Introducción a la Matemática

Iker M. Canut

March 2, 2020

1 Conjuntos

1.1 Definiciones Básicas

Un Conjunto es una colección de objetos. Los conjuntos se denominan con letras mayúsculas. Y los elementos que lo forman con letras minúsculas. El conjunto vacio se denomina $\emptyset$.

1.2 Representación de conjuntos

- **Por Extensión**: Se lista todo entre llaves. $\{a, b, c, d, ...\}$
- **Por Comprension**: Se dicen las propiedades. $\{x/x...\}$

1.3 Subconjuntos

El conjunto B es subconjunto de A si y sólo si todo elemento de B, es también de A.

$$\boxed{B \subset A \iff (x \in B \Rightarrow x \in A)}$$

Dos conjuntos serán iguales cuando posean los mismos elementos.

$$\boxed{B = A \iff (A \subset B \wedge B \subset A)}$$

Al conjunto que contiene a todos los datos en un contexto específico lo denominaremos **Conjunto Universal** y se denota con la letra **U**.

1.4 Operaciones

- **Intersección de Conjuntos**: $A \cap B = \{x/x \in A \wedge x \in B\}$
- **Unión de Conjuntos**: $A \cup B = \{x/x \in A \vee x \in B\}$

Si dos conjuntos no tienen elementos en comun, entonces son **disjuntos**. A y B disjuntos $\iff A \cap B = \emptyset$

Propiedades	UNIÓN	INTERSECCIÓN
Conmutativa	$A \cup B = B \cup A$	$A \cap B = B \cap A$
Asociativa	$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$	$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$
Distributiva	$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$	$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$
Idempotencia	$A \cup A = A$	$A \cap A = A$

- **Diferencia**: $A - B = \{x/x \in A \wedge x \notin B\}$
- **Complemento**: $C_A = \overline{A} = U - A$. Se cumple que $A - B = A \cap \overline{B}$

Propiedades	
Complemento	$\overline{\overline{A}} = A$ $A \cup \overline{A} = U$ $A \cap \overline{A} = \emptyset$ $\overline{\emptyset} = U \wedge \overline{U} = \emptyset$
Leyes de Morgan	$\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$ $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$

- **Cardinal de un conjunto**: Es el número de elementos. $|A| = card(A)$

2 Números Reales

- **Naturales** N: $\{1, 2, 3, ...\}$
- **Naturales con cero** N_0: $\{0, 1, 2, 3, ...\}$
- **Enteros** Z: $\{..., -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, ...\}$
- **Racionales** $Q=\left\{x/x = \frac{p}{q}, p \in Z, q \in Z, q \neq 0\right\}$
- **Irracionales** I=$Q \cap I = \emptyset \wedge Q \cup I = R$

$$N \subset N_0 \subset Z \subset Q \subset R \wedge I \subset R$$

2.1 Potenciación

- Si $a \neq 0, a^0 = 1$
- $a^1 = a$
- Si $n \in N, n > 1, a^n = \underbrace{a.a.....a}_{\text{n factores "a"}}$
- Si $a \in R \wedge a \neq 0 \wedge n \in N, a^{-n} = \frac{1}{a^n} = \frac{1}{\underbrace{a.a.....a}_{\text{n veces}}}$

Distributiva respecto a la multiplicación	$(a.b)^n = a^n.b^n$
Distributiva respecto al cociente	$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}, b \neq 0$
Producto de potencias de igual base	$a^n.a^m = a^{n+m}$
Cociente de potencias de igual base	$a^n \div a^m = a^{n-m}$
Potencia de potencia	$(a^n)^m = a^{n.m}$

2.2 Radicación

$\sqrt[n]{a} = b \iff b^n = a$ y se nombra $\sqrt[indice]{radicando}$ = raiz enesima

No existe en los reales la raiz cuadrada (y de ningún índice par) de números negativos. Es decir:

- Si **n** es un numero natural **impar**, entonces es valida para todo número real **a**.
- Si **n** es un numero natural **par**, entonces es valida para todo número real **a no negativo**.

$$\boxed{a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m} \wedge a^{-\frac{m}{n}} = \frac{1}{\sqrt[n]{a^m}}, a \neq 0}$$

Distributiva respecto al producto	$\sqrt[n]{a.b} = \sqrt[n]{a}.\sqrt[n]{b}$
Distributiva respecto al cociente	$\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$
Raiz de raiz	$\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[m.n]{a}$

2.3 Logaritmo

El logaritmo en base a de x es y y lo notamos $\log_a(x) = y$, como el numero al cual tengo que elevar a **a** para obtener **x**.

$$log_a(x) = y \iff a^y = x, \text{ se necesita que } a > 0 \wedge x > 0 \wedge a \neq 1$$

- $log_a(1) = 0$
- $log_a(a) = 1$
- $log_a(x.y) = log_a(x) + log_a(y)$
- $log_a\left(\frac{x}{y}\right) = log_a(x) - log_a(y)$
- $log_a(x^c) = c.log_a(x)$
- $a^{log_a(x)} = x$

$$\boxed{log_b(x) = \frac{log_a(x)}{log_a(b)}}$$

2.4 Formas Especiales

Binomio al Cuadrado ↔ Trinomio Cuadrado Perfecto

$$\boxed{(x+y)^2 = x^2 + 2xy + y^2}$$

Binomio al Cubo ↔ Cuatrinomio Cubo Perfecto

$$\boxed{(x+y)^3 = x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3}$$

Diferencia de Cuadrados

$$\boxed{(a-b).(a+b) = a^2 - b^2}$$

2.5 Relacion de Orden del Conjunto de los Numeros Reales

- $a < b$ si $0 < b - a$
- $a > b$ si $b < a$
- $a < b \wedge b < c \Rightarrow a < c$
- $a < b \Rightarrow a + c < b + c$
- $a < b \wedge c > 0 \Rightarrow a.c < b.c$
- $a < b \wedge c < 0 \Rightarrow a.c > b.c$

2.6 Valor Absoluto

Es la distancia que hay, en la recta numérica, desde su punto representativo al origen de coordenadas. El valor absoluto es será siempre un número positivo (o cero).

$$|x| = \begin{cases} x & \text{si } x \geq 0 \\ -x & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

- $|a| \geq 0$
- $|a|.|b| = |a|.|b|$
- $|a| = 0 \iff a = 0$
- $\left|\frac{a}{b}\right| = \frac{|a|}{|b|}, b \neq 0$
- $|-a| = |a|$
- $\sqrt{a^2} = |a|$

$\forall a, b \in R \wedge k > 0$

- $|a+b| \leq |a| + |b|$
- $|a-b| \geq ||a| - |b||$
- $|a| < k \iff -k < a < k$
- $|a| > k \iff (a > k \vee a < (-k))$

3 Números Complejos

Se define i como: $\boxed{i^2 = -1}$

3.1 Forma Binómica de un Número Complejo

$\boxed{z = a + bi}$ donde **a** y **b** son numeros reales, e **i** se define por la relacion $i^2 = -1$

El numero **a** = $Re(z)$ es la parte real de z y **b** = $Im(z)$ es la parte imaginaria de z.

3.2 La Unidad Imaginaria

El número **i** recibe el nombre de unidad imaginaria, aceptandose que se comporta como un número real.

- $i^r.i^s = i^{r+s}$
- $(i^r)^s = i^{r.s}$, con $r, s \in Z$
- $i^0 = 1$
- $i^1 = i$
- $i^2 = -1$
- $i^3 = -i$

$$\boxed{i^n = i^r, \text{ donde r=n\%4}}$$

3.3 El conjunto de los Números Complejos

Se simboliza con la C y contiene los números de la forma $a + bi$, donde $a, b \in R$ e **i** es la unidad imaginaria.

$$\boxed{C = \{z = a + bi / a, b \in R \wedge i^2 = -1\}}$$

- Los números reales son complejos $R \subset C$, ya que si $x \in R \Rightarrow x = x + 0i$.
- A los complejos de la forma bi (aquellos que su parte real es nula), se los llama imaginarios puros.

3.4 Definiciones

- **Igualdad de Números Complejos**: $z_1 = z_2 \iff (a_1 = a_2 \wedge b_1 = b_2)$.
- **Opuesto de un Número Complejo**: $-z = (-a) + (-b)i$.
- **Suma y Resta**: $z_1 + z_2 = (a_1 + a_2) + (b_1 + b_2)i$. De manera analoga, $z_1 - z_2 = (a_1 - a_2) + (b_1 - b_2)i$
- **Multiplicación**: $z_1.z_2 = (a_1.a_2 - b_1.b_2) + (a_2.b_1 + a_1.b_2)i$.
- **División**: $\dfrac{a+bi}{c+di} = \dfrac{ac+bd}{c^2+d^2} + \dfrac{bc-ad}{c^2+d^2}i$

3.5 Conjugado de un complejo

El conjugado de un número complejo $z = a + bi$ es $\overline{z} = a - bi$.

- $z = \overline{z} \iff z \in R$
- $z + \overline{z} = 2a$
- $z - \overline{z} = 2bi$
- $\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}$
- $\overline{z_1.z_2} = \overline{z_1}.\overline{z_2}$
- $-\overline{z} = \overline{-z}$
- $z.\overline{z} = a^2 + b^2 = Re(z)^2 + Im(z)^2$

3.6 Reciproco de un Complejo NO nulo

Definimos el reciproco de $z \neq 0, z \in C$, como aquel complejo w / $z \times w = 1$ y lo denotamos $z^{-1} = \frac{1}{z}$.

- $\overline{\left(\dfrac{z_1}{z_2}\right)} = \dfrac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}}, z_2 \neq 0$
- $\overline{\left(\dfrac{1}{z}\right)} = \dfrac{1}{\overline{z}}, z \neq 0$

4 Ecuaciones e Inecuaciones

Una **ecuación** es una igualdad entre dos expresiones algebraicas: $P(x) = Q(x)$. Resolverla consta de encontrar el o los valores numéricos de la incógnita que verifican la ecuación.

4.1 Ecuaciones Lineales

Una ecuación es **lineal** cuando se puede escribir de la forma: $\boxed{a.x + b = 0, \text{ con } a \neq 0}$

4.2 Ecuaciones Cuadráticas

Una ecuación es **cuadratica** cuando se puede escribir de la forma: $\boxed{a.x^2 + b.x + c = 0, \text{ con } a \neq 0}$

$$\boxed{x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}}$$

El numero $\triangle = b^2 - 4ac$ se llama ***discriminante*** y decide la naturaleza de las soluciones.

- Si $\triangle > 0$ entonces las dos soluciones son reales y distintas.
- Si $\triangle = 0$ entonces tiene una solución doble.
- Si $\triangle < 0$ entonces las dos soluciones son numeros complejos conjugados.

$$\boxed{\begin{aligned} x_1 + x_2 &= -\frac{b}{a} \\ x_1.x_2 &= \frac{c}{a} \end{aligned}}$$

4.3 Ecuaciones Bicuadrática

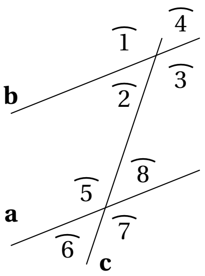
Una ecuación es **bicuadratica** cuando se puede escribir de la forma: $\boxed{a.x^4 + b.x^2 + c = 0, \text{ con } a \neq 0}$
Para resolverlas, primero se sustituye $y = x^2$ y despues se sigue normal.

4.4 Inecuaciones

Una **inecuación** es una desigualdad entre dos expresiones algebraicas: $P(x) \leq Q(x)$. Resolverla consta de encontrar el o los valores numéricos de la incógnita que verifican la ecuación.

5 Geometría

5.1 Ángulos Determinados por Dos Rectas y Una Transversal



- $\widehat{2}$ y $\widehat{8}$ son alternos internos
- $\widehat{4}$ y $\widehat{6}$ son alternos externos
- $\widehat{4}$ y $\widehat{8}$ son correspondientes
- $\widehat{3}$ y $\widehat{8}$ son conjugados internos
- $\widehat{4}$ y $\widehat{7}$ son conjugados externos
- $\widehat{1}$ y $\widehat{3}$ son opuestos por el vértice

- Los ángulos correspondientes son congruentes $\iff$ las rectas a y b son paralelas.
- Los ángulos opuestos por el vértice son congruentes.
- Los ángulos alternos internos (externos) son congruentes $\iff$ las rectas a y b son paralelas.
- Los ángulos conjugados internos (externos) son suplementarios $\iff$ las rectas a y b son paralelas.

5.2 Triángulos

- Los triángulos se pueden clasificar...

- **según sus lados:**
  - Equilátero
  - Isósceles
  - Escaleno
- **según sus ángulos:**
  - Acutángulo
  - Rectángulo
  - Obtusángulo

- Los elementos de un triángulo son:

- **Mediana**: es el segmento que une el punto medio de un lado con el vértice opuesto al mismo.
- **Mediatriz**: es una recta perpendicular a un lado que pasa por su punto medio.
- **Altura**: es el segmento perpendicular a un lado que pasa por su vértice opuesto.
- **Bisectriz**: es la bisectriz de un ángulo.

- Y algunos puntos notables de un triángulo son:

- **Baricentro**: Las medianas se intersecan en un punto llamado baricentro, tal que su distancia a cada vértice es el doble a la distancia al punto medio del lado opuesto.
- **Circuncentro**: Las mediatrices se intersecan en un punto llamado circuncentro, que es el centro de la circunferencia circunscripta al triángulo.
- **Ortocentro**: Las rectas que contienen a las alturas se intersecan en un punto denominado ortocentro.
- **Incentro**: Las bisectrices se intersecan en un punto denominado incentro, que es el centro de una circunferencia inscripta en el triángulo.

5.3 Algunas Propiedades Importantes

- En un $\triangle$ cada lado es menor que la suma de los otros dos, y mayor que su diferencia.
- La suma de los ángulos interiores de un $\triangle$ es igual a un llano (180º).
- El ángulo exterior a un $\triangle$ es igual a la suma de los dos interiores no adyacentes a él.
- En un $\triangle$, a lados congruentes se oponen ángulos congruentes y viceversa.
- En un $\triangle$, a mayor lado se opone mayor ángulo y viceversa.

5.4 Congruencia de Triángulos

Dos triángulos son ***congruentes*** si tienen su lados y su ángulos respectivamente congruentes.
Dos triángulos son congruentes $\iff$

- Sus **tres lados** son respectivamente congruentes.
- **Dos de sus lados y el ángulo comprendido** entre ellos son respectivamente congruentes.
- **Un lado y los ángulos con vértice en los extremos de dicho lado** son respectivamente congruentes.
- **Dos de sus lados y el ángulo opuesto al mayor de los lados** son respectivamente congruentes.

5.5 Semejanza de Triángulos

Dos $\triangle$ son ***semejantes*** si tienen sus ángulos congruentes y sus lados homólogos proporcionales.
Dos triángulos son semejantes $\iff$

- Sus **tres lados** son proporcionales.
- **Dos de sus lados** son proporcionales **y los ángulos comprendidos** entre ellos son congruentes.
- **Tiene un par de ángulos** respectivamente congruentes.

5.6 Polígonos (de más de tres lados)

Propiedades de polígonos convexos:
La suma de los ángulos interiores de un polígono de n lados se representa como:

$$\boxed{S_n = (n-2).180º}$$

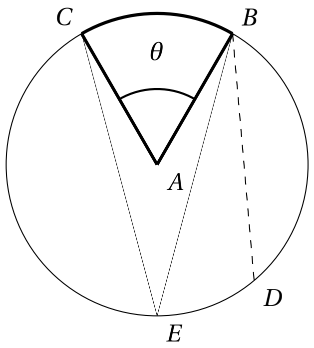
Esto es porque la suma de los ángulos exteriores de un polígono de n lados es igual a 360º.

5.7 Circunferencias

Se define a una circunferencia como el lugar geométrico de los puntos del plano que equidistan de uno fijo, llamado centro. Las posiciones relativas de una recta y una circunferencia, y entre dos circunferencias, son:

- Una recta es **exterior** a una circunferencia si no tienen puntos en común.
- Una recta es **tangente** a una circunferencia si tienen **solo** un punto en común.
- Una recta es **secante** a una circunferencia si se intersecan en dos puntos.
- Dos circunferencias son **secantes** si tienen dos puntos en común.
- Dos circunferencias son **tangentes** si tienen solo un punto en común.
- Dos circunferencias son **conceéntricas** si tienen el mismo centro.

5.8 Elementos de una Circunferencia



- **BD Cuerda**, segmento cuyos extremos están en la circunferencia.
- **CD Diámetro**, mayor de las cuerdas y contiene al centro de la circunferencia.
- **AC Radio**, segmento cuyos extremos son el centro de la circunferencia y un punto de la misma.
- $\overparen{CB}$ **arco**, subconjunto de la circunferencia.
- $C\hat{A}B$ **ángulo central** que se relaciona con el arco $\overparen{CB}$ es un ángulo cuyo vértice es el centro de la circunferencia y sus lados pasan por los extremos del arco al cual se lo relaciona.
- $C\hat{E}B$ **ángulo inscripto** en la circunferencia que abarca el arco $\overparen{CB}$, es un ángulo cuyo vértice está en la circunferencia y sus lados pasan por los extremos del arco al cual se lo relaciona.

Propiedades:

- $\boxed{C\hat{E}B = \frac{1}{2}C\hat{A}B}$ Un ángulo inscripto es congruente con la mitad del central que abarca el mismo arco.
- $\boxed{C\hat{E}B = C\hat{D}B}$ Los ángulos inscriptos en un mismo arco son congruentes.

5.9 Perímetros

- El **perímetro** de un polígono de n lados es la suma de las longitudes de cada uno de los n lados
- La **longitud** de una circunferencia de radio R es $2\pi R$.

5.10 Áreas

- Un triangulo de base b y altura h es igual a: $\frac{b \times h}{2}$
- Un paralelogramo de base b y altura h es igual a: $b \times h$.
- Un trapecio de base mayor B y de base menor b y altura h es: $\frac{(B+b) \times h}{2}$.
- Un rombo cuyas diagonales miden D y d es: $\frac{D \times d}{2}$.
- Un polígono regular de n lados que miden l y apotema ap es: $\frac{n \times l \times ap}{2}$
- Una circunferencia de radio R es: πR^2.

5.11 Cuerpos

Los poliedros son cuerpos cuyas caras son polígonos.
Teorema de Euler: Establece que en un poliedro convexo el número de caras, más los vértices menos las aristas es siempre igual a 2: $f + v - e = 2$
Algunos poliedros particulares:

- **Prisma**: Es un poliedro que tiene dos caras que son poligonos congruentes, contenidas en planos paralelos. Los prismas rectos son aquellos cuyas caras laterales son rectangulos. La altura de un prisma es la distancia entre las bases. Un **paralelepipedo** es un prisma de seis caras, cuyas bases son paralelogramos, iguales y paralelos dos a dos. Un paralelepipedo en el que todas sus bases son rectangulos y por tanto todas sus caras son perpendiculares entre si, es un **paralelepipedo recto**.

- **Piramide**: es unn poliedro que tiene una cara (llamada base) que es un poligono cualquiera y las otras caras concurren en un punto (llamado vertice), en efecto, son triangulos. Hay tantas caras laterales como lados tenga la base. Las **Piramides rectas** son aquellas cuyas caras laterales son triangulos isosceles y el pie de la altura esta en el centro de la base.

Poliedros regulares Son poliedros regulares aquellos cuyas caras son poligonos regulares congruentes, y a cada vértice concurren el mismo numero de aristas. Solo hay 5 poliedros regulares:

Poliedro Regular	Nº de Caras	Forma caras
Tetraedro	4	Triangulo equilatero
Cubo	6	Cuadrado
Octaedro	8	Triangulo equilatero
Dodecaedro	12	Pentagono regular
Icosaedro	20	Triangulo equilatero

5.12 Cuerpos Redondos

Son cuerpos redondos la esfera, el cilindro (oblicuo, recto) y el cono (oblicuo, -).

5.13 Volumenes de cuerpos

- Prismas y cilindros: $area\ de\ la\ base \times altura$
- Piramides y conos: $\dfrac{area\ de\ la\ base \times altura}{3}$
- Esfera: $\frac{4}{3} \times \pi \times r^3$

5.14 Áreas de Cuerpos

Si los cuerpos son poliedros, hallar el area de los mismos es sumar las areas de cada una de sus caras. En el caso de prismas y piramides el area total se divide en area lateral y area de las bases.

El area de una esfera de radio R se obtiene mediante: $4 \times \pi \times R^2$.

El area de un cilindro recto de base de radio R y altura h con sus dos bases se obtiene mediante:

$$2\ area_{base} + area_{lateral} = 2\ \times \pi \times R^2 + 2 \times \pi \times R \times h$$

6 Trigonometría

6.1 Triangulos rectángulos: Razones Trigonométricas de ángulos agudos

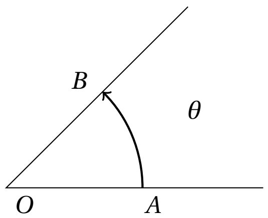
$$sen(\hat{A}) = \frac{cateto\ opuesto\ a\ \hat{A}}{hipotenusa} \qquad cos(\hat{A}) = \frac{cateto\ adyacente\ a\ \hat{A}}{hipotenusa} \qquad tg(\hat{A}) = \frac{cateto\ opuesto\ a\ \hat{A}}{cateto\ adyacente\ a\ \hat{A}}$$

6.2 Resolución de triángulos cualesquiera

Teorema del seno: $\dfrac{a}{sen(\hat{A})} = \dfrac{b}{sen(\hat{B})} = \dfrac{c}{sen(\hat{C})}$

Teorema del coseno $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc.cos(\hat{A})$

6.3 Funciones Trigonométricas



Consideremos la semirrecta $\overrightarrow{OA}$ girando alrededor de O hasta llegar a la posicion $\overrightarrow{OB}$. Decimos que esta rotacion ha generado el angulo $A\hat{O}B$, de vertice O y lado inicial $\overrightarrow{OA}$ y lado final$\overrightarrow{OB}$.

El ángulo es positivo si ha sido generado en sentido contrario a las agujas del reloj.

Si el arco $\widehat{AB}$ generado por la rotacion del punto A es una circunferencia, diremos que el angulo generado es de una vuelta.

Dos angulos α y β son **congruentes** y se simboliza $\alpha \equiv \beta$ si tienen el mismo lado inicial y final

Observaciones:

- El ángulo nulo y pleno son congruentes.
- Para que ocurra la coincidencia de lados iniciales y finales, los ángulos congruentes deben diferir en una cantidad entera de vueltas. (Entera, no natural, porque puede ser negativa).

6.4 Sistemas de Medición de Ángulos

6.4.1 Sistema Sexagesimal

La unidad es el grado. Un ángulo de un grado equivale a $\frac{1}{360}$ del angulo de una vuelta.

6.4.2 Sistema Radial

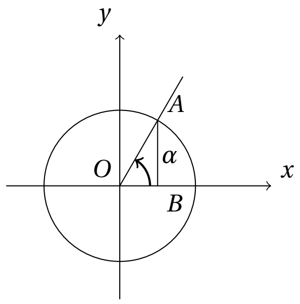
La unidad es el radian y se define como la medida de un angulo central de una circunferencia.

6.4.3 Relaciones

Si llamamos x a la medida en radianes de un angulo que subtiende un arco $\widehat{AB}$ y llamamos L a la longitud del mismo, tenemos que: $L = x.R$, es decir, $x = \dfrac{L}{R}$. Consecuentemente, si llamamos α a un angulo de una vuelta, la longitud del arco que subtiende coincide con la longitud de la circunferencia de radio R, por lo que: $\alpha = \dfrac{2\pi R}{R} = 2\pi$. De modo que $\boxed{2\pi rad \leftrightarrow 360°}$

6.5 Funciones trigonométricas

Las deficiones de las razones trigonometricas las podemos hacer extensivas a angulos no agudos y orientados por medio de la llamada "Circunferencia Trigonometrica" (Radio 1 y centro en el origen de coordenadas).



Si tomamos un angulo α, cuyo lado final interseca a la circunferencia trigonometrica en un punto A con coordenadas positivas (a,b), el punto B de coordenadas (a;0), tendremos el triangulo $\overset{\triangle}{AOB}$ que es rectánguo en B. Por lo que tendremos que se cumplen las siguientes razones trigonométricas:

$$sen(\alpha) = \frac{AB}{OA} = \frac{b}{1} = b \qquad cos(\alpha) = \frac{OB}{OA} = \frac{a}{1} = a \qquad tg(\alpha) = \frac{AB}{OB} = \frac{b}{a}$$

Generalizando a cualquier angulo α, diremos que $a = cos(\alpha)\ y\ b = sen(\alpha)$

α	I_c	II_c	III_c	IV_c
Coordenadas	$x > 0 \wedge y > 0$	$x < 0 \wedge y > 0$	$x < 0 \wedge < 0$	$x > 0 \wedge y < 0$
$sen\ \alpha$	+	+	-	-
$cos\ \alpha$	+	-	-	+

El valor del seno y el coseno es independiente de la circunferencia que se tome.

6.5.1 Propiedades del seno y el coseno

- **Acotación del seno y el coseno**: $-1 \leq sen(\alpha) \leq 1 \wedge -1 \leq cos(\alpha) \leq 1$
- **Periodicidad del seno y el coseno**: $sen(\alpha + 2\pi) = sen(\alpha) \wedge cos(\alpha + 2\pi) = cos(\alpha)$
- **Paridad del coseno e imparidad del seno**: $cos(-\alpha) = cos(\alpha) \wedge sen(-\alpha) = -sen(\alpha)$
- **Relacion Pitagorica**: $sen^2(\alpha) + cos^2(\alpha) = 1$
- **Relacion entre el seno y coseno de complementarios**: $sen\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = cos(\alpha) \wedge cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = sen(\alpha)$

6.6 Funciones Reciprocas

- $cotangente\ de\ x = ctg\ x = \frac{cos\ x}{sen\ x}$
- $secante\ de\ x = sec\ x = \frac{1}{cos\ x}$
- $cosecante\ de\ x = cos\ x = \frac{1}{sen\ x}$

6.7 Razones Trigonométricas de suma o diferencia de ángulos

- $cos\left(\alpha + \beta\right) = cos(\alpha).cos(\beta) - sen(\alpha).sen(\beta)$
- $cos\left(\alpha - \beta\right) = cos(\alpha).cos(\beta) + sen(\alpha).sen(\beta)$
- $sen\left(\alpha + \beta\right) = sen(\alpha).cos(\beta) + cos(\alpha).sen(\beta)$
- $sen\left(\alpha - \beta\right) = sen(\alpha).cos(\beta) - cos(\alpha).sen(\beta)$
- $cos(2\alpha) = cos^2(\alpha) - sen^2(\alpha)$
- $sen(2\alpha) = 2sen(\alpha).cos(\alpha)$

7 Sistemas de Ecuaciones

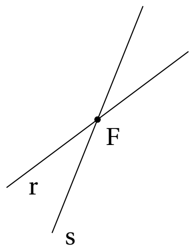
7.1 Sistemas de Ecuaciones Lineales

Un sistema de ecuaciones es lineal cuando las ecuaciones que lo conforman son lineales

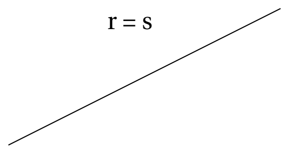
$$(S) = \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + ... + a_{1n}x_n = b1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + ... + a_{2n}x_n = b2 \\ ... \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + a_{m3}x_3 + ... + a_{mn}x_n = bm \end{cases}$$

(S) es un sistema de m ecuaciones lineales, con n incognitas $x1; x2; x3; ...; xn$, donde los coeficientes $a_{i,j} \in R \forall i = 1; 2; ...; m$ y $j = 1; 2; ...; n$. Se dice que (S) es un sitema $m \times n$

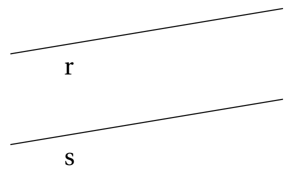
7.1.1 Posiciones Relativas entre dos rectas en el plano



r y s son secantes
$r \cap s = F$



r y s son paralelas coincidentes
$r \cap s = r = s$



r y s son paralelas no coincidentes
$r \cap s = r = \emptyset$

A partir de esto podemos clasificar cada uno de los sistemas según la cantidad de soluciones:

- Cuando un sistema tiene solución diremos que es **COMPATIBLE**.
  - Cuando la solución es unica, será **DETERMINADO**.
  - Cuando las soluciones son infinitas, será **INDETERMINADO**.
- Cuando el sistema no tenga solución diremos que es **INCOMPATIBLE**.

7.2 Para demostrar analiticamente las soluciones

7.2.1 Método por Sustitución

Consiste en despejar una de las incognitas en función de la otra en una ecuacion y usar esa igualdad en la otra ecuación, sustituyendo la incógnita.

7.2.2 Método por Igualación

Consiste en despejar la misma incógnita en funcion de la otra en ambas ecuaciones, y finalmente, por propiedad transitiva, igualar.

7.3 Definiciones

- Cuando los términos independientes son todos nulos, decimos que el sistema es **homogéneo**. Es siempre compatible por tener al menos como solución la trivial (0;0;...;0).
- Dos sistemas son **equivalentes** cuando tienen el mismo conjunto solución.
- Un sistema es **escalonado** si cada eqn empieza con al menos un coeficiente nulo mas que la anterior.

7.4 ¿Cómo sabemos que sustituimos un sistema por otro equivalente?

- Intercambiar ecuaciones
- Multiplicar las ecuaciones del sistema por un número real no nulo
- Sumar ecuaciones

7.4.1 Método de Eliminación Gaussiana

Se escalona y se resuelve el sistema usando operaciones elementales:

1. $(E_1) \times m - (E_2) \mapsto (E_2)$
2. $(E_1) \times n - (E_3) \mapsto (E_3)$
3. $(E_2) \times o - (E_3) \times p \mapsto (E_3)$

7.4.2 Algoritmo de Gauss

x	y	z	t.i.	
1	**2**	-1	-5	E_1
2	**-1**	2	8	E_2
3	3	4	5	E_3
	-5	4	18	E_2'
	-3	7	20	E_3'
		-23	-46	E_3''

Para calcular los números se resuelven los determinantes 2x2 y se anota el resultado debajo, cancelando un término y escalonando el sistema:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = 1 \times (-1) - 2 \times 2 = \mathbf{-5}$$

- Si al final queda 0 | 0, implica que es **compatible determinado**.
- Si al final queda $0 \mid X \ \forall X \neq 0$, implica que es **incompatible**.

7.5 Sistemas de Ecuaciones Mixtos

Son sistemas no lineales. No hay clasificacion de sistemas mixtos.

8 Polinomios

Monomios: e.g. x^2y^3, $(2+1)xy, ...$ Lo principal es que entre los elementos solo hay multiplicaciones.
La suma de varios monomios sera un polinomio. Un polinomio en una variable es una expresion de la forma:

$$\boxed{p(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_2 x^2 + a_1 x + a_0}$$

Donde n es un número entero no negativo, x es la variable y los $n+1$ números a son los coeficientes.

Cuando los coeficientes son numeros **complejos**, es "a coeficientes complejos" y simbolizaremos al conjunto $\mathbf{C}[x]$. Si son numeros **reales**, es "a coeficientes reales" y se simboliza $\mathbf{R}[x]$. Al numero a_n se lo llama coeficiente principal y al termino a_0 término independiente.

8.0.1 Simbolo Sumatoria

Reescribiendo, el polinomio de una sola variable es: $p(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k.x^k$

El **grado** de un polinomio es el mayor exponente de los términos de coeficientes no nulos. Si el polinomio se reduce a un número decimos que es un **polinomio constante**, si dicho numero NO es cero, decimos que el grado es cero. El polinomio constante igual a cero se llama **polinomio nulo** y carece de grado. Un polinomio de grado uno se llama lineal, de grado dos se llama cuadratico.

8.1 Igualdad de Polinomios

Dos polinomios a coeficientes complejos son iguales si tienen igual grado y los coeficientes de los términos homólogos son iguales:

$$\text{hfill } p(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k ; q(x) = \sum_{k=0}^{m} b_k x^k ; \qquad p(x) = q(x) \iff n = m \wedge a_k = b_k ; k = 0, 1, ..., n$$

8.2 Operaciones con Polinomios

8.2.1 Suma y Multiplicacion

Dados dos polinomios $p(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_0$ y $q(x) = b_m x^m + b_{m-1}x^{m-1} + ... + b_0$:

- $$\boxed{p(x) + q(x) = (a_n + b_n)x^n + (a_{n-1} + bn - 1)x^{n-1} + ... + (a_0 + b_0)}$$
- El polinomio que se indica $p(x).q(x)$ es el polinomio producto cuyos terminos son de la forma $a_i b_j x^{i+j}$ donde $i \leftarrow [0..n]$ y $j \leftarrow [0..m]$:
  $$\boxed{p(x).q(x) = a_n b_m x^{n+m} + ... + (a_1 b_0 + a_0 b_1)x + a_0 b_0}$$

8.2.2 Division de Polinomios

- Division Clasica: $p(x) = c(x).q(x) + r(x)$, donde $gr[r(x)] < gr[q(x)]\ o\ r(x) \equiv 0$.
- Ruffini: Cuando el divisor tenga la forma $x - \alpha$, donde $\alpha \in C$

El resto de la division de un polinomio $p(x)$ por otro de la forma $x - \alpha$; con $\alpha \in C$ es igual a $p(\alpha)$

Dem) Al dividir p por otro de la forma $x - \alpha$, se obtiene un cociente $c(x)$ y un resto r:
$p(x) = c(x).(x - \alpha) + r$ y reescribiendo, $p(\alpha) = c(\alpha).(\alpha - \alpha) + r = r$.

8.2.3 Raices de un Polinomio

Un numero complejo α es raiz de un polinomio $p(x) \iff p(\alpha) = 0$

Un numero complejo α es raiz de un polinomio $p(x) \iff p(x)$ es divisible por $x - \alpha$

8.2.4 Teorema Fundamental del Algebra

α es **raiz de multiplicidad k** de $p(x)$, si el mismo es divisible por $(x-\alpha)^k$ y no por $(x-\alpha)^{k+1}$

Esto permite probar que todo polinomio de grado $n > 0$, tiene exactamente n raices (no necesariamente distintas) y ademas se puede descomponer en producto de n factores.

8.2.5 Orden de multiplicidad de una raiz

Un polinomio p(x) / $gr[p(x)] > 0$, admite al menos una raiz en C

8.2.6 Teorema de la descomposicion factorial

Todo $p(x) \in C[x]$ de grado positivo admite una unica descomposicion en factores de la forma:

$$p(x) = a_n.(x-\alpha_1)^{k_1}.(x-\alpha_2)^{k_2}. \dots .(x-\alpha_j)^{k_j}$$

Donde $\alpha_1; \alpha_2; ...; \alpha_j$ son j raices distintas del polinomio y $k_1; ...; k_j$ sus multiplicidades, por lo que $k_1 + ... + k_j = n$.

8.3 Polinomios a Coeficientes Reales

Cuando un $p(x) \in R[x]$ admite una raiz compleja, entonces tambien admite como raiz a su conjugada.

$$p(x) = a_n x^n + an-1x^{n-1} + ... + a_0 \in R[x] \wedge \alpha \in C\ es\ raiz\ de\ p,\ entonces\ p(\overline{\alpha}) = 0$$

Dem) $p(\alpha) = \sum_{k=0}^{n} \alpha_k \alpha^k = 0 \Rightarrow p(\overline{\alpha}) = \sum_{k=0}^{n} \alpha_k \alpha^{-k} = \overline{\sum_{k=0}^{n} \alpha_k \alpha^k} = \overline{p(\alpha)} = \overline{0} = 0$

8.4 Polinomios a Coeficientes Enteros

8.4.1 Teorema de Gauss

$Si P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + ... + a_0 \in Z[x]\ admite\ la\ raiz\ \frac{p}{q}\ con\ p\ y\ q\ enteros\ coprimos\ y\ q \neq 0\ entonces:$

- $a_0\ es\ multiplo\ de\ p \wedge a_n\ es\ multiplo\ de\ q$
- Si el coeficiente principal es 1 y P tiene raices racionales, estas seran enteras.
- Si p es un divisor del t.i. y q lo es del coeficiente principal $\frac{p}{q}$ no necesariamente sera raiz de P.
- Si el termino independiente es 0, entonces una raiz del polinomio es 0.

8.5 Funciones Racionales

Funcion Racional $= R(x) = \frac{p(x)}{q(x)},\ donde\ p(x)\ y\ q(x)\ son\ polinomios.$

El dominio de R(x) son todos los valores reales tales que $q(x) \neq 0$. Y el **Polinomio Minimo comun de multiplo de varios polinomios** es aquel p(x) de menor grado posible que es divisible por todos los denominadores.

8.6 Operaciones con funciones racionales

$$\frac{a}{b} \times \frac{c}{d} = \frac{a.c}{b.d} \qquad \frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = \frac{a.d}{b.c}$$

Usamos la regla para multiplicar, factorizamos numerador y denominador, y simplificamos.

$$\frac{a}{c} + \frac{b}{c} = \frac{a+b}{c} \qquad \frac{a}{c} - \frac{b}{c} = \frac{a-b}{c}$$

Cuando el denominador no sea comun, se debe obtener. El mas sencillo de obtener es el polinomio minimo multiplo de los polinomios denominadores de cada uno de los terminos.