 20 y lo dejamos como **ejercicio**. □

Teorema 27. *Sea f integrable en $[a, b]$ y supongamos que $m \leq f(x) \leq M$ para todo x en $[a, b]$. Entonces*

$$m(b - a) \leq \int_a^b f(x)dx \leq M(b - a). \tag{8}$$

Demostración:

Es claro que $m(b - a) \leq L(f, P)$ y $U(f, P) \leq M(b - a)$ para cualquier partición P del intervalo $[a, b]$. Es decir que $m(b-a)$ es una cota inferior de $L(f, P)$ para cualquier suma inferior y $M(b-a)$ es una cota superior para cualquier suma superior. Por lo tanto como

$$\int_a^b f(x)\, dx = \sup\{L(f, P) \,:\, P \in \mathcal{P}_{[a,b]}\} = \text{ínf}\{U(f, P), \,:\, P \in \mathcal{P}_{[a,b]}\}$$

resulta que vale la desigualdad (8). □