Unidad 1: Números Complejos y Polinomios
Álgebra y Geometría Analítica

Iker M. Canut

3 de agosto de 2020

1. Números Complejos

El conjunto de los números complejos es $\mathbb{C} = \{z = a+bi : \ a, b \in \mathbb{R}\}$, donde i es la **unidad imaginaria** que verifica $i^2 = -1$. Si $z \in \mathbb{C}$, $z = a + bi$ es la **forma binómica** de z.

La **parte real** de z es a, $Re\ z = a$, y la **parte imaginaria** de z es b, $Im\ z = b$.
$z = w \iff Re\ z = Re\ w \wedge Im\ z = Im\ w$.

Sea $z = a + bi$ y $w = c + di$, luego $z + w = (a + c) + (b + d)i$ y también $z \cdot w = (ac - bd) + (ad + bc)i$

La suma y el producto son asociativos y conmutativos, y vale la propiedad distributiva.

Sea $z = a + bi \in \mathbb{C}$, llamamos **conjugado** de z al complejo $\overline{z} = a - bi$. Y llamamos **módulo** de z al real $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$. Además, $|z|^2 = z \cdot \overline{z}$ y también $z^{-1} = \dfrac{\overline{z}}{|z|^2}$. Luego, $\dfrac{z}{w} = \dfrac{ac + bd}{c^2 + d^2} + \dfrac{bc - ad}{c^2 + d^2}i$.

1.1. Propiedades

- $\overline{\overline{z}} = z$
- $\overline{z + w} = \overline{z} + \overline{w}$
- $\overline{z \cdot w} = \overline{z} \cdot \overline{w}$
- Si $z \neq 0$, $\overline{z^{-1}} = (\overline{z})^{-1}$
- $z + \overline{z} = 2 \cdot Re\ z$
- $z - \overline{z} = 2 \cdot (Im\ z) \cdot i$
- $z = 0 \iff |z| = 0$
- $|z \cdot w| = |z| \cdot |w|$
- $|z| = |\overline{z}|$
- $|z| = |-z|$
- Si $z \neq 0$, $|z^{-1}| = |z|^{-1}$
- Si $z \neq 0$, $\left|\dfrac{z}{w}\right| = \dfrac{|z|}{|w|}$

1.2. Otras Formas

La **forma polar** de $z \in \mathbb{C}$ es $z = |z|_{arg\ z}$, donde $arg\ z$ es el único real tal que:

- $0 \leq arg\ z \leq 2\pi$
- $\cos(arg\ z) = \dfrac{a}{|z|}$
- $\sin(arg\ z) = \dfrac{b}{|z|}$

La **forma trigonométrica** de $z \in \mathbb{C}$ es $z = |z|(\cos arg\ z + i \sin arg\ z)$.
Sea $z = \rho(\cos\alpha + i\sin\alpha)$ y $w = \tau(\cos\beta + i\sin\beta)$, $z = w \iff (\rho = \tau) \wedge \alpha = \beta + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$.

Teorema de Moivre: Sean $z, w \in \mathbb{C}, z \neq 0, w \neq 0, \quad z = |z|(\cos\alpha + i\sin\alpha), \quad w = |w|(\cos\beta + i\sin\beta)$

$$z \cdot w = |z||w|[\cos(\alpha + \beta) + i\sin(\alpha + \beta)]$$

- $z^{-1} = |z|^{-1}[\cos(-\alpha) + i\sin(-\alpha)]$
- $\overline{z} = |z|[\cos(-\alpha) + i\sin(-\alpha)]$
- $\dfrac{z}{w} = \dfrac{|z|}{|w|}[\cos(\alpha - \beta) + i\sin(\alpha - \beta)]$
- $z^n = |z|^n[\cos(n \cdot \alpha) + i\sin(n \cdot \alpha)]$, con $n \in \mathbb{N}$

Si $w \in \mathbb{C}, w \neq 0$, una **raiz n-ésima** de w, con $n \in \mathbb{N}$, es un número z tal que $z^n = w$:

$$z = |z|^{\frac{1}{n}} \left[\cos\frac{arg\ w + 2k\pi}{n} + i\sin\frac{arg\ w + 2k\pi}{n}\right], \qquad 0 \leq k \leq n - 1, k \in \mathbb{N}$$

La **notación exponencial** de z es $z = |z|e^{i\alpha}$. Se verifica que $\overline{e^{i\alpha}} = e^{\overline{i\alpha}} = e^{-i\alpha}$ y que $e^{i\alpha} \cdot e^{i\beta} = e^{i(\alpha+\beta)}$

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{|z|}e^{\dfrac{i(\theta + 2k\pi)}{n}}$$