Introducción a la Matemática

Iker M. Canut

March 24, 2020

Contents

1 Unidad 1: Numeros Reales

Propiedad Cancelativa de la Suma

Sea $d = a + b$, y por ende, $d = b + c$, por el Axioma 5, existe y que es opuesto a a, entonces:

$$y + d = y + (a + b) \overset{A2}{=} (y + a) + b = 0 + b \overset{A4}{=} b$$

$$y + d = y + (a + c) \overset{A2}{=} (y + a) + c = 0 + c \overset{A4}{=} c$$

$$b = c$$

$\square$

Unicidad del Elemento Neutro de la suma

Supongamos que 0' es un numero que tambien funciona como neutro de la suma, entonces

$$a + 0 = a \wedge a + 0' = a$$

$$a + 0 = a + 0'$$

Y por propiedad cancelativa de la suma

$$0 = 0'$$

$\square$

Unicidad del Elemento Opuesto

La existencia de un numero b esta dada por el axioma 5, hay que demostrar que es unico. Suponiendo que existe b' / $a + b' = b' + a = 0$, tenemos que

$$a + b = 0 \wedge a + b' = 0$$

$$a + b = a + b'$$

Y por propiedad cancelativa de la suma

$$b = b'$$

$\square$

$-(-a) = a$

Sea b el opuesto de a, se puede concluir que $a + b = 0 \wedge b = (-a) \wedge a = (-b)$ $\qquad (1) \wedge (2) \wedge (3)$

$$-(-a) \overset{(2)}{=} -b \overset{(3)}{=} a$$

$\square$

$-0 = 0$

Por el axioma 5, todo numero real tiene su opuesto. Llamemos 0' al opuesto de 0, siendo $0 + 0' = 0$ y Del axioma 3 se concluye que $0 + 0 = 0$

$$si\ 0 + 0' = 0 \wedge 0 + 0 = 0 \Rightarrow 0' = 0$$

$\square$

$0.a = 0$

$$a.0 \overset{A4}{=} a.0+0 \overset{A5}{=} a.0+(a+(-a)) \overset{A2}{=} (a.0+a)+(-a) \overset{A4}{=} (a.0+a.1)+(-a) \overset{A3}{=}$$
$$a(0+1)+(-a) \overset{A4}{=} a.1+(-a) \overset{A4}{=} a+(-a) \overset{A5}{=} 0$$

□

$a(-b) = -(ab) = (-a)b$

$$a(-b) \overset{A4}{=} a(-b)+0 \overset{A5}{=} a(-b)+(ab+-(ab)) \overset{A2}{=} (a(-b)+ab)+-(ab) \overset{A3}{=}$$
$$a((-b)+b)+-(ab) \overset{A5}{=} a.0+-(ab) \overset{T2.3}{=} 0+-(ab) \overset{A4}{=} -(ab)$$

Y análogamente

$$(-a)b \overset{A4}{=} (-a)b+0 \overset{A5}{=} (-a)b+(ab+-(ab)) \overset{A2}{=} ((-a)b+ab)+-(ab) \overset{A3}{=}$$
$$b((-a)+a)+-(ab) \overset{A5}{=} b.0+-(ab) \overset{T2.3}{=} 0+-(ab) \overset{A4}{=} -(ab)$$

Reescribiendo

$$a(-b) = -(ab) = (-a)b$$

□

$(-a)(-b) = ab$

Analizamos la expresión $(-a)(-b)$, llamemos $c = -b$. Por el teorema anterior obtenemos:

$$(-a)c = -(ac)$$

Pero reemplzando por nuestra definición de $c = -b$, queda:

$$-(ac) = -(a(-b))$$

Que por la aplicación del mismo teorema nos da:

$$-(a(-b)) = -(-(ab))$$

Y finalmente por el teorema $-(-a) = a$:

$$-(-(ab)) = ab$$

Reescribiendo:

$$(-a)(-b) = ab$$

□

$a(b-c) = ab - ac$

Por la definicion de diferencia, se puede reescribir como:

$$a(b+(-c)) \overset{A3}{=} ab+a(-c) \overset{T2.4}{=} ab+-(ac)$$

Que por la definicion de diferencia, se puede reescribir como: $ab - ac$ □

Propiedad cancelativa del producto

Analicemos $ab = ac$, llamemos $d = ab = ba$ y además $d = ac = ca$:

$$da^{-1} \overset{Def}{=} (ba)a^{-1} \overset{Asoc}{=} b(aa^{-1}) \overset{Asoc}{=} b.1 \overset{Neutro}{=} b$$

Y análogamente:

$$da^{-1} \overset{Def}{=} (ca)a^{-1} \overset{Asoc}{=} c(aa^{-1}) \overset{Recip}{=} c.1 \overset{Neutro}{=} c$$

Reescribiendo:

$$b = c$$

□

Unidad del elemento neutro del producto

Sabemos que existe 1, tal que $\forall a, a.1 = a$, supongamos que existe $1'$ que cumple lo mismo, entonces:

$$a.1 = a \wedge a.1' = a$$

Entonces:

$$a.1 = a.1'$$

Y por el teorema anterior:

$$1 = 1'$$

□

Unidad del elemento recíproco

Sabemos que $\forall a \exists b \in \mathbb{R} / ab = 1$, supongamos que existe b' que cumple lo mismo, entonces:

$$a.b = 1 \wedge a.b' = 1$$

Entonces:

$$a.b = a.b'$$

Y por el teorema anterior:

$$b = b'$$

□

$\nexists 0^{-1}$

Asumimos $\exists 0^{-1} \in \mathbb{R}$ tal que

$$0.0^{-1} = 1$$

Pero por $a.0 = 0.a = 0, \forall a \in \mathbb{R}$

$$0.0^{-1} = 0$$

Esto es una contradicción a lo supuesto.

$$\therefore \nexists 0^{-1}$$

□

$1^{-1} = 1$

$1^{-1} =$ <Existencia del elemento neutro del producto>

$1.1^{-1} =$ <Existencia del elemento recíproco>

1

$\square$

$\frac{a}{1} = a; a \neq 0, \frac{1}{a} = a^{-1}$

Analizamos $\frac{a}{1}$

$\dfrac{a}{1} =$ <Definición de cociente>

$a.1^{-1} =$ <$1^{-1} = 1$>

$a.1 =$ <Elemento neutro del producto>

a A

nalizando $\frac{1}{a}$ cuando $a \neq 0$

$\dfrac{1}{a} =$ <Definición de cociente>

$1.a^{-1} =$ <Elemento neutro del producto>

a^{-1}

$\square$

$ab = 0 \Rightarrow a = 0 \vee b = 0$

Hay dos casos posibles para la expresión $ab = 0$:

$ab = 0 \Rightarrow$ <$a = b \Rightarrow ac = bc$>

$ab.b^{-1} = 0b^{-1} \Rightarrow$ <$a.0 = 0$>

$ab.b^{-1} = 0 \Rightarrow$ <Propiedad asociativa>

$a.(bb^{-1}) = 0 \Rightarrow$ <Existencia del elemento recíproco>

$a.1 = 0 \Rightarrow$ <Existencia del elemento neutro del producto>

$a = 0$

$ab = 0 \Rightarrow$ <$a = b \Rightarrow ca = cb$>

$a^{-1}.ab = b^{-1}0 \Rightarrow$ <$0.a = 0$>

$a^{-1}.ab = 0 \Rightarrow$ <Propiedad asociativa>

$(a^{-1}a).b = 0 \Rightarrow$ <Existencia del elemento recíproco>

$1.b = 0 \Rightarrow$ <Existencia del elemento neutro del producto>

$b = 0$

Como las dos afirmaciones son válidas:

$$ab = 0 \Rightarrow a = 0 \vee b = 0$$

$\square$

$b \neq 0 \wedge d \neq 0 \Rightarrow (bd)^{-1} = b^{-1}.d^{-1}$

Analizamos la expresión $1 = 1$ que, por existencia del elemento neutro del producto, resulta ser equivalente a:

$$1 = 1.1$$

Observamos 3 cosas, por existencia y unicidad del elemento recíproco:

$$bc.(bc)^{-1} = 1$$

$$b.b^{-1} = 1$$

$$c.c^{-1} = 1$$

Y reemplazando en la expresión $1 = 1.1$:

$$bc.(bc)^{-1} = (b.b^{-1}).(c.c^{-1})$$

Que por propiedad asociativa y conmutativa del producto, reescribimos como:

$$bc.(bc)^{-1} = bc.(b^{-1}.c^{-1})$$

Y finalmente, por cancelativa del producto, obtenemos:

$$(bc)^{-1} = b^{-1}.c^{-1}$$

$\square$

$b \neq 0 \wedge d \neq 0 \Rightarrow \frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad+cb}{bd}$

$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} =$ <Definición de cociente>

$ab^{-1} + cd^{-1} =$ <Existencia del elemento neutro del producto>

$1.ab^{-1} + 1.cd^{-1} =$ <Existencia del elemento recíproco>

$(dd^{-1}).(ab^{-1}) + (bb^{-1}).(cd^{-1}) =$ <Reescribiendo con propiedad conmutativa y asociativa>

$(ad).(b^{-1}d^{-1}) + (cb).(b^{-1}d^{-1}) =$ <$(ab)^{-1} = a^{-1}b^{-1}$>

$(ad).(bd)^{-1} + (cb).(bd)^{-1} =$ <Propiedad distributiva>

$(ad + cb).(bd)^{-1} =$ <Definición de cociente>

$\frac{ad+cb}{bd}$

$$\therefore \frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad+cb}{bd}$$

$\square$

$b \neq 0 \wedge d \neq 0 \Rightarrow \frac{a}{b}.\frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$

$\frac{a}{b}.\frac{c}{d} =$ <Definición de cociente>

$(ab^{-1}).(cd^{-1}) =$ <Reescribniendo con propiedad conmutativa y asociativa>

$(ac).(b^{-1}d^{-1}) =$ <$(ab)^{-1} = a^{-1}b^{-1}$>

$(ac).(bd)^{-1} =$ <Definición de cociente>

$\frac{ac}{bd}$

$$\therefore \frac{a}{b}.\frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$$

$\square$

$a \neq 0 \wedge b \neq 0 \Rightarrow (\frac{a}{b})^{-1} = \frac{a^{-1}}{b^{-1}}$

$\left(\frac{a}{b}\right)^{-1}$ <Definición de cociente>

$\left(ab^{-1}\right)^{-1}$ <$(ab)^{-1} = a^{-1}.b^{-1}$>

$a^{-1}\left(b^{-1}\right)^{-1}$ <Definición de cociente>

$\frac{a^{-1}}{b^{-1}}$

$\square$

$(-1).a = -a$

$-1.a =$ <Existencia del elemento neutro de la suma>

$-1.a + 0 =$ <Existencia del elemento opuesto>

$-1.a + (a + -a) =$ <Propiedad asociativa de la suma>

$(-1.a + a) + -a =$ <Existencia del elemento neutro de la multiplicacion>

$(-1.a + 1.a) + -a =$ <Propiedad distrubutiva>

$a.(-1 + 1) + -a =$ <Existencia del elemento opuesto>

$a.0 + -a =$ <$a.0 = 0$>

$0 + -a =$ <Existencia del elemento neutro de la suma>

$-a$

$\square$

Suponemos $\mathbb{R}^+ \subset \mathbb{R}$, tal que cumple:

- $a, b \in \mathbb{R}^+ \Rightarrow a + b, ab \in \mathbb{R}^+$
- $\forall a \neq 0 \in \mathbb{R}, a \in \mathbb{R}^+ \veebar -a \in \mathbb{R}^+$
- $0 \notin \mathbb{R}^+$

Llamamos a estos números "positivos". Definimos $<, >, \geq, \leq$ de la forma que está en el apunte.

$a > 0 \Leftrightarrow a \in \mathbb{R}^+$

Sea $a > 0, a \in \mathbb{R}$:

$a > 0$ <Definición de <>

$a - 0 \in \mathbb{R}^+$ <Definición de resta>

$a + (-0) \in \mathbb{R}^+$ <$0 = -0$>

$a + 0 \in \mathbb{R}^+$ <Elemento neutro de la suma>

$a \in \mathbb{R}^+$ <Elemento neutro de la suma>

Sea $a \in \mathbb{R}^+$:

$a \in \mathbb{R}^+$ <Elemento neutro de la suma>

$a + 0 \in \mathbb{R}^+$ <$0 = -0$>

$a + (-0) \in \mathbb{R}^+$ <Definición de resta>

$a - 0 \in \mathbb{R}^+$ <Definición de <>

$a > 0$

$$\therefore a > 0 \Leftrightarrow a \in \mathbb{R}^+$$

□

$a > 0 \Leftrightarrow -a < 0$

Sea $a > 0, a \in \mathbb{R}$:

$a > 0$ <$a > 0 \Leftrightarrow a \in \mathbb{R}^+$>

$a \in \mathbb{R}^+$ <$a = -(-a)$>

$-(-a) \in \mathbb{R}^+$ <Elemento neutro de la suma>

$0 + -(-a) \in \mathbb{R}^+$ <Definición de resta>

$0 - (-a) \in \mathbb{R}^+$ <Definición de <>

$-a < 0$ <Definición de <>

□

$a < 0 \Leftrightarrow -a > 0$

Sea $a < 0, a \in \mathbb{R}$:

$a < 0$ <Definición de <>

$0 - a \in \mathbb{R}^+$ <Definición de resta>

$0 + (-a) \in \mathbb{R}^+$ <Elemento neutro de la suma>

$-a \in \mathbb{R}^+$ <$a \in \mathbb{R}^+ \Leftrightarrow a > 0$>

$-a > 0$

□

Como llamamos a los números en $\mathbb{R}^+$ positivos, a sus opuestos los llamaremos "negativos". Además Si $a \geq 0$, es "no negativo".

Propiedad de Tricotomía

Para demostrar proposiciones mutuamente excluyentes, optaremos por probar que la ocurrencia de una implica la no ocurrencia de las otras, para todo posible caso.
Sean $a, b \in \mathbb{R}$:

- Caso 1, $a < b$ o sea $b - a \in \mathbb{R}^+$:
  Supongamos que además $a = b$, entonces
  $$b - a = 0$$
  pero por axioma
  $$0 \notin \mathbb{R}^+$$
  Contradicción.
  Supongamos que además $a > b$, entonces
  $$a - b \in \mathbb{R}^+$$
  pero
  $$b - a = -(a - b)$$
  entonces por axioma
  $$-(a - b) \notin \mathbb{R}^+$$
  Contradicción.

- Caso 2, $a = b$ o sea $b - a = 0$:
  Supongamos que además $a < b$, entonces
  $$b - a \in \mathbb{R}^+$$
  pero por axioma
  $$0 \notin \mathbb{R}^+$$
  Contradicción.
  Supongamos que además $a > b$, entonces
  $$a - b \in \mathbb{R}^+$$
  pero
  $$b - a = -(a - b)$$
  y por axioma
  $$0 = -0 \notin \mathbb{R}^+$$
  Contradicción.

- Caso 3, $a > b$ o sea $a - b \in R^+$:
  Supongamos que además $a = b$, entonces
  $$a - b = 0$$
  pero por axioma
  $$0 \notin \mathbb{R}^+$$
  Contradicción.
  Supongamos que además $a < b$, entonces
  $$b - a \in \mathbb{R}^+$$
  pero
  $$a - b = -(b - a)$$

entonces por axioma

$$-(b-a) \notin \mathbb{R}^+$$

Contradicción.

$$\therefore a<b \ \veebar \ a=b \ \veebar \ a>b$$

□

$a<b \Rightarrow a+c<b+c$

$$a<b \overset{Def<}{\Rightarrow} b-a \in \mathbb{R}^+ \overset{A4}{\Rightarrow} (b-a)+0 \in \mathbb{R}^+ \overset{A5}{\Rightarrow} (b-a)+(c+-c) \in \mathbb{R}^+ \overset{Def-}{\Rightarrow} (b+-a)+(c+-c) \in \mathbb{R}^+$$

Reescribiendo usando $A1$ y $A2$:

$$(b+c)+(-a+-c) \in \mathbb{R}^+ \overset{T?}{\Rightarrow} (b+c)+-(a+c) \in \mathbb{R}^+ \overset{Def-}{\Rightarrow} (b+c)-(a+c) \in \mathbb{R}^+ \overset{Def<}{\Rightarrow} a+c<b+c$$

□

$a<b \wedge c>0 \Rightarrow ac<bc$

Tenemos que: $c>0 \Rightarrow c \in \mathbb{R}^+$

Analizamos $a<b$:

$$a<b \overset{Def<}{\Rightarrow} b-a \in \mathbb{R}^+ \overset{A7yc>0}{\Rightarrow} (b-a)c \in \mathbb{R}^+ \overset{A?}{\Rightarrow} bc-ac \in \mathbb{R}^+ \overset{Def<}{\Rightarrow} ac<bc$$

□

$a \neq 0 \Rightarrow a^2>0$

Por la propiedad tricotómica, $a \neq 0 \Rightarrow a>0 xor a<0$. Analicemos los dos casos.

Analizemos a >0:

$$a>0 \overset{Def>}{\Rightarrow} a-0 \in \mathbb{R}^+ \overset{Def-}{\Rightarrow} a+-0 \in \mathbb{R}^+ \overset{T?}{\Rightarrow} a \in \mathbb{R}^+ \overset{A?}{\Rightarrow} a.a \in \mathbb{R}^+ \overset{Def>yDefx^2}{\Rightarrow} a^2>0$$

Analizamos a <0:

$$a<0 \overset{Def<}{\Rightarrow} 0-a \in \mathbb{R}^+ \overset{Def-}{\Rightarrow} 0+-a \in \mathbb{R}^+ \overset{A?}{\Rightarrow} -a \in \mathbb{R}^+ \overset{A?}{\Rightarrow} (-a).(-a) \in \mathbb{R}^+ \overset{T?}{\Rightarrow}$$

$$(-1.a)*(-1.a) \in \mathbb{R}^+ \overset{A?}{\Rightarrow} (-1.-1).(aa) \in \mathbb{R}^+ \overset{A?}{\Rightarrow} 1.(aa) \in \mathbb{R}^+ \overset{A?}{\Rightarrow} aa \in \mathbb{R}^+ \overset{Def>yDefx^2}{\Rightarrow} a^2>0$$

□

$1 \in \mathbb{R}^+$

Existen neutros, 0 y 1, $0 \neq 1$

Ax 8, $1 \in \mathbb{R}^+ xor -1 \in \mathbb{R}^+$

Supongo $-1 \in \mathbb{R}^+$, entonces $1 \notin \mathbb{R}^+$

Por Ax 7 $-1*-1 \in \mathbb{R}^+$

$-1*-1=1 \in \mathbb{R}^+$, pero esto es una contradicción con lo supuesto □