2

Fundamentos de lógica

En el ejemplo 1.38 (sección 1.4) del primer capítulo obtuvimos una fórmula para la suma. Esta fórmula se obtuvo contando la misma colección de objetos (las proposiciones que ejecutamos en cierto segmento de programa) de dos formas distintas e igualando luego los resultados. En consecuencia, decimos que la fórmula fue establecida mediante una demostración combinatoria. Ésta es una de las múltiples técnicas para obtener una demostración con las que trabajaremos en todo el texto.

En este capítulo daremos un vistazo a lo que es un argumento válido y una demostración más convencional. Cuando un matemático desea ofrecer una demostración de una situación dada, debe utilizar un sistema de lógica. Esto también es cierto para un científico de la computación que desarrolla los algoritmos necesarios para un programa o sistema de programas. La lógica de las matemáticas se aplica para decidir si una proposición se sigue o es consecuencia lógica de una o más proposiciones.

Algunas de las reglas que rigen este proceso se describen en este capítulo. Usaremos después estas reglas en las demostraciones (proporcionadas en el texto y solicitadas en los ejercicios) que aparecen en los siguientes capítulos. Sin embargo, en ningún momento hemos pensado llegar a un punto en el que apliquemos las reglas de modo automático. Como ha ocurrido con la aplicación de las ideas de la enumeración analizadas en el capítulo 1, siempre deberemos analizar y tratar de comprender la situación dada. Esto pide atributos que no podemos aprender en un libro, como la inspiración o la creatividad. El solo hecho de aplicar las fórmulas o utilizar las reglas no nos permitirá avanzar en la demostración de resultados (como es el caso de losteoremas) ni resolver problemas de enumeración.

2.1 Conectivas básicas y tablas de verdad

En el desarrollo de cualquier teoría, se hacen afirmaciones en forma de oraciones. Tales afirmaciones, llamadas *enunciados* (o *proposiciones*), son oraciones declarativas que son verdaderas o falsas (pero *no* ambas). Por ejemplo, las siguientes son proposiciones y, para representarlas, utilizaremos las letras minúsculas (como p, q y r).

p: La combinatoria es un curso obligatorio para el segundo año de bachillerato.

q: Margaret Mitchell escribió *Lo que el viento se llevó*.

r: $2 + 3 = 5$.

Por otro lado, no consideramos como proposiciones algo como la exclamación

¡Qué bonita tarde!

o el mandato†

Levántate y haz tus ejercicios.

Las proposiciones anteriores, representadas por las letras p, q y r, se consideran proposiciones *primitivas*, ya que no hay forma de descomponerlas en algo más sencillo. Es posible obtener nuevas proposiciones, a partir de otras existentes, de dos maneras.

1) Transformando una proposición p en la proposición $\neg p$, que denota su *negación* y se lee como "no p".

Para la proposición anterior p, $\neg p$ es la proposición "La combinatoria no es un curso obligatorio para el segundo año de bachillerato". (No consideramos la negación de una proposición primitiva como una proposición primitiva.)

2) Combinando dos o más proposiciones en una proposición *compuesta* mediante las siguientes *conectivas lógicas*.

a) Conjunción: La *conjunción* de dos proposiciones p, q se denota como $p \wedge q$, que se lee como "p y q". En nuestro ejemplo, la proposición compuesta $p \wedge q$ se lee como "La combinatoria es un curso obligatorio para el segundo año de bachillerato **y** Margaret Mitchell escribió *Lo que el viento se llevó*".

b) Disyunción: La expresión $p \vee q$ denota la *disyunción* de cualquier par de proposiciones p, q y se lee como "p o q". Por lo tanto, "La combinatoria es un curso obligatorio para el segundo año de bachillerato **o** Margaret Mitchell escribió *Lo que el viento se llevó*" es la traducción verbal de $p \vee q$ cuando p, q son las proposiciones ya mencionadas. Usamos la palabra "o" en el sentido *inclusivo*. En consecuencia, $p \vee q$ es verdadero si una o la otra o *ambas* proposiciones p, q son verdaderas. En español, a veces se escribe "y/o" para subrayar este hecho. La "o" *exclusiva* se denota como $p \veebar q$. La proposición compuesta $p \veebar q$ es verdadera si una u otra, pero *no ambas* proposiciones son verdaderas. Una forma de expresar $p \veebar q$ para este ejemplo es "La combinatoria es un curso obligatorio para el segundo año de bachillerato o Margaret Mitchell escribió *Lo que el viento se llevó*, pero no ambos".

c) Implicación: Decimos que "p implica q" y escribimos $p \rightarrow q$ para designar la proposición que es la *implicación* de q por p. En forma alternativa, podemos decir (i) Si p, entonces q; (ii) p es *suficiente* para q; (iii) p es una *condición suficiente* para q; (iv) p sólo si q; (v) q es *necesario* para p; y (vi) q es una *condición necesaria* para p. Una traducción verbal de $p \rightarrow q$ usando nuestro ejemplo es "Si la combinatoria es un curso obligatorio para el segundo año de bachillerato, entonces Margaret Mitchell escribió *Lo que el viento se llevó*". La

† El término *command* también se traduce como "comando". (*N del E.*)

proposición p se conoce como la *hipótesis* de la implicación, y q como la *conclusión*. Cuando se combinan las proposiciones de esta forma, no es necesario que haya una relación causal entre las proposiciones para que la implicación sea verdadera.

d) Bicondicional: Por último, la *bicondicional* de dos proposiciones p, q se denota como $p \leftrightarrow q$, lo cual se lee como "p si y sólo si q", o "p es necesario y suficiente para q". Para las proposiciones p, q dadas en el ejemplo, "La combinatoria es un curso obligatorio para el segundo año de bachillerato, si y sólo si Margaret Mitchell escribió *Lo que el viento se llevó*" tiene el significado de $p \leftrightarrow q$. A veces abreviamos "p si y sólo si q" como "p sii q".

En nuestro análisis posterior de lógica debemos tener presente que un enunciado como

El número x es un entero

no es una proposición ya que su *valor de verdad* (verdadero o falso) no puede determinarse si no se asigna un valor numérico a x. Si asignamos a x el valor de 7, el resultado sería una proposición verdadera. Sin embargo, si a x le asignamos valores como ½, $\sqrt{2}$ o π, tendríamos una proposición falsa. En las secciones 2.4 y 2.5 de este capítulo encontraremos de nuevo este tipo de situación.

En el análisis anterior, mencionamos las circunstancias en las cuales las proposiciones *compuestas* $p \vee q$, $p \veebar q$ se consideran verdaderas, con base en la verdad de sus componentes p, q. Esta idea de que la verdad o falsedad de una proposición compuesta sólo depende de los valores de verdad de sus componentes requiere un estudio más profundo. Las tablas 2.1 y 2.2 resumen los valores de verdad de la negación de los diferentes tipos de proposiciones compuestas, con base en los valores de verdad de sus componentes. Al construir estas *tablas de verdad*, hemos usado el "0" para falso y el "1" para verdadero.

Tabla 2.1

p	$\neg p$
0	1
1	0

Tabla 2.2

p	q	$p \wedge q$	$p \vee q$	$p \veebar q$	$p \to q$	$p \leftrightarrow q$
0	0	0	0	0	1	1
0	1	0	1	1	1	0
1	0	0	1	1	0	0
1	1	1	1	0	1	1

Las cuatro asignaciones posibles de verdad para p, q pueden enumerarse en cualquier orden. El orden particular que presentamos en este caso será útil en nuestro trabajo posterior.

Vemos que las columnas de los valores de verdad de p y $\neg p$ son opuestas entre sí. La proposición $p \wedge q$ es verdadera sólo cuando p, q son verdaderas, mientras que $p \vee q$ es falsa solamente cuando las dos proposiciones componentes son falsas. Como ya habíamos observado, $p \veebar q$ es verdadera exactamente cuando una de las dos es verdadera.

Para la implicación $p \to q$, el resultado es verdadero en todos los casos, excepto cuando p es verdadero y q es falso. No queremos que una proposición verdadera nos conduzca a pensar en algo que es falso. Sin embargo, consideramos como verdaderas las proposiciones "Si $2 + 3 = 6$, entonces $2 + 4 = 7$", aunque las proposiciones "$2 + 3 = 6$" y "$2 + 4 = 7$" sean ambas falsas.

Por último, la bicondicional $p \leftrightarrow q$ es verdadera cuando las proposiciones p, q tienen el mismo valor de verdad, y falsa en los demás casos.

Ahora que hemos presentado algunos conceptos, estudiaremos con más detalle estas ideas iniciales acerca de las conectivas. Nuestros primeros dos ejemplos serán útiles para nuestro estudio.

Ejemplo 2.1

Sean s, t y u las siguientes proposiciones primitivas:

s: Felipe sale a dar un paseo.
t: La luna está brillando.
u: Está nevando.

Las siguientes oraciones ofrecen algunas traducciones posibles para las proposiciones compuestas simbólicas dadas.

a) $(t \wedge \neg u) \rightarrow s$: Si la luna está brillando y no está nevando, entonces Felipe sale a dar un paseo.
b) $t \rightarrow (\neg u \rightarrow s)$: Si la luna está brillando, entonces si no está nevando, Felipe sale a dar un paseo. [Así, $\neg u \rightarrow s$ se entiende como $(\neg u) \rightarrow s$ y no como $\neg(u \rightarrow s)$.]
c) $\neg(s \leftrightarrow (u \vee t))$: No ocurre que Felipe salga a dar un paseo si y sólo si está nevando o la luna está brillando.

Ahora trabajaremos en orden inverso y examinaremos la notación lógica (o simbólica) para las siguientes tres frases:

d) "Felipe saldrá a dar un paseo si y sólo si la luna está brillando". Aquí, las palabras "si y sólo si" indican que estamos trabajando con una bicondicional. En forma simbólica, esto se convierte en $s \leftrightarrow t$.
e) "Si está nevando y la luna no está brillando, entonces Felipe no saldrá a dar un paseo". Esta proposición compuesta es una implicación, en la que la hipótesis es a su vez una proposición compuesta. Podríamos expresar esta proposición en forma simbólica como $(u \wedge \neg t) \rightarrow \neg s$.
f) "Está nevando pero, aun así, Felipe saldrá a dar un paseo". Ahora nos encontramos con una nueva conectiva: *pero*. En nuestro estudio de la lógica, seguiremos la convención de que las conectivas *pero* e *y* tienen el mismo significado. En consecuencia, esta frase puede representarse como $u \wedge s$.

Ahora regresemos a los resultados de la tabla 2.2; en particular, la sexta columna. Porque si es ésta la primera vez que el lector se encuentra con la tabla de verdad de la implicación $p \rightarrow q$, entonces podría ser difícil que acepte los datos de dicha tabla, particularmente los resultados de los dos primeros casos (donde p tiene el valor de verdad 0). El siguiente ejemplo puede ayudarle a comprender y aceptar estas asignaciones de valores de verdad.

Ejemplo 2.2

Consideremos la siguiente situación. Estamos a casi una semana antes de Navidad y Penélope irá a varias fiestas en esta semana. Como está preocupada por su peso, ha decidido no pesarse hasta el día después de Navidad. Pensando en las consecuencias que esas fiestas podrían tener con su figura, ha decidido lo siguiente para el día 26: "Si peso más de 60 kilogramos, entonces me inscribiré en una clase de educación física".

Aquí haremos que p y q denoten las proposiciones (primitivas)

p: Peso más de 60 kg.
q: Me inscribiré en la clase de educación física.

Entonces la posición de Penélope (una implicación) está dada por $p \rightarrow q$.

Consideraremos los valores de verdad de este ejemplo particular de $p \rightarrow q$ respecto a las filas de la tabla 2.2; en primer lugar, los casos más sencillos, las filas 4 y 3.

- Fila 4: p y q tiene el valor de verdad 1. El 26 de diciembre, Penélope pesa más de 60 kilogramos y se inscribe rápidamente en la clase de educación física, justo como lo había dicho. Aquí, $p \rightarrow q$ es verdadera y se le asigna el valor de verdad 1.
- Fila 3: p tiene el valor de verdad 1, q tiene el valor de verdad 0. El 26 de diciembre, Penélope pesa más de 60 kilogramos, pero decide no entrar al curso de educación física. En este caso, vemos que Penélope ha roto su promesa; en otras palabras, la implicación $p \rightarrow q$ es falsa (y tiene el valor de verdad 0).

Los casos de las filas 1 y 2 podrían no coincidir inmediatamente con nuestra intuición, pero el ejemplo nos ayudará a aceptar los resultados.

- Fila 1: p y q tienen el valor de verdad 0. El 26 de diciembre Penélope tiene un peso menor o igual que 60 kilogramos y no se inscribe en el curso de educación física. Ella no ha violado su resolución; consideramos entonces que la proposición $p \rightarrow q$ es verdadera y le asignamos el valor de verdad 1.
- Fila 2: p tiene el valor de verdad 0, q tiene el valor de verdad 1. En este último caso, Penélope pesa 60 kilogramos o menos el 26 de diciembre, pero aún así se inscribe en el curso. Es probable que pese 59 o 60 kilos y siente que esto es demasiado. O bien, es probable que desee inscribirse porque piensa que es bueno para su salud. Sin importar la razón, ella no va en contra de su resolución $p \rightarrow q$. Una vez más, aceptamos esta proposición compuesta como verdadera, y le asignamos el valor de verdad 1.

Nuestro siguiente ejemplo analiza un concepto relacionado con lo anterior: la estructura de *decisión* (o *selección*) en la programación de computadores.

Ejemplo 2.3

En las ciencias de la computación, aparecen las estructuras de decisión si-entonces y si-entonces-o en lenguajes como BASIC y Pascal. La hipótesis p es con frecuencia una expresión relacional como $x > 2$. Esta expresión se convierte entonces en una proposición (lógica) que tiene el valor de verdad 0 o 1, según el valor de la variable x en ese punto del programa. La conclusión q podría ser un "enunciado ejecutable" para que el programa tome otra dirección o para una impresión. (Así, q no es una de las proposiciones lógicas que hemos estado analizando.) Al trabajar con "Si p entonces q", en este contexto, el computador ejecuta q sólo en el caso de que p sea verdadero. Si p es falso, el computador pasa a la siguiente instrucción en la secuencia del programa. En el caso de la estructura de decisión "Si p entonces q, o r", q se ejecuta cuando p es verdadera, y r se ejecuta cuando p es falsa.

Antes de continuar, una advertencia: tenga cuidado al usar los símbolos $\rightarrow$ y $\leftrightarrow$. La implicación y la bicondicional no son iguales, como lo muestran las últimas dos columnas de la tabla 2.2.

Sin embargo, en el lenguaje cotidiano, con frecuencia se utiliza una implicación con la intención real de una bicondicional. Por ejemplo, consideremos las siguientes implicaciones que un padre dirige a su hijo.

$s \rightarrow t$: Si haces tu tarea, entonces irás al juego de béisbol.
$t \rightarrow s$: Irás al juego de béisbol sólo si haces la tarea.

- Caso 1: La implicación $s \rightarrow t$. Cuando el padre le dice al hijo "Si haces tu tarea, entonces irás al juego de béisbol", intenta darle un punto de vista positivo haciendo hincapié en la diversión de ver un juego de béisbol.
- Caso 2: La implicación $t \rightarrow s$. Aquí encontramos el punto de vista negativo y el padre que advierte al hijo al decir "Irás al juego de béisbol sólo si haces la tarea". Este padre pone énfasis en el castigo (carencia de diversión) en que se puede incurrir.

Sin embargo, en ambos casos, el padre desea que su implicación, ya sea $s \rightarrow t$ o $t \rightarrow s$, se entienda como la bicondicional $s \leftrightarrow t$. Ya que en el primer caso, el padre da indicios del castigo a la vez que promete un premio; en el caso 2, en el que se utiliza el castigo (tal vez para amenazar), si el chico realmente hace la tarea, entonces definitivamente tendrá la oportunidad de disfrutar el juego de béisbol.

En los escritos científicos, debemos hacer el máximo esfuerzo para no ser ambiguo; cuando se da una implicación, generalmente no puede, ni debe, interpretarse como una bicondicional. Las definiciones son una notable excepción que analizaremos en la sección 2.5.

Antes de continuar daremos un paso atrás. Al resumir el material que produjo las tablas 2.1 y 2.2, tal vez no pusimos suficiente énfasis en que los resultados son ciertos para cualquier par de proposiciones p, q, y *no* sólo para proposiciones primitivas p, q. Los ejemplos 2.4 a 2.6 nos ayudarán a reforzar esto.

Ejemplo 2.4

Examinemos la tabla de verdad de la proposición compuesta: "Margaret Mitchell escribió *Lo que el viento se llevó* y si $2 + 3 \neq 5$, entonces la combinatoria es un curso obligatorio para el segundo año de bachillerato". En notación simbólica, esta proposición se escribe como $q \wedge (\neg r \rightarrow p)$, donde p, q y r representan las proposiciones primitivas que introdujimos al principio de esta sección. La última columna de la tabla 2.3 contiene los valores de verdad de este resultado. Obtuvimos estos valores de verdad recurriendo al hecho de que la conjunción de dos proposiciones es verdadera si y sólo si ambas proposiciones son verdaderas. Esto es lo que dijimos antes, en la tabla 2.2; ahora una de nuestras proposiciones (la implicación $\neg r \rightarrow p$) es definitivamente una proposición compuesta y no una primitiva. Las columnas 4, 5 y 6 de esta tabla muestran la forma de construir la tabla de verdad, considerando partes más pequeñas de la proposición compuesta y usando los resultados de las tablas 2.1 y 2.2.

Tabla 2.3

p	q	r	$\neg r$	$\neg r \rightarrow p$	$q \wedge (\neg r \rightarrow p)$
0	0	0	1	0	0
0	0	1	0	1	0
0	1	0	1	0	0
0	1	1	0	1	1
1	0	0	1	1	0
1	0	1	0	1	0
1	1	0	1	1	1
1	1	1	0	1	1

Ejemplo 2.5

En la tabla 2.4 desarrollamos las tablas de verdad de las proposiciones compuestas $p \vee (q \wedge r)$ (columna 5) y $(p \vee q) \wedge r$ (columna 7).

Tabla 2.4

p	q	r	$q \wedge r$	$p \vee (q \wedge r)$	$p \vee q$	$(p \vee q) \wedge r$
0	0	0	0	0	0	0
0	0	1	0	0	0	0
0	1	0	0	0	1	0
0	1	1	1	1	1	1
1	0	0	0	1	1	0
1	0	1	0	1	1	1
1	1	0	0	1	1	0
1	1	1	1	1	1	1

Como los valores de verdad de las columnas 5 y 7 difieren (en las filas 5 y 7), debemos evitar escribir una proposición compuesta como $p \vee q \wedge r$. Si no disponemos de los paréntesis que indiquen cuál de las conectivas lógicas $\wedge$ u $\vee$ debe aplicarse primero, no tendremos idea de si estamos trabajando con $p \vee (q \wedge r)$ o con $(p \vee q) \wedge r$.

El último ejemplo de esta sección ilustra dos tipos particulares de proposiciones.

Ejemplo 2.6

Los resultados de las columnas 4 y 7 de la tabla 2.5 muestran que la proposición $p \rightarrow (p \vee q)$ es verdadera y que la proposición $p \wedge (\neg p \wedge q)$ es falsa en el caso de todas las asignaciones de valores de verdad para las proposiciones componentes p, q.

Tabla 2.5

p	q	$p \vee q$	$p \rightarrow (p \vee q)$	$\neg p$	$\neg p \wedge q$	$p \wedge (\neg p \wedge q)$
0	0	0	1	1	0	0
0	1	1	1	1	1	0
1	0	1	1	0	0	0
1	1	1	1	0	0	0

Definición 2.1 Una proposición compuesta es una *tautología* si es verdadera para todas las asignaciones de valores de verdad para sus proposiciones componentes. Si una proposición compuesta es falsa para todas estas asignaciones, entonces es una *contradicción*.

En este capítulo usaremos el símbolo T_0 para denotar una tautología y el símbolo F_0 para denotar una contradicción.

Podemos usar las ideas de tautología e implicación para describir lo que entendemos por un argumento válido. Esto tendrá un interés primordial para nosotros en la sección 2.3, y nos ayudará a desarrollar la capacidad necesaria para demostrar teoremas matemáticos. En general, un argumento comienza con una lista de proposiciones *dadas* llamadas *premisas* y una proposición que se conoce como la *conclusión* del argumento. Debemos examinar estas premisas, $p_1, p_2, p_3, \ldots, p_n$ e intentar demostrar que la conclusión q se sigue lógicamente de estas proposiciones dadas; es decir, intentamos demostrar que si cada una de las premisas $p_1, p_2, p_3, \ldots, p_n$ es una proposición verdadera, entonces la proposición q también es verdadera. Una forma de hacer esto consiste en analizar la implicación

$$(p_1 \wedge p_2 \wedge p_3 \wedge \cdots \wedge p_n)\dagger \rightarrow q,$$

donde la hipótesis es la conjunción de las n premisas. Si cualquiera de las premisas $p_1, p_2, p_3, \ldots, p_n$ es falsa, entonces no importa el valor de verdad de q, pues, en este caso, la implicación $(p_1 \wedge p_2 \wedge p_3 \wedge \cdots \wedge p_n) \rightarrow q$ es verdadera. En consecuencia, si partimos de las premisas $p_1, p_2, p_3, \ldots, p_n$ (cada una con valor de verdad 1) y vemos que en estas circunstancias q también tiene el valor 1, entonces la implicación

$$(p_1 \wedge p_2 \wedge p_3 \wedge \cdots \wedge p_n) \rightarrow q$$

es una *tautología* y tenemos un *argumento válido*.

EJERCICIOS 2.1

1. Determine cuáles de las siguientes oraciones son proposiciones.
   a) En 1990, George Bush era el presidente de Estados Unidos.
   b) $x + 3$ es un entero positivo.
   c) ¡Si todas las mañanas fueran tan soleadas y despejadas como ésta!

† En este momento, sólo trabajamos con la conjunción de dos proposiciones, así que debemos señalar que la conjunción $p_1 \wedge p_2 \wedge p_3 \wedge \cdots \wedge p_n$ de n proposiciones es verdadera si y sólo si cada p_i, $1 \leq i \leq n$, es verdadera. Analizaremos con detalle esta conjunción generalizada en el ejemplo 4.14 de la sección 4.2.

d) Quince es un número par.
e) Si Josefina tarda en llegar a la fiesta, su primo Zacarías podría enojarse.
f) ¿Qué hora es?
g) De la corte de Moctezuma a las playas de Trípoli.
h) Hasta el 30 de junio de 1986, Christine Marie Evert había ganado el abierto de Francia siete veces.

2. Identifique las proposiciones primitivas en el ejercicio 1.

3. Sean p, q proposiciones primitivas para las que la implicación $p \to q$ es falsa. Determine los valores de verdad de

a) $p \wedge q$ **b)** $\neg p \vee q$ **c)** $q \to p$ **d)** $\neg q \to \neg p$

4. Sean p, q, r, s las siguientes proposiciones: p: Termino de escribir mi programa de computación antes de la comida; q: Jugaré tenis en la tarde; r: El sol está brillando; s: La humedad es baja. Escriba lo siguiente en forma simbólica.
a) Si el sol está brillando, jugaré tenis esta tarde.
b) Terminar de escribir mi programa antes de la comida es necesario para que juegue tenis esta tarde.
c) La humedad baja y el sol brillante son suficientes para que juegue tenis esta tarde.

5. Sean p, q, r las siguientes proposiciones acerca de un triángulo ABC particular; p: El triángulo ABC es isósceles; q: El triángulo ABC es equilátero; r: El triángulo ABC es equiangular. Traduzca cada una de las siguientes proposiciones en una frase en español.

a) $q \to p$ **b)** $\neg p \to \neg q$ **c)** $q \leftrightarrow r$
d) $p \wedge \neg q$ **e)** $r \to p$

6. Determine el valor de verdad de cada una de las siguientes implicaciones.
a) Si $3 + 4 = 12$, entonces $3 + 2 = 6$.
b) Si $3 + 3 = 6$, entonces $3 + 6 = 9$.
c) Si $3 + 3 = 6$, entonces $3 + 4 = 9$.
d) Si Thomas Jefferson fue el tercer presidente de Estados Unidos, entonces $2 + 3 = 5$.

7. Vuelva a escribir cada una de las siguientes proposiciones como una implicación de la forma si-entonces.
a) La práctica diaria de su servicio es una condición suficiente para que Daniela tenga una buena posibilidad de ganar el torneo de tenis.
b) Arregle mi aire acondicionado o no pagaré la renta.
c) María puede subir a la motocicleta de Luis sólo si usa el casco.

8. Construya una tabla de verdad para cada de las siguientes proposiciones compuestas; p, q, r denotan proposiciones primitivas.

a) $\neg(p \vee \neg q) \to \neg p$ **b)** $p \to (q \to r)$ **c)** $(p \to q) \to r$
d) $(p \to q) \to (q \to p)$ **e)** $[p \wedge (p \to q)] \to q$ **f)** $(p \wedge q) \to p$
g) $q \leftrightarrow (\neg p \vee \neg q)$ **h)** $[(p \to q) \wedge (q \to r)] \to (p \to r)$

9. ¿Cuáles de las proposiciones compuestas del ejercicio 8 son tautologías?

10. Verifique que $[p \to (q \to r)] \to [(p \to q) \to (p \to r)]$ es una tautología.

11. a) ¿Cuántas filas se necesitan para la tabla de verdad de la proposición compuesta $(p \vee \neg q) \leftrightarrow [(\neg r \wedge s) \to t]$, donde p, q, r, s y t son proposiciones primitivas?
b) Sean $p_1, p_2, \ldots, p_n$ proposiciones primitivas. Sea p una proposición compuesta que contiene al menos una ocurrencia de cada p_i, para $1 \leq i \leq n$ (y p no contiene otra proposición primitiva). ¿Cuántas filas se necesitan para construir la tabla de verdad de p?

12. Determine todas las asignaciones de valores de verdad, si es que existen, para las proposiciones primitivas p, q, r, s, t que hacen que todas las siguientes proposiciones compuestas sean falsas.

a) $[(p \wedge q) \wedge r] \to (s \vee t)$
b) $[p \wedge (q \wedge r)] \to (s \veebar t)$

13. a) Si la proposición q tiene el valor de verdad 1, determine todas las asignaciones de valores de verdad para las proposiciones primitivas p, r y s para las que el valor de verdad de la proposición

$$(q \rightarrow [(\neg p \vee r) \wedge \neg s]) \wedge [\neg s \rightarrow (\neg r \wedge q)]$$

es igual a 1.

b) Responda la parte (a) si q tiene el valor de verdad 0.

14. Al inicio de cierto programa en Pascal, la variable entera n recibe el valor de 7. Determine el valor de n después de encontrar cada uno de los siguientes enunciados *sucesivos* durante la ejecución del programa. [En este caso, el valor de n después de la ejecución del enunciado de la parte (a) se convierte en el valor de n para el enunciado de la parte (b), etcétera, hasta el enunciado de la parte (e). La operación Div en Pascal devuelve la parte entera de un cociente; por ejemplo, 6 Div 2 = 3, 7 Div 2 = 3 y 8 Div 3 = 2.]

a) `If n>5 then n := n+2;`
b) `If ((n+2=8) or (n-3=6)) then n := 2*n+1;`
c) `If ((n-3=16) and (n Div 6=1)) then n := n+3;`
d) `If ((n<>21) and (n-7=15)) then n := n-4;`
e) `If ((n Div 5=2) or (n+1=20)) then n := n+1;`

15. Las variables enteras m y n reciben los valores de 3 y 8, respectivamente, durante la ejecución de cierto programa en Pascal. Durante la ejecución del programa, se encuentran los siguientes enunciados *sucesivos*. [Aquí, los valores de m, n después de la ejecución del enunciado de la parte (a) se convierten en los valores de m, n para el enunciado de la parte (b), etcétera, hasta el enunciado de la parte (g).] ¿Cuáles son los valores de m, n después de encontrar cada uno de estos enunciados?

a) `If n-m=5 then n := n-2;`
b) `If ((2*m=n) and (n Div 4=1)) then n := 4*m-3;`
c) `If ((n<8) or (m Div 2=2)) then n := 2*m`
   `else m := 2*n;`
d) `If ((m<20) and (n Div 6=1)) then m := m-n-5;`
e) `If ((n=2*m) or (n Div 2=5)) then m := m+2;`
f) `If ((n Div 3=3) and (m Div 3 <> 1)) then m := n;`
g) `If m*n <> 35 then n := 3*m+7;`

16. En el siguiente segmento de un programa en Pascal, i, j, m y n son variables enteras. El usuario proporciona los valores de m y n en una parte anterior de la ejecución (total) del programa.

```
For i := 1 to m do
  For j := 1 to n do
    If i <> j then
      Writeln ('The sum of i and j is ', i + j);
```

¿Cuántas veces aparece el enunciado Writeln en el segmento ejecutado cuando (a) $m = 10$, $n = 10$; (b) $m = 20$, $n = 20$; (c) $m = 10$, $n = 20$; (d) $m = 20$, $n = 10$?

17. Para el siguiente programa en BASIC, ¿cuántas veces se ejecuta la proposición PRINT de la línea 40?

```
10 X=10
20 FOR I=1 TO 7
30      FOR J=1 TO I+3
40           IF ((X>8) OR (I>5 AND J<10)) THEN PRINT X
50      NEXT J
60      X=X-1
70 NEXT I
80 END
```

18. Un segmento de un programa en Pascal contiene un ciclo Repeat-Until estructurado de la forma siguiente:

```
Repeat
........
........
Until ((x <> 0) and (y>0)) or (not ((w>0) and (t=3)));
```

En el caso de cada una de las siguientes asignaciones para las variables x, y, w y t, determine si termina o no el ciclo.

a) $x = 7, y = 2, w = 5, t = 3$
b) $x = 0, y = 2, w = -3, t = 3$
c) $x = 0, y = -1, w = 1, t = 3$
d) $x = 1, y = -1, w = 1, t = 3$

19. Después de hornear un pastel para sus dos sobrinas y dos sobrinos que vienen a visitarla, la tía Natalia deja el pastel en la mesa de la cocina para que se enfríe. Luego, ella va al centro comercial para cerrar su tienda durante el resto del día. Al regresar, descubre que alguien se ha comido una cuarta parte del pastel (e incluso tuvo el descaro de dejar su plato sucio junto al resto del pastel). Puesto que nadie estuvo en su casa ese día (excepto los cuatro visitantes), la tía Natalia se pregunta cuál de sus sobrinos se comería esa parte del pastel. Los cuatro "sospechosos" le dicen lo siguiente:

Carlos:	Jimena se comió el trozo de pastel.
Delia:	Yo no me lo comí.
Jimena:	Toño se lo comió.
Toño:	Jimena mintió cuando dijo que yo me había comido el pastel.

Si sólo una de estas proposiciones es verdadera y sólo uno de ellos cometió el terrible crimen, ¿quién es el culpable al que la tía Natalia debe castigar severamente?

2.2 Equivalencia lógica: Las leyes de la lógica

En todas las áreas de las matemáticas, necesitamos saber cuándo las entidades que estudiamos son iguales o esencialmente las mismas. Por ejemplo, en aritmética y álgebra sabemos que dos números reales distintos de cero son iguales cuando tienen la misma magnitud y signo algebraico. Por lo tanto, para dos números reales cualesquiera x, y, distintos de cero, tenemos que $x = y$ si $|x| = |y|$ y $xy > 0$, y viceversa (es decir, si $x = y$, entonces $|x| = |y|$ y $xy > 0$). Cuando analizamos triángulos en geometría, surge el concepto de congruencia. En este caso, el triángulo ABC y el triángulo DEF son congruentes si, por ejemplo, sus lados correspondientes son iguales (es decir, la longitud del lado AB es igual a la longitud del lado DE, la longitud del lado BC es igual a la del lado EF, y la del lado CA es igual a la del lado FD).

Nuestro estudio de la lógica se conoce con frecuencia como *álgebra de proposiciones* (en oposición al álgebra de los números reales). Aquí utilizaremos las tablas de verdad de los enunciados, o proposiciones, para desarrollar una idea acerca de cuándo las dos entidades son esencialmente la misma. Comencemos con un ejemplo.

Ejemplo 2.7 Para las proposiciones primitivas p y q, la tabla 2.6 proporciona las tablas de verdad de las proposiciones compuestas $\neg p \vee q$ y $p \rightarrow q$. Aquí vemos que las tablas de verdad correspondientes de las dos proposiciones $\neg p \vee q$ y $p \rightarrow q$ son exactamente iguales.

Tabla 2.6

p	q	$\neg p$	$\neg p \vee q$	$p \rightarrow q$
0	0	1	1	1
0	1	1	1	1
1	0	0	0	0
1	1	0	1	1

Esta situación nos lleva a la idea siguiente.

Definición 2.2 Dos proposiciones s_1, s_2 son *lógicamente equivalentes*, y escribimos $s_1 \Leftrightarrow s_2$, cuando la proposición s_1 es verdadera (respectivamente, falsa) si y sólo si la proposición s_2 es verdadera (respectivamente, falsa).

Observe que cuando $s_1 \Leftrightarrow s_2$, las proposiciones s_1 y s_2 dan lugar a las mismas tablas de verdad ya que s_1, s_2 tienen los mismos valores de verdad para *todas* las opciones de valores de verdad de sus componentes primitivas.

Como resultado de este concepto, vemos que podemos expresar la conectiva para la implicación (de proposiciones primitivas) en términos de la negación y la disyunción; es decir, $(p \rightarrow q) \Leftrightarrow \neg p \vee q$. De la misma manera, el resultado de la tabla 2.7 indica que $(p \leftrightarrow q) \Leftrightarrow (p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)$; esto ayuda a validar el uso del término *bicondicional*. Si usamos la equivalencia lógica de la tabla 2.6, vemos que también podemos escribir $(p \leftrightarrow q) \Leftrightarrow (\neg p \vee q) \wedge (\neg q \vee p)$. En consecuencia, si así lo queremos, podemos eliminar las conectivas $\rightarrow$ y $\leftrightarrow$ de las proposiciones compuestas.

Si examinamos la tabla 2.8, tenemos que la negación y las conectivas $\wedge$ y $\vee$ son todo lo que necesitamos para reemplazar la conectiva *o exclusiva*, $\underline{\vee}$. De hecho, podríamos incluso eliminar una de las conectivas $\wedge$ y $\vee$. Sin embargo, para las aplicaciones relacionadas con este tema y que queremos estudiar más adelante en este texto, necesitaremos tanto $\wedge$ y $\vee$ como la negación.

Tabla 2.7

p	q	$p \rightarrow q$	$q \rightarrow p$	$(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)$	$p \leftrightarrow q$
0	0	1	1	1	1
0	1	1	0	0	0
1	0	0	1	0	0
1	1	1	1	1	1

Tabla 2.8

p	q	$p \underline{\vee} q$	$p \vee q$	$p \wedge q$	$\neg(p \wedge q)$	$(p \vee q) \wedge \neg(p \wedge q)$
0	0	0	0	0	1	0
0	1	1	1	0	1	1
1	0	1	1	0	1	1
1	1	0	1	1	0	0

Ahora usaremos la idea de equivalencia lógica para examinar algunas de las propiedades importantes que se cumplen en el álgebra de las proposiciones.

Para cualquier par de números reales a, b, sabemos que $-(a+b) = (-a) + (-b)$. ¿Existe un resultado similar para las proposiciones primitivas p, q?

Ejemplo 2.8 En la tabla 2.9 hemos construido las tablas de verdad para las proposiciones $\neg(p \wedge q)$, $\neg p \vee \neg q$, $\neg(p \vee q)$ y $\neg p \wedge \neg q$, donde p, q son proposiciones primitivas. Las columnas

Tabla 2.9

p	q	$p \wedge q$	$\neg(p \wedge q)$	$\neg p$	$\neg q$	$\neg p \vee \neg q$	$p \vee q$	$\neg(p \vee q)$	$\neg p \wedge \neg q$
0	0	0	1	1	1	1	0	1	1
0	1	0	1	1	0	1	1	0	0
1	0	0	1	0	1	1	1	0	0
1	1	1	0	0	0	0	1	0	0

4 y 7 muestran que $\neg(p \wedge q) \Leftrightarrow \neg p \vee \neg q$; las columnas 9 y 10 muestran que $\neg(p \vee q) \Leftrightarrow \neg p \wedge \neg q$. Estos resultados se conocen como las *Leyes de De Morgan*. Son similares a la conocida propiedad correspondiente de los números reales,

$$-(a+b) = (-a) + (-b),$$

ya comentada, que muestra que el negativo de una suma es igual a la suma de los negativos. Sin embargo, aquí surge una diferencia crucial: la negación de la *conjunción* de dos proposiciones primitivas p, q produce la *disyunción* de sus negaciones $\neg p$, $\neg q$, mientras que la negación de la *disyunción* de las mismas proposiciones p, q es lógicamente equivalente a la *conjunción* de las negaciones $\neg p$, $\neg q$.

Aunque en el ejemplo anterior p, q eran proposiciones primitivas, pronto veremos que las leyes de De Morgan son válidas para cualquier par de proposiciones.

En la aritmética de los números reales, las operaciones de suma y multiplicación están relacionadas por la llamada propiedad distributiva de la multiplicación sobre la suma; si a, b, c son números reales,

$$a \times (b + c) = (a \times b) + (a \times c).$$

El siguiente ejemplo muestra una propiedad similar para las proposiciones primitivas. También existe otra ley relacionada con esto (para las proposiciones primitivas) que no tiene su contrapartida en la aritmética de los números reales.

Ejemplo 2.9 La tabla 2.10 contiene las tablas de verdad de las proposiciones $p \wedge (q \vee r)$, $(p \wedge q) \vee (p \wedge r)$, $p \vee (q \wedge r)$ y $(p \vee q) \wedge (p \vee r)$. De la tabla se sigue que para p, q y r proposiciones primitivas,

$p \wedge (q \vee r) \Leftrightarrow (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$ La propiedad distributiva de $\wedge$ sobre $\vee$

$p \vee (q \wedge r) \Leftrightarrow (p \vee q) \wedge (p \vee r)$ La propiedad distributiva de $\vee$ sobre $\wedge$

Tabla 2.10

p	q	r	$p \wedge (q \vee r)$	$(p \wedge q) \vee (p \wedge r)$	$p \vee (q \wedge r)$	$(p \vee q) \wedge (p \vee r)$
0	0	0	0	0	0	0
0	0	1	0	0	0	0
0	1	0	0	0	0	0
0	1	1	0	0	1	1
1	0	0	0	0	1	1
1	0	1	1	1	1	1
1	1	0	1	1	1	1
1	1	1	1	1	1	1

La segunda ley distributiva no tiene su contrapartida en la aritmética de los números reales. Es decir, no es cierto que para todos los números reales a, b y c, $a + (b \times c) = (a + b) \times (a + c)$. Por ejemplo, para $a = 2$, $b = 3$ y $c = 5$, $a + (b \times c) = 17$ pero $(a + b) \times (a + c) = 35$.

Antes de proseguir, observemos que, en general, si s_1, s_2 son proposiciones y $s_1 \leftrightarrow s_2$ es una tautología, entonces s_1 y s_2 deben tener los mismos valores de verdad correspondientes (es decir, para cada asignación de valores de verdad a las proposiciones primitivas en s_1 y s_2, s_1 es verdadera si y sólo si s_2 es verdadera y s_1 es falsa si y sólo si s_2 es falsa) y $s_1 \Leftrightarrow s_2$. Cuando s_1 y s_2 son proposiciones lógicamente equivalentes (es decir, $s_1 \Leftrightarrow s_2$), entonces la proposición compuesta $s_1 \leftrightarrow s_2$ es una tautología. En este caso, también es cierto que $\neg s_1 \Leftrightarrow \neg s_2$ y $\neg s_1 \leftrightarrow \neg s_2$ son tautologías.

Si s_1, s_2 y s_3 son proposiciones tales que $s_1 \Leftrightarrow s_2$ y $s_2 \Leftrightarrow s_3$, entonces $s_1 \Leftrightarrow s_3$. Cuando dos proposiciones s_1 y s_2 no son lógicamente equivalentes, podemos escribir $s_1 \not\Leftrightarrow s_2$ para designar esta situación.

Con los conceptos de equivalencia lógica, tautología y contradicción, enunciamos la siguiente lista de propiedades del álgebra de proposiciones.

Las leyes de la lógica

Para cualesquiera proposiciones primitivas p, q, r, cualquier tautología T_0 y cualquier contradicción F_0,

1) $\neg\neg p \Leftrightarrow p$ — Ley de la *doble negación*
2) $\neg(p \vee q) \Leftrightarrow \neg p \wedge \neg q$ — Leyes de *De Morgan*
   $\neg(p \wedge q) \Leftrightarrow \neg p \vee \neg q$
3) $p \vee q \Leftrightarrow q \vee p$ — Leyes *conmutativas*
   $p \wedge q \Leftrightarrow q \wedge p$
4) $p \vee (q \vee r) \Leftrightarrow (p \vee q) \vee r$† — Leyes *asociativas*
   $p \wedge (q \wedge r) \Leftrightarrow (p \wedge q) \wedge r$

† Observemos que, debido a las leyes asociativas, no hay ambigüedad en las proposiciones de la forma $p \vee q \vee r$ o $p \wedge q \wedge r$.

5) $p \vee (q \wedge r) \Leftrightarrow (p \vee q) \wedge (p \vee r)$ $p \wedge (q \vee r) \Leftrightarrow (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$	Leyes *distributivas*
6) $p \vee p \Leftrightarrow p$ $p \wedge p \Leftrightarrow p$	Leyes *idempotentes*
7) $p \vee F_0 \Leftrightarrow p$ $p \wedge T_0 \Leftrightarrow p$	Leyes de *neutro*
8) $p \vee \neg p \Leftrightarrow T_0$ $p \wedge \neg p \Leftrightarrow F_0$	Leyes *inversas*
9) $p \vee T_0 \Leftrightarrow T_0$ $p \wedge F_0 \Leftrightarrow F_0$	Leyes de *dominación*
10) $p \vee (p \wedge q) \Leftrightarrow p$ $p \wedge (p \vee q) \Leftrightarrow p$	Leyes de *absorción*

Ahora vamos a demostrar todas estas propiedades. Al hacerlo nos daremos cuenta de que simplemente podríamos construir las tablas de verdad y comparar los resultados de los valores de verdad correspondientes en cada caso, como lo hicimos en los ejemplos 2.8 y 2.9. Sin embargo, antes de comenzar a escribir, revisemos de nuevo esta lista de 19 leyes, las cuales, excepto por la ley de la doble negación, se agrupan naturalmente por pares. Esta idea del apareamiento nos ayudará después de analizar el siguiente concepto.

Definición 2.3 Sea s una proposición. Si s no contiene conectivas lógicas distintas de $\wedge$ y $\vee$, entonces el *dual* de s, que se denota como s^d, es la proposición que se obtiene de s al reemplazar cada ocurrencia de $\wedge$ y $\vee$ con $\vee$ e $\wedge$, respectivamente, y cada ocurrencia de T_0 y F_0 con F_0 y T_0, respectivamente.

Si p es una proposición primitiva, entonces p^d es igual a p; es decir, el dual de una proposición primitiva es simplemente la misma proposición primitiva. Y $(\neg p)^d$ es igual a $\neg p$. Las proposiciones $p \vee \neg p$ y $p \wedge \neg p$ son duales una de otra cuando p es primitiva; por lo tanto, también lo son las proposiciones $p \vee T_0$ y $p \wedge F_0$.

Dadas las proposiciones primitivas p, q, r y la proposición compuesta

$$s: \quad (p \wedge \neg q) \vee (r \wedge T_0),$$

vemos que el dual de s es

$$s^d: \quad (p \vee \neg q) \wedge (r \vee F_0).$$

(Observe que $\neg q$ no cambia al pasar de s a s^d.)

Ahora estableceremos y utilizaremos un teorema sin demostrarlo. Sin embargo, en el capítulo 15 justificaremos el resultado que aparece aquí.

TEOREMA 2.1 (*El principio de dualidad*) Sean s y t proposiciones como las descritas en la definición 2.3. Si $s \Leftrightarrow t$, entonces $s^d \Leftrightarrow t^d$.

Como resultado, las propiedades 2 a 10 de nuestra lista pueden ser establecidas mediante la demostración de una de las propiedades de cada par y recurriendo luego a este principio.

También vemos que es posible obtener muchas otras equivalencias lógicas. Por ejemplo, si q, r, s son proposiciones primitivas, los resultados de las columnas 5 y 7 de la tabla 2.11 nos muestran que

$$(r \wedge s) \rightarrow q \Leftrightarrow \neg(r \wedge s) \vee q$$

o que $[(r \wedge s) \rightarrow q] \leftrightarrow [\neg(r \wedge s) \vee q]$ es una tautología. Sin embargo, en vez de construir cada vez más tablas de verdad (y, por desgracia, cada vez más grandes) sería buena idea

Tabla 2.11

q	r	s	$r \wedge s$	$(r \wedge s) \rightarrow q$	$\neg(r \wedge s)$	$\neg(r \wedge s) \vee q$
0	0	0	0	1	1	1
0	0	1	0	1	1	1
0	1	0	0	1	1	1
0	1	1	1	0	0	0
1	0	0	0	1	1	1
1	0	1	0	1	1	1
1	1	0	0	1	1	1
1	1	1	1	1	0	1

recordar el ejemplo 2.7, en el cual se establece que para q, p proposiciones primitivas, la proposición compuesta

$$(p \rightarrow q) \leftrightarrow (\neg p \vee q)$$

es una tautología. Si *reemplazamos* cada ocurrencia de esta proposición primitiva p por la proposición compuesta $r \wedge s$, entonces obtendríamos la tautología anterior

$$[(r \wedge s) \rightarrow q] \leftrightarrow [\neg(r \wedge s) \vee q].$$

Lo que ha ocurrido aquí muestra la primera de las siguientes *reglas de sustitución*:

1) Suponga que la proposición compuesta P es una tautología. Si p es una proposición primitiva que aparece en P y reemplazamos *cada* ocurrencia de p por la *misma* proposición q, entonces la proposición compuesta resultante P_1 también es una tautología.
2) Sea P una proposición compuesta donde p es una proposición arbitraria que aparece en P, y sea q una proposición tal que $q \Leftrightarrow p$. Supongamos que en P reemplazamos una o más ocurrencias de p por q. Entonces este reemplazo produce la proposición compuesta P_1. En ese caso, $P_1 \Leftrightarrow P$.

Estas reglas se ilustran en los siguientes dos ejemplos.

emplo 2.10

a) De la primera de las leyes de De Morgan, sabemos que para cualesquiera proposiciones primitivas p, q, la proposición compuesta

$$P: \quad \neg(p \vee q) \leftrightarrow (\neg p \wedge \neg q)$$

es una tautología. Cuando reemplazamos cada ocurrencia de p por $r \wedge s$, se sigue, a partir de la primera regla de sustitución, que

$$P_1: \quad \neg[(r \wedge s) \vee q] \leftrightarrow [\neg(r \wedge s) \wedge \neg q]$$

también es una tautología. Si extendemos un poco más este resultado, podemos reemplazar esta ocurrencia de q por $t \rightarrow u$. La misma regla de sustitución produce ahora la tautología

$$P_2: \quad \neg[(r \wedge s) \vee (t \rightarrow u)] \leftrightarrow [\neg(r \wedge s) \wedge \neg(t \rightarrow u)],$$

y, por lo tanto, por las observaciones que aparecen un poco después del ejemplo 2.9, la equivalencia lógica

$$\neg[(r \wedge s) \vee (t \rightarrow u)] \Leftrightarrow [\neg(r \wedge s) \wedge \neg(t \rightarrow u)].$$

b) la segunda ley de dominación indica que, para cualquier proposición primitiva p, la proposición compuesta

$$P: \quad (p \wedge F_0) \leftrightarrow F_0$$

es una tautología. Si reemplazamos p por la proposición $[(q \vee r) \rightarrow s]$, entonces la misma primera regla de sustitución produce la nueva tautología

$$P_1: \quad ([(q \vee r) \rightarrow s] \wedge F_0) \leftrightarrow F_0,$$

y por lo tanto la equivalencia lógica

$$[(q \vee r) \rightarrow s] \wedge F_0 \Leftrightarrow F_0.$$

c) Para las proposiciones primitivas p, q, vimos en la última columna de la tabla 2.12 que la proposición compuesta $[p \wedge (p \rightarrow q)] \rightarrow q$ es una tautología. En consecuencia, si r, s, t, u son cualesquiera proposiciones arbitrarias, entonces, por la primera regla de sustitución obtenemos la nueva tautología

$$[(r \rightarrow s) \wedge [(r \rightarrow s) \rightarrow (\neg t \vee u)]] \rightarrow (\neg t \vee u)$$

cuando reemplazamos cada aparición de p por $r \rightarrow s$ y cada aparición de q por $\neg t \vee u$.

Tabla 2.12

p	q	$p \rightarrow q$	$p \wedge (p \rightarrow q)$	$[p \wedge (p \rightarrow q)] \rightarrow q$
0	0	1	0	1
0	1	1	0	1
1	0	0	0	1
1	1	1	1	1

Ejemplo 2.11

a) Como aplicación de la segunda regla de sustitución, sea P la proposición compuesta $(p \rightarrow q) \rightarrow r$. Como $(p \rightarrow q) \Leftrightarrow \neg p \vee q$ (como se muestra en el ejemplo 2.7 y en la tabla 2.6), si P_1 denota la proposición compuesta $(\neg p \vee q) \rightarrow r$, entonces $P_1 \Leftrightarrow P$. (También tenemos que $[(p \rightarrow q) \rightarrow r] \leftrightarrow [(\neg p \vee q) \rightarrow r]$ es una tautología.)

b) Ahora sea P la proposición compuesta (en realidad, es una tautología) $p \rightarrow (p \vee q)$. Como $\neg\neg p \Leftrightarrow p$, la proposición compuesta P_1: $p \rightarrow (\neg\neg p \vee q)$ se obtiene de P al reemplazar *únicamente la segunda aparición* (pero *no* la primera) de p por $\neg\neg p$. La segunda regla de sustitución todavía implica que $P_1 \Leftrightarrow P$. [Observe que P_2: $\neg\neg p \rightarrow$

$(\neg\neg p \vee q)$, obtenida al reemplazar *ambas* apariciones de p por $\neg\neg p$, también es lógicamente equivalente a P.]

Nuestro siguiente ejemplo demuestra cómo podemos utilizar la idea de la equivalencia lógica junto con las leyes de la lógica y las reglas de sustitución.

Ejemplo 2.12

Niegue y simplifique la proposición compuesta $(p \vee q) \rightarrow r$.

Hemos organizado nuestra explicación de la manera siguiente:

1) $(p \vee q) \rightarrow r \Leftrightarrow \neg(p \vee q) \vee r$ [por la primera regla de sustitución, ya que $(s \rightarrow t) \leftrightarrow (\neg s \vee t)$ es una tautología para las proposiciones primitivas s, t].
2) Al negar las proposiciones del paso 1, tenemos $\neg[(p \vee q) \rightarrow r] \Leftrightarrow \neg[\neg(p \vee q) \vee r]$.
3) A partir de la primera ley de De Morgan y la primera regla de sustitución, $\neg[\neg(p \vee q) \vee r] \Leftrightarrow \neg\neg(p \vee q) \wedge \neg r$.
4) La ley de la doble negación y la segunda regla de sustitución nos producen $\neg\neg(p \vee q) \wedge \neg r \Leftrightarrow (p \vee q) \wedge \neg r$.

De los pasos 1 a 4 obtenemos $\neg[(p \vee q) \rightarrow r] \Leftrightarrow (p \vee q) \vee \neg r$

Cuando quisimos escribir la negación de una implicación, como en el ejemplo 2.12, vimos que el concepto de equivalencia lógica tuvo un papel central, junto con las leyes de la lógica y las reglas de sustitución. Esta idea es tan importante que merece revisarse.

Ejemplo 2.13

Sean p, q las proposiciones primitivas

p: Juan va al lago George.
q: María paga las compras de Juan.

y consideremos la implicación

$p \rightarrow q$: Si Juan va al lago George, entonces María pagará las compras de Juan.

Aquí queremos escribir la negación de $p \rightarrow q$ de una forma distinta a $\neg(p \rightarrow q)$. Queremos evitar escribir la negación como "no es cierto que si Juan va al lago George, entonces María pagará las compras de Juan".

Para hacer esto, consideramos lo siguiente. Como $p \rightarrow q \Leftrightarrow \neg p \vee q$, se sigue que $\neg(p \rightarrow q) \Leftrightarrow \neg(\neg p \vee q)$. Entonces, por la ley de De Morgan, tenemos que $\neg(\neg p \vee q) \Leftrightarrow \neg\neg p \wedge \neg q$ y, a partir de la ley de la doble negación y la segunda regla de sustitución, se sigue que $\neg\neg p \wedge \neg q \Leftrightarrow p \wedge \neg q$. En consecuencia,

$$\neg(p \rightarrow q) \Leftrightarrow \neg(\neg p \vee q) \Leftrightarrow p \wedge \neg q,$$

y podemos escribir la negación de $p \rightarrow q$ en este caso como

$\neg(p \rightarrow q)$: Juan va al lago George, pero María no paga las compras de Juan.

(Nota: La negación de una proposición si-entonces *no* comienza con la palabra *si*, porque *no* es otra *implicación*.)

Ejemplo 2.14 En la definición 2.3, el dual s^d de una proposición s sólo se definió para proposiciones con negación y las conectivas básicas $\vee$ e $\wedge$. ¿Cómo se determina el dual de una proposición como s: $p \to q$, donde p, q son primitivas?

Como $(p \to q) \Leftrightarrow \neg p \vee q$, s^d es lógicamente equivalente a la proposición $(\neg p \vee q)^d$, que es igual a $\neg p \wedge q$.

La implicación $p \to q$ y ciertas proposiciones relacionadas con ella se analizan en el siguiente ejemplo.

Ejemplo 2.15 La tabla 2.13 da los valores de verdad para las proposiciones $p \to q$, $\neg q \to \neg p$, $q \to p$ y $\neg p \to \neg q$. La tercera y cuarta columnas de la tabla revelan que

$$(p \to q) \Leftrightarrow (\neg q \to \neg p).$$

Tabla 2.13

p	q	$p \to q$	$\neg q \to \neg p$	$q \to p$	$\neg p \to \neg q$
0	0	1	1	1	1
0	1	1	1	0	0
1	0	0	0	1	1
1	1	1	1	1	1

La proposición $\neg q \to \neg p$ se conoce como la *contrapositiva* de la implicación $p \to q$. Las columnas 5 y 6 de la tabla muestran que

$$(q \to p) \Leftrightarrow (\neg p \to \neg q).$$

la proposición $q \to p$ se denomina la *recíproca* de $p \to q$; $\neg p \to \neg q$ se conoce como la *inversa* de $p \to q$. A partir de la tabla 2.13 también podemos ver que

$$(p \to q) \not\Leftrightarrow (q \to p) \qquad \text{y} \qquad (\neg p \to \neg q) \not\Leftrightarrow (\neg q \to \neg p).$$

En consecuencia, debemos conservar en orden la implicación y su recíproca. El hecho de que cierta implicación $p \to q$ sea verdadera (en particular, como en la fila 2 de la tabla) *no* exige que la recíproca $q \to p$ también sea verdadera. Sin embargo, sí necesita la verdad de la contrapositiva $\neg q \to \neg p$.

Consideremos el caso específico donde p, q representan las proposiciones

p: Hoy es el día de acción de gracias.

q: Mañana es viernes.

Entonces obtenemos

- (La implicación: $p \to q$). Si hoy es el día de acción de gracias, entonces mañana es viernes. (VERDADERA)

- (La contrapositiva: $\neg q \to \neg p$). Si mañana no es viernes, entonces hoy no es el día de acción de gracias. (También es VERDADERA)
- (La recíproca: $q \to p$). Si mañana es viernes, entonces hoy es el día de acción de gracias.
- (La inversa: $\neg p \to \neg q$). Si hoy no es el día de acción de gracias, entonces mañana no es viernes.

Hay que tener cuidado con la recíproca y la inversa. Consideremos cualquier jueves del mes de mayo. En cada uno de estos días, la proposición p es falsa pero la proposición q es verdadera y cada una de las proposiciones $q \to p$ y $\neg p \to \neg q$ es falsa. Ahora consideremos cualquier jueves. Para cada uno de estos días, ambas proposiciones p, q son falsas, pero las proposiciones $q \to p$ y $\neg p \to \neg q$ son verdaderas.

El siguiente ejemplo muestra que las proposiciones lógicamente equivalentes pueden conducir a situaciones diferentes en una aplicación a las ciencias de la computación.

Ejemplo 2.16 La tabla 2.14 revela que las proposiciones compuestas $(p \wedge q) \to r$ y $p \to (q \to r)$ son lógicamente equivalentes.

Tabla 2.14

p	q	r	$p \wedge q$	$(p \wedge q) \to r$	$q \to r$	$p \to (q \to r)$
0	0	0	0	1	1	1
0	0	1	0	1	1	1
0	1	0	0	1	0	1
0	1	1	0	1	1	1
1	0	0	0	1	1	1
1	0	1	0	1	1	1
1	1	0	1	0	0	0
1	1	1	1	1	1	1

En los segmentos de programa en Pascal que se muestran en la figura 2.1, x, y, z e i son variables enteras. La parte (a) de la figura utiliza una estructura de decisión *comparable a* una proposición de la forma $(p \wedge q) \to r$. En este caso, al igual que en la parte (b), tenemos que p: $x > 0$, q: $y > 0$, que se convierten en proposiciones cuando las variables x, y toman los valores $4 - i$ (para x) y $4 + 3 * i$ (para y). ¡Tenga cuidado! la letra r denota el enunciado *Writeln*, un "enunciado ejecutable" que *no* es realmente un enunciado en el sentido usual de una frase declarativa, que puede ser calificada como verdadera o falsa.

En el segmento que aparece en la parte (a), el número total de comparaciones, $(x > 0)$ y $(y > 0)$, que se realizan durante la ejecución del programa, es 10 (para $x > 0$) + 10 (para $y > 0$) = 20. El segmento que aparece en la parte (b), por otro lado, utiliza una forma de enunciado *comparable a* las implicaciones anidadas $p \to (q \to r)$. En este caso, la comparación $(y > 0)$ no se ejecuta a menos que se ejecute la comparación $(x > 0)$ y sea verdadera. En consecuencia, el número total de comparaciones es ahora de 10 (para $x > 0$) + 3 (para $y > 0$, cuando i toma los valores 1, 2, 3) = 13. Por lo tanto, en términos del número total de comparaciones hechas en cada uno de estos dos casos, el segmento de programa que aparece en la parte (b) es más eficiente que el segmento de programa que aparece en la parte (a).

```
z := 4;
For i := 1 to 10 do
  Begin
    x := z - i;
    y := z + 3 * i;
    If ((x > 0) and (y > 0)) then
       Writeln ('El valor de la suma x + y es ', x + y)
  End;

(a)
```

```
z := 4;
For i := 1 to 10 do
  Begin
    x := z - i;
    y := z + 3 * i;
    If x > 0 then
      If y > 0 then
        Writeln ('El valor de la suma x + y es ', x + y)
  End;

(b)
```

Figura 2.1

Veremos ahora algunos ejemplos de simplificación de proposiciones compuestas, así como una aplicación relacionada con esto para simplificar redes de conmutación. En este caso, para simplificar la exposición, enumeraremos las principales leyes de la lógica que se hayan utilizado, pero no mencionaremos la aplicación de nuestras dos reglas de sustitución.

Ejemplo 2.17 Para las proposiciones primitivas p, q, ¿existe una forma más sencilla de expresar la proposición compuesta $(p \lor q) \land \neg(\neg p \land q)$?; es decir, ¿podemos encontrar una proposición más sencilla que sea lógicamente equivalente a la dada?
Aquí vemos que

	Razones
$(p \lor q) \land \neg(\neg p \land q)$	
$\Leftrightarrow (p \lor q) \land (\neg\neg p \lor \neg q)$	Ley de De Morgan
$\Leftrightarrow (p \lor q) \land (p \lor \neg q)$	Ley de la doble negación
$\Leftrightarrow p \lor (q \land \neg q)$	Ley distributiva de $\lor$ sobre $\land$
$\Leftrightarrow p \lor F_0$	Ley de la inversa
$\Leftrightarrow p$	Ley del neutro

En consecuencia, tenemos que

$$(p \lor q) \land \neg(\neg p \land q) \Leftrightarrow p,$$

de modo que podemos expresar la proposición compuesta dada mediante la proposición lógicamente equivalente, más sencilla, p.

Ejemplo 2.18 Consideremos la proposición compuesta

$$\neg[\neg[(p \vee q) \wedge r] \vee \neg q],$$

donde p, q, r son proposiciones primitivas. Esta proposición contiene cuatro apariciones de proposiciones primitivas, tres símbolos de negación y tres conectivas.

De las leyes de la lógica se sigue que

	Razones
$\neg[\neg[(p \vee q) \wedge r] \vee \neg q]$	
$\Leftrightarrow \neg\neg[(p \vee q) \wedge r] \wedge \neg\neg q$	Ley de De Morgan
$\Leftrightarrow [(p \vee q) \wedge r] \wedge q$	Ley de la doble negación
$\Leftrightarrow (p \vee q) \wedge (r \wedge q)$	Ley asociativa de $\wedge$
$\Leftrightarrow (p \vee q) \wedge (q \wedge r)$	Ley conmutativa de $\wedge$
$\Leftrightarrow [(p \vee q) \wedge q] \wedge r$	Ley asociativa de $\wedge$
$\Leftrightarrow q \wedge r$	Leyes de absorción (al igual que las leyes conmutativas de $\wedge$ y $\vee$)

En consecuencia, la proposición original

$$\neg[\neg[(p \vee q) \wedge r] \vee \neg q]$$

es lógicamente equivalente a la proposición mucho más sencilla

$$q \wedge r,$$

donde sólo tenemos dos proposiciones primitivas, ningún símbolo de negación y sólo una conectiva.

Observe además que, a partir del ejemplo 2.7, tenemos

$$\neg[[(p \vee q) \wedge r] \rightarrow \neg q] \Leftrightarrow \neg[\neg[(p \vee q) \wedge r] \vee \neg q],$$

de modo que

$$\neg[[(p \vee q) \wedge r] \rightarrow \neg q] \Leftrightarrow q \wedge r.$$

Cerramos esta sección con una aplicación de la forma en que las ideas de los ejemplos 2.17 a 2.18 pueden utilizarse para simplificar las redes de conmutación.

Ejemplo 2.19 Una red de conmutación está formada por cables e interruptores que conectan dos terminales T_1 y T_2. En dicha red, cualquiera de los interruptores puede estar abierto (0), de modo que no pase corriente por él, o cerrado (1), de modo que la corriente pueda pasar por él.

En la figura 2.2 tenemos, en la parte (a), una red con un interruptor. Cada una de las partes (b) y (c) contiene dos interruptores independientes entre sí.

Para la red de la parte (b), la corriente fluye de T_1 a T_2 si cualquiera de los interruptores p, q está cerrado. Llamamos a esto una red *en paralelo* y la representamos como $p \vee q$. La

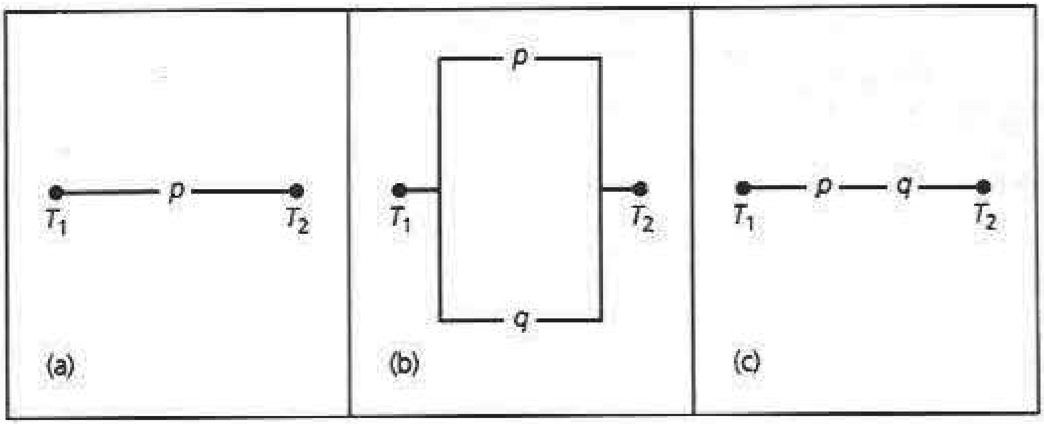

Figura 2.2

red de la parte (c) necesita que cada uno de los interruptores p, q estén cerrados para que la corriente fluya de T_1 a T_2. En este caso, los interruptores están *en serie* y esta red se representa como $p \wedge q$.

Los interruptores de la red no tienen que ser independientes entre sí. Consideremos la red de la figura 2.3(a). En este caso, los interruptores t y $\neg t$ no son independientes. Hemos acoplado los dos interruptores de modo que t esté abierto (cerrado) si y sólo si $\neg t$ está cerrado (abierto) en forma simultánea. Lo mismo ocurre con los interruptores que están en q, $\neg q$. (Tampoco, por ejemplo, los tres interruptores p no son independientes.)

Esta red se representa mediante la proposición correspondiente $(p \vee q \vee r) \wedge (p \vee t \vee \neg q) \wedge (p \vee \neg t \vee r)$. Por medio de las leyes de la lógica simplificaremos esta proposición, que representa la red, de la manera siguiente:

$(p\vee q\vee r)\wedge(p\vee t\vee\neg q)\wedge(p\vee\neg t\vee r)$	**Razones**
$\Leftrightarrow p\vee[(q\vee r)\wedge(t\vee\neg q)\wedge(\neg t\vee r)]$	Ley distributiva de $\vee$ sobre $\wedge$
$\Leftrightarrow p\vee[(q\vee r)\wedge(\neg t\vee r)\wedge(t\vee\neg q)]$	Ley conmutativa de $\wedge$
$\Leftrightarrow p\vee[((q\wedge\neg t)\vee r)\wedge(t\vee\neg q)]$	Ley distributiva de $\vee$ sobre $\wedge$
$\Leftrightarrow p\vee[((q\wedge\neg t)\vee r)\wedge(\neg\neg t\vee\neg q)]$	Ley de la doble negación
$\Leftrightarrow p\vee[((q\wedge\neg t)\vee r)\wedge\neg(\neg t\wedge q)]$	Ley de De Morgan
$\Leftrightarrow p\vee[\neg(\neg t\wedge q)\wedge((\neg t\wedge q)\vee r)]$	Ley conmutativa de $\wedge$ (dos veces)
$\Leftrightarrow p\vee[(\neg(\neg t\wedge q)\wedge(\neg t\wedge q))\vee(\neg(\neg t\wedge q)\wedge r)]$	Ley distributiva de $\wedge$ sobre $\vee$
$\Leftrightarrow p\vee[F_0\vee(\neg(\neg t\wedge q)\wedge r)]$	$\neg s \wedge s \Leftrightarrow F_0$, para cualquier proposición s
$\Leftrightarrow p\vee[(\neg(\neg t\wedge q))\wedge r]$	F_0 es el neutro para $\vee$
$\Leftrightarrow p\vee[r\wedge\neg(\neg t\wedge q)]$	Ley conmutativa de $\wedge$
$\Leftrightarrow p\vee[r\wedge(t\vee\neg q)]$	Ley de De Morgan y Ley de la doble negación

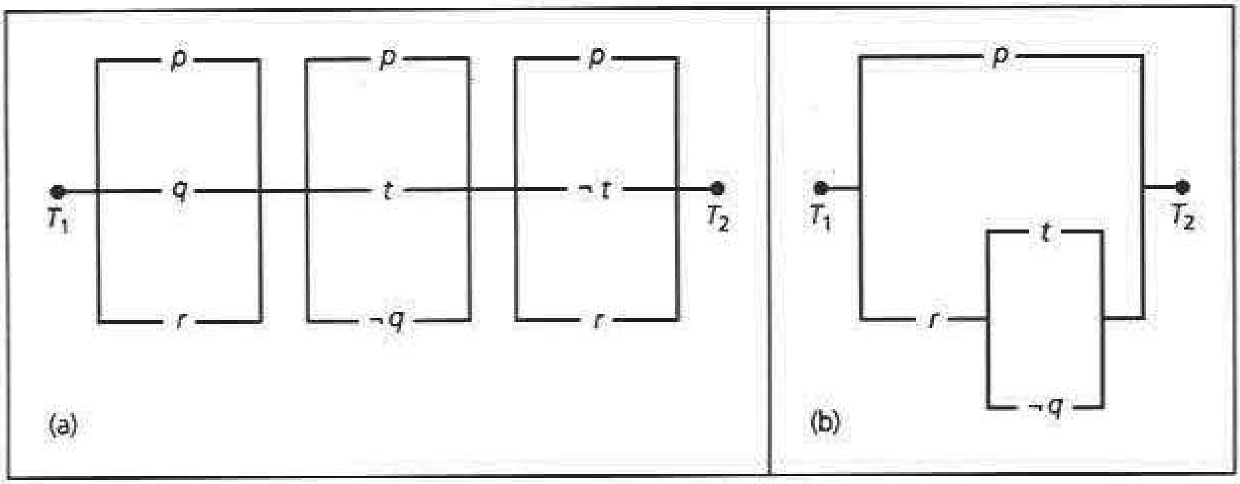

Figura 2.3

Por lo tanto, $(p \vee q \vee r) \wedge (p \vee t \vee \neg q) \wedge (p \vee \neg t \vee r) \Leftrightarrow p \vee [r \wedge (t \vee \neg q)]$, y la red que se muestra en la figura 2.3 (b) es equivalente a la red original, en el sentido de que la corriente fluye de T_1 a T_2 en la red (a) exactamente cuando hace lo mismo en la red (b). Pero en (b), la red sólo tiene cuatro interruptores, cinco menos que en la red (a).

CICIOS 2.2

1. Sean p, q, r proposiciones primitivas.
   a) Use las tablas de verdad para verificar las siguientes equivalencias lógicas.
      i) $p \to (q \wedge r) \Leftrightarrow (p \to q) \wedge (p \to r)$
      ii) $[(p \vee q) \to r] \Leftrightarrow [(p \to r) \wedge (q \to r)]$
      iii) $[p \to (q \vee r)] \Leftrightarrow [\neg r \to (p \to q)]$
   b) Use las reglas de sustitución para ver que $[p \to (q \vee r)] \Leftrightarrow [(p \wedge \neg q) \to r]$.
2. Verifique la primera ley de absorción mediante una tabla de verdad.
3. Use las reglas de sustitución para verificar que cada una de las siguientes proposiciones es una tautología. (En este caso p, q y r son proposiciones primitivas.)
   a) $[p \vee (q \wedge r)] \vee \neg [p \vee (q \wedge r)]$
   b) $[(p \vee q) \to r] \leftrightarrow [\neg r \to \neg (p \vee q)]$
   c) $[[(p \vee q) \to r] \vee (s \wedge t)] \leftrightarrow [[[(p \vee q) \to r] \vee s] \wedge [[(p \vee q) \to r] \vee t]]$
4. Para las proposiciones primitivas p, q, r y s, simplifique la proposición compuesta

$$[[[(p \wedge q) \wedge r] \vee [(p \wedge r) \wedge \neg r]] \vee \neg q] \to s.$$

5. Refute y exprese cada una de las siguientes proposiciones en español.
   a) Karina tendrá una buena educación si pone sus estudios antes que su interés en ser estrella de cine.
   b) Norma está haciendo su tarea de matemáticas y Claudia está practicando sus lecciones de piano.
   c) Si Lorenzo se va de vacaciones, entonces él se divertirá si no le preocupa viajar en avión.
   d) Si Homero aprueba su curso de Pascal y termina su proyecto de estructura de datos, se graduará al final del semestre.

6. Refute lo siguiente y simplifique la proposición resultante.

a) $p \wedge (q \vee r) \wedge (\neg p \vee \neg q \vee r)$
b) $(p \wedge q) \rightarrow r$
c) $p \rightarrow (\neg q \wedge r)$
d) $p \vee q \vee (\neg p \wedge \neg q \wedge r)$

7. a) Si p, q son proposiciones primitivas, demuestre que $(\neg p \vee q) \wedge (p \wedge (p \wedge q)) \Leftrightarrow (p \wedge q)$.
b) Escriba el dual de la equivalencia lógica de la parte (a).

8. Escriba el dual de (a) $q \rightarrow p$, (b) $p \rightarrow (q \wedge r)$, (c) $p \leftrightarrow q$ y (d) $p \veebar q$, donde p, q y r son proposiciones primitivas.

9. Escriba la recíproca, la inversa y la contrapositiva de cada una de las siguientes implicaciones. Para cada implicación, determine su valor de verdad, así como el valor de verdad de la recíproca, la inversa y la contrapositiva correspondientes.
a) Si hoy es el día del trabajo, entonces mañana es martes.
b) Si $-1 < 3$ y $3 + 7 = 10$, entonces $\left(\frac{3\pi}{2}\right) = -1$.
c) Si Paco vive en Nueva Inglaterra, entonces Paco vive en Vermont.

10. Determine si lo siguiente es verdadero o falso. Aquí, p, q y r son proposiciones arbitrarias.
a) Una forma equivalente para expresar la recíproca de "p es suficiente para q" es "p es necesaria para q".
b) Una forma equivalente para expresar la inversa de "p es necesaria para q" es "$\neg q$ es suficiente para $\neg p$".
c) Una forma equivalente para expresar la contrapositiva de "p es necesaria para q" es "$\neg q$ es necesaria para $\neg p$".
d) Una forma equivalente para expresar la recíproca de $p \rightarrow (q \rightarrow r)$ es $(\neg q \vee r) \rightarrow p$.

11. Sean p, q y r proposiciones primitivas. Encuentre una forma de la contrapositiva de $p \rightarrow (q \rightarrow r)$ con (a) sólo una aparición de la conectiva $\rightarrow$; (b) sin que aparezca la conectiva $\rightarrow$.

12. Escriba la recíproca, la inversa, la contrapositiva y la negación de la siguiente proposición: "Si Sandra termina su trabajo, entonces irá al juego de baloncesto, a menos que nieve".

13. Considere los dos segmentos de programa en Pascal de la figura 2.1 (ejemplo 2.16). Determine el número total de comparaciones ejecutadas en cada segmento si, en vez de asignarle el valor 4, z toma el valor (a) 2; (b) 6; (c) 9; (d) 10; (e) 15; (f) n, un entero mayor que 10.

14. Muestre que para p, q proposiciones primitivas,

$$p \veebar q \Leftrightarrow [(p \wedge \neg q) \vee (\neg p \wedge q)] \Leftrightarrow \neg(p \leftrightarrow q).$$

15. Verifique que $[(p \leftrightarrow q) \wedge (q \leftrightarrow r) \wedge (r \leftrightarrow p) \Leftrightarrow (p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow r) \wedge (r \rightarrow p)]$, para las proposiciones primitivas p, q y r.

16. Para las proposiciones primitivas p, q,
a) verifique que $p \rightarrow [q \rightarrow (p \wedge q)]$ es una tautología.
b) verifique que $(p \vee q) \rightarrow [q \rightarrow q]$ es una tautología, usando el resultado de la parte (a), las reglas de sustitución y las leyes de la lógica.
c) ¿es $(p \vee q) \rightarrow [q \rightarrow (p \wedge q)]$ una tautología?

17. Defina la conectiva "Nand" o "no. . . y . . ." como $(p \uparrow q) \Leftrightarrow \neg(p \wedge q)$, para las proposiciones p, q. Represente lo siguiente utilizando solamente esta conectiva.

a) $\neg p$
b) $p \vee q$
c) $p \wedge q$
d) $p \rightarrow q$
e) $p \leftrightarrow q$

18. La conectiva "Nor" o "No. . . o . . ." se define para las proposiciones p, q como $(p \downarrow q) \Leftrightarrow \neg(p \vee q)$. Represente las proposiciones de las partes (a) a (e) del ejercicio 17, utilizando solamente esta conectiva.

19. Para las proposiciones p, q, demuestre que

a) $\neg(p \downarrow q) \Leftrightarrow (\neg p \uparrow \neg q)$ **b)** $\neg(p \uparrow q) \Leftrightarrow (\neg p \downarrow \neg q)$

20. Dé las razones para cada paso de las siguientes simplificaciones de proposiciones compuestas.

a) $[(p \vee q) \wedge (p \vee \neg q)] \vee q$ **Razones**
$\Leftrightarrow [p \vee (q \wedge \neg q)] \vee q$
$\Leftrightarrow (p \vee F_0) \vee q$
$\Leftrightarrow p \vee q$

b) $\neg(p \vee q) \vee [(\neg p \wedge q) \vee \neg q]$ **Razones**
$\Leftrightarrow \neg(p \vee q) \vee [\neg q \vee (\neg p \wedge q)]$
$\Leftrightarrow \neg(p \vee q) \vee [(\neg q \vee \neg p) \wedge (\neg q \vee q)]$
$\Leftrightarrow \neg(p \vee q) \vee [(\neg q \vee \neg p) \wedge T_0]$
$\Leftrightarrow \neg(p \vee q) \vee (\neg q \vee \neg p)$
$\Leftrightarrow \neg(p \vee q) \vee \neg(q \wedge p)$
$\Leftrightarrow \neg[(p \vee q) \wedge (q \wedge p)]$
$\Leftrightarrow \neg[(q \wedge p) \wedge (p \vee q)]$
$\Leftrightarrow \neg[q \wedge [p \wedge (p \vee q)]]$
$\Leftrightarrow \neg(q \wedge p)$

c) $(p \rightarrow q) \wedge [\neg q \wedge (r \vee \neg q)]$ **Razones**
$\Leftrightarrow (p \rightarrow q) \wedge \neg q$
$\Leftrightarrow (\neg p \vee q) \wedge \neg q$
$\Leftrightarrow \neg q \wedge (\neg p \vee q)$
$\Leftrightarrow (\neg q \wedge \neg p) \vee (\neg q \wedge q)$
$\Leftrightarrow (\neg q \wedge \neg p) \vee F_0$
$\Leftrightarrow \neg q \wedge \neg p$
$\Leftrightarrow \neg(q \vee p)$

21. Como en el ejercicio 20, escriba los pasos y las razones para establecer las siguientes equivalencias lógicas.

a) $p \vee [p \wedge (p \vee q)] \Leftrightarrow p$
b) $p \vee q \vee (\neg p \wedge \neg q \wedge r) \Leftrightarrow p \vee q \vee r$
c) $[(\neg p \vee \neg q) \rightarrow (p \wedge q \wedge r)] \Leftrightarrow p \wedge q$
d) $p \wedge [(\neg q \rightarrow (r \wedge r)) \vee \neg[q \vee ((r \wedge s) \vee (r \wedge \neg s))]] \Leftrightarrow p$

22. Simplifique cada una de las redes que aparecen en la figura 2.4.

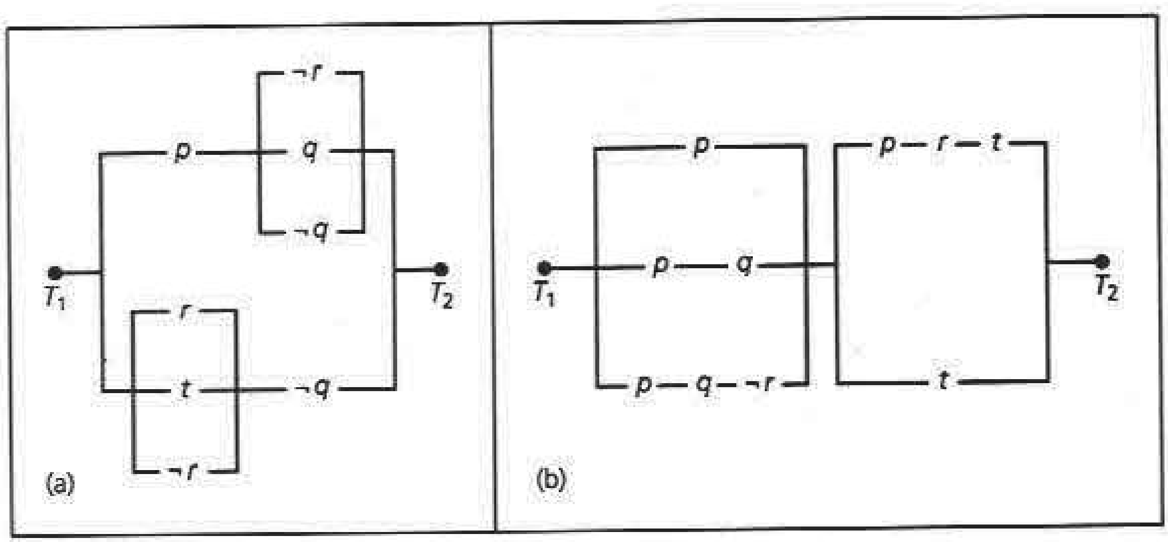

Figura 2.4

2.3 Implicación lógica: Reglas de inferencia

Al final de la sección 2.1, mencionamos el concepto de argumento válido. Ahora comenzaremos un estudio formal de lo que para nosotros significa un argumento y de cuándo tal argumento es válido. Esto, a su vez, nos ayudará cuando analicemos la demostración de teoremas en el resto del texto.

Comenzaremos primero por considerar la forma general de un argumento que queramos demostrar que es válido. Consideremos entonces la implicación

$$(p_1 \wedge p_2 \wedge p_3 \wedge \cdots \wedge p_n) \to q.$$

Aquí, n es un entero positivo, las proposiciones $p_1, p_2, p_3, \ldots, p_n$ se denominan *premisas* del argumento y la proposición q es la *conclusión* del argumento.

El argumento anterior es *válido* si cada vez que las premisas $p_1, p_2, p_3, \ldots, p_n$ sean verdaderas, entonces la conclusión q también lo es. [Observe que si alguna de las premisas $p_1, p_2, p_3, \ldots, p_n$ es falsa, entonces la hipótesis $p_1 \wedge p_2 \wedge p_3 \wedge \cdots \wedge p_n$ es falsa y la implicación $(p_1 \wedge p_2 \wedge p_3 \wedge \cdots \wedge p_n) \to q$ automáticamente es verdadera, sin importar el valor de verdad de q.] En consecuencia, una vía para establecer la validez de un argumento dado es demostrar que la proposición $(p_1 \wedge p_2 \wedge p_3 \wedge \cdots \wedge p_n) \to q$ es una tautología.

Los siguientes ejemplos ilustran este particular método para establecer la validez de un argumento.

Ejemplo 2.20

Sean p, q, r las proposiciones primitivas dadas como:

p: Rogelio estudia.
q: Rogelio juega tenis.
r: Rogelio aprueba matemáticas discretas.

Ahora bien, sean p_1, p_2, p_3 las premisas

p_1: Si Rogelio estudia, entonces aprobará matemáticas discretas.
p_2: Si Rogelio no juega tenis, entonces estudiará.
p_3: Rogelio reprobó matemáticas discretas.

Queremos determinar si el argumento

$$(p_1 \wedge p_2 \wedge p_3) \to q$$

es válido. Para para lograrlo, escribimos p_1, p_2, p_3 como

$$p_1:\ p \to r \qquad p_2:\ \neg q \to p \qquad p_3:\ \neg r$$

y examinamos la tabla de verdad de la implicación

$$[(p \to r) \wedge (\neg q \to p) \wedge \neg r] \to q$$

que aparece en la tabla 2.15. Como la columna final de la tabla 2.15 contiene únicamente unos, la implicación es una tautología. Por lo tanto, podemos decir que $(p_1 \wedge p_2 \wedge p_3) \to q$ es un argumento válido.

Tabla 2.15

			p_1	p_2	p_3	$(p_1 \wedge p_2 \wedge p_3) \to q$
p	q	r	$p \to r$	$\neg q \to p$	$\neg r$	$[(p \to r) \wedge (\neg q \to p) \wedge \neg r] \to q$
0	0	0	1	0	1	1
0	0	1	1	0	0	1
0	1	0	1	1	1	1
0	1	1	1	1	0	1
1	0	0	0	1	1	1
1	0	1	1	1	0	1
1	1	0	0	1	1	1
1	1	1	1	1	0	1

Ejemplo 2.21 Consideremos la tabla de verdad de la tabla 2.16. El resultado de la última columna de esta tabla muestra que para cualesquiera proposiciones primitivas p, r y s, la implicación

$$[p \wedge ((p \wedge r) \to s)] \to (r \to s)$$

es una tautología. En consecuencia, para las premisas

$$p_1\text{:}\quad p \qquad p_2\text{:}\quad (p \wedge r) \to s$$

y la conclusión q: $(r \to s)$, sabemos que $(p_1 \wedge p_2) \to q$ es un argumento válido; podemos decir que la verdad de la conclusión q se *deduce* o *infiere* de la verdad de las premisas p_1, p_2.

Tabla 2.16

p_1				p_2	q	$(p_1 \wedge p_2) \to q$
p	r	s	$p \wedge r$	$(p \wedge r) \to s$	$r \to s$	$[p \wedge ((p \wedge r) \to s)] \to (r \to s)$
0	0	0	0	1	1	1
0	0	1	0	1	1	1
0	1	0	0	1	0	1
0	1	1	0	1	1	1
1	0	0	0	1	1	1
1	0	1	0	1	1	1
1	1	0	1	0	0	1
1	1	1	1	1	1	1

La idea presentada en los dos ejemplos anteriores lleva a la siguiente definición.

Definición 2.4 Si p, q son proposiciones arbitrarias tal que $p \to q$ es una tautología, entonces decimos que *p implica lógicamente q* y escribimos $p \Rightarrow q$ para denotar esta situación.

Cuando p, q son proposiciones arbitrarias y $p \Rightarrow q$, la implicación $p \rightarrow q$ es una tautología y decimos que $p \rightarrow q$ es una *implicación lógica*. Observe que podemos evitar la idea de tautología diciendo que $p \Rightarrow q$ (es decir, que p implica lógicamente q) si q es verdadera cuando p es verdadera.

En el ejemplo 2.6 vimos que para las proposiciones primitivas p, q, la implicación $p \rightarrow (p \vee q)$ es una tautología. En este caso, podemos decir que p implica lógicamente $p \vee q$, y escribir $p \Rightarrow (p \vee q)$. Además, por la primera regla de sustitución, también tenemos que $p \Rightarrow (p \vee q)$ para proposiciones arbitrarias p, q (es decir, $p \rightarrow (p \vee q)$ es una tautología para cualquier par de proposiciones p, q, sin importar si son primitivas o no).

Sean p, q proposiciones arbitrarias.

1) Si $p \Leftrightarrow q$, entonces la proposición $p \leftrightarrow q$ es una tautología, por lo que las proposiciones p, q tienen los mismos valores de verdad (correspondientes). En estas condiciones, las proposiciones $p \rightarrow q$, $q \rightarrow p$ son tautologías y tenemos que $p \Rightarrow q$ y $q \Rightarrow p$.
2) A la inversa, supongamos que $p \Rightarrow q$ y $q \Rightarrow p$. La implicación lógica $p \rightarrow q$ indica que nunca tendremos una proposición p con el valor de verdad 1 y una proposición q con el valor de verdad 0. Pero ¿podremos tener q con el valor de verdad 1 y p con el valor de verdad 0? Si esto ocurre, no podremos tener la implicación lógica $q \rightarrow p$. Por lo tanto, cuando $p \Rightarrow q$ y $q \Rightarrow p$, las proposiciones p, q tienen los mismos valores de verdad (correspondientes) y $p \Leftrightarrow q$.

Finalmente, usamos la notación $p \not\Rightarrow q$ para indicar que $p \rightarrow q$ *no* es una tautología; así, la implicación dada ($p \rightarrow q$) *no* es una implicación lógica.

Ejemplo 2.22

A partir los resultados del ejemplo 2.8 (Tabla 2.9) y la primera regla de sustitución, sabemos que para cualesquiera proposiciones p, q,

$$\neg(p \wedge q) \Leftrightarrow \neg p \vee \neg q.$$

En consecuencia,

$$\neg(p \wedge q) \Rightarrow (\neg p \vee \neg q) \qquad \text{y} \qquad (\neg p \vee \neg q) \Rightarrow \neg(p \wedge q)$$

para cualesquiera proposiciones p, q. Alternativamente, como cada una de las implicaciones

$$\neg(p \wedge q) \rightarrow (\neg p \vee \neg q) \qquad \text{y} \qquad (\neg p \vee \neg q) \rightarrow \neg(p \wedge q)$$

es una tautología, podemos escribir también

$$[\neg(p \wedge q) \rightarrow (\neg p \vee \neg q)] \Leftrightarrow T_0 \qquad \text{y} \qquad [(\neg p \vee \neg q) \rightarrow \neg(p \wedge q)] \Leftrightarrow T_0.$$

Sigamos analizando las técnicas para establecer la validez de un argumento. Debemos observar con cuidado el tamaño de las tablas 2.15 y 2.16. Cada tabla tiene ocho filas. En la tabla 2.15 pudimos expresar las tres premisas p_1, p_2 y p_3, y la conclusión q, en términos de las tres proposiciones primitivas p, q y r. Algo similar ocurre con el argumento analizado en la tabla 2.16, donde teníamos sólo dos premisas. Pero si, por ejemplo, quisiéramos tratar de establecer que

$$[(p \rightarrow r) \wedge (r \rightarrow s) \wedge (t \vee \neg s) \wedge (\neg t \vee u) \wedge \neg u] \rightarrow \neg p$$

es una implicación lógica (o que representa un argumento válido), la tabla necesaria requeriría $2^5 = 32$ filas. Como el número de premisas crece y nuestras tablas de verdad llegan a tener hasta 64, 128, 256, o más filas, esta primera técnica para establecer la validez de un argumento pierde rápidamente su encanto.

Además, si observamos de nuevo la tabla 2.15, nos damos cuenta de que para establecer que

$$[(p \to r) \wedge (\neg q \to p) \wedge \neg r] \to q$$

es un argumento válido, necesitamos considerar sólo aquellas filas de la tabla donde cada una de las tres premisas $p \to q$, $\neg q \to p$ y $\neg r$ tenga el valor de verdad 1. (Recuerde que si la hipótesis, formada por la conjunción de todas las premisas, es falsa, entonces la implicación es verdadera, sin importar el valor de verdad de la conclusión.) Esto sucede únicamente en la tercera fila, por lo que en realidad no necesitamos gran parte de la tabla 2.15. (No siempre ocurre que una sola fila tenga todas las premisas verdaderas. Observe que en la tabla 2.16 nos interesarían los resultados de las filas 5, 6 y 8.)

En consecuencia, lo que indican estas observaciones es que podríamos prescindir de gran parte del esfuerzo de construcción de las tablas de verdad que aparecen en las tablas 2.15 y 2.16. Y como no queremos hacer tablas aún más grandes, desarrollaremos una lista de técnicas llamadas *reglas de inferencia* que nos ayudarán de la siguiente forma:

1) El uso de estas técnicas nos permitirá considerar únicamente los casos en que todas las premisas sean verdaderas. Por lo tanto, analizaremos la conclusión sólo para aquellas filas de la tabla de verdad donde cada premisa tenga el valor verdadero 1, *sin* construir dicha tabla de verdad.

2) Las reglas de inferencia son fundamentales en el desarrollo de una justificación paso por paso de cómo la conclusión q se sigue lógicamente de las premisas $p_1, p_2, p_3, \ldots, p_n$ en una implicación de la forma

$$(p_1 \wedge p_2 \wedge p_3 \wedge \cdots \wedge p_n) \to q.$$

Dicho desarrollo establecerá la validez del argumento dado, pues mostrará la forma de deducir la verdad de la conclusión a partir de la verdad de las premisas.

Cada regla de inferencia tiene su origen en una implicación lógica. En algunos casos, la implicación lógica se establece sin demostración. (Sin embargo, se presentarán varias demostraciones en la sección de ejercicios.)

En el estudio de la lógica surgen muchas reglas de inferencia. Nos concentraremos en las que nos permiten justificar los argumentos que surgen en nuestro estudio de la lógica. Estas reglas también nos ayudarán más adelante, cuando estudiemos los métodos para la demostración de teoremas en el resto del texto. La tabla 2.20 (de la página 88) resume las reglas que empezaremos a analizar.

Ejemplo 2.23

Como primer ejemplo, consideremos la regla de inferencia llamada *Modus Ponens*, o *regla de separación*. (*Modus Ponens* viene del latín y puede traducirse como "el método de afirmación".) En forma simbólica, podemos expresar esta regla mediante la implicación lógica

$$[p \wedge (p \to q)] \to q,$$

que verificamos en la tabla 2.17, donde vemos que la cuarta fila es la única donde ambas premisas p y $p \to q$ (y la conclusión q) son verdaderas.

Tabla 2.17

p	q	$p \to q$	$p \wedge (p \to q)$	$[p \wedge (p \to q)] \to q$
0	0	1	0	1
0	1	1	0	1
1	0	0	0	1
1	1	1	1	1

Escribimos la regla en forma de tabla

$$\begin{array}{l} \quad p \\ \quad \underline{p \to q} \\ \therefore q \end{array}$$

donde los tres puntos ($\therefore$) representan las palabras "por lo tanto", e indican que q es la conclusión de las premisas p y $p \to q$, las cuales aparecen por encima de la línea horizontal.

Esta regla surge cuando argumentamos que *si* (1) p es verdadera *y* (2) $p \to q$ es verdadera (o $p \Rightarrow q$), *entonces* la conclusión q también debe ser verdadera. (Después de todo, si q fuera falsa y p fuera verdadera, entonces no podría ocurrir que $p \to q$ fuese verdadera.)

Los siguientes argumentos válidos ilustran la aplicación del *Modus Ponens*.

a) **1)** Lidia gana diez millones de dólares en la lotería. p
2) Si Lidia gana diez millones de dólares en la lotería, entonces José renunciará a su trabajo. $\underline{p \to q}$
3) Por lo tanto, José renunciará a su trabajo. $\therefore q$

b) **1)** Si Alejandra se va de paseo a París, entonces tendrá que ganarse una beca. $p \to q$
2) Alejandra se va de paseo a París. $\underline{p}$
3) Por lo tanto, Alejandra ganó una beca. $\therefore q$

Antes de terminar el análisis de nuestra primera regla de inferencia haremos una última observación. Los ejemplos (a) y (b) podrían indicar que el argumento válido $[p \wedge (p \to q)] \to q$ es apropiado sólo para proposiciones primitivas p, q. Sin embargo, como $[p \wedge (p \to q)] \to q$ es una tautología para las proposiciones primitivas p, q, la primera regla de sustitución implica que podemos reemplazar (todas las apariciones de) p o q con proposiciones compuestas, y la implicación resultante será también una tautología. En consecuencia, si r, s, t y u son proposiciones, primitivas, entonces

$$\begin{array}{l} \quad r \vee s \\ \quad \underline{(r \vee s) \to (\neg t \wedge u)} \\ \therefore \neg t \wedge u \end{array}$$

es un argumento válido, por *Modus Ponens*; también, $[(r \vee s) \wedge [(r \vee s) \to (\neg t \wedge u)]] \to (\neg t \wedge u)$ es una tautología.

Una situación similar, en la que podemos aplicar la primera regla de sustitución, se presentará para cada una de las reglas de inferencia que estudiaremos. Sin embargo, no mencionaremos esto tan explícitamente con las demás reglas de inferencia.

---

jemplo 2.24 Una segunda regla de inferencia está dada por la implicación lógica

$$[(p \to q) \wedge (q \to r)] \to (p \to r),$$

donde p, q y r son proposiciones. En forma tabular escribimos

$$\begin{array}{r} p \to q \\ q \to r \\ \hline \therefore\ p \to r \end{array}$$

Esta regla, conocida como la *ley del silogismo*, surge en muchos argumentos. Por ejemplo, podemos usarla como sigue:

1) Si el entero 35,244 es divisible entre 396, entonces el entero 35,244 es divisible entre 66	$p \to q$
2) Si el entero 35,244 es divisible entre 66, entonces el entero 35,244 es divisible entre 3.	$q \to r$
3) Por lo tanto, si el entero 35,244 es divisible entre 396, entonces el entero 35,244 es divisible entre 3.	$\therefore\ p \to r$

El siguiente ejemplo tiene un argumento un poco más largo que usa las reglas de inferencia desarrolladas en los ejemplos 2.23 y 2.24. De hecho, veremos aquí que puede haber más de una forma de establecer la validez de un argumento.

---

jemplo 2.25 Consideremos el siguiente argumento.

1) Rita está horneando un pastel.
2) Si Rita está horneando un pastel, entonces no está practicando la flauta.
3) Si Rita no está practicando la flauta, entonces su padre no pagará el seguro de su automóvil.
4) Por lo tanto, el padre de Rita no pagará el seguro de su automóvil.

Si nos fijamos en las formas de las proposiciones del argumento anterior, podemos escribirlo de la siguiente manera:

$$(*) \qquad \begin{array}{r} p \\ p \to \neg q \\ \neg q \to \neg r \\ \hline \therefore\ \neg r \end{array}$$

Ya no necesitamos preocuparnos por lo que representen realmente las proposiciones. Nuestro objetivo es usar las dos reglas de inferencia que hemos estudiado hasta ahora para deducir la verdad de la proposición $\neg r$ a partir de la verdad de las tres premisas p, $p \to \neg q$ y $\neg q \to \neg r$.

Establecemos la validez del argumento como sigue:

Pasos	**Razones**
1) $p \rightarrow \neg q$	Premisa
2) $\neg q \rightarrow \neg r$	Premisa
3) $p \rightarrow \neg r$	Esto se sigue de los pasos (1) y (2) y de la ley del silogismo
4) p	Premisa
5) $\therefore \neg r$	Esto se sigue de los pasos (3) y (4) y del *Modus Ponens*.

Antes de pasar a una tercera regla de inferencia, mostraremos que el argumento presentado como (*) puede justificarse de otra forma. En este caso, reduciremos nuestras "razones" a la forma que usaremos para el resto de la sección. Sin embargo, siempre enumeraremos lo necesario para demostrar de dónde surge un argumento o cómo cada paso se sigue de pasos anteriores.

Una segunda forma de justificar el argumento es la siguiente.

Pasos	**Razones**
1) p	Premisa
2) $p \rightarrow \neg q$	Premisa
3) $\neg q$	Pasos (1) y (2) y *Modus Ponens*
4) $\neg q \rightarrow \neg r$	Premisa
5) $\therefore \neg r$	Pasos (3) y (4) y *Modus Ponens*

Ejemplo 2.26 La regla de inferencia llamada *Modus Tollens* está dada por

$$\begin{array}{r} p \rightarrow q \\ \neg q \\ \hline \therefore \neg p \end{array}$$

Esto se obtiene de la implicación lógica $[p \rightarrow q) \wedge \neg q] \rightarrow \neg p$. *Modus Tollens* viene del latín y puede traducirse como "método de negación". Este nombre se debe a que negamos la conclusión, q, para demostrar $\neg p$. (Observemos que también podemos obtener esta regla mediante el *Modus Ponens*, usando el hecho de que $p \rightarrow q \Leftrightarrow \neg q \rightarrow \neg p$.)

El siguiente es un ejemplo del uso del *Modus Tollens* para hacer una inferencia válida:

1) Si Concha es elegida presidenta de la asociación femenina Phi Delta, entonces Elena ingresará a esta asociación.
2) Elena no ingresó a la asociación.
3) Por lo tanto, Concha no fue elegida presidenta de la asociación femenina Phi Delta.

$$\begin{array}{r} p \rightarrow q \\ \neg p \\ \hline \therefore \neg q \end{array}$$

Ahora usaremos el *Modus Tollens* para demostrar que el siguiente argumento es válido (para las proposiciones primitivas p, r, s, t y u).

$$\begin{array}{l} p \to r \\ r \to s \\ t \vee \neg s \\ \neg t \vee u \\ \underline{\neg u} \\ \therefore \neg p \end{array}$$

Aquí utilizamos el *Modus Tollens* y la ley del silogismo, junto con la equivalencia lógica del ejemplo 2.7.

Pasos		**Razones**
1)	$p \to r, r \to s$	Premisas
2)	$p \to s$	Paso (1) y la ley del silogismo
3)	$t \vee \neg s$	Premisa
4)	$\neg s \vee t$	Paso (3) y la propiedad conmutativa de $\vee$
5)	$s \to t$	Paso (4) y el hecho de que $\neg s \vee t \Leftrightarrow s \to t$
6)	$p \to t$	Pasos (2) y (5) y la ley del silogismo
7)	$\neg t \vee u$	Premisa
8)	$t \to u$	Paso (7) y el hecho de que $\neg t \vee u \Leftrightarrow t \to u$
9)	$p \to u$	Pasos (6) y (8) y la ley del silogismo
10)	$\neg u$	Premisa
11)	$\therefore \neg p$	Pasos (9) y (10) y *Modus Tollens*

Antes de pasar a otra regla de inferencia, resumiremos lo que hemos realizado (y lo *no* realizado). El argumento anterior muestra que

$$[(p \to r) \wedge (r \to s) \wedge (t \vee \neg s) \wedge (\neg t \vee u) \wedge \neg u] \Rightarrow \neg p.$$

No hemos usado las leyes de la lógica, como en la sección 2.2, para expresar la proposición

$$(p \to r) \wedge (r \to s) \wedge (t \vee \neg s) \wedge (\neg t \vee u) \wedge \neg u$$

como una proposición lógicamente equivalente más sencilla. Observemos que

$$[(p \to r) \wedge (r \to s) \wedge (t \vee \neg s) \wedge (\neg t \vee u) \wedge \neg u] \not\Leftrightarrow \neg p.$$

pues cuando p toma el valor de verdad 0 y u tiene el valor de verdad 1, el valor de verdad de $\neg p$ es 1, mientras que el de $\neg u$ y $(p \to r) \wedge (r \to s) \wedge (t \vee \neg s) \wedge (\neg t \vee u) \wedge \neg u$ es 0.

Analizaremos ahora una forma tabular de las reglas de inferencia *Modus Ponens* y *Modus Tollens*.

Modus Ponens: $\begin{array}{l} p \to q \\ \underline{p} \\ \therefore q \end{array}$ *Modus Tollens:* $\begin{array}{l} p \to q \\ \underline{\neg q} \\ \therefore \neg p \end{array}$

La razón por la que queremos hacer esto es que podrían surgir otras formas tabulares en algún momento, similares en apariencia pero que representan argumentos *no válidos*, en los que cada una de las premisas es verdadera pero la conclusión es falsa.

a) Consideremos cada uno de los argumentos siguientes:

1)	Si Margaret Thatcher es presidenta de los Estados Unidos, entonces ella tiene al menos 35 años de edad.	$p \rightarrow q$
2)	Margaret Thatcher tiene al menos 35 años de edad.	q
3)	Por lo tanto, Margaret Thatcher es presidenta de Estados Unidos.	$\therefore p$

Aquí vemos que $[(p \rightarrow q) \wedge q] \rightarrow p$ *no* es una tautología. Ya que si consideramos los valores de verdad p: 0 y q: 1, entonces cada una de las premisas $p \rightarrow q$ y q es verdadera pero la conclusión p es falsa. Este argumento *no válido* surge de la *falacia* (error en el razonamiento) de tratar de argumentar por la recíproca; es decir, aunque $[(p \rightarrow q) \wedge p] \Rightarrow q$, *no ocurre* que $[(p \rightarrow q) \wedge q] \Rightarrow p$.

b) Un segundo argumento en el que la conclusión no necesariamente se sigue de las premisas podría ser el siguiente:

1)	Si $2 + 3 = 6$, entonces $2 + 4 = 6$.	$p \rightarrow q$
2)	$2 + 3 \neq 6$.	$\neg p$
3)	Por lo tanto, $2 + 4 \neq 6$	$\therefore \neg q$

En este caso, vemos que $[(p \rightarrow q) \wedge \neg p] \rightarrow \neg q$ *no* es una tautología. De nuevo, los valores de verdad p: 0 y q: 1 muestran que las premisas $p \rightarrow q$ y $\neg p$ pueden ser ambas verdaderas pero que la conclusión $\neg q$ es falsa. La falacia que subyace en este argumento no válido viene de nuestro intento de argumentar por la inversa, ya que efectivamente $[(p \rightarrow q) \wedge \neg q] \Rightarrow \neg p$, pero de aquí *no* se sigue que $[(p \rightarrow q) \wedge \neg p] \Rightarrow \neg q$.

Antes de proseguir, mencionaremos una regla de inferencia sencilla pero importante.

Ejemplo 2.27

La siguiente regla de inferencia surge de la observación de que si p, q son proposiciones verdaderas, entonces $p \wedge q$ es una proposición verdadera.

Supogamos que las proposiciones p, q aparecen en el desarrollo de un argumento. Estas proposiciones podrían ser premisas (dadas) o resultados que se pueden obtener de las premisas o de los resultados desarrollados en una parte anterior del argumento. Entonces, en estas circunstancias, es posible combinar las dos proposiciones en su conjunción $p \wedge q$ y usar esta nueva proposición en pasos posteriores para continuar con el argumento.

Ésta es la *regla de conjunción*, que escribimos en forma de tabla:

$$\begin{array}{c} p \\ \underline{q} \\ \therefore p \wedge q \end{array}$$

Prosigamos nuestro estudio de las reglas de inferencia examinando otra regla muy sencilla pero importante.

Ejemplo 2.28 La siguiente regla de inferencia, que podría servir para ilustrar el sentido común, es la del silogismo disyuntivo. Esta regla proviene de la implicación lógica

$$[(p \vee q) \wedge \neg p] \rightarrow q,$$

que podemos obtener mediante *Modus Ponens*, observando que $p \vee q \Leftrightarrow (\neg p \rightarrow q)$.

Podemos escribirla en forma de tabla:

$$\begin{array}{l} p \vee q \\ \underline{\neg p \quad} \\ \therefore q \end{array}$$

Esta regla de inferencia se usa cuando hay que analizar exactamente dos posibilidades y podemos descartar una de ellas si no es verdadera. Entonces la otra posibilidad es la que tiene que ser verdadera. El siguiente caso muestra una aplicación de esta regla:

1) La cartera de Beto está en su bolsillo o en la mesa. $p \vee q$
2) La cartera de Beto no está en su bolsillo $\underline{\neg p \quad}$
3) Por lo tanto, la cartera de Beto está en la mesa. $\therefore q$

Hasta el momento hemos analizado cinco reglas de inferencia. Antes de intentar justificar más argumentos, como el del ejemplo 2.26 (con 11 pasos), analizaremos una regla más, la cual contiene un método de demostración que se confunde algunas veces con el método (de demostración) por contrapositiva dado en el *Modus Tollens*. La confusión surge debido a que ambos métodos implican la negación de una proposición. Sin embargo, pronto veremos que son dos métodos distintos. (Al final de la sección 2.5 compararemos y contrastaremos de nuevo ambos métodos.)

Ejemplo 2.29 Sea p una proposición arbitraria y F_0 una contradicción. Los resultados de la columna 5 de la tabla 2.18 muestran que la implicación $(\neg p \rightarrow F_0) \rightarrow p$ es una tautología, lo que proporciona la regla de inferencia llamada *regla de contradicción*. Podemos escribir esta regla en forma de tabla:

Tabla 2.18

p	$\neg p$	F_0	$\neg p \rightarrow F_0$	$(\neg p \rightarrow F_0) \rightarrow p$
1	0	0	1	1
0	1	0	0	1

$$\begin{array}{l} \underline{\neg p \rightarrow F_0} \\ \therefore p \end{array}$$

Esta regla indica que si p es una proposición y $\neg p \to F_0$ es verdadera, entonces $\neg p$ debe ser falsa, puesto que F_0 es falsa. Así, tenemos que p es verdadera.

La regla de contradicción es la base de un método para establecer la validez de un argumento: el método de *demostración por contradicción* o *reducción al absurdo*. La idea que está detrás de este método es demostrar una proposición (la conclusión de un argumento) mostrando que, si esa proposición fuera falsa, entonces llegaríamos a deducir una consecuencia imposible. El uso de este método surge en ciertos argumentos que describiremos a continuación.

En general, cuando queremos establecer la validez del argumento

$$(p_1 \wedge p_2 \wedge \cdots \wedge p_n) \to q,$$

podemos establecer la validez del argumento lógicamente equivalente

$$(p_1 \wedge p_2 \wedge \cdots \wedge p_n \wedge \neg q) \to F_0.$$

[Esto se sigue de la tautología de la columna 7 de la tabla 2.19 y de la primera regla de sustitución, en la que reemplazamos la proposición primitiva p por la proposición $(p_1 \wedge p_2 \wedge \cdots \wedge p_n)$†.]

Tabla 2.19

p	q	F_0	$p \wedge \neg q$	$(p \wedge \neg q) \to F_0$	$p \to q$	$(p \to q) \leftrightarrow [(p \wedge \neg q) \to F_0]$
0	0	0	0	1	1	1
0	1	0	0	1	1	1
1	0	0	1	0	0	1
1	1	0	0	1	1	1

Cuando aplicamos el método de demostración por contradicción, primero suponemos que lo que intentamos justificar (o demostrar) es en realidad falso. Después usamos la hipótesis como una premisa adicional para producir una contradicción (o situación imposible) de la forma $p \wedge \neg p$, para alguna proposición p. Una vez que hemos obtenido esta contradicción podemos concluir que la proposición dada era verdadera, lo cual justifica el argumento (o termina la demostración).

Usaremos el método de demostración por contradicción cuando sea más fácil (o parezca serlo) usar $\neg q$ *junto con* las premisas $p_1, p_2, \ldots, p_n$ para deducir una contradicción, que deducir la conclusión q directamente de las premisas $p_1, p_2, \ldots, p_n$. Aplicaremos este método de demostración en los últimos ejemplos de esta sección, los ejemplos 2.33 y 2.36. También lo veremos varias veces en otros capítulos del texto.

† En la sección 4.2 del capítulo 4 daremos la razón por la que sabemos que para cualesquiera proposiciones $p_1, p_2, \cdots, p_n$ y q, se sigue que $(p_1 \wedge p_2 \wedge \cdots \wedge p_n) \wedge \neg q \Leftrightarrow p_1 \wedge p_2 \wedge \cdots \wedge p_n \wedge \neg q$.

Ahora que hemos analizado seis reglas de inferencia, haremos un resumen de éstas e introduciremos otras en la tabla 2.20.

Tabla 2.20

Regla de inferencia	Implicación lógica relacionada	Nombre de la regla
1) $\begin{array}{l} p \\ \underline{p \to q} \\ \therefore q \end{array}$	$[p \land (p \to q)] \to q$	Regla de separación (Modus ponens)
2) $\begin{array}{l} p \to q \\ \underline{q \to r} \\ \therefore p \to r \end{array}$	$[(p \to q) \land (q \to r)] \to (p \to r)$	Ley del silogismo
3) $\begin{array}{l} p \to q \\ \underline{\neg q} \\ \therefore \neg p \end{array}$	$[(p \to q) \land \neg q] \to \neg p$	*Modus Tollens:*
4) $\begin{array}{l} p \\ \underline{q} \\ \therefore p \land q \end{array}$		Regla de la conjunción
5) $\begin{array}{l} p \lor q \\ \underline{\neg p} \\ \therefore q \end{array}$	$[(p \lor q) \land \neg p] \to q$	Regla del silogismo disyuntivo
6) $\begin{array}{l} \underline{\neg p \to F_0} \\ \therefore p \end{array}$	$(\neg p \to F_0) \to p$	Regla de contradicción
7) $\begin{array}{l} \underline{p \land q} \\ \therefore p \end{array}$	$(p \land q) \to p$	Regla de simplificación conjuntiva
8) $\begin{array}{l} \underline{p} \\ \therefore p \lor q \end{array}$	$p \to p \lor q$	Regla de amplificación disyuntiva
9) $\begin{array}{l} p \land q \\ \underline{p \to (q \to r)} \\ \therefore r \end{array}$	$[(p \land q) \land [p \to (q \to r)]] \to r$	Regla de demostración condicional
10) $\begin{array}{l} p \to r \\ \underline{q \to r} \\ \therefore (p \lor q) \to r \end{array}$	$[(p \to r) \land (q \to r)] \to [(p \lor q) \to r]$	Regla de demostración por casos
11) $\begin{array}{l} p \to q \\ r \to s \\ \underline{p \lor r} \\ \therefore q \lor s \end{array}$	$[(p \to q) \land (r \to s) \land (p \lor r)] \to (q \lor s)$	Regla del dilema constructivo
12) $\begin{array}{l} p \to q \\ r \to s \\ \underline{\neg q \lor \neg s} \\ \therefore \neg p \lor \neg r \end{array}$	$[(p \to q) \land (r \to s) \land (\neg q \lor \neg s)] \to (\neg p \lor \neg r)$	Regla del dilema destructivo

Los siguientes cinco ejemplos presentan argumentos válidos. Estos ejemplos nos muestran la forma de aplicar las reglas enumeradas en la tabla 2.20 junto con otros resultados, como las leyes de la lógica.

Ejemplo 2.30 Nuestro primer ejemplo muestra la validez del argumento

$$\begin{array}{l} p \rightarrow r \\ \neg p \rightarrow q \\ \underline{q \rightarrow s} \\ \therefore \neg r \rightarrow s \end{array}$$

Pasos	**Razones**
1) $p \rightarrow r$	Premisa
2) $\neg r \rightarrow \neg p$	Paso (1) y $p \rightarrow r \Leftrightarrow \neg r \rightarrow \neg p$
3) $\neg p \rightarrow q$	Premisa
4) $\neg r \rightarrow q$	Pasos (2) y (3) y la ley del silogismo
5) $q \rightarrow s$	Premisa
6) $\therefore \neg r \rightarrow s$	Pasos (4) y (5) y la ley del silogismo

Una segunda forma de justificar el argumento es la siguiente.

Pasos	**Razones**
1) $p \rightarrow r$	Premisa
2) $q \rightarrow s$	Premisa
3) $\neg p \rightarrow q$	Premisa
4) $p \vee q$	Paso (3) y $(\neg p \rightarrow q) \Leftrightarrow (\neg\neg p \vee q) \Leftrightarrow (p \vee q)$, donde la segunda equivalencia lógica se sigue de la ley de la doble negación
5) $r \vee s$	Pasos (1), (2) y (4) y la regla del dilema constructivo
6) $\therefore \neg r \rightarrow s$	Paso (5) y $(r \vee s) \Leftrightarrow (\neg\neg r \vee s) \Leftrightarrow (\neg r \rightarrow s)$, donde usamos la ley de la doble negación en la primera equivalencia lógica.

El siguiente ejemplo es un poco más complejo.

Ejemplo 2.31 Establezca la validez del argumento

$$\begin{array}{l} p \rightarrow q \\ q \rightarrow (r \wedge s) \\ \neg r \vee (\neg t \vee u) \\ \underline{p \wedge t} \\ \therefore u \end{array}$$

Pasos	**Razones**
1) $p \rightarrow q$	Premisa
2) $q \rightarrow (r \wedge s)$	Premisa
3) $p \rightarrow (r \wedge s)$	Pasos (1) y (2) y la ley del silogismo
4) $p \wedge t$	Premisa
5) p	Paso (4) y la regla de la simplificación conjuntiva
6) $r \wedge s$	Pasos (5) y (3) y *Modus Ponens*

7) r	Paso (6) y la regla de la simplificación conjuntiva
8) $\neg r \vee (\neg t \vee u)$	Premisa
9) $\neg(r \wedge t) \vee u$	Paso (8), la propiedad asociativa de $\vee$ y las leyes de De Morgan
10) t	Paso (4) y la ley de la simplificación conjuntiva
11) $r \wedge t$	Pasos (7) y (10) y la regla de la conjunción
12) $\therefore u$	Pasos (9) y (11) y la regla del silogismo disyuntivo

Ejemplo 2.32 Este ejemplo mostrará que el siguiente argumento es válido.

> Si la banda no pudiera tocar rock o las bebidas no llegasen a tiempo, entonces la fiesta de Año Nuevo tendría que cancelarse y Alicia se enojaría. Si la fiesta se cancelara, habría que devolver el dinero. No se devolvió el dinero.
> Por lo tanto, la banda pudo tocar rock.

Primero convertimos el argumento dado en una forma simbólica mediante la siguiente asignación de proposiciones:

p: La banda pudo tocar rock.
q: Las bebidas se entregaron a tiempo.
r: La fiesta de Año Nuevo se canceló.
s: Alicia estaba enojada.
t: Hubo que devolver el dinero.

El argumento anterior se escribe como

$$\begin{array}{l} (\neg p \vee \neg q) \rightarrow (r \wedge s) \\ r \rightarrow t \\ \neg t \\ \hline \therefore p \end{array}$$

Ahora establezcamos la validez de este argumento como sigue:

Pasos	**Razones**
1) $r \rightarrow t$	Premisa
2) $\neg t$	Premisa
3) $\neg r$	Pasos (1), (2) y *Modus Tollens*
4) $\neg r \vee \neg s$	Paso (3) y la regla de la amplificación disyuntiva
5) $\neg(r \wedge s)$	Paso (4) y las leyes de De Morgan
6) $(\neg p \vee \neg q) \rightarrow (r \wedge s)$	Premisa
7) $\neg(\neg p \vee \neg q)$	Pasos (6), (5) y *Modus Tollens*
8) $p \wedge q$	Paso (7), leyes de De Morgan y la ley de la doble negación
9) $\therefore p$	Paso (8) y la regla de la simplificación conjuntiva

Ejemplo 2.33 En este caso usaremos el método de demostración por contradicción. Consideremos el argumento

$$\begin{array}{l} \neg p \leftrightarrow q \\ q \rightarrow r \\ \underline{\neg r \qquad} \\ \therefore p \end{array}$$

Para establecer la validez de este argumento, hemos supuesto la negación $\neg p$ de la conclusión p como otra premisa. El objetivo ahora es usar las cuatro premisas para obtener una contradicción F_0. He aquí una forma de obtenerla.

Pasos	**Razones**
1) $\neg p \leftrightarrow q$	Premisa
2) $(\neg p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow \neg p)$	Paso (1) y $(\neg p \leftrightarrow q) \Leftrightarrow [(\neg p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow \neg p)]$
3) $\neg p \rightarrow q$	Paso (2) y la regla de la simplificación conjuntiva
4) $q \rightarrow r$	Premisa
5) $\neg p \rightarrow r$	Pasos (3), (4) y la ley del silogismo
6) $\neg p$	Premisa (que hemos supuesto)
7) r	Pasos (5), (6) y *Modus Ponens*
8) $\neg r$	Premisa
9) $r \wedge \neg r \ (\Leftrightarrow F_0)$	Pasos (7), (8) y la regla de conjunción
10) $\therefore p$	Pasos (6), (9) y el método de demostración por contradicción

Si analizamos lo que ocurrió en este caso, tenemos que

$$[(\neg p \leftrightarrow q) \wedge (q \rightarrow r) \wedge \neg r \wedge \neg p] \Rightarrow F_0.$$

Esto requiere que el valor de verdad de $[(\neg p \leftrightarrow q) \wedge (q \rightarrow r) \wedge \neg r \wedge \neg p]$ sea 0. Como $\neg p \leftrightarrow q$, $q \rightarrow r$ y r son las premisas dadas, cada una de estas proposiciones tiene el valor de verdad 1. En consecuencia, para que $[(\neg p \leftrightarrow q) \wedge (q \rightarrow r) \wedge \neg r \wedge \neg p]$ tenga el valor de verdad 0, la proposición $\neg p$ debe tener el valor de verdad 0. Por lo tanto, p tiene el valor de verdad 1 y la conclusión p del argumento es verdadera.

Antes de analizar nuestro siguiente ejemplo, necesitamos recordar el resultado del ejemplo 2.16: para las proposiciones primitivas arbitrarias p, q, r,

$$[p \rightarrow (q \rightarrow r)] \Leftrightarrow [(p \wedge q) \rightarrow r].$$

Mediante la primera regla de sustitución, reemplazaremos cada aparición de p por la proposición compuesta $(p_1 \wedge p_2 \wedge \cdots \wedge p_n)$. Luego obtenemos el nuevo resultado

$$[(p_1 \wedge p_2 \wedge \cdots \wedge p_n) \rightarrow (q \rightarrow r)] \Leftrightarrow [(p_1 \wedge p_2 \wedge \cdots \wedge p_n \wedge q)^{\dagger} \rightarrow r].$$

† En la sección 4.2 del capítulo 4 presentaremos una demostración formal de por qué $(p_1 \wedge p_2 \wedge \cdots \wedge p_n) \wedge q \Leftrightarrow p_1 \wedge p_2 \wedge \cdots \wedge p_n \wedge q$.

Este resultado indica que si queremos establecer la validez del argumento (*) podemos hacerlo estableciendo la validez del argumento correspondiente (**).

$$
(*)\quad \begin{array}{l} p_1 \\ p_2 \\ \vdots \\ \underline{p_n \qquad} \\ \therefore q \to r \end{array}
\qquad\qquad
(**)\quad \begin{array}{l} p_1 \\ p_2 \\ \vdots \\ p_n \\ \underline{q \quad} \\ \therefore r \end{array}
$$

Después de todo, si queremos mostrar que $q \to r$ tiene el valor de verdad 1, cuando $p_1, p_2, \ldots, p_n$ también tienen valor 1 y si el valor de verdad de q es 0, entonces no hay nada que hacer, ya que el valor de verdad de $q \to r$ es 1 en este caso. Entonces, el verdadero problema es mostrar que $q \to r$ tiene el valor de verdad 1, cuando $p_1, p_2, \ldots, p_n$ y q también lo tienen; es decir, necesitamos mostrar que cuando $p_1, p_2, \ldots, p_n, q$ tienen valor de verdad 1, entonces el valor de verdad de r es 1.

Demostraremos este principio en el siguiente ejemplo.

Ejemplo 2.34 Para establecer la validez del argumento

$$
(*)\qquad \begin{array}{l} u \to r \\ (r \wedge s) \to (p \vee t) \\ q \to (u \wedge s) \\ \underline{\neg t \qquad\qquad\qquad} \\ \therefore q \to p \end{array}
$$

consideramos el argumento correspondiente

$$
(**)\qquad \begin{array}{l} u \to r \\ (r \wedge s) \to (p \vee t) \\ q \to (u \wedge s) \\ \neg t \\ \underline{q \qquad\qquad\qquad} \\ \therefore p \end{array}
$$

[Observe que q es la hipótesis de la conclusión $q \to p$ para el argumento (*) y que se convierte en otra premisa del argumento (**) donde la conclusión es p.]

Para justificar el argumento (**) procederemos de la manera siguiente:

Pasos	**Razones**
1) q	Premisa
2) $q \to (u \wedge s)$	Premisa
3) $u \wedge s$	Pasos (1), (2) y *Modus Ponens*
4) u	Paso (3) y la regla de la simplificación conjuntiva
5) $u \to r$	Premisa
6) r	Pasos (4), (5) y *Modus Ponens*
7) s	Paso (3) y la regla de la simplificación conjuntiva
8) $r \wedge s$	Pasos (6), (7) y la regla de conjunción
9) $(r \wedge s) \to (p \vee t)$	Premisa
10) $p \vee t$	Pasos (8), (9) y *Modus Ponens*
11) $\neg t$	Premisa
12) $\therefore p$	Pasos (10), (11) y la regla del silogismo disyuntivo

Ahora sabemos que para el argumento (**)

$$[(u\rightarrow r)\wedge[(r\wedge s)\rightarrow(p\vee t)]\wedge[q\rightarrow(u\wedge s)]\wedge\neg t\wedge q]\Rightarrow p,$$

y para el argumento (*) se sigue que

$$[(u\rightarrow r)\wedge[(r\wedge s)\rightarrow(p\vee t)]\wedge[q\rightarrow(u\wedge s)]\wedge\neg t]\Rightarrow(q\rightarrow p).$$

Los ejemplos 2.30 a 2.34 nos dan una idea de la forma de establecer la validez de un argumento. Después del ejemplo 2.26 analizaremos dos situaciones en las que un argumento no es válido: cuando intentamos argumentar mediante la recíproca o la inversa. Ahora vamos a aprender algo más acerca de la forma de determinar cuándo un argumento no es válido.

Dado un argumento

$$\begin{array}{l} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \\ \vdots \\ \underline{p_n} \\ \therefore\ q \end{array}$$

decimos que el argumento no es válido si puede ocurrir que cada una de las premisas $p_1, p_2, p_3, \ldots, p_n$ sea verdadera (con valor de verdad 1), y que la conclusión q sea falsa (con valor de verdad 0).

El siguiente ejemplo ilustra un método indirecto para mostrar que un argumento que *intuimos* que no es válido (tal vez porque no podemos encontrar la forma de demostrar que es válido) realmente *no lo es*.

Ejemplo 2.35 Consideremos las proposiciones primitivas p, q, r, s y t, y el argumento

$$\begin{array}{l} p \\ p\vee q \\ q\rightarrow(r\rightarrow s) \\ \underline{t\rightarrow r} \\ \therefore\ \neg s\rightarrow\neg t \end{array}$$

Para mostrar que este argumento no es válido, necesitamos *una* asignación de valores de verdad para cada una de las proposiciones p, q, r, s y t de modo que la conclusión $\neg s\rightarrow\neg t$ sea falsa (que tenga el valor de verdad 0) mientras que las cuatro premisas sean verdaderas (tengan el valor de verdad 1). El único caso en que la conclusión $\neg s\rightarrow\neg t$ es falsa se presenta cuando $\neg s$ es verdadera y $\neg t$ es falsa. Esto implica que el valor de verdad de s es 0 y el valor de verdad de t es 1.

Como p es una de las premisas, su valor de verdad debe ser 1. Para que la premisa $p\vee q$ tenga el valor de verdad 1, q puede ser verdadera (1) o falsa (0). Consideremos la premisa $t\rightarrow r$, donde sabemos que t es verdadera. Si $t\rightarrow r$ debe ser verdadera, entonces r debe ser verdadera (tener el valor de verdad 1). Ahora bien, si r es verdadera (1) y s es falsa (0), tenemos que $r\rightarrow s$ es falsa (0) y el valor de verdad de la premisa $q\rightarrow(r\rightarrow s)$ será 1 únicamente cuando q sea falsa (0).

En consecuencia, con la asignación de los valores de verdad

$$p: 1 \quad q: 0 \quad r: 1 \quad s: 0 \quad t: 1,$$

las cuatro premisas

$$p \qquad p \lor q \qquad q \rightarrow (r \rightarrow s) \qquad t \rightarrow r$$

tienen el valor de verdad 1, mientras que la conclusión

$$\neg s \rightarrow \neg t$$

tiene el valor de verdad 0. En este caso, hemos mostrado que el argumento dado no es válido.

Las asignaciones de valores de verdad p: 1, q: 0, r: 1, s: 0 y t: 1 del ejemplo 2.35 muestran un caso que *desaprueba* algo que podríamos haber considerado como un argumento válido. Debemos observar entonces que, para mostrar que una implicación de la forma

$$(p_1 \land p_2 \land p_3 \land \cdots \land p_n) \rightarrow q$$

representa un argumento válido, necesitamos considerar *todos* los casos en que las premisas $p_1, p_2, \ldots, p_n$ sean verdaderas. [Cada uno de esos casos es una asignación de valores de verdad para las proposiciones primitivas (que conforman las premisas) en que $p_1, p_2, p_3, \ldots, p_n$ son verdaderas.] Para lograr esto (analizar todos los casos sin escribir las tablas de verdad), hemos utilizado las reglas de inferencia junto con las leyes de la lógica y otras equivalencias lógicas. Para analizar todos los casos necesarios, no podemos recurrir a un solo ejemplo (o caso) específico como medio para establecer la validez del argumento (para todos los casos posibles). Sin embargo, cuando queremos mostrar que una implicación (de la forma anterior) no es una tautología, todo lo que debemos hacer es encontrar un caso para el que la implicación sea falsa; es decir, un caso en el que todas las premisas sean verdaderas pero que la conclusión sea falsa. *Este* caso proporciona un *contraejemplo* para el argumento y muestra que no es válido.

Veamos un segundo ejemplo en el que utilizaremos el método indirecto del ejemplo 2.35.

---

jemplo 2.36 ¿Es válido o no el siguiente argumento? (En este caso, p, q, r y s son proposiciones primitivas.)

$$\begin{array}{l} p \rightarrow q \\ q \rightarrow s \\ r \rightarrow \neg s \\ \underline{\neg p \veebar r} \\ \therefore \neg p \end{array}$$

¿Podría ser falsa la conclusión $\neg p$ si las cuatro premisas fueran verdaderas? La conclusión $\neg p$ es falsa si p tiene el valor de verdad 1. Así, para que la premisa $p \rightarrow q$ sea verdadera, el valor de verdad de q debe ser 1. Como la premisa $q \rightarrow s$ también es verdadera, la verdad de q implica la verdad de s. En consecuencia, las proposiciones p, q y s tienen el valor de verdad 1. Si analizamos ahora la premisa $r \rightarrow \neg s$, tenemos que, como s tiene el valor de verdad 1, el valor de verdad de r debe ser 0. Por lo tanto, r es falsa. Pero si $\neg p$ es falsa y la premisa $\neg p \veebar r$ es verdadera, también debemos tener r verdadera. Por lo tanto, tenemos que $p \Rightarrow (\neg r \land r)$.

No hemos podido encontrar un contraejemplo de la validez del argumento dado. Sin embargo, esto nos ha mostrado que dicho argumento es válido, y la validez se sigue de la aplicación del método de demostración por contradicción.

Esta introducción a las reglas de inferencia está lejos de ser exhaustiva. Varios de los libros citados en la bibliografía del final de este capítulo ofrecen material adicional para el lector que desee profundizar en el estudio de este tema. En la sección 2.5 aplicaremos las ideas desarrolladas en esta sección a proposiciones de una naturaleza más matemática, ya que queremos aprender a desarrollar la demostración de un teorema. En el capítulo 4, agregaremos otra importante técnica de demostración, la *inducción matemática*, a nuestro arsenal para la demostración de teoremas matemáticos. Sin embargo, primero el lector deberá resolver cuidadosamente los ejercicios de esta sección.

EJERCICIOS 2.3

1. Los siguientes tres argumentos son válidos. Establezca la validez de cada uno por medio de una tabla de verdad. En cada caso, determine las filas de la tabla que son cruciales para evaluar la validez del argumento y las que pueden dejarse de lado.

a) $[p\wedge(p\rightarrow q)\wedge r]\rightarrow[(p\vee q)\rightarrow r]$
b) $[[(p\wedge q)\rightarrow r]\wedge\neg q\wedge(p\rightarrow\neg r)]\rightarrow(\neg p\vee\neg q)$
c) $[[p\vee(q\vee r)]\wedge\neg q]\rightarrow(p\vee r)$

2. Use tablas de verdad para verificar que cada una de las siguientes proposiciones es una implicación lógica:

a) $[(p\rightarrow q)\wedge(q\rightarrow r)]\rightarrow(p\rightarrow r)$
b) $[(p\rightarrow q)\wedge\neg q]\rightarrow\neg p$
c) $[(p\vee q)\wedge\neg p]\rightarrow q$
d) $[(p\rightarrow r)\wedge(q\rightarrow r)]\rightarrow[(p\vee q)\rightarrow r]$

3. Verifique que cada una de las siguientes proposiciones es una implicación lógica, mostrando que es imposible que la conclusión tenga el valor de verdad 0 mientras la hipótesis tenga el valor de verdad 1.

a) $(p\wedge q)\rightarrow p$
b) $p\rightarrow(p\vee q)$
c) $[(p\vee q)\wedge\neg p]\rightarrow q$
d) $[(p\rightarrow q)\wedge(r\rightarrow s)\wedge(p\vee r)]\rightarrow(q\vee s)$
e) $[(p\rightarrow q)\wedge(r\rightarrow s)\wedge(\neg q\vee\neg s)]\rightarrow(\neg p\vee\neg r)$

4. Para cada uno de los siguientes pares de proposiciones, use el *Modus Ponens* o el *Modus Tollens* para completar la línea en blanco con un argumento válido.

a) Si Juana tiene problemas para arrancar su automóvil, entonces su hija Ángela verificará las bujías.
Juana tiene problemas para arrancar su automóvil.
$\therefore$ ______________________________

b) Si Braulio resolvió el primer problema correctamente, entonces la respuesta que obtuvo es 137.
La respuesta de Braulio al primer problema no es 137.
$\therefore$ ______________________________

c) Si éste es un ciclo *repeat-until*, entonces el cuerpo de este ciclo se ejecuta al menos una vez.
____
$\therefore$ El cuerpo del ciclo se ejecuta al menos una vez.

d) Si Tomás juega baloncesto después de mediodía, entonces no verá el televisor por la tarde.

____

$\therefore$ Tomás no jugó baloncesto después de mediodía.

e) Si María Luisa no rompe las fotos de Jorge, entonces tendrá que mostrarlas en el tablero de avisos.
María Luisa no mostró las fotos de Jorge en el tablero.
$\therefore$ ______________________________

5. Considere cada uno de los siguientes argumentos. Si el argumento es válido, identifique la regla de inferencia que establece su validez. Si no, indique si el error se debe a un intento de argumentación por la recíproca o por la inversa.

a) Andrea puede programar en Pascal y puede programar en FORTRAN.
Por lo tanto, Andrea puede programar en Pascal.

b) Una condición suficiente para que Berta gane el torneo de golf es que su oponente Mirna no haga un *birdie* en el último hoyo.
Mirna no hizo un *birdie* en el último hoyo.
Berta ganó el torneo de golf.
Por lo tanto Mirna, la oponente de Berta, no hizo un *birdie* en el último hoyo.

c) Si el programa de Ronaldo es correcto, entonces podrá terminar su tarea de ciencias de la computación en menos de dos horas.
Ronaldo tarda más de dos horas en terminar su tarea de ciencias de la computación.
Por lo tanto, el programa de Ronaldo es incorrecto.

d) Las llaves del auto de Elisa están en su bolso o sobre la mesa de la cocina.
Las llaves del auto de Elisa no están sobre la mesa de la cocina.
Por lo tanto, las llaves del auto de Elisa están en su bolso.

e) Si bajan los tipos de interés, entonces subirán las acciones de la bolsa.
Los tipos de interés no están bajando.
Por lo tanto, no subirán las acciones de la bolsa.

f) Si Alejandro recibe un aguinaldo, entonces viajará al suroeste de Estados Unidos.
Si Alejandro viaja al suroeste de Estados Unidos, entonces visitará el Gran Cañón.
Por lo tanto, si Alejandro recibe un aguinaldo, entonces visitará el Gran Cañón.

6. Para las proposiciones primitivas p, q y r, sean P la proposición

$$[p \wedge (p \rightarrow q) \wedge (s \vee r) \wedge (r \rightarrow \neg q)] \rightarrow (s \vee t)$$

y P_1 la proposición $[p \wedge (q \vee r)] \vee \neg[p \vee (q \vee r)]$.

a) Use las reglas de inferencia para mostrar que $q \wedge r \Rightarrow q \vee r$.

b) ¿Es cierto que $P \Rightarrow P_1$?

7. Justifique cada uno de los pasos necesarios para mostrar que el siguiente argumento es válido.

$$[p \wedge (q \wedge r)] \vee \neg[p \vee (q \wedge r)],$$

Pasos	**Razones**
1) p	
2) $p \rightarrow q$	
3) q	
4) $r \rightarrow \neg q$	
5) $q \rightarrow \neg r$	
6) $\neg r$	
7) $s \vee r$	
8) s	
9) $\therefore s \vee t$	

8. Dé las razones para los pasos que verifican el siguiente argumento.

$$\begin{array}{l} (\neg p \vee q) \rightarrow r \\ r \rightarrow (s \vee t) \\ \neg s \wedge \neg u \\ \underline{\neg u \rightarrow \neg t} \\ \therefore p \end{array}$$

Pasos	Razones
1) $\neg s \wedge \neg u$	
2) $\neg u$	
3) $\neg u \rightarrow \neg t$	
4) $\neg t$	
5) $\neg s$	
6) $\neg s \wedge \neg t$	
7) $r \rightarrow (s \vee t)$	
8) $\neg(s \vee t) \rightarrow \neg r$	
9) $(\neg s \wedge \neg t) \rightarrow \neg r$	
10) $\neg r$	
11) $(\neg p \vee q) \rightarrow r$	
12) $\neg r \rightarrow \neg(\neg p \vee q)$	
13) $\neg r \rightarrow (p \wedge \neg q)$	
14) $p \wedge \neg q$	
15) $\therefore p$	

9. **a)** Dé las razones para los pasos que justifican el argumento

$$[(p \rightarrow q) \wedge (\neg r \vee s) \wedge (p \vee r)] \rightarrow (\neg q \rightarrow s).$$

Pasos	Razones
1) $\neg(\neg q \rightarrow s)$	
2) $\neg q \wedge \neg s$	
3) $\neg s$	
4) $\neg r \vee s$	
5) $\neg r$	
6) $p \rightarrow q$	
7) $\neg q$	
8) $\neg p$	
9) $p \vee r$	
10) r	
11) $\neg r \wedge r$	
12) $\therefore \neg q \rightarrow s$	

b) Realice una demostración directa del resultado de la parte (a).

c) Realice una demostración directa del resultado del ejemplo 2.33.

10. Establezca la validez de los siguientes argumentos.

a) $[(p \wedge \neg q) \wedge r] \rightarrow [(p \wedge r) \vee q]$

b) $[p \wedge (p \rightarrow q) \wedge (\neg q \vee r)] \rightarrow r$

c) $\begin{array}{l} p \rightarrow q \\ \neg q \\ \underline{\neg r} \\ \therefore \neg(p \vee r) \end{array}$

d) $\begin{array}{l} p \rightarrow q \\ r \rightarrow \neg q \\ \underline{r} \\ \therefore \neg p \end{array}$

e) $\begin{array}{l} p \rightarrow (q \rightarrow r) \\ \neg q \rightarrow \neg p \\ \underline{p} \\ \therefore r \end{array}$

f) $p \wedge q$
$p \rightarrow (r \wedge q)$
$r \rightarrow (s \vee t)$
$\neg s$
$\therefore t$

g) $p \rightarrow (q \rightarrow r)$
$p \vee s$
$t \rightarrow q$
$\neg s$
$\therefore \neg r \rightarrow \neg t$

h) $p \vee q$
$\neg p \vee r$
$\neg r$
$\therefore q$

11. Muestre con un contraejemplo que ninguno de los siguientes argumentos es válido; es decir, dé una asignación de valores de verdad a las proposiciones primitivas p, q, r y s de modo que todas las premisas sean verdaderas (tengan el valor de verdad 1) y que la conclusión sea falsa (tenga el valor de verdad 0).

a) $[(p \wedge \neg q) \wedge [p \rightarrow (q \rightarrow r)]] \rightarrow \neg r$

b) $[[(p \wedge q) \rightarrow r] \wedge (\neg q \vee r)] \rightarrow p$

c) $p \leftrightarrow q$
$q \rightarrow r$
$r \vee \neg s$
$\neg s \rightarrow q$
$\therefore s$

d) p
$p \rightarrow r$
$p \rightarrow (q \vee \neg r)$
$\neg q \vee \neg s$
$\therefore s$

12. Escriba cada uno de los siguientes argumentos en forma simbólica. Establezca después la validez del argumento o dé un contraejemplo para mostrar que no es válido.

a) Si Rosa María obtiene el puesto de supervisor y trabaja mucho, entonces obtendrá un aumento. Si obtiene el aumento, entonces comprará un auto nuevo. Ella no ha adquirido un auto nuevo. Por lo tanto, Rosa María no ha obtenido el puesto de supervisor o no ha trabajado mucho.

b) Si Domingo va a la carrera de autos, entonces Elena se enojará. Si Rafael juega cartas toda la noche, entonces Carmen se enojará. Si Elena o Carmen se enojan, le avisarán a Verónica (su abogado). Verónica no ha tenido noticias de estas dos clientes. En consecuencia, ni Domingo fue a las carreras ni Rafael jugó cartas toda la noche.

c) Si Norma va a su reunión del martes por la mañana, entonces deberá levantarse muy temprano ese día. Si va al concierto de rock el lunes por la noche, entonces llegará a su casa después de las 11:00 P.M. Si Norma llega a su casa a esa hora y se levanta temprano al día siguiente, entonces tendrá que ir a trabajar después de dormir menos de siete horas. Por desgracia, Norma no puede trabajar con menos de siete horas de descanso. Norma no deberá ir al concierto de rock o deberá faltar a su reunión del martes por la mañana.

d) Si hay cierta probabilidad de lluvia o pierde su cinta roja para el cabello, entonces Loreta no cortará el césped. Siempre que la temperatura está por arriba de los 80°F, no hay probabilidad de lluvia. Hoy la temperatura es de 85°F y Loreta está usando su cinta roja. Por lo tanto (en algún momento del día), Loreta cortará el césped.

2.4 El uso de cuantificadores

En la sección 2.1 mencionamos el hecho de que los enunciados que contienen una variable como x no necesariamente son proposiciones. Por ejemplo, la frase "El número $x + 2$ es un entero par" no necesariamente es verdadera o falsa, a menos que conozcamos el valor que sustituirá a x. Si restringimos nuestra elección a los enteros, entonces, al reemplazar x por -5, -1 o 3, por ejemplo, la proposición resultante será falsa. De hecho, es falsa siempre que sustituyamos x con un entero impar. No obstante, cuando un entero par sustituye a x, la proposición resultante es verdadera.

Nos referiremos a la frase "El número $x + 2$ es un entero par" como una *proposición abierta*, concepto que definimos formalmente como sigue.

Definición 2.5 Una frase declarativa es una *proposición abierta* si

1) contiene una o más variables, y
2) no es una proposición, pero
3) se convierte en una proposición cuando las variables que aparecen en ella se reemplazan por ciertas opciones permisibles.

Cuando analizamos la frase "El número $x + 2$ es un entero par" a la luz de esta definición, vemos que es una proposición abierta que contiene una sola variable, x. Respecto al tercer elemento de la definición, en nuestro análisis anterior restringimos las "ciertas opciones permisibles" a los enteros. Estas opciones permisibles forman lo que se llama el *universo* o *universo de discurso* para la proposición abierta. El universo comprende las opciones que queremos considerar o permitir para la variable o variables de la proposición abierta. (El universo es un ejemplo de un *conjunto*, concepto que analizaremos con detalle en el siguiente capítulo.)

Al tratar las proposiciones abiertas, usaremos la siguiente notación:

La proposición abierta "El número $x + 2$ es un entero par" se denota con $p(x)$ [o $q(x)$, $r(x)$, etcétera]. Entonces $\neg p(x)$ se podría leer como "El número $x + 2$ *no* es un entero par".

Usaremos $q(x, y)$ para representar una proposición abierta con dos variables. Por ejemplo, consideremos

$q(x, y)$: Los números $y + 2$, $x - y$ y $x + 2y$ son enteros pares.

En el caso de $q(x, y)$, cada una de las variables x, y aparece más de una vez. Se sobreentiende que cuando reemplazamos una de las letras x por un elemento de nuestro universo, reemplazamos la otra x con el mismo valor. De la misma forma, cuando se sustituye y (con un valor de su universo), se hace la misma sustitución para todas las apariciones de la variable y.

Con $p(x)$ y $q(x, y)$ como antes, y un universo en el que los enteros siguen siendo las mismas opciones permisibles, obtenemos los siguientes resultados cuando hacemos algunos reemplazos de las variables x, y.

$p(5)$: El número 7 ($= 5 + 2$) es un entero par. (FALSO)
$\neg p(7)$: El número 9 no es un entero par. (VERDADERO)
$q(4,2)$: Los números 4, 2 y 8 son enteros pares. (VERDADERO)

También observamos, por ejemplo, que $q(5,2)$ y $q(4,7)$ son proposiciones falsas, mientras que $\neg q(5,2)$ y $\neg q(4,7)$ son verdaderas.

En consecuencia, vemos que para ambas expresiones $p(x)$ y $q(x, y)$, según los valores dados, algunas sustituciones producen proposiciones verdaderas y otras producen proposiciones falsas. Po lo tanto, podemos construir las siguientes proposiciones verdaderas.

1) Para algún x, $p(x)$.
2) Para algunos x, y, $q(x, y)$.

Observe que en este caso, las proposiciones "Para algún x, $\neg p(x)$" y "Para algunos x, y, $\neg q(x, y)$" también son verdaderas. [Puesto que las proposiciones "Para algún x, $p(x)$" y "Para algún x, $\neg p(x)$" también son verdaderas, vemos que la segunda proposición *no* es la negación de la primera, aunque la proposición abierta $\neg p(x)$ es la negación de la proposición abierta $p(x)$. Un resultado similar es verdadero para las proposiciones que implican $q(x, y)$ y $\neg q(x, y)$.]

Las frases "Para algún x" y "Para algunos x, y" *cuantifican* las proposiciones abiertas $p(x)$ y $q(x, y)$, respectivamente. Muchos postulados, definiciones y teoremas de matemáticas implican proposiciones que son proposiciones abiertas cuantificadas. Esto surge de dos tipos de *cuantificadores*, el *cuantificador existencial* y el *cuantificador universal*.

La proposición (1) utiliza el *cuantificador existencial* "Para algún x", que también se puede expresar como "Para al menos un x" o "Existe un x tal que". En forma simbólica, este cuantificador se representa como $\exists x$. Por lo tanto, la proposición "Para algún x, $p(x)$" se expresa, en forma simbólica, como $\exists x\, p(x)$.

En forma simbólica, la proposición (2) se escribe así: $\exists x\, \exists y\, q(x, y)$. Podemos usar la notación $\exists x, y$ para abreviar $\exists x\, \exists y\, q(x, y)$ de mdo que quede como $\exists x, y\, q(x, y)$.

El *cuantificador universal* se denota con $\forall x$ y se lee como "Para todo x", "Para cada x" o "Para cualquier x". "Para todo x, y" o "Para todos x y y" se denota con $\forall x \forall y$, que puede abreviarse como $\forall x, y$.

Si $p(x)$ es como lo definimos antes y usamos el cuantificador universal, podemos cambiar la proposición abierta $p(x)$ por la proposición (cuantificada) $\forall x\, p(x)$, una proposición falsa.

Si consideramos la proposición abierta $r(x)$: "$2x$ es un entero par" con el mismo universo (de los enteros), entonces la proposición (cuantificada) $\forall x\, r(x)$ es una proposición verdadera. Cuando decimos que $\forall x\, r(x)$ es verdadera, queremos decir que no importa con qué entero (de nuestro universo) sustituyamos a x en $r(x)$, la proposición resultante es verdadera. También hay que notar que la proposición $\exists x\, r(x)$ es una proposición verdadera, mientras que $\forall x\, \neg r(x)$ y $\exists x\, \neg r(x)$ son falsas.

La variable x de cada una de las proposiciones abiertas $p(x)$ y $r(x)$ es una *variable libre* (de la proposición abierta). Si x varía en el universo de una proposición abierta, el valor de verdad de la proposición (que se obtiene al reemplazar cada aparición de x) puede variar. Por ejemplo, en el caso de $p(x)$, vemos que $p(5)$ es falsa, mientras que $p(6)$ es una proposición verdadera. Sin embargo, la proposición abierta $r(x)$ se convierte en una proposición verdadera con cualquier reemplazo (de x) tomado del universo de todos los enteros. En contraste con la proposición abierta $p(x)$, $\exists x\, p(x)$ tiene un valor de verdad fijo: verdadero. Y en la representación simbólica $\exists x\, p(x)$, la variable x es una variable *acotada*, acotada por el cuantificador existencial $\exists$. Esto ocurre también en las proposiciones $\forall x\, r(x)$ y $\forall x\, \neg r(x)$; en cada caso, la variable x está acotada por el cuantificador universal $\forall$.

Para la proposición abierta $q(x, y)$, tenemos dos variables libres, cada una de las cuales está acotada por el cuantificador $\exists$ en cualquiera de las proposiciones $\exists x\, \exists y\, q(x, y)$ o $\exists x, y\, q(x, y)$.

El siguiente ejemplo muestra la forma en que estas nuevas ideas acerca de los cuantificadores se pueden usar en conjunción con las conectivas lógicas.

Ejemplo 2.37 En este caso, el universo comprende todos los números reales. Las proposiciones abiertas $p(x)$, $q(x)$, $r(x)$ y $s(x)$ están dadas por

$$\begin{aligned} p(x)&: \quad x \geq 0 \\ q(x)&: \quad x^2 \geq 0 \\ r(x)&: \quad x^2 - 3x - 4 = 0 \\ s(x)&: \quad x^2 - 3 > 0. \end{aligned}$$

Entonces, las siguientes proposiciones son verdaderas.

1) $$\exists x\,[p(x) \wedge r(x)]$$

Esto se debe a que el número 4, por ejemplo, es un miembro del universo tal que las dos proposiciones $p(4)$ y $r(4)$ son verdaderas.

2) $$\forall x\,[p(x) \rightarrow q(x)]$$

Si, en $p(x)$, reemplazamos x por un número real negativo a, entonces $p(a)$ es falsa; pero $p(a) \rightarrow q(a)$ es verdadera independientemente del valor de verdad de $q(a)$. Al reemplazar x, en $p(x)$, por un número real no negativo b, vemos que $p(b)$ y $q(b)$ son ambas verdaderas, al igual que $p(b) \rightarrow q(b)$. En consecuencia, $p(x) \rightarrow q(x)$ es verdadera para todas las sustituciones de x tomadas del universo de todos los números reales y la proposición (cuantificada) $\forall x[p(x) \rightarrow q(x)]$ es verdadera.

Esta proposición puede traducirse de las siguientes maneras:

a) Para todo número real x, si $x \geq 0$, entonces $x^2 \geq 0$.
b) Todo número real no negativo tiene un cuadrado no negativo.
c) El cuadrado de cualquier número real no negativo es un número real no negativo.

También la proposición $\exists x[p(x) \rightarrow q(x)]$ es verdadera.

Las siguientes proposiciones son falsas.

1′) $$\forall x\,[q(x) \rightarrow s(x)]$$

Queremos mostrar que la proposición es falsa, por lo que solamente necesitamos mostrar un *contraejemplo*; es decir, *un valor de* x para el que $q(x) \rightarrow s(x)$ sea falsa, en lugar de demostrar algo para todo x, como lo hicimos en el caso de la proposición (2). Si reemplazamos x por 1, vemos que $q(1)$ es verdadera y $s(1)$ es falsa. Por lo tanto, $q(1) \rightarrow s(1)$ es falsa, y en consecuencia la proposición (cuantificada) $\forall x[q(x) \rightarrow s(x)]$ es falsa. [Observe que $x = 1$ no es el único contraejemplo: cualquier número real a entre $-\sqrt{3}$ y $\sqrt{3}$ hará que $q(a)$ sea verdadera y $s(a)$ sea falsa.]

2′) $$\forall x\,[r(x) \vee s(x)]$$

Aquí hay muchos valores de x, entre ellos 1, $\frac{1}{2}$, $-\frac{3}{2}$, y 0, que son contraejemplos de esta proposición. Sin embargo, al cambiar los cuantificadores, vemos que la proposición $\exists x[r(x) \vee s(x)]$ es verdadera.

3′) $$\forall x\,[r(x) \rightarrow p(x)]$$

El número real -1 es una solución de la ecuación $x^2 - 3x - 4 = 0$, por lo que $r(-1)$ es verdadera, mientras que $p(-1)$ es falsa. Por lo tanto, la elección de -1 proporciona el contraejemplo que necesitamos para mostrar que esta proposición (cuantificada) es falsa.

La proposición (3′) se puede traducir como sigue:

a) Para todo número real x, si $x^2 - 3x - 4 = 0$, entonces $x \geq 0$.
b) Para todo número real x, si x es una solución de la ecuación $x^2 - 3x - 4 = 0$, entonces $x \geq 0$.

Haremos ahora las siguientes observaciones. Sea $p(x)$ cualquier proposición abierta (en la variable x) con un universo predeterminado *no vacío* (es decir, el universo contiene al menos un miembro). Entonces, si $\forall x\, p(x)$ es verdadera, también lo es $\exists x\, p(x)$, o

$$\forall x\, p(x) \Rightarrow \exists x\, p(x).$$

Cuando escribimos $\forall x\, p(x) \Rightarrow \exists x\, p(x)$, estamos diciendo que la implicación $\forall x\, p(x) \rightarrow \exists x\, p(x)$ es una implicación lógica; es decir, $\exists x\, p(x)$ es verdadera siempre que $\forall x\, p(x)$ sea verdadera. También observamos que la hipótesis de esta implicación es la *proposición* cuantificada $\forall x\, p(x)$ y la conclusión es $\exists x\, p(x)$, otra *proposición* cuantificada. Por otro lado, si $\exists x\, p(x)$ es verdadera, no se sigue que $\forall x\, p(x)$ deba ser verdadera. Por lo tanto, en general, $\exists x\, p(x)$ no implica lógicamente $\forall x\, p(x)$.

Nuestro siguiente ejemplo muestra el hecho de que la cuantificación de una proposición abierta podría no ser tan explícita como quisiéramos.

Ejemplo 2.38

a) Consideremos el universo de todos los números reales y examinemos las frases:
1) Si un número es racional, entonces es un número real.
2) Si x es racional, entonces x es real.

Deberíamos de estar de acuerdo en que estas frases proporcionan la misma información. No obstante, también deberíamos preguntarnos si las frases son proposiciones o proposiciones abiertas. En el caso de la frase (2), al menos tenemos la presencia de la variable x. Pero ninguna frase contiene una expresión como "Para todo", "Para cualquiera" o "Para cada". La única pista que indica que se trata de proposiciones cuantificadas universalmente es la presencia del artículo indefinido "un" en la primera frase. En casos como éste, el uso del cuantificador universal es *implícito* en vez de *explícito*.

Si $p(x)$, $q(x)$ son las proposiciones abiertas

$p(x)$: x es un número racional $\qquad$ $q(x)$: x es un número real,

entonces debemos reconocer el hecho de que ambas frases son dos modos un tanto informales de expresar la proposición cuantificada

$$\forall x[p(x) \rightarrow q(x)].$$

b) Para el universo de todos los triángulos del plano, la frase

Un triángulo equilátero tiene tres ángulos de 60°, y viceversa proporciona otro ejemplo de una cuantificación implícita. En este caso, el artículo indefinido "Un" es el único indicio de que podríamos expresar esta frase como una proposición con un cuantificador universal. Si las proposiciones abiertas

$e(t)$: El triángulo t es equilátero.
$a(t)$: El triángulo t tiene tres ángulos de 60°.

están definidas para este universo, entonces la frase dada se puede escribir en la forma cuantificada explícita

$$\forall t[e(t) \leftrightarrow a(t)].$$

También podemos optar por evitar las proposiciones abiertas $e(t)$, $a(t)$ y simplemente volver a escribir la frase dada con el cuantificador universal (explícito) "Para todo" como

Para todo triángulo ABC, $AB = BC = CA$
si y sólo si cada uno de los ángulos A, B y C es un ángulo de 60°.

c) En un libro de texto de trigonometría común y corriente encontramos con frecuencia la identidad trigonométrica

$$\text{sen}^2 x + \cos^2 x = 1.$$

Esta identidad no contiene una cuantificación explícita y el lector debe comprender (o habrá que indicárselo) que está definida para todos los números reales x. Si se especifica el universo de todos los números reales (o al menos se sobreentiende), entonces esta identidad puede expresarse mediante la proposición cuantificada (en forma explícita)

$$\forall x[\text{sen}^2 x + \cos^2 x = 1].$$

d) Por último, consideremos el universo de todos los enteros positivos y la frase

El entero 41 es igual a la suma de dos cuadrados perfectos.

Aquí tenemos un ejemplo más en el que la cuantificación es implícita; pero, esta vez, la cuantificación es existencial. Podemos expresar el resultado de manera más formal (y simbólica) como

$$\exists m\, \exists n[41 = m^2 + n^2].$$

El ejemplo siguiente demuestra que el valor de verdad de una proposición cuantificada puede depender del universo dado.

Ejemplo 2.39 Consideremos la proposición abierta $p(x)$: $x^2 \geq 0$.

1) Si el universo consta de todos los números reales, entonces la proposición cuantificada $\forall x\, p(x)$ es verdadera.

2) Sin embargo, para el universo de todos los números complejos, la misma proposición cuantificada $\forall x\, p(x)$ es falsa. El número complejo i ofrece uno de los muchos contraejemplos posibles.

No obstante, para cualquiera de estos universos, la proposición cuantificada $\exists x\, p(x)$ es verdadera.

En el siguiente ejemplo se ilustra uno de los usos de los cuantificadores en el campo de las ciencias de la computación.

Ejemplo 2.40 En el siguiente segmento de programa en Pascal, n es una variable entera y la variable A es una tabla $A[1], A[2], \ldots, A[20]$ de 20 valores enteros.

```
For n := 1 to 20 do
   A[n] := n*n - n;
```

Las siguientes proposiciones relativas a la tabla A pueden representarse en forma cuantificada; el universo consta de todos los enteros de 1 a 20, inclusive.

1) Cada entrada de la tabla es no negativa:

$$\forall n\,(A[n] \geq 0).$$

2) El entero $A[20]$ es la entrada más grande de la tabla:

$$\forall n\,[(1 \leq n \leq 19) \rightarrow (A[n] < A[20])].$$

3) Existen dos entradas consecutivas en A tales que la entrada mayor es el doble de la menor:

$$\exists n\,(A[n+1] = 2A[n]).$$

4) Las entradas de la tabla están ordenadas en forma (estrictamente) ascendente:

$$\forall n\,[(1 \leq n \leq 19) \rightarrow (A[n] < A[n+1])].$$

Nuestra última proposición requiere el uso de dos variables enteras m, n.

5) Las entradas de la tabla son distintas:

$$\forall m\,\forall n\,[(m \neq n) \rightarrow (A[m] \neq A[n])], \qquad \text{o}$$
$$\forall m,n\,[(m < n) \rightarrow (A[m] \neq A[n])].$$

Antes de continuar, en la tabla 2.21 haremos un resumen y una especie de ampliación de lo que hemos aprendido acerca de los cuantificadores.

Los resultados de la tabla 2.21 parecerían implicar solamente una proposición abierta. Sin embargo, debemos observar que la proposición abierta $p(x)$ de la tabla puede representar una conjunción de proposiciones abiertas, como $q(x) \land r(x)$, o una implicación de proposiciones abiertas, como $s(x) \rightarrow t(x)$. Si, por ejemplo, queremos determinar cuándo la proposición $\exists x[s(x) \rightarrow t(x)]$ es verdadera, observamos la tabla de $\exists x\, p(x)$ y usamos la información que aparece en ella. La tabla indica que $\exists x[s(x) \rightarrow t(x)]$ es verdadera cuando $s(a) \rightarrow t(a)$ es verdadera para (al menos) un a del universo dado.

Analizaremos ahora las proposiciones cuantificadas que tienen más de una proposición abierta. Sin embargo, antes de hacerlo, necesitamos la siguiente definición, comparable a las definiciones 2.2 y 2.4, relativas a las ideas de proposiciones lógicamente equivalentes e implicación lógica. La definición siguiente se refiere a las mismas cuestiones para el caso de las proposiciones abiertas.

Tabla 2.21

Proposición	¿Cuándo es verdadera?	¿Cuándo es falsa?
$\exists x\, p(x)$	Para (al menos) un a del universo, $p(a)$ es verdadera.	Para cada a del universo, $p(a)$ es falsa.
$\forall x\, p(x)$	Para cada reemplazo de a del universo, $p(a)$ es verdadera.	Existe al menos un reemplazo a en el universo para el cual $p(a)$ es falsa.
$\exists x\, \neg p(x)$	Para al menos una elección de a del universo, $p(a)$ es falsa, de modo que la negación $\neg p(a)$ es verdadera.	Para cada reemplazo a del universo, $p(a)$ es verdadera.
$\forall x\, \neg p(x)$	Para cada reemplazo de a del universo, $p(a)$ es falsa y su negación $\neg p(a)$ es verdadera.	Existe al menos un reemplazo a en el universo para el cual $\neg p(a)$ es falsa y $p(a)$ es verdadera.

Definición 2.6 Sean $p(x)$, $q(x)$ proposiciones abiertas definidas para un universo dado.

Las proposiciones abiertas $p(x)$ y $q(x)$ son (*lógicamente*) *equivalentes*, y escribimos $\forall x[p(x) \Leftrightarrow q(x)]$, cuando la bicondicional $p(a) \leftrightarrow q(a)$ es verdadera para cada reemplazo a del universo dado. Si la implicación $p(a) \rightarrow q(a)$ es verdadera para cada a del universo, entonces escribimos $\forall x[p(x) \Rightarrow q(x)]$ y decimos que $p(x)$ *implica lógicamente* $q(x)$.

Para el universo de todos los triángulos del plano, sean $p(x)$, $q(x)$ las proposiciones abiertas

$p(x)$: x es equiangular.

$q(x)$: x es equilátero.

Entonces, para cualquier triángulo particular a [reemplazo de x], sabemos que $p(a) \leftrightarrow q(a)$ es verdadera. En consecuencia, $\forall x[p(x) \Leftrightarrow q(x)]$.

Observe que aquí, y en general, $\forall x[p(x) \Leftrightarrow q(x)]$ si y sólo si $\forall x[p(x) \Rightarrow q(x)]$ y $\forall x[q(x) \Rightarrow p(x)]$.

También observamos que se puede dar una definición similar a la definición 2.6 para dos proposiciones abiertas que tengan dos o más variables.

Daremos ahora otro vistazo a la equivalencia lógica de las proposiciones (no proposiciones abiertas) conforme analicemos la recíproca, la inversa y la contrapositiva de una proposición de la forma $\forall x[p(x) \rightarrow q(x)]$.

Definición 2.7 Para las proposiciones abiertas $p(x)$, $q(x)$, definidas en un universo dado, y la proposición cuantificada en forma universal $\forall x[p(x) \rightarrow q(x)]$, definimos:

1) La *contrapositiva* de $\forall x[p(x) \rightarrow q(x)]$ como $\forall x[\neg q(x) \rightarrow \neg p(x)]$.
2) La *recíproca* de $\forall x[p(x) \rightarrow q(x)]$ como $\forall x[q(x) \rightarrow p(x)]$.
3) La *inversa* de $\forall x[p(x) \rightarrow q(x)]$ como $\forall x[\neg p(x) \rightarrow \neg q(x)]$.

Los siguientes dos ejemplos ilustran la definición anterior.

Ejemplo 2.41 Para el universo de todos los cuadriláteros del plano, sean $s(x)$ y $e(x)$ las proposiciones abiertas

$$s(x): \quad x \text{ es un cuadrado}; \qquad e(x): \quad x \text{ es equilátero.}$$

a) La proposición

$$\forall x[s(x) \rightarrow e(x)]$$

es una proposición verdadera y es lógicamente equivalente a su contrapositiva

$$\forall x[\neg e(x) \rightarrow \neg s(x)]$$

ya que $[s(a) \rightarrow e(a)] \Leftrightarrow [\neg e(a) \rightarrow \neg s(a)]$ para cada reemplazo a. Por lo tanto,

$$\forall x[s(x) \rightarrow e(x)] \Leftrightarrow \forall x[\neg e(x) \rightarrow \neg s(x)].$$

b) La proposición

$$\forall x[e(x) \rightarrow s(x)]$$

es una proposición falsa y es la recíproca de la proposición verdadera

$$\forall x[s(x) \rightarrow e(x)].$$

La proposición falsa

$$\forall x[\neg s(x) \rightarrow \neg e(x)]$$

se conoce como la inversa de la proposición dada $\forall x[s(x) \rightarrow e(x)]$.

Como $[e(a) \rightarrow s(a)] \Leftrightarrow [\neg s(a) \rightarrow \neg e(a)]$ para cada cuadrilátero específico a, tenemos que la recíproca y la inversa son lógicamente equivalentes; es decir,

$$\forall x[e(x) \rightarrow s(x)] \Leftrightarrow \forall x[\neg s(x) \rightarrow \neg e(x)].$$

Ejemplo 2.42 En este caso, $p(x)$ y $q(x)$ son las proposiciones abiertas

$$p(x): \quad |x| > 3 \qquad q(x): \quad x > 3$$

y el universo consta de todos los números reales.

a) La proposición $\forall x[p(x) \rightarrow q(x)]$ es una proposición falsa. Por ejemplo, si $x = -5$, entonces $p(-5)$ es verdadera mientras que $q(-5)$ es falsa. En consecuencia, $p(-5) \rightarrow q(-5)$ es falsa, al igual que $\forall x[p(x) \rightarrow q(x)]$.
b) Podemos expresar la recíproca de la proposición dada (en la parte a) como sigue:

Todo número real mayor que 3 tiene magnitud
(o valor absoluto) mayor que 3.

En forma simbólica, esta proposición verdadera se representa como $\forall x[q(x) \rightarrow p(x)]$.

c) La inversa de la proposición dada también es una proposición verdadera. En forma simbólica, tenemos $\forall x[\neg p(x) \rightarrow \neg q(x)]$, que se puede expresar como

Si la magnitud de un número real es menor o igual que 3,
entonces el propio número es menor o igual que 3.

Y esto es lógicamente equivalente a la proposición (recíproca) dada en la parte (b).

d) En este caso, la contrapositiva de la proposición de la parte (a) está dada por $\forall x[\neg q(x) \rightarrow \neg p(x)]$. Esta proposición falsa es lógicamente equivalente a $\forall x[p(x) \rightarrow q(x)]$ y se puede expresar como sigue:

Si un número es menor o igual que 3, también lo es su magnitud.

e) Consideremos la proposición abierta

$$r(x): \quad x < -3$$

que también está definida para el universo de todos los números reales. Las siguientes cuatro proposiciones son verdaderas:

Proposición:	$\forall x[p(x) \rightarrow (r(x) \vee q(x))]$
Contrapositiva:	$\forall x[\neg(r(x) \vee q(x)) \rightarrow \neg p(x)]$
Recíproca:	$\forall x[(r(x) \vee q(x)) \rightarrow p(x)]$
Inversa:	$\forall x[\neg p(x) \rightarrow \neg(r(x) \vee q(x))]$

En este caso (como la proposición y su recíproca son verdaderas), tenemos que la proposición

$$\forall x[p(x) \leftrightarrow (r(x) \vee q(x))]$$

es verdadera y también observamos que

$$\forall x\, p(x) \Leftrightarrow \forall x[r(x) \vee q(x)].$$

Ahora usaremos de nuevo los resultados de la tabla 2.21 para analizar el siguiente ejemplo.

Ejemplo 2.43

En este caso, el universo consta de todos los enteros y las proposiciones abiertas $r(x)$, $s(x)$ están dadas por

$$r(x): \quad 2x + 1 = 5$$
$$s(x): \quad x^2 = 9.$$

Vemos que la proposición $\exists x[r(x) \wedge s(x)]$ es falsa, ya que no existe un entero a tal que $2a + 1 = 5$ y $a^2 = 9$. No obstante, existe un entero b (= 2) tal que $2b + 1 = 5$ y existe un segundo entero c (= 3 o −3) tal que $c^2 = 9$. Por lo tanto, la proposición $\exists x\, r(x) \wedge \exists x\, s(x)$ es verdadera. En consecuencia, el cuantificador existencial $\exists x$ no distribuye sobre la conectiva lógica $\wedge$. Este contraejemplo es suficiente para mostrar que

$$\exists x\,[r(x) \wedge s(x)] \not\Leftrightarrow [\exists x\, r(x) \wedge \exists x\, s(x)],$$

donde $\not\Leftrightarrow$ se lee como "*no* es lógicamente equivalente a". El ejemplo también demuestra que

$$[\exists x\, r(x) \land \exists x\, s(x)] \not\Rightarrow \exists x\, [r(x) \land s(x)],$$

donde $\not\Rightarrow$ se lee como "*no* implica lógicamente". Así, la proposición

$$[\exists x\, r(x) \land \exists x\, s(x)] \rightarrow \exists x\, [r(x) \land s(x)]$$

no es una tautología.

Sin embargo, ¿qué podemos decir de la recíproca de una proposición cuantificada de esta forma? En este momento, presentamos un argumento general para *cualesquiera* proposiciones abiertas (arbitrarias) $p(x)$, $q(x)$ y *cualquier* universo prescrito (arbitrario).

Si analizamos la proposición

$$\exists x\, [p(x) \land q(x)] \rightarrow [\exists x\, p(x) \land \exists x\, q(x)],$$

vemos que, cuando la hipótesis $\exists x\, [p(x) \land q(x)]$ es verdadera, entonces existe al menos un elemento c en el iniverso para el que la proposición $p(c) \land q(c)$ es verdadera. Por la regla de simplificación conjuntiva (véase la Sec. 2.3), $[p(c) \land q(c)] \Rightarrow p(c)$. Como $p(c)$ es verdadera, obtenemos la proposición verdadera $\exists x\, p(x)$. De manera similar, obtenemos $\exists x\, q(x)$, otra proposición verdadera. Así, $\exists x\, p(x) \land \exists x\, q(x)$ es una proposición verdadera. Como $\exists x\, p(x) \land \exists x\, q(x)$ es verdadera siempre que $\exists x[p(x) \land q(x)]$ lo sea, esto implica que

$$\exists x\, [p(x) \land q(x)] \Rightarrow [\exists x\, p(x) \land \exists x\, q(x)].$$

Otros argumentos similares al del ejemplo 2.43 muestran las equivalencias lógicas y las implicaciones lógicas enumeradas en la tabla 2.22. Es posible obtener muchas otras equivalencias e implicaciones lógicas además de las que aparecen en esta tabla.

Nuestro siguiente ejemplo enumera algunas de éstas y demuestra cómo se pueden verificar dos de ellas.

Tabla 2.22
Equivalencias e implicaciones lógicas para proposiciones cuantificadas de una variable

Para un universo dado y cualesquiera proposiciones abiertas $p(x)$, $q(x)$ en la variable x,
$\exists x\, [p(x) \land q(x)] \Rightarrow [\exists x\, p(x) \land \exists x\, q(x)]$
$\exists x\, [p(x) \lor q(x)] \Leftrightarrow [\exists x\, p(x) \lor \exists x\, q(x)]$
$\forall x\, [p(x) \land q(x)] \Leftrightarrow [\forall x\, p(x) \land \forall x\, q(x)]$
$[\forall x\, p(x) \lor \forall x\, q(x)] \Rightarrow \forall x\, [p(x) \lor q(x)]$

Ejemplo 2.44

Sean $p(x)$, $q(x)$ y $r(x)$ proposiciones abiertas para un universo dado. Encontramos las siguientes equivalencias lógicas. (Son posibles muchas más.)

1) $\forall x\, [p(x) \land (q(x) \land r(x))] \Leftrightarrow \forall x\, [(p(x) \land q(x)) \land r(x)]$

Para mostrar que esta proposición es una equivalencia lógica procedemos de la manera siguiente:

Para cada a del universo, consideramos las *proposiciones* $p(a) \land (q(a) \land r(a))$ y $(p(a) \land q(a)) \land r(a)$. Por la ley asociativa de $\land$, tenemos que

$$p(a) \land (q(a) \land r(a)) \Leftrightarrow (p(a) \land q(a)) \land r(a).$$

En consecuencia, para las *proposiciones abiertas* $p(x) \wedge (q(x) \wedge r(x))$ y $(p(x) \wedge q(x)) \wedge r(x)$, se sigue que

$$\forall x\,[p(x) \wedge (q(x) \wedge r(x))] \Leftrightarrow \forall x\,[(p(x) \wedge q(x)) \wedge r(x)].$$

2) $\exists x\,[p(x) \rightarrow q(x)] \Leftrightarrow \exists x\,[\neg p(x) \vee q(x)]$
Para cada c del universo, se sigue del ejemplo 2.7 que

$$[p(c) \rightarrow q(c)] \Leftrightarrow [\neg p(c) \vee q(c)].$$

Por lo tanto, la proposición $\exists x[p(x) \rightarrow q(x)]$ es verdadera (respectivamente, falsa) si y sólo si la proposición $\exists x[\neg p(x) \vee q(x)]$ es verdadera (respectivamente, falsa), de modo que

$$\exists x\,[p(x) \rightarrow q(x)] \Leftrightarrow \exists x\,[\neg p(x) \vee q(x)].$$

3) Otras equivalencias lógicas que encontraremos con frecuencia son las siguientes.
a) $\forall x\, \neg\neg p(x) \Leftrightarrow \forall x\, p(x)$
b) $\forall x\, \neg[p(x) \wedge q(x)] \Leftrightarrow \forall x\,[\neg p(x) \vee \neg q(x)]$
c) $\forall x\, \neg[p(x) \vee q(x)] \Leftrightarrow \forall x\,[\neg p(x) \wedge \neg q(x)]$

4) Los resultados para las equivalencias lógicas de 3(a), (b) y (c) siguen siendo válidos cuando todos los cuantificadores universales se reemplazan por cuantificadores existenciales.

Los resultados de las tablas 2.21 y 2.22 y de los ejemplos 2.43 y 2.44 nos ayudarán ahora con un concepto muy importante. ¿Cómo negamos las proposiciones que implican una sola variable?

Consideremos la proposición $\forall x\, p(x)$. Su negación, $\neg[\forall x\, p(x)]$, puede enunciarse como "No ocurre que para todo x se cumpla $p(x)$". Ésta no es una observación muy útil, así que volveremos a analizar $\neg[\forall x\, p(x)]$. Cuando esta proposición es verdadera, entonces $\forall x\, p(x)$ es falsa, por lo que, para algún reemplazo a del universo, $\neg p(a)$ es verdadera y $\exists x\, \neg p(x)$ es verdadera. En forma recíproca, siempre que la proposición $\exists x\, \neg p(x)$ sea verdadera, sabemos que $\neg p(b)$ es verdadera para algún elemento b del universo. Por lo tanto, $\forall x\, p(x)$ es falsa y $\neg[\forall x\, p(x)]$ es verdadera. Así, la proposición $\neg[\forall x\, p(x)]$ es verdadera si y sólo si la proposición $\exists x\, \neg p(x)$ es verdadera. (Un análisis similar muestra también que $\neg[\forall x\, p(x)]$ es falsa si y sólo si $\exists x\, \neg p(x)$ es falsa.)

Estas observaciones conducen a la siguiente regla para negar la proposición $\forall x\, p(x)$:

$$\neg[\forall x\, p(x)] \Leftrightarrow \exists x\, \neg p(x).$$

De manera similar, la tabla 2.21 nos muestra que la proposición $\exists x\, p(x)$ es verdadera (falsa) precisamente cuando la proposición $\forall x\, \neg p(x)$ es falsa (verdadera). Esta observación da lugar a una regla para negar la proposición $\exists x\, p(x)$:

$$\neg[\exists x\, p(x)] \Leftrightarrow \forall x\, \neg p(x).$$

Estas dos reglas de negación, junto con otras dos que se siguen de ellas, aparecen en la tabla 2.23 como una referencia que le resultará de utilidad.

Tabla 2.23
Reglas para negar proposiciones con un cuantificador

$$\begin{array}{l} \neg[\forall x\, p(x)] \Leftrightarrow \exists x\, \neg p(x) \\ \neg[\exists x\, p(x)] \Leftrightarrow \forall x\, \neg p(x) \\ \neg[\forall x\, \neg p(x)] \Leftrightarrow \exists x\, \neg\neg p(x) \Leftrightarrow \exists x\, p(x) \\ \neg[\exists x\, \neg p(x)] \Leftrightarrow \forall x\, \neg\neg p(x) \Leftrightarrow \forall x\, p(x) \end{array}$$

Usaremos estas reglas para negar las proposiciones cuantificadas del siguiente ejemplo.

Ejemplo 2.45

Aquí encontramos la negación de dos proposiciones; el universo comprende todos los enteros.

1) Sean $p(x)$ y $q(x)$ dadas por

$p(x)$: x es impar.
$q(x)$: $x^2 - 1$ es par.

La proposición "Si x es impar, entonces $x^2 - 1$ es par" puede simbolizarse como $\forall x[p(x) \rightarrow q(x)]$. (Ésta es una proposición verdadera.)

La negación de esta proposición se determina de la manera siguiente:

$$\begin{aligned} &\neg[\forall x\,(p(x) \rightarrow q(x))] \Leftrightarrow \exists x\,[\neg(p(x) \rightarrow q(x))] \\ &\Leftrightarrow \exists x\,[\neg(\neg p(x) \vee q(x))] \Leftrightarrow \exists x\,[\neg\neg p(x) \wedge \neg q(x)] \\ &\Leftrightarrow \exists x\,[p(x) \wedge \neg q(x)] \end{aligned}$$

En palabras, la negación dice "Existe un entero x tal que x es impar y $x^2 - 1$ es impar (es decir, no es par)". (Esta proposición es falsa.)

2) Como en el ejemplo 2.43, sean $r(x)$ y $s(x)$ proposiciones abiertas.

$r(x)$: $2x + 1 = 5$.
$s(x)$: $x^2 = 9$.

La proposición cuantificada $\exists x[r(x) \wedge s(x)]$ es falsa, ya que asegura la existencia de al menos un entero a tal que $2a + 1 = 5 (a = 2)$ y $a^2 = 9$ ($a = 3$ o -3). En consecuencia, su negación

$$\neg[\exists x\,(r(x) \wedge s(x))] \Leftrightarrow \forall x\,[\neg(r(x) \wedge s(x))] \Leftrightarrow \forall x\,[\neg r(x) \vee \neg s(x)]$$

es verdadera. Esta negación puede expresarse como "Para cada entero x, $2x + 1 \neq 5$ o $x^2 \neq 9$".

Como una proposición matemática puede contener más de un cuantificador, a continuación presentaremos algunos ejemplos y haremos algunas observaciones acerca de estos tipos de proposiciones.

Ejemplo 2.46 Aquí tenemos dos variables reales x, y, por lo que el universo consiste en todos los números reales. La ley conmutativa para la suma de números reales puede expresarse como

$$\forall x\, \forall y\, (x + y = y + x).$$

Esta proposición también puede expresarse como

$$\forall y\, \forall x\, (x + y = y + x).$$

Así mismo, en el caso de la multiplicación de números reales, podemos escribir

$$\forall x\, \forall y\, (xy = yx) \qquad \text{o} \qquad \forall y\, \forall x\, (xy = yx).$$

Estos dos ejemplos indican el siguiente resultado general. Si $p(x, y)$ es una proposición abierta en las dos variables x, y (con el mismo universo prescrito para x y para y; o bien, un primer universo para x y otro para y), entonces la proposición $\forall x\, \forall y\, p(x, y)$ y $\forall y\, \forall x\, p(x, y)$ son lógicamente equivalentes; es decir, la proposición $\forall x\, \forall y\, p(x, y)$ es verdadera (respectivamente, falsa) si y sólo si la proposición $\forall y\, \forall x\, p(x, y)$ es verdadera (respectivamente, falsa). De aquí que

$$\forall x\, \forall y\, p(x,y) \Leftrightarrow \forall y\, \forall x\, p(x,y).$$

Ejemplo 2.47 Cuando analizamos la ley asociativa para la suma de números reales, encontramos que para cualesquiera números reales x, y, z,

$$x + (y + z) = (x + y) + z.$$

Al usar los cuantificadores universales (con el universo de todos los números reales), podemos expresar esto como

$$\forall x\, \forall y\, \forall z\, [x + (y + z) = (x + y) + z] \qquad \text{o}$$
$$\forall y\, \forall x\, \forall z\, [x + (y + z) = (x + y) + z].$$

De hecho, hay $3! = 6$ maneras de ordenar estos tres cuantificadores universales y todas estas proposiciones cuantificadas son lógicamente equivalentes entre sí.

Esto es cierto también para todas las proposiciones abiertas $p(x, y, z)$ y, para abreviar la notación, podríamos escribir, por ejemplo,

$$\forall x,y,z\; p(x,y,z) \Leftrightarrow \forall y,x,z\; p(x,y,z) \Leftrightarrow \forall x,z,y\; p(x,y,z),$$

para describir la equivalencia lógica para tres de las seis proposiciones.

Los resultados de los dos ejemplos anteriores aparecen con frecuencia en los textos de álgebra superior y en muchos libros de cálculo, sin cuantificadores (en palabras o en forma simbólica). Por lo tanto, si vemos, por ejemplo, la propiedad asociativa de la suma para los números reales, dada simplemente como

$$x + (y + z) = (x + y) + z,$$

10. Para cualquier $x \in \mathbf{R}, |x| = \sqrt{x^2} = \begin{Bmatrix} x, si\ x \geq 0 \\ -x, si\ x < 0 \end{Bmatrix}$, y $-|x| \leq x \leq |x|$. Por lo tanto, $|x + y|^2 = (x+y)^2 = x^2 + 2xy + y^2 \leq x^2 + x^2 + 2|x||y| + y^2 = |x|^2 + 2|x||y| + |y|^2 = (|x| + |y|)^2$, y $|x+y|^2 \leq (|x| + |y|)^2 \Rightarrow |x + y| \leq |x| + |y|$, para cualesquiera $x, y \in \mathbf{R}$.

Demuestre que si $n \in \mathbf{Z}^+$, $n \geq 2$ y $x_1, x_2, \ldots, x_n \in \mathbf{R}$, entonces

$$|x_1 + x_2 + \cdots + x_n| \leq |x_1| + |x_2| + \cdots + |x_n|.$$

11. Dé una definición recursiva de cada una de las siguientes sucesiones de enteros.
   a) $2, 4, 16, 256, \ldots$ (o, $2, 2^2, (2^2)^2, ((2^2)^2)^2, \ldots$)
   b) $2, 4, 16, 65536, \ldots$ (o, $2, 2^2, 2^{(2^2)}, 2^{(2^{(2^2)})}, \ldots$)

12. Defina la sucesión de números racionales $a_0, a_1, a_2, a_3, \ldots$, en forma recursiva como
   1) $a_0 = 0, a_1 = 1$; y
   2) Si $n \geq 2$, $a_n = \dfrac{a_{n-1} + (n-1)a_{n-2}}{n}$.

   Para todo $n \in \mathbf{N}$, demuestre que $0 \leq a_n \leq 1$.

13. Defina la sucesión de números enteros $a_0, a_1, a_2, a_3, \ldots$, en forma recursiva como
   1) $a_0 = 1$, $a_1 = 1$, $a_2 = 1$; y
   2) Si $n \geq 3$, $a_n = a_{n-1} + a_{n-3}$.

   Demuestre que $a_{n+2} \geq (\sqrt{2})^n$ para todo $n \geq 0$.

14. Para $n \geq 0$, sea F_n el n-ésimo número de Fibonacci. Demuestre que

$$F_0 + F_1 + F_2 + \cdots + F_n = \sum_{i=0}^{n} F_i = F_{n+2} - 1.$$

15. Si $n \in \mathbf{Z}^+$, demuestre que $\sum_{i=1}^{2n} F_i F_{i-1} = F_{2n}^2$.

16. Para $n \in \mathbf{Z}^+$, demuestre que

$$\sum_{i=0}^{2n} (-1)^{i+1} F_i = F_0 + F_1 - F_2 + F_3 - F_4 + \cdots - F_{2n} = -F_{2n-1} + 1.$$

17. Demuestre que para cualquier entero positivo n, $\sum_{i=1}^{2n} \dfrac{F_{i-1}}{2^i} = 1 - \dfrac{F_{n+2}}{2^n}$.

18. Como en el ejemplo 4.18, sean $L_0, L_1, L_2, \ldots$ los números de Lucas, donde (1) $L_0 = 2$, $L_1 = 1$; y (2) $L_{n+2} = L_{n+1} + L_n$ para $n \geq 0$. Si $n \geq 1$, demuestre que

$$L_1^2 + L_2^2 + L_3^2 + \cdots + L_n^2 = L_n L_{n+1} - 2.$$

19. Si $n \in \mathbf{N}$, demuestre que $5F_{n+2} = L_{n+4} - L_n$.

20. Dé una definición recursiva del conjunto de
   a) los enteros pares positivos.
   b) los enteros pares no negativos.

21. Uno de los usos más comunes de la definición recursiva de los conjuntos ocurre en la definición de las *fórmulas bien formadas* en distintos sistemas matemáticos. Por ejemplo, en el estudio de la lógica podemos definir las fórmulas bien formadas como sigue:
   1) Cualquier proposición primitiva p, la tautología T_0 y la contradicción F_0 son fórmulas bien formadas; y,
   2) Si p, q son fórmulas bien formadas, entonces también lo son
      i) $(\neg p)$
      ii) $(p \vee q)$
      iii) $(p \wedge q)$
      iv) $(p \rightarrow q)$
      v) $(p \leftrightarrow q)$

   Mediante esta definición recursiva vemos que, para las proposiciones primitivas p, q, r, la

La traducción de las proposiciones matemáticas (postulados, definiciones o teoremas) a su forma simbólica puede ser útil por dos importantes razones.

1) Hacerlo nos obliga a ser muy cuidadosos y precisos con el significado de las proposiciones, con el significado de frases como "Para todo x" y "Existe un x", y con el orden en que aparecen estas frases.

2) Después de traducir una proposición matemática a su forma simbólica, deberemos aplicar las reglas aprendidas para determinar proposiciones relacionadas con ella, como la negación o, en los casos adecuados, la contrapositiva, la recíproca o la inversa.

Nuestros últimos dos ejemplos ilustran esto y, al hacerlo, extienden los resultados de la tabla 2.23.

Ejemplo 2.50

Sean $p(x, y)$, $q(x, y)$ y $r(x, y)$ tres proposiciones abiertas, y las variables x, y se reemplazan de cierto(s) universo(s) prescrito(s). ¿Cuál es la negación de la siguiente proposición?

$$\forall x\, \exists y\, [(p(x,y) \wedge q(x,y)) \to r(x,y)]$$

Tenemos que

$$\begin{aligned}
&\neg[\forall x\, \exists y\, [(p(x,y) \wedge q(x,y)) \to r(x,y)]] \\
\Leftrightarrow\ &\exists x\, [\neg \exists y\, [(p(x,y) \wedge q(x,y)) \to r(x,y)]] \\
\Leftrightarrow\ &\exists x\, \forall y\, \neg[(p(x,y) \wedge q(x,y)) \to r(x,y)] \\
\Leftrightarrow\ &\exists x\, \forall y\, \neg[\neg[p(x,y) \wedge q(x,y)] \vee r(x,y)] \\
\Leftrightarrow\ &\exists x\, \forall y\, [\neg\neg[p(x,y) \wedge q(x,y)] \wedge \neg r(x,y)] \\
\Leftrightarrow\ &\exists x\, \forall y\, [(p(x,y) \wedge q(x,y)) \wedge \neg r(x,y)]
\end{aligned}$$

Supongamos que intentamos establecer la validez de un argumento (o un teorema matemático) para el cual

$$\forall x\, \exists y\, [(p(x,y) \wedge q(x,y)) \to r(x,y)]$$

sea la conclusión. Si intentamos demostrar el resultado por medio de la demostración por contradicción, deberemos suponer, como premisa adicional, la negación de esta conclusión. Por ello, nuestra premisa adicional sería la proposición

$$\exists x\, \forall y\, [(p(x,y) \wedge q(x,y)) \wedge \neg r(x,y)].$$

Por último, veamos cómo negar la definición de *límite*, un concepto fundamental en el cálculo.

Ejemplo 2.51

En cálculo, se estudian las propiedades de las funciones reales de una variable real. (Analizaremos las funciones en el capítulo 5 de este libro.) Entre estas propiedades está la existencia de límites; al respecto, encontramos la siguiente definición: $\lim_{x \to a} f(x) = L$ si (y sólo si) para cada $\epsilon > 0$ existe una $\delta > 0$ tal que, para cada x (donde $f(x)$ esté definida), $(0 < |x - a| < \delta) \to (|f(x) - L| < \epsilon)$.

Esto se puede expresar en forma simbólica como

$$\lim_{x\to a} f(x) = L \Leftrightarrow \forall\epsilon>0\ \exists\delta>0\ \forall x\,[(0<|x-a|<\delta)\to(|f(x)-L|<\epsilon)].$$

[En este caso, el universo comprende los números reales, y sólo consideramos aquellos valores reales de x para los que $f(x)$ esté definida. Además, los cuantificadores $\forall\epsilon>0$ y $\exists\delta>0$ contienen ahora alguna información restrictiva.] Entonces, para negar esta definición, haremos lo siguiente (hemos resumido algunos pasos):

$$\begin{aligned}
&\lim_{x\to a} f(x) \neq L\\
\Leftrightarrow\ &\neg[\forall\epsilon>0\quad \exists\delta>0\quad \forall x\,[(0<|x-a|<\delta)\to(|f(x)-L|<\epsilon)]]\\
\Leftrightarrow\ &\exists\epsilon>0\quad \forall\delta>0\quad \exists x\,\neg[(0<|x-a|<\delta)\to(|f(x)-L|<\epsilon)]\\
\Leftrightarrow\ &\exists\epsilon>0\quad \forall\delta>0\quad \exists x\,\neg[\neg(0<|x-a|<\delta)\vee(|f(x)-L|<\epsilon)]\\
\Leftrightarrow\ &\exists\epsilon>0\quad \forall\delta>0\quad \exists x\,[\neg\neg(0<|x-a|<\delta)\wedge\neg(|f(x)-L|<\epsilon)]\\
\Leftrightarrow\ &\exists\epsilon>0\quad \forall\delta>0\quad \exists x\,[(0<|x-a|<\delta)\wedge(|f(x)-L|\geq\epsilon)]
\end{aligned}$$

Traducido en palabras, tenemos que $\lim_{x\to a} f(x) \neq L$ si (y sólo si) existe un número (real) positivo ϵ tal que para cada número (real) positivo δ, existe un valor x [donde $f(x)$ está definida] tal que $0<|x-a|<\delta$ (es decir, $x\neq a$ y su distancia de a es menor que δ) pero $|f(x)-L|\geq\epsilon$ [es decir, el valor de $f(x)$ difiere del de L por al menos ϵ].

EJERCICIOS 2.4

1. Sean $p(x)$, $q(x)$ las siguientes proposiciones abiertas.

$$p(x):\quad x\leq 3 \qquad q(x):\quad x+1 \quad \text{es impar.}$$

Si el universo consta de todos los enteros, ¿cuáles son los valores de verdad de las siguientes proposiciones?

a) $p(1)$ **b)** $q(1)$ **c)** $\neg p(3)$
d) $q(6)$ **e)** $p(7)\vee q(7)$ **f)** $p(3)\wedge q(4)$
g) $p(4)$ **h)** $\neg(p(-4)\vee q(-3))$ **i)** $\neg p(-4)\wedge\neg q(-3)$

2. Sean $p(x)$, $q(x)$ las proposiciones definidas en el ejercicio 1. Sea $r(x)$ la proposición abierta "$x>0$". De nuevo, el universo está formado por todos los enteros.

a) Determine los valores de verdad de las siguientes proposiciones.

i) $p(3)\vee[q(3)\vee\neg r(3)]$ **ii)** $\neg p(3)\wedge[q(3)\vee r(3)]$
iii) $p(2)\to[q(2)\to r(2)]$ **iv)** $[p(2)\wedge q(2)]\to r(2)$
v) $p(0)\to[\neg q(-1)\leftrightarrow r(1)]$ **vi)** $[p(-1)\leftrightarrow q(-2)]\leftrightarrow r(-3)$

b) Determine todos los valores de x para los cuales $[p(x)\wedge q(x)]\wedge r(x)$ da como resultado una proposición verdadera.

c) Encuentre los cinco enteros positivos x más pequeños para los que la proposición abierta $p(x)\to[\neg q(x)\wedge r(x)]$ da como resultado una proposición verdadera.

3. Sea $p(x)$ la proposición abierta "$x^2=2x$", donde el universo comprende todos los enteros. Determine si cada una de las siguientes proposiciones es verdadera o falsa.

a) $p(0)$ **b)** $p(1)$ **c)** $p(2)$
d) $p(-2)$ **e)** $\exists x\,p(x)$ **f)** $\forall x\,p(x)$

4. Considere el universo de todos los polígonos con tres o cuatro lados y defina las siguientes proposiciones abiertas para este universo.

$a(x)$: todos los ángulos internos de x son iguales

$e(x)$: x es un triángulo equilátero

$h(x)$: todos los lados de x son iguales

$i(x)$: x es un triángulo isósceles

$p(x)$: x tiene un ángulo interno mayor que 180°

$q(x)$: x es un cuadrilátero

$r(x)$: x es un rectángulo

$s(x)$: x es un cuadrado

$t(x)$: x es un triángulo

Traduzca cada una de las siguientes proposiciones en una frase en español, y determine si la proposición es verdadera o falsa.

a) $\forall x[q(x) \veebar t(x)]$
b) $\forall x[i(x) \rightarrow e(x)]$
c) $\exists x[t(x) \wedge p(x)]$
d) $\forall x[a(x) \rightarrow e(x)]$
e) $\forall x[(a(x) \wedge t(x)) \leftrightarrow e(x)]$
f) $\exists x[q(x) \wedge \neg r(x)]$
g) $\exists x[r(x) \wedge \neg s(x)]$
h) $\forall x[h(x) \rightarrow e(x)]$
i) $\forall x[(h(x) \wedge q(x)) \rightarrow s(x)]$
j) $\exists x[q(x) \wedge p(x)]$
k) $\forall x[t(x) \rightarrow \neg p(x)]$
l) $\forall x[a(x) \rightarrow (e(x) \veebar r(x))]$
m) $\forall x[s(x) \leftrightarrow (a(x) \wedge h(x))]$
n) $\forall x[t(x) \rightarrow (a(x) \leftrightarrow h(x))]$

5. El grupo de mecánica cuántica del Profesor Olmedo está formado por 29 estudiantes, de los cuales exactamente

1) tres estudiantes de física están en su penúltimo año;
2) dos estudiantes de ingeniería eléctrica están en su penúltimo año;
3) cuatro estudiantes de matemáticas están en su penúltimo año;
4) doce estudiantes de física están en su último año;
5) cuatro estudiantes de ingeniería eléctrica están en su último año;
6) dos estudiantes de ingeniería eléctrica son de posgrado; y
7) dos estudiantes de matemáticas son de posgrado.

Considere las siguientes proposiciones abiertas.

$c(x)$: El estudiante x está en la clase (es decir, la clase de mecánica cuántica del profesor Olmedo ya descrita).

$j(x)$: El estudiante x está en su penúltimo año.

$s(x)$: El estudiante x está en su último año.

$g(x)$: El estudiante x es de posgrado.

$p(x)$: El estudiante x está en la especialidad de física.

$e(x)$: El estudiante x está en la especialidad de ingeniería eléctrica.

$m(x)$: El estudiante x está en la especialidad de matemáticas.

Escriba cada una de las siguientes proposiciones en términos de cuantificadores y las proposiciones abiertas $c(x)$, $j(x)$, $s(x)$, $g(x)$, $p(x)$, $e(x)$ y $m(x)$, y determine cuáles de las siguientes proposiciones son verdaderas o falsas. En este caso, el universo está formado por los 12,500 estudiantes inscritos en la universidad donde imparte clases el profesor Olmedo. Además, en esta universidad cada estudiante tiene solamente una especialidad.

a) En la clase existe un estudiante de matemáticas que está en su penúltimo año.
b) En la clase existe un estudiante del último año que no está en la especialidad de matemáticas.

c) Todo estudiante de la clase está en la especialidad de matemáticas o física.
d) Ningún estudiante de posgrado en la clase está en la especialidad de física.
e) En la clase, todo estudiante del último año está en la especialidad de física o de ingeniería eléctrica.
f) Algún estudiante de posgrado de esta universidad no está en la especialidad de matemáticas ni en la de física.

6. Sean $p(x, y)$, $q(x, y)$ las siguientes proposiciones abiertas:

$$p(x, y):\ x^2 \geq y \qquad q(x, y):\ x + 2 < y$$

Si el universo para cada x, y está formado por todos los números reales, determine el valor de verdad de cada una de las siguientes proposiciones.

a) $p(2, 4)$ b) $q(1, \pi)$ c) $p(-3, 8) \wedge q(1, 3)$
d) $p(\frac{1}{2}, \frac{1}{3}) \vee \neg q(-2, -3)$ e) $p(2, 2) \rightarrow q(1, 1)$ f) $p(1, 2) \leftrightarrow \neg q(1, 2)$

7. Para el universo de los enteros, sean $p(x)$, $q(x)$, $r(x)$, $s(x)$ y $t(x)$ las siguientes proposiciones abiertas.

$p(x)$: $x > 0$
$q(x)$: x es par
$r(x)$: x es un cuadrado perfecto
$s(x)$: x es (exactamente) divisible entre 4
$t(x)$: x es (exactamente) divisible entre 5

a) Escriba las siguientes proposiciones en forma simbólica.
  i) Al menos un entero es par.
  ii) Existe al menos un entero positivo que es par.
  iii) Si x es par, entonces x no es divisible entre 5.
  iv) Ningún entero par es divisible entre 5.
  v) Existe al menos un entero par divisible entre 5.
  vi) Si x es par y x es un cuadrado perfecto, entonces x es divisible entre 4.
b) Determine si cada una de las seis proposiciones de la parte (a) es verdadera o falsa. Para cada proposición falsa, dé un contraejemplo.
c) Exprese en palabras cada una de las siguientes representaciones simbólicas.
  i) $\forall x\, [r(x) \rightarrow p(x)]$ ii) $\forall x\, [s(x) \rightarrow q(x)]$
  iii) $\forall x\, [s(x) \rightarrow \neg t(x)]$ iv) $\exists x\, [s(x) \wedge \neg r(x)]$
  v) $\forall x\, [\neg r(x) \vee \neg q(x) \vee s(x)]$
d) Proporcione un contraejemplo para cada proposición falsa de la parte (c).

8. Sean $p(x)$, $q(x)$ y $r(x)$ las siguientes proposiciones abiertas.

$p(x)$: $x^2 - 8x + 15 = 0$
$q(x)$: x es impar
$r(x)$: $x > 0$

Para el universo de los enteros, determine la verdad o falsedad de cada una de las siguientes proposiciones. Si una proposición es falsa, dé un contraejemplo.

a) $\forall x\, [p(x) \rightarrow q(x)]$ b) $\forall x\, [q(x) \rightarrow p(x)]$
c) $\exists x\, [p(x) \rightarrow q(x)]$ d) $\exists x\, [q(x) \rightarrow p(x)]$
e) $\exists x\, [r(x) \wedge p(x)]$ f) $\forall x\, [p(x) \rightarrow r(x)]$
g) $\exists x\, [r(x) \rightarrow p(x)]$ h) $\forall x\, [\neg q(x) \rightarrow \neg p(x)]$
i) $\exists x\, [p(x) \rightarrow (q(x) \wedge r(x))]$ j) $\forall x\, [(p(x) \vee q(x)) \rightarrow r(x)]$

9. Sean $p(x)$, $q(x)$ y $r(x)$ las siguientes proposiciones abiertas.

$p(x)$: $x^2 - 7x + 10 = 0$
$q(x)$: $x^2 - 2x - 3 = 0$
$r(x)$: $x < 0$

a) Determine la verdad o falsedad de las siguientes proposiciones, en las que el universo está formado por todos los enteros. Si una proposición es falsa, dé un contraejemplo o explicación.

i) $\forall x\,[p(x) \rightarrow \neg r(x)]$ ii) $\forall x[q(x) \rightarrow r(x)]$

iii) $\exists x\,[q(x) \rightarrow r(x)]$ iv) $\exists x\,[p(x) \rightarrow r(x)]$

b) Determine las respuestas de la parte (a) cuando el universo consta de todos los enteros positivos.

c) Determine las respuestas de la parte (a) cuando el universo consta únicamente de los enteros 2 y 5.

10. Para el siguiente segmento de programa en Pascal, m y n son variables enteras. La variable A es una tabla de dos dimensiones A [1,1], A [1,2], . . . , A [1,20], . . . , A [10,1], . . . , A [10,20], con 10 filas (indexadas de 1 a 10) y 20 columnas (indexadas de 1 a 20).

```
For m := 1 to 10 do
    For n := 1 to 20 do
        A[m,n] := m + 3*n;
```

Escriba las siguientes proposiciones en forma simbólica. (El universo de la variable m contiene únicamente los enteros del 1 al 10 inclusive; para n, el universo consta de los enteros del 1 al 20 inclusive.)

a) Todas las entradas de A son positivas.
b) Todas las entradas de A son positivas y menores o iguales que 70.
c) Algunas de las entradas son mayores que 60.
d) Las entradas de cualquier fila de A tienen un orden (estrictamente) ascendente.
e) Las entradas de cualquier columna de A tienen un orden (estrictamente) ascendente.
f) Las entradas de las primeras tres filas de A son distintas.
g) Las entradas de cualesquiera tres filas consecutivas de A son distintas.
h) Para dos filas consecutivas cualesquiera de A, la suma de las entradas de la segunda fila (aquella que tiene el índice de fila más grande) es 20 unidades mayor que la suma de las entradas de la fila anterior.

11. Identifique las variables acotadas y las variables libres de cada una de las siguientes expresiones (o proposiciones). En la parte (a), el universo comprende todos los números reales, excepto . . . $-5\pi/2, -3\pi/2, -\pi/2, \pi/2, 3\pi/2, 5\pi/2, \ldots$ En los demás casos, el universo está formado por todos los números reales.

a) $\forall x\ \forall y[\sec^2 x - \sec^2 y = \tan^2 x - \tan^2 y]$
b) $\forall y \exists z[\cos(x + y) = \operatorname{sen}(z - x)]$
c) $\exists x\ \exists y[x^2 - y^2 = z]$
d) $\exists x[xy = y]$

12. a) Sea $p(x, y)$ la proposición abierta "x divide a y"; el universo para cada una de las variables x, y es el conjunto de todos los enteros. (En este contexto, "divide" significa "divide exactamente".) Determine el valor de verdad de cada una de las proposiciones siguientes; si una proposición cuantificada es falsa, proporcione una explicación o un contraejemplo.

i) $p(3, 7)$ ii) $p(7, 3)$ iii) $p(3, 27)$

iv) $\forall y\, p(1, y)$ v) $\forall x\, p(x, 0)$ vi) $\forall x\, p(x, x)$

vii) $\forall y\ \exists x\, p(x, y)$ viii) $\exists y\ \forall x\, p(x, y)$

ix) $\forall x\ \forall y[(p(x, y) \wedge p(y, x)) \rightarrow (x = y)]$

x) $\forall x\ \forall y\ \forall z[(p(x, y) \wedge p(y, z)) \rightarrow p(x, z)]$

b) Determine cuáles de las 10 proposiciones de la parte (a) cambiarán su valor de verdad si el universo de cada una de las variables x, y se restringe solamente a los enteros positivos.

c) Determine el valor de verdad de cada una de las siguientes proposiciones. Si la proposición es falsa, proporcione una explicación o contraejemplo. [El universo para cada x, y es como en la parte (b).]

i) $\forall x\ \exists y\, p(x, y)$ ii) $\forall y\ \exists x\, p(x, y)$

iii) $\exists x\ \forall y\, p(x, y)$ iv) $\exists y\ \forall x\, p(x, y)$

13. Suponga que $p(x, y)$ es una proposición abierta en la que el universo para cada x, y está formado solamente por tres enteros: 2, 3 y 5. Entonces, la proposición cuantificada $\exists y\, p(2, y)$ es lógicamente equivalente a $p(2, 2) \vee p(2, 3) \vee p(2, 5)$. La proposición cuantificada $\exists x\, \forall y\, p(x, y)$ es lógicamente equivalente a $[p(2, 2) \wedge p(2, 3) \wedge p(2, 5)] \vee [p(3, 2) \wedge p(3, 3) \wedge p(3, 5)] \vee [p(5, 2) \wedge p(5, 3) \wedge p(5, 5)]$. Use conjunciones o disyunciones para expresar las siguientes proposiciones sin cuantificadores.

a) $\exists x\, p(x, 5)$ **b)** $\forall x\, p(x, 3)$ **c)** $\forall y\, p(2, y)$
d) $\exists x\, \exists y\, p(x, y)$ **e)** $\forall x \forall y\, p(x, y)$ **f)** $\forall y\, \exists x\, p(x, y)$

14. Sean $p(n)$, $q(n)$ las proposiciones abiertas

$$p(n):\quad n \text{ es impar;} \qquad q(n):\quad n^2 \text{ es impar}$$

en el universo de los enteros. ¿Cuáles de las siguientes proposiciones son lógicamente equivalentes entre sí?

a) Si el cuadrado de cualquier entero es impar, entonces el entero es impar.
b) $\forall n\, [p(n)$ es necesaria para $q(n)]$
c) El cuadrado de cualquier entero impar es impar.
d) Existen algunos enteros cuyos cuadrados son impares.
e) Dado cualquier entero cuyo cuadrado sea impar, ese entero también es impar.
f) $\forall n[\neg p(n) \rightarrow \neg q(n)]$
g) Todo entero con un cuadrado impar es impar.
h) Todo entero con un cuadrado par es par.
i) $\forall n[p(n)$ es suficiente para $q(n)]$

15. Para cada una de las siguientes parejas de proposiciones, determine si la negación propuesta es la correcta. Si es correcta, determine cuál es verdadera: la proposición original o la negación propuesta. Si la negación propuesta es incorrecta, escriba una versión corregida de la negación y determine a continuación si la proposición original o la versión corregida de la negación es verdadera.

a) Proposición: Para todos los números reales x, y, si $x^2 > y^2$, entonces $x > y$.
Negación propuesta: Existen números reales x, y tales que $x^2 > y^2$ pero $x \leq y$.

b) Proposición: Existen números reales x, y tales que x y y son racionales pero $x + y$ es irracional.
Negación propuesta: Para todos los números reales x, y, si $x + y$ es racional, entonces x y y son racionales.

c) Proposición: Para todo número real x, si x no es 0, entonces x tiene un inverso mutiplicativo.
Negación propuesta: Existe un número real distinto de cero que no tiene un inverso multiplicativo.

d) Proposición: Existen enteros impares cuyo producto es impar.
Negación propuesta: El producto de cualesquiera dos enteros impares es impar.

e) Proposición: El cuadrado de todo número racional es racional.
Negación propuesta: Existe un número real x tal que si x es irracional, entonces x^2 es irracional.

16. Escriba la negación de cada una de las siguientes proposiciones como una frase en español sin notación simbólica. (En este caso, el universo consta de todos los estudiantes de una universidad donde imparte clases el profesor Linares.)

a) Todo estudiante del grupo de Pascal del profesor Linares está en la especialidad de ciencias de la computación o matemáticas.

b) Al menos un estudiante del grupo de Pascal del profesor Linares está en la especialidad de historia.

c) Un estudiante del grupo de Pascal del profesor Linares ha leído todos sus artículos de investigación sobre estructura de datos.

17. Escriba la negación de cada una de las siguientes proposiciones verdaderas. Para las partes (a), (b) y (c), el universo consta de todos los enteros; para las partes (d) y (e), el universo abarca todos los números reales.

a) Para todo entero n, si n no es (exactamente) divisible entre 2, entonces n es impar.
b) Si el cuadrado de un entero es impar, entonces el entero es impar.
c) Si k, m, n son enteros tales que $k - m$ y $m - n$ son impares, entonces $k - n$ es par.
d) Si x es un número real tal que $x^2 > 16$, entonces $x < -4$ o $x > 4$.
e) Para todo número real x, si $|x - 3| < 7$, entonces $-4 < x < 10$.

18. Niegue y simplifique lo siguiente.

a) $\exists x\,[p(x) \vee q(x)]$
b) $\forall x\,[p(x) \wedge \neg q(x)]$
c) $\forall x\,[p(x) \rightarrow q(x)]$
d) $\exists x\,[(p(x) \vee q(x)) \rightarrow r(x)]$

19. Para cada una de las siguientes proposiciones (y universos) enuncie la recíproca, la inversa y la contrapositiva. Determine también el valor de verdad de cada proposición dada, así como los valores de verdad de su recíproca, su inversa y su contrapositiva. (En este caso, "divide" significa "divide exactamente" y "divisible" significa "divisible exactamente".)

a) [El universo comprende todos los enteros positivos.]
Si $m > n$, entonces $m^2 > n^2$.
b) [El universo comprende todos los enteros.]
Si $a > b$, entonces $a^2 > b^2$.
c) [El universo comprende todos los enteros.]
Si m divide a n y n divide a p, entonces m divide a p.
d) [El universo comprende todos los números reales.]
$\forall x[(x > 3) \rightarrow (x^2 > 9)]$
e) [El universo comprende todos los enteros.]
Todo entero que es divisible entre 12 también es divisible entre 4.
f) [El universo comprende todos los números reales.]
Para todo número real x, si $x^2 + 4x - 21 > 0$, entonces $x > 3$ o $x < -7$.

20. Vuelva a escribir cada una de las siguientes proposiciones (con los universos dados) como una implicación de la forma si–entonces. Escriba después la recíproca, la inversa y la contrapositiva de la implicación. Para cada resultado de las partes (a) y (d), dé el valor de verdad de la implicación y los valores de verdad de la recíproca, la inversa y la contrapositiva. (En la parte (a), "divisibilidad" significa tener un resto 0.)

a) [El universo comprende todos los enteros positivos.]
La divisibilidad entre 21 es una condición suficiente para la divisibilidad entre 7.
b) [El universo abarca todos los residentes actuales de Estados Unidos.]
Contar con un paquete considerable de acciones en la bolsa es una condición necesaria para que una persona sea feliz.
c) [El universo comprende todas las serpientes que reptan actualmente en las selvas de Asia.]
El hecho de ser una cobra es una condición suficiente para que una serpiente sea peligrosa.
d) [El universo está formado por todos los números complejos.]
Para cada número complejo z, el hecho de que z sea real es necesario para que z^2 sea real.

21. Para las siguientes proposiciones, el universo abarca todos los enteros distintos de cero. Determine el valor de verdad de cada proposición.

a) $\exists x\, \exists y\, [xy = 1]$
b) $\exists x\, \forall y\, [xy = 1]$
c) $\forall x\, \exists y\, [xy = 1]$
d) $\forall x\, \forall y\, [\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x = \operatorname{sen}^2 y + \cos^2 y]$
e) $\exists x\, \exists y\, [(2x + y = 5) \wedge (x - 3y = -8)]$
f) $\exists x\, \exists y\, [(3x - y = 7) \wedge (2x + 4y = 3)]$

22. Repita el ejercicio 21 para el universo de todos los números reales diferentes de cero.

23. En la aritmética de los números reales, existe un número real, 0, llamado el neutro de la suma, puesto que $a + 0 = 0 + a = a$ para cada número real a. Esto se puede expresar en forma simbólica como

$$\exists z\ \forall a\,[a + z = z + a = a].$$

(En este caso, el universo abarca todos los números reales.)

a) Además de la existencia de un neutro aditivo, existen los inversos aditivos. Escriba una proposición cuantificada que exprese "Todo número real tiene un inverso aditivo". (No se debe utilizar el signo menos en la proposición.)

b) Escriba una proposición cuantificada que trate de la existencia de un neutro multiplicativo para la aritmética de los números reales.

c) Escriba una proposición cuantificada relativa a la existencia de inversos multiplicativos para los números reales diferentes de cero. (No se debe usar el exponente -1 en la proposición.)

d) ¿Cambian de alguna forma los resultados de las partes (b) y (c) cuando el universo se restringe a los enteros?

24. Considere la proposición cuantificada $\forall x\ \exists y[x + y = 17]$. Determine si esta proposición es verdadera o falsa para cada uno de los siguientes universos: (a) los enteros; (b) los enteros positivos; (c) los enteros para x, los enteros positivos para y; (d) los enteros positivos para x, los enteros para y.

25. En el caso de las siguientes proposiciones, el universo para cualquiera de sus variables está formado por los números reales. En cada caso, niegue y simplifique la proposición dada.

a) $\forall x\ \forall y\ [(x > y) \rightarrow (x - y > 0)]$
b) $\forall x\ \forall y\ [[(x > 0) \wedge (y = \log_{10} x)] \rightarrow (x = 10^y)]$
c) $\forall x\ \forall y\ [(x < y) \rightarrow \exists z\ (x < z < y)]$
d) $\forall x\ \forall y\ [(|x| = |y|) \rightarrow (y = \pm x)]$
e) $[\forall x\ \forall y\ ((x > 0) \wedge (y > 0))] \rightarrow [\exists z\ (xz > y)]$

26. En matemáticas, con frecuencia se desea afirmar no sólo la existencia de un objeto a (ya sea un número, un triángulo, etcétera) que satisfaga una proposición abierta $p(x)$, sino también el hecho de que este objeto a es el único para el que se satisface $p(x)$ (es verdadera). Entonces, el objeto es *único*. Esto se denota con el cuantificador $\exists! x\ p(x)$, que se lee como "Existe un único x". Este cuantificador puede definirse en términos de los cuantificadores existencial y universal:

$$[\exists! x\ p(x)] \Leftrightarrow \{[\exists x\ p(x)] \wedge [\forall x\ \forall y\ [(p(x) \wedge p(y)) \rightarrow (x = y)]]\}$$

Esta definición indica que "una demostración de existencia y unicidad" requiere "una demostración de la existencia", que con frecuencia se realiza construyendo un ejemplo que satisfaga $p(x)$, y "una demostración de la unicidad".

a) Escriba lo siguiente en forma simbólica, usando este nuevo cuantificador. (El universo consta de todos los números reales.)

i) Todo número real diferente de cero tiene un único inverso multiplicativo.
ii) La suma de dos números reales cualesquiera es única.
iii) Para cada coordenada x, la coordenada y correspondiente en la recta $y = 3x + 7$ es única.

b) Sea $p(x, y)$ la proposición abierta "$y = -2x$"; el universo está formado por todos los enteros. Determine cuáles de las proposiciones siguientes son verdaderas o falsas.

i) $[\forall x\ \exists! y\ p(x,y)] \rightarrow [\exists! y\ \forall x\ p(x,y)]$
ii) $[\exists! y\ \forall x\ p(x,y)] \rightarrow [\forall x\ \exists! y\ p(x,y)]$

c) Responda la parte (b) para la proposición abierta $p(x, y)$: $x + y$ es par.

d) Considere la proposición $\exists! x\ (x > 1)$. Dé un ejemplo de un universo en el que p sea verdadera y un ejemplo de otro universo donde p sea falsa.

27. En cálculo, la definición del límite L de una sucesión de números reales $r_1, r_2, r_3, \ldots$ puede darse como

$$\lim_{n\to\infty} r_n = L$$

si (y sólo si) para cada $\epsilon > 0$ existe un entero positivo k tal que para todo entero n, si $n > k$, entonces $|r_n - L| < \epsilon$.

En forma simbólica, esto puede expresarse como

$$\lim_{n\to\infty} r_n = L \Leftrightarrow \forall\epsilon > 0 \quad \exists k > 0 \quad \forall n[(n > k) \rightarrow |r_n - L| < \epsilon].$$

Exprese $\lim_{n\to\infty} r_n \neq L$ en forma simbólica.

2.5 Cuantificadores, definiciones y la demostración de teoremas

En esta sección combinaremos algunas de las ideas que acabamos de estudiar en las dos anteriores. Aunque la sección 2.3 presentó reglas y métodos para establecer la validez de un argumento, por desgracia los argumentos presentados parecen tener poco que ver con algo matemático. [Las raras excepciones están en el ejemplo 2.24 y el argumento erróneo en la parte (b) del material anterior al ejemplo 2.27.] La mayoría de los argumentos trataba de algunos individuos y predicamentos que estaban a punto de surgir.

Pero una vez aprendidas algunas de las propiedades de los cuantificadores y de las proposiciones cuantificadas, estamos en mejores condiciones para manejar argumentos que nos ayudarán a demostrar teoremas matemáticos. Sin embargo, antes de pasar a los teoremas, examinaremos la forma usual en que aparecen las definiciones matemáticas en las obras científicas.

Después del ejemplo 2.3 de la sección 2.1, había un análisis relativo a la forma en que una implicación podría ser utilizada en vez de una bicondicional en una conversación cotidiana. Pero se hizo notar que en las obras científicas debíamos evitar las situaciones en que pudiera surgir una interpretación ambigua; en particular, no debería usarse una implicación cuando se necesitara una bicondicional. Sin embargo, hay una excepción fundamental a esta regla y se refiere a la forma en que las definiciones matemáticas se presentan comúnmente en los libros de texto de matemáticas y otras obras de carácter científico. El ejemplo 2.52 demuestra esta excepción.

Ejemplo 2.52

a) Comencemos con el universo de todos los cuadriláteros que hay en el plano e intentemos identificar los que se denominan rectángulos.

Una persona podría decir que

"Si un cuadrilátero es un rectángulo entonces tiene cuatro ángulos iguales".

Otro podría identificar estos cuadriláteros particulares señalando que

"Si un cuadrilátero tiene cuatro ángulos iguales, entonces es un rectángulo".

(En este caso, ambas personas están haciendo proposiciones cuantificadas en forma implícita, con un cuantificador universal.)

Dadas las proposiciones abiertas

$p(x)$: x es un rectángulo $\qquad$ $q(x)$: x tiene cuatro ángulos iguales,

podemos expresar lo que dice la primera persona como

$$\forall x[p(x) \rightarrow q(x)],$$

mientras que para la segunda escribiríamos

$$\forall x[q(x) \rightarrow p(x)].$$

Así, ¿cuál de las proposiciones (cuantificadas) anteriores identifica o define a un rectángulo? Tal vez nos parezca que ambas lo hacen. Pero ¿cómo puede ser, si una proposición es la recíproca de la otra y, en general, la recíproca de una implicación *no* es lógicamente equivalente a la implicación?

En este caso, el lector debe tener en cuenta lo que se pretendía, no sólo lo que dijo cada una de las dos personas, o las expresiones simbólicas que hemos escrito para representar estas proposiciones. En esta situación, cada persona está usando una implicación con el sentido de una bicondicional. Ambas pretenden decir (aunque no lo establecen)

$$\forall x[p(x) \leftrightarrow q(x)]$$

es decir, cada una de ellas está diciendo realmente que

"Un cuadrilátero es un rectángulo *si y sólo si* tiene cuatro ángulos iguales".

b) Dentro del universo de los enteros, podemos distinguir los enteros pares por medio de cierta propiedad y de este modo definirlos como sigue:

Para cada entero n, decimos que n es par si es divisible entre 2.

(La expresión "divisible entre 2" significa "exactamente divisible entre 2"; es decir, no hay resto al dividir el dividendo n entre el divisor 2.)

Si consideramos las proposiciones abiertas

$p(n)$: n es un entero par $\qquad$ $q(n)$: n es divisible entre 2,

entonces *parece* que la definición anterior se podría escribir en forma simbólica como

$$\forall n[q(n) \rightarrow p(n)].$$

Después de todo, la proposición cuantificada dada (en la definición anterior) es una implicación. Sin embargo, esta situación es muy similar a la de la parte (a). Lo que parece establecerse no es lo que se pretendía. La intención es que el lector interprete la definición dada como

$$\forall n[q(n) \leftrightarrow p(n)],$$

es decir,

"Para todo entero n, decimos que n es par *si y sólo si* n es divisible entre 2".

(Nótese que la proposición abierta "n es divisible entre 2" también puede expresarse mediante la proposición *abierta* "$n = 2k$, para algún entero k". No debe confundirnos el cuantificador "para algún entero k", ya que la expresión $\exists k[n = 2k]$ sigue siendo una proposición abierta en la que n es una variable libre.)

Hasta ahora hemos visto el uso de los cuantificadores en los enunciados de las definiciones matemáticas, y que la forma tradicional que adopta dicha definición es la de una implicación. Sin embargo, tenga cuidado y recuerde: *solamente en las definiciones*, una implicación puede leerse (equivocadamente) e interpretarse correctamente como una bicondicional.

Observe ahora la definición del concepto de límite en el ejemplo 2.51. Ahí escribimos "si (y sólo si)" ya que queríamos que el lector conociera nuestra intención. Ahora tenemos la libertad de reemplazar "si (y sólo si)" por un sencillo "si".

Una vez desarrollado nuestro análisis acerca de la naturaleza de las definiciones matemáticas, continuaremos ahora con el estudio de algunos argumentos relacionados con las proposiciones cuantificadas.

Ejemplo 2.53 Supongamos que partimos del universo que abarca solamente los 13 enteros 2, 4, 6, 8, . . . , 24, 26. Entonces podemos establecer la proposición:

Para todo n (lo que significa $n = 2, 4, 6, \ldots, 26$),
podemos escribir n como la suma de cuando mucho tres cuadrados perfectos.

Los resultados de la tabla 2.24 proporcionan una verificación caso por caso que muestra que la proposición (cuantificada) dada es verdadera. (Podríamos llamar teorema a esta proposición.)

Tabla 2.24

$2 = 1 + 1$ $4 = 4$ $6 = 4 + 1 + 1$ $8 = 4 + 4$	$10 = 9 + 1$ $12 = 4 + 4 + 4$ $14 = 9 + 4 + 1$ $16 = 16$ $18 = 16 + 1 + 1$	$20 = 16 + 4$ $22 = 9 + 9 + 4$ $24 = 16 + 4 + 4$ $26 = 25 + 1$

Esta lista exhaustiva es un ejemplo de una demostración que usa la técnica que llamamos, apropiadamente, *método exhaustivo*. El uso de este método es razonable cuando trabajamos con un universo pequeño. Si nos enfrentamos a una situación en la que el universo es grande pero dentro del alcance de un computador disponible para nosotros, entonces podríamos escribir un programa que verifique todos los casos individuales para no cansarnos con este método de exhaustivo.

(Observe que, para algunos casos de la tabla 2.24, se puede dar más de una respuesta. Por ejemplo, podríamos escribir $18 = 9 + 9$ y $26 = 16 + 9 + 1$. Pero esto está bien. Se nos ha dicho que cada entero positivo par menor o igual que 26 puede escribirse como la suma de uno, dos o tres cuadrados perfectos. *No* se nos ha dicho que tal representación tenga que ser única, por lo que puede haber más de una posibilidad. Lo que teníamos que verificar en cada caso era que hubiera al menos una posibilidad.)

En el ejemplo anterior mencionamos la palabra *teorema*. También en el capítulo 1 encontramos este término; por ejemplo, en resultados como el teorema del binomio y el teorema multinomial, donde presentamos algunos tipos de problemas de enumeración. Para no ser muy técnicos, consideraremos a los *teoremas* como proposiciones de interés matemático, que se sabe son verdaderas. A veces el término *teorema* se usa únicamente para describir resultados importantes que tienen muchas y variadas consecuencias. Algunas de estas consecuencias, que se siguen inmediatamente de un teorema, se denominan *corolarios* (como en el caso del corolario 1.1 de la sección 1.3). Sin embargo, en este texto, no utilizaremos de ningún modo especial la palabra teorema.

El ejemplo 2.53 es un buen punto de partida para analizar la demostración de una proposición cuantificada. Por desgracia, a menudo un gran número de proposiciones y teoremas matemáticos tratan de universos que no se prestan al uso del método exhaustivo.

Por ejemplo, si queremos establecer o demostrar un resultado para los enteros o para los números reales, no podemos utilizar un método caso por caso como el del ejemplo 2.53. ¿Qué podemos hacer entonces?

Empezaremos por considerar la siguiente regla.

La regla de la especificación universal: Si una proposición abierta es verdadera para *todos* los reemplazos con los miembros de un universo dado, entonces esa proposición abierta es verdadera para *cada* miembro *específico* de ese universo. (De forma un poco más simbólica, si $p(x)$ es una proposición abierta para un universo dado y si $\forall x\; p(x)$ es verdadero, entonces $p(a)$ es verdadera para cada a del universo.)

Esta regla indica que la verdad de una proposición abierta en un caso particular se sigue (como caso particular) de la verdad más general (para todo el universo) de esa proposición abierta cuantificada universalmente. Los siguientes ejemplos nos mostrarán cómo aplicar esta idea.

Ejemplo 2.54

a) Para el universo de todas las personas, consideremos las proposiciones abiertas

$m(x)$: x es un profesor de matemáticas $\qquad$ $c(x)$: x ha estudiado cálculo.

Ahora consideremos el siguiente argumento.

Todos los profesores de matemáticas han estudiado cálculo.
Leona es profesora de matemáticas.
Por lo tanto, Leona ha estudiado cálculo.

Si representamos como l a esta mujer en particular (de nuestro universo) llamada Leona, entonces podemos escribir este argumento en forma simbólica como

$$\begin{array}{l} \forall x[m(x)\rightarrow c(x)] \\ m(l) \\ \hline \therefore c(l) \end{array}$$

Aquí, las dos proposiciones que quedan arriba de la línea son las premisas del argumento y la proposición $c(l)$ que está abajo de la línea es su conclusión. Esto es comparable a lo que se dijo en la sección 2.3, excepto que ahora tenemos una premisa dada por una proposición cuantificada universalmente. Como en el caso de la sección 2.3, hemos supuesto que todas las premisas son verdaderas y debemos tratar de establecer que, en estas circunstancias, la conclusión también es verdadera. Ahora bien, para establecer la validez de un argumento dado, procederemos como sigue.

Pasos	**Razones**
1) $\forall x[m(x) \rightarrow c(x)]$	Premisa
2) $m(l)$	Premisa
3) $m(l) \rightarrow c(l)$	Paso (1) y la regla de especificación universal
4) $\therefore c(l)$	Paso (2) y (3) y *Modus Ponens*

Observe que las proposiciones de los pasos (2) y (3) *no* son proposiciones cuantificadas. Son los tipos de proposiciones que estudiamos al principio del capítulo. En particular, podemos aplicar las reglas de inferencia que aprendimos en la sección 2.3 a estas dos proposiciones para deducir la conclusión del paso (4).

Aquí vemos que la regla de especificación universal nos permite tomar una premisa cuantificada universalmente y deducir de ésta una proposición ordinaria (es decir, no cuantificada). Esta proposición (ordinaria), llamada $m(l) \rightarrow c(l)$, es un caso verdadero específico de la premisa verdadera cuantificada universalmente $\forall x[m(x) \rightarrow c(x)]$.

b) Para un ejemplo de naturaleza más matemática, consideremos el universo de todos los triángulos que hay en el plano, junto con las proposiciones abiertas

$p(t)$: t tiene dos lados de igual longitud

$q(t)$: t es un triángulo isósceles

$r(t)$: t tiene dos ángulos de igual medida.

Vamos a centrarnos en un triángulo específico que no tenga dos ángulos de igual medida. Este triángulo se llamará XYZ y se designará con c. Entonces vemos que el argumento

En el triángulo XYZ no hay dos ángulos de igual medida.	$\neg r(c)$
Si un triángulo tiene dos lados de igual longitud, entonces es un isósceles.	$\forall t[p(t) \rightarrow q(t)]$
Si un triángulo es isósceles, entonces tiene dos ángulos de igual medida.	$\forall t[q(t) \rightarrow r(t)]$
Por lo tanto, el triángulo XYZ no tiene dos lados de igual longitud.	$\therefore \neg p(c)$

es válido, como se muestra a continuación.

Pasos	**Razones**
1) $\forall t[p(t) \rightarrow q(t)]$	Premisa
2) $p(c) \rightarrow q(c)$	Paso (1) y la regla de especificación universal
3) $\forall t[q(t) \rightarrow r(t)]$	Premisa
4) $q(c) \rightarrow r(c)$	Paso (3) y la regla de especificación universal
5) $p(c) \rightarrow r(c)$	Pasos (2)y (4) y la ley del silogismo
6) $\neg r(c)$	Premisa
7) $\therefore \neg p(c)$	Pasos (5)y (6) y *Modus Tollens*

Una vez más podemos ver la utilidad de la regla de especificación universal. En este caso se tomaron las proposiciones cuantificadas universalmente en los pasos (1) y (3) y la regla produjo las proposiciones (ordinarias) de los pasos (2) y (4), respectivamente. Entonces, en ese momento pudimos aplicar las reglas de inferencia que aprendimos en la sección 2.3 (la ley del silogismo y el *Modus Tollens*) para obtener la conclusión $\neg p(c)$ del paso (7).

c) ¡Ahora, el último argumento para que todo quede claro! Consideremos el universo de todos los estudiantes de una escuela específica. Designaremos a una estudiante particular, María, como m.
Para este universo y las proposiciones abiertas

$j(x)$: x está en su penúltimo año $\quad s(x)$: x está en su último año
$p(x)$: x está inscrita en una clase de educación física

consideremos el siguiente argumento:

Ninguna estudiante de penúltimo o último año está inscrita en una clase de educación física.
María está inscrita en una clase de educación física.
Por lo tanto, María no es una estudiante de último año.

En forma simbólica, este argumento se convierte en

$$\begin{array}{l} \forall x[(j(x) \vee s(x)) \rightarrow \neg p(x)] \\ \underline{p(m) \qquad\qquad\qquad\qquad} \\ \therefore \neg s(m) \end{array}$$

Los pasos (y razones) siguientes establecen la validez de este argumento.

Pasos	**Razones**
1) $\forall x[(j(x) \vee s(x)) \rightarrow \neg p(x)]$	Premisa
2) $p(m)$	Premisa
3) $(j(m) \vee s(m)) \rightarrow \neg p(m)$	Paso (1) y la regla de especificación universal
4) $p(m) \rightarrow \neg(j(m) \vee s(m))$	Paso (3), $(q \rightarrow t) \Leftrightarrow (\neg t \rightarrow \neg q)$ y la ley de la doble negación
5) $p(m) \rightarrow (\neg j(m) \wedge \neg s(m))$	Paso (4) y la ley de De Morgan
6) $\neg j(m) \wedge \neg s(m)$	Pasos (2) y (5) y la regla de separación (o *Modus Ponens*)
7) $\therefore \neg s(m)$	Paso (6) y la regla de simplificación conjuntiva.

En el ejemplo 2.54 tuvimos nuestra primera oportunidad de aplicar la regla de especificación universal. Usando esta regla junto con las de *Modus Ponens* (o regla de separación) y *Modus Tollens*, podemos establecer las siguientes analogías correspondientes, cada una de las cuales implica una premisa cuantificada universalmente. En cada caso, consideremos un universo fijo con un elemento específico c, y usaremos las proposiciones abiertas $p(x)$, $q(x)$ definidas para este universo.

(1) $\begin{array}{l}\forall x[p(x) \rightarrow q(x)] \\ \underline{p(c)\qquad\qquad} \\ \therefore q(c)\end{array}$ (2) $\begin{array}{l}\forall x[p(x) \rightarrow q(x)] \\ \underline{\neg q(c)\qquad\qquad} \\ \therefore \neg p(c)\end{array}$

Estos dos argumentos válidos se presentan aquí por la misma razón que los presentamos para las reglas de inferencia, *Modus Ponens* y *Modus Tollens*, en la sección 2.3 (durante el análisis que aparece entre los ejemplos 2.26 y 2.27). Queremos analizar algunos posibles errores que pueden surgir cuando no se usan correctamente los resultados (1) y (2).

Comenzaremos con el universo de todos los polígonos que hay en el plano. Dentro de este universo, denotamos con c a un polígono específico, el cuadrilátero *EFGH*, cuyo ángulo E mide 91°. Para las proposiciones abiertas

$p(x)$: x es un cuadrado $\qquad$ $q(x)$: x tiene cuatro lados,

los siguientes argumentos *no* son *válidos*.

(1′) Todos los cuadrados tienen cuatro lados.
El cuadrilátero *EFGH* tiene cuatro lados.
Por lo tanto, el cuadrilátero *EFGH* es un cuadrado.

En forma simbólica, este argumento se traduce en

(1″) $$\begin{array}{l}\forall x[p(x) \rightarrow q(x)] \\ \underline{q(c)\qquad\qquad} \\ \therefore p(c)\end{array}$$

Por desgracia, aunque las premisas son verdaderas, la conclusión es falsa. (En un cuadrado no hay un ángulo que mida 91°.) Es cierto que podría haber una confusión entre este argumento y el argumento válido (1) anterior. Ya que en este caso, cuando aplicamos la regla de especificación universal a la premisa cuantificada (1″), obtenemos el argumento *no válido*

$$\begin{array}{l}p(c) \rightarrow q(c) \\ \underline{q(c)\qquad\quad} \\ \therefore p(c)\end{array}$$

Y aquí, como en la sección 2.3, el error en el razonamiento se encuentra en el intento de argumentar mediante el recíproco.

Podemos dar un segundo argumento no válido, el cual surge del mal uso del argumento (2) anterior, como se muestra a continuación:

Todos los cuadrados tienen cuatro lados.
El cuadrilátero *EFGH* no es un cuadrado.
Por lo tanto, el cuadrilátero *EFGH* no tiene cuatro lados.

Al traducir (2′) a una forma simbólica obtenemos

$$\begin{array}{l}\forall x[p(x) \rightarrow q(x)] \\ \underline{\neg p(c)\qquad\qquad} \\ \therefore \neg q(c)\end{array} \qquad (2'')$$

Esta vez, la regla de especificación universal produce

$$\begin{array}{l} p(c) \rightarrow q(c) \\ \underline{\neg p(c) \qquad} \\ \therefore \neg q(c) \end{array}$$

que es donde surge la falacia al tratar de argumentar por el inverso.

Observemos de nuevo las tres partes del ejemplo 2.54. Aunque los argumentos presentados ahí tenían como premisas proposiciones cuantificadas universalmente, en ningún caso apareció como conclusión una proposición cuantificada universalmente. Ahora queremos remediar esta situación, ya que muchos teoremas de matemáticas tienen la forma de una proposición cuantificada universalmente. Para hacer esto necesitamos considerar lo siguiente.

Empecemos con un universo dado y una proposición abierta $p(x)$. Para establecer la verdad de la proposición $\forall x\, p(x)$, debemos establecer la validez de $p(c)$ para cada elemento c del universo dado. Pero si el universo tiene muchos elementos o, por ejemplo, contiene a todos los enteros positivos, entonces esta exhaustiva (o extenuante) tarea de validación de cada $p(c)$ se torna difícil, si no es que imposible. Para evitar esta situación, demostraremos que $p(c)$ es verdadera, pero lo haremos para el caso en que c denota un elemento *específico pero arbitrario* del universo prescrito.

Si la proposición abierta anterior $p(x)$ tiene la forma $q(x) \rightarrow r(x)$, para las proposiciones abiertas $q(x)$ y $r(x)$, entonces debemos suponer, como premisa adicional, que $q(c)$ es verdadera e intentar deducir la verdad de $r(c)$, usando definiciones, axiomas, teoremas demostrados con anterioridad y los principios lógicos que hemos estudiado. Ya que cuando $q(c)$ es falsa, la implicación $q(c) \rightarrow r(c)$ es verdadera, independientemente del valor de verdad de $r(c)$.

La razón por la que el elemento c debe ser arbitrario (o genérico) es para garantizar que lo que hagamos y demostremos de c sea aplicable a *todos* los demás elementos del universo. Por ejemplo, si trabajamos con el universo de todos los enteros, no podemos elegir c de manera arbitraria como 4, o como un entero par. En general, no podemos adoptar hipótesis acerca de la elección de c, a menos que esas hipótesis sean válidas para *todos* los elementos del universo. Aplicamos la palabra *genérico* al elemento c para indicar que nuestra elección (de c) debe compartir todas las características comunes de los elementos del universo dado.

El principio que hemos descrito en los tres párrafos anteriores es el siguiente.

La regla de la generalización universal: Si se demuestra que una proposición abierta $p(x)$ es verdadera cuando x se reemplaza por cualquier elemento c *elegido en forma arbitraria* de nuestro universo, entonces la proposición cuantificada universalmente $\forall x\, p(x)$ es verdadera. Además, la regla se extiende al caso de más de una variable. Así, por ejemplo, si demostramos que una proposición abierta $q(x, y)$ es verdadera al reemplazar x y y por elementos *elegidos en forma arbitraria* del mismo universo o de los universos respectivos, entonces la proposición cuantificada universalmente $\forall x\, \forall y\, q(x, y)$ [o $\forall x, y\, q(x, y)$] es verdadera. También se cumplen resultados similares para los casos de tres o más variables.

Antes de demostrar el uso de esta regla en otros ejemplos, quisiéramos regresar a la parte (1) del ejemplo 2.44 de la sección 2.4. Vemos entonces que la explicación dada ahí para establecer que

$$\forall x[p(x) \wedge (q(x) \wedge r(x))] \Leftrightarrow \forall x[(p(x) \wedge q(x)) \wedge r(x)]$$

anticipaba lo que ahora hemos descrito con detalle como las reglas de la especificación y la generalización universales.

Ahora pasaremos a un ejemplo que es estrictamente simbólico. Este ejemplo nos ofrece una oportunidad de aplicar la regla de la generalización universal.

Ejemplo 2.55

Sean $p(x)$, $q(x)$ y $r(x)$ proposiciones abiertas definidas para un universo dado. Mostraremos que el argumento

$$\begin{array}{l} \forall x[p(x) \rightarrow q(x)] \\ \underline{\forall x[q(x) \rightarrow r(x)]} \\ \therefore \forall x[p(x) \rightarrow r(x)] \end{array}$$

es válido considerando lo siguiente.

Pasos	**Razones**
1) $\forall x[p(x) \rightarrow q(x)]$	Premisa
2) $p(c) \rightarrow q(c)$	Paso (1) y la regla de la especificación universal
3) $\forall x[q(x) \rightarrow r(x)]$	Premisa
4) $q(c) \rightarrow r(c)$	Paso (3) y la regla de la especificación universal
5) $p(c) \rightarrow r(c)$	Pasos (2) y (4) y la ley del silogismo
6) $\therefore \forall x[p(x) \rightarrow r(x)]$	Paso (5) y la regla de la generalización universal

En este caso, el elemento c introducido en los pasos (2) y (4) es el mismo elemento *específico* pero *elegido arbitrariamente* del universo. Puesto que este elemento *no* tiene *propiedades especiales o distintivas* sino que comparte todas las características comunes de cualquier otro elemento del universo, podemos usar la regla de la generalización universal para ir del paso (5) al paso (6).

De este modo, finalmente tenemos un argumento válido en el que una proposición cuantificada universalmente aparece como conclusión, así como entre las premisas.

La pregunta que podría venir a la mente del lector se referiría al aspecto práctico: ¿cuándo necesitaríamos utilizar el argumento del ejemplo 2.55? De hecho, ya lo hemos utilizado (tal vez en forma inconsciente) en cursos anteriores de álgebra y cálculo, como lo demuestra el siguiente ejemplo.

Ejemplo 2.56

a) Para el universo de los números reales, consideremos las proposiciones abiertas

$$p(x):\quad 3x - 7 = 20 \qquad q(x):\quad 3x = 27 \qquad r(x):\quad x = 9.$$

Desarrollaremos la siguiente solución de una ecuación algebraica en forma paralela al argumento válido del ejemplo 2.55.

1) Si $3x - 7 = 20$, entonces $3x = 27$. $\quad \forall x[p(x) \rightarrow q(x)]$
2) Si $3x = 27$, entonces $x = 9$. $\quad \forall x[q(x) \rightarrow r(x)]$
3) Por lo tanto, si $3x - 7 = 20$, entonces $x = 9$. $\quad \therefore \forall x[p(x) \rightarrow r(x)]$

b) Cuando trabajamos con el universo de todos los cuadriláteros de la geometría plana, es probable que relacionemos de la forma siguiente:

"Como todo cuadrado es un rectángulo y todo rectángulo es un paralelogramo, se sigue que todo cuadrado es un paralelogramo".

En este caso estamos utilizando el argumento del ejemplo 2.55 para las proposiciones abiertas

$p(x)$: x es un cuadrado $\quad q(x)$: x es un rectángulo $\quad r(x)$: x es un paralelogramo.

Analizaremos ahora la validez de otro argumento.

Ejemplo 2.57 Los pasos y razones necesarios para establecer la validez del argumento

$$\begin{array}{l} \forall x[p(x) \vee q(x)] \\ \underline{\forall x[(\neg p(x) \wedge q(x)) \rightarrow r(x)]} \\ \therefore \forall x[\neg r(x) \rightarrow p(x)] \end{array}$$

son los siguientes. [El elemento c está en el universo asignado al argumento. Además, como la conclusión es una implicación cuantificada universalmente, podemos suponer $\neg r(c)$ como una premisa adicional, como ya mencionamos al presentar la regla de la generalización universal.]

Pasos	**Razones**
1) $\forall x[p(x) \vee q(x)]$	Premisa
2) $p(c) \vee q(c)$	Paso (1) y la regla de la especificación universal
3) $\forall x[(\neg p(x) \wedge q(x)) \rightarrow r(x)]$	Premisa
4) $[\neg p(c) \wedge q(c)] \rightarrow r(c)$	Paso (3) y la regla de la especificación universal
5) $\neg r(c) \rightarrow \neg[\neg p(c) \wedge q(c)]$	Paso (4) y $s \rightarrow t \Leftrightarrow \neg t \rightarrow \neg s$
6) $\neg r(c) \rightarrow [p(c) \vee \neg q(c)]$	Paso (5), ley de De Morgan y la ley de la doble negación
7) $\neg r(c)$	
8) $p(c) \vee \neg q(c)$	Premisa (supuesta)
9) $[p(c) \vee q(c)] \wedge [p(c) \vee \neg q(c)]$	Pasos (7) y (6) y *Modus Ponens*
	Pasos (2) y (8) y la regla de la conjunción
10) $p(c) \vee [q(c) \wedge \neg q(c)]$	Paso (9) y la propiedad distributiva de $\vee$ sobre $\wedge$
11) $p(c)$	Paso (10), $q(c) \wedge \neg q(c) \Leftrightarrow F_0$ y $p(c) \vee F_0 \Leftrightarrow p(c)$
12) $\therefore \forall x[\neg r(x) \rightarrow p(x)]$	Pasos (7) y (11) y la regla de la generalización universal

Antes de proseguir, queremos mencionar un convenio que tal vez no agrade al lector pero al que deberá acostumbrarse. Se refiere a nuestro tratamiento de las reglas de la especificación y generalización universales. En el primer caso, partimos de la proposición $\forall x\, p(x)$ y después trabajamos con $p(c)$ para algún elemento específico c de nuestro universo. Para la regla de la generalización universal, utilizamos la proposición verdadera $p(c)$ para deducir la verdad de $\forall x\, p(x)$ a partir de la de $p(c)$, donde c es un elemento arbitrario del universo. Por desgracia, usaremos con frecuencia la letra x en vez de c para denotar el elemento arbitrario, pero mientras comprendamos lo que ocurre, pronto veremos que el convenio es bastante fácil de usar.

Los resultados del ejemplo 2.55 y, en particular, del ejemplo 2.57, nos indican que podemos utilizar las proposiciones cuantificadas universalmente y las reglas de inferencia, incluyendo las reglas de especificación y generalización universal, para formalizar y demostrar muchos tipos de argumentos y (esperamos) teoremas. Cuando hacemos esto, parece que la validación incluso de argumentos cortos requiere varios pasos, ya que hemos sido muy meticulosos e incluido todos los pasos y razones; hemos dejado poco, por no decir nada, a la imaginación. El lector puede estar seguro de que al comenzar a demostrar teoremas matemáticos, presentaremos las demostraciones en un estilo de texto corrido más convencional. Ya no mencionaremos todas y cada una de las aplicaciones de las leyes de la lógica, el resto de las tautologías o las reglas de inferencia. En algunos casos, subrayaremos alguna regla de inferencia, pero nos centraremos principalmente en el uso de definiciones, axiomas y principios matemáticos (distintos de los que aparecen en el estudio de la lógica) y los demás teoremas (anteriores) que hayamos podido demostrar. ¿Para qué estudiar entonces todo este material de validación de argumentos? Porque esto nos proporciona un marco de referencia al cual recurrir cuando dudemos de un intento de demostración. Si surge una duda, tenemos nuestro estudio de la lógica, que nos proporciona los medios (un tanto mecánicos, pero estrictamente objetivos) para ayudarnos a decidir.

Ahora presentaremos algunas demostraciones con un estilo de texto corrido para algunos resultados relativos a los enteros. (Estos resultados pueden considerarse casi obvios; de hecho, encontraremos algunos que ya hemos visto y usado. Sin embargo, nos proporcionan un marco excelente para escribir algunas demostraciones simples.) Las demostraciones utilizan las siguientes ideas, que definiremos formalmente. [La primera idea fue mencionada antes, en la parte (b) del ejemplo 2.52.]

Definición 2.8 Sea n un entero. Decimos que n es *par* si n es divisible entre 2; es decir, si existe un entero r tal que $n = 2r$. Si n no es par, entonces decimos que n es *impar*; para este caso, existe un entero s tal que $n = 2s + 1$.

TEOREMA 2.2 Para todos los enteros k y l, si k, l son impares, entonces $k + l$ es par.

Demostración: En esta demostración numeraremos los pasos para referirnos a ellos en comentarios posteriores. Después ya no los numeraremos.

1) Como k y l son impares, podemos escribirlos como $k = 2a + 1$ y $l = 2b + 1$, para algunos enteros a, b. Esto es por la definición 2.8.

2) Entonces

$$\begin{aligned} k + l &= (2a + 1) + (2b + 1) \\ &= 2(a + b + 1), \end{aligned}$$

en virtud de las propiedades conmutativa y asociativa de la suma y la propiedad distributiva de la multiplicación sobre la suma, que valen para los enteros.

3) Como a, b son enteros, $a + b + 1 = c$ es un entero; y como $k + l = 2c$, se sigue de la definición 2.8 que $k + l$ es par.

Comentarios

1) En el paso (1) de la demostración anterior, elegimos k y l de manera arbitraria y por ello sabemos que el resultado obtenido es verdadero para todos los enteros impares, por la regla de generalización universal.
2) Aunque no nos hayamos dado cuenta, hemos usado la regla de especificación universal (dos veces) en el paso (1). El primer argumento implícito en este paso se lee como sigue.
   - **i)** Si n es un entero impar, entonces $n = 2r + 1$ para algún entero r.
   - **ii)** El entero k es un entero impar específico (pero elegido en forma arbitraria).
   - **iii)** Por lo tanto, podemos escribir $k = 2a + 1$ para algún entero a (específico).
3) En el paso (1) no tenemos $k = 2a + 1$ y $l = 2a + 1$. Como k, l fueron arbitrarios, *puede* ocurrir que $k = l$; y cuando esto sucede, tenemos que $2a + 1 = k = l = 2b + 1$, de lo cual se sigue que $a = b$. [Como k podría ser diferente de l, se sigue que $(k - 1)/2 = a$ podría ser distinto de $b = (l - 1)/2$. Así que debemos usar variables a y b diferentes.]

Antes de proceder con otro teorema, escrito de manera más convencional, examinemos lo siguiente.

Ejemplo 2.58

Consideremos la siguiente proposición para el universo de enteros.

Si n es un entero, entonces $n^2 = n$; o bien, $\forall n[n^2 = n]$.

Ahora bien, para $n = 0$ es cierto que $n^2 = 0^2 = 0 = n$. Y si $n = 1$, también es cierto que $n^2 = 1^2 = 1 = n$. Sin embargo, *no podemos* concluir que $n^2 = n$ para cada entero n. La regla de generalización universal *no* se aplica aquí, ya que no podemos considerar la elección de 0 (o 1) como si se hubiera realizado arbitrariamente. Si $n = 2$, tenemos que $n^2 = 4 \neq 2 = n$; este único contraejemplo es suficiente para mostrar que la proposición dada es falsa. Sin embargo, cada uno de los reemplazos anteriores, $n = 0$ o $n = 1$, es suficiente para establecer la verdad de la proposición

Para algún entero n, $n^2 = n$, o, $\exists n[n^2 = n]$.

Por último, cerramos la sección con tres resultados que muestran cómo escribiremos las demostraciones en el resto del texto.

TEOREMA 2.3 Para todos los enteros k y l, si k y l son impares, entonces también su producto kl es impar.

Demostración: Como k y l son impares, por la definición 2.8, podemos escribirlos como $k = 2a + 1$ y $l = 2b + 1$, para algunos enteros a, b. Entonces el producto $kl = (2a + 1)(2b + 1) = 4ab + 2a + 2b + 1 = 2(2ab + a + b) + 1$, donde $2ab + a + b$ es un entero. Por lo tanto, una vez más por la definición 2.8, se sigue que kl es impar.

La demostración anterior es un ejemplo de demostración directa. En nuestro siguiente ejemplo demostraremos un resultado por tres vías: primero por un argumento directo (o demostración), después por el método de la contrapositiva y finalmente por el método de contradicción. [Para la demostración por (el método de) contradicción añadiremos algunos detalles, ya que es nuestra primera oportunidad de usar esta técnica.] Sin embargo, el lector no debe suponer que todos los teoremas pueden demostrarse fácilmente de varias formas.

TEOREMA 2.4 Si m es un entero par, entonces $m + 7$ es impar.

Demostración:

1) Como m es par, tenemos que $m = 2a$ para algún entero a. Entonces $m + 7 = 2a + 7 = 2a + 6 + 1 = 2(a + 3) + 1$. Como $a + 3$ es un entero, tenemos que $m + 7$ es impar.
2) Supongamos que $m + 7$ *no* es impar; por lo tanto, es par. Entonces $m + 7 = 2b$ para alguna b y $m = 2b - 7 = 2b - 8 + 1 = 2(b - 4) + 1$, donde $b - 4$ es un entero. Por lo tanto, m es impar. [El resultado se sigue del hecho de que las proposiciones de la forma $\forall m[p(m) \rightarrow q(m)]$ y $\forall m[\neg q(m) \rightarrow \neg p(m)]$ son lógicamente equivalentes.]
3) Ahora supongamos que m es par y que también $m + 7$ es par. (Esta suposición es la negación de lo que deseamos demostrar.) Entonces, $m + 7$ par implica que $m + 7 = 2c$ para algún entero c. Y, en consecuencia, $m = 2c - 7 = 2c - 8 + 1 = 2(c - 4) + 1$ con $c - 4$ entero, por lo que m es impar. Aquí aparece la contradicción: empezamos con m par y ahora hemos deducido m impar, una situación imposible, ya que no puede haber un entero que sea par e impar a la vez. ¿Cómo llegamos a este dilema? Muy simple: ¡cometimos un error! Este error es la hipótesis falsa de que $m + 7$ es par, que supusimos al comienzo de la demostración. Como la hipótesis es falsa, su negación es verdadera y $m + 7$ es impar.

La segunda y tercera demostraciones del teorema 2.4 son muy similares. Esto se debe a que la contradicción obtenida en la tercera demostración surge de la hipótesis del teorema y su negación. Más adelante veremos (en el siguiente capítulo) que también podemos obtener una contradicción al llegar a la negación de un hecho conocido, un hecho que *no* sea la hipótesis del teorema que se intenta demostrar. Sin embargo, por ahora, pensemos un poco más en esta analogía. Supongamos que partimos de las proposiciones abiertas $p(m)$ y $q(m)$, para un universo dado, y consideremos un teorema de la forma $\forall m[p(m) \rightarrow q(m)]$. Si intentamos demostrar este resultado por el método de la contrapositiva, entonces estaremos demostrando la proposición lógicamente equivalente $\forall m[\neg q(m) \rightarrow \neg p(m)]$. Para hacer esto, suponemos que $\neg q(m)$ es verdadera (para cualquier m específico, pero elegido en forma arbitraria del universo) y mostramos que esto implica que $\neg p(m)$ es verdadera. Por otro lado, si queremos demostrar el teorema $\forall m[p(m) \rightarrow q(m)]$ por el método de demostración por contradicción, entonces suponemos que la proposición $\forall m[p(m) \rightarrow q(m)]$ es falsa. Esto equivale al hecho de que $p(m) \rightarrow q(m)$ sea falsa para al menos un reemplazo de m del universo; es decir, existe algún elemento m en el universo para el que $p(m)$ es verdadera y $q(m)$ es falsa [o bien, $\neg q(m)$ es verdadera]. Usamos este hecho (la verdad de $p(m)$ y $\neg q(m)$) para obtener una contradicción. [En la tercera demostración del teorema 2.4 obtenemos $p(m) \land \neg p(m)$.] Estos dos métodos pueden compararse simbólicamente como sigue, cuando el m elegido para el método de contradicción es específico pero elegido arbitrariamente.

	Hipótesis	**Resultado obtenido**
Contraposición	$\neg q(m)$	$\neg p(m)$
Contradicción	$p(m)$ y $\neg q(m)$	F_0

En general, si podemos demostrar un teorema de manera directa o indirecta, resultará menos enredado el método directo que el indirecto. (Esto parece ser el caso de las tres demostraciones presentadas en el teorema 2.4.) Cuando no tengamos una dirección fija para intentar la demostración de cierto teorema, podemos empezar con un método directo. Si tenemos éxito, está muy bien. Si no, debemos intentar encontrar un contraejemplo de lo que creíamos era un teorema. Si nuestra búsqueda del contrajemplo falla, entonces debemos tratar con el método indirecto. Podríamos demostrar la contrapositiva del teorema, u obtener una contradicción, como lo hicimos en la tercera demostración del teorema 2.4, suponiendo que la hipótesis y la negación de la conclusión (para algún elemento m del universo) son verdaderas en el teorema dado.

Concluiremos esta sección con otra demostración indirecta por el método de contraposición.

TEOREMA 2.5 Para todos los números reales positivos x y y, si el producto xy es mayor que 25, entonces $x > 5$ o $y > 5$.

Demostración: Consideremos la negación de la conclusión; es decir, supongamos que $0 < x \leq 5$ y $0 < y \leq 5$. En estas circunstancias, tenemos que $0 < x \cdot y \leq 5 \cdot 5 = 25$, por lo que el producto xy *no* es superior a 25. (Este método indirecto de demostración establece ahora la proposición dada, ya que sabemos que una implicación es lógicamente equivalente a su contrapositiva.)

EJERCICIOS 2.5

1. ¿En el ejemplo 2.53, por qué nos detuvimos en 26 y no en 28?
2. ¿Por qué no incluimos los enteros impares entre 2 y 26 en el ejemplo 2.53?
3. Utilice el método de exaustivo para mostrar que cada entero par entre 30 y 58 (incluyendo 30 y 58) puede escribirse como la suma de no más de tres cuadrados perfectos.
4. Sea n un entero positivo mayor que 1. Decimos que n es *primo* si los únicos enteros positivos que dividen (exactamente) a n son 1 y el propio n. Por ejemplo, los primeros siete primos son 2, 3, 5, 7, 11, 13 y 17. (Aprenderemos más acerca de los primos en el capítulo 4.) Utilice el método exhaustivo para demostrar que cada entero par, en el universo 4, 6, 8, . . . , 36, 38, puede escribirse como la suma de dos primos.

5. Para cada uno de los siguientes universos y parejas de proposiciones, utilice la regla de especificación universal, así como el *Modus Ponens* o *Modus Tollens*, para llenar la línea en blanco y obtener un argumento válido.

a) [El universo comprende todos los números reales.]
Todos los enteros son números racionales.
El número real p no es un número racional.
∴ ______

b) [El universo comprende la población actual de Estados Unidos.]
Todos los bibliotecarios conocen el sistema de clasificación de la Biblioteca del Congreso.
______
∴ Margarita conoce el sistema de clasificación de la Biblioteca del Congreso.

c) [El mismo universo de la parte (b).]
______
Sandra es directora administrativa.
∴ Sandra sabe cómo delegar autoridad.

d) [El universo consta de todos los cuadriláteros del plano.]
Todos los rectángulos son equiangulares.
______
∴ El cuadrilátero *MNPQ* no es un rectángulo.

e) [El universo es el mismo que en la parte (b).]
Las personas conscientes de los riesgos del colesterol evitan comer hígado.
Greta es una persona consciente de los riesgos del colesterol.
∴ ______

6. Determine cuáles de los siguientes argumentos son válidos y cuáles no. Explique cada respuesta. (El universo consta de todas las personas que residen actualmente en Estados Unidos.)

a) Todos los carteros llevan una lata de aerosol irritante.
El señor Beltrán es cartero.
Por lo tanto, el señor Beltrán lleva una lata de aerosol irritante.

b) Todos los ciudadanos respetuosos de la ley pagan sus impuestos.
El señor Pérez paga sus impuestos.
Por lo tanto, el señor Pérez es una persona que obedece la ley.

c) Todas las personas que se preocupan por el ambiente reciclan sus recipientes de plástico.
Margarita no se preocupa por el ambiente.
Por lo tanto, Margarita no recicla sus recipientes de plástico.

d) Ningún estudiante consciente deja las tareas inconclusas.
Antonieta no deja inconclusas sus tareas.
Por lo tanto, Antonieta es una estudiante consciente.

7. Para un universo dado y cualesquiera proposiciones abiertas $p(x)$, $q(x)$ en la variable x, demuestre que

a) $\exists x\,[p(x) \vee q(x)] \Leftrightarrow \exists x\, p(x) \vee \exists x\, q(x)$

b) $\forall x\,[p(x) \wedge q(x)] \Leftrightarrow \forall x\, p(x) \wedge \forall x\, q(x)$

8. **a)** Sean $p(x)$, $q(x)$ proposiciones abiertas en la variable x, con un universo dado. Demuestre que

$$\forall x\, p(x) \vee \forall x\, q(x) \Rightarrow \forall x\,[p(x) \vee q(x)].$$

[Es decir, demuestre que si la proposición $\forall x\, p(x) \vee \forall x\, q(x)$ es verdadera, entonces la proposición $\forall x[p(x) \vee q(x)]$ es verdadera.]

b) Encuentre un contraejemplo para la recíproca de la parte (a). Es decir, encuentre proposiciones abiertas $p(x)$, $q(x)$ y un universo tal que $\forall x[p(x) \vee q(x)]$ sea verdadera y $\forall x\, p(x) \vee \forall x\, q(x)$ falsa.

9. Dé las razones para los pasos de verificación del siguiente argumento. (En este caso, a denota un elemento arbitrario pero específico del universo dado.)

$$\begin{array}{l} \forall x[p(x) \rightarrow (q(x) \wedge r(x))] \\ \underline{\forall x[p(x) \wedge s(x)]} \\ \therefore \forall x[r(x) \wedge s(x)] \end{array}$$

Pasos	**Razones**
1) $\forall x[p(x) \rightarrow (q(x) \wedge r(x))]$	
2) $\forall x[p(x) \wedge s(x)]$	
3) $p(a) \rightarrow (q(a) \wedge r(a))$	
4) $p(a) \wedge s(a)$	
5) $p(a)$	
6) $q(a) \wedge r(a)$	
7) $r(a)$	
8) $s(a)$	
9) $r(a) \wedge s(a)$	
10) $\therefore \forall x[r(x) \wedge s(x)]$	

10. Escriba las razones que faltan para los pasos de verificación del siguiente argumento:

$$\begin{array}{l} \forall x[p(x) \vee q(x)] \\ \exists x \neg p(x) \\ \forall x[\neg q(x) \vee r(x)] \\ \underline{\forall x[s(x) \rightarrow \neg r(x)]} \\ \therefore \exists x(\neg s(x)) \end{array}$$

Pasos	**Razones**
1) $\forall x[p(x) \vee q(x)]$	Premisa
2) $\exists x \neg p(x)$	Premisa
3) $\neg p(a)$	Paso (2) y definición de verdad para $\exists x \neg p(x)$. [En este caso, a es un elemento (reemplazo) del universo para el cual $\neg p(x)$ es verdadera.] La razón que justifica este paso también se conoce como la *regla de la especificación existencial.*
4) $p(a) \vee q(a)$	
5) $q(a)$	
6) $\forall x[\neg q(x) \vee r(x)]$	
7) $\neg q(a) \vee r(a)$	
8) $q(a) \rightarrow r(a)$	
9) $r(a)$	
10) $\forall x[s(x) \rightarrow \neg r(x)]$	
11) $s(a) \rightarrow \neg r(a)$	
12) $r(a) \rightarrow \neg s(a)$	
13) $\neg s(a)$	
14) $\therefore \exists x(\neg s(x))$	Paso 13 y la definición de verdad para $\exists x(\neg s(x))$. La razón de este paso también se conoce como *regla de generalización existencial.*

11. Escriba el siguiente argumento en forma simbólica. Verifique entonces la validez del argumento o explique por qué no es válido. [Supongamos que el universo abarca a todos los adultos (mayores de 18) que residen actualmente en la ciudad de Las Cruces, Nuevo México. Dos de estas personas son Roxana e Inés.]

Todos los empleados de una unión de crédito deben saber COBOL. Todos los empleados de la unión de crédito que se encargan de las solicitudes de préstamos deben conocer Quattro. Roxana trabaja para la unión de crédito, pero no sabe usar Quattro. Inés sabe Quattro pero no COBOL. Por lo tanto, Roxana no se encarga de solicitudes de préstamos e Inés no trabaja para la unión de crédito.

12. Dé una demostración directa (como en el teorema 2.3) de lo siguiente.
a) Para todos los enteros k y l, si k, l son pares, entonces $k + l$ es par.
b) Para todos los enteros k y l, si k, l son pares, entonces kl es par.

13. Realice una demostración indirecta [como en la parte (z) del teorema 2.4] para cada una de las siguientes proposiciones; hágalo estableciendo y demostrando la contrapositiva de cada proposición.
a) Para todos los enteros k y l, si kl es impar, entonces tanto k como l son impares.
b) Para todos los enteros k y l, si $k + l$ es par, entonces k y l son los dos pares o los dos impares.

14. Demuestre que para cualquier entero n, si n^2 es impar, entonces n es impar.

15. Realice una demostración por contradicción de lo siguiente: Para cualquier entero n, si n^2 es impar, entonces n es impar.

16. Demuestre que para todo entero n, n^2 es par si y sólo si n es par.

17. Demuestre el siguiente resultado de tres formas (como en el teorema 2.4): Si n es un entero impar, entonces $n + 11$ es par.

18. Sean m, n dos enteros positivos. Demuestre que si m, n son cuadrados perfectos, entonces el producto mn también es un cuadrado perfecto.

19. Demuestre, o demuestre que es falso: Si m, n son enteros positivos y m, n son cuadrados perfectos, entonces $m + n$ es un cuadrado perfecto.

20. Demuestre, o demuestre que es falso: Existen enteros positivos m, n tales que m, n y $m + n$ son cuadrados perfectos.

21. Demuestre que para todos los números reales x, y, si $x + y \geq 100$, entonces $x \geq 50$ o $y \geq 50$.

2.6 Resumen y repaso histórico

En este segundo capítulo se han introducido algunos fundamentos de la lógica; en particular, algunas de las reglas de inferencia y métodos de demostración necesarios para establecer teoremas matemáticos.

El primer estudio sistemático del razonamiento lógico se encuentra en la obra del filósofo griego Aristóteles (384–322 A.C.). En sus tratados de lógica, Aristóteles presentó una colección de principios para el razonamiento deductivo. Estos principios tenían por objeto ofrecer una base para el estudio de todas las ramas del conocimiento. En una forma modificada, este tipo de lógica se enseñó hasta y durante la Edad Media.

El matemático alemán Gottfried Wilhelm Leibniz (1646–1716) ha sido considerado frecuentemente como el primer filósofo que intentó desarrollar la lógica simbólica como un lenguaje científico universal. Así lo manifestó en su ensayo *De Arte Combinatoria*, publicado en 1666. Su investigación en el área de la lógica simbólica, realizada de 1679 a 1690, dio un gran impulso a la creación de esta disciplina matemática.

Aristóteles (384–322 a.c.)

Después de la obra de Leibniz, hubo pocos cambios hasta el siglo XIX, cuando el matemático inglés George Boole (1815–1864) creó un sistema de lógica matemática que presentó en 1847, en el panfleto *The MathematicalAnalysis of Logic, Being an Essay Towards a Calculus of Deductive Reasoning*. En el mismo año, el también inglés Augustus De Morgan (1806–1871) publicó *Formal Logic; or, the Calculus of Inference, Necessary and Probable*. Su obra extendió considerablemente el trabajo de Boole en varias direcciones. Después, en 1854, Boole expuso en detalle sus ideas y sus posteriores investigaciones en su notable obra *An Investigation in the Laws of Thought, on Which Are Founded the Mathematical Theories of Logic and Probability*. (Es interesante observar que, además de su trabajo en el área de lógica, Boole también escribió libros de texto para el estudio de las ecuaciones diferenciales y de las ecuaciones en diferencias. Estos libros de texto se usaron en Inglaterra hasta el final del siglo XIX.) El lógico norteamericano Charles Sanders Peirce (1839–1914), quien también era ingeniero y filósofo, introdujo el concepto formal de *cuantificador* en el estudio de la lógica simbólica.

Los conceptos formulados por Boole fueron ampliamente examinados en la obra de otro estudioso alemán, Ernst Schröder (1841–1902). Estos resultados se conocen colectivamente como *Vorlesungen über die Algebra der Logik*; se publicaran entre 1890 y 1895.

Los desarrollos posteriores en el área consideraban un enfoque incluso más moderno que se vio en el trabajo del lógico alemán Gottlieb Frege (1848–1925) entre 1879 y 1903. Esta obra influyó en forma significativa sobre los monumentales *Principia Mathematica* (1910–1913) de los ingleses Alfred North Whitehead (1861–1947) y Bertrand Russell (1872–1970). Aquí rindió sus frutos la obra de Boole. Gracias a este enorme esfuerzo y a las obras de otros matemáticos y lógicos del siglo XX, en particular, la amplia *Grundlagen der Mathematik* (1934–1939) de David Hilbert (1862–1943) y Paul Bernays (1888–1977), disponemos de las refinadas técnicas de la lógica matemática contemporánea.

George Boole (1815–1864)

Varias secciones de este capítulo han subrayado la importancia de la demostración. En matemáticas, una demostración confiere autoridad sobre algo que de otra forma se desecharía como una simple opinión. La demostración incorpora el poder y la majestuosidad del razonamiento puro; pero llega incluso más allá: da lugar a ideas matemáticas nuevas. Nuestro concepto de demostración va unido al de *teorema* (un enunciado matemático cuya verdad se confirma por medio de un argumento lógico o *demostración*). A quienes creen que es posible pasar por alto la importancia de la lógica y de las reglas de inferencia, les dedicamos las sabias palabras de Aquiles en "*Lo que la tortuga dijo a Aquiles*" de Lewis Carroll: "¡Entonces la lógica te tomará por el cuello y te obligará a hacerlo!"

Un tratamiento comparable del material presentado en este capítulo aparece en los capítulos 2 y 13 del texto de K.A. Ross y C. R. B. Wright [9] y en el capítulo 1 de D. F. Stanat y D. F. McAllister [11]. Los dos primeros capítulos del texto de S. S. Epp [3] proporcionan muchos ejemplos y algunas aplicaciones a las ciencias de la computación para quienes desean saber más de la lógica y las demostraciones en un nivel introductorio bastante comprensible. El texto de H. Delong [2] proporciona un panorama histórico de la lógica matemática, junto con un examen de la naturaleza de sus resultados y las consecuencias filosóficas de los mismos. Éste también es el caso de las obras de H. Eves y C. V. Newsom [4], R. R. Stoll [12] y R. L. Wilder [13], en los que se examina la relación entre lógica, demostración y teoría de conjuntos (el tema de nuestro siguiente capítulo) en su papel de fundamentos de las matemáticas.

El texto de E. Mendelson [7] proporciona una interesante introducción intermedia para los lectores que deseen estudiar otros temas de la lógica matemática. Un tratamiento poco más avanzado es el de la obra de S. C. Kleene [6]. Un recuento de las obras recientes de lógica matemática aparece en el compendio editado por J. Barwise [1].

El objetivo de las obras de D. Fendel y D. Resek [5] y R. P. Morash [8] es preparar al estudiante con conocimientos de cálculo para las matemáticas un poco más teóricas que se basan en el álgebra abstracta y el análisis real. Cada uno de estos textos ofrece una excelente introducción a los métodos básicos de demostración. Por último, el texto único de Solow [10] está dedicado en su totalidad a introducir al lector que ya cuenta con bases de matemáticas de bachillerato a las técnicas primarias que se utilizan para desarrollar demostraciones matemáticas.

BIBLIOGRAFÍA

1. Barwise, Jon (editor), *Handbook of Mathematical Logic*, Amsterdam, North Holland, 1977.
2. Delong, Howard, *A Profile of Mathematical Logic*, Reading, Mass., Addison-Wesley, 1970.
3. Epp, Susanna S., *Discrete Mathematics with Applications*, Belmont, Calif., Wadsworth, 1990.
4. Eves, Howard y Carroll V. Newsom, *An Introduction to the Foundations and Fundamental Concepts of Mathematics*, edición corregida, Nueva York, Holt, 1965.
5. Fendel, Daniel y Diane Resek, *Foundations of Higher Mathematics*, Reading, Mass., Addison-Wesley, 1990.
6. Kleene, Stephen C., *Mathematical Logic*, Nueva York, Wiley, 1967.
7. Mendelson, Elliott, *Introduction to Mathematical Logic*, 3ª ed., Monterey, Calit., Wadsworth and Brooks/Cole, 1987.
8. Morash, Ronald P., *Bridge to Abstract Mathematics: Mathematical Proof and Structures*, Nueva York, Random House/Birkhaüser, 1987.
9. Ross, Kenneth A., y Charles R.B. Wright, *Discrete Mathematics*, 3ª ed., Englewood Cliffs, N.J., Prentice-Hall, 1992.
10. Solow, Daniel, *How to Read and Do Proofs*, 2ª ed., Nueva York, Wiley, 1990.
11. Stanat, Donald F. y David F. McAllister, *Discrete Mathematics in Computer Science*, Englewood Cliffs, N.J., Prentice-Hall, 1977.
12. Stoll, Robert R., *Set Theory and Logic*, San Francisco, Freeman, 1963.
13. Wilder, Raymond L., *Introduction to the Foundations of Mathematics*, 2ª ed., Nueva York, Wiley, 1965.

EJERCICIOS COMPLEMENTARIOS

1. Construya la tabla de verdad para

$$p \leftrightarrow [(q \wedge r) \rightarrow \neg(s \vee r)].$$

2. a) Construya la tabla de verdad para

$$(p \rightarrow q) \wedge (\neg p \rightarrow r).$$

b) Traduzca la proposición de la parte (a) en palabras, de modo que no aparezca la palabra "no" en la traducción.

3. Sean p, q y r proposiciones primitivas. Demuestre la verdad o falsedad (con un contraejemplo) de lo siguiente:

a) $[p \leftrightarrow (q \leftrightarrow r)] \Leftrightarrow [(p \leftrightarrow q) \leftrightarrow r]$
b) $[p \rightarrow (q \rightarrow r)] \Leftrightarrow [(p \rightarrow q) \rightarrow r]$

4. Exprese la negación de la proposición $p \leftrightarrow q$ en términos de los conectivos $\wedge$ y $\vee$.

5. Escriba la siguiente proposición como implicación, de los maneras, cada una de la forma si-entonces: Catalina deberá practicar sus lecciones de piano o no irá al cine.

6. Sean p, q, r proposiciones primitivas. Escriba la recíproca, la inversa y la contrapositiva de cada una de las siguientes implicaciones:

a) $p \rightarrow (q \wedge r)$ **b)** $(p \vee q) \rightarrow r$

7. **a)** Para las proposiciones primitivas p, q, encuentre el dual de la proposición $(\neg p \wedge \neg q) \vee (T_0 \wedge p) \vee p$.
b) Use las leyes de la lógica para mostrar que el resultado de la parte (a) es lógicamente equivalente a $p \wedge \neg q$.

8. Sean p, q, r y s proposiciones primitivas. Escriba el dual de cada una de las siguientes proposiciones compuestas.

a) $(p \vee \neg q) \wedge (\neg r \vee s)$
b) $p \rightarrow (q \wedge \neg r \wedge s)$
c) $[(p \vee T_0) \wedge (q \vee F_0)] \vee [r \wedge s \wedge T_0]$

9. En cada uno de los siguientes casos, complete el espacio en blanco con la palabra *recíproca, inversa* o *contrapositiva* de modo que el resultado sea una proposición verdadera.

a) La recíproca de la inversa de $p \rightarrow q$ es la ______________________ de $p \rightarrow q$.
b) La recíproca de la inversa de $p \rightarrow q$ es la ______________________ de $q \rightarrow p$.
c) La inversa de la recíproca de $p \rightarrow q$ es la ______________________ de $p \rightarrow q$.
d) La inversa de la recíproca de $p \rightarrow q$ es la ______________________ de $q \rightarrow p$.
e) La recíproca de la contrapositiva de $p \rightarrow q$ es la ______________________ de $p \rightarrow q$.
f) La recíproca de la contrapositiva de $p \rightarrow q$ es la ______________________ de $q \rightarrow p$.
g) La inversa de la contrapositiva de $p \rightarrow q$ es la ______________________ de $p \rightarrow q$.

0. Para las proposiciones primitivas p, q, r, verifique que las proposiciones compuestas $p \wedge (q \rightarrow \neg r)$ y $\neg(\neg p \vee q) \vee \neg(\neg p \vee r)$ son lógicamente equivalentes
a) utilizando tablas de verdad
b) recurriendo a las leyes de la lógica, las reglas de sustitución y cualquier otra equivalencia lógica que convenga.

1. ¿Es asociativa la conectiva *nand*?, es decir, ¿son lógicamente equivalentes las proposiciones $p \uparrow (q \uparrow r)$ y $(p \uparrow q) \uparrow$ para todas las proposiciones primitivas p, q, r? [Recordemos que $(p \uparrow q) \Leftrightarrow \neg(p \wedge q)$.]

2. Determine si cada una de las siguientes parejas de proposiciones es lógicamente equivalente. [p, q, r son proposiciones primitivas, $(p \downarrow q) \Leftrightarrow \neg(p \vee q)$ y $(p \uparrow q) \Leftrightarrow \neg(p \wedge q)$.]

a) $p \downarrow (q \downarrow r)$, $(p \downarrow q) \downarrow r$
b) $p \uparrow (q \downarrow r)$, $(p \uparrow q) \downarrow (p \uparrow r)$
c) $p \downarrow (q \uparrow r)$, $(p \downarrow q) \uparrow (p \downarrow r)$

13. La ley del silogismo indica que para cualesquiera proposiciones p, q, r, la proposición $[(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow r)] \rightarrow (p \rightarrow r)$ es una tautología. Recordemos que en el ejemplo 2.2 de la sección 2.1 presentamos una situación hipotética para dar sentido a la tabla de verdad de la implicación $p \rightarrow q$, en particular para el caso en que p tenía el valor de verdad 0. En la tabla 2.25, tenemos las otras tres tablas de verdad posibles para la implicación, determinadas según las asignaciones de valores de verdad cuando p es falsa. (Así, la tercera y cuarta filas son iguales a las de la tabla 2.2 para la implicación.) Muestre que para cada una de estas tres tablas de verdad alternativas, la proposición $[(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow r)] \rightarrow (p \rightarrow r)$ ya no es una tautología.

Tabla 2.25

p	q	$p \xrightarrow{1} q$	$p \xrightarrow{2} q$	$p \xrightarrow{3} q$
0	0	0	1	0
0	1	0	0	1
1	0	0	0	0
1	1	1	1	1

14. Establezca la validez del argumento

$$[(p \rightarrow q) \wedge [(q \wedge r) \rightarrow s] \wedge r] \rightarrow (p \rightarrow s).$$

15. Pruebe la verdad o falsedad de lo siguiente (p, q, r son proposiciones arbitrarias).

a) $[(p \veebar q) \veebar r] \Leftrightarrow [p \veebar (q \veebar r)]$
b) $[p \veebar (q \rightarrow r)] \Leftrightarrow [(p \veebar q) \rightarrow (p \veebar r)]$
c) $[p \rightarrow (q \veebar r)] \Rightarrow [(p \rightarrow q) \veebar (p \rightarrow r)]$

16. Escriba cada uno de los siguientes argumentos en forma simbólica. Establezca después la validez del argumento o proporcione un contraejemplo para mostrar que no es válido.

a) Si hace frío el viernes, entonces Cristóbal utilizará su abrigo si los bolsillos están remendados. El pronóstico para el viernes es de clima frío, pero los bolsillos no están remendados. Por lo tanto, Cristóbal no usará su su abrigo este viernes.
b) El contrato se cumplirá si y sólo si las nuevas ventanas se instalan en la casa en junio. Si las nuevas ventanas se instalan en junio, entonces Cristina podrá mudarse a su nueva casa el primero de julio. Si

no se puede cambiar el primero de julio, deberá pagar la renta de julio de su departamento. Las ventanas se instalaron en junio o Cristina debe pagar la renta de julio de su departamento. Por lo tanto, Cristina no tendrá que pagar la renta de su departamento para el mes de julio.

. Consideremos la proposición abierta

$$p(x, y): \quad y - x = y + x^2$$

nde el universo de cada una de las variables x, y abarca dos los enteros. Determine el valor de verdad para cada a de las siguientes proposiciones.

a) $p(0, 0)$
b) $p(1, 1)$
c) $p(0, 1)$
d) $p(0, 3)$
e) $\forall y\, p(0, y)$
f) $\exists y\, p(1, y)$
g) $\forall x, y\, p(x, y)$
h) $\forall x\, \exists y\, p(x, y)$
i) $\exists y\, \forall x\, p(x, y)$
j) $\forall y\, \exists x\, p(x, y)$

18. Exprese lo siguiente en forma simbólica. El universo está formado por los números reales positivos.

a) No existe un número real positivo mínimo.
b) Existe un único número real positivo igual a su cuadrado.
c) Todo número real positivo tiene un único inverso multiplicativo.