(1)

$$\int \frac{1}{(x^2+1)^2} dx$$

$$\int \frac{1}{(x^2+1)^2} dx = \int \frac{1+x^2-x^2}{(x^2+1)^2} dx = \int \frac{1}{x^2+1} dx - \int \frac{x^2}{(x^2+1)^2} dx$$

Para el cálculo de la segunda integral aplicamos integración por partes. Llamamos $f(x) = x$ y $g'(x) = \frac{x}{(x^2+1)^2}$, resultando $g(x) = -\frac{1}{2}\frac{1}{x^2+1}$. Luego,

$$\begin{aligned}\int \frac{x^2}{(x^2+1)^2} dx &= -\frac{1}{2}\frac{x}{x^2+1} + \frac{1}{2}\int \frac{1}{x^2+1} dx \\ &= \frac{-1}{2}\frac{x}{x^2+1} + \frac{1}{2} arctg(x)\end{aligned}$$

Regresando a la integral original,

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{(x^2+1)^2} dx &= \int \frac{1}{x^2+1} dx - \int \frac{x^2}{(x^2+1)^2} dx \\ &= arctg(x) - \left(-\frac{1}{2}\frac{x}{x^2+1} + \frac{1}{2} arctg(x)\right) + C \\ &= \frac{1}{2} arctg(x) + \frac{1}{2}\frac{x}{x^2+1} + C\end{aligned}$$

Usando el mismo razonamiento calcular como ejercicio:

$$\int \frac{1}{(x^2+1)^3} dx$$

a partir de la integral calculada previamente y, en general, se puede calcular inductivamente:

$$\int \frac{1}{(x^2+1)^n} dx$$

para $n \geq 2$.

(2)

$$\int \frac{4x+9}{(x^2+3x+4)^2} dx$$

El polinomio x^2+3x+4 no tiene raíces reales por lo tanto la función racional es una fracción simple.

La derivada de $f(x) = x^2+3x+4$ es $f'(x) = 2x+3$, entonces escribimos el numerador en la forma:

$$4x+9 = 2(2x)+9 = 2(2x+3-3)+9 = 2(2x+3)+3$$

Entonces

$$\int \frac{4x+9}{\left(x^2+3x+4\right)^2}dx = \int \frac{2(2x+3)+3}{\left(x^2+3x+4\right)^2}dx$$
$$= 2\int \frac{2x+3}{\left(x^2+3x+4\right)^2}dx + 3\int \frac{1}{\left(x^2+3x+4\right)^2}dx$$

Para resolver la primera integral hacemos la sustición $u = x^2 + 3x + 1$ ya que nos aseguramos que en el numerador se encuentre la derivada, $du = 2x + 3\,dx$,

$$\int \frac{2x+3}{\left(x^2+3x+4\right)^2}dx = \int \frac{1}{u^2}du = -\frac{1}{u} + C = -\frac{1}{x^2+3x+4} + C$$

La segunda integral la pondremos en la forma del item (1) trabajando algebraicamente .

$$\int \frac{1}{\left(x^2+3x+4\right)^2}dx = \int \frac{1}{\left(x^2+2\frac{3}{2}x+\frac{9}{4}-\frac{9}{4}+4\right)^2}dx$$
$$= \int \frac{1}{\left((x+\frac{3}{2})^2+\frac{7}{4}\right)^2}dx$$
$$= \int \frac{1}{\left((x+\frac{3}{2})^2+\frac{7}{4}\right)^2}dx$$
$$= \int \frac{1}{(\frac{7}{4})^2\left(\frac{4}{7}(x+\frac{3}{2})^2+1\right)^2}dx$$
$$= \frac{16}{49}\int \frac{1}{\left(\left(\sqrt{\frac{4}{7}}(x+\frac{3}{2})\right)^2+1\right)^2}dx$$

Haciendo la sustitución $u = \sqrt{\frac{4}{7}}(x+\frac{3}{2})$, $du = \sqrt{\frac{4}{7}}dx$

$$\int \frac{1}{\left(x^2+3x+4\right)^2}dx = \frac{16}{49}\sqrt{\frac{7}{4}}\int \frac{1}{\left(u^2+1\right)^2}du$$