Álgebra y Geometría Analítica I

Recta en el plano - Resolución de ejercicios selectos

1. Consideremos la recta r de ecuaciones paramétricas

$$\begin{cases} x = 2 - t \\ y = 1 + 4t \end{cases}, t \in \mathbb{R}$$

(a) Determinar si alguno de los puntos $P = (1, 5)$ y $Q = (3, -2)$ pertenecen a r.

(b) ¿Para qué valor del parámetro t se obtiene el punto $R = (-2, 17)$?

(c) Determinar para qué valores del parámetro t se obtienen los puntos de intersección de las rectas con cada uno de los ejes coordenados.

(d) Calcular el área del triángulo que forma la recta con los ejes coordenados.

(e) Escribir otras ecuaciones paramétricas de la misma recta.

(f) Determinar la ecuación general de la recta.

Solución:

(a) Veamos si P pertenece a r:

$$\begin{cases} 1 = 2 - t \\ 5 = 1 + 4t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -1 = -t \\ 4 = 4t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 = t \\ 1 = t \end{cases}$$

Concluimos entonces que $P \in r$
. Procedemos de igual manera para ver si Q pertenece a r:

$$\begin{cases} 3 = 2 - t \\ -2 = 1 + 4t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 = -t \\ -3 = 4t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -1 = t \\ -\frac{3}{4} = t \end{cases}$$

Vemos que no existe un único valor del parámetro t tal que se satisfagan ambas ecuaciones de manera simultánea, por lo tanto, $Q \notin r$
.

(c) Para hallar la intersección con el eje x, hacemos $y = 0$ y hallamos el valor de t y correspondiente valor de x.

$$0 = 1 + 4t \quad \Leftrightarrow \quad -1 = 4t \quad \Leftrightarrow \quad -\frac{1}{4} = t$$

Ahora hallamos el valor de x cuando $t = -\frac{1}{4}$

$$x = 2 - t \quad \Leftrightarrow \quad x = 2 - (-\frac{1}{4}) \quad \Leftrightarrow \quad x = \frac{9}{4}$$

Si procedemos de manera análoga, haciendo $x = 0$, vemos que la intersección con el eje y se da cuando $t = 2$ y correspondiente valor de y es 9.
Por lo tanto los puntos de intersección con los ejes coordenados x e y son, respectivamente, $X = (\frac{9}{4}, 0)$ e $Y = (0, 9)$.

(f) Para hallar la ecuación general de la recta, despejamos el parámetro t de una de las ecuaciones y lo reemplazamos en la otra.

$$x = 2 - t \quad \Leftrightarrow \quad t = 2 - x$$

Reemplazando en la segunda ecuación, obtenemos:

$$y = 1 + 4(2 - x) \quad \Leftrightarrow \quad y = 1 + 8 - 4x \quad \Leftrightarrow \quad y = 9 - 4x$$

La ecuación general de una recta es de la forma $ax + by + c = 0$, por lo tanto reescribimos la ecuación como:

$$4x + y - 9 = 0$$

7. Determinar el ángulo que forman los siguientes pares de rectas:
   (a) $r_1)\ 3x - y + 2 = 0, \qquad r_2)\ 2x + y - 2 = 0.$
   (b) $r_1)\ x + 2y + 1 = 0, \qquad r_2)\ 2x - y - 2 = 0.$

Solución:

(a) Vamos a hallar el ángulo que forman los vectores $\vec{v_1} = (3, -1)$ y $\vec{2} = (2, 1)$, que son los vectores perpendiculares a r_1 y r_2 respectivamente. Tenemos que:

$$\cos(\vec{v_1}\hat{,}\vec{v_2}) = \frac{\vec{v_1} \times \vec{v_2}}{|\vec{v_1}||\vec{v_2}|}$$

$$\begin{aligned}
\cos(\vec{v_1}\hat{,}\vec{v_2}) &= \frac{3 \cdot 2 + (-1) \cdot 1}{\sqrt{3^2 + (-1)^2} \cdot \sqrt{2^2 + 1^2}} \\
&= \frac{5}{\sqrt{10} \cdot \sqrt{5}} = \frac{5}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{5} \cdot \sqrt{5}} \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}}
\end{aligned}$$

Y por lo tanto:

$$(\vec{v_1}\hat{,}\vec{v_2}) = \frac{\pi}{4} = 45°$$

11. Determinar la posición relativa de las rectas r_1 y r_2 dadas en cada caso. Si son concurrentes, determinar el punto de intersección de las mismas.

Solución:

(a) $r_1)\ -3x - y + 17 = 0, \qquad r_2)\ x - 3y - 2 = 0.$

Notaremos las ecuaciones de la rectas como: $r_1)$ $a_1x + b_1y + c_1 = 0$ y $r_2)$ $a_2x + b_2y + c_2 = 0$.

En primer lugar veamos si las rectas son paralelas entre sí. Esto sucede si $a_1b_2 - a_2b_1 = 0$.

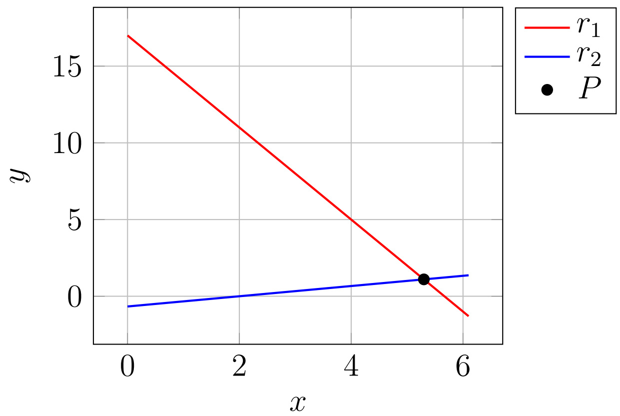
$$a_1b_2 - a_2b_1 = (-3)(-3) - (-1)1 = 9 + 1 = 10 \neq 0$$

Por lo cual vemos que las rectas no son paralelas, entonces son concurrentes. Hallaremos entonces las coordenadas del punto $P = (x_P, y_P)$ que satisfacen ambas ecuaciones simultáneamente:

$$\begin{cases} -3x_P - y_P + 17 = 0 \\ x_P - 3y_P - 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y_P = 17 - 3x_P \\ x_P - 3y_P - 2 = 0 \end{cases}$$

Reemplazando la expresión de y_P en la segunda ecuación obtenemos:

$$\begin{aligned} & x_P - 3(17 - 3x_P) - 2 = 0 \\ \Rightarrow & x_P - 51 + 9x_P - 2 = 0 \\ \Rightarrow & 10x_P = 53 \\ \Rightarrow & x_P = \frac{53}{10} \\ \Rightarrow & y_P = 17 - 3\frac{53}{10} = \frac{170 - 3 \cdot 53}{10} = \frac{11}{10} \end{aligned}$$



(c)

$$r_1) \begin{cases} x = 2 + 5t \\ y = 3 - 2t \end{cases}, t \in \mathbb{R} \quad r_2) \begin{cases} x = 7 - \frac{15}{2}s \\ y = 1 + 3s \end{cases}, s \in \mathbb{R}$$

Llamemos $\vec{u} = (5, -2)$ al vector que da la dirección de r_1 y $\vec{v} = (-\frac{15}{2}, 3)$ al vector que da la dirección de r_2.

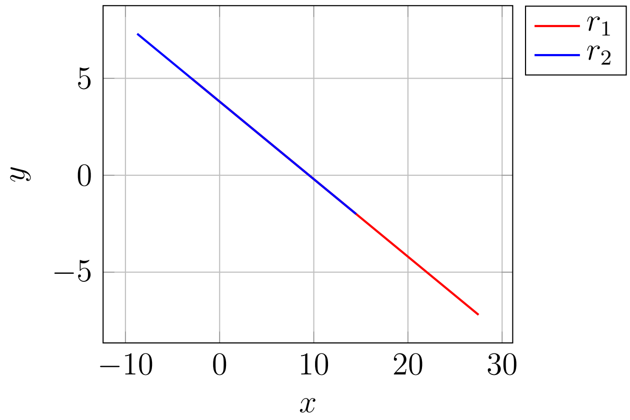
Veamos si $\vec{u} \parallel \vec{v}$:

$$u_1v_2 - u_2v_1 = 5 \cdot 3 - (-2) \cdot \frac{-15}{2} = 15 - 15 = 0$$

Por lo tanto $\vec{u} \parallel \vec{v}$. Ahora tenemos que analizar si son o no coincidentes. Para eso analizaremos si $P = (2,3)$, que pertenece a r_1, pertenece también a r_2:

$$\begin{cases} x_P = 7 - \frac{15}{2}s \\ y_P = 1 + 3s \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2 = 7 - \frac{15}{2}s \\ 3 = 1 + 3s \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -5 = -\frac{15}{2}s \\ 2 = 3s \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{2}{3} = s \\ \frac{2}{3} = s \end{cases}$$

Entonces $P \in r_1$ y $P \in r_2$, por lo tanto las rectas son coincidentes.

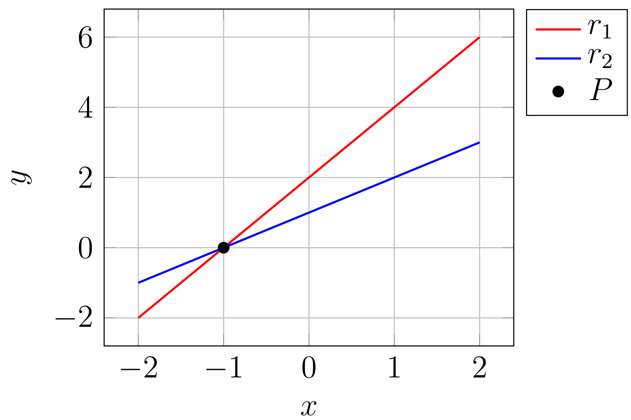


13. Determinar la ecuación de una recta que contenga a la intersección de $r_1)\ 2x - y + 2 = 0$ y $r_2)\ x - y + 1 = 0$ y forme con los ejes coordenados un triángulo de área igual a $\frac{3}{2}$.

Solución:

Como primer paso vamos a hallar el punto P en el que se intersectan las rectas r_1 y r_2. Para ello debemos hallar los valores de x e y que satisfacen simultáneamente las ecuaciones:

$$\begin{cases} 2x - y + 2 = 0 \\ x - y + 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow 3x + 3 = 0 \Rightarrow x = -1 \Rightarrow y = 0$$



Dado que el punto P está ubicado sobre el eje x, podemos utilizar la forma segmentaria de la ecuación de una recta:

$$\frac{x}{k} + \frac{y}{h} = 1$$

donde $x = k$ es la intersección con el eje x e $y = h$ es la intersección con el eje y. Dado que el punto P se encuentra sobre el eje x, tenemos que para la recta que estamos buscando debe ser $k = -1$.
Por otro lado, el área del triángulo que la recta forma con los eje coordenados puede expresarse como:

$$A = \frac{|k| \cdot |h|}{2}$$

Entonces podemos calcular el valor de h, sabiendo que $A = \frac{3}{2}$ y $|k| = 1$, tenemos que:

$$\frac{3}{2} = \frac{1 \cdot |h|}{2} \Rightarrow |h| = 3 \Rightarrow h = \pm 3$$

Hemos hallado entonces que existen dos rectas que cumplen con las condiciones pedidas:

$$r) \ -x + \frac{y}{3} = 1 \qquad \text{y} \qquad r') \ -x - \frac{y}{3} = 1$$

15. Mostrar que los siguientes pares de rectas son paralelas y determinar la distancia entre ellas:
    (a) $r_1)\ 12x - 5y - 39 = 0, \quad r_2)\ -12x + 5y - 13 = 0.$
    (b) $r_1) \begin{cases} x = 3 + 5t \\ y = 2 + 2t \end{cases}, t \in \mathbb{R} \quad r_2) \begin{cases} x = 1 + 5s \\ y = -2 + 2s \end{cases}, s \in \mathbb{R}$

Solución:

(a) $r_1)\ 12x - 5y - 39 = 0, \quad r_2)\ -12x + 5y - 13 = 0.$

Notaremos las ecuaciones de la rectas como: $r_1)\ a_1x + b_1y + c_1 = 0$ y $r_2)\ a_2x + b_2y + c_2 = 0$.

Comprobemos si las rectas son paralelas entre sí.

$$a_1b_2 - a_2b_1 = 12 \cdot 5 - 5 \cdot 12 = 0 \Rightarrow r_1 \parallel r_2$$

Buscamos ahora un punto $P = (x_0.y_0) \in r_2$.

$$\text{Si } x_0 = 0 \Rightarrow -12 \cdot 0 + 5y_0 - 13 = 0 \Rightarrow y_0 = -\frac{13}{5}$$

Podemos entonces calcular la distancia del punto P a la recta r_1:

$$
\begin{aligned}
d(P, r_1) &= \frac{|a_1 x_0 + b_1 y_0 + c_1|}{\sqrt{a_1^2 + b_1^2}} \\
&= \frac{|12 \cdot 0 + (-5) \cdot \frac{-13}{5} - 39|}{\sqrt{12^2 + (-5)^2}} \\
&= \frac{|13 - 39|}{\sqrt{144 + 25}} \\
&= \frac{|-26|}{\sqrt{169}} \\
&= \frac{26}{13} \\
&= 2
\end{aligned}
$$