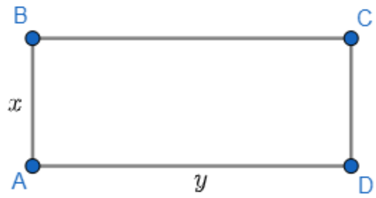
Resolución de algunos ejercicios pertenecientes a la Práctica 2

☞ Un rectángulo tiene un perímetro de $20m$. Expresar el área del rectángulo como función de la longitud de uno de sus lados.

Sea $ABCD$ un cuadrado de lados $AB = x$ y $BC = y$.



Sabemos que el perímetro de $ABCD$ es $2x + 2y = 20 \Rightarrow\ y = \dfrac{20-2x}{2} = 10 - x\ (1)$ Además conocemos cómo calcular el área de un rectángulo, que la llamaremos a, por lo que tenemos:

$$a = x \cdot y\ (2)$$

Luego, reemplazando (1) en (2) resulta que:

$$a = x \cdot y = x \cdot (10 - x) = 10x - x^2$$

Observemos que x representa la medida de un lado, es decir, $x > 0$ Por otro lado, $a(x)$ es la función que representa el área de $ABCD$ según la medida del lado x, entonces $a(x) > 0$ Ahora determinemos el dominio de la función $a(x)$

$$a(x) > 0\ \Leftrightarrow\ x(10-x) > 0\ \Leftrightarrow\ x > 0\ \wedge\ 10 - x > 0\ \Leftrightarrow\ x > 0\ \wedge\ x < 10$$

Por lo tanto,

$$Dom(a) = (0, 10)$$

☞ Describir el dominio y recorrido de las siguientes funciones. Calcular el valor de la función en los puntos indicados en cada caso:

c. $q(x) = \begin{cases} 2x+1 & -2 \leq x \leq 0 \\ 3 & 0 < x \leq 3 \end{cases}$ $\qquad x = -1,\ x = 0,\ x = 2$

Para determinar el dominio debemos tener en cuenta los intervalos en los cuales la función q está definida, es decir, $q(x) = 2x + 1$ si $-2 \leq x \leq 0$ y $q(x) = 3$ si $0 < x \leq 3$ Esto nos indica que la función $q(x)$ está definida en $[-2, 0] \cup (0, 3] = [-2, 3]$. Por lo tanto,

$$Dom(q) = [-2, 3]$$

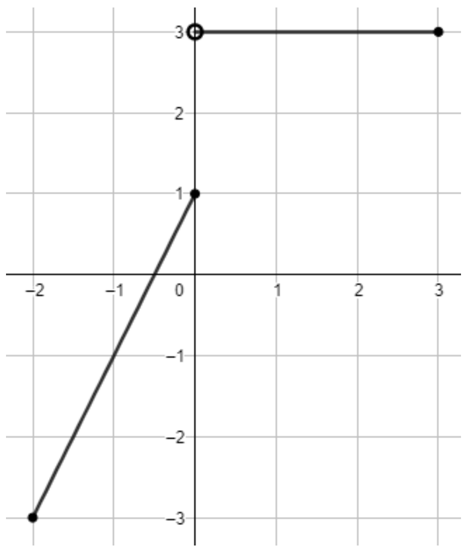
Previamente a determinar el recorrido de la función, calculemos los valores que nos piden. Recordemos que vamos a poder calcular las imágenes de los distintos valores de x, si es que dichos valores de estén en el dominio. En nuestro caso, $-1,\ 0$ y 2 pertenecen al dominio de q, por lo tanto vamos a poder calcular $q(-1),\ q(0)$ y $q(2)$

* $-1 \in [-2, 0] \Rightarrow q(-1) = 2 \cdot (-1) + 1 = -1$
* $0 \in [-2, 0] \Rightarrow q(-1) = 2 \cdot 0 + 1 = 1$
* $2 \in (0, 3] \Rightarrow q(-1) = 2 \cdot 2 + 1 = 3$

Ahora vamos a determinar el recorrido de q. Para ello, realicemos la gráfica de la función.

* En el intervalo $[-2, 0]$, la función coincide con la recta $y = 2x + 1$ y, aprovechando lo que hicimos antes, conocemos dos puntos de la recta que son $(-1, -1)$ y $(0, 1)$.
* En el intervalo $(0, 3]$, la función coincide con la función contante $f(x) = 3$

Por lo tanto, la gráfica de q es:



Entonces, a partir de la gráfica, podemos observar claramente que el recorrido es

$$Rec(g) = [-3, 1] \cup \{3\}.$$

ESCUELA DE CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
Av. Pellegrini 250. Rosario
+54 0341 - 480 2649 internos 216 - 119

☞ a) Para cada una de las funciones $\{f_i : 1 \leq i \leq 2\}$, hallar el dominio y simplificar la expresión de la ley de cada una de las funciones

$$g_i(h) = \frac{f_i(3+h) - f(3)}{h}, \quad i = 1,\, 2$$

$$i) f_1(x) = x^2$$

b) Para cada una de las funciones $\{f_i : 1 \leq i \leq 2\}$ recién definidas, simplificar el valor de la expresión

$$g_i(h) = \frac{f_i(x+h) - f(x)}{h}, \quad i = 1,\, 2$$

$$i) f_1(x) = x^2$$

Primero determinemos el dominio de f_1. Como es una función cuadrática cuya ley es $f_1(x) = x^2$, podemos calcular la imagen de cualquier valor que asuma x. Por lo tanto,

$$Dom(f_1) = \mathbb{R}$$

Ahora, veamos cómo es la ley de la función g_1, a partir de la ley de f_1

$$g_1(h) = \frac{f_1(3+h) - f_1(3)}{h} = \frac{(3+h)^2 - 3^2}{h} \ (1)$$

Entonces, en claro reconocer que $h = 0$ no pertenece al dominio de g_1 ya que anularía el denominador. Luego, tenemos que

$$Dom(g_1) = \mathbb{R} - \{0\}$$

Ahora simplifiquemos la expresión que nos quedó en (1)

$$g_1(h) = \frac{f_1(3+h) - f_1(3)}{h} = \frac{(3+h)^2 - 3^2}{h} = \frac{3^2 + 2 \cdot 3 \cdot h + h^2 - 3^2}{h} = \frac{6h + h^2}{h}$$

Solo nos resta sacar h como factor común del numerador y cancelarla con la del denominador, es decir

$$g_1(h) = \frac{6h + h^2}{h} = \frac{h(6+h)}{h} = 6 + h$$

Por lo tanto, a expresión simplificada de g_1 es

$$g_1(h) = 6 + h$$

Para el ítem b), tenemos que realizar los mismos razonamientos, pero en vez de trabajar con $3 + h$ y 3 lo haremos con $x + h$ y x. Simplifiquemos,

$$g_1(h)=\frac{f_1(x+h)-f_1(x)}{h}=\frac{(x+h)^2-x^2}{h}=\frac{x^2+2\cdot x\cdot h+h^2-x^2}{h}=\frac{2xh+h^2}{h}$$

Solo nos resta sacar h como factor común del numerador y cancelarla con la del denominador, es decir

$$g_1(h)=\frac{2xh+h^2}{h}=\frac{h(2x+h)}{h}=2x+h$$

Por lo tanto, a expresión simplificada de g_1 es

$$g_1(h)=2x+h$$

☞ Para cada una de las siguientes funciones: Indicar dominio y recorrido, dar una expresión en la cual no intervenga el valor absoluto y representarlas gráficamente.

ii. $f_2(x)=|x|+|x-1|$.

✎ Comencemos con el dominio de la función. Para esto, pensemos a f_2 como suma de dos funciones $g(x)=|x|$ y $k(x)=|x-1|$. Luego $(g+k)(x)=|x|+|x-1|=f_2(x)$. Por otro lado sabemos que $Dom\ g=\mathbb{R}$, $Dom\ k=\mathbb{R}$ y $Dom\ (g+k)=Dom\ g\cap Dom\ k$. Entonces tenemos que $Dom\ f_2=Dom\ (g+k)=\mathbb{R}\cap\mathbb{R}=\mathbb{R}$.

Para dar una expresión en la cual no intervenga el valor absoluto, recordemos primero la definición de valor absoluto:

$$|x|=\begin{cases} x & \text{si} \quad x\geq 0\\ -x & \text{si} \quad x<0.\end{cases}$$

Entonces, para $|x-1|$ tenemos

$$|x-1|=\begin{cases} x-1 & \text{si} \quad x-1\geq 0\\ -(x-1) & \text{si} \quad x-1<0\end{cases}=\begin{cases} x-1 & \text{si} \quad x\geq 1\\ 1-x & \text{si} \quad x<1.\end{cases}$$

Como cada sumando en la definición de f_2 tiene una definición diferente según el valor de x que estemos considerando, deberemos analizar tres casos:

- Si $x\geq 1$, sabemos que $x>0$, entonces $f_2(x)=x+(x-1)=2x-1$.
- Si $x<1$ pero $x\geq 0$, resulta $f_2(x)=x+[-(x-1)]=x-x+1=1$.
- Si $x<0$, sabemos que $x<1$, y en este caso $f_2(x)=(-x)+(1-x)=-x+1-x=-2x+1=1-2x$.

En resumen, podemos escribir la ley f_2 como

$$f_2(x)=\begin{cases} 2x-1 & \text{si} \quad x\geq 1\\ 1 & \text{si} \quad 0\leq x<1\\ 1-2x & \text{si} \quad x<0.\end{cases}$$

Ahora, analicemos analíticamente el recorrido de la función. La idea es tomar x en cada uno de los intervalos en los que está dividido el dominio de f_2 y analizar el intervalo al que pertenece $f_2(x)$.

ESCUELA DE CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
Av. Pellegrini 250. Rosario
+54 0341 - 480 2649 internos 216 - 119

- $x \geq 1 \Leftrightarrow 2x \geq 2 \Leftrightarrow 2x - 1 \geq 2 - 1 \Leftrightarrow 2x - 1 \geq 1 \Leftrightarrow f_2(x) \geq 1 \Leftrightarrow f_2(x) \in [1, +\infty)$.
- $0 \leq x < 1 \Leftarrow f_2(x) = 1 \Leftrightarrow f_2(x) \in \{1\}$.
- $x < 0 \Leftrightarrow 2x < 2 \cdot 0 \Leftrightarrow 2x < 0 \Leftrightarrow -2x > 0 \Leftrightarrow 1 - 2x > 1 \Leftrightarrow f_2(x) > 1 \Leftrightarrow f_2(x) \in (1, +\infty)$.

El recorrido de f_2 es la unión de los intervalos a los cuales pertenece $f_2(x)$ en cada sección del dominio. Entonces $Rec\ f_2 = [1, +\infty) \cup \{1\} \cup (1, +\infty) = [1, +\infty)$.

Grafiquemos f_2:

Observemos que para graficar una recta, alcanza con encontrar dos puntos que pertenezcan a la misma. Es decir que si la gráfica de f_2 coincide con una recta, podemos hallar el valor de f_2 en dos puntos distintos y trazar la recta que pasa por ellos.

Cuando $x < 0$, la función coincide con la recta $y = 1 - 2x$.

$f_2(-1) = 1 - 2(-1) = 1 + 2 = 3$,

$f_2(-2) = 1 - 2(-2) = 1 + 4 = 5$.

Entonces cuando $x < 0$ la función coincide con la recta que pasa por los puntos $(-1, 3)$ y $(-2, 5)$.

En el caso que $0 \leq x < 1$, la función coincide con la función constante igual a 1.

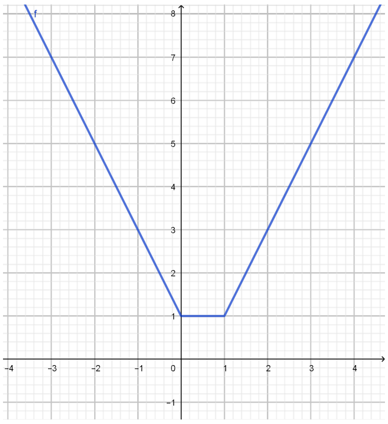
Cuando $x \geq 1$, la función coincide con la recta $y = 2x - 1$.

$f_2(1) = 2 \cdot 1 - 1 = 2 - 1 = 1$,

$f_2(2) = 2 \cdot 2 - 1 = 4 - 1 = 3$,

entonces cuando $x \geq 1$, la función coincide con la recta que pasa por los puntos $(1, 1)$ y $(2, 3)$.

Notemos que en la gráfica se ve claramente que $Rec\ f_2 = [1, +\infty)$.



☞ Determinar si las siguientes funciones son monótonas, indicando si lo son en forma estricta.

ii. $f(x) = \begin{cases} 2x + 3, & x < -1, \\ 1, & -1 \leq x < 1 \\ x, & x \geq 1 \end{cases}$

Observemos que la función $f(x)$ esta definida para todo número real, por lo que resulta :

$$Dom\ f = \mathbb{R}.$$

Veamos si es una función monótona, es decir, si es creciente o decreciente en su dominio. Para eso, debemos considerar dos valores reales distintos $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$, uno menor que otro ($x_1 < x_2$) y analizar el comportamiento de sus imágenes(¿$f(x_1) < f(x_2)$?, ¿$f(x_1) > f(x_2)$?, ¿$f(x_1) \leq f(x_2)$? o ¿$f(x_1) \geq f(x_2)$?). Tengamos presente de considerar todos los casos posibles ya que la ley de la función f está definida en partes. A continuación mostramos su resolución:

Sean $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$, donde $x_1 < x_2$:

- Si $x_1,\ x_2 < -1$:

  $f(x_1) = 2x_1 + 3 < 2x_2 + 3 = f(x_2)$.

ESCUELA DE CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
Av. Pellegrini 250. Rosario
+54 0341 - 480 2649 internos 216 - 119

- Si $x_1 < -1$ y $-1 \leq x_2 \leq 1$:
  $f(x_1) = 2x_1 + 3 < 2(-1) + 3 = -2 + 3 = 1 = f(x_2)$.
- Si $x_1 < -1$ y $x_2 \geq 1$:
  $f(x_1) = 2x_1 + 3 < 2(-1) + 3 = 1 \leq x_2 = f(x_2)$.
- Si $-1 \leq x_1,\ x_2 < 1$:
  $f(x_1) = 1 = f(x_2)$.
- Si $-1 \leq x_1 \leq 1$ y $x_2 \geq 1$:
  $f(x_1) = 1 \leq x_2 = f(x_2)$.
- Si $x_1,\ x_2 \geq 1$:
  $f(x_1) = x_1 < x_2 = f(x_2)$.
  Por lo tanto se verifica que $f(x_1) \leq f(x_2), \quad \forall x_1, x_2 \in \mathbb{R} \ / \ x_1 < x_2$.
  Así, resulta que f es una función no decreciente en los $\mathbb{R}$. No es creciente estrictamente ya que, por ejemplo, en $-1 \leq x_1,\ x_2 < 1$ tenemos que $f(x_1) = f(x_2)$.

☞ Determinar si cada una de las siguientes funciones tiene algún tipo de paridad.
$i.\ f_1(x) = 4. \qquad ;ii.\ f_2(x) = x^2 + x. \qquad ii.\ f_3(x) = \dfrac{x}{x^2-1}.$

$i.\ Dom\ f_1 = \mathbb{R}$, el dominio es simétrico respecto al origen de coordenadas.
Sea $x \in \mathbb{R}$,

$$f_1(-x) = 4 = f_1(x).$$

Por lo tanto, f_1 es una función par.

$ii.\ Dom\ f_2 = \mathbb{R}$, el dominio es simétrico respecto al origen de coordenadas.
Sea $x \in \mathbb{R}$,

$$f_2(-x) = (-x)^2 + (-x) = x^2 - x$$
$$-f_2(x) = -(x^2 + x) = -x^2 - x$$

Resulta que f_2 no es una función par, ni impar pues por ejemplo:

$$f_2(1) = 2 \qquad y \qquad f_2(-1) = 0$$

Es decir $f_2(1) \neq f_2(-1)$ y $-f_2(1) \neq f_2(-1)$.

$iii.\ Dom\ f_3 = \mathbb{R} - \{-1, 1\}$, el dominio es simétrico respecto al origen de coordenadas.
Sea $x \in \mathbb{R} - \{-1, 1\}$,

$$f_3(-x) = \frac{-x}{(-x)^2 - 1} = -\frac{x}{x^2 - 1} = -f_3(x).$$

Por lo tanto, f_3 es una función impar.

ESCUELA DE CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
Av. Pellegrini 250. Rosario
+54 0341 - 480 2649 internos 216 - 119

☞

-a- A partir de la gráfica de la función valor absoluto representar gráficamente las siguientes funciones e indicar sus dominios y recorridos:

$$f_2\colon [-2,3] \to \mathbb{R} \text{ donde } f_2(x) = 1 - |x|.$$

-b- A partir de la gráfica de la función f_2 representar gráficamente las siguientes funciones e indicar sus dominios y recorridos:

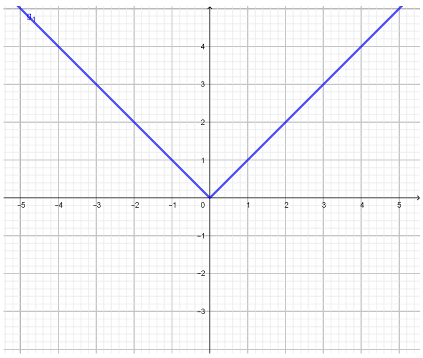
$$\text{ii)} f_4(x) = |f_2(x)|.$$

-c- Utilizando las gráficas de las funciones $\{f_i : i = 1, ..., 5\}$ obtenidas en $a)$ y $b)$ indicar, para cada una:
$i)$ Los conjuntos $A_i = \{x \in \mathbb{R}\colon f_i(x) = 0\}$ y $B_i = \{x \in \mathbb{R}\colon 1 < f_i(x) \leq 5\}$.
$ii)$ Los valores de $k \in \mathbb{R}$ para los cuales la ecuación $f_i(x) = k$ admite exactamente dos soluciones reales.

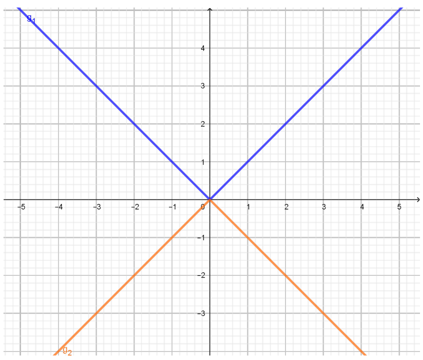
✎

-a- Para la función f_2, debemos considerar cuáles son los sucesivos "movimientos"que debemos aplicar a la gráfica de la función valor absoluto para obtener la gráfica de f_2. Para esto, iremos construyendo funciones auxiliares.

Primero llamemos $g_1(x) = |x|$

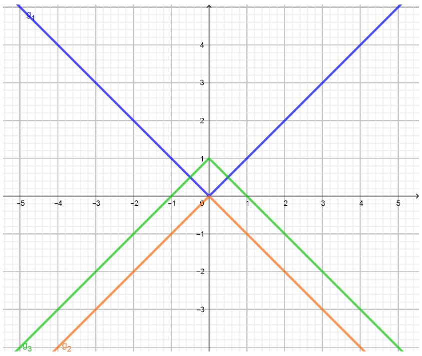


Notemos que para calcular $f_2(x)$, primero debemos multiplicar a $|x|$ por (-1), entonces $g_2(x) = -|x|$. Como $g_2(x) = -g_1(x)$, la gráfica de g_2 se obtiene reflejando la gráfica de g_1 respecto del eje x.

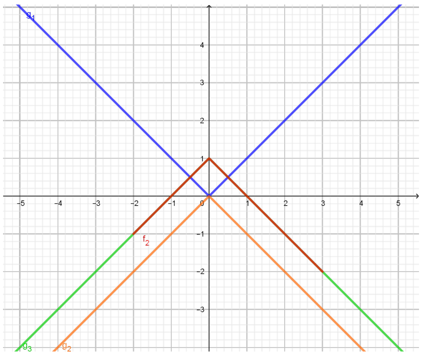


ESCUELA DE CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
Av. Pellegrini 250. Rosario
+54 0341 - 480 2649 internos 216 - 119

Ahora, $f_2(x) = 1 - |x| = -|x| + 1$, entonces consideramos $g_3(x) = -|x| + 1$. Y como $g_3(x) = g_2(x) + 1$, la gráfica de g_3 se obtiene trasladando verticalmente la gráfica de g_2 una unidad hacia arriba.



Observemos que las funciones f_2 y g_3 son distintas. A pesar de que f_2 coincide con g_3 en su dominio, $Dom\ g_3 = \mathbb{R}$ y $Dom\ f_2 = [-2, 3]$ como indica su definición. Por esto, para obtener la gráfica de f_2 a partir de la de g_3, debemos restringir el dominio de g_3 al intervalo $[-2, 3]$.



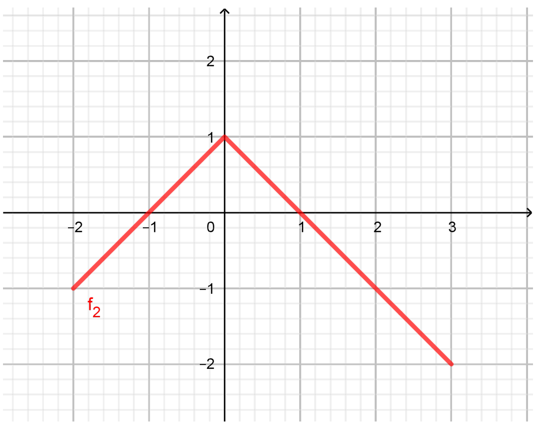
Por último, veamos analíticamente el recorrido de f_2:

$-2 \leq x \leq 3 \Rightarrow 0 \leq |x| \leq 3 \Leftrightarrow -3 \leq -|x| \leq 0 \Leftrightarrow 1 - 3 \leq 1 - |x| \leq 0 + 1 \Leftrightarrow -2 \leq 1 - |x| \leq 1 \Rightarrow -2 \leq f_2(x) \leq 1$.

Por lo tanto, $Rec\ f_2 = [-2, 1]$.

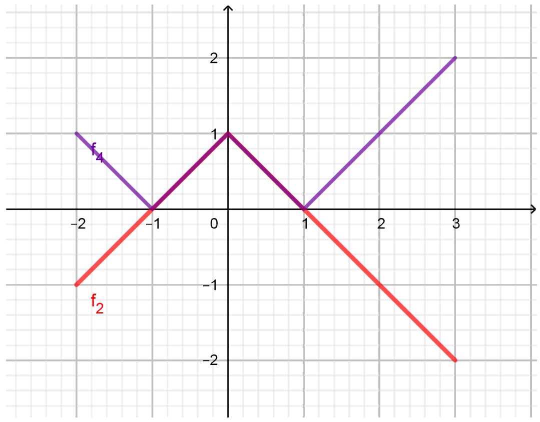
-b- $f_4(x) = |f_2(x)|$

Comencemos con la gráfica de f_2.



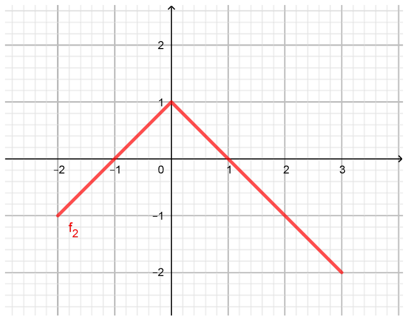
ESCUELA DE CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
Av. Pellegrini 250. Rosario
+54 0341 - 480 2649 internos 216 - 119

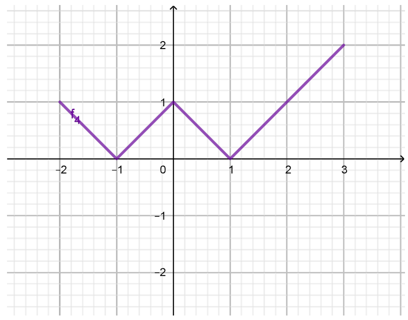
Entonces la gráfica de f_4 coincide con la gráfica de f_2 cuando $f_2(x) \geq 0$ y se refleja respecto del eje x cuando $f_2(x) < 0$.



Además, $Dom\ f_4 = [-2, 3]$ y $Rec\ f_4 = [0, 2]$.

-c- i) $A_i = \{x \in \mathbb{R} \colon f_i(x) = 0\}$ $B_i = \{x \in \mathbb{R} \colon\ 1 < f_i(x) \leq 5\}$

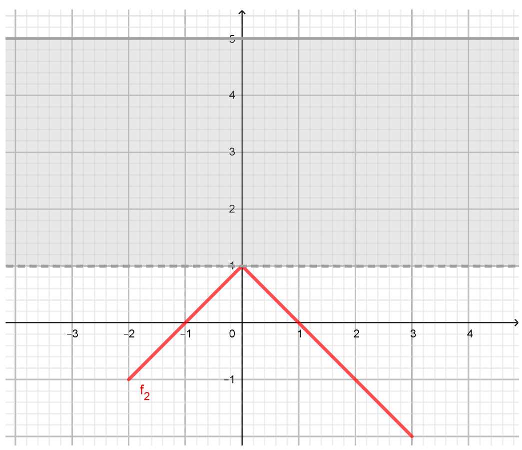


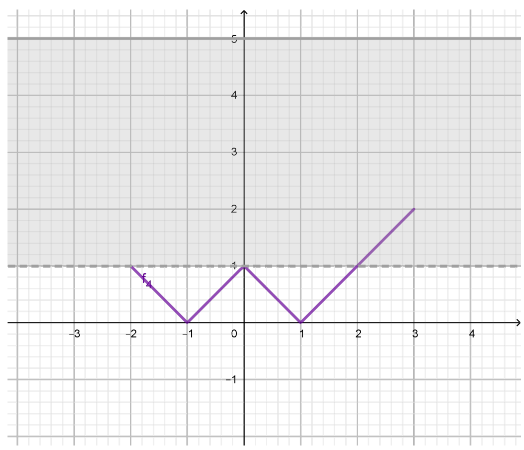


Observemos que los conjuntos A_i corresponden a los puntos para los cuales la gráfica interseca al eje x. En la gráfica de f_2, vemos que los valores de x para los cuales $f_2(x) = 0$ son $x = -1$ y $x = 1$. En la gráfica de f_4, vemos que $f_4(x) = 0$ si $x = -1$ o $x = 1$. Entonces,

$$A_2 = \{-1, 1\} \qquad A_4 = \{-1, 1\}$$

Consideremos ahora los conjuntos B_i. En palabras, el conjunto B_i es el conjunto de números reales, tales que su imagen por la función f_i está en la banda $1 < y \leq 5$.

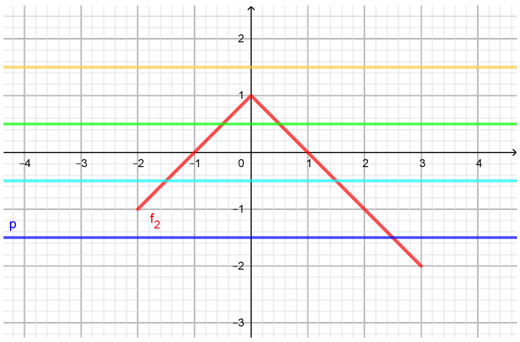


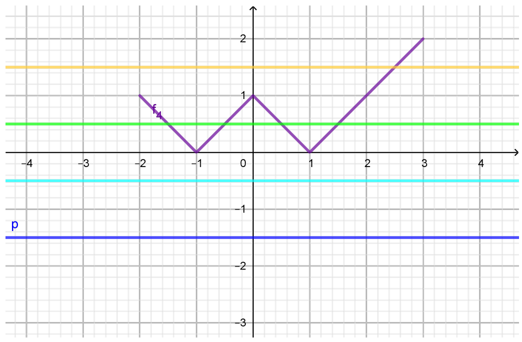


Podemos ver que la gráfica de f_2 no interseca la banda, mientras que la gráfica de f_4 interseca la banda para los valores $2 < x \leq 3$. Resulta, $B_2 = \emptyset$ y $B_4 = (2, 3]$.

-c- ii) Valores de $k \in \mathbb{R}$ para los cuales la ecuación $f_i(x) = k$ admite exactamente dos soluciones reales.

La ecuación $f_i(x) = k$ representa la intersección entre la gráfica de f_i y la recta $y = k$, es decir la recta horizontal con ordenada k. Si queremos hallar los valores de k para los cuales existan exactamente dos soluciones, debemos hallar los valores de k para los cuales la recta interseca a la gráfica en exactamente dos puntos.





En ambas gráficas se dibujaron las rectas correspondientes a los valores $k = \frac{3}{2}$, $k = \frac{1}{2}$, $k = -\frac{1}{2}$ y $k = -\frac{3}{2}$.

En la gráfica de f_2, podemos ver que la ecuación $f_2(x) = k$ tiene exactamente dos soluciones cuando k está en el intervalo $[-1, 1)$.

Considerando ahora la gráfica de f_4, la única recta que interseca exactamente dos veces a la gráfica de f_4 es el eje x, es decir la recta $y = 0$. Entonces la ecuación tiene exactamente dos soluciones cuando $k = 0$.