Introducción a la Matemática

Iker M. Canut

February 18, 2020

Contents

1 Conjuntos

1.1 Definiciones Básicas

Un Conjunto es una colección de objetos. Los conjuntos se denominan con letras mayúsculas. Y los elementos que lo forman con letras minúsculas. El conjunto vacio se denomina $\emptyset$.

1.2 Representación de conjuntos

- **Por Extensión**: Se lista todo entre llaves. $\{a, b, c, d, ...\}$
- **Por Comprension**: Se dicen las propiedades. $\{x/x...\}$

1.3 Subconjuntos

El conjunto B es subconjunto de A si y sólo si todo elemento de B, es también de A.

$$\boxed{B \subset A \iff (x \in B \Rightarrow x \in A)}$$

Dos conjuntos serán iguales cuando posean los mismos elementos.

$$\boxed{B = A \iff (A \subset B \wedge B \subset A)}$$

Al conjunto que contiene a todos los datos en un contexto específico lo denominaremos **Conjunto Universal** y se denota con la letra **U**.

1.4 Operaciones

- **Intersección de Conjuntos**: $A \cap B = \{x/x \in A \wedge x \in B\}$
- **Unión de Conjuntos**: $A \cup B = \{x/x \in A \vee x \in B\}$

Si dos conjuntos no tienen elementos en comun, entonces son **disjuntos**. A y B disjuntos $\iff A \cap B = \emptyset$

Propiedades	UNIÓN	INTERSECCIÓN
Conmutativa	$A \cup B = B \cup A$	$A \cap B = B \cap A$
Asociativa	$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$	$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$
Distributiva	$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$	$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$
Idempotencia	$A \cup A = A$	$A \cap A = A$

- **Diferencia**: $A - B = \{x/x \in A \wedge x \notin B\}$
- **Complemento**: $C_A = \overline{A} = U - A$. Se cumple que $A - B = A \cap \overline{B}$

Propiedades	
Complemento	$\overline{\overline{A}} = A$ $A \cup \overline{A} = U$ $A \cap \overline{A} = \emptyset$ $\overline{\emptyset} = U \wedge \overline{U} = \emptyset$
Leyes de Morgan	$\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$ $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$

- **Cardinal de un conjunto**: Es el número de elementos. $|A| = card(A)$

2 Números Reales

- **Naturales** N: $\{1,2,3,...\}$
- **Naturales con cero** N_0: $\{0,1,2,3,...\}$
- **Enteros** Z: $\{...,-3,-2,-1,0,1,2,3,...\}$
- **Racionales** Q=$\left\{x/x=\frac{p}{q}, p\in Z, q\in Z, q\neq 0\right\}$
- **Irracionales** I=$Q\cap I=\emptyset \wedge Q\cup I=R$

$$N\subset N_0\subset Z\subset Q\subset R\wedge I\subset R$$

2.1 Suma y Producto

	Suma	Producto
Conmutativa	$a+b=b+a$	$a.b=b.a$
Asociativa	$(a+b)+c=a+(b+c)$	$(a.b).c=a.(b.c)$
$\exists$ *Elemento Neutro*	$a+0=a$	$a.1=a$
$\exists$ *Elemento Inverso*	$a+(-a)=0$	$a.\frac{1}{a}=1$
Cancelativa	$a+b=a+c\Rightarrow b=c$	$a.b=a.c\Rightarrow b=c, a\neq 0$
Uniforme	$a=b\Rightarrow a+c=b+c$	$a=b\Rightarrow a.c=b.c$
Distributiva	$a.(b+c)=a.b+a.c$	

2.2 Resta y División

- $a-b=a+(-b)$
- $a:b=\dfrac{a}{b}=a.\dfrac{1}{b}$
- $\dfrac{p}{q}+\dfrac{r}{s}=\dfrac{ps+rq}{qs}, q\neq 0\wedge s\neq 0$
- $\dfrac{p}{q}.\dfrac{r}{s}=\dfrac{pr}{qs}, q\neq 0\wedge s\neq 0$
- $\dfrac{p}{q}\div\dfrac{r}{s}=\dfrac{ps}{qr}, q\neq 0\wedge s\neq 0\wedge r\neq 0$

2.3 Potenciación

- Si $a\neq 0, a^0=1$
- $a^1=a$
- Si $n\in N, n>1, a^n=\underbrace{a.a.....a}_{\text{n factores "a"}}$
- Si $a\in R\wedge a\neq 0\wedge n\in N, a^{-n}=\dfrac{1}{a^n}=\dfrac{1}{\underbrace{a.a.....a}_{\text{n veces}}}$

Distributiva respecto a la multiplicación	$(a.b)^n=a^n.b^n$
Distributiva respecto al cociente	$\left(\dfrac{a}{b}\right)^n=\dfrac{a^n}{b^n}, b\neq 0$
Producto de potencias de igual base	$a^n.a^m=a^{n+m}$
Cociente de potencias de igual base	$a^n\div a^m=a^{n-m}$
Potencia de potencia	$(a^n)^m=a^{n.m}$

2.4 Radicación

$\sqrt[n]{a} = b \iff b^n = a$ y se nombra $\sqrt[indice]{radicando}$ = raiz enesima

No existe en los reales la raiz cuadrada (y de ningún índice par) de números negativos. Es decir:

- Si **n** es un numero natural **impar**, entonces es valida para todo número real **a**.
- Si **n** es un numero natural **par**, entonces es valida para todo número real **a no negativo**.

$$\boxed{a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m} \wedge a^{-\frac{m}{n}} = \frac{1}{\sqrt[n]{a^m}}, a \neq 0}$$

Distributiva respecto al producto	$\sqrt[n]{a.b} = \sqrt[n]{a}.\sqrt[n]{b}$
Distributiva respecto al cociente	$\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$
Raiz de raiz	$\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[m.n]{a}$

2.5 Logaritmo

El logaritmo en base a de x es y y lo notamos $\log_a(x) = y$, como el numero al cual tengo que elevar a **a** para obtener **x**.

$$log_a(x) = y \iff a^y = x, \text{ se necesita que } a > 0 \wedge x > 0 \wedge a \neq 1$$

- $log_a(1) = 0$
- $log_a(a) = 1$
- $log_a(x.y) = log_a(x) + log_a(y)$
- $log_a\left(\frac{x}{y}\right) = log_a(x) - log_a(y)$
- $log_a(x^c) = c.log_a(x)$
- $a^{log_a(x)} = x$

$$\boxed{log_b(x) = \frac{log_a(x)}{log_a(b)}}$$

2.6 Formas Especiales

Binomio al Cuadrado ↔ Trinomio Cuadrado Perfecto

$$\boxed{(x+y)^2 = x^2 + 2xy + y^2}$$

Binomio al Cubo ↔ Cuatrinomio Cubo Perfecto

$$\boxed{(x+y)^3 = x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3}$$

Diferencia de Cuadrados

$$\boxed{(a-b).(a+b) = a^2 - b^2}$$

2.7 Relacion de Orden del Conjunto de los Numeros Reales

- $a < b$ si $0 < b - a$
- $a > b$ si $b < a$
- $a < b \wedge b < c \Rightarrow a < c$
- $a < b \Rightarrow a + c < b + c$
- $a < b \wedge c > 0 \Rightarrow a.c < b.c$
- $a < b \wedge c < 0 \Rightarrow a.c > b.c$

2.8 Valor Absoluto

Es la distancia que hay, en la recta numérica, desde su punto representativo al origen de coordenadas. El valor absoluto es será siempre un número positivo (o cero).

$$|x| = \begin{cases} x & \text{si } x \geq 0 \\ -x & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

- $|a| \geq 0$
- $|a|.|b| = |a|.|b|$
- $|a| = 0 \iff a = 0$
- $\left|\dfrac{a}{b}\right| = \dfrac{|a|}{|b|}, b \neq 0$
- $|-a| = |a|$
- $\sqrt{a^2} = |a|$

$\forall a, b \in R \wedge k > 0$

- $|a+b| \leq |a| + |b|$
- $|a-b| \geq ||a| - |b||$
- $|a| < k \iff -k < a < k$
- $|a| > k \iff (a > k \vee a < (-k))$

3 Números Complejos

Se define i como: $\boxed{i^2 = -1}$

3.1 Forma Binómica de un Número Complejo

$\boxed{z = a + bi}$ donde **a** y **b** son numeros reales, e **i** se define por la relacion $i^2 = -1$

El numero **a** = $Re(z)$ es la parte real de z y **b** = $Im(z)$ es la parte imaginaria de z.

3.2 La Unidad Imaginaria

El número **i** recibe el nombre de unidad imaginaria, aceptandose que se comporta como un número real.

- $i^r.i^s = i^{r+s}$
- $(i^r)^s = i^{r.s}$, con $r, s \in Z$
- $i^0 = 1$
- $i^1 = i$
- $i^2 = -1$
- $i^3 = -i$

$$\boxed{i^n = i^r, \text{ donde r=n\%4}}$$

3.3 El conjunto de los Números Complejos

Se simboliza con la C y contiene los números de la forma $a + bi$, donde $a, b \in R$ e **i** es la unidad imaginaria.

$$\boxed{C = \{z = a + bi / a, b \in R \wedge i^2 = -1\}}$$

- Los números reales son complejos $R \subset C$, ya que si $x \in R \Rightarrow x = x + 0i$.
- A los complejos de la forma bi (aquellos que su parte real es nula), se los llama imaginarios puros.

3.4 Definiciones

- **Igualdad de Números Complejos**: $z_1 = z_2 \iff (a_1 = a_2 \wedge b_1 = b_2)$.
- **Opuesto de un Número Complejo**: $-z = (-a) + (-b)i$.
- **Suma y Resta**: $z_1 + z_2 = (a_1 + a_2) + (b_1 + b_2)i$. De manera analoga, $z_1 - z_2 = (a_1 - a_2) + (b_1 - b_2)i$
- **Multiplicación**: $z_1.z_2 = (a_1.a_2 - b_1.b_2) + (a_2.b_1 + a_1.b_2)i$.
- **División**: $\dfrac{a+bi}{c+di} = \dfrac{ac+bd}{c^2+d^2} + \dfrac{bc-ad}{c^2+d^2}i$

3.5 Conjugado de un complejo

El conjugado de un número complejo $z = a + bi$ es $\overline{z} = a - bi$.

- $z = \overline{z} \iff z \in R$
- $z + \overline{z} = 2a$
- $z - \overline{z} = 2bi$
- $\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}$
- $\overline{z_1.z_2} = \overline{z_1}.\overline{z_2}$
- $-\overline{z} = \overline{-z}$
- $z.\overline{z} = a^2 + b^2 = Re(z)^2 + Im(z)^2$

3.6 Reciproco de un Complejo NO nulo

Definimos el reciproco de $z \neq 0, z \in C$, como aquel complejo $w \;/\; z \times w = 1$ y lo denotamos $z^{-1} = \frac{1}{z}$.

- $\overline{\left(\dfrac{z_1}{z_2}\right)} = \dfrac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}}, z_2 \neq 0$
- $\overline{\left(\dfrac{1}{z}\right)} = \dfrac{1}{\overline{z}}, z \neq 0$

4 Ecuaciones e Inecuaciones

Una **ecuación** es una igualdad entre dos expresiones algebraicas: $P(x) = Q(x)$. Resolverla consta de encontrar el o los valores numéricos de la incógnita que verifican la ecuación.

4.1 Ecuaciones Lineales

Una ecuación es **lineal** cuando se puede escribir de la forma: $\boxed{a.x + b = 0, \text{ con } a \neq 0}$

4.2 Ecuaciones Cuadráticas

Una ecuación es **cuadratica** cuando se puede escribir de la forma: $\boxed{a.x^2 + b.x + c = 0, \text{ con } a \neq 0}$

$$\boxed{x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}}$$

El numero $\triangle = b^2 - 4ac$ se llama ***discriminante*** y decide la naturaleza de las soluciones.

- Si $\triangle > 0$ entonces las dos soluciones son reales y distintas.
- Si $\triangle = 0$ entonces tiene una solución doble.
- Si $\triangle < 0$ entonces las dos soluciones son numeros complejos conjugados.

$$\boxed{\begin{aligned} x_1 + x_2 &= -\frac{b}{a} \\ x_1.x_2 &= \frac{c}{a} \end{aligned}}$$

4.3 Ecuaciones Bicuadrática

Una ecuación es **bicuadratica** cuando se puede escribir de la forma: $\boxed{a.x^4 + b.x^2 + c = 0, \text{ con } a \neq 0}$
Para resolverlas, primero se sustituye $y = x^2$ y despues se sigue normal.

4.4 Inecuaciones

Una **inecuación** es una desigualdad entre dos expresiones algebraicas: $P(x) \leq Q(x)$. Resolverla consta de encontrar el o los valores numéricos de la incógnita que verifican la ecuación.

5 Geometría

5.1 Ángulos

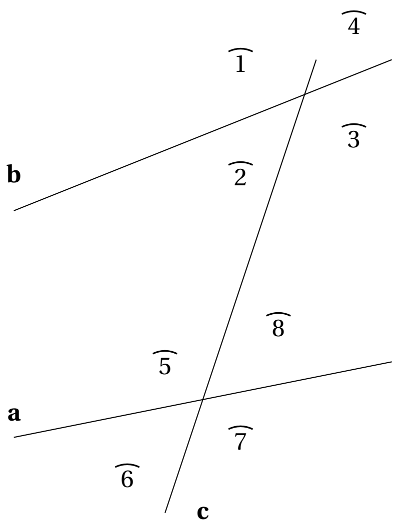
Se pueden clasificar como:

- Llano
- Recto
- Agudo
- Obtuso
- Nulo
- De una vuelta

Y los pares de ángulos se pueden clasificar como:

- Complementarios (90º)
- Suplementarios (180º)
- Consecutivos
- Adyacentes

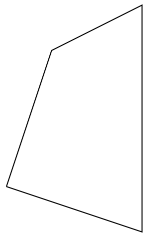
5.2 Ángulos Determinados por Dos Rectas y Una Transversal



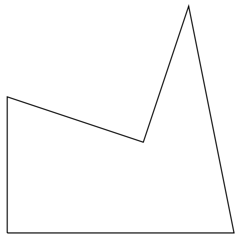
- $\widehat{2}$ y $\widehat{8}$ son alternos internos
- $\widehat{4}$ y $\widehat{6}$ son alternos externos
- $\widehat{4}$ y $\widehat{8}$ son correspondientes
- $\widehat{3}$ y $\widehat{8}$ son conjugados internos
- $\widehat{4}$ y $\widehat{7}$ son conjugados externos
- $\widehat{1}$ y $\widehat{3}$ son opuestos por el vértice

- Los ángulos correspondientes son congruentes $\iff$ las rectas a y b son paralelas.
- Los ángulos opuestos por el vértice son congruentes.
- Los ángulos alternos internos (externos) son congruentes $\iff$ las rectas a y b son paralelas.
- Los ángulos conjugados internos (externos) son suplementarios $\iff$ las rectas a y b son paralelas.

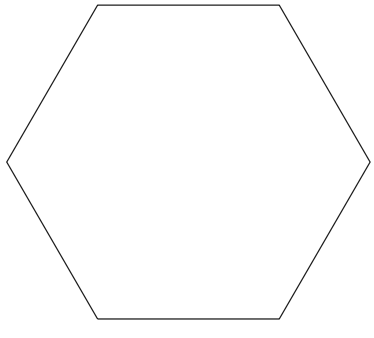
5.3 Polígonos



Polígono convexo



Polígono concavo



Polígono convexo regular

5.4 Triángulos

- Los triángulos se pueden clasificar...

- **según sus lados:**
  - Equilátero
  - Isósceles
  - Escaleno
- **según sus ángulos:**
  - Acutángulo
  - Rectángulo
  - Obtusángulo

- Los elementos de un triángulo son:

- **Mediana**: es el segmento que une el punto medio de un lado con el vértice opuesto al mismo.
- **Mediatriz**: es una recta perpendicular a un lado que pasa por su punto medio.
- **Altura**: es el segmento perpendicular a un lado que pasa por su vértice opuesto.
- **Bisectriz**: es la bisectriz de un ángulo.

- Y algunos puntos notables de un triángulo son:

- **Baricentro**: Las medianas se intersecan en un punto llamado baricentro, tal que su distancia a cada vértice es el doble a la distancia al punto medio del lado opuesto.
- **Circuncentro**: Las mediatrices se intersecan en un punto llamado circuncentro, que es el centro de la circunferencia circunscripta al triángulo.
- **Ortocentro**: Las rectas que contienen a las alturas se intersecan en un punto denominado ortocentro.
- **Incentro**: Las bisectrices se intersecan en un punto denominado incentro, que es el centro de una circunferencia inscripta en el triángulo.

5.5 Algunas Propiedades Importantes

- En un $\triangle$ cada lado es menor que la suma de los otros dos, y mayor que su diferencia.
- La suma de los ángulos interiores de un $\triangle$ es igual a un llano (180º).
- El ángulo exterior a un $\triangle$ es igual a la suma de los dos interiores no adyacentes a él.
- En un $\triangle$, a lados congruentes se oponen ángulos congruentes y viceversa.
- En un $\triangle$, a mayor lado se opone mayor ángulo y viceversa.

5.6 Congruencia de Triángulos

Dos triángulos son ***congruentes*** si tienen su lados y su ángulos respectivamente congruentes.
Dos triángulos son congruentes $\iff$

- Sus **tres lados** son respectivamente congruentes.
- **Dos de sus lados y el ángulo comprendido** entre ellos son respectivamente congruentes.
- **Un lado y los ángulos con vértice en los extremos de dicho lado** son respectivamente congruentes.
- **Dos de sus lados y el ángulo opuesto al mayor de los lados** son respectivamente congruentes.

5.7 Semejanza de Triángulos

Dos $\triangle$ son ***semejantes*** si tienen sus ángulos congruentes y sus lados homólogos proporcionales.
Dos triángulos son semejantes $\iff$

- Sus **tres lados** son proporcionales.
- **Dos de sus lados** son proporcionales **y los ángulos comprendidos** entre ellos son congruentes.
- **Tiene un par de ángulos** respectivamente congruentes.

5.8 Polígonos (de más de tres lados)

Propiedades de polígonos convexos:
La suma de los ángulos interiores de un polígono de n lados se representa como:

$$\boxed{S_n = (n-2).180^{\circ}}$$

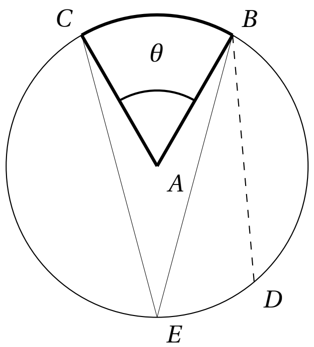
Esto es porque la suma de los ángulos exteriores de un polígono de n lados es igual a 360º.

5.9 Circunferencias

Se define a una circunferencia como el lugar geométrico de los puntos del plano que equidistan de uno fijo, llamado centro. Las posiciones relativas de una recta y una circunferencia, y entre dos circunferencias, son:

- Una recta es **exterior** a una circunferencia si no tienen puntos en común.
- Una recta es **tangente** a una circunferencia si tienen **solo** un punto en común.
- Una recta es **secante** a una circunferencia si se intersecan en dos puntos.
- Dos circunferencias son **secantes** si tienen dos puntos en común.
- Dos circunferencias son **tangentes** si tienen solo un punto en común.
- Dos circunferencias son **conceéntricas** si tienen el mismo centro.

5.10 Elementos de una Circunferencia



- **BD Cuerda**, segmento cuyos extremos están en la circunferencia.
- **CD Diámetro**, mayor de las cuerdas y contiene al centro de la circunferencia.
- **AC Radio**, segmento cuyos extremos son el centro de la circunferencia y un punto de la misma.
- $\overset{\frown}{CB}$ **arco**, subconjunto de la circunferencia.

- $C\hat{A}B$ **ángulo central** que se relaciona con el arco $\overset{\frown}{CB}$ es un ángulo cuyo vértice es el centro de la circunferencia y sus lados pasan por los extremos del arco al cual se lo relaciona.
- $C\hat{E}B$ **ángulo inscripto** en la circunferencia que abarca el arco $\overset{\frown}{CB}$, es un ángulo cuyo vértice está en la circunferencia y sus lados pasan por los extremos del arco al cual se lo relaciona.

Propiedades:

- $\boxed{C\hat{E}B = \frac{1}{2}C\hat{A}B}$ Un ángulo inscripto es congruente con la mitad del central que abarca el mismo arco.
- $\boxed{C\hat{E}B = C\hat{D}B}$ Los ángulos inscriptos en un mismo arco son congruentes.

5.11 Perímetros

- El **perímetro** de un polígono de n lados es la suma de las longitudes de cada uno de los n lados
- La **longitud** de una circunferencia de radio R es $2\pi R$.

5.12 Áreas

- Un triangulo de base b y altura h es igual a: $\frac{b \times h}{2}$
- Un paralelogramo de base b y altura h es igual a: $b \times h$.
- Un trapecio de base mayor B y de base menor b y altura h es: $\frac{(B+b) \times h}{2}$.
- Un rombo cuyas diagonales miden D y d es: $\frac{D \times d}{2}$.
- Un polígono regular de n lados que miden l y apotema ap es: $\frac{n \times l \times ap}{2}$
- Una circunferencia de radio R es: πR^2.

5.13 Cuerpos

Los poliedros son cuerpos cuyas caras son polígonos.
Teorema de Euler: Establece que en un poliedro convexo el número de caras, más los vértices menos las aristas es siempre igual a 2: $f + v - e = 2$
Algunos poliedros particulares:

- **Prisma**: Es un poliedro que tiene dos caras que son poligonos congruentes, contenidas en planos paralelos. Los prismas rectos son aquellos cuyas caras laterales son rectangulos. La altura de un prisma es la distancia entre las bases. Un **paralelepipedo** es un prisma de seis caras, cuyas bases son paralelogramos, iguales y paralelos dos a dos. Un paralelepipedo en el que todas sus bases son rectangulos y por tanto todas sus caras son perpendiculares entre si, es un **paralelepipedo recto**.
- **Piramide**: es unn poliedro que tiene una cara (llamada base) que es un poligono cualquiera y las otras caras concurren en un punto (llamado vertice), en efecto, son triangulos. Hay tantas caras laterales como lados tenga la base. Las **Piramides rectas** son aquellas cuyas caras laterales son triangulos isosceles y el pie de la altura esta en el centro de la base.

Poliedros regulares Son poliedros regulares aquellos cuyas caras son poligonos regulares congruentes, y a cada vértice concurren el mismo numero de aristas. Solo hay 5 poliedros regulares:

Poliedro Regular	Nº de Caras	Forma caras
Tetraedro	4	Triangulo equilatero
Cubo	6	Cuadrado
Octaedro	8	Triangulo equilatero
Dodecaedro	12	Pentagono regular
Icosaedro	20	Triangulo equilatero

5.14 Cuerpos Redondos

Son cuerpos redondos la esfera, el cilindro (oblicuo, recto) y el cono (oblicuo, -).

5.15 Volumenes de cuerpos

- Prismas y cilindros: $area\ de\ la\ base \times altura$
- Piramides y conos: $\frac{area\ de\ la\ base \times altura}{3}$
- Esfera: $\frac{4}{3} \times \pi \times r^3$

5.16 Areas de Cuerpos

Si los cuerpos son poliedros, hallar el area de los mismos es sumar las areas de cada una de sus caras. En el caso de prismas y piramides el area total se divide en area lateral y area de las bases.

El area de una esfera de radio R se obtiene mediante: $4 \times \pi \times R^2$.

El area de un cilindro recto de base de radio R y altura h con sus dos bases se obtiene mediante:

$$2\ area_{base} + area_{lateral} = 2\ \times \pi \times R^2 + 2 \times \pi \times R \times h$$

6 Trigonometria