Unidad 5: Introducción al Cálculo Integral
Analisis Matemático I (R-112)
Licenciatura en Ciencias de la Computación

Iker M. Canut

2020

1 Primitiva de una Función

Decimos que F es una **primitiva** de f sobre el conjunto I si $F'(x) = f(x),\ \forall x \in I$. También suele llamarse Antiderivada.

- Si F es una primitiva de f y si c es una constante cualquiera, entonces $F + c$ también es una primitiva de f: $(F + c)' = F' + c' = F' + 0 = F$;
- Si F y G son dos primitivas cualesquiera de f, entonces F y G difieren en una constante: $G(X) = F(x) + c,\ \forall x \in I$
- Por lo tanto, $F(x) + c$ (donde F es una primitiva particular de f, y c una constante arbitraria) describe la **familia** de todas las primitivas de f sobre I.

Llamamos **integral indefinida** de una función f al conjunto de todas las primitivas de f:

$$\underset{\substack{\text{Simbolo}\\ \text{Integral}}}{\int} \quad \underset{\text{Integrando}}{f(x)} \quad \underset{\substack{\text{Variable de}\\ \text{Integración}}}{dx} \quad = \quad \underbrace{\underset{\text{Primitiva de } f}{F(x)} \quad + \quad c}_{\substack{\text{Familia de todas las funciones}\\ \text{que constituyen la integral indefinida}}}$$

2 Tabla de Integrales Inmediatas

$$\int 1dx = x + c \qquad \int x^{\alpha}dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + c$$

$$\int \sin x dx = -\cos + c \qquad \int \cos x dx = \sin x + c$$

$$\int \frac{1}{\cos^2 x}dx = \tan x + c \qquad \int \frac{1}{\sin^2 x}dx = \cot x + c$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx = \arcsin x + c \qquad \int \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}dx = \arccos x + c$$

$$\int \frac{1}{1+x^2}dx = \arctan x + c \qquad \int \frac{1}{x}dx = \ln|x| + c$$

$$\int e^x dx = e^x + c \qquad \int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + c$$

Proposición 1: **Linealidad**: Si F y G son primitivas de f y g, y a es una constante real, entonces:

- $a \cdot F$ es una primitiva de $a \cdot f$: $\displaystyle\int a \cdot f(x)dx = a \cdot F(x) + c$
  Como $F' = f$, luego $(a \cdot F)' = a \cdot F' = a \cdot f$, entonces $a \cdot F$ es una primitiva de $a \cdot f$.
- $F + G$ es una primitiva de $f + g$: $\displaystyle\int (f(x) + g(x))dx = F(x) + G(x) + c$
  Tenemos que $(F + G)' = F' + G' = f + g$, luego $F + G$ es una primitiva de $f + g$ ■

$$\int (a \cdot f(x) + b \cdot g(x)) = a \cdot \int f(x)dx + b \cdot \int g(x)dx$$

3 La Regla de Sustitución

$$[f(g(x))]' = f'(g(x)) \cdot g'(x) \Rightarrow \int f'(g(x)) \cdot g'(x)dx = f(g(x)) + c$$

Teorema 1: **Método de Sustitución**: Sea f continua en I, y g derivable con derivada continua en I tal que $Im(g) \subset I$, entonces:

$$\int f'(g(x)) \cdot g'(x)dx \underset{t=g(x)}{=} \int f(t)dt$$

donde $dt = g'(x)dx$.

Para resolver ejercicios, primero hacemos el cambio de variable, es decir, $t = g(x)$, y calculamos $g'(x)$. Luego multiplicamos y dividimos por $\frac{g'(x)}{g'(x)}$ (aplicando el Principio de Linealidad podemos sacar el numerador del integrando) y $dt = g'(x) \cdot dx$. Integramos facilmente la función f, y realizamos las sustituciones correspondientes para dejar el resultado sin ninguna t.

4 Integración por Partes

$$[f(x) \cdot g(x)] = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x) \Rightarrow \int (f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x))dx = f(x) \cdot g(x) + c$$

Sean f y g derivables con derivada continua en I, $\int f(x) \cdot g'(x)dx = f(x) \cdot g(x) - \int f'(x) \cdot g(x)dx$

Conviene elegir f tal que se vaya reduciendo. E.g x^2.

5 Integración de Funciones Racionales Propias

Llamamos Función Racional Propia al cociente $\frac{P(x)}{Q(x)}$ donde P y Q son polinomios y $gr(P) < gr(Q)$.

Si $gr(P) \geq gr(Q)$, sabemos que existen únicos polinomios C y R con $gr(R) < gr(Q)$ tales que $P = CQ + R$, luego $\frac{P}{Q} = C + \frac{R}{Q}$, y $\frac{R}{Q}$ será propia.

5.1 Raices Reales Simples

Entonces (suponiendo que el coeficiente principal de Q es 1), el polinomio Q factorizado es:
$Q(x) = (x - a_1) \cdot (x - a_2)...(x - a_n)$. Y será:

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{A_1}{x - a_1} + \frac{A_2}{x - a_2} + ... + \frac{A_n}{x - a_n}$$

Con A_i constantes a determinar. Una vez que se llega a la expresión, se hace denominador común, y luego se sacan todos los A_i como factor común. Por último se plantea la igualdad y se resuelve el sistema de ecuaciones.

5.2 Raices Múltiples

Entonces, suponiendo que el coeficiente principal de Q es 1, el polinomio Q factorizado es:

$$Q(x) = (x - a_1)^{r_1} \cdot (x - a_2)^{r_2} ... (x - a_n)^{r_n}$$

Y será

$$\begin{aligned} \frac{P(x)}{Q(x)} = & \frac{A_{11}}{(x-\alpha_1)} + \frac{A_{12}}{(x-\alpha_1)^2} + ... + \frac{A_{1r1}}{(x-\alpha_{r_1})^{r_1}} + \\ & + \frac{A_{21}}{(x-\alpha_2)} + \frac{A_{22}}{(x-\alpha_2)^2} + ... + \frac{A_{2r2}}{(x-\alpha_{r_2})^{r_2}} + \\ & + ... + \\ & + \frac{A_{n1}}{(x-\alpha_n)} + \frac{A_{n2}}{(x-\alpha_n)^2} + ... + \frac{A_{nrn}}{(x-\alpha_n)^{r_n}} \end{aligned}$$

Para resolver y que no parezca tan abrumador, luego de escribir todas los cocientes, se checkea que la cantidad de términos coincida con la suma de las raices contadas con su multiplicidad $(r_1 + r_2 + ... + r_n)$. Nuevamente se hace denominador común y se sacan las As como factor común. Finalmente se resuelve el sistema de ecuaciones.

6 Cálculo de Integrales Definidas

Teorema 3: **Primer Teorema Fundamental del Cálculo**: Sea f integrable en $[a, b]$ para cada $x \in [a, b]$, y sea $c \in [a, b]$, definimos:

$$F_c(x) = \int_c^x f(t)dt, \text{ para } x \in [a, b]$$

Luego F_c es continua en $[a, b]$ y si f es continua en $x \in (a, b)$, F_c es derivable en x y $F_c'(x) = f(x)$.

Teorema 4: **Segundo Teorema Fundamental del Cálculo**: Sea f continua en $[a, b]$ y sea P una primitiva de f en (a, b), entonces para todo $c \in (a, b)$ vale

$$P(x) = P(c) + \int_c^x f(t)dt, \text{ para todo } x \in (a, b)$$

O bien

$$\int_c^x f(t)dt = P(x) - P(c)$$

Regla de Barrow: Si P es una primitiva de f entonces

$$\int_a^b f(t)dt = P(b) - P(a)$$

Notación:

$$P(x) \Big|_a^b = P(b) - P(a)$$

6.1 Integración por Sustitución y Por Partes en Integrales Definidas

$$\int_a^b f'(g(x)) \cdot g'(x)dx = \int_{g(a)}^{g(b)} f(t)dt$$

$$\int_a^b f(x) = f(x)g(x)|_a^b - \int_a^b f'(x)g(x)dx$$