Unidad 3: Límite y Continuidad
Analisis Matemático I

Iker M. Canut

July 22, 2020

1 Distancia de Puntos y Entornos

Para $x, y \in \mathbb{R}$, la **distancia** entre x e y es $d(x,y) = |x - y|$

Llamamos **entorno** de un real a, de radio δ al intervalo abierto $(a-\delta, a+\delta)$ y lo notamos $E(a,\delta) = \{x \in \mathbb{R} : a - \delta < x < a + \delta\} = \{x \in \mathbb{R} : -\delta < x - a < \delta\} = \{x \in \mathbb{R} : |x - a| < \delta\}$

Llamamos **entorno reducido** de un real a, de radio δ al conjunto $E(a,\delta) - \{a\}$ y lo notamos $E'(a,\delta) = \{x \in \mathbb{R} : |x - a < \delta \wedge x \neq a|\} = \{x \in \mathbb{R} : 0 < |x - a| < \delta\}$

Sea a un real, δ_1, δ_2 dos reales positivos, y $\delta \leq min\{\delta_1, \delta_2\}$, se tiene que:

$$\begin{array}{c} E(a,\delta) \subseteq E(a,\delta_1) \cap E(a,\delta_2) \\ |x-a| < \delta \Rightarrow |x-a| < \delta_1 \wedge |x-a| < \delta_2 \end{array} \quad \text{y} \quad \begin{array}{c} E'(a,\delta) \subseteq E'(a,\delta_1) \cap E'(a,\delta_2) \\ 0 < |x-a| < \delta \Rightarrow 0 < |x-a| < \delta_1 \wedge 0 < |x-a| < \delta_2 \end{array}$$

2 Límite Finito en un Punto

Dada una función real f y un real a, tal que f está definida en un entorno reducido del punto a, decimos que l es el límite de la función f, cuando la variable independiente tiende al valor a y notamos

$$\lim_{x \to a} f(x) = l$$

si para cualquier valor $\epsilon > 0$, prefijado, existe un número positivo δ tal que:

$$0 < |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - l| < \epsilon$$

$$x \in E'(a,\delta) \Rightarrow f(x) \in E(l,\epsilon)$$

$$\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0 /\ \forall x : (0 < |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - l| < \epsilon)$$

No se exige que a esté en el dominio de f, pero si que f este definida en un entorno reducido de a. La siguiente simbología es equivalente:

$$\lim_{x \to a} f(x) = l \qquad \lim_{x \to 0} f(x + a) = l \qquad \lim_{x \to a} f(x) - l = 0$$

Por último, observamos que el número δ depende tanto del valor de ϵ como del punto a. Además, si en un punto a, para un ϵ, un número δ satisface la definición de límite, entonces cualquier $\delta' < \delta$ tambien es válido. Por otro lado, si un δ es útil para un ϵ, también es útil para un $\epsilon' > \epsilon$.

$$0 < |x - a| < \delta' \Rightarrow 0 < |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - l| < \epsilon < \epsilon'$$

3 Límites Finitos

3.1 Función Constante

$f(x) = c \in \mathbb{R}$, $\lim_{x \to a} c = c$, pues cualquier $\epsilon > 0$ y $\delta > 0$, se verifica que

$$0 < |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - c| = |c - c| = 0 < \epsilon$$

3.2 Función Lineal

$f(x) = mx + h, m \neq 0$, $\lim_{x \to a} mx + h = ma + h$

$$\forall \epsilon > 0,\ \exists \delta > 0 :\ \forall x : (0 < |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - l| < \epsilon)$$

$$|(mx + h) - (ma + h)| = |m| \cdot |x - a| < \epsilon \Rightarrow |x - a| < \delta < \frac{\epsilon}{|m|}$$

Y considerando $\delta < \frac{\epsilon}{|m|}$ tenemos que $0 < |x - a| < \delta < \frac{\epsilon}{|m|} \Rightarrow |(mx+h) - (ma+h)| = |m| \cdot |x - a| < \epsilon$

3.3 Función Cuadratica

$f(x) = x^2$, $\lim_{x \to a} x^2 = a^2$ hay que demostrar $\forall \epsilon > 0,\ \exists \delta > 0 :\ \forall x : (0 < |x - a| < \delta \Rightarrow |x^2 - a^2| < \epsilon)$ Se ve que $|x^2 - a^2| = |x - a| \cdot |x + a|$

- Caso $a = 0$: $\forall \epsilon > 0,\ \exists \delta > 0 :\ \forall x : (0 < |x| < \delta \Rightarrow |x^2| < \epsilon)$
  Luego $|x^2| < \epsilon \iff |x|^2 < \epsilon \iff |x| < \sqrt{\epsilon}$ y tenemos que:

$$0 < |x| < \delta = \sqrt{\epsilon} \Rightarrow |x|^2 < \epsilon \Rightarrow |x^2| < \epsilon$$

- Caso $a \neq 0$: $\forall \epsilon > 0,\ \exists \delta > 0 :\ \forall x : (0 < |x - a| < \delta \Rightarrow |x - a| \cdot |x + a| < \epsilon)$ **(1)**
  Hay que acotar $|x + a|$. Sea $0 < \delta < |a|$, **(2)**

$$|x - a| < \delta \Rightarrow -|a| < -\delta < x - a < \delta < |a| \Rightarrow -|a| + 2a < -\delta + 2a < x + a < \delta + 2a < |a| + 2a$$
$$\Rightarrow -|a| - 2|a| < x + a < |a| + 2|a| \Rightarrow |x + a| < 3|a|$$

Y tenemos que $|x - a| < \delta \Rightarrow |x + a| < 3|a|$. **(3)**
De **(2)** para que se verifique **(3)** y de **(1)** tenemos que $\delta \leq min \left\{ |a|, \frac{\epsilon}{3|a|} \right\}$
Luego, $|x - a| < \frac{\epsilon}{3|a|} \wedge |x + a| < 3|a|$. Y tenemos que

$$0 < |x - a| < \delta \Rightarrow |x^2 - a^2| = |x - a| \cdot |x + a| < \frac{\epsilon}{3|a|} \cdot 3|a| = \epsilon$$

3.4 Función Reciproca

$f(x) = \frac{1}{x}$, $\lim_{x \to a} \frac{1}{x} = \frac{1}{a}$ hay que demostrar $\forall \epsilon > 0,\ \exists \delta > 0 :\ \forall x : (0 < |x - a| < \delta \Rightarrow |\frac{1}{x} - \frac{1}{a}| < \epsilon)$

Se demuestra fijando un ϵ a cualquier número. Después se calcula la otra parte del mínimo.

4 Unicidad del Límite

Teorema 1: **Unicidad del Límite**. Sea f una función real definida en un entorno reducido del punto a y sean l_1 y l_2 dos números reales tales que: $\lim_{x \to a} f(x) = l_1 \ \wedge \ \lim_{x \to a} f(x) = l_2 \ \Rightarrow \ l_1 = l_2$
Demostración: Dado $\epsilon > 0$, tenemos δ_1 y δ_2 tales que:

$$0 < |x - a| < \delta_1 \Rightarrow |f(x) - l_1| < \frac{\epsilon}{2} \quad \wedge \quad 0 < |x - a| < \delta_2 \Rightarrow |f(x) - l_2| < \frac{\epsilon}{2}$$

Considerando $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$, considerando cualquier $E'(a, \delta)$, tenemos que:

$$|l_1 - l_2| = |l_1 - f(x) + f(x) - l_2| \leq |l_1 - f(x)| + |l_2 - f(x)| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon$$

Y como tenemos $0 \leq |l_1 - l_2| < \epsilon$, podemos asegurar que $|l_1 - l_2| = 0 \Rightarrow l_1 = l_2$ ■

5 No Existencia de Límite

Negando la forma proposicional de la definición de límite, llegamos a que no existe el límite si:

$$\exists \epsilon > 0 /\ \forall \delta > 0, \exists x : (0 < |x - a| < \delta \wedge |f(x) - l| \geq \epsilon)$$

Generalmente se demuestra que un $l = b$ no es límite (fijo), y que $l \neq b$ tampoco lo es (relación a l).

6 Límites Laterales

$$\lim_{x\to a^+} f(x) = l, \text{ si } \forall\epsilon > 0,\ \exists\delta > 0 : a < x < a+\delta \Rightarrow |f(x) - l| = \epsilon$$
$$\lim_{x\to a^-} f(x) = l, \text{ si } \forall\epsilon > 0,\ \exists\delta > 0 : a-\delta < x < a \Rightarrow |f(x) - l| = \epsilon$$

Proposición 1: $\lim_{x\to a} f(x) = l \iff \lim_{x\to a^-} f(x) = l \wedge \lim_{x\to a^+} f(x) = l$
Demostración:
$\Rightarrow$) Si $\forall\epsilon > 0,\ \exists\delta > 0 :\ \forall x : (0 < |x-a| < \delta \Rightarrow |f(x) - l| < \epsilon$
Para ese δ se verifica $a-\delta < x < a \Rightarrow 0 < |x-a| < \delta \Rightarrow |f(x) = l| \therefore$ Existe el límite por izquierda.
$a < x < a+\delta \Rightarrow 0 < |x-a| < \delta \Rightarrow |f(x) = l| \therefore$ Existe el límite por derecha.

□

$\Leftarrow$) Si $\forall\epsilon > 0, \exists\delta_1, \delta_2$ tales que: $a-\delta_1 < x < a \Rightarrow |f(x)-l| < \epsilon \quad \wedge \quad a < x < a+\delta \Rightarrow |f(x)-l| < \epsilon$
Sea $\delta = \min \delta_1, \delta_2$:
$a-\delta < x < a \Rightarrow a-\delta_1 < x < a \Rightarrow |f(x)-l| < \epsilon \ \wedge\ a < x < a+\delta \Rightarrow a < x < a+\delta_2 \Rightarrow |f(x)-l| < \epsilon$
$\Rightarrow 0 < |x-a| < \delta \Rightarrow |f(x) - l| < \epsilon \therefore \lim_{x\to a} f(x) = l$

■

Nota: Como la existencia e igualdad de límites laterales en un punto es condición necesaria y suficiente para garantizar la existencia de límites alli, la no existencia de alguno de los límites laterales, o la diferencia entre ambos, implica la no existencia de límites finito de la función en el punto.

Proposición 2: Sea f una función y a un numero tal que existe $\lim_{x\to a} f(x) = l \Rightarrow \lim_{x\to a} |f(x)| = |l|$
Demostración: Dado $\epsilon > 0,\ \exists\delta > 0 : (0 < |x-a| < \delta \Rightarrow |f(x) - l) < \epsilon)$
Y como $||f(x)| - |l|| < |f(x) - l|$, para el mismo δ: $(0 < |x-a| < \delta \Rightarrow ||f(x)| - |l|| < |f(x) - l) < \epsilon)$

■

Teorema 2: **Caracter Local del Límite**: Sean a un real, y dos funciones f y g para las cuales:

$$\lim_{x\to a} f(x) = l \quad \wedge \quad f(x) = g(x) \text{ en algún } E'(a,\rho) \quad \Rightarrow \quad \lim_{x\to a} g(x) = l$$

Demostración: Dado $\epsilon > 0, \exists\delta' > 0 : (0 < |x-a| < \delta' \Rightarrow |f(x) - l| < \epsilon)$
Por Hipotesis, existe $\rho > 0$ tal que $0 < |x-a| < \rho \Rightarrow f(x) = g(x)$, y eligiendo $\delta = \min\{\delta', \rho\}$, vale:

$$0 < |x-a| < \delta \Rightarrow |f(x)-l| < \epsilon \ \wedge\ f(x) = g(x) \Rightarrow |g(x)-l| < \epsilon \ \therefore\ 0 < |x-a| < \delta \Rightarrow |g(x)-l| < \epsilon$$

■

....

Sea A un subconjunto no vacio de $\mathbb{R}$ y f una función definida en A, diremos que la función F está **acotada** en el conjunto A si existe un número real $M > 0$ tal que $\forall x \in A$: $|f(x)| \leq M$.

De manera alternativa, f está acotada en A si $\{f(x) : x \in A\}$ es un subconjunto acotado de $\mathbb{R}$.

Teorema 3: Si tenemos que $\lim_{x\to a} f(x) = l$, entonces existe $E'(a,\delta)$ en el cual la función está acotada.
Demostración: Dado, por ejemplo, $\epsilon = 1$, existe $\delta > 0 : x \in E'(a,\delta) \Rightarrow |f(x) - l| < 1$. Luego,

$$\begin{aligned} |f(x) - l| < 1 &\Rightarrow -1 < f(x) - l < 1 \Rightarrow l - 1 < f(x) < l + 1 \\ &\Rightarrow -|l| - 1 \leq l - 1 < f(x) < l + 1 \leq |l| + 1 \\ &\Rightarrow -(|l| + 1) < f(x) < (|l| + 1) \Rightarrow |f(x)| < |l| + 1 \end{aligned}$$

■

La recíproca no necesariamente es cierta, hay funciones acotadas en todo entorno reducido de a que no tienen límite en a (e.g signo en $a = 0$).

Teorema 4: Si tenemos que $\lim_{x \to a} f(x) = l$ y dos números k y h, tales que $h < l < k$, entonces existe un entorno reducido $E'(a, \delta)$ donde, $\forall x \in E'(a, \delta)$, se verifica $h < f(x) < k$.
Demostración:
Siendo $l < k$, eligiendo $\epsilon = k - l > 0$, sabemos que existe $\delta_1 > 0$ tal que
si $x \in E'(a, \delta_1) \Rightarrow |f(x) - l| < k - l$. Y en ese entorno, $f(x) - l \leq |f(x) - l| < k - l \therefore f(x) < k$ **(1)**
Siendo $h < l$, eligiendo $\epsilon = l - h > 0$, sabemos que existe $]dekta_2 > 0$ tal que
si $x \in E'(a, \delta_2) \Rightarrow |f(x) - l| < l - h$. Y en ese entorno, $h - l < f(x) - l < l - h \therefore h < f(x)$ **(2)**
Considerando $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$, vale de **(1)** y **(2)** que $x \in E'(a, \delta) \Rightarrow h < f(x) < k$

■

Corolario 1: **Teorema de Conservación del Signo**. Si tenemos que $\lim_{x \to a} f(x) = l \neq 0$, entonces existe un entorno reducido $E'(a, \delta)$ donde $f(x) \neq 0$. Y vale, por ejemplo, $|f(x)| > \frac{|l|}{2}$
Demostración: Teorema anterior. Si $l < 0, h = \dfrac{l}{2} < l$. Si $l > 0, k = \dfrac{l}{2} > l$. Por la proposición 2, vale $\lim_{x \to a} |f(x)| = |l| \neq 0$

■

7 Álgebra de Límites

Teorema 5: Sea a un real, f y g dos funciones tales que $\lim_{x \to a} f(x) = l_1$ y $\lim_{x \to a} g(x) = l_2$, entonces:

- $\lim_{x \to a} (f + g)(x) = l_1 + l_2$
  Dem: $0 < |x - a| < \delta_1 \Rightarrow |f(x) - l_1| < \dfrac{\epsilon}{2}$ y $0 < |x - a| < \delta_2 \Rightarrow |g(x) - l_2| < \dfrac{\epsilon}{2}$
  Sea $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$, y x tal que $0 < |x - a| < \delta$,
  $|(f + g)(x) - (l_1 + l_2)| = |(f(x) - l_1) + (f(x) - l_2)| \leq |f(x) - l_1| + |f(x) - l_2| < \dfrac{\epsilon}{2} + \dfrac{\epsilon}{2} = \epsilon$

  ■

- Sea $c \in \mathbb{R}$, $\lim_{x \to a} (c \cdot f)(x) = c \cdot l_1$
  Dem: Si $c = 0$ es trivial. Sea $c \neq 0$, dado $\epsilon > 0$, sea $\delta > 0 : 0 < |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - l_1| < \dfrac{\epsilon}{|c|}$.
  Entonces para los $x : 0 < |x - a| < \delta$, $|(c \cdot f)(x) - (c \cdot l_1)| = |c \cdot (f(x) - l_1)| = |c| \cdot |f(x) - l_1| < |c| \cdot \dfrac{\epsilon}{|c|} = \epsilon$

  ■

- $\lim_{x \to a} (f - g)(x) = l_1 - l_2$
  Dem: $\lim_{x \to a} (f - g)(x) = \lim_{x \to a} (f + (-1)g)(x) = \lim_{x \to a} f(x) + (-1) \lim_{x \to a} g(x) = l_1 - l_2$

  ■

....

Teorema 6: Si $\lim_{x \to a} f(x) = 0$ y g está acotada en un entorno reducido $E'(a, \rho)$, entonces $\lim_{x \to a} (fg)(x) = 0$
Demostración: Tenemos que $0 < |x - a| < \delta' \Rightarrow |f(x)| < \dfrac{\epsilon}{M}$ y $0 < |x - a| < \rho \Rightarrow |g(x)| \leq M$.
Luego, considerando $\delta = \min\{\delta', \rho\}$, y x tal que $0 < |x - a| < \delta$,

$$|(f \cdot g)(x) - 0| = |f(x) \cdot g(x)| = |f(x)| \cdot |g(x)| < \frac{\epsilon}{M} \cdot M = \epsilon$$

■

....

Teorema 7: Si $\lim_{x\to a} f(x) = l_1$ y $\lim_{x\to a} g(x) = l_2$

- Existe el limite de la función fg en a y vale $\lim_{x\to a}(f\cdot g)(x) = l_1 \cdot l_2$
  Dem: Sabemos que f está acotada en $E'(a,\rho)$ por M, es decir, $0 < |x-a| < \rho \Rightarrow |f(x)| \leq M$, que $0 < |x-a| < \delta_1 \Rightarrow |f(x) - l_1| < \epsilon'$ y que $0 < |x-a| < \delta_2 \Rightarrow |g(x) - l_2| < \epsilon''$.
  Luego, para $\delta = \min\{\rho, \delta_1, \delta_2\}$, para x tal que :

$$\begin{aligned} 0 < |x-a| < \delta \Rightarrow |f(x)\cdot g(x) - l_1 \cdot l_2| & \\ &= |f(x)\cdot g(x) - f(x)\cdot l_2 + f(x)\cdot l_2 - l_1\cdot l_2| \\ &\leq |f(x)\cdot(g(x) - l_2)| + |l_2\cdot(f(x) - l_1)| \\ &= |f(x)|\cdot|g(x) - l_2| + |l_2|\cdot|f(x) - l_1| \\ &< M\cdot\epsilon'' + |l_2|\cdot\epsilon' = \epsilon \end{aligned}$$

  Luego, $\epsilon' = \dfrac{\epsilon}{2\cdot|l_2|}$ y $\epsilon'' = \dfrac{\epsilon}{2\cdot M}$ ■

- Si además $l_2 \neq 0$, $\lim_{x\to a}\left(\dfrac{f}{g}\right)(x) = \dfrac{l_1}{l_2}$
  Dem: Como $l_2 \neq 0$, $\exists E'(a,\rho)$ dentro del cual $|g(x)| > m$, para algún $m > 0$ (Corolario 1).
  Por otro lado, $\forall\epsilon > 0,\ \exists\delta > 0 : \forall x(0 < |x-a| < \delta' \Rightarrow |g(x) - l_2| < \epsilon')$.
  Para $\delta \leq \min\{\delta', \rho\}$ y x tal que $0 < |x-a| < \delta$
  $\left|\dfrac{1}{g(x)} - \dfrac{1}{l_2}\right| = \left|\dfrac{l_2 - g(x)}{l_2\cdot g(x)}\right| = |l_2 - g(x)|\cdot\dfrac{1}{|g(x)|}\cdot\dfrac{1}{|l_2|} < \epsilon'\cdot\dfrac{1}{m}\cdot\dfrac{1}{|l_2|} = \epsilon \quad \therefore \epsilon' = |l_2|\cdot m\cdot\epsilon$ ■

- $\lim_{x\to a}\left(\dfrac{f}{g}\right)(x) = \lim_{x\to a} f(x)\cdot\left(\dfrac{1}{g}\right)(x) = l_1\cdot\dfrac{1}{l_2} = \dfrac{l_1}{l_2}$ ■

....

Combinando los apartados anteriores, se puede asegurar que:

- $\forall n \in \mathbb{N}, a \in \mathbb{R}$, existe $\lim_{x\to a} x^n = a^n$
- Dado un polinomio $p(x) = \alpha_n x^n + \alpha_{n-1}x^{n-1} + ... + \alpha_1 x + \alpha_0, a \in \mathbb{R}$, existe

$$\lim_{x\to a} p(x) = \alpha_n a^n + \alpha_{n-1}a^{n-1} + ... + \alpha_1 a + \alpha_0 = p(a)$$

- Dada una función racional $\dfrac{p(x)}{q(x)}$ y un $a \in \mathbb{R}$, $\lim_{x\to a}\dfrac{p(x)}{q(x)} = \dfrac{p(a)}{q(a)}$, siempre que $q(a) \neq 0$

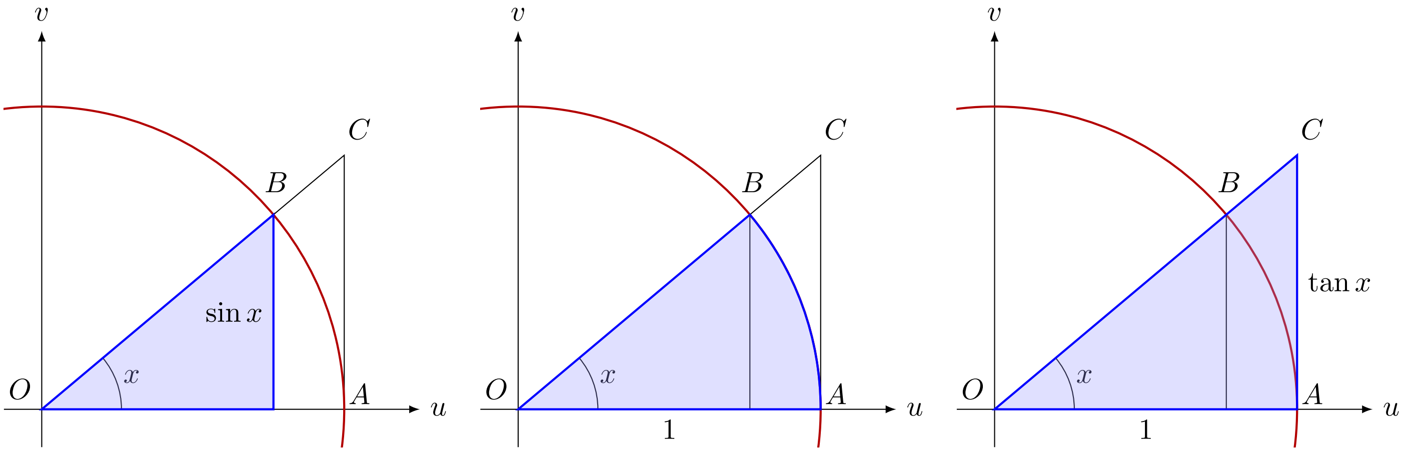
....

Todos los resultado son válidos si se reemplazan los símbolos $x \to a$ por $x \to a^+$ o $x \to a^-$.

8 Límite de Funciones Trigonométricas

Proposición 4: Si $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$, $|sin\ x| \leq |x| \leq |tan\ x|$.

Demostración: Para $x = 0$ vale la igualdad. Luego, para $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}, x \neq 0$



Luego, comparando las areas, $\overset{\triangle}{AOB} <$ área sector circular $AOB < \overset{\triangle}{AOC}$.

Puesto en valores queda: $\frac{|\sin x|}{2} < \frac{|x|}{2} < \frac{|\tan x|}{2}$ e inmediatamente implica el enunciado.

Nota: La desigualdad $|\sin x| < |x|$ es cierta $\forall x \neq 0$. $|\sin x| \leq 1 < \frac{\pi}{2} \leq |x|$

Podemos asegurar también que $\lim_{x\to 0} \sin x = 0$, pues $0 < |x| < \delta \Rightarrow |\sin x| < |x| < \delta < \epsilon$

También es útil ver que:

$$\begin{aligned} \cos x &= \cos\left(2\frac{x}{2}\right) = \cos\left(\frac{x}{2} + \frac{x}{2}\right) = \left(\cos\frac{x}{2} \cdot \cos\frac{x}{2} - \sin\frac{x}{2} \cdot \sin\frac{x}{2}\right) \\ &= \cos^2\left(\frac{x}{2}\right) - \sin^2\left(\frac{x}{2}\right) = 1 - \sin^2\left(\frac{x}{2}\right) - \sin^2\left(\frac{x}{2}\right) = 1 - 2\cdot\sin^2\left(\frac{x}{2}\right) \end{aligned}$$

De esta manera podemos concluir que:

$$\lim_{x\to 0} \cos x = \lim_{x\to 0} \left(1 - 2\cdot\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)\right) = 1$$

Teorema 8: Para $a \in \mathbb{R}$:

$$\lim_{x\to a} \sin x = \sin a \qquad \wedge \qquad \lim_{x\to a} \cos x = \cos a$$

Demostración: Usando lo anterior más las siguientes formulas:

- $\lim_{x\to a}(\sin x) = \lim_{x\to 0}(\sin(x+a)) = \lim_{x\to 0}(\sin x \cdot \cos a + \cos x \cdot \sin a) = 0 \cdot \cos a + 1 \cdot \sin a = \sin a$
- $\lim_{x\to a}(\cos x) = \lim_{x\to 0}(\cos(x+a)) = \lim_{x\to 0}(\cos x \cdot \cos a - \sin x \cdot \sin a) = 1 \cdot \cos a - 0 \cdot \sin a = \cos a$

Corolario 2:

1. Para $a \neq \left(\frac{\pi}{2} + k\cdot\pi\right), k \in \mathbb{Z}:$ $\quad \lim_{x\to a} \tan x = \tan a \quad \wedge \quad \lim_{x\to a} \sec x = \lim_{x\to a} \frac{1}{\cos x} = \frac{1}{cosa} = \sec a$
2. Para $a \neq k\cdot\pi, k \in \mathbb{Z}:$ $\lim_{x\to a} \csc x = \lim_{x\to a} \frac{1}{\sin x} = \frac{1}{\sin a} = \csc a \quad \wedge \quad \lim_{x\to a} \cot x = \lim_{x\to a} \frac{\sin x}{\cos x} = \frac{\sin a}{\cos a} = \cot a$

$\blacksquare$

9 El Principio de Intercalación

Teorema 9: **El Principio de Intercalación**: Sean f, g, h tres funciones y a un real, tales que en algún entorno reducido $E'(a, \rho)$ se tiene: $g(x) \leq f(x) \leq h(x)$,
y además las funciones g y h tienen límite en a siendo $\lim_{x \to a} g(x) = \lim_{x \to a} h(x) = l$,
Entonces f tiene límite en el punto a y vale $\lim_{x \to a} f(x) = l$.
Demostración: Tenemos $0 < |x - a| < \delta_1 \Rightarrow |g(x) - l| < \epsilon \quad \wedge \quad 0 < |x - a| < \delta_2 \Rightarrow |h(x) - l| < \epsilon$
Entonces para $\delta = \min\{\rho, \delta_1, \delta_2\}$, y x tal que:

$$0 < |x - a| < \delta \begin{cases} g(x) \leq f(x) \leq h(x) \\ l - \epsilon < g(x) \\ h(x) < l + \epsilon \end{cases} \Rightarrow (l - \epsilon < f(x) < l + \epsilon) \Rightarrow (|f(x) - l| < \epsilon)$$

Proposición 5: El Principio de Intercalación es valido si se reemplaza $x \to a$ por $x \to a^+$ o $x \to a^-$.
Proposición 6: $\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$
Demostración: Para $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}, x \neq 0$, tenemos que $|\sin x| < |x| < |\tan x|$
Para los x tales que $0 < x < \frac{\pi}{2}$, si dividimos por $\sin x > 0$, tenemos $1 < \frac{x}{\sin x} < \frac{1}{\cos x}$
Para los x tales que $\frac{\pi}{2} < x < 0$, si dividimos por $-\sin x > 0$, tenemos $1 < \frac{x}{\sin x} < \frac{1}{\cos x}$
Y como sabemos que $\lim_{x \to 0} \cos x = 1 \neq 0 \Rightarrow \lim_{x \to 0} \frac{1}{\cos x} = 1$
Utilizando el Teorema del Sandwich, se concluye que $\lim_{x \to 0} \frac{x}{\sin x} = 1 \neq 0$ y luego $\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ ■