Facultad de Ciencias Exactas, Ingeniería y Agrimensura
Departamento de Matemática - Escuela de Ciencias Exactas y Naturales

ANÁLISIS MATEMÁTICO II

Licenciatura y Profesorado en Física, Licenciatura en Ciencias de la Computación,
Licenciatura y Profesorado en Matemática - Año 2020

Práctica 8: Aproximación de funciones por polinomios.

---

1. Halle los polinomios de Taylor (del grado indicado y en el punto indicado) para cada una de las siguientes funciones:

   a) $f_1(x) = xe^x, \quad n = 5, a = 1.$

   b) $f_2(x) = x^5 + x^3 + x, \quad n = 4,\ a = 0$

   c) $f_3(x) = \displaystyle\int_0^x \frac{dt}{\sqrt{1+t^2}}, \quad n = 3,\ a = 0.$

   d) $f_4(x) = x \operatorname{sen} x, \quad n = 9,\ a = 0.$

2. Escriba cada uno de los siguientes polinomios en x como polinomios en $(x-1)$. Ayuda: Piense en el polinomio de Taylor alrededor de 1.

   a) $x^2 - 4x - 9$ *b)* $x^4 - 12x^3 - 44x^2 + 2x + 1$ *c)* x^5

3. Muestre que los polinomios de Taylor asociados a las siguientes funciones en el punto 0, verifican las igualdades correspondientes:

   a) Para $f_1(x) = \operatorname{sen}(3x)$ $\quad P_{2n-1,0}(x) = P_{2n,0}(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \frac{(-1)^k 3^{2k+1}}{(2k+1)!} x^{2k+1}$

   b) Para $f_2(x) = \operatorname{senh}(x)$ $\quad P_{2n-1,0}(x) = T_{2n,0}(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{(2k+1)!} x^{2k+1}$

   c) Para $f_3(x) = (1+x)^\alpha$ $\quad P_{n,0}(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{\alpha}{k} x^k$, donde $\displaystyle\binom{\alpha}{k} = \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-k+1)}{k!}$

   d) Para $f_4(x) = \operatorname{sen}^2(x)$ $\quad P_{2n,0}(x) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k+1} 2^{2k-1}}{(2k)!} x^{2k}$. Recuerde que: $\cos(2x) = 1 - 2\, sen^2 x$

4. Sea la función

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\operatorname{sen}(x)}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

a) Obtenga el polinomio de Taylor de grado 9 de f alrededor del origen. (Ayuda: Tal vez lo más conveniente no sea calcular las derivadas... revise la teoría para obtener un polinomio conveniente.)

b) Calcule $f^{(9)}(0)$.

5. Para cada una de las funciones dadas:

a) Halle la forma integral y la forma de Lagrange de los restos de la fórmula de Taylor asociada a dichas funciones en el punto 0, indicando el conjunto de validez de la expresión obtenida.

b) Demuestre que los restos obtenidos en la parte i) verifican las acotaciones indicadas.

a) $f(x) = \cosh x$, $\quad |R_{2n,0,f}(x)| = |R_{2n+1,0,f}(x)| \leq \frac{1}{(2n+2)!}\cosh(x)|x|^{2n+2}$

b) $f(x) = \ln(1+x)$, $\quad |R_{n,0,f}(x)| \leq \begin{cases} \frac{1}{n+1}x^{n+1} & \text{si } x > 0 \\ \frac{1}{n+1}\frac{1}{(1+x)^{n+1}}|x|^{n+1} & \text{si } -1 < x < 0 \end{cases}$

c) $f(x) = \cos x$, $\quad |R_{2n+1,0,f}(x)| \leq \frac{|x|^{2n+2}}{(2n+2)!}$

6. Suponga que a_i y b_i son los coeficientes de Taylor en a de f y g respectivamente. Es decir $a_i = \frac{f^{(i)}(a)}{i!}$ y $b_i = \frac{g^{(i)}(a)}{i!}$. Halle los coeficientes c_i de los polinomios de Taylor en a de las siguientes funciones en términos de a_i b_i:

$$(a)\ f+g, \qquad (b)\ fg, \qquad (c)\ f', \qquad (d)\ h(x) = \int_a^x f(t)\ dt, \qquad (e)\ \int_0^x g(t)\ dt.$$

7. A partir de la igualdad válida para todo $x \neq 1$

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \ldots + x^{n-1} + x^n + \frac{x^{n+1}}{1-x}$$

obtenga los polinomios de Taylor asociados a las siguientes funciones en el punto 0 y una expresión del resto correspondiente:

$f_1(x) = \frac{1}{1+x}$ $\quad f_2(x) = \frac{2+x-x^2}{1-x}$ $\quad f_3(x) = \frac{x}{1-x^2}$ $\quad f_4(x) = \ln\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}$ $\quad f_5(x)\operatorname{arctg}(x)$

8. Demuestre que $0,493957 < \int_0^{1/2} \frac{1}{1+x^4}dx < 0,493959$.

9. a) Si $0 \leq x \leq \frac{1}{2}$, demuestre que $\text{sen} x = x - \frac{x^3}{3!} + r(x)$, donde $|r(x)| \leq \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^5}{5!}$.

   b) Utilice la estimación a) para encontrar un valor aproximado de la integral $\int_0^{\sqrt{2}/2} \text{sen}\, x^2 dx$. Dé una estimación del error.

10. Demuestre que $|\,\text{sen}(x+h) - \text{sen}(x) - h\cos(x)| \leq \frac{1}{2}h^2$. En particular, verifique:

$$|h| \leq \sqrt{2} \cdot 10^{-3} \Rightarrow |\,\text{sen}(h) - h| \leq 10^{-6}$$

11. Halle un valor aproximado de los siguientes números con error menor que $\frac{1}{2}10^{-6}$.

    a) $e^{-0{,}1}$ b) $\cos\left(\frac{\pi}{36}\right)$ c) $sen(0{,}5)$ d) $\sqrt[4]{1{,}1}$

12. Demuestre que la ecuación $x^2 - \cos(x) = 0$, tiene exactamente dos soluciones. Utilice un adecuado polinomio de Taylor para probar que las soluciones son aproximadamente $\pm\sqrt{\frac{2}{3}}$ y obtener cotas para el error cometido.

13. Calcule el grado del polinomio de Taylor necesario para obtener las siete primeras cifras decimales del número $\ln(1{,}5)$ utilizando la formula de Taylor correspondiente a las funciones: $f(x) = \ln(x+1)$ y $g(x) = \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$.

14. Justifique la existencia de las siguientes integrales y calcule un valor aproximado con error menor que 10^{-5}.

    a) $\displaystyle\int_0^1 e^{-x^2} dx$ b) $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{1+x^3}$ c) $\displaystyle\int_0^1 \frac{1^x - 1}{x} dx$

15. Demuestre que se puede sustituir x por $\text{sen}(x)$ para $|x| < 0{,}31$ con un error menor de 5 milésimos.

16. (a) Demuestre que si $f''(a)$ existe, entonces

$$f''(a) = \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h) + f(a-h) - 2f(a)}{h^2}.$$

    El límite de la derecha es denominado *derivada segunda de Schwarz* de f en a.

    Ayuda: Utilice el polinomio de Taylor de grado 2 con $x = a + h$ y con $x = a - h$.

    (b) Sea $f(x) = x^2$ para $x \geq 0$ y $-x^2$ para $x \leq 0$. Demuestre que

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(0+h) + f(0-h) - 2f(0)}{h^2},$$

    existe, a pesar de no existir $f''(0)$.

    (c) Demuestre que si f tiene un máximo local en a, entonces la derivada segunda de Schwarz de f en a es ≤ 0.

    (d) Demuestre que si $f'''(a)$ existe, entonces

$$\frac{f'''(a)}{3} = \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h) + f(a-h) - 2f'(a)}{h^3}.$$