

# Práctica de Álgebra y Geometría 1

Luciano N. Barletta & Iker M. Canut

March 30, 2020

Contents

1	Unidad 1: Números Complejos	3
1.1	Preámbulo . . . . .	3
1.2	Demostraciones . . . . .	3
1.3	Polinomios . . . . .	12

# 1 Unidad 1: Números Complejos

## 1.1 Preámbulo

Definimos el conjunto de los números complejos de la siguiente manera:

$$\mathbb{C} = \{(a, b) \mid a, b \in \mathbb{R}\}$$

O sea que  $\mathbb{C} = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ .

Dado un  $z = (a, b) \in \mathbb{C}$ , llamamos parte real de  $z$  al número real  $a$  y la notamos  $\text{Re}(z) = a$ . Análogamente llamamos parte imaginaria a  $b$  y la notamos  $\text{Im}(z) = b$ .

Definimos para todo  $z = (a, b) \in \mathbb{C}$  y  $w = (c, d) \in \mathbb{C}$ :

$$z = w \Leftrightarrow a = c \wedge b = d$$

$$z + w = (a + c, b + d)$$

$$zw = (ac - bd, bc + ad)$$

## 1.2 Demostraciones

### Conmutatividad de la suma

Sean  $z = (a, b), w = (c, d) \in \mathbb{C}$

$$z + w =$$

<Definicion de suma de complejos>

$$(a + c, b + d) =$$

<Propiedad conmutativa de la suma de reales>

$$(c + a, d + b) =$$

<Definicion de suma de complejos>

$$w + z$$

□

### Conmutatividad del producto

Sean  $z = (a, b), w = (c, d) \in \mathbb{C}$ :

$$zw =$$

<Definicion de producto de complejos>

$$(ac - bd, ad + cb) =$$

<Propiedad conmutativa de suma y producto de reales>

$$(ac - db, cb + da) =$$

<Definicion de producto de complejos>

$$wz$$

□

### Asociatividad de la suma

Sean  $z = (a, b), u = (c, d), w = (e, f) \in \mathbb{C}$ :

$$z + (u + w) =$$

<Definicion de suma de complejos>

$$z + (c + e, d + f) =$$

<Definicion de suma de complejos>

$$(a + (c + e), b + (d + f)) =$$

<Propiedad asociativa de la suma de reales>

$$((a + c) + e, (b + d) + f) =$$

<Definicion de suma de complejos>

$$(a + c, b + d) + w =$$

<Definicion de suma de complejos>

$$(z + u) + w$$

□

### Propiedad distributiva de la multiplicación respecto de la suma

Por definición de igualdad de complejos, dados  $z, w \in \mathbb{C}$

$$z = w \Leftrightarrow \operatorname{Re}(z) = \operatorname{Re}(w) \wedge \operatorname{Im}(z) = \operatorname{Im}(w)$$

llamemos  $z = (a, b), u = (c, d), w = (e, f)$

Demostramos  $\operatorname{Re}(z(uw)) = \operatorname{Re}((zu)w)$

$$\operatorname{Re}(z(uw)) =$$

<Def mult complejos>

$$(a\operatorname{Re}(uw)) - (b\operatorname{Im}(uw)) =$$

<Def mult complejos>

$$(a(ce - df)) - (b(cf + de)) =$$

<Distributiva>

$$(ace - adf) - (bcf + bde) =$$

<Propiedad -(a+b) = -a - b>

$$ace - adf - bcf - bde =$$

<Conmutativa>

$$ace - bde - adf - bcf =$$

<Distributiva>

$$(ac - bd)e - (ad + bc)f =$$

<Def mult complejos>

$$\operatorname{Re}(zu)e - \operatorname{Im}(zu)f =$$

<Def mult complejos>

$$\operatorname{Re}((zu)w)$$

Demostramos  $\operatorname{Im}(z(uw)) = \operatorname{Im}((zu)w)$

$$\operatorname{Im}(z(uw)) =$$

<Def mult complejos>

$$(b\operatorname{Re}(uw)) + (a\operatorname{Im}(uw)) =$$

<Def mult complejos>

$$(b(ce - df)) + (a(cf + de)) =$$

<Distributiva>

$$bce - bdf + acf + ade =$$

<Conmutativa>

$$bce + ade + acf - bdf =$$

<Distributiva>

$$(bc + ad)e + (ac - bd)f =$$

<Def mult complejos>

$$\operatorname{Im}(zu)e + \operatorname{Re}(zu)f =$$

<Def mult complejos>

$$\operatorname{Im}((zu)w)$$

Reescribiendo:

$$\operatorname{Re}(z(uw)) = \operatorname{Re}((zu)w) \wedge \operatorname{Im}(z(uw)) = \operatorname{Im}((zu)w)$$

que por definición de igualdad de complejos implica

$$z(uw) = (zu)w$$

□

$$\exists (0, 0) \in \mathbb{C} / (0, 0) + z = z$$

Sea  $z = (a, b) \in \mathbb{C}$ :

$$(0, 0) + z =$$

<Definición de la suma de complejos>

$$(0 + a, 0 + b) =$$

<Existencia del elemento neutro de suma de reales>

$$(a, b) =$$

<Definición de número complejo>

$$z$$

□

$$\exists (1, 0) \in \mathbb{C} / (1, 0)z = z$$

$$\text{Sea } z = (a, b) \in \mathbb{C}:$$

$$(1, 0)z =$$

<Definición del producto de complejos>

$$(1a - 0b, 0a + 1b) =$$

<Existencia del elemento neutro del producto de reales>

$$(a - 0b, 0a + b) =$$

<a0 = 0>

$$(a - 0, 0 + b) =$$

<Existencia del elemento neutro de la suma de reales>

$$(a, b) =$$

<Definición de número complejo>

$$z$$

□

$$\forall z = (a, b) \exists w = (-a, -b) / z + w = (0, 0)$$

$$\text{Sea } z = (a, b), w = (-a, -b) \in \mathbb{C}$$

$$(0, 0) =$$

<Existencia del opuesto de la suma de reales>

$$(a + -a, b + -b) =$$

<Definición de suma de complejos>

$$(a, b) + (-a, -b) =$$

<sustituimos  $z = (a, b)$ ,  $w = (-a, -b)$ >

$$z + w$$

Por lo tanto:

$$\forall z = (a, b) \in \mathbb{Z} \exists w = (-a, -b) / z + w = (0, 0)$$

□

$$\forall z \neq (0, 0) \exists w / zw = (1, 0)$$

Llamemos  $z = (a, b)$  y llamemos  $w = (c, d)$ .

Para que  $zw = (1, 0)$ , por definición de igualdad de complejos, tiene que ocurrir:

$$\text{Re}(zw) = 1 \wedge \text{Im}(zw) = 0 \quad (1)$$

Que exista algún  $w$  para todo  $z$  implica entonces que podamos escribir  $(c, d)$  en términos de  $(a, b)$ , basán-

donos en el siguiente sistema de ecuaciones:

$$ac - bd = 1 \quad (2)$$

$$bc + ad = 0 \quad (3)$$

$$ac - bd = 1 \quad (4)$$

$$bc = -ad \quad (5)$$

$$ac - bd = 1 \quad (6)$$

$$c = -\frac{ad}{b} \quad (7)$$

Continuamos con la ecuación de arriba

$$a\left(\frac{-ad}{b}\right) - bd = 1 \quad (8)$$

$$\left(\frac{-a^2}{b}\right)d - bd = 1 \quad (9)$$

$$\left(\frac{-a^2}{b} - b\right)d = 1 \quad (10)$$

$$\left(\frac{-a^2}{b} - \frac{b^2}{b}\right)d = 1 \quad (11)$$

$$\frac{-a^2 - b^2}{b}d = 1 \quad (12)$$

$$-\frac{a^2 + b^2}{b}d = 1 \quad (13)$$

$$d = -\frac{b}{a^2 + b^2} \quad (14)$$

Reemplazando en la de abajo

$$c = \left(-\frac{a}{b}\right)\left(-\frac{b}{a^2 + b^2}\right) \quad (15)$$

$$c = \frac{a}{b} \frac{b}{a^2 + b^2} \quad (16)$$

$$c = \frac{a}{a^2 + b^2} \quad (17)$$

La demostración queda entonces:  $\forall z = (a, b) \neq (0, 0)$ , supongo un  $w = \left(\frac{a}{a^2 + b^2}, -\frac{b}{a^2 + b^2}\right)$  y muestro que  $zw = (1, 0)$

$$zw = \left(a \frac{a}{a^2 + b^2} - b \frac{-b}{a^2 + b^2}, b \frac{a}{a^2 + b^2} + a \frac{-b}{a^2 + b^2}\right) \quad (18)$$

$$\left(\frac{a^2}{a^2 + b^2} + \frac{b^2}{a^2 + b^2}, \frac{ba}{a^2 + b^2} - \frac{ab}{a^2 + b^2}\right) \quad (19)$$

$$\left(\frac{a^2 + b^2}{a^2 + b^2}, \frac{ba - ab}{a^2 + b^2}\right) = (1, 0) \quad (20)$$

$$\therefore \forall z = (a, b) \neq (0, 0), \exists w = \left(\frac{a}{a^2 + b^2}, -\frac{b}{a^2 + b^2}\right) / zw = (1, 0)$$

□

Llamamos  $\mathbb{C}_0$  al conjunto  $\{z \mid z = (a, 0) \in \mathbb{C}, \forall a \in \mathbb{R}\}$ .

Definimos  $z - w = z + (-w)$ .

Definimos  $\frac{z}{w} \text{ con } w \neq (0, 0), zw^{-1}$

### Suma cerrada en $\mathbb{C}_0$

Sean  $z = (a, 0), w = (b, 0) \in \mathbb{C}_0$

$$z + w =$$

<Definición de suma de complejos>

$$(a + b, 0 + 0) =$$

$$(a + b, 0) =$$

si llamamos  $a + b = c$ , entonces  $(c, 0) \in \mathbb{C}_0$  por definición

□

### Producto cerrado en $\mathbb{C}_0$

Sean  $z = (a, 0), w = (b, 0) \in \mathbb{C}_0$

$$zw =$$

<Definición de producto de complejos>

$$(ab - 0 \cdot 0, 0b + 0a) =$$

$$(ab, 0 + 0) =$$

$$(ab, 0) =$$

si llamamos  $ab = c$ , entonces  $(c, 0) \in \mathbb{C}_0$  por definición

□

### Producto cerrado en $\mathbb{C}_0$

Sean  $z = (a, 0), w = (b, 0) \in \mathbb{C}_0$

$$zw =$$

<Definición de producto de complejos>

$$(ab - 0 \cdot 0, 0b + 0a) =$$

$$(ab, 0 + 0) =$$

$$(ab, 0) =$$

si llamamos  $ab = c$ , entonces  $(c, 0) \in \mathbb{C}_0$  por definición

□

### Opuesto y recíproco cerrado en $\mathbb{C}_0$

Sea  $z = (a, 0) \in \mathbb{C}_0$

$$-z = (-a, 0) \in \mathbb{C}_0$$

Sea  $z = (a, 0) \neq (0, 0) \in \mathbb{C}_0$

$$z^{-1} = (a^{-1}, 0) \in \mathbb{C}_0$$

□

### Cociente cerrado en $\mathbb{C}_0$

Sean  $z = (a, 0), w = (b, 0) \neq (0, 0) \in \mathbb{C}_0$

$$\frac{z}{w} =$$

$$zw^{-1}$$

<Definición de cociente de complejos>



Como el producto es cerrado en  $\mathbb{C}_0$ ,  $\frac{z}{w} \in \mathbb{C}_0$

□

Notamos la correspondencia:

$$x \in \mathbb{R} \leftrightarrow (x, 0) \in \mathbb{C}_0$$

Ahora definimos:

$$i = (0, 1)$$

$\forall (a, b) \in \mathbb{C}$ ,  $(a, b)$  puede escribirse  $a + bi$

$$(a, b)$$

<Definición de suma de complejos>

$$(a, 0) + (0, b)$$

$$(a, 0) + (0 - 0, 1b + 0)$$

$$(a, 0) + (0.b - 1.0, 1b + 0.0)$$

<Definición de producto de complejos>

$$(a, 0) + (b, 0)(0, 1)$$

<Definición de  $i$ >

$$(a, 0) + (b, 0)i$$

<Notación de elementos de  $\mathbb{C}_0$ >

$$a + bi$$

□

Entonces usaremos esta notación para referirnos a este tipo de números complejos,  $\forall a, b \in \mathbb{R}$ :

$$(a, 0) = a \tag{21}$$

$$(0, b) = bi(a, b) = a + bi \tag{22}$$

$$\tag{23}$$

La última se llama notación binómica de los números complejos.

$$i^2 = -1$$

$$i^2 =$$

<Definición de cuadrado>

$$i \cdot i =$$

<Definición de  $i$ >

$$(0, 1)(0, 1) =$$

<Definición de producto de complejos>

$$(0.0 - 1.1, 1.0 + 0.1)$$

De esto resulta el número complejo  $(-1, 0)$ , que representa al número real  $-1$ . Notamos que hacer raíz cuadrada de ambos lados nos deja  $\pm i = \sqrt{-1}$ . □

Fun Fact

$$a \in \mathbb{R}, a < 0, z^2 = a \Leftrightarrow z = \pm \sqrt{|a|}i$$

Sabemos que  $z^2 = a$ , pero por definición de valor absoluto

$$z^2 = -|a|, z^2 = -1|a|$$

Al hacer raíz cuadrada de ambos lados

$$\pm z = \sqrt{-1|a|}$$

Que reescribiendo sería

$$z = \mp \sqrt{|a|}\sqrt{-1}$$

Finalmente por definición de  $i$

$$z = \pm \sqrt{|a|}i$$

□

Dado  $z = a + bi$ , llamamos conjugado de  $z$  al número complejo  $a - bi$  y lo notamos  $\bar{z}$ .

#### Distributiva del conjugado respecto de la suma

Sean  $z = a + bi, w = c + di \in \mathbb{C}$

$$\overline{z + w}$$

$$\overline{(a + bi) + (c + di)}$$

$$\overline{(a + c) + (b + d)i}$$

<Definición de conjugado>

$$(a + c) - (b + d)i$$

<Distribuyendo  $-i$ >

$$a + c - bi - di$$

<Reescribiendo>

$$(a - bi) + (c - di)$$

<Definición de conjugado>

$$\bar{z} + \bar{w}$$

□

#### Distributiva del conjugado respecto del producto

Sean  $z = a + bi, w = c + di \in \mathbb{C}$

$$\overline{zw}$$

<Hipótesis>

$$\overline{(a + bi)(c + di)}$$

<Distribuyendo>

$$\overline{(ac - bd) + (bc + ad)i}$$

<Definición de conjugado>

$$(ac - bd) - (bc + ad)i$$

<Distribuyendo  $-1$ >

$$(ac - bd) + ((-b)c + a(-d))i$$

< $bd = (-d)(-b)$ >

$$(ac - (-b)(-d)) + ((-b)c + a(-d))i$$

<Distribuyendo  $i$  y reescribiendo>

$$ac + (-b)c.i + a(-d).i - (-b)(-d)$$

$-1 = i^2$

$$ac + (-b)c.i + a(-d).i - (-b)d.i^2$$

<Factor común  $c$  y  $-di$ >

$$(a - bi)c - (a - bi)di$$

<Factor común  $a - bi$ >

$$(a - bi)(c - di)$$

<Definición de conjugado>

$$\overline{zw}$$

□

$$z = \bar{z} \Leftrightarrow z \in \mathbb{R}$$

Sea  $z = a + bi = \bar{z} = a - bi, z \in \mathbb{C}$

$$z = \bar{z}$$

<Hipótesis>

$$a + bi = a - bi$$

<Propiedad cancelativa de la suma>

$$bi = -bi$$

<Sumando  $bi$  en ambos lados>

$$2bi = 0$$

<Multiplicando  $(2i)^{-1}$  en ambos lados>

$$b = 0$$

$$z = a + 0i = a \in \mathbb{R}$$

Sea  $a \in \mathbb{R}$

$$a = a$$

<Elemento neutro de la suma>

$$a + 0 = a + 0$$

$$0x = 0$$

$$a + 0i = a + 0(-i)$$

<Definición de conjugado>

$$a + 0i = \overline{a + 0i}$$

<Llamemos  $z = a + 0i$

$$z = \bar{z}$$

$$z = a \in \mathbb{R} \Rightarrow z = \bar{z}$$

$$\therefore z = \bar{z} \Leftrightarrow z \in \mathbb{R}$$

□

$$z\bar{z} = \mathbf{Re}(z)^2 + \mathbf{Im}(z)^2$$

Sea  $z = a + bi, z \in \mathbb{C}$

$$z\bar{z}$$

<Hipótesis y definición de conjugado>

$$(a + bi)(a - bi)$$

<Distribuyendo>

$$a^2 + ab.i - ab.i - (bi)^2$$

<Resolviendo>

$$a^2 - (bi)^2$$

<Distribuyendo>

$$a^2 - b^2 i^2$$

$$\langle i^2 = -1 \rangle$$

$$a^2 - b^2 \cdot (-1)$$

$$a^2 + b^2$$

< $a = \text{Re}(z), b = \text{Im}(z)$ >

$$\text{Re}(z)^2 + \text{Im}(z)^2$$

□

Fun Fact 2.  $z = a + bi \in \mathbb{C} z \neq 0$

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{z} \frac{\bar{z}}{\bar{z}} = \frac{\bar{z}}{z\bar{z}} = \frac{a - bi}{a^2 + b^2} = \frac{a}{a^2 + b^2} - \frac{b}{a^2 + b^2} i$$

Fun Fact 2.5.  $w = a + bi \in \mathbb{C} w \neq 0$

$$\frac{z}{w} = \frac{z}{w} \frac{\bar{w}}{\bar{w}} = \frac{z\bar{w}}{w\bar{w}} = \frac{z\bar{w}}{a^2 + b^2}$$

### Formula de Moivre

$$z^n = |z|^n (\cos n\alpha + i \sin n\alpha), n \in \mathbb{Z}$$

Prueba por induccion:

- Para el caso  $n = 1$  resulta trivial,

$$z^1 = |z|^1 (\cos 1\alpha + i \sin 1\alpha)$$

$$z = |z| (\cos \alpha + i \sin \alpha)$$

- Para el caso  $n > 0$ , hay que demostrar que  $\underbrace{(\cos \alpha + i \sin \alpha)^n}_{HI} = \cos n\alpha + i \sin n\alpha$

Para  $n + 1$ :

$$(\cos \alpha + i \sin \alpha)^{n+1}$$

$$\underbrace{(\cos \alpha + i \sin \alpha)^n}_{HI} \cdot (\cos \alpha + i \sin \alpha)$$

$$(\cos n\alpha + i \sin n\alpha) \cdot (\cos \alpha + i \sin \alpha)$$

$$(\cos(n\alpha) \cdot \cos(\alpha) - \sin(n\alpha) \cdot \sin(\alpha) + i (\cos(n\alpha) \cdot \sin(\alpha) + \sin(n\alpha) \cdot \cos(\alpha)))$$

$$\cos(n\alpha + \alpha) + i \sin(n\alpha + \alpha)$$

$$\cos((n+1)\alpha) + i \sin((n+1)\alpha)$$

- Para el caso  $n = 0$ , tambien resulta trivial,

$$\cos(0\alpha) + i \sin(0\alpha) = 1 + 0i = 1$$

- Para el caso  $n < 0$ :

$$(\cos \alpha + i \sin \alpha)^{-n}$$

$$((\cos \alpha + i \sin \alpha)^n)^{-1}$$

Aplicando el item 2

$$(\cos n\alpha + i \sin n\alpha)^{-1}$$

Aplicando la identidad  $z^{-1} = \frac{\bar{z}}{|z|^2}$

$$\cos(-n\alpha) + i \sin(-n\alpha)$$

Con lo que queda demostrado para todos los numeros enteros  $n$  que:

$$z^n = |z|^n (\cos n\alpha + i \sin n\alpha)$$

□

### 1.3 Polinomios

$$gr(P + Q) \leq \max\{gr(P), gr(Q)\}$$

Sean  $P = \sum_{i=0}^n a_i x^i$ ,  $Q = \sum_{i=0}^m b_i x^i \in \mathbb{C}[x]$ , donde  $n = gr(P)$ ,  $m = gr(Q)$ :

Supongo  $gr(P + Q) > \max\{n, m\}$  Analizamos el caso  $n > m$

$$gr(P + Q) > n$$

Por definición de suma de polinomios

$$gr\left(\sum_{i=0}^{n+m} (a_i + b_i)x^i\right) > n$$

Caso  $a_n + b_n \neq 0$

$$n > n$$

Esto es una contradicción con la suposición  $gr(P+Q) > \max\{n, m\}$

$$\therefore gr(P+Q) \leq \max\{gr(P), gr(Q)\}$$

□

$$gr(P.Q) = gr(P) + gr(Q)$$

Sean  $P = \sum_{i=0}^n a_i x^i, Q = \sum_{i=0}^m b_i x^i \in \mathbb{C}[x]$ , donde  $n = gr(P), m = gr(Q)$ :

Tengamos en cuenta la definición de producto de polinomios complejos

$$P.Q = (a_n b_m)x^{n+m} + (a_{n-1} b_m + a_n b_{m-1})x^{n+m-1} + \dots + (a_1 b_0 + a_0 b_1)x^1 + a_0 b_0$$

Supongo  $gr(P.Q) < n + m$ , pero para que eso ocurra,  $a_n \cdot b_m = 0$ .

Esto no es posible ya que contradice  $gr(P) = n$  y  $gr(Q) = m$ .

Supongo  $gr(P.Q) > n + m$ , pero para que eso ocurra, debe existir un monomio  $c_i x^i$  con  $i > n + m$ .

Por definición de producto de polinomios esto no es posible.

$$\therefore gr(P.Q) = gr(P) + gr(Q)$$

□

$$P(\alpha) = 0 \Leftrightarrow P(\alpha) \text{ divisible por } Q = (x - \alpha)$$

Sea  $P(\alpha) = 0$ :

Supongo un  $Q = (x - \alpha)$ , entonces, por algoritmo de la división,  $\exists! C, R$ , con  $gr(R) < gr(Q)$  o  $R = 0$  tal que

$$P = C.Q + R$$

Pero entonces  $gr(R) = 0$ , pues  $gr(Q) = 1$ . Por consecuencia,  $R(x) = r \in \mathbb{C}$ .

$$P(\alpha) = C(\alpha).Q(\alpha) + R(\alpha) \tag{24}$$

$$0 = C(\alpha)(\alpha - \alpha) + r \tag{25}$$

$$0 = 0 + r \tag{26}$$

$$0 = r \tag{27}$$

Entonces  $R = 0$ . Que por definición de divisibilidad significa que  $P$  es divisible por  $Q = (x - \alpha)$

Sea  $P$  divisible por  $Q = (x - \alpha)$ :

Por teorema del resto, siendo  $r$  el resto de dividir  $P$  por  $Q$ .

$$P(\alpha) = r$$

Pero por hipótesis,  $r = 0$

$$P(\alpha) = 0$$

$$\therefore P(\alpha) = 0 \Leftrightarrow P(\alpha) \text{ divisible por } Q = (x - \alpha)$$

□