Unidad 1: Análisis Combinatorio
Álgebra y Geometría Analítica II (R-121)
Licenciatura en Ciencias de la Computación

Iker M. Canut

2020

1. Reglas Básicas

1.1. Regla de la Suma

Si una primera tarea puede realizarse de m formas, y una segunda de n formas, y no es posible realizarlas simultáneamente, entonces la tarea general puede realizarse de m + n formas.

Def/ Intervalo Entero: $m, n, k \in \mathbb{N}, m \leq n$, notamos $[\![m, n]\!] = \{m, m+1, .., n\} = \{k : m \leq k \leq n\}$. Luego, $|[\![m, n]\!]| = n - m + 1$.

Def/ Un conjunto X tiene **cardinalidad** n, con $n \in \mathbb{N}$ si existe una función biyectiva $f : [\![1, n]\!] \to X$ y se denota $|X| = n$. Definimos $|\emptyset| = 0$. Todo conjunto que tenga cardinalidad n se llamará **finito**.

Teorema 1: Principio de Adición: Sean A, B conjuntos finitos disjuntos, entonces $|A \cup B| = |A| + |B|$.
D/ Existen $m, n \in \mathbb{N}$ y dos funciones biyectivas $f : [\![1, m]\!] \to A$ y $g : [\![1, n]\!] \to B$. Luego definimos:

$$h : [\![1, m+n]\!] \to A \cup B : h(x) = \begin{cases} f(x), & x \in [\![1, m]\!] \\ g(x-m), & x \in [\![m+1, m+n]\!] \end{cases}$$

Vemos que h es una función biyectiva. Luego $|A \cup B| = m + n = |A| + |B|$. ■

Corolario 1a: $A_1, A_2, ..., A_n$ conjuntos disjuntos dos a dos, entonces $|A_1 \cup A_2 \cup ... \cup A_n| = \sum_{i=1}^{n} |A_i|$.
Corolario 1b: Sean A, B conjuntos finitos, entonces $|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$.

1.2. Regla del Producto

Si un procedimiento se puede descomponer en dos etapas, de manera que existen m resultados posibles para la primera, y para cada uno de estos resultados existen n resultados posibles para la segunda etapa, entonces el procedimiento total se puede realizar de $m \cdot n$ formas.

Teorema 2: Formalización de la Regla del Producto: Sean A, B finitos, entonces $|A \times B| = |A| \cdot |B|$
D/ $A = \{a_1, ..., a_m\}$ y $B = \{b_1, ..., b_n\}$, probaremos que $|A \times B| = mn$. Fijamos n, inducción sobre m. Si $m = 1$: $A \times B = \{(a_1, b_1), ..., (a_1, b_n)\}$. Definiendo $f : [\![1, n]\!] \to A \times B$. $f(i) = (a_1, b_i)$, resulta que f es biyectiva y $|A \times B| = n = 1 \cdot n$. Suponemos que $|A \times B| = mn$ y probamos para $m + 1$. Tenemos $A = \{a_1, ..., a_m, a_{m+1}\}$, luego $A \times B = ((A - \{a_{m+1}\}) \times B) \cup (\{a_{m+1}\} \times B)$. Luego, por el Principio de Adición y la Hipótesis Inductiva, resulta que $|A \times B| = mn + m = (m+1)n$. ■

Corolario 2: $A_1, A_2, ..., A_n$ conjuntos finitos, entonces $|A_1 \times A_2 \times ... \times A_n| = \prod_{i=1}^{n} |A_i|$.

2. Permutaciones

Def/ Dada una colección de n objetos distintos, cualquier disposición (lineal) de estos objetos se denomina **permutación** de la colección.

Si existen n objetos distintos a los que podemos denotar con $a_1, a_2, ..., a_n$ y r es un entero $1 \leq r \leq n$, entonces, por la regla del producto, el número de permutaciones de tamaño r para los n objetos es $n \times (n-1) \times (n-2) \times ... \times (n-r+1)$ y lo notaremos $P(n, r)$. Definimos $P(n, 0) = 1$.

$$P(n, r) = n \cdot (n-1) \cdot ... \cdot (n-r+1) \cdot \frac{(n-r) \cdot (n-(r+1) \cdot ... \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1)}{(n-r) \cdot (n-(r+1) \cdot ... \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1)} = \frac{n!}{(n-r)!}$$

Preguntarnos cuantas **funciones** $f : X \to X$ existen es equivalente a preguntarnos cuántas **disposiciones lineales con repeticiones** pueden realizarse.
Teorema 3: Sean A, B conjuntos finitos con $|A| = m, |B| = n$, si $\mathcal{F}(A, B)$ es el conjunto de todas las funciones de A en B, entonces $|\mathcal{F}(A, B)| = n^m$.
Dem/ Si ponemos $A = \{a_1, ..., a_m\}$, entonces $f(a_i) = b_i$, donde b_i es alguno de los n elementos de B. Luego, se puede identificar a f con la m-upla $(f(a_1), f(a_2), ..., f(a_m)) \in B \times B \times ... \times B$. Por la Regla del Producto, la cantidad de elementos de $B \times B \times ... \times B$ es n^m. Luego, $|\mathcal{F}(A, B)| = n^m$. ■

Nota: Sabemos que el conjunto de todos los subconjuntos de A se llama conjunto de partes de A. Si definimos la **función característica** como $\mathcal{X}_B : A \to \{0, 1\}/\mathcal{X}_B(x) = \left\{ \begin{array}{ll} 0, & x \notin B \\ 1, & x \in B \end{array} \right.$, se puede ver que $\mathcal{X}_\emptyset(x) = 0$ y $\mathcal{X}_A(x) = 1$. La correspondencia $B \leftrightarrow \mathcal{X}_B$ es biunivoca. Contar la cantidad de subconjuntos B en A es equivalente a contar la cantidad de funciones carateristicas $\mathcal{X}_B$ cuyo dominio es A existen. Aplicando el T3, resulta $\mathcal{P}(A) = |\mathcal{F}(A, \{0, 1\})| = 2^n$.

Nota: Como cualquier subconjunto de $A \times B$ es una relación de A en B, luego $\mathcal{F}(A, B) \subseteq \mathcal{P}(A \times B)$ y se verifica $|\mathcal{F}(A, B)| = m^n \leq 2^m n = \mathcal{P}(A \times B)$, y utilizaremos la siguiente notación:
$\mathcal{F}_i = \{f \in \mathcal{F}(A, B) :$ f es inyectiva$\}$ $\qquad$ $\mathcal{F}_b = \{f \in \mathcal{F}(A, B) :$ f es biyectiva$\}$

Preguntarnos cuántas **funciones inyectivas** $f : X \to X$ pueden realizarse es equivalente a cuántas **permutaciones** existen.
Teorema 4: Si $|A| = m, |B| = n, m \leq n$, entonces $|\mathcal{F}_i(A, B)| = \frac{n!}{(n-m)!}$
Dem/ Sea $A = \{a_1, ..., a_m\}$, podemos identificar a f con la m-upla $(f(a_1), ..., f(a_m))$, donde debido a la inyectividad de f aseguramos que hay n valores posibles para $f(a_1)$, $n-1$ para $f(a_2)$,..., y finalmente $n - (m - 1)$ para $f(a_m)$. Luego, $|\mathcal{F}_i(A, B)| = n(n - 1)(n - 2)...(n - (m - 1)) = \frac{n!}{(n-m)!}$ ■

Corolario 3: Si $m = n$, entonces $|\mathcal{F}_b(A, B)| = n!$

Def/ Sea $|A| = n$, llamaremos **permutación** de n elementos de A a cualquier función inyectiva $f : [\![1, n]\!] \to A$. Se representa con la n-upla $(a_1, ..., a_n)$, donde $a_i \in A$ son todos distintos.

Corolario 4: Sea $r \leq n$, entonces $P(n) = n!$ y $P(n, r) = \frac{n!}{(n-r)!}$

Def/ Permutaciones con repetición: Si existen n objetos, con n_1 de un primer tipo, n_r de un r-esimo tipo, donde $n_1 + ... + n_r = n$, entones existen $\frac{n!}{n_1!...n_r!}$ disposiciones lineales de los n objetos.

Def/ Disposiciones circulares: los elementos se disponen en una forma circular en lugar de lineal. Fijar un elemento en una disposición circular, transforma el problema a una dispocición lineal.

3. Combinaciones

Si existen n objetos distintos, cada combinación de r objetos, sin hacer referencia al orden, corresponde a $r!$ permutaciones de tamaño r de los n objetos. Luego, el número de combinaciones está dado por:

$$C(n, r) = \frac{P(n, r)}{r!} = \frac{n!}{(n - r)!r!}, \qquad \text{donde } 0 \leq r \leq n$$

Como no nos interesa el orden, si tomamos las permutaciones de r elementos tomados de n, tenemos $r!$ permutaciones de esos r elementos que corresponden a la misma combinación.

Def/ Se denomina **número combinatorio** al definido por $\binom{n}{r} := \frac{n!}{(n-r)!r!}, \forall n \in \mathbb{N}_0, r \in \mathbb{N}_0 : 0 \leq r \leq n$.

Proposición 1: Sea $n \in \mathbb{N}_0$, $\forall r \in \mathbb{N}_0 : 0 \leq r \leq n$, $\binom{n}{k}$ es un numero natural.
Dem/ Caso base: $n = 0$, luego $\binom{0}{0} = 1 \in \mathbb{N}$. Luego, la H.I. es: $\binom{n}{k} \in \mathbb{N}, \forall\ 0 \leq k \leq n$, y suponiendo que vale para h, probamos para $h+1$: $\binom{h+1}{k} = \frac{h+1}{(h+1-k)!k!} = \binom{h}{k-1} + \binom{h}{k} \in \mathbb{N}$. Y por la H.I., sabemos que ambos términos son naturales, luego su suma también lo es. $\blacksquare$

Def/ Una **cadena** de largo n es una disposición, donde en cada lugar se puede usar cualquier caracter de un alfabeto de largo r. Por la Regla del Producto existen r^n cadenas. Sea $x = x_1 x_2 ... x_n$ una cadena, se define el **peso** de x, $wt(x)$, como $x_1 + x_2 + ... + x_n$.

Proposición 2: Sea $r \leq n$ dos enteros no negativos, entonces:

- $\binom{n}{1} = n$
  Dem/ $\binom{n}{1} = \frac{n!}{(n-1)! \cdot 1!} = \frac{n \cdot (n-1)!}{(n-1)! \cdot 1} = n$ $\blacksquare$
- $\binom{n}{r} = \binom{n}{n-r}$
  Dem/ $\binom{n}{r} = \frac{n!}{(n-r)! \cdot r!} = \frac{n!}{(n-r)! \cdot ((n-n)+r)!} = \frac{n!}{(n-r)! \cdot (n-(n-r))!} = \binom{n}{n-r}$ $\blacksquare$
- $\binom{n-1}{r-1} + \binom{n-1}{r} = \binom{n}{r}$
  Dem/ Si $n = r$, entonces $\binom{n}{r} = 1$, $\binom{n-1}{r-1} = 1$ y $\binom{n-1}{n} = \binom{n-1}{r} = 0$. Luego, $1 = 1 + 0$ $\square$
  Si $r < n$, $\binom{n-1}{r-1} + \binom{n-1}{r} = \frac{r}{r} \cdot \frac{(n-1)!}{(n-r)!(r-1)!} + \frac{(n-1)!}{((n-1)-r)!r!} \cdot \frac{(n-r)}{(n-r)} = \frac{r(n-1)!}{(n-r)!r!} + \frac{(n-1)!(n-r)!}{(n-r)!r!} =$
  $= \frac{r(n-1)!+(n-1)!(n-r)!}{(n-r)!r!} = \frac{(n-1)!(r+(n-r))}{(n-r)!r!} = \frac{(n-1)! \cdot n}{(n-r)!r!} = \frac{n!}{(n-r)!r!} = \binom{n}{r}$ $\blacksquare$

3.1. Binomio de Newton

Teorema 5: Sean $x, y \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}$

$$(x+y)^n = \binom{n}{0} x^n y^0 + \binom{n}{1} x^{n-1} y^1 + ... + \binom{n}{n} x^0 y^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k} y^k$$

Dem/ Va por inducción: n=1, claramente se verifica. $\square$
Suponemos que $(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k} y^k$ y probamos que $(x+y)^{n+1} = \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} x^{n+1-k} y^k$:

$$(x+y)^{n+1} = (x+y) \cdot (x+y)^n = x(x+y)^n + y(x+y)^n \overset{HI}{=} x(\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k} y^k) + y(\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k} y^k) =$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k+1} y^k + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k} y^{k+1} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k+1} y^k + \sum_{k=1}^{n+1} \binom{n}{k-1} x^{n-k+1} y^k$$

$$= \binom{n}{0} x^{n-0+1} y^0 + \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k+1} y^k + \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k-1} x^{n-k+1} y^k + \binom{n}{n} x^0 y^{n+1}$$

$$= x^{n+1} + \sum_{k=1}^{n} x^{n-k+1} y^k \left[\binom{n}{k} + \binom{n}{k-1} \right] + y^{n+1}$$

$$= x^{n+1} + \sum_{k=1}^{n} x^{n-k+1} y^k \binom{n+1}{k} + y^{n+1} =$$

Como $a^{k+1} = \binom{k+1}{k+1} a^{k+1} b^{k+1-(k+1)}$ y $b^{k+1} = \binom{k+1}{0} a^0 b^{k+1-0}$, tenemos que: $= \sum_{k=0}^{n+1} x^{n-k+1} + y^k$ $\blacksquare$

Corolario 6:

- $\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(-1)^k = 0$
  Dem/ Sea $x = 1, y = -1$, aplicando el T5, tenemos $\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}1^{n-k}(-1)^k = (-1+1)^n = 0$ ■
- $\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k} = 2^n$
  Dem/ Sea $x = 1, y = 1$, aplicando el T5, tenemos $\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}1^{n-k}1^k = (1+1)^n = 2^n$ ■

Teorema del Multinomio: Sean $n_1, n_2, ...n_r \in \mathbb{N}_0 / n_i \leq n, i = 1, 2, ..., r$ y $n_1 + n_2 + ... + n_r = n$, entonces el coeficiente de $x_1^{n_1}, x_2^{n_2}, ..., x_r^{n_r}$ en el desarrollo de $(x_1 + x_2 + ... + x_r)^n$ es $\dfrac{n!}{n_1!n_2!...n_r!}$ □

4. Combinaciones con Repeticiones: Distribuciones

Si X es un conjunto con n elementos distintos, y queremos elegir r pero tenemos la posibilidad de repetir objetos en la elección, estamos considerando todas las disposiciones de r letras $\mathbf{x}$ y $n-1$ $|$, que se calcula: $\frac{(r+n-1)!}{r!(n-1)!} = \binom{n+r-1}{r}$. Luego, el número de combinaciones de r objetos tomados de X permitiendo repeticiones es $C(r+n-1, r)$.

5. Principio de las Casillas

Teorema 7: $m, n \in \mathbb{N}$ tales que $n > m$ entonces no existe ninguna función inyectiva $f : [\![1, n]\!] \to [\![1, m]\!]$.
Dem/ Sea $H := \{n \in \mathbb{N} :$ existe un $n > m$ y existe una funcion $f : [\![1, n]\!] \to [\![1, m]\!]$ inyectiva $\}$, hay que demostrar que $H = \emptyset$. Vamos por el absurdo, suponiendo que es un subconjunto de los $\mathbb{N}$ no vacio, ergo, tiene primer elemento, digamos h. Luego, por definición, existe un $m < n$ y una funcion $f : [\![1, n]\!] \to [\![1, m]\!]$ inyectiva. Y sea $c = f(h)$, entonces definimos:

$$g : [\![1, m]\!] \to [\![1, m]\!], g(i) = \begin{cases} i & i \neq c, i \neq m \\ m & i = c \\ c & i = m \end{cases}$$

Y g es biyectiva, luego $\forall i \in [1, h-1], f(i) \neq c$. Luego $g(f(i)) \neq m$. Finalmente, definiendo j en $[\![1, h-1]\!]$ como $j(i) = g(f(i))$, resultara que $j(i) \in [\![1, m-1]\!]$. Y asi encontramos una inyectiva $j : [\![1, h-1]\!] \to [\![1, m-1]\!]$, donde $m-1 < h-1$, pero entonces $h-1 \in H$, lo cual es absurdo. Esto proviene de suponer $H \neq \emptyset$. Luego, $H = \emptyset$.

Y este teorema nos dice que si quisieramos ubicar n objetos en m casillas, entonces tendremos que poner más de un elemento en alguna de las casillas.

6. Principio de las Casillas Generalizado

Si queremos disponer n objetos en m casillas, al menos una caja debe contener no menos de $\lceil \frac{n}{m} \rceil$ y existirá otra caja que contendrá no más de $\lfloor \frac{n}{m} \rfloor$ objetos.

Nombre	Orden?	Repeticiones?	Formula	Ejemplo
Permutación	Si	No	$n!$	De cuantas formas se pueden ordenar 10 chicos? 10!
K-Permutación	Si	No	$\dfrac{n!}{(n-k)!}$	Si hay 10 chicos, y queremos seleccionar 5, de cuantas maneras se pueden ordenar esos 5? $\frac{10!}{(10-5)!}$
R-Permutación	Si	Si	k^n	Banderas de 3 bandas con 4 colores? 4^3
Anagrama	Si	No	$\dfrac{n!}{n_1! \cdot ... \cdot n_r!}$	Combinaciones BANANA $= \frac{6!}{1!3!2!}$. Trayectorias escalonadas $(2,1)$ a $(7,4) = \frac{(5+3))!}{5!3!}$
Combinación	No	No	$\dfrac{n!}{(n-r)!r!}$	Elegir 3 cartas de un mazo de 52? $\frac{52!}{(52-3)!3!}$ 36 chicos, 4 grupos de 9: $\binom{36}{9} \cdot \binom{27}{9} \cdot \binom{18}{9} \cdot \binom{9}{9}$
R-Combinación (r cruces)	No	Si	$\dfrac{(n+r-1)!}{r!(n-1)!}$	7 amigos, 4 menues? $\dfrac{(7+4-1)!}{7!3!}$ Soluciones enteras de $\sum_{i=1}^{4} x_i = 7$? $\dfrac{(7+4-1)!}{7!4!}$