

Unidad 1: Presentación Axiomática de los Números Reales

Análisis Matemático I

Iker M. Canut

17 de julio de 2020

1. Axiomas de Cuerpo

- Propiedad **Conmutativa**: $a + b = b + a$ y $a \cdot b = b \cdot a$
- Propiedad **Asociativa**: $a + (b + c) = (a + b) + c$ y $a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$
- Propiedad **Distributiva**: $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$
- Existencia de **Elementos Neutros**: $\forall a \in \mathbb{R}, a + 0 = a$ y $a \cdot 1 = a$
- Existencia de **Elementos Opuestos**: $\forall a \in \mathbb{R} \exists b : a + b = b + a = 0$
- Existencia de **Elementos Recíprocos**: $\forall a \neq 0, \exists b : a \cdot b = b \cdot a = 1$

$$a = a$$

$$a = b \Rightarrow b = a$$

$$a = b \wedge b = c \Rightarrow a = c$$

Teorema 1: Propiedad Cancelativa de la Suma: $a + b = a + c \Rightarrow b = c$

Corolario 1: Unicidad del Elemento Neutro de la Suma. $a + 0' = 0' + a = a \Rightarrow 0' = 0$

Corolario 2: Unicidad del Elemento Opuesto. $a + b = a + b' = 0 \Rightarrow b = b'$

Teorema 2:

- $-(-a) = a$
- $a \cdot (-b) = (-a) \cdot b = -(a \cdot b)$
- $-0 = 0$
- $(-a) \cdot (-b) = a \cdot b$
- $0 \cdot a = 0$
- $a \cdot (b - c) = a \cdot b - a \cdot c$

Teorema 3: Propiedad Cancelativa del Producto: $a \cdot b = a \cdot c \wedge a \neq 0 \Rightarrow b = c$

Corolario 3: Unicidad del Elemento Neutro del Producto. $a \cdot 0' = 0' \cdot a = a \Rightarrow 0' = 0$

Corolario 4: Unicidad del Recíproco. $\forall a \neq 0$, existe un único $b : a \cdot b = b \cdot a = 1$

Teorema 4:

- 0 no tiene recíproco.
- $a \neq 0, b \neq 0, \left(\frac{a}{b}\right)^{-1} = \frac{a^{-1}}{b^{-1}}$
- $1^{-1} = 1$
- $b \neq 0 \wedge d \neq 0$:
- $\frac{a}{1} = a$, si $a \neq 0, \frac{1}{a} = a^{-1}$
- $(b \cdot d)^{-1} = b^{-1} \cdot d^{-1}$
- $a \cdot b = 0 \Rightarrow a = 0 \vee b = 0$
- $\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{a \cdot d + b \cdot c}{b \cdot d}$
- $-a = (-1) \cdot a$
- $\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{a \cdot c}{b \cdot d}$

2. Axiomas de Orden

- Si $a, b \in \mathbb{R}_0^+ \Rightarrow a + b \in \mathbb{R}_0^+$ y $a \cdot b \in \mathbb{R}_0^+$
- $\forall a \in \mathbb{R} : a \neq 0 \Rightarrow$ o bien $a \in \mathbb{R}^+$ o $-a \in \mathbb{R}^+$
- $0 \notin \mathbb{R}$

$$a < b \Rightarrow b - a \in \mathbb{R}^+$$

$$a > b \Rightarrow a - b \in \mathbb{R}^+$$

$$a \leq b \Rightarrow \text{o bien } b - a \in \mathbb{R}^+ \text{ o } a = b$$

$$a \geq b \Rightarrow \text{o bien } a - b \in \mathbb{R}^+ \text{ o } a = b$$

$$a > 0 \iff a \in \mathbb{R}^+$$

Teorema 5: Propiedad de Tricotomía: Dados $a, b \in \mathbb{R}$ sucede solo una de las siguientes proposiciones:

$$a < b$$

$$a > b$$

$$a = b$$

Teorema 6: Propiedad Transitiva de la Relación Menor: Si $a < b \wedge b < c \Rightarrow a < c$

Teorema 7:

- | | |
|--|---|
| ■ $a < b \Rightarrow a + c < b + c$ | ■ $a \cdot b > 0 \iff a \text{ y } b \text{ son los dos positivos o los dos negativos.}$ |
| ■ $a < b \wedge c < d \Rightarrow a + c < b + d$ | |
| ■ $a < b \wedge c > 0 \Rightarrow a \cdot c < b \cdot c$ | ■ $a \cdot b < 0 \iff a \text{ positivo y } b \text{ negativo, o } a \text{ negativo y } b \text{ positivo.}$ |
| ■ $a < b \wedge c < 0 \Rightarrow a \cdot c > b \cdot c$ | |
| ■ $a \neq 0 \Rightarrow a^2 > 0$ | ■ $a > 0 \iff \frac{1}{a} > 0$ |
| ■ $1 > 0$ | |
| ■ $a < b \Rightarrow -b < -a$ | ■ $0 < a < b \Rightarrow 0 < \frac{1}{b} < \frac{1}{a}$ |

2.1. Números Naturales, Enteros, Racionales e Irracionales

Números Naturales: \mathbb{N} . El conjuntos inductivo más pequeño:

1. El número 1 pertenece al conjunto.
2. Si a pertenece al conjunto, $a + 1$ también pertenece.

Destacamos que 1 es el primer elemento de \mathbb{N} , i.e es el menor. Ergo, si $a < 1 \Rightarrow a \notin \mathbb{N}$

Números Enteros: $\mathbb{Z} = \{x \in \mathbb{R} : x \in \mathbb{N} \vee -x \in \mathbb{N} \vee x = 0\}$

La suma, la diferencia y el producto son operaciones cerradas en \mathbb{Z} .

Números Racionales: $\mathbb{Q} = \left\{x \in \mathbb{R} : \exists p, q \in \mathbb{Z}, q \neq 0 : x = \frac{p}{q}\right\}$

.....
Observaciones: • $\mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$ • Dados $a, b \in \mathbb{R}, c, d \in \mathbb{R} - \{0\}, \frac{a}{c} = \frac{b}{d} \iff ad = bc$

2.2. Representación Geométrica de los numeros reales: la recta real

En una recta se elige un punto para representar al 0 y otro punto distinto para representar al 1 (esta elección fija la escala). Cada punto de la recta representa a un único número real y cada número real está representado por un único punto de la recta.

1. Si los puntos A y B representan los números reales a y b , A está a la izquierda de $B \iff a < b$.
2. Si los puntos A, B, C, D representan a los números reales a, b, c, d . con $a < b$ y $c < d$, entonces \overline{AB} y \overline{CD} son congruentes $\iff b - a = d - c$.

Además, los números positivos quedan a la derecha del 0, y los negativos a la izquierda del mismo.

2.3. Intervalos Reales

- | | |
|---|--|
| ■ $(a, b) = \{x \in \mathbb{R} : a < x < b\}$ | ■ $(a, +\infty) = \{x \in \mathbb{R} : a < x\}$ |
| ■ $[a, b) = \{x \in \mathbb{R} : a \leq x < b\}$ | ■ $[a, +\infty) = \{x \in \mathbb{R} : a \leq x\}$ |
| ■ $(a, b] = \{x \in \mathbb{R} : a < x \leq b\}$ | ■ $(-\infty, b) = \{x \in \mathbb{R} : x < b\}$ |
| ■ $[a, b] = \{x \in \mathbb{R} : a \leq x \leq b\}$ | ■ $(-\infty, b] = \{x \in \mathbb{R} : x \leq b\}$ |

2.4. Valor absoluto de un número

Dado $x \in \mathbb{R}$, su valor absoluto es el número real $|x|$:

$$|x| = \begin{cases} x & , \text{ si } x \geq 0 \\ -x & , \text{ si } x < 0 \end{cases}$$

Geométricamente, $|x|$ es la distancia en la recta real entre los puntos 0 y x . También puede verse que la distancia entre dos puntos cualesquiera $x, y \in \mathbb{R}$ está dada por el valor $|x - y| = |y - x|$.

Proposición:

- $|x| \geq 0$
- $|x| = 0 \iff x = 0$
- $|x| = |-x|$
- $-|x| \leq x \leq |x|$
- Sea $a > 0$: $|x| < a \iff -a < x < a$
- Sea $a > 0$: $|x| > a \iff x < -a \vee a < x$
- $|x + y| \leq |x| + |y|$
- $|x \cdot y| = |x| \cdot |y|$
- Sea $y \neq 0$, $\left|\frac{x}{y}\right| = \frac{|x|}{|y|}$

3. Introducción A10

Sea A un subconjunto no vacío de \mathbb{R}

- **Cota Superior:** Sea $b \in \mathbb{R}$, b es una cota superior de A si $a \leq b \forall a \in A$.
- **Cota Inferior:** Sea $b \in \mathbb{R}$, b es una cota inferior de A si $a \geq b \forall a \in A$.
- **Supremo:** b es supremo de $A \iff (a \leq b \forall a \in A) \wedge (c < b \Rightarrow c \text{ no es una cota superior de } A)$.
- **Ínfimo:** b es ínfimo de $A \iff (b \leq a \forall a \in A) \wedge (b < c \Rightarrow c \text{ no es una cota inferior de } A)$.
- **Máximo:** b es máximo de A si $a \leq b \forall a \in A \wedge b \in A$.
- **Mínimo:** b es mínimo de A si $b \leq a \forall a \in A \wedge b \in A$.

.....
Teorema 8: Unicidad del supremo: Dos números distintos no pueden ser supremos de un mismo conjunto. Por esto tenemos una notación: $b = \sup(A)$.

Teorema 9: Caracterización del Supremo: $b = \sup(A) \iff b$ es una cota superior de A tal que $\forall \epsilon > 0$ existe algún elemento $a \in A$ tal que $b - \epsilon < a$.

Demostración:

\Rightarrow) Supongamos que no ocurre, entonces $a \leq b - \epsilon$ y es cota superior de A , pero contradice que b es supremo de A , porque $a \leq b - \epsilon < b$.

\Leftarrow) Queremos demostrar que $c < b$ no es cota superior de A . Sea $\epsilon_c = b - c > 0$ y como $\exists a \in A : b - \epsilon_c < a$, entonces $a > b - \epsilon_c = b - (b - c) = c$ i.e c no es cota superior de A . Luego, $b = \sup(A)$.

Proposición 3: $b = \max(A) \iff b \in A \wedge b = \sup(A)$.

Proposición 4: $b = \min(A) \iff b \in A \wedge b = \inf(A)$.

3.1. Axioma del Supremo

Todo conjunto no vacío de números reales que sea acotado superiormente tiene un supremo.

Teorema 10: Existencia de Raíces Cuadradas: Dado $a \geq 0$, existe un único $x \in \mathbb{R} : x \geq 0$ y $x^2 = a$. Si $a = 0$ es trivial. Si $a > 0$, sabemos que tiene dos soluciones (solo una es positiva). Se define el conjunto $S_a = \{x \in \mathbb{R} : x^2 \leq a\}$. Vemos que $S_a \neq \emptyset$ y que está acotado superiormente. Luego existe $b = \sup(S_a)$. Luego, por tricotomía sacamos que $b^2 = a$.

Teorema 11: Propiedad Arquimediana de los Reales: Sean $x, y \in \mathbb{R}, x > 0 \Rightarrow \exists n \in \mathbb{N} : y < n \cdot x$. Va por absurdo, suponiendo $n \cdot x \leq y \forall n \in \mathbb{N}$. Definimos $S = \{n \cdot x : n \in \mathbb{N}\}$. S no es vacío, ergo existe $b = \sup(S)$. Luego $\exists a \in S : b - x < a$ (Caracterización). Y se podría escribir como $a = m \cdot x, m \in \mathbb{N}$. Es decir, $b < mx + x = (m+1) \cdot x$. Pero $(m+1) \cdot x \in S$, y b no es cota superior de S , lo que contradice que $b = \sup(S)$. Se contradice por suponer S acotado superiormente. Luego $\exists n \in \mathbb{N} : y < n \cdot x$.

Corolario 5:

- $\forall y \in \mathbb{R}, \exists n \in \mathbb{N} : y < N$.
- \mathbb{N} no está acotado superiormente.
- Sea $x > 0, \exists n \in \mathbb{N} : \frac{1}{n} < x$
- $x, y, z \in \mathbb{R}, z > 0$, si $x \leq y < x + \frac{z}{n} \forall n \in \mathbb{N}$ entonces $x = y$.
- Si $|x| < \frac{1}{n} \forall n \in \mathbb{N}$, entonces $x = 0$.
- Si $|x| < \epsilon \forall \epsilon > 0$ entonces $x = 0$.

Teorema 12: Si A está acotado inferiormente, entonces posee ínfimo.

.....
Dado $x \in \mathbb{R}$, existe un único número p entero tal que $p \leq x < p + 1$. Demostración:

- Si $x \in \mathbb{Z}, p = x$ verifica.
- Sino, si $0 < x < 1$, entonces $p = 0$ verifica.
- Sino, sea $S = \{n \in \mathbb{N} : x < n\}$ es distinto de \emptyset . Está acotado inferiormente por x , y por la propiedad arquimediana, existe $n_0 > x$ y $n_0 \in S$. Luego existe un mínimo m y $m - 1 \leq x < m \notin S$. Luego, llamando $p = m - 1$, tenemos que $p \leq x < p + 1$, siendo p único.
- Si $x < 0 \Rightarrow -x > 0$ y es análogo.

Y queda demostrado que cualquiera sea $x \in \mathbb{R}$, existe un único $p \in \mathbb{Z}$:

$$p \leq x < p + 1$$

que suele notarse como $[x]$ y se denomina **parte entera** de x :

$$[x] \leq x < [x] + 1$$