Facultad de Ciencias Exactas, Ingeniería y Agrimensura
Escuela de Ciencias Exactas y Naturales
Departamento de Matemática

Algebra y Geometría Analítica II

Año 2020

UNIDAD 6: Geometría analítica del espacio.

Apuntes basados en notas de clase de Francisco Vittone.

En esta unidad estudiaremos la geometría analítica del espacio. Recorreremos los lugares geométricos dados por curvas y superficies en el espacio. En un principio comenzaremos estudiando rectas y planos, luego las superficies cuádricas y finalmente exploraremos un poco algunas curvas más generales.

1. Ecuaciones vectorial y paramétrica de una recta y un plano

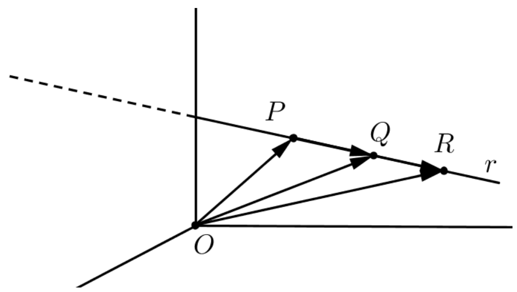
Comenzaremos estudiando la recta en el espacio que tiene ciertas analogías con el estudio que ya hemos hecho en el plano, pero presenta algunas particularidades que hacen que su abordaje sea un poco más complejo.

Consideremos dos puntos P y Q cualesquiera del espacio y sea $r = \overleftrightarrow{PQ}$ la recta que definen. Entonces, al igual que como ocurre en el plano, un punto R pertenece a la recta r si y sólo si R, P y Q están alineados. En términos del álgebra vectorial, R, P y Q están alineados si y sólo si $\overrightarrow{PQ}$ y $\overrightarrow{PR}$ son vectores paralelos. De esta manera, resulta:

$$r = \{R : \overrightarrow{PR} = \lambda \cdot \overrightarrow{PQ} \quad \text{p.a. } \lambda \in \mathbb{R}\}$$

Fijemos ahora un sistema de coordenadas en el espacio con origen en O. Observemos primero que

$$\overrightarrow{PR} = \overrightarrow{OR} - \overrightarrow{OP}.$$



Por lo tanto

$$\boxed{R \in r \quad \Leftrightarrow \quad \exists\, \lambda \in \mathbb{R} \; : \; \overrightarrow{OR} = \overrightarrow{OP} + \lambda \cdot \overrightarrow{PQ}} \tag{1.1}$$

La ecuación (1.1) se denomina **ecuación vectorial** de la recta r. Es evidente que esta ecuación es igual a la de la recta en el plano.

Una vez fijado el sistema de coordenadas, podemos obtener en la base canónica las componentes de cada uno de estos vectores. Supongamos que los puntos P, Q y R tienen coordenadas $P(x_0, y_0, z_0)$, $Q(x_1, y_1, z_1)$ y $R(x, y, z)$.

Luego tendremos

$$\overrightarrow{OP} = (x_0, y_0, z_0), \;\; \overrightarrow{OR} = (x, y, z) \;\; \text{y} \;\; \overrightarrow{PQ} = (x_1 - x_0, y_1 - y_0, z_1 - z_0) = (u_1, u_2, u_3)$$

poniendo $u_1 = x_1 - x_0$, $u_2 = y_1 - y_0$, $u_3 = z_1 - z_0$. Luego

$$\boxed{R(x,y,z) \in r \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x = x_0 + \lambda u_1 \\ y = y_0 + \lambda u_2 \\ z = z_0 + \lambda u_3 \end{cases}, \ \lambda \in \mathbb{R}.} \tag{1.2}$$

Las ecuaciones en (1.2) se denominan **ecuaciones paramétricas** de la recta r.

Recíprocamente, ecuaciones del tipo (1.1) y (1.2) representan siempre ecuaciones paramétricas de una recta, en el sentido que el conjunto de puntos cuyas coordenadas la verifican están todos sobre una recta y la describen completamente.

Como en el caso de una recta en el plano, definimos qué entendemos por un vector que es la dirección de una recta:

Definición: Decimos que un vector $\overline{u}$ es un **vector dirección** de una recta r si r es la dirección de $\overline{u}$, o sea, $\overline{u}$ es paralelo a r.

Así, si P y Q son puntos de r, $\overline{u} = \overrightarrow{PQ}$ es un vector dirección de r.

Por otra parte, si $\overline{u}$ es un vector dirección de r y $P \in r$, tendremos que

$$Q \in r \ \Leftrightarrow \ \overrightarrow{PQ} = \lambda \cdot \overline{u} \ \Leftrightarrow \ \overrightarrow{OQ} = \overrightarrow{OP} + \lambda \cdot \overline{u}.$$

Luego si $\overline{u} = (u_1, u_2, u_3)$ y $P(x_0, y_0, z_0)$, resulta

$$Q(x,y,z) \in r \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x = x_0 + \lambda u_1 \\ y = y_0 + \lambda u_2 \\ z = z_0 + \lambda u_3 \end{cases}, \ \lambda \in \mathbb{R}.$$

Observemos que estas son las mismas ecuaciones paramétricas que ya habíamos obtenido.

Problema 1: *Sea r la recta que pasa por el punto $P(1,1,-1)$ en la dirección del vector $\overline{u} = (1,2,1)$.*

1. *Determinar las ecuaciones paramétricas de r y dar dos puntos que la determinan.*
2. *Determinar la intersección de r con los planos coordenados. Esbozar su gráfica.*
3. *Determinar si r interseca los ejes coordenados. En ese caso determinar los puntos de intersección.*

Solución:

1. Tenemos que $P(1,1,-1)$ es un punto de paso de r y $\overline{u} = (1,2,1)$ es la dirección, por lo tanto las ecuaciones paramétricas de r son

$$\begin{cases} x = 1 + \lambda \\ y = 1 + 2\lambda \\ z = -1 + \lambda \end{cases} \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

   Para encontrar un segundo punto de r basta dar un valor cualquiera a λ. Por ejemplo, tomando $\lambda = 1$, tenemos que $Q(2,3,0) \in r$ y por lo tanto P y Q son dos puntos que determinan r.

   Observemos que como $Q \in r$, podríamos haber dado las ecuaciones paramétricas de r tomando Q como punto de paso. En este caso, las ecuaciones paramétricas de r son

$$\begin{cases} x = 2 + t \\ y = 3 + 2t \\ z = t \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}.$$

   Sabemos que P es un punto de r. Observemos que con las segundas ecuaciones debemos tomar el parámetro $t = -1$ para obtenerlo.

2. La intersección de r con el plano xy será un punto de coordenadas $P_1(x_1, y_1, 0)$, con el plano yz será $P_2(0, y_2, z_2)$ y con el plano xz será $P_3(x_3, 0, z_3)$.

   Como una recta corta a un plano en un único punto y $Q(2, 3, 0)$ pertenece tanto a r como al plano xy, resulta que $P_1 = Q$.

   Para encontrar P_2, observemos que debe ser un punto de r cuya primer coordenada es 0. Reemplazando en la ecuación correspondiente en las ecuaciones paramétricas de r, resulta

   $$0 = 1 + \lambda \quad \Rightarrow \quad \lambda = -1.$$

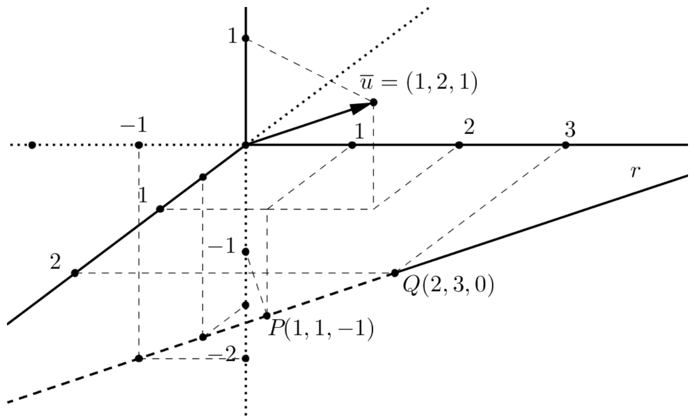
   Reemplazando con este valor de λ obtenemos $y_2 = 1 + 2 \cdot (-1) = -1$ y $z_2 = -1 + (-1) = -2$. Por lo tanto $P_2(0, -1, -2)$.

   Para hallar P_3, la segunda coordenada debe anularse, y por lo tanto

   $$0 = 1 + 2\lambda \quad \Rightarrow \quad \lambda = -\frac{1}{2}.$$

   Luego $x_3 = \frac{1}{2}$ e $z_3 = -\frac{3}{2}$.

   La siguiente es la gráfica de r.



3. Observemos que si r interseca alguno de los ejes coordenados, estos puntos deben coincidir con alguno de los puntos en que r interseca los planos coordenados. En efecto, el eje x está contenido en el plano xy y en el plano xz. Como r corta cada plano en un punto, si corta al eje x, este punto debe ser el punto en que r corte tanto al plano xy como al xz. Pero r corta a los planos coordenados en puntos que no están sobre los ejes. Por lo tanto r es alabeada con los tres ejes coordenados. $\square$

Problema 2: *Sea r la recta de ecuaciones paramétricas*

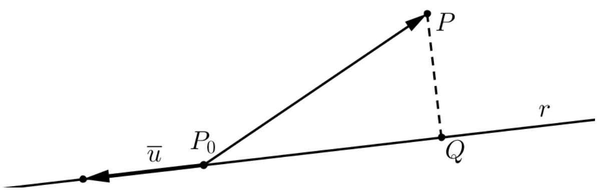
$$r) \begin{cases} x = 2 + 3t \\ y = 2 + 2t \\ z = -1 + t \end{cases}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Determinar la distancia del punto $P(1, 0, 1)$ a r.

Solución:

Observemos que la dirección de r está dada por el vector $\overline{u} = (3, 2, 1)$. Consideremos un punto P_0 de r. Por ejemplo, tomando el parámetro $t = 0$, obtenemos el punto de paso $P_0(2, 2, -1)$.

Consideremos ahora un punto Q sobre r tal que $\overrightarrow{P_0Q} = proy_{\overline{u}}\, \overrightarrow{P_0P}$. O sea, Q es el pie de la perpendicular a r por P.



Entonces es claro que

$$d(P,r) = |\overrightarrow{QP}| = \sqrt{|\overrightarrow{P_0P}|^2 - |\overrightarrow{P_0Q}|^2} = \sqrt{|\overrightarrow{P_0P}|^2 - |proy_{\overline{u}}\,\overrightarrow{P_0P}|^2}.$$

Ahora bien, $\overrightarrow{P_0P} = (-1,-2,2)$ y $|\overrightarrow{P_0P}| = \sqrt{1+4+4} = 3$. Por otra parte,

$$|proy_{\overline{u}}\,\overrightarrow{P_0P}| = |(\overrightarrow{P_0P} \times \overline{u}_0)\cdot \overline{u_0}| = |\overrightarrow{P_0P} \times \overline{u}_0|.$$

Calculamos $|\overline{u}| = \sqrt{14}$ y por lo tanto $\overline{u}_0 = \frac{1}{\sqrt{14}}(3,2,1)$. Luego

$$|proy_{\overline{u}}\,\overrightarrow{P_0P}| = \frac{1}{\sqrt{14}}|-3-4+2| = \frac{5}{\sqrt{14}}.$$

Finalmente resulta

$$d(P,r) = \sqrt{9 - \frac{25}{14}} = \sqrt{\frac{101}{14}}.$$

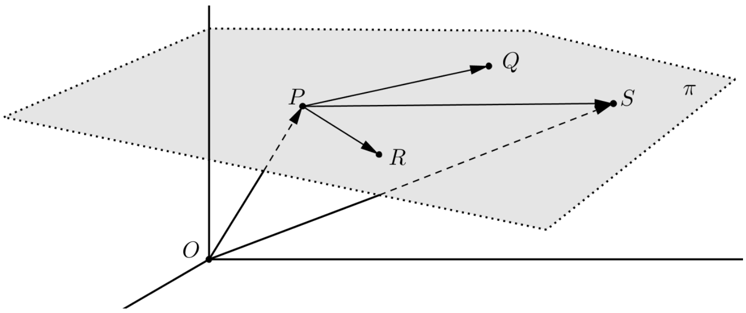
Determinaremos ahora las ecuaciones paramétricas de un plano en el espacio.

Sea π un plano y sean P, Q y R tres puntos no alineados de π. Entonces un punto cualquiera S del espacio será un punto de π si y sólo si los vectores $\overrightarrow{PQ}$, $\overrightarrow{PS}$ y $\overrightarrow{PR}$ son coplanares. Esto a su vez ocurre si y sólo si existen números reales α y β tales que

$$\overrightarrow{PS} = \alpha \cdot \overrightarrow{PQ} + \beta \cdot \overrightarrow{PR} \tag{1.3}$$

Si ahora fijamos un sistema de coordenadas en el espacio con origen en O y observamos que $\overrightarrow{PS} = \overrightarrow{OS} - \overrightarrow{OP}$, reemplazando en (1.3) obtenemos que $S \in \pi$ si y sólo si existen números reales α y β tales que

$$\boxed{\overrightarrow{OS} = \overrightarrow{OP} + \alpha \cdot \overrightarrow{PQ} + \beta \cdot \overrightarrow{PR}} \tag{1.4}$$



La ecuación (1.4) se conoce como **ecuación vectorial** del plano. A partir de la introducción de coordenadas, podemos determinar de manera inmediata las **ecuaciones paramétricas** del plano.

En efecto, supongamos que $P(x_0,y_0,z_0)$, $Q(x_1,y_1,z_1)$, $R(x_2,y_2,z_2)$ y $S(x,y,z)$. Entonces

$$\overrightarrow{OS} = (x,y,z), \quad \overrightarrow{OP} = (x_0,y_0,z_0),$$

$$\overrightarrow{PQ} = (x_1-x_0, y_1-y_0, z_1-z_0) = (u_1,u_2,u_3), \quad \overrightarrow{PR} = (x_2-x_0, y_2-y_0, z_2-z_0) = (v_1,v_2,v_3)$$

y reemplazando en (1.4) obtenemos

$$\boxed{S(x,y,z) \in \pi \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x = x_0 + \alpha u_1 + \beta v_1 \\ y = y_0 + \alpha u_2 + \beta v_2 \qquad \alpha,\, \beta \in \mathbb{R} \\ z = z_0 + \alpha u_3 + \beta v_3 \end{cases}} \tag{1.5}$$

Al igual que con las rectas, podemos definir qué entendemos con que dos vectores sean los vectores dirección de un plano:

<u>Definición:</u> Decimos que dos vectores no nulos ni paralelos $\overline{u}$ y $\overline{v}$ son **vectores dirección** de un plano π si son ambos paralelos a π.

Nuevamente, si $P(x_0, y_0, y_0)$ es un punto de π y $\overline{u} = (u_1, u_2, u_3)$ y $\overline{v} = (v_1, v_2, v_3)$ definen las direcciones de π, las ecuaciones paramétricas de π son las dadas por (1.5).

<u>Problema 3:</u> *Considerar los puntos $P(-1, 2, \frac{3}{2})$, $Q(-\frac{3}{2}, 1, 3)$ y $R(4, -2, -3)$.*

1. *Dar las ecuaciones paramétricas del plano π que determinan.*
2. *Determinar los puntos de intersección del plano π con los ejes coordenados. Esbozar la gráfica de π.*
3. *Encontrar las ecuaciones paramétricas de la recta perpendicular a π por el punto $T(1, 2, 3)$.*

<u>Solución:</u>

1. Observemos que $\overrightarrow{PQ} = (-\frac{1}{2}, -1, \frac{3}{2})$ y $\overrightarrow{PR} = (5, -4, -\frac{9}{2})$. Luego las ecuaciones paramétricas de π son
$$\pi) \begin{cases} x = -1 - \frac{1}{2}\alpha + 5\beta \\ y = 2 - \alpha - 4\beta \\ z = \frac{3}{2} + \frac{3}{2}\alpha - \frac{9}{2}\beta \end{cases}$$

2. Encontraremos las coordenadas de los puntos de intersección de π con los ejes coordenados. Observemos que el punto de intersección con el eje x tendrá coordenadas $y = 0$ y $z = 0$. Reemplazando en las ecuaciones de π, obtenemos el sistema de ecuaciones en las incógnitas α y β
$$\begin{cases} 0 = 2 - \alpha - 4\beta \\ 0 = \frac{3}{2} + \frac{3}{2}\alpha - \frac{9}{2}\beta \end{cases}$$
Despejando α de la primer ecuación obetenemos
$$\alpha = 2 - 4\beta$$
y reemplazando en la segunda resulta
$$\frac{3}{2} + 3 - 6\beta - \frac{9}{2}\beta = 0 \;\Rightarrow\; \frac{9}{2} - \frac{21}{2}\beta = 0 \;\Rightarrow\; \beta = \frac{9}{21} = \frac{3}{7}$$
y por lo tanto $\alpha = \frac{2}{7}$.

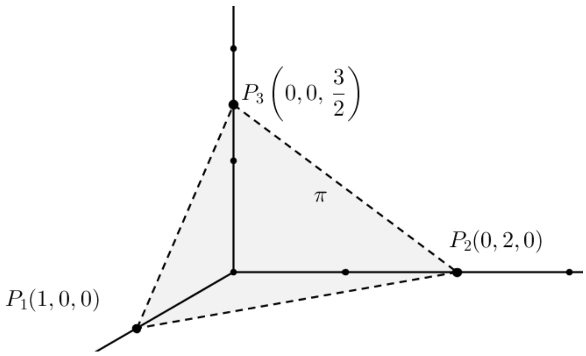
   Reemplazando con los valores obtenidos en la ecuación de π, obtenemos el punto $P_1(1, 0, 0)$.

   Obtendremos ahora la intersección con el eje y. Para ello necesitamos hacer 0 la primera y la tercer coordenada. Tenemos entonces el sistema
$$\begin{cases} 0 = -1 - \frac{1}{2}\alpha + 5\beta \\ 0 = \frac{3}{2} + \frac{3}{2}\alpha - \frac{9}{2}\beta \end{cases} \quad\Leftrightarrow\quad \begin{cases} 0 = -1 - \frac{1}{2}\alpha + 5\beta \\ 0 = -\frac{3}{2} + \frac{21}{2}\beta \end{cases}$$
donde el sistema equivalente se obtiene de multiplicar por 3 ambos miembros de la primer ecuacione y sumar ambas ecuaciones.

   Obtenemos entonces $\beta = \frac{1}{7}$ y reemplazando en la primer ecuación resulta $\alpha = -\frac{4}{7}$. Reemplazando en las ecuaciones de π obtenemos el punto $P_2(0, 2, 0)$.

   Con un procedimiento análogo, obtenemos que el punto de intersección con el eje z es $P_3(0, 0, \frac{3}{2})$.

   Realizar la gráfica de un plano en el espacio suele ser difícil. Siempre que el plano tenga intersección con los tres ejes coordenados, lo representamos como un triángulo en alguno de los ocho octantes, cuyos vértices son estos puntos de intersección. En este caso, graficamos el plano π de la siguiente manera:



3. Debemos encontrar ahora las ecuaciones paramétricas de la recta r, única perpendicular a π por el punto $T(1,2,3)$. Observemos que ya tenemos un punto de paso, y por lo tanto sólo debemos encontrar la dirección de r. Para ello necesitamos determinar un vector perpendicular a las direcciones de π. Podemos determinar este vector, llamemoslo $\overline{n}$, realizando el producto vectorial entre $\overrightarrow{PQ}$ y $\overrightarrow{PR}$. Tenemos entonces

$$\overline{n} = \overrightarrow{PQ} \wedge \overrightarrow{PR} = \begin{vmatrix} \overline{i} & \overline{j} & \overline{k} \\ -\frac{1}{2} & -1, & \frac{3}{2} \\ 5 & -4 & -\frac{9}{2} \end{vmatrix} = \frac{21}{2}\overline{i} + \frac{29}{4}\overline{j} + 7\overline{k}.$$

Por lo tanto las ecuaciones paramétricas de la recta r son

$$\begin{cases} x = 1 + \frac{21}{2}t \\ y = 2 + \frac{29}{4}t \quad , \quad t \in \mathbb{R} \\ z = 3 + 7t \end{cases}$$

2. Ecuación general del plano y ecuaciones de la recta en el espacio

Comenzaremos encontrando la ecuación general de un plano en el espacio. Esto es, una ecuación que dependa de las variables x, y y z y sea verificada sólo por las coordenadas de los puntos del plano.

Sea π un plano, $P_0(x_0, y_0, z_0) \in \pi$ y sean $\overline{u}$ y $\overline{v}$ dos vectores paralelos a π. Entonces $\overline{n} = \overline{u} \wedge \overline{v} = (a,b,c)$ es un vector normal a π y resulta

$$\begin{aligned} P(x,y,z) \in \pi \quad &\Leftrightarrow \quad \overrightarrow{P_0P} \perp \overline{n} \Leftrightarrow (x-x_0, y-y_0, z-z_0) \times (a,b,c) = 0 \\ &\Leftrightarrow \quad ax + by + cz + d = 0 \end{aligned}$$

donde $d = -ax_0 - by_0 - cz_0$.

Dejamos como ejercicio la prueba del siguiente resultado:

Teorema 2.1. *Un lugar geométrico en el espacio es un plano si y sólo si su ecuación cartesiana es de la forma*

$$\boxed{ax + by + cz + d = 0} \tag{2.1}$$

con $a, b, c, d \in \mathbb{R}$, $(a,b,c) \neq \overline{0}$.

Problema 4:

1. *Encontrar una ecuación cartesiana del plano π de ecuaciones paramétricas*

$$\begin{cases} x = 2 + 3s - \frac{1}{2}t \\ y = -2 + 2s + t \quad , \quad s, t \in \mathbb{R}. \\ z = s - 2t \end{cases}$$

2. *Determinar la intersección de π con la recta r de ecuaciones paramétricas*

$$\begin{cases} x = 1 + \lambda \\ y = 4 + 2\lambda \quad , \quad \lambda \in \mathbb{R}. \\ z = 3 - \lambda \end{cases}$$

3. *Hallar las ecuaciones paramétricas de la recta que se obtiene de intersecar π con el plano π' de ecuación cartesiana $2x - 3y + z - 1 = 0$.*

Solución:

1. Para encontrar una ecuación cartesiana de π observemos que un punto de paso es $P_0(2, -2, 0)$ y dos vectores paralelos a π son $\overline{u} = (3, 2, 1)$ y $\overline{v} = (-\frac{1}{2}, 1, -2)$. Luego un vector normal a π es

$$\overline{n} = \begin{vmatrix} \overline{i} & \overline{j} & \overline{k} \\ 3 & 2 & 1 \\ -\frac{1}{2} & 1 & -2 \end{vmatrix} = (-5, 11/2, 4)$$

luego una ecuación general de π será de la forma $-5x + \frac{11}{2}y + 4z + d = 0$. Como $P_0 \in \pi$, reemplazamos con sus coordenadas en la última ecuación para determinar el valor de d. Resulta así $-5 \cdot 2 + \frac{11}{2} \cdot (-2) + 4 \cdot 0 + d = 0$, de donde $d = 21$ y la ecuación de π es

$$-5x + \frac{11}{2}y + 4z + 21 = 0.$$

2. Debemos encontrar un punto que esté simultáneamente en π y en la recta r. Como cada punto de r puede describirse con un único parámetro λ, estamos buscando $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que las coordenadas del punto de r que describe verifiquen también la ecuación cartesiana de π. O sea,

$$-5(1 + \lambda) + \frac{11}{2}(4 + 2\lambda) + 4(3 - \lambda) + 21 = 0 \Leftrightarrow \lambda = -25.$$

Por lo tanto el punto de intersección entre r y π es el punto $Q(-24, -46, 28)$.

3. Para encontrar las ecuaciones paramétricas de la recta que se obtiene de intersecar π con π' necesitamos encontrar un punto de paso y un vector dirección.

Un punto de paso $A(x, y, z)$ deberá verificar tanto la ecuación cartesiana de π como la de π'. Es decir, deberá verificar el sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} -5x + \frac{11}{2}y + 4z + 21 = 0 \\ 2x - 3y + z - 1 = 0 \end{cases}$$

Este sistema tendrá infinitas soluciones (en este caso en que los planos se cortan en una recta), o no tendrá ninguna si los planos fuesen paralelos. De la segunda ecuación obtenemos que $z = 1 - 2x + 3y$. Reemplazando en la primera, tenemos

$$-5x + \frac{11}{2}y + 4(1 - 2x + 3y) + 21 = 0 \Leftrightarrow -13x + \frac{35}{2}y + 25 = 0$$

Poniendo por ejemplo $y = 0$, tenemos $x = \frac{25}{13}$ y $z = 1 - \frac{50}{13} = -\frac{37}{13}$. Por lo tanto el punto $A(\frac{25}{13}, 0, -\frac{37}{13}) \in \pi \cap \pi'$.

Sea ahora $\overline{u}$ la dirección de la recta $s = \pi \cap \pi'$. Sean $\overline{n} = (-5, 11/2, 4)$ y $\overline{n}' = (2, -3, -1)$ vectores normales a π y π' respectivamente. Entonces como $s \subset \pi$, deberá ser $\overline{u} \perp \overline{n}$, y como $s \subset \pi'$ deberá ser $\overline{u} \perp \overline{n}'$. Por lo tanto podemos elegir $\overline{u} = \overline{n} \wedge \overline{n}' = (\frac{13}{2}, 3, 4)$. Luego las ecuaciones paramétricas de s son

$$\begin{cases} x = \frac{25}{13} + \frac{13}{2}\lambda \\ y = 3\lambda \\ z = -\frac{37}{13} + 4\lambda \end{cases}, \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

De la misma manera que para el caso de una recta en el plano, podemos, conocidas las ecuaciones cartesianas del plano, determinar la distancia de un punto cualquiera del espacio al plano. Dejamos la prueba del siguiente Teorema como ejercicio:

Teorema 2.2. *Sea π un plano de ecuación cartesiana $ax+by+cz+d=0$ y $P(x_0,y_0,z_0)$ un punto del espacio. Entonces*

$$d(P,\pi)=\frac{|ax_0+by_0+cz_0+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$$

Con lo que hemos estudiado hasta el momento, vimos que la **ecuación general de primer grado** en dos variables, es decir una ecuación del tipo

$$ax+by+c=0$$

representa una recta en el plano siempre que $(a,b)\neq\overline{0}$. Es evidente que si $(a,b)=\overline{0}$, tal ecuación representa el conjunto vacío si $c\neq 0$ y todo el plano si $c=0$.

Por otra parte, la ecuación lineal general de primer grado en tres variables, es decir

$$ax+by+cz+d=0$$

representa un plano en el espacio, siempre que $(a,b,c)\neq\overline{0}$. Nuevamente, tal ecuación representa el conjunto vacío si $(a,b,c)=\overline{0}$ y $d\neq 0$ y todo el espacio si $(a,b,c)=\overline{0}$ y $d=0$.

Hubiese sido esperable que una recta en el espacio tuviese una ecuación cartesiana de la forma anterior. Trataremos de obtener la o las ecuaciones cartesianas que deberán verificar las coordenadas de los puntos de una recta en el espacio a partir de sus ecuaciones paramétricas.

Consideremos por lo tanto la recta r de ecuaciones paramétricas

$$\left\{\begin{array}{l} x=x_0+tu_1 \\ y=y_0+tu_2 \\ z=z_0+tu_3 \end{array}\right. \quad,\quad t\in\mathbb{R}.$$

Alguna de las componentes del vector dirección $\overline{u}=(u_1,u_2,u_3)$ deberá ser no nula. Supondremos por el momento que las tres son no nulas y veremos después qué ocurre cuando alguna de ellas se anula.

En este caso, podemos despejar t de las tres ecuaciones y obtenemos:

$$t=\frac{x-x_0}{u_1},\quad t=\frac{y-y_0}{u_2},\quad t=\frac{z-z_0}{u_3}$$

Como (x,y,z) describen las coordenadas de un punto fijo de la recta, el parámetro t en las tres ecuaciones debe ser el mismo, y por lo tanto obtenemos

$$\boxed{\frac{x-x_0}{u_1}=\frac{y-y_0}{u_2}=\frac{z-z_0}{u_3}} \tag{2.2}$$

Las ecuaciones (2.2) se conocen como **forma simétrica** de la ecuación de la recta r. En realidad no se trata de una ecuación, sino de un sistema de ecuaciones que puede escribirse como cualquiera de las siguientes tres formas equivalentes:

$$\left\{\begin{array}{l} \dfrac{x-x_0}{u_1}=\dfrac{y-y_0}{u_2} \\ \dfrac{y-y_0}{u_2}=\dfrac{z-z_0}{u_3} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} \dfrac{x-x_0}{u_1}=\dfrac{y-y_0}{u_2} \\ \dfrac{x-x_0}{u_2}=\dfrac{z-z_0}{u_3} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} \dfrac{x-x_0}{u_1}=\dfrac{z-z_0}{u_2} \\ \dfrac{y-y_0}{u_2}=\dfrac{z-z_0}{u_3} \end{array}\right. \tag{2.3}$$

Observemos que cualquier ecuación individual de cualquiera de los tres sistemas es la ecuación de un plano. Por ejemplo, la ecuación

$$\frac{x-x_0}{u_1}=\frac{y-y_0}{u_2}$$

puede reescribirse como

$$\frac{1}{u_1}x-\frac{1}{u_2}y+\left(\frac{y_0}{u_2}-\frac{x_0}{u_1}\right)=0. \tag{2.4}$$

Es importante observar que, como estamos trabajando en el espacio, la ausencia de la variable z **NO** indica que la ecuación (2.4) es la ecuación de una recta, sino que es la ecuación de un plano paralelo al eje z, o equivalentemente, perpendicular al plano xy.

De esta manera, al decir que los puntos de la recta r son aquellos cuyas coordenadas son solución de alguno de los tres sistemas equivalentes dados en (2.3), no estamos diciendo más que la recta r es la intersección de los dos planos que cada una de las ecuaciones de cada sistema representan.

Por lo tanto, para describir una recta en el espacio, debemos pensarla como intersección de dos planos y por lo tanto el lugar geométrico del espacio que representa será descrito como un sistema de dos ecuaciones con tres incógnitas, que muchas veces resumimos escribiendolo como en (2.2).

Como las coordenadas de los puntos de r verifican los sistemas dados en (2.3), en particular verifican cada una de las ecuaciones. Esto implica que la recta r está contenida en cada uno de los planos que estas ecuaciones describen. Por ejemplo la ecuación (2.4) es la ecuación de un plano que contiene a r y es perpendicular al plano xy. Este plano se denomina **plano proyectante** de r al plano xy, ya que la recta que se obtiene de intersecarlo con el plano xy es la proyeccción ortogonal de r sobre el plano xy.

Las ecuaciones del plano proyectante de r sobre el plano yz se obtiene de la ecuación

$$\frac{y-y_0}{u_2} = \frac{z-z_0}{u_3}$$

que puede reescribirse como

$$\frac{1}{u_2}y - \frac{1}{u_3}z + \left(\frac{z_0}{u_3} - \frac{y_0}{u_2}\right) = 0$$

y un razonamiento análogo puede hacerse para obtener la ecuación del plano proyectante sobre el plano xz.

De manera más general, podremos siempre representar a una recta en el espacio como un sistema de dos ecuaciones lineales en las variables x, y, z. Cada una de esas ecuaciones representa un plano en el espacio, y la recta en cuestión será la intersección de esos dos planos. Existen de esta manera infinitas formas distintas de representar una misma recta a través de ecuaciones.

3. Superficies cuádricas

A lo largo de la presente materia y de Álgebra y Geometría I nos hemos dedicado al estudio de la geometría analítica. Vimos cómo a partir de la introducción de coordenadas hemos podido utilizar herramientas algebraicas para resolver problemas geométricos. Nuestro principal objetivo fue obtener las ecuaciones cartesianas y paramétricas de algunas curvas elementales y estudiar sus propiedades. Estas curvas son las rectas y las secciones cónicas. De esta manera, el álgebra acude en auxilio de la geometría permitiendo resolver de manera precisa y sencilla muchos problemas.

Este problema geométrico tiene sin embargo una importante contrapartida algebraica: permite clasificar qué lugar geométrico describen las raíces de un polinomio lineal o cuadrático en dos variables. Es decir, dado cualquier polinomio de la forma

$$Ax^2 + By^2 + Cx + Dy + E = 0$$

sabemos que si interpretamos todas sus posibles raices como coordenadas de puntos, estos puntos constituiran una recta, una sección cónica o alguna de sus degeneraciones. De esta manera, resolver sistemas de ecuaciones lineales o cuadráticas en dos variables puede interpretarse geométricamente como la intersección de dos o más curvas. Así la geometría permite aportar intuición a problemas algebraicos abstractos.

Hemos visto además que las soluciones de la ecuación

$$ax + by + cz + d = 0$$

pueden interpretarse como las coordenadas de puntos que yacen sobre un plano perpendicular al vector $\overline{n} = (a, b, c)$.

De esta manera en este estudio interrelacionado de la geometría y el álgebra surgen dos problemas fundamentales:

1. dada una ecuación de la forma $F(x, y) = 0$ o $F(x, y, z) = 0$ interpretar qué lugar geométrico del plano o del espacio describen sus soluciones, y qué propiedades geométricas tienen estos lugares geométricos;
2. dado un lugar geométrico del plano o del espacio, encontrar una o más condiciones algebraicas (ecuaciones o inecuaciones) que lo describen, es decir, que satisfacen únicamente las coordenadas de los puntos que a él pertenecen.

En esta última unidad trataremos de resolver ambos problemas para algunos casos particulares importantes de superficies en el espacio.

El próximo paso es determinar qué lugar geométrico del espacio representa una ecuación cuadrática en tres variables, es decir, una ecuación de la forma

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 + Dxy + Exz + Fyz + Gx + Hy + Iz + J = 0. \tag{3.1}$$

Una ecuación de este tipo representará generalmente una superficie en el espacio denominada *superficie cuádrica*.

El ejemplo más simple de una superficie cuádrica es la superficie esférica.

Recordemos que dado un punto P_0 y un número real positivo r, una **superficie esférica** (muchas veces llamada directamente esfera) de centro P_0 y radio r es el lugar geométrico de los puntos P del espacio tales que $d(P, P_0) = r$.

Si $P_0(x_0, y_0, z_0)$, y denotamos $\mathcal{E}(P_0, r)$ a la esfera de centro P_0 y radio r, tenemos

$$\begin{aligned} P \in \mathcal{E}(P_0, r) \quad &\Leftrightarrow \quad d(P, P_0) = r \;\Leftrightarrow\; \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2} = r \\ &\Leftrightarrow \quad (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 = r^2 \end{aligned}$$

Distribuyendo, vemos que una superficie esférica tiene siempre una ecuación de la forma

$$Ax^2 + Ay^2 + Az^2 + Gx + Hy + Iz + J = 0$$

donde $A = 1$, $G = -2x_0$, $H = -2y_0$, $I = -2z_0$, $J = (x_0^2 + y_0^2 + z_0^2) - r^2$.

Nos dedicaremos a estudiar los casos de la ecuación (3.1) en que $D = E = F = 0$. Es decir, estudiaremos lugares geométricos descritos por ecuaciones del tipo

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 + Gx + Hy + Iz + J = 0. \tag{3.2}$$

Hacemos notar sin embargo que *siempre* es posible elegir un sistema de coordenadas en el espacio de modo que esto ocurra.

Notemos además que si $A = B = C = 0$, estamos en presencia de la ecuación de un plano, y por lo tanto supondremos que alguno de estos tres coeficientes es no nulo.

Si los tres son no nulos, completando cuadrados será siempre posible transformar la ecuación (3.2) en una ecuación del tipo

$$\pm \frac{(x - x_0)^2}{a^2} \pm \frac{(y - y_0)^2}{b^2} \pm \frac{(z - z_0)^2}{c^2} = 1 \tag{3.3}$$

(donde obviamente todos los términos del miembro izquierdo no pueden tener signo negativo simultáneamente) o bien del tipo

$$\pm \frac{(x - x_0)^2}{a^2} \pm \frac{(y - y_0)^2}{b^2} = \pm \frac{(z - z_0)^2}{c^2}. \tag{3.4}$$

En caso que sólo uno de los coeficientes A, B o C sean nulos, obtendremos una ecuación del tipo

$$\frac{(x-x_0)^2}{a^2} \pm \frac{(y-y_0)^2}{b^2} = \frac{z-z_0}{c} \tag{3.5}$$

(con posible intercambio de roles en las variables x, y y z).

Finalmente, si dos de los tres coeficientes son nulos, obtendremos una ecuación del tipo:

$$\pm \frac{(x-x_0)^2}{a^2} = Hy + Iz + J \tag{3.6}$$

(donde nuevamente las variables x, y o z pueden estar intercambiadas).

Las ecuaciones del tipo (3.3) representan **elipsoides, hiperboloides** y las del tipo (3.4) **conos**.

Las ecuaciones del tipo (3.5) representan **paraboloides** y las ecuaciones del tipo (3.6) representan un **cilindro generalizado** y no suele incluirse en el tratamiento de las cuádricas.

Finalizaremos esta sección estudiando superficies en el espacio descritas por ecuaciones de la forma $F(x, y) = 0$, $F(x, z) = 0$ o $F(y, z) = 0$. Estas superficies son los denominados **cilindros generalizados**.

3.1. Elipsoides y esferas

Supongamos que tenemos un lugar geométrico $\mathcal{E}$ dado en un sistema de coordenadas $Oxyz$ por la ecuación

$$\boxed{\frac{(x-x_0)^2}{a^2} + \frac{(y-y_0)^2}{b^2} + \frac{(z-z_0)^2}{c^2} = 1} \tag{3.7}$$

Observemos primero que si $a = b = c$, el lugar geométrico descripto por esta ecuación es una esfera de centro $P_0(x_0, y_0, z_0)$ y radio a.

Supongamos entonces que algún par de entre los números a, b y c son distintos entre sí. El lugar geométrico $\mathcal{E}$ recibe el nombre de **elipsoide**. En lo que sigue haremos un análisis que se repetirá de manera análoga en el estudio de todas las superficies cuádricas y nos permitirá graficar de manera aproximada estas superficies.

El punto $C(x_0, y_0, z_0)$ se denomina **centro del elipsoide** y es en efecto su centro de simetría.

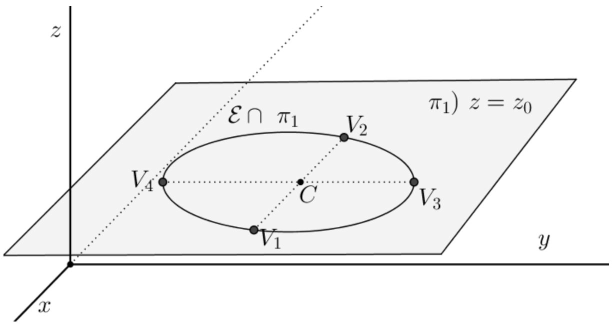
Para darnos una idea de la gráfica de $\mathcal{E}$, intersecamos a $\mathcal{E}$ con planos paralelos a los planos coordenados. Comencemos intersecando $\mathcal{E}$ con planos que pasen por C.

Consideremos el plano π_1 de ecuación $z = z_0$. π_1 es el plano paralelo al plano xy por C y $\mathcal{E} \cap \pi_1$ será un lugar geométrico descripto por el sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} \dfrac{(x-x_0)^2}{a^2} + \dfrac{(y-y_0)^2}{b^2} + \dfrac{(z-z_0)^2}{c^2} = 1 \\ z = z_0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{(x-x_0)^2}{a^2} + \dfrac{(y-y_0)^2}{b^2} = 1 \\ z = z_0 \end{cases}$$

Es decir, $\mathcal{E} \cap \pi_1$ es una elipse (o una circunferencia si $a = b$) en el plano π_1. Es importante notar que aquí los valores a, b y c no tienen relación con los valores que definimos para estudiar las secciones cónicas, pudiendo ser $a \geq b$ o $a < b$. Esto implica que el eje focal de esta elipse puese ser el eje x o el eje y. De cualquier manera, sus vértices son los puntos de coordenadas

$$V_1(x_0 + a, y_0, z_0),\ V_2(x_0 - a, y_0, z_0),\ V_3(x_0, y_0 + b, z_0),\ V_4(x_0, y_0 - b, z_0).$$



Consideremos ahora el plano π_2 paralelo al plano yz por C. Es decir, el plano de ecuación $x = x_0$. Si intersecamos $\mathcal{E}$ con el plano π_2, obtendremos la curva de ecuaciones

$$\begin{cases} \dfrac{(x-x_0)^2}{a^2} + \dfrac{(y-y_0)^2}{b^2} + \dfrac{(z-z_0)^2}{c^2} = 1 \\ x = x_0 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} \dfrac{(y-y_0)^2}{b^2} + \dfrac{(z-z_0)^2}{c^2} = 1 \\ x = x_0 \end{cases}$$

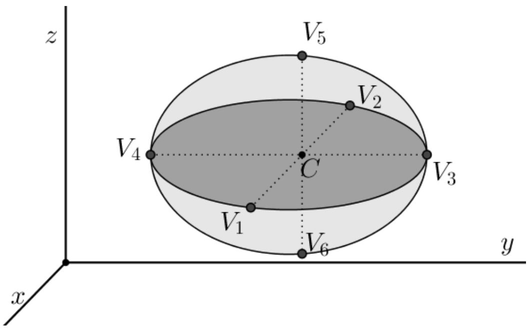
que representa una elipse en el plano yz de vértices

$$V_3,\ V_4,\ V_5(x_0, y_0, z_0 + c),\ V_6(x_0, y_0, z_0 - c).$$

Finalmente, la intersección de $\mathcal{E}$ con el plano π_3 paralelo al plano xz por C, es la curva de ecuaciones

$$\begin{cases} \dfrac{(x-x_0)^2}{a^2} + \dfrac{(y-y_0)^2}{b^2} + \dfrac{(z-z_0)^2}{c^2} = 1 \\ y = y_0 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} \dfrac{(x-x_0)^2}{a^2} + \dfrac{(z-z_0)^2}{c^2} = 1 \\ y = y_0 \end{cases}$$

que es una elipse de vértices $V_1,\ V_2,\ V_5$ y V_6.



Para completar el análisis de la gráfica de $\mathcal{E}$, lo intersecaremos con planos paralelos a los planos coordenados. Las curvas que se obtienen de intersecar una superficie con un plano de estas características se denominan **trazas** de la superficie.

Tomaremos un plano paralelo al plano yz, o sea, de ecuación $x = k$. El análisis de las intersecciones con los otros planos es análogo y lo dejamos como ejercicio.

Sean entonces α_k el plano de ecuación $x = k$. Observemos que $\alpha_{x_0} = \pi_1$ y, como ya hemos visto, su interesección con $\mathcal{E}$ es una elipse.

En general, $\mathcal{E} \cap \alpha_k$ es el lugar geométrico del espacio tal que las coordenadas de sus puntos verifican el sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} \dfrac{(x-x_0)^2}{a^2} + \dfrac{(y-y_0)^2}{b^2} + \dfrac{(z-z_0)^2}{c^2} = 1 \\ x = k \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} \dfrac{(y-y_0)^2}{b^2} + \dfrac{(z-z_0)^2}{c^2} = 1 - \dfrac{(k-x_0)^2}{a^2} \\ x = k \end{cases}$$

Tenemos entonces:

- Si $\frac{(k-x_0)^2}{a^2} < 1$, o sea, si $x_0 - a < k < x_0 + a$, entonces $\mathcal{E} \cap \alpha_k$ es una elipse en α_k.
- Si $|k - x_0| = a$, o sea entonces $\mathcal{E} \cap \alpha_{x_0+a} = \{V_1\}$ y $\mathcal{E} \cap \alpha_{x_0-a} = \{V_2\}$.
- Si $|k - x_0| > a$, entonces $\mathcal{E} \cap \pi_k = \emptyset$.

Observemos que si si $x_0 - a < k < x_0 + a$, entonces la elipse en el plano α_k tiene centro en $P_k(k, y_0, z_0)$ y está dada por las ecuaciones

$$\frac{(y-y_0)^2}{B_k^2} + \frac{(z-z_0)^2}{C_k^2} = 1, \quad x = k$$

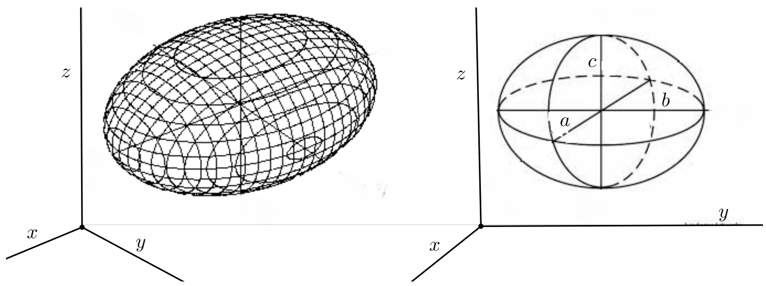
donde $B_k = b/\sqrt{1 - \dfrac{(k-x_0)^2}{a^2}} \leq b$. De la misma manera, $C_k \leq c$.

$B_k = b/\sqrt{1 - \dfrac{(k-x_0)^2}{a^2}}$ toma el valor b cuando $k = x_0$ y disminye acercandose cada vez más a 0 a medida que k se aleja de x_0 y se acerca a $x_0 - a$ o $x_0 + a$. Es decir que los planos α_k cortan a $\mathcal{E}$ en elipses cada vez más pequeñas centradas en puntos sobre la recta paralela al eje x por C, que degeneran en los puntos V_1 y V_2.

De manera completamente análoga, vemos que un plano de ecuación $y = k$ intersecará a $\mathcal{E}$ en una elipse si $|k - y_0| < b$, en el punto V_3 o V_4 si $|k - y_0| = b$ y vacío si $|k - y_0| > b$. Y un plano de ecuación $z = k$ intersecará a $\mathcal{E}$ en una elipse si $|k - z_0| < c$, en el punto V_5 o V_6 si $|k - z_0| = c$ y en el vacío si $|k - z_0| > c$.

Los puntos $V_1, V_2, \cdots, V_6$ se denominan **vértices** del elipsoide.

Con el análisis anterior estamos en condiciones de reconstruir la gráfica de $\mathcal{E}$ como mostramos en las siguientes figuras.



Ejemplos:

1. Sea $\mathcal{E}$ el lugar geométrico del espacio descrito por la ecuación

$$4x^2 + 9y^2 + 18z^2 - 8x - 36y + 36z + 22 = 0.$$

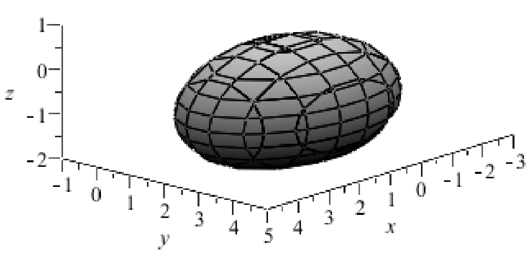
Completando cuadrados tenemos

$$\begin{aligned} P(x,y,z) \in \mathcal{E} \quad &\Leftrightarrow \quad 4(x^2 - 2x) + 9(y^2 - 4y) + 18(z^2 + 2z) + 22 = 0 \\ &\Leftrightarrow \quad 4(x-1)^2 - 4 + 9(y-2)^2 - 36 + 18(z+1)^2 - 18 + 22 = 0 \\ &\Leftrightarrow \quad \frac{(x-1)^2}{9} + \frac{(y-2)^2}{4} + \frac{(z+1)^2}{2} = 1 \end{aligned}$$

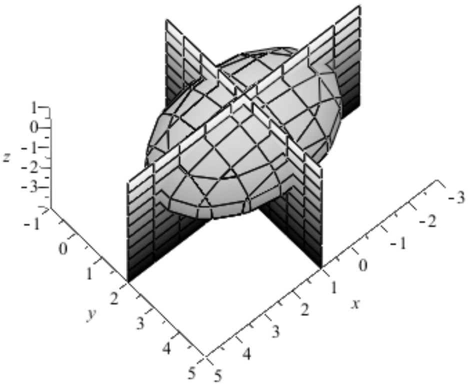
$\mathcal{E}$ es un elipsoide con centro en $C(1, 2, -1)$ y $a = 3$, $b = 2$, $c = \sqrt{2}$.

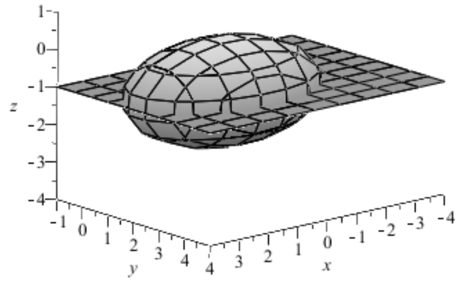
Sus vértices son los puntos $V_1(4, 2, -1)$, $V_2(-2, 2, -1)$, $V_3(1, 4, -1)$, $V_4(1, 0, -1)$, $V_5(1, 2, \sqrt{2} - 1)$ y $V_6(1, 2, -\sqrt{2} - 1)$.

En la siguiente figura mostramos dos vistas del elipsoide.



En las siguientes figuras mostramos la intersección del elipsoide con los planos paralelos a los ejes coordenados que pasan por el centro.





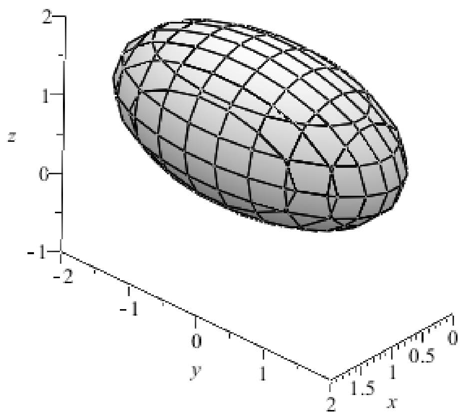
2. Sea $\mathcal{E}$ el elipsoide de vértices $V_1(2,0,1)$, $V_2(0,0,1)$, $V_3(1,2,1)$, $V_4(1,-2,1)$, $V_5(1,0,2)$, $V_6(1,0,0)$.

   Observemos que cada uno de los planos paralelos a los planos coordenados y que pasan por el centro del elipsoide, son aquellos determinados cuatro vértices coplanares. Así el centro del elipsoide coincide con el centro de las tres elipses que se obtienen de intersecarlo con cada uno de estos tres planos. En particular, el centro C de $\mathcal{E}$ es el punto medio de $\overline{V_1V_2}$, o sea, $C(1,0,1)$. Por lo tanto, $\mathcal{E}$ tendrá una ecuación de la forma

$$\frac{(x-1)^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{(z-1)^2}{c^2}=1$$

   donde $a=d(C,V_1)=1$, $b=d(C,V_3)=2$ y $c=d(C,V_5)=1$. Concluimos que la ecuación de $\mathcal{E}$ es $(x-1)^2+\dfrac{y^2}{4}+(z-1)^2=1$.

   Esbozamos en la siguiente figura la gráfica de $\mathcal{E}$.



3.2. Hiperboloides y conos

Analizaremos ahora qué superficies del espacio describe una ecuación del tipo (3.3) cuando uno de los sumandos del lado izquierdo es negativo.

Consideremos el lugar geométrico $\mathcal{H}$ del espacio dado por la ecuación

$$\boxed{\frac{(x-x_0)^2}{a^2}+\frac{(y-y_0)^2}{b^2}-\frac{(z-z_0)^2}{c^2}=1} \tag{3.8}$$

$\mathcal{H}$ se denomina **hiperboloide de una hoja** y el punto $C(x_0,y_0,z_0)$ se denomina **centro** del hiperboloide. Para estudiar qué propiedades tiene esta superficie, procederemos de manera similar a como lo hicimos con el estudio de los elipsoides.

Analizaremos primero las trazas de $\mathcal{H}$ sobre los planos paralelos a los planos coordenados que pasan por C.

Si cortamos $\mathcal{H}$ con el plano π_1 paralelo al plano yz por C, obtenemos una hipérbola dada en el espacio por el sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} \dfrac{(y-y_0)^2}{b^2} - \dfrac{(z-z_0)^2}{c^2} = 1 \\ x = x_0 \end{cases}$$

o sea, es una hipérbola en el plano π_1 con eje focal paralelo el eje y. De manera análoga, la traza de $\mathcal{H}$ sobre el plano π_2 paralelo al plano xz por C es una hipérbola con eje focal el eje paralelo al eje x dada por el sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} \dfrac{(x-x_0)^2}{a^2} - \dfrac{(z-z_0)^2}{c^2} = 1 \\ y = y_0 \end{cases}$$

y la traza sobre el plano π_3 paralelo al plano xy por C es la elipse en π_3 dada por

$$\begin{cases} \dfrac{(x-x_0)^2}{a^2} + \dfrac{(y-y_0)^2}{b^2} = 1 \\ z = z_0 \end{cases}$$

No aporta mayores datos estudiar la intersección de $\mathcal{H}$ con planos paralelos a los planos xz e yz, que en la mayoría de los casos serán hipérbolas. Si nos intersa en cambio estudiar las trazas de $\mathcal{H}$ sobre los planos α_k de ecuación $z = k$.

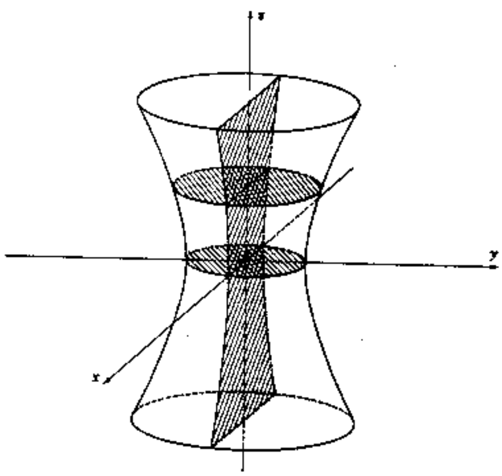
En este caso, tendremos curvas dadas por

$$\begin{cases} \dfrac{(x-x_0)^2}{a^2} + \dfrac{(y-y_0)^2}{b^2} = 1 + \dfrac{(k-z_0)^2}{c^2} \\ z = k \end{cases}$$

que son siempre elipses, dado que $1 + \frac{(k-z_0)^2}{c^2} > 0$.

La elipse $\mathcal{H} \cap \alpha_k$ está centrada en el punto $P_k(x_0, y_0, k)$. Es decir, todos sus centros están sobre la recta paralela al eje z que pasa por el centro del hiperboloide. Dejamos como ejercicio verificar que los cuatro vértices de todas estas elipses están sobre las hipérbolas $\mathcal{H} \cap \pi_1$ o $\mathcal{H} \cap \pi_2$.

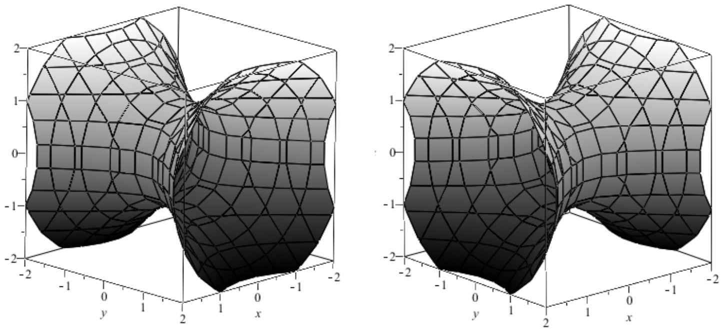
Mostramos en la siguiente figura un esbozo de la gráfica de $\mathcal{H}$ con las distintas trazas. El centro en este caso es el origen de coordenadas, pero la gráfica es análoga cuando el centro es un punto C cualquiera.



Observemos que si la ecuación de $\mathcal{H}$ fuese de la forma

$$\frac{(x-x_0)^2}{a^2} - \frac{(y-y_0)^2}{b^2} + \frac{(z-z_0)^2}{c^2} = 1 \quad \text{o} \quad -\frac{(x-x_0)^2}{a^2} + \frac{y-y_0)^2}{b^2} + \frac{(z-z_0)^2}{c^2} = 1$$

su grafica sería respectivamente de la siguiente forma:



Analizaremos ahora el caso en que dos de los sumandos del lado izquierdo en la ecuación (3.3) son negativos. Sea entonces $\mathcal{H}$ el lugar geométrico del espacio dado por la ecución

$$\boxed{-\frac{(x-x_0)^2}{a^2}-\frac{(y-y_0)^2}{b^2}+\frac{(z-z_0)^2}{c^2}=1.} \tag{3.9}$$

$\mathcal{H}$ se denomina **hiperboloide de dos hojas** y el punto $C(x_0, y_0, z_0)$ es su centro.

Nuevamente comenzamos determinando las trazas sobre los planos paralelos a los planos coordenados por C. Cuando intersecamos $\mathcal{H}$ con el plano π_1 de ecuación $z = z_0$, obtenemos que las coordenadas de los puntos $P(x, y, z)$ que estén en esta intersección deben verificar

$$\begin{cases} -\dfrac{(x-x_0)^2}{a^2}-\dfrac{(y-y_0)^2}{c^2}=1 \\ z=z_0 \end{cases}$$

Con lo cual

$$\mathcal{H}\cap\pi_1=\emptyset.$$

Cuando intersecamos $\mathcal{H}$ con el plano π_2 de ecuación $y = y_0$, obtendremos una curva cuyos puntos deberán verificar

$$\begin{cases} -\dfrac{(x-x_0)^2}{a^2}+\dfrac{(z-z_0)^2}{c^2}=1 \\ y=y_0 \end{cases}$$

que es una hipérbola en el plano π_2 con eje focal paralelo el eje z y vértices $V_1(x_0, y_0, z_0 + c)$, $V_2(x_0, y_0, z_0 - c)$.

Finalmente cuando intersecamos $\mathcal{H}$ con el plano π_3 de ecuación $x = x_0$ obtendremos una curva cuyos puntos deberán verificar

$$\begin{cases} -\dfrac{(y-y_0)^2}{b^2}+\dfrac{(z-z_0)^2}{c^2}=1 \\ x=x_0 \end{cases}$$

que es nuevamente una hipérbola, ahora en el plano π_3, con eje focal paralelo al eje z y los mismos vértices $V_1(x_0, y_0, z_0 + c)$, $V_2(x_0, y_0, z_0 - c)$.

Observemos que si bien $\mathcal{H}$ tiene intersección vacía con el plano π_1, cuando consideramos la intersección con planos α_k paralelos a éste, es decir, de ecuación $z = k$, obtenemos que los puntos $P(x, y, z)$ de la intersección verifican

$$\begin{cases} \dfrac{(x-x_0)^2}{a^2}+\dfrac{(y-y_0)^2}{b^2}=\dfrac{(k-z_0)^2}{c^2}-1 \\ z=k \end{cases}$$

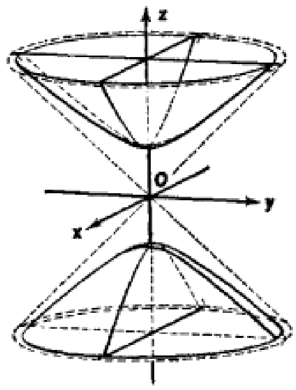
Luego la intersección $\mathcal{H}\cap\alpha_k$ es uno de los vértices V_1 o V_2 en caso que $|k - z_0| = c$, la intersección es vacía si $|k - z_0| < c$, o sea, si $z_0 - c < k < z_0 + c$, y es una elipse en el plano $z = k$ si $|k - z_0| > c$.

Observemos además que en este último caso, la elipse $\mathcal{H} \cap \alpha_k$ está dada por

$$\begin{cases} \dfrac{(x-x_0)^2}{A_k^2} + \dfrac{(y-y_0)^2}{B_k^2} = 1 \\ z = k \end{cases}$$

con $A_k^2 = a^2 \cdot \left(\dfrac{(k-z_0)^2}{c^2} - 1 \right)$ y por lo tanto $A_k \to \infty$ a medida que $|k - z_0| \to \infty$. Lo mismo ocurre con B_k. Es decir, las elipses se hacen cada vez más grandes a medida que nos alejamos del centro del hiperboloide.

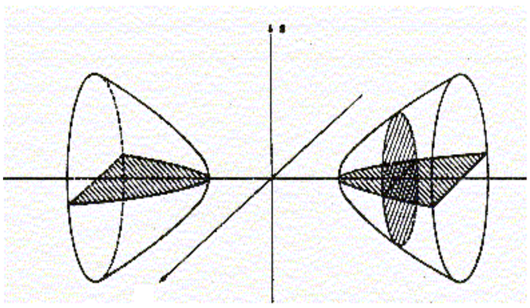
Esbozamos la gráfica de $\mathcal{H}$ en la siguiente figura, cuando C es el origen de coordenadas. La gráfica es análoga cuando C es un punto cualquiera del espacio.



Si la ecuación de $\mathcal{H}$ fuese de la forma

$$-\frac{(x-x_0)^2}{a^2} + \frac{(y-y_0)^2}{b^2} - \frac{(z-z_0)^2}{c^2} = 1$$

un análisis análogo muestra que la gráfica deberá ser de la forma



Dejamos como ejercicio esbozar la gráfica del lugar geométrico que se obtiene cuando el coeficiente que acompaña a $(x - x_0)^2$ es positivo.

Finalizamos esta sección estudiando las ecuaciones del tipo (3.4). Observemos que los únicos lugares geométricos no vacíos son los descriptos por alguna de las siguientes tres versiones:

$$\frac{(x-x_0)^2}{a^2} + \frac{(y-y_0)^2}{b^2} = \frac{(z-z_0)^2}{c^2}, \tag{3.10}$$

$$\frac{(y-y_0)^2}{b^2} + \frac{(z-z_0)^2}{c^2} = \frac{(x-x_0)^2}{a^2} \quad o \tag{3.11}$$

$$\frac{(x-x_0)^2}{a^2} + \frac{(z-z_0)^2}{c^2} = \frac{(y-y_0)^2}{b^2}. \tag{3.12}$$

Cualquiera de estos lugares geométricos se denominan **conos elípticos** de vértice $V(x_0, y_0, z_0)$.

Analizaremos el caso del cono $\mathcal{C}$ dado por la ecuación

$$\boxed{\frac{(x-x_0)^2}{a^2}+\frac{(y-y_0)^2}{b^2}=\frac{(z-z_0)^2}{c^2}.} \tag{3.13}$$

Si intesecamos $\mathcal{C}$ con el plano π_1 de ecuación $z=z_0$ obtenemos el vértice V del cono.

Si intersecamos $\mathcal{C}$ con el plano π_2 de ecuación $y=y_0$ obtenemos que un punto $P(x,y,z)$ pertenece a esta intersección si y sólo si sus coordenadas verifican

$$\left\{\begin{array}{l}\dfrac{(x-x_0)^2}{a^2}=\dfrac{(z-z_0)^2}{c^2}\\ y=y_0\end{array}\right. \quad\Leftrightarrow\quad \left\{\begin{array}{l}|x-x_0|=\dfrac{a}{c}|z-z_0|\\ y=y_0\end{array}\right.$$

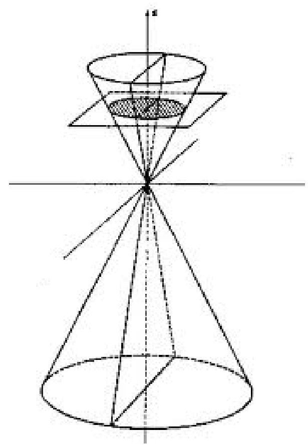
O sea que $\mathcal{C}\cap\pi_2$ es un par de rectas que se intersecan en V. Lo mismo ocurre si intersecamos $\mathcal{C}$ con el plano π_3 de ecuación $x=x_0$.

Si ahora consideramos las intersecciones de $\mathcal{C}$ con planos α_k de ecuación $z=k$, obtenemos que los puntos de la intersección verifican

$$\left\{\begin{array}{l}\dfrac{(x-x_0)^2}{a^2}+\dfrac{(y-y_0)^2}{b^2}=\dfrac{(k-z_0)^2}{c^2}\\ z=k\end{array}\right.$$

que es una elipse en el plano α_k siempre que $k\neq z_0$. Más aún, con el mismo análisis al que hicimos para el hiperboloide de dos hojas, vemos que estas elipses aumentan su tamaño a medida que nos alejamos del vértice.

Esbozamos la gráfica de $\mathcal{C}$ en la siguiente figura:



Ejemplos:

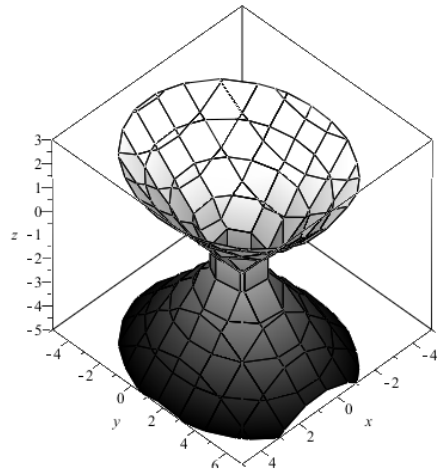
1. Consideremos el lugar geométrico $\mathcal{L}$ del espacio definido por la ecuación

$$x^2+\frac{1}{2}y^2-z^2-2x-2y-2z+1=0.$$

   Completando cuadrados, vemos que esta ecuación es equivalente a

$$(x-1)^2+\frac{(y-2)^2}{2}-(z+1)^2=1.$$

   Luego $\mathcal{L}$ es un hiperboloide de una hoja centrado en $P_0(1,2,-1)$ cuya gráfica se esboza en la siguiente figura.



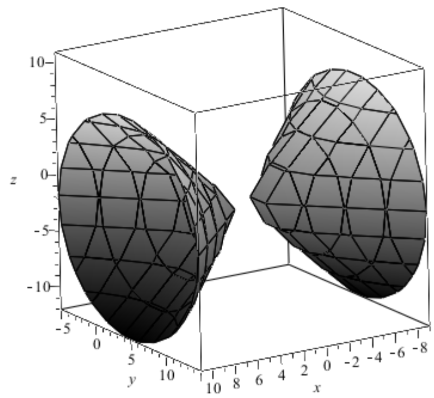
2. Consideremos el lugar geométrico $\mathcal{L}$ de ecuación

$$x^2 - y^2 - z^2 - 2x + 10y - 4z - 29 = 0$$

Completando cuadrados, obtenemos que esta ecuación es equivalente a

$$(x-1)^2 - (y-5)^2 - (z+2)^2 = 1.$$

Por lo tanto $\mathcal{L}$ es un hiperboloide de dos hojas centrado en $(1, 5, -2)$ cuya gráfica se esboza a continuación:



3.3. Superficies parabólicas y cilindros

Comenzaremos esta sección estudiando los lugares geométricos descriptos por las ecuaciones del tipo (3.5)

Supongamos primero que ambos sumandos del lado izquierdo de la ecuación son positivos. Tendremos entonces una ecuación del tipo

$$\boxed{\frac{(x-x_0)^2}{a^2} + \frac{(y-y_0)^2}{b^2} = \frac{z-z_0}{c}} \tag{3.14}$$

Sea $\mathcal{P}$ el lugar geométrico que describe esta ecuación. $\mathcal{P}$ se denomina **paraboloide elíptico** y el punto $V(x_0, y_0, z_0)$ es su **vértice**.

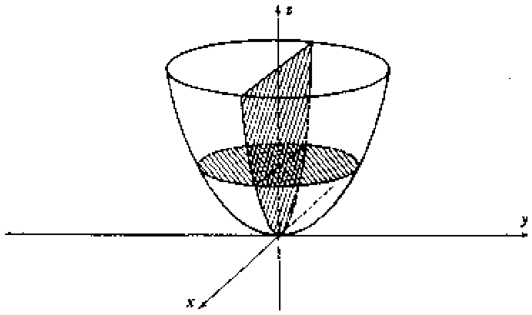
Si intersecamos $\mathcal{P}$ con el plano π_1 de ecuación $z = z_0$, obtenemos su vértice V.

Si intersecamos $\mathcal{P}$ con el plano π_2 de ecuación $y = y_0$, obtendremos una parábola con vértice en V contenida en el plano π_2, cuya directriz es paralela al eje x (su eje es paralelo al eje z) y contenida en el semiplano $y = y_0,\ z \geq z_0$ si $c > 0$ o en el semiplano $y = y_0,\ z \leq z_0$ si $c < 0$.

Obtenemos un resultado análogo si intersecamos $\mathcal{P}$ con el plano π_3 de ecuación $x = x_0$.

Si ahora intersecamos $\mathcal{P}$ con planos α_k de ecuación $z = k$, obtendremos elipses para los valores $k > z_0$ y vacío para $k < z_0$ si $c > 0$, o elipses para los valores $k < z_0$ y vacío para $k > z_0$ en el caso que $c < 0$.

En el caso $c > 0$ y $V = (0, 0, 0)$ la gráfica de $\mathcal{P}$ es la siguiente:



Si $c < 0$ y $V(0, 0, 0)$, la gráfica de $\mathcal{P}$ es simétrica de la anterior respecto del plano $z = z_0$, o sea, está contenida en el semiespacio $z \leq z_0$.

En caso que el vértice V sea un punto arbitrario o que en la ecuación (3.14) los roles entre x, y y z estén intercambiados, las gráficas son análogas.

Consideremos ahora el lugar geométrico $\mathcal{P}'$ descripto por la ecuación

$$\boxed{\frac{(x-x_0)^2}{a^2} - \frac{(y-y_0)^2}{b^2} = \frac{z-z_0}{c}} \tag{3.15}$$

$\mathcal{P}'$ se denomina **paraboloide hiperbólico**.

Si intersecamos $\mathcal{P}'$ con el plano π_1 de ecuación $y = y_0$, obtenemos una parábola p_1 de ecuaciones

$$\begin{cases} \dfrac{(x-x_0)^2}{a^2} = \dfrac{z-z_0}{c} \\ y = y_0 \end{cases}$$

es decir, una parábola en el plano π_1 con vértice en $V(x_0, y_0, z_0)$, directriz paralela al eje x (el eje de la parábola es paralelo al eje z) y contenida en el semiplano $y = y_0,\ z \geq z_0$ si $c > 0$ y contenida en el semiplano $y = y_0,\ z \leq z_0$ si $c < 0$.

Si intersecamos $\mathcal{P}'$ con el plano π_2 dado por $x = x_0$, obtenemos una parábola p_2 de ecuaciones

$$\begin{cases} -\dfrac{(y-y_0)^2}{b^2} = \dfrac{z-z_0}{c} \\ x = x_0 \end{cases}$$

es decir, una parábola en el plano π_2 con vértice en $V(x_0, y_0, z_0)$, directriz paralela al eje x (el eje de la parábola es paralelo al eje z) y contenida en el semiplano $y = y_0,\ z \leq z_0$ si $c > 0$ o en el semiplano $y = y_0,\ z \geq z_0$ si $c < 0$.

Finalmente, si intersecamos $\mathcal{P}'$ con el plano π_3 de ecuación $z = z_0$ obtenemos una curva de ecuaciones

$$\begin{cases} \dfrac{(x-x_0)^2}{a^2} = \dfrac{(y-y_0)^2}{b^2} \\ z = z_0 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} |x-x_0| = \dfrac{a}{b}|y-y_0| \\ z = z_0 \end{cases}$$

que representa dos rectas que se intersecan en V.

Si ahora consideramos la intersección de $\mathcal{P}'$ con planos de ecuación $x = k$, obtenemos una curva de ecuaciones

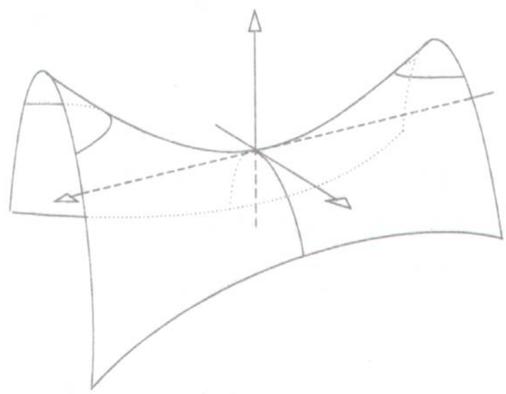
$$\begin{cases} \dfrac{(y-y_0)^2}{b^2} - \dfrac{(k-x_0)^2}{a^2} = -\dfrac{z-z_0}{c} \\ x = k \end{cases}$$

que representa una parábola en el plano $x = k$ cuya directriz es paralela al eje y y su eje de simetría es paralelo al eje z. Luego su vértice se obtiene de intersecarla con el plano $y = y_0$.

Por otra parte, como $\mathcal{P}'$ intersecado con el plano $y = y_0$ es la parábola p_1, obtenemos que estas nuevas parábolas en los planos de ecuación $x = k$ tienen sus vértices sobre la parábola p_2.

Si ahora intersecamos $\mathcal{P}'$ con planos de la forma $z = k$ obtendremos hipérbolas. Dejamos como ejercicio verificar que si $c > 0$, entonces estas hipérbolas tienen eje focal paralelo al eje y y sus vértices sobre la parábola p_1 si $k > z_0$ y eje focal paralelo al eje z y sus vértices sobre la parábola p_2 si $k < z_0$.

Esbozamos la gráfica de $\mathcal{P}'$ cuando $V(0,0,0)$ a continuación:



Analicemos finalmente qué ocurre si en la ecuación (3.2) tenemos los dos coeficientes que acompañan a una misma variable iguales a cero.

O sea, tenemos una ecuación de alguna de las

$$\boxed{Ax^2 + By^2 + Gx + Hy + J = 0, \quad By^2 + Cz^2 + Hy + Iz + J = 0, \quad Ax^2 + Cz^2 + Gx + Iz + J = 0} \tag{3.16}$$

No debemos confundir la ausencia de una variable en (3.16) con el hecho de que estas ecuaciones representan, en general, una superficie en el espacio y NO una curva.

De hecho sea $\mathcal{C}$ el lugar geométrico que define, por ejemplo, la ecuación

$$Ax^2 + By^2 + Gx + Hy + J = 0.$$

Si intersecamos $\mathcal{C}$ con el plano xy, obtendremos una curva de ecuaciones

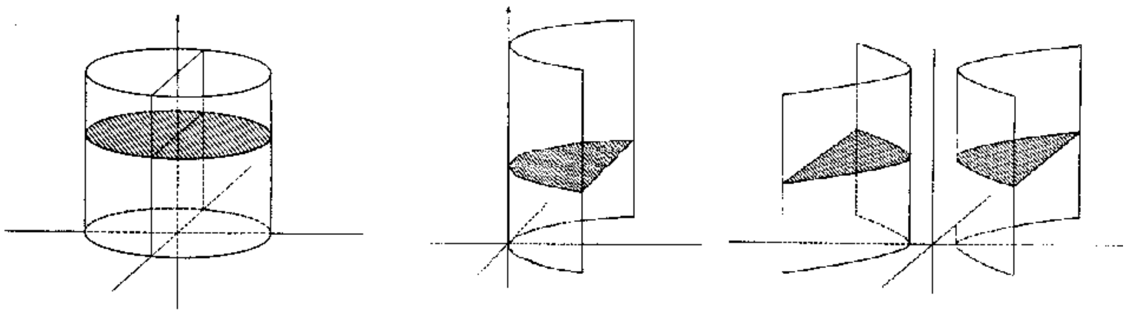
$$\begin{cases} Ax^2 + By^2 + Gx + Hy + J = 0 \\ z = 0 \end{cases} \tag{3.17}$$

que representa una cónica en el plano xy (o una cónica degenerada). Si tomamos un punto $(x_0, y_0, 0)$ de esta curva, podemos verificar fácilmente que la recta de ecuaciones paramétricas

$$\begin{cases} x = x_0 \\ y = y_0 \\ z = t \end{cases}, \quad t \in \mathbb{R}$$

está completamente contenida en $\mathcal{C}$. Por lo tanto, para esbozar la gráfica de $\mathcal{C}$ debemos graficar sobre el plano xy la cónica correspondiente, y todas las rectas perpendiculares al plano xy por puntos de la cónica.

Obtenemos así un **cilindro generalizado** como mostramos en la siguiente figura:



La cónica descripta por 3.17 se denomina **directriz** del cilindro y cada una de las rectas paralelas al eje z (es este caso) por puntos de la cónica se denominan **generatrices** del cilindro.

En el caso que (3.17) sea una cónica degenerada, (3.16) representará:

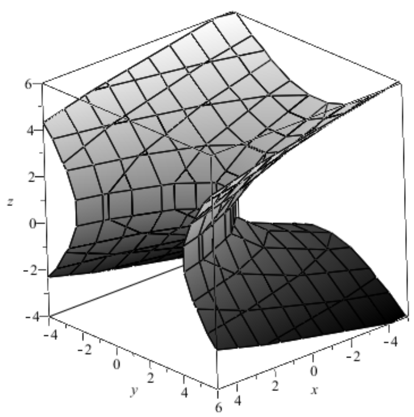
- dos planos secantes, en caso que (3.17) represente dos rectas secantes;
- dos planos paralelos en caso que (3.17) represente dos rectas paralelas;
- una recta perpendicular a algún plano coordenado en caso que (3.17) represente un punto;
- o el vacío en caso que (3.17) sea el conjunto vacío.

Ejemplos:

1. El lugar geométrico de ecuación

$$\frac{(y-1)^2}{4} - \frac{(z-1)^2}{3} = \frac{x}{2}$$

representa un paraboloide hiperbólico centrado en $P_0(0,1,1)$ y su gráfica se esboza en la siguiente figura:



2. Consideremos el lugar geométrico $\mathcal{L}$ en el espacio de ecuación

$$x^2 - y^2 - 2x + 4y - 3 = 0.$$

La ausencia de la variable z nos indica que $\mathcal{L}$ será un cilindro. Completando cuadrados obtenemos que la ecuación de $\mathcal{L}$ es

$$(x-1)^2 - (y-2)^2 = 0.$$

Luego $\mathcal{L}$ es un cono con generatrices paralelas al eje z y directriz la unión de las dos rectas $x-1 = y-2$, $x-1 = 2-y$. En particular, $\mathcal{L}$ es la unión de dos planos.

3. Si ahora $\mathcal{L}$ es el lugar geométrico de ecuación

$$x^2 - y^2 - 2x + 4y - 4 = 0$$

completando cuadrados obtenemos que esta ecuación es equivalente a

$$(x-1)^2 - (y-2)^2 = 1$$

que representa un cilindro cuya generatriz es una hipérbola.

4. Curvas en el espacio

Como hemos ya visto en la sección anterior y cuando estudiamos la recta en el espacio, prácticamente nunca podremos describir una curva en el espacio a través de una ecuación en tres variables, pues la mayoría de estas ecuaciones, salvo algunos casos degenerados, representan superficies.

Es cierto, por ejemplo, que las ecuaciones

$$(x-1)^2 + (y-1)^2 = 0, \quad (y-7)^{10} + (z-2)^{10} = 0, \quad (x+1)^4 + (z+2)^4 = 0$$

representan rectas en el espacio. La primera es la recta paralela al eje z por el punto de coordenadas $(1,1,0)$, la segunda es la recta paralela al eje x por el punto de coordenadas $(0,7,2)$ y la tercera representa una recta paralela al eje y por el punto de coordenadas $(-1,0,-2)$.

Sin embargo estas son excepciones.

En general, para describir una recta en el espacio necesitamos definirla como intersección de dos planos y por lo tanto sus ecuaciones cartesianas están dadas por un sistema de dos ecuaciones en las variables x, y y z.

De manera análoga, si pretendemos por ejemplo describir la circunferencia de radio 1, centrada en el origen y contenida en el plano xy, no podemos representarla mediante la ecuación

$$x^2 + y^2 = 1$$

pues esta ecuación, en el espacio, es la ecuación de un cilindro circular recto. Sin embargo, la circunferencia es la intersección de este cilindro con el plano xy y por lo tanto las coordenadas de sus puntos verificaran el sistema

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \\ z = 0 \end{cases} .$$

Otra forma de obtenerla, es intersecando una esfera de radio 1 centrada en el origen con el plano xy, y por lo tanto también podemos describirla mediante las ecuaciones

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 1 \\ z = 0 \end{cases} .$$

En general, para dar las ecuaciones cartesianas de una curva en el espacio, debemos considerarla como intersección de dos superficies, y por lo tanto una curva está descrita por un sistema de ecuaciones y no por una única ecuación.

Si $\mathcal{S}$ es una superficie en el espacio, su ecuación viene dada por

$$F(x,y,z) = 0$$

donde F es una función en tres variables (por supuesto no todas las superficies en el espacio admiten una descripción de este tipo, pero no las estudiaremos aquí).

Por ejemplo, en el caso de un elipsoide de ecuación

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

la función F que lo define es

$$F(x,y,z) = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1.$$

En el caso de una esfera de radio r centrada en (x_0, y_0, z_0), la función asociada es

$$F(x,y,z) = (x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-z_0)^2 - r^2.$$

De esta manera, si $\mathcal{S}_1$ y $\mathcal{S}_2$ son dos superficies de ecuaciones $F_1(x,y,z) = 0$ y $F_2(x,y,z) = 0$ respectivamente, y $S_1 \cap S_2$ es una curva γ, las ecuaciones cartesianas de γ vendrán dadas por el sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} F_1(x,y,z) = 0 \\ F_2(x,y,z) = 0 \end{cases}.$$

No existe una teoría general sobre cómo son las ecuaciones de determinadas curvas en función de las superficies que las definen al intersecarse. De hecho existen muchas formas distintas de definir una misma curva como intersección de dos superficies. Trabajaremos por lo tanto con algunos ejemplos particulares.

Ejemplos:

1. Supongamos que queremos encontrar las ecuaciones de una circunferencia de radio 3 con centro en $P_0(1,2,3)$ contenida en el plano de ecuación

$$2x - y + z - 3 = 0.$$

   Observemos primero que P_0 pertenece efectivamente al plano. Esta circunferencia puede obtenerse intersecando el plano con una esfera de centro en P_0 y radio 3. Por lo tanto sus ecuaciones serán

$$\begin{cases} (x-1)^2 + (y-2)^3 + (z-3)^2 = 9 \\ 2x - y + z - 3 = 0 \end{cases}$$

2. Consideremos la curva γ dada por las ecuaciones

$$\begin{cases} \frac{x^2}{8} + \frac{(y-1)^2}{2} + \frac{(z-3)^2}{8} = 1 \\ z = 5 \end{cases}$$

   La ecuación

$$\frac{x^2}{8} + \frac{(y-1)^2}{2} + \frac{(z-3)^2}{8} = 1 \tag{4.1}$$

   representa un elipsoide con centro en el punto $O'(0,1,3)$ y la ecuación $z = 5$ es un plano π (paralelo al plano xy). Por lo tanto si γ realmente es una curva (o sea no es vacío ni un vértice del elipsoide) será una elipse en el plano π. Reemplazando con $z = 5$ en la ecuación (4.1) obtenemos que las coordenadas de los puntos de γ verifican

$$\begin{cases} \frac{x^2}{8} + \frac{(y-1)^2}{2} + \frac{1}{2} = 1 \\ z = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{x^2}{8} + \frac{(y-1)^2}{2} = \frac{1}{2} \\ z = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{x^2}{4} + (y-1)^2 = 1 \\ z = 5 \end{cases}$$

   Por lo tanto γ es una elipse en el plano π con centro en el punto $C(0,1,5)$ y con $a = 2$, $b = 1$. Por lo tanto sus vértices son los puntos $V_1(2,1,5)$, $V_2(-2,1,5)$, $V_3(0,0,5)$ y $V_4(0,2,5)$.

   Observemos que existen infinitas formas de representar a γ. Por ejemplo

$$\begin{cases} \frac{x^2}{8} + \frac{(y-1)^2}{2} + \frac{(z-5)^2}{c^2} = 1 \\ z = 5 \end{cases}$$

   para cualquier valor de c que representa la intersección de un elipsoide con un plano.

   Otra forma de describir γ es directamente mediante el sistema

$$\begin{cases} \frac{x^2}{4} + (y-1)^2 = 1 \\ z = 5 \end{cases}$$

   que representa la intersección de un cilindro elíptico con un plano.

Finalmente proponemos el sistema

$$\begin{cases} \frac{x^2}{4} + (y-1)^2 + \frac{(z-5)^2}{12} = 1 \\ \frac{x^2}{4} + (y-1)^2 - \frac{(z-5)^2}{3} = 1 \end{cases}$$

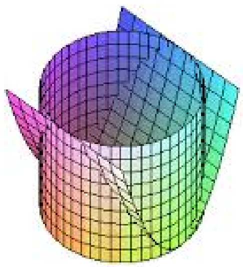
que representa la intersección en γ de un elipsoide con un hiperboloide de una hoja.

3. Analicemos la curva dada por el siguiente sistema de ecuaciones:

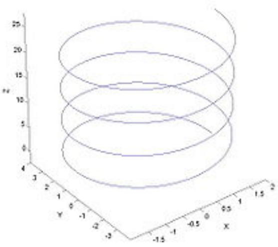
$$\gamma) \begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \\ z = x^2 \end{cases}$$

Entonces γ se obtiene como la intersección de un cilindro circular con eje el eje z, y un cilindro parabólico cuyas generatrices son paralelas al eje y.

Este es el primer ejemplo de una curva no plana (o sea, que no está contenida en un plano) de los que hemos visto. Esbozamos su gráfica en la siguiente figura:



No todas las curvas en el espacio pueden describirse como intersección de dos superficies. Es el caso de la **hélice cilíndrica** que mostramos en la siguinte figura:



Para describir la hélice y muchas otras curvas en el espacio, necesitamos de las **ecuaciones paramétricas**.

Como ya hemos visto en el caso de la recta y de las secciones cónicas, dar las ecuaciones paramétricas de una curva consiste en describir las coordenadas (x, y, z) de los puntos de la curva (o (x, y) en el caso de curvas planas) en función de un parámetro. Es decir, dada una curva γ, sus ecuaciones paramétricas serán de la forma

$$\boxed{\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \\ z = z(t) \end{cases}, \ t \in I} \tag{4.2}$$

donde I es algún subintervalo de $\mathbb{R}$ o todo $\mathbb{R}$.

En el caso de una curva en el plano, tendremos por supuesto ecuaciones del tipo

$$\boxed{\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}, \ t \in I.} \tag{4.3}$$

En el caso de una recta en el espacio que pasa por el punto $P_0(x_0, y_0, z_0)$ en la dirección del vector $\overline{u} = (u_1, u_2, u_2)$, vimos que $I = \mathbb{R}$ y en (4.2) debemos definir

$$x(t) = x_0 + tu_1, \quad y(t) = y_0 + tu_2, \quad z(t) = z_0 + tu_3.$$

O en el caso de una elipse en el plano con centro en $P_0(x_0, y_0)$, $I = [0, 2\pi)$ y debemos definir en (4.3)

$$x(t) = x_0 + a\cos t, \quad y(t) = y_0 + b\sin t.$$

No existe una teoría general para encontrar las ecuaciones paramétricas de una curva, o para determinar que curva representan determinadas ecuaciones paramétricas.

Observemos que $x(t)$, $y(t)$ y $z(t)$ pueden pensarse como funciones reales, cuyo dominio es un intervalo de $\mathbb{R}$, es decir, tenemos

$$x : I \to \mathbb{R}, \quad y : I \to \mathbb{R}, \quad z : I \to \mathbb{R}.$$

y es común pedir como condición mínima para la definición de curva que las funciones x, y y z sean funciones **continuas**. Esto se interpreta como que es posible realizar el gráfico de la curva sin levantar el lápiz.

De esta manera puede definirse una **curva en el espacio** como cualquier lugar geométrico tal que las coordenadas de sus puntos pueden definirse a través de ecuaciones del tipo (4.2) donde x, y y z son funciones continuas de t.

Una definición análoga puede hacerse para curvas en el plano.

Observemos que con esta definición, la hipérbola no es técnicamente una curva sino la unión de dos curvas, y es por ello que cuando quisimos encontrar sus ecuaciones paramétricas debimos parametrizar por separado cada una de sus ramas.

Finalizaremos esta sección analizando varios ejemplos.

Ejemplos:

En los primeros ejemplos encontraremos las ecuaciones paramétricas de las curvas que definimos como intersección de dos superficies en los ejemplos anteriores. Dejaremos la circunferencia del ejemplo 1 para el final.

4. Analicemos la elipse dada en el ejemplo 2 de esta sección. Observemos primero que el sistema original es equivalente al sistema

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{4} + (y-1)^2 = 1 \\ z = 5 \end{cases}$$

y por lo tanto el centro es $P_0(0, 1, 5)$, el eje focal es paralelo al eje x, la distancia entre el centro y cada uno de los vértices sobre el eje focal es 2 y la distancia entre el centro y cada uno de los otros vértices es 1. Luego podemos usar lo que sabemos sobre elipses en el plano para determinar que sus ecuaciones paramétricas son

$$\begin{cases} x = 2\cos\theta \\ y = 1 + \sin\theta \\ z = 5 \end{cases}, \quad \theta \in [0, 2\pi).$$

5. Consideremos ahora la curva dada en el ejemplo 3, llamémosla γ. En este caso, veremos como a partir de las ecuaciones cartesianas podemos derivar las ecuaciones paramétricas. Sea $P(x, y, z)$ un punto de γ. Observemos primero que sus coordenadas x e y verifican la ecuación

$$x^2 + y^2 = 1.$$

Por lo tanto deberá existir un número real θ tal que

$$x = \cos\theta, \quad y = \sin\theta.$$

Como además debe verificarse que $z = x^2$, resulta inmediato que las ecuaciones paramétricas de γ son

$$\begin{cases} x = \cos\theta \\ y = \sin\theta \\ z = \cos^2\theta \end{cases}, \quad \theta \in [0, 2\pi).$$

6. Sea $\mathcal{C}$ la circunferencia dada en el ejemplo 1 de esta sección. Su centro es el punto $P_0(1, 2, 3)$, su radio es 3, y está contenida en el plano π de ecuación $2x - y + z - 3 = 0$.

   Observemos primero que los vectores $\overline{v_1} = \frac{\sqrt{3}}{3}(1, 1, -1)$ y $\overline{v_2} = \frac{\sqrt{2}}{2}(0, 1, 1)$ constituyen una base ortonormal de los vectores paralelos a π. En efecto, es fácil verificar que $\overline{v_1} \times \overline{v_2} = 0$, lo que implica que $\overline{v_1}$ y $\overline{v_2}$ son perpendiculares, que $|\overline{v_1}| = |\overline{v_2}| = 1$, y si $\overline{n} = (2, -1, 1)$ es el vector normal a $\overline{n}$, entonces $\overline{v_1} \times \overline{n} = \overline{v_2} \times \overline{n} = 0$, lo que implica que $\overline{v_1}$ y $\overline{v_2}$ son paralelos a π.

   Consideremos ahora un punto P en $\mathcal{C}$. Entonces como $\overrightarrow{P_0P}$ es un vector paralelo a π, existirán constantes a y b tales que

$$\overrightarrow{P_0P} = a\overline{v_1} + b\overline{v_2}.$$

   Haciendo el producto interno con $\overline{v_1}$ y $\overline{v_2}$, como $|\overrightarrow{P_0P}| = 3$, resulta inmediato que

$$a = \overrightarrow{P_0P} \times \overline{v_1} = 3\cos(\widehat{\overrightarrow{P_0P}, \overline{v_1}}); \quad b = \overrightarrow{P_0P} \times \overline{v_2} = 3\cos(\widehat{\overrightarrow{P_0P}, \overline{v_2}}).$$

   Sea θ el ángulo que forman $\overrightarrow{P_0P}$ y $\overline{v_1}$, con $\theta \in [0, 2\pi]$, orientado en el sentido de recorrido que va de $\overline{v_1}$ a $\overline{v_2}$. Entonces $(\widehat{\overrightarrow{P_0P}, \overline{v_2}}) = \frac{\pi}{2} - \theta$ y por lo tanto

$$a = 3\cos\theta, \quad b = 3\sin\theta.$$

   Concluimos que $\overrightarrow{P_0P} = 3\cos\theta\,\overline{v_1} + 3\sin\theta\,\overline{v_2}$.

   Por otra parte, si $P(x, y, z)$, $\overrightarrow{P_0P} = (x - 1, y - 2, z - 3)$, e igualando componentes en la ecuación anterior resulta

$$\begin{cases} x = 1 + \sqrt{3}\cos\theta \\ y = 2 + \sqrt{3}\cos\theta + \frac{3\sqrt{2}}{2}\sin\theta \\ z = 3 - \sqrt{3}\cos\theta + \frac{3\sqrt{2}}{2}\sin\theta \end{cases}, \quad \theta \in [0, 2\pi).$$

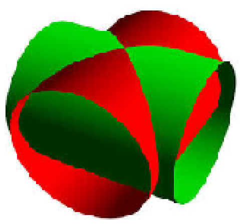
7. Consideremos la curva γ cuyas ecuaciones paramétricas son

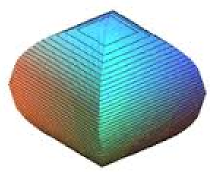
$$\begin{cases} x = \cos\theta \\ y = \sin\theta \\ z = \sin\theta \end{cases}, \quad \theta \in \mathbb{R}.$$

   Observemos que entonces las coordenadas de un punto $P(x, y, z)$ de γ verifican las ecuaciones

$$x^2 + y^2 = \cos^2\theta + \sin^2\theta = 1, \quad x^2 + z^2 = \cos^2 + \sin^2\theta = 1$$

   y por lo tanto γ una de las dos curvas que se obtienen de intersecar dos cilindros.





   De hecho, el sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \\ x^2 + z^2 = 1 \end{cases}$$

   define dos curvas. Una es la curva γ, y la otra es la curva dada por las ecuaciones paramétricas

$$\begin{cases} x = \cos\theta \\ y = \sin\theta \\ z = -\sin\theta \end{cases}, \quad \theta \in \mathbb{R}.$$

8. Una hélice cilíndrica es una curva sobre un cilindro circular recto de modo que la coordenada z de sus puntos es proporcional al ángulo que forma la proyección del vector posición del punto sobre el plano xy con el versor $\bar{i}$.

   Supongamos que $P(x, y, z)$ es un punto de la hélice sobre un cilindro cuya base es un círculo de radio a. Entonces la proyección del vector posición $\overrightarrow{OP}$ sobre el plano xy es el vector $\overline{v} = (x, y, 0)$. Sea θ el ángulo (orientado) que forma $\overline{v}$ con el versor $\bar{i}$. Entonces es claro que

   $$x = a\cos\theta, \quad y = b\cos\theta$$

   y por definición, debe existir un número real k de modo que $z = k\theta$. Luego sus ecuaciones paramétricas son

   $$\begin{cases} x = a\cos\theta \\ y = a\sin\theta \\ z = k\theta \end{cases}, \quad \theta \in \mathbb{R}.$$

   Observemos que si r es una generatriz del cilindro que pasa por un punto $(x_0, y_0, 0)$ de la base, sus ecuaciones cartesianas son

   $$\begin{cases} x = x_0 \\ y = y_0 \end{cases}.$$

   Sea θ_0 tal que $x_0 = a\cos\theta_0$, $y_0 = a\sin\theta_0$ y sea P_n el punto de la hélice que describen los parámetros $\theta_0 + 2\pi n$, con $n \in \mathbb{Z}$.

   Entonces P_n tiene coordenadas $(a\cos(\theta_0 + 2\pi n), a\sin(\theta_0 + 2\pi n), k(\theta_0 + 2\pi n)) = (x_0, y_0, k(\theta_0 + 2\pi n))$.

   Es decir, todos los puntos P_n están sobre la recta r y la distancia entre dos puntos consecutivos es $2\pi k$.

   El número $2\pi k$ se denomina **paso** de la hélice.

5. Superficies parametrizadas y superficies de revolución

Al igual que hemos encontrado ecuaciones paramétricas de las curvas, podemos encontrar ecuaciones paramétricas de una superficie. No todas las superficies admiten ecuaciones paramétricas, nos dedicaremos en esta sección a estudiar algunos casos importantes.

Recordemos que un plano que pasa por el punto $P_0(x_0, y_0, z_0)$ y tiene come vectores dirección los vectores $\overline{u} = (u_1, u_2, u_3)$ y $\overline{v} = (v_1, v_2, v_3)$, admite ecuaciones paramétricas de la siguiente forma:

$$\begin{cases} x = x_0 + s\,u_1 + t\,v_1 \\ y = y_0 + s\,u_2 + t\,v_2 \\ z = z_0 + s\,u_3 + t\,v_3 \end{cases}, \quad \alpha,\ \beta \in \mathbb{R}.$$

Esto nos indica que así como las curvas (en el plano o en el espacio) pueden ser descritas utilizando un parámetro, para parametrizar los puntos de una superficie necesitaremos dos parámetros.

De esta manera, decimos que una superficie admite **ecuaciones paramétricas** si las coordenadas de sus puntos pueden obtenerse en función de dos parámetros. En ese caso, genéricamente expresamos las ecuaciones paramétricas de una superficie como

$$\boxed{\begin{cases} x = x(s,t) \\ y = y(s,t) \\ z = z(s,t) \end{cases}, \quad s \in I,\ t \in J} \tag{5.1}$$

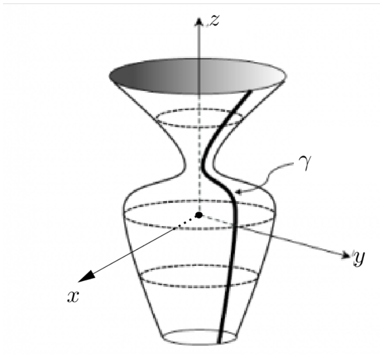
Comenzaremos introduciendo un nuevo tipo de superficies, denominadas **superficies de revolución**.

Supongamos que tenemos una curva γ contenida en el semiplano del plano yz definido por aquellos puntos con $y \geq 0$. Entonces las coordenadas de los puntos de γ pueden ser parametrizadas como

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = \alpha(t) \quad\quad t \in I \\ z = \beta(t) \end{cases}$$

(decidimos cambiar el nombre de las funciones que parametrizan la curva para evitar confusiones con las funciones que parametrizan las respectivas coordenadas en la superficie).

Sea S la superficie que se genera al rotar γ alrededor del eje z.



Sea $P(x, y, z)$ un punto de S. Observemos que si intersecamos S con el plano paralelo π al plano xy que pasa por P (o sea, el perpendicular al eje z por P), obtenemos una circunferencia $\mathcal{C}$ con centro en el punto de coordenadas $(0, 0, z)$.

Por otra parte, $\mathcal{C}$ intersecará a γ en un punto. Por lo tanto, existirá un parámetro t tal que este punto de intersección puede representarse como

$$(0, \alpha(t), \beta(t)).$$

Es claro entonces que el radio de $\mathcal{C}$ es $y(t)$ y que todos los puntos del plano π (y por lo tanto de $\mathcal{C}$) tienen componente $z = \beta(t)$.

$\mathcal{C}$ tiene por lo tanto ecuaciones paramétricas de la forma

$$\begin{cases} x = \alpha(t)\cos\theta \\ y = \alpha(t)\sin\theta \quad , \ \theta \in [0, 2\pi) \\ z = \beta(t) \end{cases}$$

Observemos que el parámetro t en las ecuaciones anteriores está fijo. Hemos probado entonces que las coordenadas de cualquier punto de S pueden ser descritas como

$$\boxed{\begin{cases} x = \alpha(t)\cos\theta \\ y = \alpha(t)\sin\theta \quad , \ t \in I, \ \theta \in [0, 2\pi) \\ z = \beta(t) \end{cases}} \tag{5.2}$$

y por lo tanto éstas son las ecuaciones paramétricas de S.

Si ahora suponemos que la curva está contenida en el semiplano del plano yz pero con $z \geq 0$ y giramos alrededor del eje z, obtendremos que las ecuaciones paramétricas de la superficie de revolución S generada son

$$\boxed{\begin{cases} x = \beta(t)\cos\theta \\ y = \alpha(t) \quad\quad\quad , \ t \in I, \ \theta \in [0, 2\pi) \\ z = \beta(t)\sin\theta\beta(t) \end{cases}} \tag{5.3}$$

Si ahora tenemos una curva contenida en el plano xy que admite una parametrización de la forma $(\alpha(t), \beta(t), 0)$ con $\alpha(t) \geq 0$, la superficie de revolución que se obtiene de girar esta curva alrededor del eje y admite ecuaciones paramétricas de la forma

$$\boxed{\left\{\begin{array}{l} x = \alpha(t)\cos\theta \\ y = \beta(t) \\ z = \alpha(t)\sin\theta \end{array}\right. , \; t \in I, \; \theta \in [0, 2\pi)} \tag{5.4}$$

y si suponemos que $\beta(t) \geq 0$ y rotamos alrededor del eje x, sus ecuaciones serán de la forma

$$\boxed{\left\{\begin{array}{l} x = \alpha(t) \\ y = \beta(t)\cos\theta \\ z = \beta(t)\sin\theta \end{array}\right. , \; t \in I, \; \theta \in [0, 2\pi)} \tag{5.5}$$

Ecuaciones análogas pueden obtenerse cuando la curva está contenida en algún semiplano del plano xz (las analizaremos en la práctia).

Ejemplos:

1. Sea C un cilindro circular recto cuya base es una circunferencia de radio a. Entonces La intersección de C con el plano yz es la unión de las dos rectas de ecuaciones

$$y = a \quad \text{o} \quad y = -a.$$

   Es claro que el cilindro es la superficie de revolución que se obtiene de rotar la recta de ecuación $y = a$ alrededor del eje z. Los puntos de esta recta admiten una parametrización de la forma $(0, a, t)$, $t \in \mathbb{R}$. Por lo tanto para encontrar sus ecuaciones paramétricas debemos reemplazar en (5.2) con

$$\alpha(t) = a, \quad \beta(t) = t.$$

   Luego las ecuaciones paramétricas del cilindro son

$$\left\{\begin{array}{l} x = a\cos\theta \\ y = a\sin\theta \\ z = t \end{array}\right. , \quad t \in \mathbb{R}, \; \theta \in [0, 2\pi).$$

2. Sea $\mathcal{S}$ una esfera centrada en el origan de radio a. Observemos que S es la superficie de revolución que se obtiene de girar una semicircunferencia de radio a contenida en el plano yz con $y \geq 0$. Esta semicircunferencia admite una parametrización de la forma

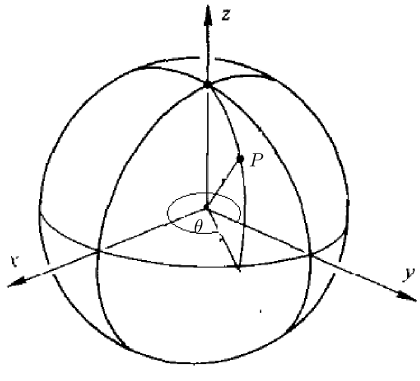
$$\left\{\begin{array}{l} x = 0 \\ y = a\cos t \\ z = a\sin t \end{array}\right. , \; t \in \left[\frac{3}{2}\pi, \frac{5}{2}\pi\right]$$

   En este caso debemos reemplazar con

$$\alpha(t) = a\cos t, \quad \beta(t) = a\sin t$$

   en (5.2) y obtenemos que la esfera de radio a admite las siguientes ecuaciones paramétricas:

$$\left\{\begin{array}{l} x = a\cos t\cos\theta \\ y = a\cos t\sin\theta \\ z = a\sin t \end{array}\right. , \quad t \in \left[\frac{3}{2}\pi, \frac{5}{2}\pi\right], \; \theta \in [0, 2\pi). \tag{5.6}$$



3. Supongamos ahora que S es una esfera con centro en $P_0(x_0, y_0, z_0)$ de radio a. Entonces sus ecuaciones cartesinas son

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 = a^2.$$

Sea $P(x, y, z) \in S$ y pongamos $x' = x - x_0$, $y' = y - y_0$, $z' = z - z_0$. Entonces el punto $P'(x', y', z')$ pertenece a la esfera centrada en el origen de radio a pues sus coordenadas verifican $x'^2 + y'^2 + z'^2 = 1$. Luego existen parámetros t y θ de modo que (x', y', z') pueden ser parametrizados según las ecuaciones (5.6). Es decir, $x' = a\cos t \cos\theta$, etc. Luego las ecuaciones paramétricas de la esfera S son

$$\left\{\begin{array}{l} x = x_0 + a\cos t\cos\theta \\ y = y_0 + a\cos t\sin\theta \\ z = z_0 + a\sin t \end{array}\right. , \quad t \in \left[\frac{3}{2}\pi, \frac{5}{2}\pi\right], \ \theta \in [0, 2\pi).$$

4. Sea $\mathcal{E}$ el elipsoide de ecuación cartesiana

$$\frac{(x - x_0)^2}{a^2} + \frac{(y - y_0)^2}{b^2} + \frac{(z - z_0)^2}{c^2} = 1.$$

Sea $P(x, y, z) \in \mathcal{E}$ y pongamos

$$x' = \frac{(x - x_0)^2}{a^2}, \quad y' = \frac{(y - y_0)^2}{b^2}, \quad z' = \frac{(z - z_0)^2}{c^2}.$$

Entonces $P'(x', y', z')$ trivialmente pertenece a la esfera centrada en el origen de radio 1. Por lo tanto sus coordenadas pueden expresarse como

$$\left\{\begin{array}{l} x' = \cos t\cos\theta \\ y' = \cos t\sin\theta \\ z' = \sin t \end{array}\right. \quad \Rightarrow \quad \left\{\begin{array}{l} \frac{x - x_0}{a} = \cos t\cos\theta \\ \frac{y - y_0}{b} = \cos t\sin\theta \\ \frac{z - z_0}{c} = \sin t \end{array}\right. .$$

Despejando obtenemos que las ecuaciones paramétricas de $\mathcal{E}$ son

$$\left\{\begin{array}{l} x = x_0 + a\cos t\cos\theta \\ y = y_0 + b\cos t\sin\theta \\ z = z_0 + c\sin t \end{array}\right. , \quad t \in \left[\frac{3}{2}\pi, \frac{5}{2}\pi\right], \ \theta \in [0, 2\pi).$$

5. Consideremos ahora el hiperboloide de una hoja $\mathcal{H}$ dado por la ecuación

$$x^2 + y^2 - z^2 = 1.$$

Observemos que al intersecar $\mathcal{H}$ con planos paralelos al plano xy obtenemos circunferencias de ecuación

$$\left\{\begin{array}{l} x^2 + y^2 = 1 + z_0^2 \\ z = z_0 \end{array}\right. .$$

Esto nos indica que el hiperboliode de una hoja es la superficie de revolución que se obtiene de hacer girar alrededor del eje z la rama de la hipérbola $\mathcal{H} \cap$ plano yz con $y \geq 0$.

Esta curva admite las siguientes ecuaciones cartesianas y paramétricas:

$$\left\{\begin{array}{l} y^2 - z^2 = 1 \\ x = 0 \\ y \geq 0 \end{array}\right. \quad \Rightarrow \quad \left\{\begin{array}{l} x = 0 \\ y = \cosh\, t \\ z = \sinh\, t \end{array}\right. .$$

Por lo tanto debemos reemplazar con $\alpha(t) = \cosh\, t$ y $\beta(t) = \sinh\, t$ en (5.2) para obtener que las ecuaciones paramétricas de $\mathcal{H}$ son

$$\left\{\begin{array}{l} x = \cosh\, t \cos\theta \\ y = \cosh\, t \sin\theta \\ z = \sinh\, t \end{array}\right. , \quad t \in \mathbb{R},\ \theta \in [0, 2\pi) \tag{5.7}$$

Consideremos ahora el hiperboloide de una hoja $\mathcal{H}'$ de ecuación

$$\frac{(x - x_0)^2}{a^2} + \frac{(y - y_0)^2}{b^2} - \frac{(z - z_0)^2}{c^2} = 1$$

centrado en $C(x_0, y_0, z_0)$.

Sea $P(x, y, z)$ un punto de $\mathcal{H}'$ y sea $P'(x', y', z')$ donde

$$x' = \frac{x - x_0}{a}, \quad y' = \frac{y - y_0}{b}, \quad z' = \frac{z - z_0}{c}.$$

Entonces $P' \in \mathcal{H}$ y (x', y', z') pueden expresarse utilizando (5.7). Despejando x, y y z obtenemos que las ecuaciones paramétricas de $\mathcal{H}'$ son

$$\left\{\begin{array}{l} x = x_0 + a \cosh\, t \cos\theta \\ y = y_0 + b \cosh\, t \sin\theta \\ z = z_0 + c \sinh\, t \end{array}\right. , \quad t \in \mathbb{R},\ \theta \in [0, 2\pi)$$

6. Si consideramos el hiperboloide de dos hojas $\mathcal{H}$ de ecuación

$$-x^2 + y^2 - z^2 = 1$$

Nuevamente, es fácil verificar que $\mathcal{H}$ es la superficie de revolución que se obtiene de girar la mitad de la hipérbola de ecuaciones

$$\left\{\begin{array}{l} y^2 - z^2 = 1 \\ x = 0 \\ y \geq 0 \end{array}\right.$$

alrededor del eje z. Si analizamos la gráfica de esta superficie, vemos que tiene dos *partes*, una contenida en el semiespacio $z \geq 0$ y otra en $z \leq 0$. Cada una de estas partes se denomina una **componente conexa** de la superficie. Esto se debe a que dos puntos que estén en una misma componente se pueden unir siempre por una curva contenida en ella, mientras que dos puntos que no lo estén no.

Una superficie no conexa nunca puede ser parametrizada totalmente con una única paramerización (lo mismo ocurrió cuando encontramos las ecuaciones paramétricas de la hipérbola).

Por lo tanto debemos hacer girar la curva

$$\left\{\begin{array}{l} y^2 - z^2 = 1 \\ x = 0 \\ y \geq 0 \\ z \geq 0 \end{array}\right. \quad \Rightarrow \quad \left\{\begin{array}{l} x = 0 \\ y = \sinh\, t \\ z = \cosh\, t \end{array}\right. , \quad t \in [0, \infty)$$

o bien la curva de ecuaciones paramétricas

$$\left\{\begin{array}{l} x = 0 \\ y = \sinh\, t \\ z = -\cosh\, t \end{array}\right. , \quad t \in [0, \infty)$$

alrededor del eje z para obtener la parametrización de cada una de las componentes de $\mathcal{H}$.

Posteriormente, transformando las coordenadas como en los ejemplos anteriores obtenemos la parametrización de las componentes de cualquier hiperboloide de dos hojas.

7. Finalizamos esta serie de ejemplos encontrando la parametrización del hiperboloide hiperbólico $\mathcal{P}$ de ecuación
$$\frac{(x-x_0)^2}{a^2} - \frac{(y-y_0)^2}{b^2} = \frac{z-z_0}{c}.$$
Esta no es una superficie de revolución, y su parametrización no puede obtenerse a partir de una superficie de revolución como en los ejemplos anteriores.

Sin embargo, es uno de los casos más sencillos, ya que una de las coordenadas (en este caso la z), puede expresarse en función de las otras dos. En efecto, en este caso tenemos
$$z = z_0 + c\left(\frac{(x-x_0)^2}{a^2} - \frac{(y-y_0)^2}{b^2}\right)$$
Por lo tanto podemos parametrizarla poniendo
$$\left\{\begin{array}{l} x = s \\ y = t \\ z = z_0 + c\left(\frac{(s-x_0)^2}{a^2} - \frac{(t-y_0)^2}{b^2}\right) \end{array}\right. \quad , \quad s,t \in \mathbb{R}$$
Observemos que podríamos haber puesto
$$\frac{x-x_0}{a} = s, \quad \frac{y-y_0}{b} = t \;\Rightarrow\; x = x_0 + as,\; y = y_0 + bt \;\Rightarrow\; \left\{\begin{array}{l} x = x_0 + as \\ y = y_0 + bs \\ z = z_0 + c(s^2+t^2) \end{array}\right. \quad , \quad s,t \in \mathbb{R}.$$