# Resolución de algunos ejercicios pertenecientes a la Práctica 1

☞ Resolver cada una de las siguientes inecuaciones fraccionarias. Proporcionar el conjunto solución tanto en forma de intervalo como gráficamente.

b) $\dfrac{4x-3}{3-x} > 0$

✎ Para resolver esta inecuación debemos tener en cuenta que $\dfrac{a}{b} > 0$ si y sólo si $a$ y $b$ son los dos positivos o los dos negativos. Es decir que debemos considerar ambos casos:

$$(1)\begin{cases} 4x-3 > 0 \\ 3-x > 0 \end{cases} \qquad (2)\begin{cases} 4x-3 < 0 \\ 3-x < 0 \end{cases}$$

Comenzamos con el sistema $(1)$:

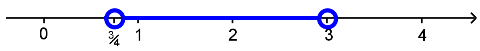
$$4x-3>0 \underset{\text{T.7.1.}}{\Leftrightarrow} 4x-3+3>0+3 \underset{\substack{\text{Ax. 4}\\ \text{Ax. 5}}}{\Leftrightarrow} 4x>3 \underset{\text{T.7.3i)}}{\Leftrightarrow} 4^{-1}4x>4^{-1}\cdot 3 \underset{\substack{\text{Ax. 1}\\ \text{Ax. 2}}}{\Leftrightarrow} (4^{-1}4)x>3\cdot 4^{-1} \underset{\substack{\text{Ax. 6}\\ \text{Def.}a/b}}{\Leftrightarrow} x>\frac{3}{4}$$

$$3-x>0 \underset{\text{T.7.1.}}{\Leftrightarrow} 3-x+x>0+x \underset{\substack{\text{Ax. 4}\\ \text{Ax. 5}}}{\Leftrightarrow} 3>x$$

Luego, como ambas inecuaciones deben verificarse al mismo tiempo el conjunto solución del sistema $(1)$ es el intervalo $(\frac{3}{4}, 3)$. De la misma forma, resolvemos el sistema $(2)$, pero en este caso el conjunto solución es el conjunto vacío.

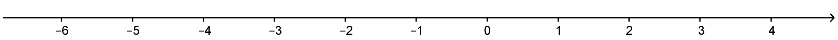
La solución a la inecuación original, es la unión de las soluciones de los sistemas. Entonces en este caso la solución es el conjunto S=$(\frac{3}{4}, 3) \cup \emptyset = (\frac{3}{4}, 3)$.

Gráficamente,

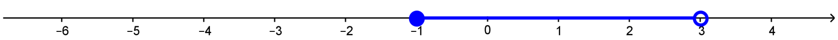



☞ Encontrar gráfica y analíticamente los puntos que distan al $-1$ en menos de $4$.

✎ Para hallar gráficamente los puntos que distan al $-1$ en menos de $4$, miremos la recta real.



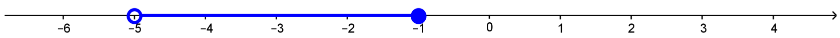

Una vez posicionados en $-1$, consideramos los puntos a la derecha, que distan menos que $4$ serán los puntos entre $-1$ y $3$. Observemos que la distancia entre $-1$ y $3$ es exactamente $4$.



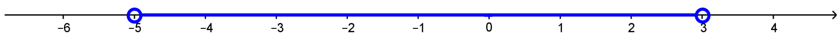


ESCUELA DE CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
Av. Pellegrini 250. Rosario
+54 0341 - 480 2649 internos 216 - 119

Luego, considerando los puntos a la izquierda de $-1$, que distan en menos de 4 serán los puntos entre $-5$ y $-1$.




Entonces el conjunto de puntos que distan al $-1$ en menos de $4$ es el conjunto $(-5, 3)$.




Analíticamente, la distancia entre $-1$ y un punto $x$ está dada por $|x-(-1)|$. Luego, los puntos que distan de $-1$ en menos que $4$, están dados por el conjunto solución de la inecuación $|x-(-1)| < 4$.

$|x-(-1)| < 4 \underset{\text{Prop.2.4.a)}}{\Leftrightarrow} -4 < x-(-1) < 4 \underset{\text{T.2.1.}}{\Leftrightarrow} -4 < x+1 < 4 \underset{\text{T.7.1.}}{\Leftrightarrow} -4-1 < x+1-1 < 4-1 \underset{\text{Ax.2}}{\Leftrightarrow}$ $-5 < x+(1-1) < 3 \underset{\text{Ax.4}}{\Leftrightarrow} -5 < x < 3.$

Es decir que el conjunto solución correspondiente a la inecuación es el intervalo $(-5, 3)$, que coincide con la solución hallada gráficamente.

☞ Sea $G$ el subconjunto de los números reales definido por

$$G = \left\{ x \in \mathbb{R} : x = 1 - \frac{1}{k}, k \in \mathbb{N} \right\}.$$

-a- Determinar el ínfimo y el supremo de $G$.

-b- Determinar si el ínfimo y el supremo hallados en el apartado anterior son, respectivamente, mínimos y máximos de $G$.

✎ Antes de abordar el problema en forma analítica es recomendable representar (gráficamente) algunos elementos del conjunto $G$ en la recta real (por ejemplo, los corrrespondientes a los primeros 10 números naturales). Si la representación es correcta, ésta debería sugerir que todos los elementos de $G$ pertenecen al intervalo $[0, 1)$. Más aún, debería sugerir que $0$ es el menor de los elementos de $G$ y que a medida que $k$ se hace más grande, los elementos de $G$ que son de la forma $1 - \frac{1}{k}$ se “aproximan indefinidamente a $1$“ sin llegar a tocarlo. Dicho de otra forma, de la gráfica deberíamos intuir que $0$ es el ínfimo de $G$ y que $1$ es el supremo. Desde luego, dado que no podemos representar a todos los elementos de $G$ (¡$G$ tiene infinitos elementos!), lo anterior no prueba nada. En lo que sigue, vamos a dar una prueba formal de lo que observamos gráficamente. Comencemos por mostrar que $\sup(G) = 1$.

En primer lugar, notemos que $1$ es cota superior de $G$. En efecto, si $k \in \mathbb{N}$, tenemos que $k > 0$ y del **Teorema 7 (9.)**, sigue que $\frac{1}{k} > 0$. Ahora, por el **Teorema 7 (6.)**, podemos afirmar que $-\frac{1}{k} < 0$ y, sumando $1$ en ambos miembros de esta desigualdad, obtenemos que

$$1 - \frac{1}{k} < 1,$$

para todo $k \in \mathbb{N}$. Esto muestra que $1$ es cota superior de $G$.


ESCUELA DE CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
Av. Pellegrini 250. Rosario
+54 0341 - 480 2649 internos 216 - 119

Por otra parte, dado $\epsilon > 0$, sabemos que existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{1}{n} < \epsilon$ (**Corolario 5. (iii)**) y, en consecuencia, tenemos que $-\epsilon < -\frac{1}{n}$. Nuevamente, sumando $1$ en ambos miembros de esta desigualdad, obtenemos que

$$1 - \epsilon < 1 - \frac{1}{n}.$$

Esto muestra que, dado $\epsilon > 0$, podemos encontrar un elemento de $G$ (el elemento $1 - \frac{1}{n}$) mayor que $1 - \epsilon$. Finalmente, usando la caracterización del supremo vista en teoría (**Teorema 9.**), podemos afirmar que $\sup(G) = 1$. De paso, notemos que $G$ no tiene máximo, puesto que $1 \notin G$ (¡probarlo!).

Ahora, veamos que $\min(G) = 0$ ( y por lo tanto, también tenemos que $\inf(G) = 0$). Para esto, notemos que si $k \in \mathbb{N}$, entonces $k \geq 1$ y, en consecuencia, $-\frac{1}{k} \geq -1$. Sumando $1$ en ambos miembros de la desigualdad anterior resulta que $1 - \frac{1}{k} \geq 0$ (esto muestra que $0$ es cota inferior de $G$). Además, como $0 \in G$ (puesto que podemos escribir a $0$ como $1 - \frac{1}{1}$), tenemos que $\min(G) = 0$.

☞ Sea $A$ un conjunto no vacío de números reales. Se define el conjunto siguiente:

$$-A = \{x \in \mathbb{R} : -x \in A\}.$$

-a- Siendo $A_1$, $A_2$ y $A_3$ los conjuntos encontrados en el ejercicio 5, hallar los conjuntos $-A_1$, $-A_2$ y $-A_3$.

-b- Mostrar que $-A$ es un conjunto no vacío y que $-(-A) = A$.

-c- Hallar las condiciones bajo las cuales se tiene que $-A = A$.

-d- Muestre que si $A$ es un conjunto acotado superiormente (inferiormente) entonces $-A$ es un conjunto acotado inferiormente (superiormente).

-e- Muestre que si $A$ posee supremo entonces $-A$ posee ínfimo y se verifica que $\inf(-A) = -\sup(A)$, y análogamente si $A$ posee ínfimo entonces $-A$ posee supremo y se verifica que $\sup(-A) = -\inf(A)$.

-f- Utilizar los resultados de las partes anteriores para mostrar que todo conjunto no vacío de números reales acotado inferiormente posee ínfimo.

✎

-a- $A_1 = (-\infty, -3) \cup \left(-\frac{1}{2}, 1\right)$. Luego por definición (de conjunto $-A$), resulta $-A_1 = \{x \in \mathbb{R} : -x \in A_1\} = \{x \in \mathbb{R} : -x \in (-\infty, -3) \cup \left(-\frac{1}{2}, 1\right)\} = \{x \in \mathbb{R} : -x \leq -3 \vee -\frac{1}{2} < -x < 1\} = \{x \in \mathbb{R} : x \geq 3 \vee -1 < x < \frac{1}{2}\} = \left(-1, \frac{1}{2}\right) \cup (3, +\infty)$.

Análogamente resultan $A_2 = \left(\frac{3}{4}, 3\right) \implies -A_2 = \left(-3, -\frac{3}{4}\right)$ y $A_3 = \left(-\infty, \frac{7}{5}\right) \cup \left[\frac{17}{24}, +\infty\right) \implies -A_3 = \left(-\infty, \frac{17}{24}\right] \cup \left(\frac{7}{5}. +\infty\right)$.

-b- 1) En primer lugar veamos que $-A$ es un conjunto no vacío.

$A \neq \emptyset \implies \exists x \in A$.

Luego $-x \in -A$ pues $-(-x) = x \in A$ por ejercicio 1a.

$\therefore -A \neq \emptyset$.

2) Ahora veamos que $-(-A) = A$.

$x \in -(-A) \iff -x \in -A \iff -(-x) \in A \iff x \in A$.

En los 2 primeros pasos se ha aplicado la definición de conjunto $-A$ y en el último paso el ejercicio 1a.

$\therefore -(-A) = A$.

-c- Supongamos que $-A = A$.

Luego $x \in A \iff x \in -A \iff -x \in A$.

En el primer paso se tuvo en cuenta que $A = -A$ y en el segundo la definición de conjunto $-A$.

Es decir que $\forall x \in A, -x \in A$. Esto quiere decir que $A$ es un conjunto simétrico respecto al origen.

Ejemplos de este tipo de conjuntos son: $(-5, 5)$, $[-3, -1) \cup (1, 3]$ y $\mathbb{R} \setminus \{0\}$.

-d- Veamos que si $A$ es un conjunto acotado superiormente entonces $-A$ es un conjunto acotado inferiormente.

Supongamos que $A$ es un conjunto acotado superiormente $\implies \exists\, c \in \mathbb{R}/x \leq c\; \forall\, x \in A \implies \exists\, c \in \mathbb{R}/-x \geq -c\; \forall\, x \in A \implies \exists\, c \in \mathbb{R}/y \geq -c\; \forall\, y \in -A$.

En el último paso se renombró a $-x$ como $y$ y se tuvo en cuenta que $x \in A \iff -x \in -A$ (¡probar esta afirmación!).

$\therefore -c$ es cota inferior de $-A \implies -A$ acotado inferiormente.

Análogamente se prueba que si $A$ es un conjunto acotado inferiormente entonces $-A$ es un conjunto acotado superiormente.

-e- Veamos que si $A$ posee supremo entonces $-A$ posee ínfimo y se verifica que $\text{ínf}(-A) = -\sup(A)$.

Supongamos que $A$ posee supremo $\implies \exists\, b = \sup(A) \implies b$ cota superior de $A$.

Por lo realizado en d) sabemos que $-b$ es cota inferior de $-A$.

Veamos que $-b$ es ínfimo de $-A$.

Supongamos que no, luego $\exists\, c$ cota inferior de $-A$ tal que $-b < c$.

Luego $-b < c \leq y\; \forall\, y \in -A \implies -y \leq -c < b,\; \forall\, y \in -A \implies x \leq -c < b\; \forall\, x \in A$.

Por lo tanto, $-c$ es cota superior de $A$ menor a $b$. Esto contradice que $b$ sea supremo de $A$.

$\therefore -b = \text{ínf}(-A) \implies -\sup(A) = \text{ínf}(-A)$.

Análogamente se prueba que si $A$ posee ínfimo entonces $-A$ posee supremo y se verifica que $\sup(-A) = -\,\text{ínf}(A)$.

-f- Sea $A \neq \emptyset$, $A$ acotado inferiormente. Queremos probar que $A$ posee ínfimo.

Por lo probado en b) resulta $-A \neq \emptyset$ y por lo probado en d) resulta $-A$ acotado inferiormente.

De estas 2 cosas y por axioma 10 (axioma del supremo), resulta que $-A$ posee supremo.

Entonces por lo probado en e) $-(-A)$ posee ínfimo.

Finalmente, por b) $-(-A) = A$, y por lo tanto $A$ posee ínfimo, como queríamos probar.


ESCUELA DE CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
Av. Pellegrini 250. Rosario
+54 0341 - 480 2649 internos 216 - 119

☞ Sean $A$ y $B$ son dos conjuntos no vacíos de números reales tales que

$$a \in A \wedge b \in B \Rightarrow a \leqq b. \tag{1}$$

-a- Demostrar que el conjunto $A$ es acotado superiormente y el conjunto $B$ es acotado inferiormente.

-b- ¿Existe alguna relación entre el $\sup(A)$ y el $\text{ínf}(B)$? Hacer una conjetura sobre tal relación.

-c- Demostrar lo conjeturado en el ítem anterior.

✎

-a- Como por hipótesis el conjunto $A$ es no vacío, podemos tomar un elemento de dicho conjunto, es decir, $\exists\ \tilde{a} \in A$. Luego, por (1), tenemos que $\forall\ b \in B,\ \tilde{a} \leqq b$, es decir, $\tilde{a}$ es una cota inferior para el conjunto $B$, el cual resulta acotado inferiormente.

Por otro lado, como el conjunto $B$ también es no vacío, $\exists\ \tilde{b} \in B$. Luego, por (1), $a \in A \Rightarrow a \leqq \tilde{b}$, es decir, $\tilde{b}$ es un acota superior para el conjunto $A$.

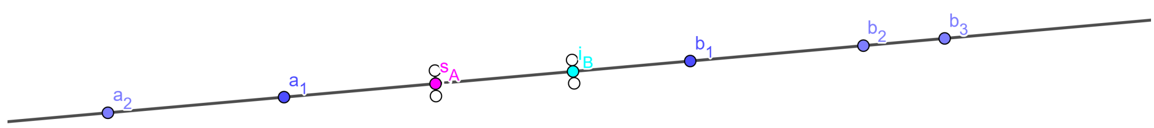
-b- Como $A$ está acotado superiormente, por el axioma del supremo (**Axioma 10**), el conjunto tiene supremo, es decir, $\exists\ s_A \in \mathbb{R}/\ s_A = \sup(A)$.

Como el conjunto $B$ está acotado inferiormente, entonces tiene ínfimo (**Teorema 12**), es decir, $\exists\ i_B = \text{ínf}(B)$.

Para intentar ver cuál es la relación entre $s_A$ y $i_B$ podemos mirar algún ejemplo.

En el caso en que $A = [1, 5]$ y $B = (8, 10]$, vemos que se verifican las hipótesis, en especial (1). Luego, $\sup(A) = 5$ y $\text{ínf}(B) = 8$, es decir, en este caso nos queda que $\sup(A) \leqq \text{ínf}(B)$.

Dibujemos un boceto sobre la recta real, por ejemplo:




Todos los elementos del conjunto $A$ son menores que los de $B$, por lo que en la recta real se encuentran todos a la izquierda, como en la figura. Entonces, las cotas se podrían encontrar por el sector entre medio. De este boceto, también podríamos pensar que $s_A \leqq i_B$ y esta sería nuestra conjetura.

-c- Para probar nuestra conjetura, es decir, para probar que es verdad que $s_A \leqq i_B$ vamos a suponer lo contrario, es decir, suponer que

$$i_B < s_A. \tag{2}$$

Consideremos el número real $t = \dfrac{s_A - i_B}{2}$. Por (2) y como $\frac{1}{2} > 0$, tenemos que $t \in \mathbb{R}^+$.

Además, por la demostración de la **Proposición 1**, sabemos que $t$ es un punto entre $s_A$ y $i_B$, es decir, $i_B < t < s_A$.


ESCUELA DE CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
Av. Pellegrini 250. Rosario
+54 0341 - 480 2649 internos 216 - 119

Luego, por la caracterización del supremo (**Teorema 9**),

$$\exists\ \hat{a} \in A / s_A - t < \hat{a} \leqq s_A. \tag{3}$$

Como ya vimos que $t > 0$, en este caso, $t$ sería aquel $\epsilon$ positivo que menciona el Teorema 9.

Por otro lado, considerando el resultado análogo al Teorema 9 para la caracterización del ínfimo, tenemos que

$$\exists\ \hat{b} \in B / i_B \leqq \hat{b} < i_b - t. \tag{4}$$

Por cómo elegimos al punto intermedio $t$, podemos ver que

$$i_B + t = i_b + \frac{s_A - i_B}{2} = \frac{i_B + s_A}{2} = s_A - \frac{s_A - i_B}{2} = s_A - t. \tag{5}$$

Juntando (3), (4) y (5), tenemos que

$$\hat{b} < i_b - t = s_A - t < \hat{a},$$

es decir,

$$\exists \hat{a} \in A \wedge \hat{b} \in B / \hat{b} < \hat{a}.$$

Lo que contradice la hipótesis del ejercicio (1).

Entonces nuestra suposición (2) debe ser falsa. Por lo tanto, $s_A \leqq i_B$.


ESCUELA DE CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
Av. Pellegrini 250. Rosario
+54 0341 - 480 2649 internos 216 - 119