



Recta en el plano

Autor: Dr. Francisco Vittone

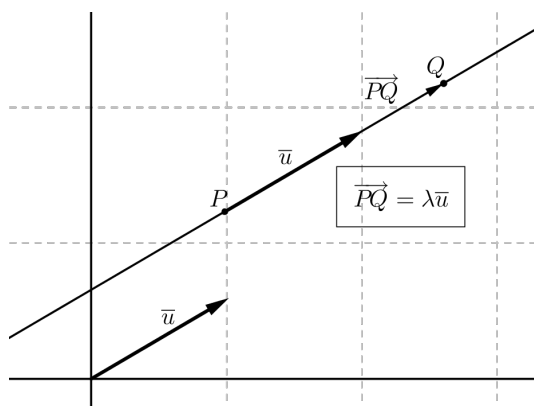
1. Ecuaciones vectorial y paramétrica de la recta en el plano

Recordemos que una recta en el plano que pasa por dos puntos P y Q es el lugar geométrico de los puntos del plano que están alineados con P y Q . Si utilizamos el lenguaje de los vectores, tenemos que un punto R del plano pertenece a la recta \overleftrightarrow{PQ} si y sólo si los vectores \overrightarrow{PQ} y \overrightarrow{PR} son paralelos.

Esto nos permite definir qué entendemos por una recta que pasa por un punto del plano dado en la dirección de un vector dado.

Definición 1. Dado un punto P y un vector no nulo \vec{u} , la recta r que pasa por P en la dirección de \vec{u} es el lugar geométrico de los puntos Q tales que $\overrightarrow{PQ} \parallel \vec{u}$. Esto es,

$$Q \in r \Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{R} : \overrightarrow{PQ} = \lambda \vec{u} \quad (1)$$



Observemos que $\overrightarrow{OP} + \overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{OQ}$. Luego la recta r está compuesta por todos los puntos Q que verifican

$$\overrightarrow{OQ} = \overrightarrow{OP} + \lambda \vec{u}, \lambda \in \mathbb{R}. \quad (2)$$

La ecuación (2) se denomina **ecuación vectorial** de la recta r .

De esta ecuación derivaremos las denominadas **ecuaciones paramétricas** de r . Comencemos analizando un ejemplo.

Ejemplo 2. Queremos encontrar la recta r que pasa por el punto $P(1,1)$ en la dirección del vector $\vec{u} = (2,1)$.

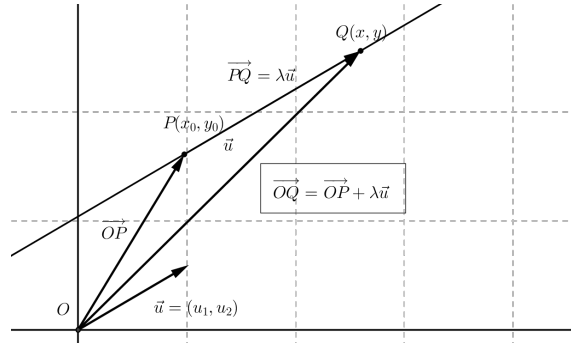
Tenemos que el punto $Q(x,y)$ pertenece a la recta si y sólo si $\overrightarrow{OQ} = \overrightarrow{OP} + \lambda \vec{u}$. Ahora $\overrightarrow{OQ} = (x,y)$, $\overrightarrow{OP} = (1,1)$ y $\vec{u} = (2,1)$, con lo cual $\lambda \vec{u} = (2\lambda, \lambda)$. Luego resulta que un punto Q de coordenadas (x,y) pertenece a la recta si y sólo si sus coordenadas verifican:

$$\begin{cases} x = 1 + 2\lambda \\ y = 1 + \lambda \end{cases}, \lambda \in \mathbb{R}$$

Haciendo variar λ en todo \mathbb{R} obtenemos las coordenadas de todos los puntos que están en r . Así $Q_1(3,2) \in r$ ($\lambda = 1$), $Q_2(5,3) \in r$ ($\lambda = 2$), $Q_3(1+2\sqrt{2}, 1+\sqrt{2}) \in r$ ($\lambda = \sqrt{2}$), $Q_4(-1,0) \in r$ ($\lambda = -1$).

Siguiendo el mismo razonamiento que en el ejemplo, a partir de la ecuación vectorial podemos encontrar las ecuaciones paramétricas de la recta r que pasa por $P(x_0, y_0)$ en la dirección de $\vec{u} = (u_1, u_2)$.

Por (2), un punto $Q(x, y) \in r$ si y sólo si $\vec{OQ} = \vec{OP} + \lambda \vec{u}$, $\lambda \in \mathbb{R}$. Pero $\vec{OQ} = (x, y)$, $\vec{OP} = (x_0, y_0)$, $\lambda \vec{u} = (\lambda u_1, \lambda u_2)$, con lo cual $\vec{OP} + \lambda \vec{u} = (x_0 + \lambda u_1, y_0 + \lambda u_2)$.



Luego las **ecuaciones paramétricas** de r son:

$$\begin{cases} x = x_0 + \lambda u_1 \\ y = y_0 + \lambda u_2 \end{cases}, \lambda \in \mathbb{R} \quad (3)$$

Se denominan ecuaciones paramétricas pues están dadas por el parámetro λ .

Observemos que recíprocamente, toda ecuación de la forma (3) con $\vec{u} = (u_1, u_2) \neq \vec{0}$ representa una recta en el plano que pasa por $P(x_0, y_0)$ en la dirección de \vec{u} .

Ejemplo 3. Sean $P(-1, 5)$, $\vec{u} = (3, -2)$. Entonces las ecuaciones paramétricas de la recta r que pasa por P en la dirección de \vec{u} son

$$\begin{cases} x = -1 + 3\lambda \\ y = 5 - 2\lambda \end{cases}, \lambda \in \mathbb{R} \quad (4)$$

Así obtenemos que $P \in r$, tomando $\lambda = 0$ y $Q_1(2, 3)$ y $Q_2(\frac{1}{2}, 4)$ son puntos de r , tomando $\lambda = 1$ y $\lambda = \frac{1}{2}$ respectivamente.

Queremos ahora determinar si los puntos $R(-7, 9)$ y $Q(2, 1)$ pertenecen o no a r .

Comencemos con R . $R \in r$ si y sólo si existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que

$$\begin{cases} -7 = -1 + 3\lambda \\ 9 = 5 - 2\lambda \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -6 = 3\lambda \\ 4 = -2\lambda \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2 = \lambda \\ -2 = \lambda \end{cases}$$

Concluimos entonces que $R \in r$.

Observemos que el punto $Q = (2, 1) \notin r$. En efecto, si perteneciese, debería existir $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que

$$\begin{cases} 2 = -1 + 3\lambda \\ 1 = 5 - 2\lambda \end{cases}$$

De la primera ecuación surge que debería ser $\lambda = 1$, pero de la segunda surge $\lambda = 2$. Luego $Q \notin r$.

De la ecuación (1) se obtiene una condición más simple. De hecho, $Q \in r$ si y sólo si \vec{PQ} es paralelo a \vec{u} . Pero $\vec{PQ} = (2 - (-1), 1 - 5) = (3, -4)$ y $\vec{u} = (3, -2)$ y $\frac{-4}{3} \neq \frac{-2}{3}$, o sea que \vec{PQ} y \vec{u} no son paralelos, y por lo tanto $Q \notin r$.

Observemos ahora que como $Q_1 \in \mathbb{R}$, la recta que pasa por Q_1 en la dirección de \vec{u} es la misma recta r . Si queremos encontrar las ecuaciones paramétricas tomando como punto de paso Q_1 en vez de P , obtenemos

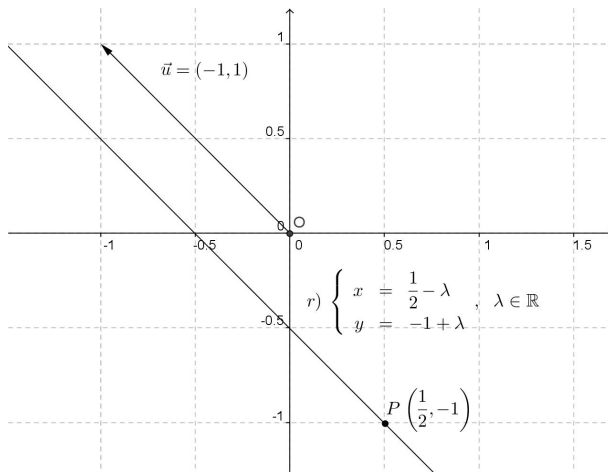
$$\begin{cases} x = 2 + 3\beta \\ y = 3 - 2\beta \end{cases}, \beta \in \mathbb{R} \quad (5)$$

Las ecuaciones (4) y (5) son distintas pero representan exactamente la misma recta r . Por ejemplo, para ver que $P \in r$, en (4) debemos tomar $\lambda = 0$ y en (5) debemos tomar $\beta = -1$. Par ver que $Q_1 \in r$, en (4) debemos tomar $\lambda = 1$ mientras que en (5) debemos tomar $\beta = 0$.

Ejemplo 4. Supongamos que queremos graficar la recta r de ecuaciones paramétricas

$$\begin{cases} x = \frac{1}{2} - \lambda \\ y = -1 + \lambda \end{cases}, \quad \lambda \in \mathbb{R}. \quad (6)$$

Comenzamos determinando un punto de paso. Tomando $\lambda = 0$, tenemos que $P(\frac{1}{2}, -1) \in r$. De (6) deducimos que la dirección de r está dada por el vector $\vec{u} = (-1, 1)$. Luego r es la recta dada en la siguiente figura:

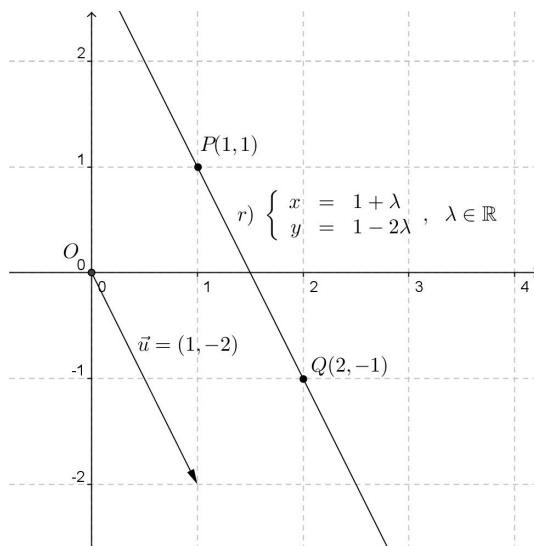


Ejemplo 5. Supongamos ahora que queremos determinar las ecuaciones de la recta que pasa por $P(1, 1)$ y $Q(2, -1)$. En este caso, el vector $\vec{u} = \overrightarrow{PQ} = (1, -2)$ determina la dirección de la recta y P es un punto de paso (observar que podríamos haber tomado \overrightarrow{QP} como dirección o Q como punto de paso y hubiésemos obtenido la misma recta).

Luego las ecuaciones paramétricas de la recta son

$$\begin{cases} x = 1 + \lambda \\ y = 1 - 2\lambda \end{cases}, \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

y la recta es la dada en la siguiente figura



Ejemplo 6. Sea r la recta de ecuaciones paramétricas

$$\begin{cases} x = -1 + \frac{1}{2}\lambda \\ y = 1 - \lambda \end{cases}, \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

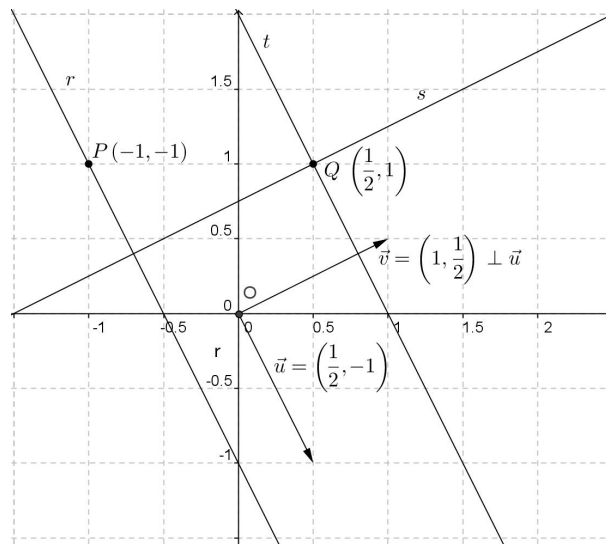
Sea $Q(\frac{1}{2}, 1)$. Entonces $Q \notin r$ (verificar) y existe una única recta t paralela a r por Q y una única recta s perpendicular a r por Q . Encontraremos las ecuaciones de ambas rectas.

Observemos que Q es un punto sobre ambas. Como t es paralela a r , su dirección es la misma que la de r , o sea, está dada por el vector \vec{u} . Luego las ecuaciones de t son

$$\begin{cases} x = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\lambda \\ y = 1 - \lambda \end{cases}, \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

Para encontrar las ecuaciones de s necesitamos hallar un vector $\vec{v} = (v_1, v_2)$ perpendicular a $\vec{u} = (\frac{1}{2}, -1)$, o sea, tal que $\frac{1}{2} \cdot v_1 + (-1) \cdot v_2 = 0$. Basta tomar $\vec{v} = (1, \frac{1}{2})$. Luego las ecuaciones de s son

$$\begin{cases} x = \frac{1}{2} + \lambda \\ y = 1 + \frac{1}{2}\lambda \end{cases}, \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$



2. Ecuación general de la recta en el plano

Hasta el momento hemos determinado las ecuaciones paramétricas de una recta en el plano, esto es, ecuaciones que dependen de un parámetro. Nuestro objetivo es encontrar una ecuación cartesiana de la recta, esto es, una ecuación que involucre sólo las variables x e y y sea satisfecha únicamente por las coordenadas de los puntos que pertenecen a la recta.

Supongamos que r es una recta de ecuaciones paramétricas

$$\begin{cases} x = x_0 + \lambda u_1 \\ y = y_0 + \lambda u_2 \end{cases}, \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

o sea r pasa por $P(x_0, y_0)$ y tiene la dirección de $\vec{u} = (u_1, u_2)$. Como $\vec{u} \neq \vec{0}$, debe ser $u_1 \neq 0$ o $u_2 \neq 0$.

Supongamos que $u_1 \neq 0$ (el desarrollo si $u_2 \neq 0$ es análogo). Si $Q(x, y) \in r$, debe existir $\lambda \in \mathbb{R}$ de modo que x, y, λ verifican las ecuaciones de r . Podemos despejar λ de la primer ecuación y reemplazarlo en la segunda. Esto es

$$\lambda = \frac{x - x_0}{u_1}$$

y por lo tanto

$$y = y_0 + \frac{x - x_0}{u_1} u_2 \Leftrightarrow y - \frac{u_2}{u_1} x + \frac{u_2}{u_1} x_0 - y_0 = 0$$

Multiplicando ambos lados de la última ecuación por $-u_1$ tenemos

$$u_2 x - u_1 y - u_2 x_0 + u_1 y_0 = 0 \quad (7)$$

Aquí x_0 , y_0 , u_1 y u_2 son datos. Luego un punto Q pertenece a la recta si y sólo si sus coordenadas (x, y) satisfacen la ecuación (7). Tomando $a = u_2$, $b = -u_1$, $c = u_1 y_0 - u_2 x_0$ resulta que la **ecuación general o cartesiana** de r es

$$ax + by + c = 0.$$

Observemos que $(a, b) = (u_2, -u_1)$ es un vector normal a la dirección de la recta r .

Veremos a continuación que una ecuación de este tipo es siempre la ecuación cartesiana de una recta.

Teorema 7. *Un lugar geométrico en el plano es una recta si y sólo si su ecuación cartesiana es de la forma*

$$\boxed{ax + by + c = 0} \quad (8)$$

con $a, b, c \in \mathbb{R}$, $(a, b) \neq \vec{0}$.

Demostración:

Ya vimos que si r es una recta que pasa por $P(x_0, y_0)$ en la dirección de $\vec{u} = (u_0, u_1)$, entonces la ecuación cartesiana de r es de la forma (8), tomando $a = u_2$, $b = -u_1$, $c = u_1 y_0 - u_2 x_0$.

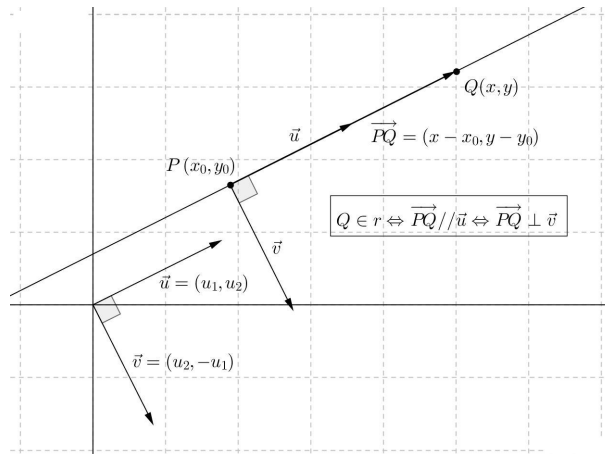
Veamos ahora que dados $a, b, c \in \mathbb{R}$ con $(a, b) \neq \vec{0}$, (8) es siempre la ecuación cartesiana de una recta.

Tomemos un par ordenado (x_0, y_0) cualquiera que sea solución de (8). Por ejemplo, podemos tomar $(0, -c/b)$ si $b \neq 0$ o $(-c/a, 0)$ si $a \neq 0$. Consideremos ahora el vector $\vec{v} = (a, b)$ y sea r la recta que pasa por $P(x_0, y_0)$ y su dirección es un vector \vec{u} perpendicular a \vec{v} .

Veremos que (x, y) es solución de (8) si y sólo si $Q(x, y) \in r$.

En efecto, tenemos claramente que

$$Q \in r \Leftrightarrow \overrightarrow{PQ} \parallel \vec{u} \Leftrightarrow \overrightarrow{PQ} \perp \vec{v} \Leftrightarrow \overrightarrow{PQ} \times \vec{v} = 0$$



Ahora, $\overrightarrow{PQ} = (x - x_0, y - y_0)$, y por lo tanto

$$\overrightarrow{PQ} \times \vec{v} = 0 \Leftrightarrow a(x - x_0) + b(y - y_0) = 0 \Leftrightarrow ax + by - (ax_0 + by_0) = 0 \Leftrightarrow ax + by + c = 0$$

pues $ax_0 + by_0 + c = 0$.

□

Observación 8. Sea r una recta de ecuación general $ax + by + c = 0$. Entonces el vector $\bar{v} = (a, b)$ es un vector perpendicular a r y $\bar{u} = (b, -a)$ o $\bar{u}' = (-b, a)$ son direcciones de r .

Observación 9. Si $\alpha \neq 0$ y ponemos $a' = \alpha a$, $b' = \alpha b$, $c' = \alpha c$, entonces $ax + by + c = 0$ y $a'x + b'y + c' = 0$ son ecuaciones cartesianas de la misma recta r .

Ejemplo 10. Hallaremos la ecuación general de la recta r de ecuaciones paramétricas

$$\begin{cases} x &= -1 + 3\lambda \\ y &= 5 - 2\lambda \end{cases}, \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

Lo haremos de las dos formas que hemos visto. Primero observemos que r es la recta que pasa por $P(-1, 5)$ en la dirección de $\bar{u} = (3, -2)$. Como $u_1 = 3 \neq 0$, podemos despejar λ de la primer ecuación y reemplazarlo en la segunda. Obtenemos así

$$\lambda = \frac{x+1}{3}, \quad y = 5 - 2\frac{x+1}{3} \Leftrightarrow 3y - 15 = -2x - 2$$

de donde obtenemos que la ecuación general de r es

$$2x + 3y - 13 = 0. \quad (9)$$

Por otra parte como $\bar{u} = (3, -2)$ es la dirección de r y $P(-1, 5)$ es un punto de paso, entonces $\bar{v} = (2, 3)$ es un vector normal a r y por lo tanto $Q(x, y) \in r$ si y sólo si

$$(x + 1, y - 5) \times (2, 3) = 0 \Leftrightarrow 2(x + 1) + 3(y - 5) = 0 \Leftrightarrow 2x + 3y - 13 = 0$$

de donde obtenemos la misma ecuación general de r .

Para ver si un punto pertenece o no a r basta verificar si sus coordenadas verifican o no la ecuación (9). Así $Q_1(2, 3) \in r$ pues $2 \cdot 2 + 3 \cdot 3 - 13 = 0$, $Q_2(-4, 7) \in r$ pues $2 \cdot (-4) + 3 \cdot 7 - 13 = 0$ y $Q_3 = (1, 1) \notin r$ pues $2 \cdot 1 + 3 \cdot 1 - 13 = -8 \neq 0$.

Ejemplo 11. Encontraremos ahora las ecuaciones paramétricas de la recta r de ecuación cartesiana $x - y + 5 = 0$. Necesitamos obtener primero un punto de paso. Reemplazamos x por el valor que queramos y vemos que valor debe tomar y . Así, tomando $x = 0$, $y = 5$, con lo cual la recta r pasa por el punto $P(0, 5)$. Como $\bar{v} = (1, -1)$ es un vector normal a r , su dirección viene dada por $\bar{u} = (1, 1)$. Luego las ecuaciones paramétricas de r son

$$\begin{cases} x &= \lambda \\ y &= 5 + \lambda \end{cases}, \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

Ejemplo 12. Encontraremos la ecuación general de la recta r que pasa por los puntos $P(1, 2)$ y $Q(2, 5)$. La dirección de la recta está dada por el vector $\bar{u} = \overrightarrow{PQ} = (1, 3)$ y por lo tanto un vector normal a la recta es $\bar{v} = (3, -1)$. Luego $R(x, y) \in r$ si y sólo si

$$\overrightarrow{PR} \times \bar{v} = 0 \Leftrightarrow (x - 1, y - 2) \times (3, -1) = 0 \Leftrightarrow 3(x - 1) - (y - 2) = 0 \Leftrightarrow 3x - y - 1 = 0$$

Observación 13. Sea $ax + by + c = 0$ la ecuación general de una recta r en el plano. Si alguno de los coeficientes a , b o c se anulan, la recta tiene características particulares:

- si $c = 0$, el punto $O(0, 0)$ verifica la ecuación de r , o sea que r es una recta que pasa por el origen.
- si $a = 0$, $b \neq 0$, la ecuación cartesiana puede escribirse como $y = -\frac{c}{b}$, o sea los puntos que satisfacen la ecuación de la recta son de la forma $Q(x, -\frac{c}{b})$, y por lo tanto r es una recta horizontal, paralela al eje x , que corta al eje y en el punto de ordenada $-\frac{c}{b}$.
- si $b = 0$, $a \neq 0$, la ecuación cartesiana puede escribirse como $x = -\frac{c}{a}$, o sea los puntos que satisfacen la ecuación de la recta son de la forma $Q(-\frac{c}{a}, y)$, y por lo tanto r es una recta vertical, paralela al eje y , que corta al eje x en el punto de abscisa $-\frac{c}{a}$.

Terminaremos esta sección dando otras formas que puede tomar la ecuación general de una recta en el plano.

Definición 14. Se denomina **ecuación normal** (o normalizada) de una recta r a una ecuación cartesiana de r de la forma $ax + by + c = 0$ con $|(a, b)| = \sqrt{a^2 + b^2} = 1$.

Es decir, una recta r de ecuación $ax + by + c$ está dada en forma normal si el vector normal $\bar{n} = (a, b)$ es un versor, esto es, si tiene módulo 1.

Para pasar de la expresión general $a'x + b'y + c' = 0$ a la ecuación normal, basta tomar

$$a = \frac{a'}{\sqrt{a'^2 + b'^2}}, \quad b = \frac{b'}{\sqrt{a'^2 + b'^2}}, \quad c = \frac{c'}{\sqrt{a'^2 + b'^2}}$$

Ejemplo 15. Si r es la recta de ecuación general $x + y - 2\sqrt{2} = 0$, entonces $(a', b') = (1, 1)$ y $\sqrt{a'^2 + b'^2} = \sqrt{2}$. Luego la ecuación normal de r es

$$\frac{1}{\sqrt{2}}x + \frac{1}{\sqrt{2}}y - 2 = 0$$

Ejemplo 16. La ecuación $\frac{1}{2}x + \frac{\sqrt{3}}{2}y - 5 = 0$ ya es la ecuación normal de la recta que representa, pues $\sqrt{(\frac{1}{2})^2 + (\frac{\sqrt{3}}{2})^2} = 1$.

Observación 17. Veremos más adelante que si $ax + by + c = 0$ es la ecuación normal de una recta r , entonces $|c|$ es la distancia de r al origen de coordenadas.

Si en la ecuación $ax + by + c$ de una recta r $a, b, c \neq 0$, podemos dividir por $-c$ y obtenemos

$$-\frac{a}{c}x - \frac{b}{c}y = 1 \Leftrightarrow \frac{x}{-\frac{c}{a}} + \frac{y}{-\frac{c}{b}} = 1$$

Observemos que los puntos $Q_1(-\frac{c}{a}, 0)$ y $Q_2(0, -\frac{c}{b})$ corresponden a las intersecciones de la recta r con el eje x y con el eje y respectivamente.

Definición 18. Una ecuación de una recta r de la forma

$$\frac{x}{k} + \frac{y}{h} = 1$$

se denomina **ecuación segmentaria** de la recta.

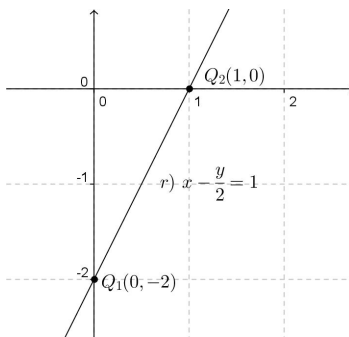
Observación 19. A diferencia de los otros tipos de ecuaciones de la recta r , si r no pasa por el origen ni es paralela a alguno de los ejes, la ecuación segmentaria de r es única.

En ese caso r corta al eje x en el punto de abscisa $x = k$ y corta al eje y en el punto de abscisa $y = h$.

Ejemplo 20. Consideremos la recta r de ecuación general $2x - y - 2 = 0$. Entonces la ecuación segmentaria de r es

$$x - \frac{y}{2} = 1$$

con lo cual r corta al eje x en $Q_1(1, 0)$ y al eje y en $Q_2(0, -2)$. Como toda recta está determinada por dos puntos, esta información nos permite graficar r con facilidad:



Finalmente analizaremos la forma posiblemente más conocida de la ecuación de la recta, la denominada **ecuación explícita**.

Supongamos que r es una recta de ecuación $ax + by + c = 0$ con $b \neq 0$. Entonces podemos despejar y en función de x y obtenemos

$$y = -\frac{b}{a}x - \frac{c}{a}$$

Poniendo $m = -\frac{a}{b}$ y $h = -\frac{c}{b}$, la ecuación de r puede escribirse como

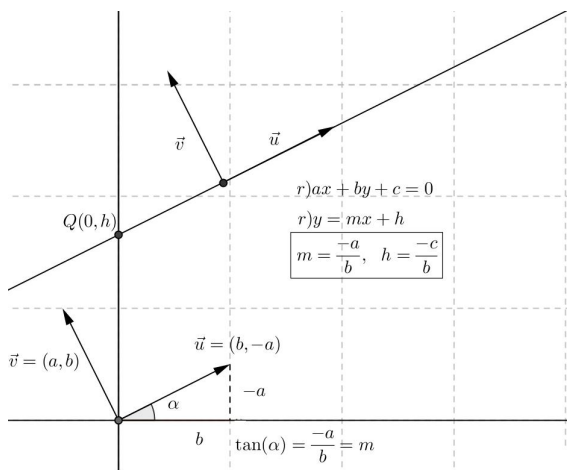
$$y = mx + h$$

m se denomina **pendiente** de la recta y h se denomina **ordenada al origen**.

La pendiente es la tangente del ángulo que forma r con el eje positivo de las x . De hecho $\vec{v} = (a, b)$ es un vector normal a r y entonces $\vec{u} = (b, -a)$ es la dirección de r . El ángulo α que forman r con el semieje positivo de las x es el ángulo que forman \vec{u} con el versor \vec{i} . Luego se tiene

$$\operatorname{tg}(\alpha) = \frac{-a}{b} = m$$

h se denomina ordenada al origen pues la recta r corta al eje y en el punto de ordenada h , o sea $Q(0, h) \in r$.

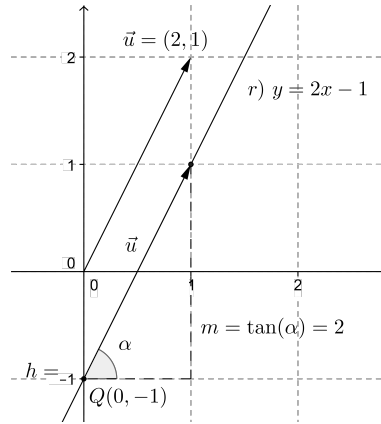


Observación 21. Observemos que si $y = mx + h$ es la ecuación explícita de la recta r , la ecuación general es $-mx + y - h = 0$, con lo cual $\vec{v} = (-m, 1)$ es un vector normal a r y $\vec{u} = (1, m)$ es la dirección de r . Como h es la ordenada al origen, $Q(0, h) \in r$ y por lo tanto las ecuaciones paramétricas de r son

$$\begin{cases} x = t \\ y = h + mt \end{cases}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Ejemplo 22. Sea r la recta de pendiente $m = 2$ y ordenada al origen -1 . Entonces la ecuación explícita y las ecuaciones paramétricas de r son

$$y = 2x - 1, \quad \begin{cases} x = t \\ y = -1 + 2t \end{cases}.$$

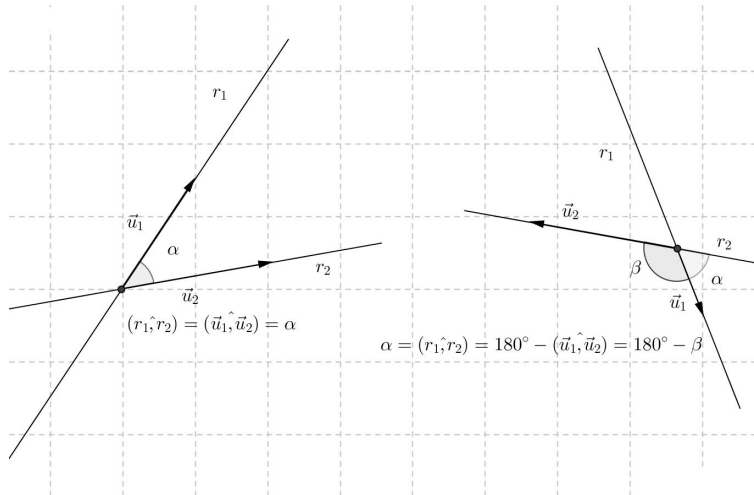


3. Problemas con rectas

3.1. Ángulo entre dos rectas

Definición 23. Dadas dos rectas r_1 y r_2 se denomina **ángulo** entre r_1 y r_2 , y se denota (r_1, \hat{r}_2) , al ángulo agudo o recto que ellas forman si las rectas se cortan en un punto. Si r_1 y r_2 son paralelas o coincidentes, $(r_1, \hat{r}_2) = 0$.

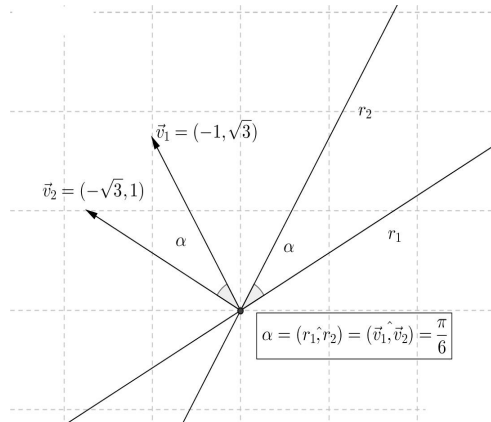
Observación 24. Si r_1 y r_2 son rectas de direcciones $\overline{u_1}$ y $\overline{u_2}$ entonces $(r_1, \hat{r}_2) = (\overline{u_1}, \hat{\overline{u_2}})$ o bien $(r_1, \hat{r}_2) = \pi - (\overline{u_1}, \hat{\overline{u_2}})$. Veremos en la práctica que vale una relación análoga con respecto al ángulo que forman los vectores normales a r_1 y r_2 .



Ejemplo 25. Sean $r_1) - x - \sqrt{3}y + 2(1 + \sqrt{3}) = 0$ y $r_2) - \sqrt{3}x + y - 2(1 + \sqrt{3}) = 0$. Entonces los vectores normales a r_1 y r_2 son $\overline{v_1} = (-1, \sqrt{3})$ y $\overline{v_2} = (-\sqrt{3}, 1)$ respectivamente. Tenemos

$$\cos(\overline{v_1}, \hat{\overline{v_2}}) = \frac{\overline{v_1} \times \overline{v_2}}{|\overline{v_1}| |\overline{v_2}|} = \frac{\sqrt{3} + \sqrt{3}}{4} = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow (\overline{v_1}, \hat{\overline{v_2}}) = \frac{\pi}{6}.$$

Luego $(r_1, \hat{r}_2) = \frac{\pi}{6}$.



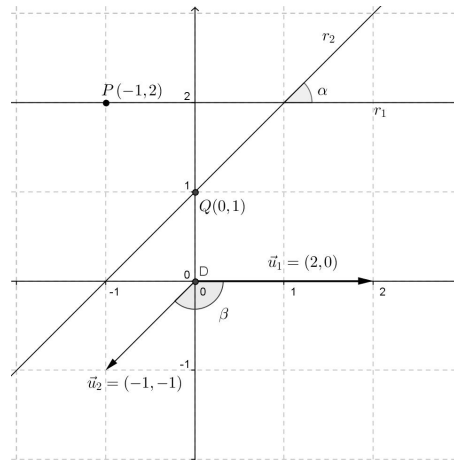
Ejemplo 26. Sean r_1 y r_2 las rectas de ecuaciones paramétricas

$$r_1) \begin{cases} x = -1 + 2t \\ y = 2 \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}; \quad r_2) \begin{cases} x = -t \\ y = 1 - t \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}.$$

Entonces r_1 es la recta que pasa por $P(-1, 2)$ en la dirección de $\bar{u}_1 = (2, 0)$ y r_2 es la recta que pasa por $Q(0, 1)$ en la dirección de $\bar{u}_2 = (-1, -1)$. Además

$$\cos(\bar{u}_1, \bar{u}_2) = \frac{\bar{u}_1 \times \bar{u}_2}{|\bar{u}_1| |\bar{u}_2|} = \frac{-1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \cos(\bar{u}_1, \bar{u}_2) = \frac{3}{4}\pi$$

Luego (\bar{u}_1, \bar{u}_2) no es un ángulo agudo, y entonces $(r_1, r_2) = \pi - (\bar{u}_1, \bar{u}_2) = \frac{\pi}{4}$.



3.2. Posición relativa entre dos rectas

Sean r_1 y r_2 dos rectas en el plano.

Entonces existen dos opciones: r_1 es paralela a r_2 o no lo es. En el caso que tengamos $r_1 \parallel r_2$ distinguiremos aún dos opciones, que r_1 y r_2 sean coincidentes, o que $r_1 \cap r_2 = \emptyset$.

En caso de que r_1 y r_2 no sean paralelas, se intersectarán en un único punto.

Estas tres opciones (que las dos rectas sean paralelas y distintas, que sean coincidentes, o que sean concurrentes en un punto) se denominan las **posiciones relativas** entre las dos rectas.

Nos proponemos determinar condiciones que nos permitan establecer las posiciones relativas de dos rectas, dependiendo si las ecuaciones de las rectas son paramétricas o cartesianas.

Caso I: r_1 y r_2 dadas en ecuaciones paramétricas.

Supongamos que las ecuaciones de r_1 y r_2 son respectivamente

$$r_1) \begin{cases} x = x_0 + tu_1 \\ y = y_0 + tu_2 \end{cases}, t \in \mathbb{R}; \quad r_2) \begin{cases} x = x'_0 + su'_1 \\ y = y'_0 + su'_2 \end{cases}, s \in \mathbb{R}.$$

Entonces $r_1 \parallel r_2$ si y sólo si $\bar{u} = (u_1, u_2) \parallel \bar{u}' = (u'_1, u'_2)$. En este caso, las rectas son coincidentes si el punto de paso $P(x_0, y_0)$ de r_1 verifica además la ecuación de r_2 , o equivalentemente, si el vector $\overrightarrow{PP'}$ determinado por los puntos de paso de cada recta es a su vez paralelo a \bar{u} y \bar{u}' .

En caso que no sean paralelas, encontrar el punto de intersección de ambas rectas puede ser más complicado. Lo analizaremos en los siguientes ejemplos.

Ejemplo 27. Sean r_1, r_2 y r_3 las rectas de ecuaciones

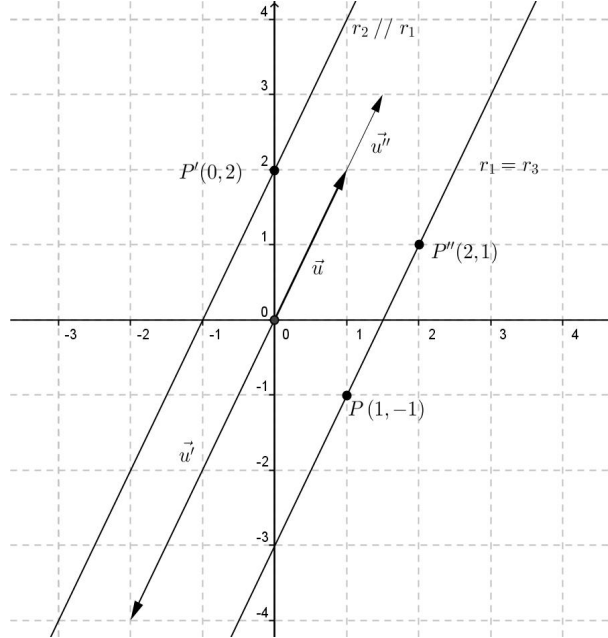
$$r_1) \begin{cases} x = 1 + t \\ y = -1 + 2t \end{cases}, t \in \mathbb{R}; \quad r_2) \begin{cases} x = -2s \\ y = 2 - 4s \end{cases}, s \in \mathbb{R}; \quad r_3) \begin{cases} x = 2 + \frac{3}{2}\lambda \\ y = 1 + 3\lambda \end{cases}, \lambda \in \mathbb{R}.$$

Entonces las direcciones de r_1, r_2 y r_3 son $\bar{u} = (1, 2)$, $\bar{u}' = (-2, -4)$ y $\bar{u}'' = (\frac{3}{2}, 3)$ respectivamente. Como $\bar{u}' = -2\bar{u}$ y $\bar{u}'' = \frac{3}{2}\bar{u}$, resulta $\bar{u} \parallel \bar{u}' \parallel \bar{u}''$, y por lo tanto

$$r_1 \parallel r_2 \parallel r_3.$$

Para determinar si son o no coincidentes, observemos que los puntos de paso de r_1, r_2 y r_3 son $P(1, -1)$, $P'(0, 2)$ y $P''(2, 1)$ respectivamente. Luego $\overrightarrow{PP'} = (-1, 3)$ que no es paralelo a \bar{u} (pues $\frac{-1}{1} \neq \frac{3}{2}$) con lo cual $P' \notin r_1$, y por lo tanto r_1 y r_2 no son coincidentes.

Por otra parte $\overrightarrow{PP''} = (1, 2) = \bar{u}$, luego $P'' \in r_1$ y por lo tanto $r_1 = r_3$.



Ejemplo 28. Sean r_1, r_2 y r_3 las rectas de ecuaciones

$$r_1) \begin{cases} x = 1 + t \\ y = -2 + t \end{cases}, t \in \mathbb{R}; \quad r_2) \begin{cases} x = 2s \\ y = 4 - s \end{cases}, s \in \mathbb{R}.$$

La direcciones de r_1 y r_2 son $\bar{u} = (1, 1)$ y $\bar{u}' = (2, -1)$ respectivamente. \bar{u} y \bar{u}' no son paralelos pues $\frac{2}{1} \neq \frac{-1}{1}$. Luego r_1 y r_2 se cortan en un único punto $P(x_0, y_0)$. Las coordenadas (x_0, y_0) de P deben satisfacer las ecuaciones de ambas rectas. Luego deben

existir $t, s \in \mathbb{R}$ tales que

$$\begin{cases} x_0 = 1 + t = 2s \\ y_0 = -2 + t = 4 - 2s \end{cases}.$$

Luego los parámetros t y s deben verificar el sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas

$$\begin{cases} 1 + t = 2s \\ -2 + t = 4 - 2s \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = 1 \\ s = 1 \end{cases}$$

Observemos que tomando el valor $t = 1$ en la ecuación de r_1 o el valor $s = 1$ en la ecuación de r_2 , obtenemos el punto $P(2, 3)$ de intersección de ambas rectas.

Caso II: r_1 y r_2 dadas en ecuaciones cartesianas.

Nuestro objetivo es caracterizar las posiciones relativas de r_1 y r_2 a partir de los coeficientes que aparecen en las ecuaciones generales de ambas rectas. Tenemos:

Teorema 29. Supongamos que r_1 y r_2 tienen ecuaciones

$$r_1) ax + by + c = 0, \quad r_2) a'x + b'y + c' = 0. \quad (10)$$

Entonces $r_1 // r_2$ si y sólo si $ab' - b'a = 0$. Más aún, si $r_1 // r_2$, entonces $r_1 = r_2$ si y sólo si $c = c' = 0$ o $\frac{c'}{c} = \frac{a'}{a}$ si $c \neq 0$, $a \neq 0$ o $\frac{c'}{c} = \frac{b'}{b}$ si $c \neq 0$, $a = 0$.

En consecuencia, r_1 y r_2 se cortan en un único punto $P(x, y)$ si y sólo si $ab' - b'a \neq 0$.

Demostración. Si las ecuaciones de r_1 y r_2 son las dadas en (10), los vectores normales a r_1 y r_2 son $\bar{v} = (a, b)$ y $\bar{v}' = (a', b')$ respectivamente. Luego

$$r_1 // r_2 \Leftrightarrow \bar{v} // \bar{v}'.$$

Ahora, si $a = 0$ (o $b = 0$), entonces $\bar{v} // \bar{v}'$ si y sólo si $a' = 0$ (resp. $b' = 0$) si y sólo si $ab' - a'b = 0$ (esta última equivalencia surge del hecho que a y b no pueden ser simultáneamente nulos).

Si $a \neq 0$ y $b \neq 0$, entonces

$$\bar{v} // \bar{v}' \Leftrightarrow \frac{a'}{a} = \frac{b'}{b} \Leftrightarrow ab' - a'b = 0.$$

Supongamos ahora que $r_1 = r_2$.

Si $c = 0$, $P(0, 0) \in r_1$ pues $a \cdot 0 + b \cdot 0 + c = c = 0$ y por lo tanto $P(0, 0) \in r_2 = r_1$. Luego $0 = a' \cdot 0 + b' \cdot 0 + c' = c'$.

Si $c \neq 0$, $r_1 \neq r_2$, supongamos $a \neq 0$. Entonces $P(-\frac{c}{a}, 0) \in r_1$ y por lo tanto $P \in r_2$. Luego

$$-\frac{c}{a}a' + c' = 0 \Leftrightarrow \frac{a'}{a} = \frac{c'}{c}$$

Si $b \neq 0$ es análogo.

La recíproca es similar y se deja como ejercicio.

Finalmente, concluimos que $r_1 \cap r_2 \neq \emptyset \Leftrightarrow ab' - a'b \neq 0$. □

Corolario 30. Sea $r_1) y = mx + h$, $r_2) y = m'x + h'$. Entonces:

1. $r_1 // r_2$ si y sólo si $m = m'$.
2. $r_1 = r_2$ si y sólo si $m = m'$, $h = h'$.

Demostración. Ejercicio. □

Definición 31. El número $ab' - a'b$ se denomina determinante de la matriz $\begin{pmatrix} a & b \\ a' & b' \end{pmatrix}$ y se denota

$$\begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix} = ab' - a'b$$

Ejemplo 32. Sean $r_1) x + y + 1 = 0$, $r_2) 2x + 2y + 5 = 0$, $r_3) \frac{1}{2}x - y - 2 = 0$ y $r_4) -x - y = 1$.

Entonces los vectores normales a r_1 , r_2 , r_3 y r_4 son $\bar{v} = (1, 1)$, $\bar{v}' = (2, 2)$, $\bar{v}'' = (\frac{1}{2}, -1)$ y $\bar{v}''' = (-1, -1)$.

Es inmediato que \bar{v} , \bar{v}' y \bar{v}''' son paralelos, y por lo tanto r_1 , r_2 y r_4 son paralelas. Si calculamos los respectivos determinantes tenemos

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = 1 \cdot 2 - 2 \cdot 1 = 0, \quad \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} = 0$$

Si comparamos r_1 y r_2 , tenemos $c = 1$, $c' = 5$, luego $\frac{c'}{c} = 5 \neq 2 = \frac{a'}{a}$, luego r_1 y r_2 son rectas paralelas no coincidentes.

Si comparamos r_1 y r_4 , tenemos $\frac{c'''}{c} = -1 = \frac{a'''}{a}$. Luego $r_1 = r_4$.

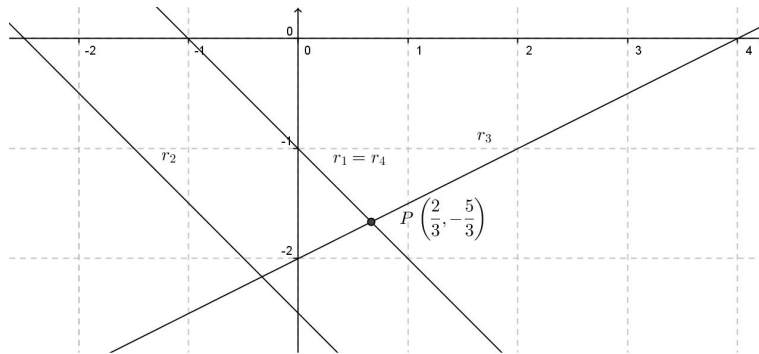
Comparemos ahora r_1 y r_3 . Calculamos el determinante correspondiente:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ \frac{1}{2} & -1 \end{vmatrix} = 1 \cdot (-1) - \frac{1}{2} \cdot 1 = -\frac{3}{2} \neq 0$$

Luego r_1 y r_3 no son paralelas. Para encontrar el punto $P(x, y)$ de intersección entre r_1 y r_3 , debemos observar que las coordenadas (x, y) de P deben satisfacer tanto la ecuación de r_1 como la de r_3 , y por lo tanto deben ser solución del sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} x + y + 1 = 0 \\ \frac{1}{2}x - y - 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = \frac{2}{3}, y = -\frac{5}{3}$$

Luego $r_1 \cap r_3 = \{P(\frac{2}{3}, -\frac{5}{3})\}$.



Observación 33. Consideremos el sistema de ecuaciones

$$S) \begin{cases} ax + by + c = 0 \\ a'x + b'y + c = 0 \end{cases}$$

con $(a, b) \neq \bar{0}$, $(a', b') \neq \bar{0}$.

Cada una de las ecuaciones del sistema es la ecuación de una recta. Luego tenemos tres opciones:

1. Las dos rectas no son paralelas, en cuyo caso se cortan en un único punto y el sistema tiene solución única, dada por las coordenadas del punto de intersección. En este caso el sistema se dice **compatible determinado**. En función del Teorema 29 se tiene:

El sistema S es compatible determinado si y sólo si $\begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix} = ab' - a'b \neq 0$.

2. Las dos rectas son paralelas y no coincidentes. En este caso, las rectas no se cortan en ningún punto, y por lo tanto el sistema S no tiene solución. Decimos que S es **incompatible**.
3. Las dos rectas son coincidentes, en cuyo caso las coordenadas de todos los puntos de cualquiera de las rectas es solución del sistema. En este caso decimos que S es **compatible indeterminado** y tiene infinitas soluciones. En función del Teorema 29 tenemos:

El sistema S es compatible indeterminado o incompatible si y sólo si $\begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix} = ab' - a'b = 0$.

4.3 Distancia de un punto a una recta

Definición 34. Dado un punto P del plano y una recta r , si trazamos una perpendicular a r que pase por P , ésta corta a r en un único punto P' . Se denomina **distancia** de P a r , y se denota $d(P, r)$ a la distancia $d(P, P')$ entre P y P' .

Observación 35. Si $P \in r$ es inmediato de la definición que $d(P, r) = d(P, P) = 0$.

Teorema 36. Sea r una recta de ecuación general $ax + by + c = 0$ y sea $P(x_0, y_0)$ un punto del plano. Entonces

$$d(P, r) = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

Demostración. Sea $\bar{v} = (a, b)$ un vector normal a r . Si Q es un punto cualquiera de r , entonces

$$d(P, r) = \left| \text{proy}_{\bar{v}} \overrightarrow{QP} \right|$$

Supongamos que Q tiene coordenadas (x', y') . Entonces, como $Q \in r$ debe verificarse

$$ax' + by' + c = 0 \Rightarrow c = -ax' - by' \quad (11)$$

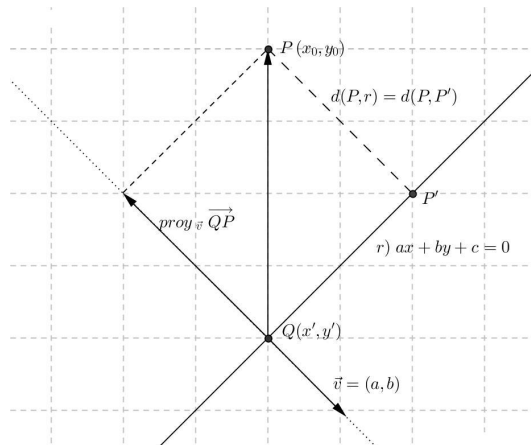
Por otra parte, $\overrightarrow{QP} = (x_0 - x', y_0 - y')$ y $\bar{v}_0 = \left(\frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}, \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} \right)$ es el versor asociado a \bar{v} . Luego

$$\left| \text{proy}_{\bar{v}} \overrightarrow{QP} \right| = |(\overrightarrow{QP} \cdot \bar{v}_0) \cdot \bar{v}_0| = \left| \frac{a(x_0 - x') + b(y_0 - y')}{\sqrt{a^2 + b^2}} \right|$$

Ahora $a(x_0 - x') + b(y_0 - y') = ax_0 + by_0 - ax' - by' = ax_0 + by_0 + c$, donde la última igualdad surge de (11). Luego

$$d(P, r) = \left| \text{proy}_{\bar{v}} \overrightarrow{QP} \right| = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

□



Corolario 37. Sea $ax + by + c = 0$ la ecuación normal de una recta r . Entonces

$$|c| = d(O, r)$$

donde O es el origen de coordenadas.

Demostración. Ejercicio. □

Ejemplo 38. Sea r la recta por $Q(1, 1)$ en la dirección de $\bar{u} = (-1, 2)$, y sean $P_1 (-2, 3)$, $P_2 (-1, 5)$. Queremos determinar $d(P_1, r)$ y $d(P_2, r)$. Un vector normal a r es $\bar{v} = (2, 1)$, con lo cual las ecuaciones cartesianas de r vienen dadas por

$$(x - 1, y - 1) \times \bar{v} = 0 \Leftrightarrow 2x + y - 3 = 0$$

Entonces

$$d(P_1, r) = \frac{|2 \cdot (-2) + 1 \cdot 3 - 3|}{\sqrt{2^2 + 1^2}} = \frac{4}{\sqrt{5}}.$$

Observemos que $P_2 \in r$ pues $2 \cdot (-1) + 5 - 1 = 0$, luego $d(P_2, r) = 0$.

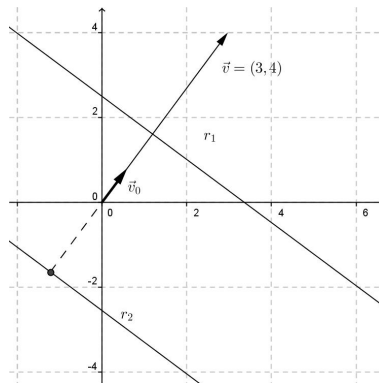
Ejemplo 39. Queremos hallar las ecuaciones de las rectas normales al vector $\bar{v} = (3, 4)$ que están a distancia 2 del origen de coordenadas. Observemos que $|\bar{v}| = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$. Entonces el versor asociado a \bar{v} es $\bar{v}_0 = \left(\frac{3}{5}, \frac{4}{5}\right)$. Luego las rectas normales a \bar{v} tienen ecuaciones normales de la forma

$$\frac{3}{5}x + \frac{4}{5}y + c = 0.$$

Como queremos hallar las rectas a distancia 2 del origen, se debe verificar $|c| = d(O, r) = 2$, luego $c = \pm 2$. Concluimos que las dos rectas normales a \bar{v} a distancia 2 del origen son las rectas r_1 y r_2 de ecuaciones

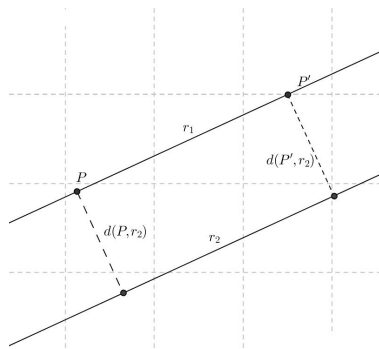
$$r_1) \frac{3}{5}x + \frac{4}{5}y + 2 = 0, \quad r_2) \frac{3}{5}x + \frac{4}{5}y - 2 = 0.$$

□



Consideremos ahora r_1 y r_2 dos rectas paralelas. Entonces cualesquiera sean $P, P' \in r_1$ se verifica

$$d(P, r_2) = d(P', r_2).$$



Podemos entonces hacer la siguiente definición:

Definición 40. Se denomina distancia entre las rectas paralelas r_1 y r_2 y se denota $d(r_1, r_2)$ a $d(P, r_2)$ siendo P un punto cualquiera de r_1 .

Ejemplo 41. Consideremos las rectas $r_1) 2x + y - 1 = 0$ y $r_2) x + \frac{1}{2}y + 2 = 0$. Entonces r_1 y r_2 son rectas paralelas no coincidentes (verificarlo). Para calcular $d(r_1, r_2)$ tomamos un punto P cualquiera de r_1 , por ejemplo el punto $P(0, 1)$. Entonces

$$d(r_1, r_2) = d(P, r_2) = \frac{|0 + \frac{1}{2} \cdot 1 + 2|}{\sqrt{1^2 + (\frac{1}{2})^2}} = \frac{5}{\sqrt{5}} = \sqrt{5}$$

3.3. Inecuaciones lineales en dos incógnitas

Hemos visto que la ecuación $ax + by + c = 0$ representa una recta en el plano, siempre que $(a, b) \neq \bar{0}$. Nos proponemos ahora determinar cuál es el lugar geométrico de los puntos del plano cuyas coordenadas satisfacen la inecuación $ax + by + c \geq 0$ o $ax + by + c \leq 0$.

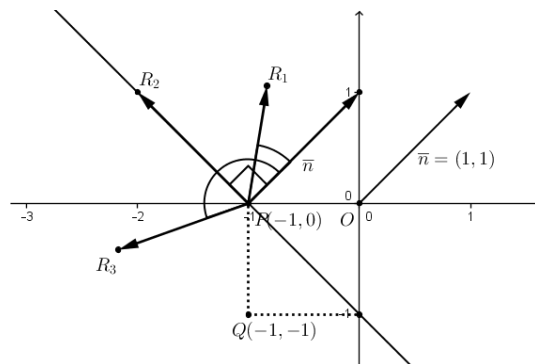
Comencemos analizando un ejemplo sencillo. La recta $y = 0$ es el eje x . Si consideramos la inecuación $y \geq 0$, el lugar geométrico que determina es el semiplano superior, incluyendo el eje x , y la inecuación $y < 0$ determina el semiplano inferior, sin el eje x .

Si ahora consideramos el conjunto $S = \{P(x, y) : x \geq 2\}$, es fácil verificar que se trata del semiplano a la derecha de la recta $x = 2$ e incluye a la recta.

En general una inecuación como la que planteamos al inicio de esta sección representará siempre un semiplano.

Analicemos otro ejemplo. Sea r la recta de ecuación $x + y + 1 = 0$ y consideremos los puntos $Q(-1, -1)$ y $O(0, 0)$. Sean S_1 el semiplano determinado por r que contiene a O y S_2 el semiplano que contiene a Q .

Observemos que un vector normal a r es $\bar{n} = (1, 1)$ y apunta hacia el semiplano que contiene a O . Fijemos un punto P de r , por ejemplo $P(-1, 0)$. Entonces R es un punto del semiplano S_1 si y sólo si $(\overrightarrow{PR}, \bar{n}) < 90^\circ$, R es un punto de la recta r si y sólo si $(\overrightarrow{PR}, \bar{n}) = 90^\circ$ y R es un punto del semiplano S_2 si y sólo si $(\overrightarrow{PR}, \bar{n}) > 90^\circ$, como se observa en la figura.



Por otra parte, $(\overrightarrow{PR}, \bar{n}) < 90^\circ$ si y sólo si $\cos(\overrightarrow{PR}, \bar{n}) > 0$, y $(\overrightarrow{PR}, \bar{n}) > 90^\circ$ si y sólo si $\cos(\overrightarrow{PR}, \bar{n}) < 0$ (recordemos que el ángulo entre dos vectores varía entre 0° y 180° y en este intervalo el coseno define una función inyectiva). Por otra parte,

$$\cos(\overrightarrow{PR}, \bar{n}) = \frac{\overrightarrow{PR} \cdot \bar{n}}{|\overrightarrow{PR}| \cdot |\bar{n}|} < 0 \Leftrightarrow \overrightarrow{PR} \cdot \bar{n} < 0 \Leftrightarrow (x + 1, y) \cdot (1, 1) < 0 \Leftrightarrow x + y + 1 < 0.$$

Concluimos que $S_1 = \{R(x, y) : x + y + 1 > 0\}$, y de manera análoga que $S_2 = \{R(x, y) : x + y + 1 < 0\}$.

Siguiendo los pasos de este ejemplo particular, podemos demostrar el siguiente teorema general:

Teorema 42. Dada una recta r de ecuación cartesiana $ax + by + c = 0$, sea $P \in r$ y Q un punto tal que $\bar{n} = (a, b) = \overrightarrow{PQ}$. Entonces el semiplano determinado por r que contiene a Q está caracterizado por la inecuación

$$ax + by + c > 0$$

y el semiplano opuesto está caracterizado por la inecuación $ax + by + c < 0$.

Demostración. Nos guiaremos por la figura del ejemplo anterior. Si r tiene ecuación $ax + by + c = 0$, $\vec{n} = (a, b)$ es un vector normal a r . Fijemos $P(x_0, y_0) \in r$ y sea Q tal que $\vec{n} = \vec{PQ}$. Sea S el semiplano determinado por r que contiene a Q .

Entonces un punto $R(x, y) \in S$ si y sólo si $(\vec{PR}, \vec{n}) < 90^\circ$, si y sólo si $\cos(\vec{PR}, \vec{n}) > 0$, que a la vez es equivalente a pedir que $\vec{PR} \times \vec{n} > 0$. Luego $R \in S$ si y sólo si $(x - x_0, y - y_0) \times (a, b) = ax + by - ax_0 - by_0 > 0$.

Observando que como $P \in r$ se tiene $c = -ax_0 - by_0$, resulta que $R \in S$ si y sólo si $ax + by + c > 0$. \square

En la práctica, para determinar de qué semiplano se trata nos basta encontrar un punto que satisfaga la inecuación. Analizaremos un ejemplo.

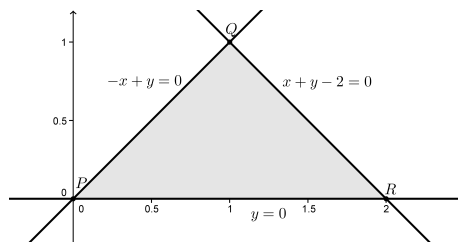
Ejemplo 43. Consideremos el sistema de inecuaciones

$$\begin{cases} y \geq 0 \\ -x + y \leq 0 \\ x + y - 2 \leq 0 \end{cases}$$

Consideremos el punto P de intersección de la recta $y = 0$ con la recta $-x + y = 0$, el punto Q de intersección de la recta $-x + y = 0$ con la recta $x + y - 2 = 0$ y el punto R de intersección de la recta $y = 0$ con la recta $x + y - 2 = 0$. Entonces $P(0, 0)$, $Q(1, 1)$ y $R(2, 0)$.

Por otra parte, $y \geq 0$ representa el semiplano superior al eje x , con el eje x incluído. $-x + y \leq 0$, representa el semiplano determinado por la recta $x + y = 0$ que contiene al punto R e incluye a la recta y $x + y - 2 \leq 0$ representa el semiplano que determina la recta $x + y - 2 = 0$ que contiene al punto P e incluye a la recta.

Luego las soluciones del sistema, son las coordenadas de los puntos $T(x, y)$ interiores y sobre los lados del triángulo $\triangle PQR$.



4. Ejercicios Propuestos

1. Consideremos la recta r de ecuaciones paramétricas

$$\begin{cases} x = 2 - t \\ y = 1 + 4t \end{cases}, t \in \mathbb{R}$$

- Determinar si alguno de los puntos $P(1, 5)$ y $Q(3, -2)$ pertenecen a r .
- ¿Para qué valor del parámetro t se obtiene el punto $R(-2, 17)$?
- Determinar para qué valores del parámetro t se obtienen los puntos de intersección de las rectas con cada uno de los ejes coordenados.
- Calcular el área del triángulo que forma la recta con los ejes coordenados.
- Escribir otras ecuaciones paramétricas de la misma recta.
- Determinar la ecuación general de la recta.

2. Sea r la recta de ecuación $3x - 2y - 6 = 0$.

- Determinar si los puntos $P_1(2, 0)$, $P_2(-1, 7)$, $P_3(2, 2)$, $P_4(-4, -9)$, $P_5(3, \frac{3}{2})$, $P_6(0, -4)$ pertenecen a r .
- Sabiendo que $Q_i \in r$, determinar la coordenada que falta: $Q_1(4, y_1)$, $Q_2(0, y_2)$, $Q_3(x_3, 5)$, $Q_4(x_4, \sqrt{2})$.

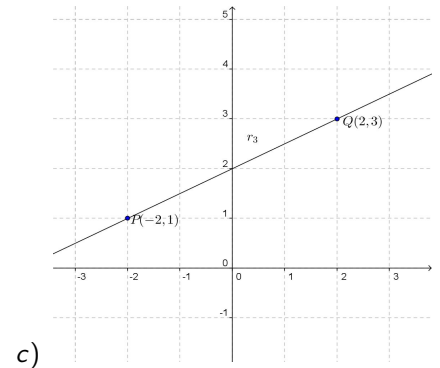
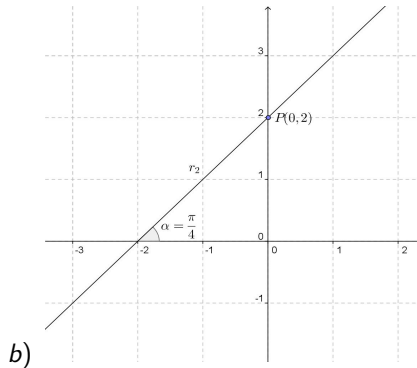
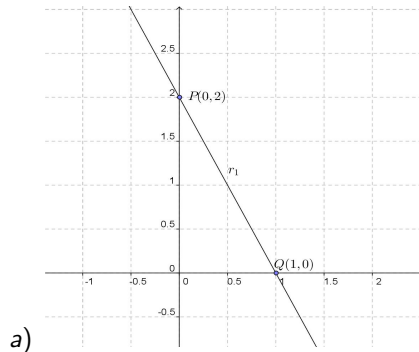
3. Encontrar las ecuaciones paramétrica y general de las siguientes rectas, y representarlas gráficamente.

- La recta r_1 pasa por el punto $P(-1, 2)$ en la dirección del vector $\vec{u} = (1, -2)$.
- La recta r_2 pasa por los puntos $P(-1, -1)$ y $Q(1, 2)$.
- La recta r_3 es paralela a r_1 y pasa por el punto $R(1, 1)$.
- La recta r_4 es perpendicular a r_1 y pasa por $R(1, 1)$.
- La recta r_5 es paralela al eje x y pasa por $T(1, 2)$.
- La recta r_6 es perpendicular al eje x y pasa por $T(1, 2)$.

4. Encontrar las ecuaciones segmentaria, normal y explícita de cada una de las rectas r_1 , r_2 y r_3 del ejercicio 3. Determinar además en cada caso a partir de las ecuaciones obtenidas:

- un versor normal a la recta;
- los puntos de intersección de la recta con cada uno de los ejes;
- la pendiente de cada recta.

5. Determinar las ecuaciones de las rectas r_1 , r_2 y r_3 cuyas gráficas se muestran a continuación. En cada caso usar el tipo de ecuación más adecuado.



6. Dados los puntos $A(3, -2)$ y $B(8, 4)$, determinar la ecuación de la recta que contiene a la hipotenusa de un triángulo ABC isósceles y rectángulo en A .

7. Determinar el ángulo que forman los siguientes pares de rectas:

- $r_1) 3x - y + 2 = 0$, $r_2) 2x + y - 2 = 0$.
- $r_1) x + 2y + 1 = 0$, $r_2) 2x - y - 2 = 0$.

8. Sean r_1 y r_2 rectas de ecuaciones $a_1x + b_1y + c_1 = 0$ y $a_2x + b_2y + c_2 = 0$ respectivamente. Demostrar que r_1 y r_2 son perpendiculares si y sólo si $a_1a_2 + b_1b_2 = 0$.

9. Demostrar que la ecuación de una recta que contiene a los puntos $P(x_0, y_0)$ y $Q(x_1, y_1)$, $x_0 \neq x_1$ es

$$y - y_0 = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}(x - x_0).$$

Utilizar esta ecuación para determinar la ecuación explícita de las siguientes rectas:

- a) r_1 es la recta que pasa por $P(1,2)$ y por $Q(3,5)$.
 b) r_2 es la recta que corta al eje y en el punto de ordenada $y = 5$ y pasa por $Q(1,2)$.
 c) r_3 es la recta de pendiente $m = 2$ y pasa por $P(1,2)$.

10. Sean $r_1) y = m_1x + h_1$, $r_2) y = m_2x + h_2$ dos rectas dadas en sus ecuaciones explícitas.

- a) Probar que $\cos(\hat{r}_1, \hat{r}_2) = \frac{1 + m_1m_2}{\sqrt{1 + m_1^2}\sqrt{1 + m_2^2}}$.
 b) Probar que r_1 y r_2 son perpendiculares si y sólo si $m_2 = -\frac{1}{m_1}$.
 c) Determinar el valor de α para que las rectas

$$r_1) y = \frac{\alpha}{1 - \alpha}x + 2\frac{\alpha + 2}{\alpha - 1} \quad r_2) y = \frac{3\alpha}{3\alpha + 1}x + 1$$

sean perpendiculares.

11. Determinar la posición relativa de las rectas r_1 y r_2 dadas en cada caso. Si son concurrentes, determinar el punto de intersección de las mismas.

- a) $r_1) -3x - y + 17 = 0$, $r_2) x - 3y - 2 = 0$;
 b) $r_1) x + 2y = 0$, $r_2) 2x - 4y + 3 = 0$;
 c) $r_1) \begin{cases} x = 2 + 5t \\ y = 3 - 2t \end{cases}, t \in \mathbb{R}$, $r_2) \begin{cases} x = 7 - \frac{15}{2}s \\ y = 1 + 3s \end{cases}, s \in \mathbb{R}$.
 d) $r_1) 3x + 4y - 1 = 0$, $r_2) -4x + 3y + 5 = 0$;
 e) $r_1) y + \sqrt{2} = 0$, $r_2) 3y - 1 = 0$
 f) $r_1) \begin{cases} x = 1 + 3t \\ y = 2 - 5t \end{cases}, t \in \mathbb{R}$, $r_2) \begin{cases} x = 4 - 6s \\ y = -3 - 15s \end{cases}, s \in \mathbb{R}$.

12. Dadas las rectas

$$r_1) x - 2y - 2 = 0 \quad r_2) 3x - 2y + 6 = 0 \quad r_3) x + y - 1 = 0$$

- a) Hallar las coordenadas de los vértices A_1 , A_2 y A_3 del triángulo que ellas determinan.
 b) Determinar las longitudes de los lados del triángulo.
 c) Determinar los ángulos internos del triángulo.

13. Determinar la ecuación de una recta que contenga a la intersección de $r_1) 2x - y + 2 = 0$ y $r_2) x - y + 1 = 0$ y forme con los ejes coordenados un triángulo de área igual a $\frac{3}{2}$.

14. Determinar la distancia del punto $P(1,2)$ a cada una de las siguientes rectas:

- a) $r_1) 2x + \sqrt{5}y - 2\sqrt{5} = 0$;
 b) $r_2) \begin{cases} x = -1 + 3t \\ y = 2 - 4t \end{cases}, t \in \mathbb{R}$;
 c) $r_3) 3x - 4y + 5 = 0$

15. Mostrar que los siguientes pares de rectas son paralelas y determinar la distancia entre ellas.

- a) $r_1) 12x - 5y - 39 = 0$, $r_2) -12x + 5y - 13 = 0$.

$$b) \quad r_1) \begin{cases} x = 3 + 5t \\ y = 2 + 2t \end{cases}, \quad t \in \mathbb{R}, \quad r_2) \begin{cases} x = 1 + 5s \\ y = -2 + 2s \end{cases}, \quad s \in \mathbb{R}.$$

16. Dadas las rectas $r_1) 4x + 3y + 9 = 0$ y $r_2) x - 3y + 1 = 0$, determinar un punto $P \in r_2$ tal que:

$$i) d(P, r_1) = 4, \quad ii) \overline{OP} \cap r_1 = \emptyset$$

siendo O el origen de coordenadas.

17. El punto $G(-1, 0)$ es el centro de un cuadrado, uno de cuyos lados pertenece a la recta $r_1) x + 3y - 5 = 0$. Determinar las ecuaciones de las rectas a las cuales pertenecen los otros tres lados.

18. Los puntos $A(2, 3)$ y $B(6, 4)$ son vértices de un rectángulo. Hallar las coordenadas de los otros vértices, sabiendo que una de las diagonales está contenida en la recta de ecuaciones $\begin{cases} x = 2 + 3t \\ y = 3 + 5t \end{cases}, \quad t \in \mathbb{R}.$