PRÁCTICA 1 - Números reales

1. Utilizando los axiomas de cuerpo, los teoremas probados en teoría y considerando $a, b, c \in \mathbb{R}$, demostrar las siguientes propiedades de los números reales:

   -a- $-(-a) = a$ (El número opuesto al opuesto de a es el propio número a).
   -b- $-0 = 0$ (El opuesto a 0 es el propio 0).
   -c- $0 \cdot a = 0$. (El producto de 0 con cualquier otro número es 0).
   -d- $a(-b) = -(ab) = (-a)b$.
   -e- $(-a)(-b) = ab$
   -f- $a(b - c) = ab - ac$.

2. Utilizando los axiomas de orden, los teoremas probados en teoría y considerando $a, b, c, d \in \mathbb{R}$, demostrar las siguientes propiedades de los números reales:

   -a- Si $a < b$, entonces $a + c < b + c$.
   -b- Si $a < b$ y $c < 0$, entonces $ac > bc$.
   -c- Si $a \neq 0$, entonces $a^2 > 0$ (donde a^2 es una notación para el producto aa).
   -d- $1 > 0$. Es decir, $1 \in \mathbb{R}^+$.
   -e- Si $a < b$, entonces $-b < -a$. En particular, si $a < 0$ entonces $-a > 0$.
   -f- $ab > 0$ si y solo si a y b son los dos positivos o los dos negativos.
   -g- $a > 0$ si y solo si $\dfrac{1}{a} > 0$.

3. Resolver cada una de las siguientes inecuaciones. Proporcionar el conjunto solución tanto en forma de intervalo como gráficamente.

   (a). $4x > 8$
   (b). $6y < 18$
   (c). $2m \leq -6$
   (d). $-r \leq -7$
   (e). $3r + 1 \geq 16$
   (f). $2m - 5 \geq 15$
   (g). $-3(z - 6) > 2z - 5$
   (h). $-2(y + 4) \leq 6y + 8$
   (i). $-3 < x - 5 < 6$
   (j). $-19 \leq 3x - 5 \leq -9$
   (k). $-16 < 3t + 2 < -11$
   (l). $-4 \leq \dfrac{2x - 5}{6} \leq 5$
   (m). $(x - 3)\sqrt{x + 1} \geq 0$
   (n). $3x < \dfrac{1 + 6x}{2} < \dfrac{9x - 8}{3}$
   (ñ). $x \leq x + 1 \leq x + 5$

4. Hallar el conjunto de soluciones de los siguientes sistemas de inecuaciones de primer grado con una incógnita. Expresarlos como intervalos de números reales y graficar.

   (a). $\begin{cases} 4x - 8 > -6, \\ \dfrac{x}{2} + 2 > 0. \end{cases}$

   (b). $\begin{cases} 5x + \dfrac{1}{4} \geq 0, \\ 2x - 10 < 0, \\ 7x - 14 \leq 0. \end{cases}$

5. Resolver cada una de las siguientes inecuaciones fraccionarias. Proporcionar el conjunto solución tanto en forma de intervalo como gráficamente.

$$\text{(a).}\quad \frac{5}{x+3}+\frac{3}{x-1}<0\,,\qquad \text{(b).}\quad \frac{4x-3}{3-x}>0\,,\qquad \text{(c).}\quad \frac{4-9x}{5x+7}\leq 3.$$

6. ¿A qué distancia está 7 de 4? ¿Y -3 de -19? ¿Y -24 de 49?

-a- Encontrar gráfica y analíticamente los puntos que distan al 3 en menos de 2.

-b- Encontrar gráfica y analíticamente los puntos que distan al -1 en menos de 4.

-c- Encontrar gráfica y analíticamente los puntos que distan al 0 en más de 1.

7. Representar en la recta numérica los puntos x tales que:

(a). $|x|=4$.

(b). $|x-4|<1$.

(c). $|x+2|\geq 1$.

(d). $|x-3|<7$.

(e). $\left|x^2-3x-2\right|\leq 2$.

(f). $\dfrac{3}{|3x+1|}\leq 2$.

8. Decidir si cada uno de los siguientes conjuntos está acotado, acotado superiormente o acotado inferiormente.

A= $\{1,2,3,4,5\}$

B= $\{x\in\mathbb{R}\,/\,-3\leq x\leq 6\}$

C= $[2,8)$

D= $\{x\in\mathbb{R}\,/\,x=2k,\ k\in\mathbb{N}\}$

E= $\mathbb{Z}-\mathbb{N}$

F= $\{0\}$

G= $\left\{x\in\mathbb{R}\,/\,x=1-\dfrac{1}{k},\ k\in\mathbb{N}\right\}$

H= $\mathbb{R}-\mathbb{Z}$

I= $\emptyset$

9. Respecto de los conjuntos del ejercicio anterior, se pide:

-a- en los casos en que los conjuntos están acotados superior y/o inferiormente, determinar el supremo y/o ínfimo;

-b- establecer si los supremos e ínfimos obtenidos en el ítem anterior son máximos y mínimos, respectivamente, del conjunto considerado.

10. Sea A un conjunto no vacío de números reales. Probar que A está acotado si y sólo si existe un número real positivo L tal que $|x|<L$ para todo $x\in A$.

11. Demostrar que si α y β son dos números reales tales que ambos son mínimo del mismo conjunto A, entonces $\alpha=\beta$.

12. Sea A un conjunto no vacío de números reales. Se define el conjunto siguiente:

$$-A=\{x\in\mathbb{R}\,:\,-x\in A\}\,.$$

ESCUELA DE CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
Av. Pellegrini 250. Rosario
+54 0341 - 480 2649 internos 216 - 119

-a- Siendo A_1, A_2 y A_3 los conjuntos encontrados en el ejercicio 7, hallar los conjuntos $-A_1$, $-A_2$ y $-A_3$.

-b- Mostrar que $-A$ es un conjunto no vacío y que $-(-A) = A$.

-c- Hallar las condiciones bajo las cuales se tiene que $-A = A$.

-d- Muestre que si A es un conjunto acotado superiormente (inferiormente) entonces $-A$ es un conjunto acotado inferiormente (superiormente).

-e- Muestre que si A posee supremo entonces $-A$ posee ínfimo y se verifica que $\text{ínf}(-A) = -\sup(A)$, y análogamente, si A posee ínfimo entonces $-A$ posee supremo y se verifica que $\sup(-A) = -\text{ínf}(A)$.

-f- Utilizar los resultados de las partes anteriores para mostrar que todo conjunto no vacío de números reales acotado inferiormente posee ínfimo.

13. Si A es un conjunto no vacío de números reales y c es un número real, se define el conjunto

$$cA = \{cx \,:\, x \in A\}\,.$$

-a- Si $A = \{x \in \mathbb{R} \,:\, x \geq 2\}$ y $B = [-1, 2)$, determinar $2A$ y $-3B$. Analizar las cotas superiores e inferiores de estos conjuntos.

-b- Conjeturar las relaciones entre $\sup(A)$, $\text{ínf}(A)$, $\sup(c\,A)$ e $\text{ínf}(c\,A)$.

14. Si A y B son dos conjuntos no vacíos de números reales tales que

$$a \in A \,\wedge\, b \in B \Rightarrow a \leq b.$$

-a- Demostrar que el conjunto A es acotado superiormente y el conjunto B es acotado inferiormente.

-b- ¿Existe alguna relación entre el $\sup(A)$ y el $\text{ínf}(B)$? Hacer una conjetura sobre tal relación.

-c- Demostrar lo conjeturado en el ítem anterior.

15. Probar que:

-a- Si $|x| < \dfrac{1}{n}$ para todo $n \in \mathbb{N}$ entonces $x = 0$.

-b- Si $|x| < \varepsilon$ para todo $\varepsilon > 0$ entonces $x = 0$.

ESCUELA DE CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
Av. Pellegrini 250. Rosario
+54 0341 - 480 2649 internos 216 - 119