Unidad 4 – Cálculo Diferencial

1.9 Diferenciabilidad y Aproximación de Primer Orden

Definición (Diferenciabilidad)

Decimos que una función f es diferenciable en un punto a, si existen un número real α y una función θ, definida en un entorno del punto a, tales que, para $h > 0$,

$$f(a+h) = f(a) + \alpha \cdot h + h \cdot \theta(h),$$

donde $\lim_{h \to 0} \theta(h) = 0$.

Así, cuando f es diferenciable en a, si h es pequeño, se tiene

$$f(a+h) = f(a) + \alpha \cdot h + \underbrace{h \cdot \theta(h)}_{\searrow 0}$$

entonces podemos aproximar el valor de $f(a+h)$ por:

$$\boxed{f(a+h) \approx f(a) + \alpha \cdot h} \tag{1}$$

Así, cuando f es diferenciable en a, si h es pequeño, se tiene

$$f(a+h) = f(a) + \alpha \cdot h + \underbrace{h \cdot \theta(h)}_{\searrow 0}$$

entonces podemos aproximar el valor de $f(a+h)$ por:

$$\boxed{f(a+h) \approx f(a) + \alpha \cdot h} \tag{1}$$

O equivalentemente, siendo $x = a+h$:

$$\boxed{f(x) \approx f(a) + \alpha \cdot (x-a)} \tag{2}$$

A esta aproximación de la función se la llama **aproximación de primer orden**, o **aproximación por linealización**, o **aproximación lineal** de la función f en el punto a.

Así, cuando f es diferenciable en a, si h es pequeño, se tiene

$$f(a+h) = f(a) + \alpha \cdot h + \underbrace{h \cdot \theta(h)}_{\searrow 0}$$

entonces podemos aproximar el valor de $f(a+h)$ por:

$$\boxed{f(a+h) \approx f(a) + \alpha \cdot h} \tag{1}$$

O equivalentemente, siendo $x = a+h$:

$$\boxed{f(x) \approx f(a) + \alpha \cdot (x-a)} \tag{2}$$

A esta aproximación de la función se la llama **aproximación de primer orden**, o **aproximación por linealización**, o **aproximación lineal** de la función f en el punto a.

Si observamos (2), podemos notar que cuando f es derivable en a la aproximación de primer orden corresponde a aproximar los valores de f cerca del punto a, por los de la recta tangente a la gráfica de f en el punto a, puesto que la ecuación de esta última es

$$\boxed{y = f(a) + f'(a) \cdot (x-a)}$$

TEOREMA

Una función f es derivable en un punto a si y sólo si es diferenciable en a.

Teorema

Una función f es derivable en un punto a si y sólo si es diferenciable en a.

$$\boxed{\begin{array}{l} f \text{ es derivable en a si existe} \\ f'(a) = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(a+h)-f(a)}{h} \end{array}} \iff \boxed{\begin{array}{l} f \text{ es diferenciable en a si existen } \alpha \text{ y } \theta(h) \text{ tal que} \\ f(a+h) = f(a) + \alpha\cdot h + h\cdot\theta(h) \quad \text{con } \lim\limits_{h\to 0}\theta(h) = 0 \end{array}}$$

TEOREMA

Una función f es derivable en un punto a si y sólo si es diferenciable en a.

f es derivable en a si existe $f'(a) = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$	$\Longleftrightarrow$	f es diferenciable en a si existen α y $\theta(h)$ tal que $f(a+h) = f(a) + \alpha \cdot h + h \cdot \theta(h) \quad \text{con} \quad \lim\limits_{h\to 0} \theta(h) = 0$

Demostración. Supongamos que f es derivable en a. Entonces

$$f'(a) = \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}.$$

Teorema

Una función f es derivable en un punto a si y sólo si es diferenciable en a.

f es derivable en a si existe $f'(a)=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$	$\Longleftrightarrow$	f es diferenciable en a si existen α y $\theta(h)$ tal que $f(a+h)=f(a)+\alpha\cdot h+h\cdot\theta(h)$ con $\lim\limits_{h\to 0}\theta(h)=0$

Demostración. Supongamos que f es derivable en a. Entonces

$$f'(a)=\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}.$$

Sea la función θ definida por

$$\theta(h)=\begin{cases}\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}-f'(a) & \text{si} \quad h\neq 0\\[2ex] 0 & \text{si} \quad h=0\end{cases}$$

Por construcción, la función θ, verifica que está definida en un entorno de a y además

$$\lim_{h\to 0} \theta(h) = \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h} - f'(a) \underbrace{=}_{AL} \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h} - \lim_{h\to 0} f'(a) = f'(a) - f'(a) = 0,$$

Por construcción, la función θ, verifica que está definida en un entorno de a y además

$$\lim_{h\to 0} \theta(h) = \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h} - f'(a) \underbrace{=}_{AL} \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h} - \lim_{h\to 0} f'(a) = f'(a) - f'(a) = 0,$$

luego si $h > 0$, es $\theta(h) = \dfrac{f(a+h)-f(a)}{h} - f'(a)$,

Por construcción, la función θ, verifica que está definida en un entorno de a y además

$$\lim_{h\to 0}\ \theta(h) = \lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h} - f'(a) \underbrace{=}_{AL} \lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h} - \lim_{h\to 0} f'(a) = f'(a) - f'(a) = 0,$$

luego si $h>0$, es $\theta(h) = \dfrac{f(a+h)-f(a)}{h} - f'(a)$, o sea $\theta(h) + f'(a) = \dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$

Por construcción, la función θ, verifica que está definida en un entorno de a y además

$$\lim_{h\to 0} \theta(h) = \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h} - f'(a) \underbrace{=}_{AL} \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h} - \lim_{h\to 0} f'(a) = f'(a) - f'(a) = 0,$$

luego si $h > 0$, es $\theta(h) = \dfrac{f(a+h)-f(a)}{h} - f'(a)$, o sea $\theta(h) + f'(a) = \dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$ y ahora multiplicando por h, será $h \cdot \theta(h) + f'(a) \cdot h = f(a+h) - f(a)$

Por construcción, la función θ, verifica que está definida en un entorno de a y además

$$\lim_{h\to 0} \theta(h) = \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h} - f'(a) \underbrace{=}_{AL} \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h} - \lim_{h\to 0} f'(a) = f'(a) - f'(a) = 0,$$

luego si $h > 0$, es $\theta(h) = \dfrac{f(a+h)-f(a)}{h} - f'(a)$, o sea $\theta(h) + f'(a) = \dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$ y ahora multiplicando por h, será $h \cdot \theta(h) + f'(a) \cdot h = f(a+h) - f(a)$ y despejando $f(a+h)$, se tiene que para $h > 0$ vale la igualdad

$$f(a+h) = f(a) + \underbrace{f'(a)}_{\exists \alpha = f'(a)} \cdot h + h \cdot \theta(h) \tag{3}$$

con $\lim\limits_{h\to 0} \theta(h) = 0$, o sea f verifica la condición de diferenciabilidad en el punto a.

Por construcción, la función θ, verifica que está definida en un entorno de a y además

$$\lim_{h\to 0} \theta(h) = \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h} - f'(a) \underbrace{=}_{AL} \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h} - \lim_{h\to 0} f'(a) = f'(a) - f'(a) = 0,$$

luego si $h>0$, es $\theta(h) = \dfrac{f(a+h)-f(a)}{h} - f'(a)$, o sea $\theta(h)+f'(a) = \dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$ y ahora multiplicando por h, será $h\cdot\theta(h)+f'(a)\cdot h = f(a+h)-f(a)$ y despejando $f(a+h)$, se tiene que para $h>0$ vale la igualdad

$$f(a+h) = f(a) + \underbrace{f'(a)}_{\exists\alpha = f'(a)} \cdot h + h\cdot\theta(h) \qquad (3)$$

con $\lim_{h\to 0} \theta(h) = 0$, o sea f verifica la condición de diferenciabilidad en el punto a.

Observemos antes de pasar a la prueba de la otra parte del teorema, que la definición del valor $\theta(0)=0$ es arbitraria. Necesitamos un valor que haga que tenga sentido la ecuación (3) para $h=0$, pero cualquiera sirve, dado que vale 0 el producto $h\cdot\theta(h)$ y el producto $\alpha\cdot h$ para $h=0$.

Recíprocamente, supongamos f es diferenciable en a, y sean el número α y una función $\theta(h)$, los requeridos en la definición de diferenciabilidad, es decir, para $h > 0$, vale

$$f(a+h) = f(a) + \alpha \cdot h + h \cdot \theta(h)$$

donde $\lim\limits_{h \to 0} \theta(h) = 0$.

Recíprocamente, supongamos f es diferenciable en a, y sean el número α y una función $\theta(h)$, los requeridos en la definición de diferenciabilidad, es decir, para $h > 0$, vale

$$f(a+h) = f(a) + \alpha \cdot h + h \cdot \theta(h)$$

donde $\lim_{h \to 0} \theta(h) = 0$.
Así, para $h \neq 0$,

$$\frac{f(a+h) - f(a)}{h} = \alpha + \theta(h),$$

y tomando límite cuando $h \to 0$,

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} \underbrace{=}_{AL} \lim_{h \to 0} \alpha + \lim_{h \to 0} \theta(h) = \alpha,$$

y por lo tanto la función f es derivable en el punto a y vale $f'(a) = \alpha$. *Q.E.D.*

Nota

Cuando una función f es continua en un punto a, entonces, para h pequeño, podemos aproximar el valor de $f(a+h)$ por el valor $f(a)$, ya que

$$f(a+h) = f(a) + (f(a+h) - f(a)) = f(a) + e_0(h),$$

donde $\lim\limits_{h \to 0} e_0(h) = 0$.

Ahora, hemos visto que si una función f es diferenciable en un punto a, o lo que es lo mismo, por el teorema anterior, derivable en el punto a, entonces podemos afirmar que

$$f(a+h) = f(a) + f'(a) \cdot h + e_1(h),$$

donde no sólo $\lim\limits_{h \to 0} e_1(h) = 0$, sino que e_1 se aproxima a cero tan rápido para que también resulta válido el límite

$$\lim_{h \to 0} \frac{e_1(h)}{h} = 0,$$

y la nueva aproximación resulta entonces mejor que la obtenida para funciones continuas.

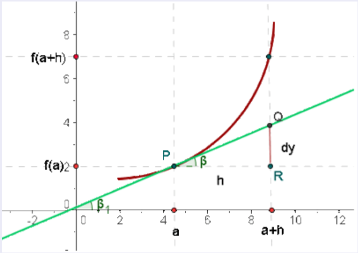
A la aproximación de la función que utiliza el concepto de diferenciabilidad, se la llama aproximación de primer orden, o aproximación por linealización, de la función f en el punto a.

Nota

Observemos que en el caso de continuidad, la aproximación corresponde a aproximar los valores de la curva $y = f(x)$ por los de la recta horizontal $y = f(a)$, mientras que en el caso de la aproximación de primer orden, se aproximan, cerca del punto a, a los valores de f por los de la recta tangente a la gráfica de f en el punto a.

Nota

Observemos que en el caso de continuidad, la aproximación corresponde a aproximar los valores de la curva $y = f(x)$ por los de la recta horizontal $y = f(a)$, mientras que en el caso de la aproximación de primer orden, se aproximan, cerca del punto a, a los valores de f por los de la recta tangente a la gráfica de f en el punto a.



En la figura, indicamos con dy al incremento de la ordenada de la tangente, es decir $\tan\beta = \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{h}$, cuando existe $f'(x)$ será $dy = \tan\beta\, dx = f'(x)dx$.

2. Teoremas de Valor Medio

2.1 Extremos Relativos de una Función. Teorema de Fermat

La derivación se puede utilizar para determinar los *extremos* de una función, es decir los máximos y mínimos.

2. Teoremas de Valor Medio

2.1 Extremos Relativos de una Función. Teorema de Fermat

La derivación se puede utilizar para determinar los *extremos* de una función, es decir los máximos y mínimos.

En la Unidad 3, hemos definido los conceptos de máximos y mínimos de funciones, y demostrado que toda función continua en un intervalo cerrado y acotado admite la existencia de tales valores (Teorema de Weierstrass).

Vimos además que las condiciones de que la función sea continua y el intervalo cerrado y acotado, son imprescindibles.

2. Teoremas de Valor Medio

2.1 Extremos Relativos de una Función. Teorema de Fermat

La derivación se puede utilizar para determinar los *extremos* de una función, es decir los máximos y mínimos.

En la Unidad 3, hemos definido los conceptos de máximos y mínimos de funciones, y demostrado que toda función continua en un intervalo cerrado y acotado admite la existencia de tales valores (Teorema de Weierstrass).

Vimos además que las condiciones de que la función sea continua y el intervalo cerrado y acotado, son imprescindibles.

Definiremos en esta parte los conceptos de máximos y mínimos locales o relativos de funciones. Éstos serán valores que actúen como los máximos y mínimos globales, si se restringe la atención a entornos de puntos en el dominio de la función.

Definición (Extremos Locales o Relativos)

Sean f una función y un número $x_0 \in \mathrm{Dom}(f)$. Diremos que:

1. f alcanza un *máximo relativo* en x_0 (o que $f(x_0)$ es un máximo relativo de f) si existe un entorno $E(x_0, \delta)$, tal que para todo $x \in E(x_0, \delta)$,

$$f(x) \leqq f(x_0).$$

DEFINICIÓN (EXTREMOS LOCALES O RELATIVOS)

Sean f una función y un número $x_0 \in \mathrm{Dom}(f)$. Diremos que:

1. f alcanza un *máximo relativo* en x_0 (o que $f(x_0)$ es un máximo relativo de f) si existe un entorno $E(x_0, \delta)$, tal que para todo $x \in E(x_0, \delta)$,

$$f(x) \leqq f(x_0).$$

2. f alcanza un *mínimo relativo* en x_0 (o que $f(x_0)$ es un mínimo relativo de f) si existe un entorno $E(x_0, \delta)$, tal que para todo $x \in E(x_0, \delta)$,

$$f(x_0) \leqq f(x).$$

Definición (Extremos Locales o Relativos)

Sean f una función y un número $x_0 \in \mathrm{Dom}(f)$. Diremos que:

1. f alcanza un *máximo relativo* en x_0 (o que $f(x_0)$ es un máximo relativo de f) si existe un entorno $E(x_0, \delta)$, tal que para todo $x \in E(x_0, \delta)$,

$$f(x) \leqq f(x_0).$$

2. f alcanza un *mínimo relativo* en x_0 (o que $f(x_0)$ es un mínimo relativo de f) si existe un entorno $E(x_0, \delta)$, tal que para todo $x \in E(x_0, \delta)$,

$$f(x_0) \leqq f(x).$$

3. f tiene un *extremo relativo* en x_0 si tiene un máximo o un mínimo relativo en x_0.

Nota

Un máximo relativo en x_0 es un máximo absoluto en cierto entorno de x_0, si bien no necesariamente es absoluto en todo el dominio de f.

Nota

Un máximo relativo en x_0 es un máximo absoluto en cierto entorno de x_0, si bien no necesariamente es absoluto en todo el dominio de f.

Naturalmente además, todo máximo absoluto es, en particular, máximo relativo.

Nota

Un máximo relativo en x_0 es un máximo absoluto en cierto entorno de x_0, si bien no necesariamente es absoluto en todo el dominio de f.

Naturalmente además, todo máximo absoluto es, en particular, máximo relativo.

Notaremos MA (máximo absoluto), MR (máximo relativo), ma (mínimo absoluto) y mr (mínimo relativo). También se suele usar el término extremo local en lugar de relativo.

Nota

Un máximo relativo en x_0 es un máximo absoluto en cierto entorno de x_0, si bien no necesariamente es absoluto en todo el dominio de f.

Naturalmente además, todo máximo absoluto es, en particular, máximo relativo.

Notaremos MA (máximo absoluto), MR (máximo relativo), ma (mínimo absoluto) y mr (mínimo relativo). También se suele usar el término extremo local en lugar de relativo.

Veremos una condición necesaria de existencia de extremos para funciones derivables.

Nota

Un máximo relativo en x_0 es un máximo absoluto en cierto entorno de x_0, si bien no necesariamente es absoluto en todo el dominio de f.

Naturalmente además, todo máximo absoluto es, en particular, máximo relativo.

Notaremos MA (máximo absoluto), MR (máximo relativo), ma (mínimo absoluto) y mr (mínimo relativo). También se suele usar el término extremo local en lugar de relativo.

Veremos una condición necesaria de existencia de extremos para funciones derivables.

Teorema (Teorema de Fermat)

Sea f definida en un entorno de un punto x_0 y supongamos que f tiene en x_0 un extremo relativo.
Entonces, si f es derivable en x_0, se tiene

$$f'(x_0) = 0.$$

Demostración. Por el absurdo, suponemos que $f'(x_0) \neq 0$ y que $f(x_0)$ es un extremo de f.

Demostración. Por el absurdo, suponemos que $f'(x_0) \neq 0$ y que $f(x_0)$ es un extremo de f. Supongamos que fuese $f'(x_0) > 0$
Entonces,

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} > 0$$

Demostración. Por el absurdo, suponemos que $f'(x_0) \neq 0$ y que $f(x_0)$ es un extremo de f. Supongamos que fuese $f'(x_0) > 0$
Entonces,

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} > 0$$

Por el Teorema de Conservación del Signo, existirá un entorno $E(x_0, \delta)$, donde

$$\text{si } x \text{ es tal que } 0 < |x - x_0| < \delta \ \Rightarrow \ \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} > 0 \ .$$

Demostración. Por el absurdo, suponemos que $f'(x_0) \neq 0$ y que $f(x_0)$ es un extremo de f. Supongamos que fuese $f'(x_0) > 0$
Entonces,

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} > 0$$

Por el Teorema de Conservación del Signo, existirá un entorno $E(x_0, \delta)$, donde

$$\text{si } x \text{ es tal que } 0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} > 0\ .$$

Analizando las posiciones relativas de los valores x y x_0, tenemos:

Si x es tal que

$$x_0 - \delta < x < x_0 \quad \text{y} \quad \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} > 0 \quad \Rightarrow \quad x - x_0 < 0 \quad \text{y} \quad \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} > 0 \quad \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \quad f(x) - f(x_0) < 0 \quad \Rightarrow \quad f(x) < f(x_0).$$

Demostración. Por el absurdo, suponemos que $f'(x_0) \neq 0$ y que $f(x_0)$ es un extremo de f. Supongamos que fuese $f'(x_0) > 0$
Entonces,

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} > 0$$

Por el Teorema de Conservación del Signo, existirá un entorno $E(x_0, \delta)$, donde

$$\text{si } x \text{ es tal que } 0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} > 0 \, .$$

Analizando las posiciones relativas de los valores x y x_0, tenemos:
Si x es tal que

$$x_0 - \delta < x < x_0 \quad \text{y} \quad \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} > 0 \quad \Rightarrow \quad x - x_0 < 0 \quad \text{y} \quad \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} > 0 \quad \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \quad f(x) - f(x_0) < 0 \quad \Rightarrow \quad f(x) < f(x_0).$$

Si x es tal que

$$x_0 < x < x_0 + \delta \quad \text{y} \quad \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} > 0 \quad \Rightarrow \quad x - x_0 > 0 \quad \text{y} \quad \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} > 0 \quad \Rightarrow$$
$$\Rightarrow f(x) - f(x_0) > 0 \quad \Rightarrow \quad f(x) > f(x_0).$$

Demostración. Por el absurdo, suponemos que $f'(x_0) \neq 0$ y que $f(x_0)$ es un extremo de f. Supongamos que fuese $f'(x_0) > 0$
Entonces,

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} > 0$$

Por el Teorema de Conservación del Signo, existirá un entorno $E(x_0, \delta)$, donde

$$\text{si } x \text{ es tal que } 0 < |x - x_0| < \delta \ \Rightarrow \ \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} > 0 \ .$$

Analizando las posiciones relativas de los valores x y x_0, tenemos:

Si x es tal que

$$x_0 - \delta < x < x_0 \quad \text{y} \quad \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} > 0 \quad \Rightarrow \quad x - x_0 < 0 \quad \text{y} \quad \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} > 0 \quad \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \quad f(x) - f(x_0) < 0 \quad \Rightarrow \quad f(x) < f(x_0).$$

Si x es tal que

$$x_0 < x < x_0 + \delta \quad \text{y} \quad \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} > 0 \quad \Rightarrow \quad x - x_0 > 0 \quad \text{y} \quad \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} > 0 \quad \Rightarrow$$
$$\Rightarrow f(x) - f(x_0) > 0 \quad \Rightarrow \quad f(x) > f(x_0).$$

De lo anterior se concluye que f no podría tener un extremo relativo en x_0, lo cual contradice la hipótesis del teorema, y por lo tanto no puede ser $f'(x_0) > 0$.

Demostración. Por el absurdo, suponemos que $f'(x_0) \neq 0$ y que $f(x_0)$ es un extremo de f. Supongamos que fuese $f'(x_0) > 0$
Entonces,

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} > 0$$

Por el Teorema de Conservación del Signo, existirá un entorno $E(x_0, \delta)$, donde

$$\text{si } x \text{ es tal que } 0 < |x - x_0| < \delta \ \Rightarrow \ \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} > 0 \ .$$

Analizando las posiciones relativas de los valores x y x_0, tenemos:

Si x es tal que

$$x_0 - \delta < x < x_0 \quad \text{y} \quad \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} > 0 \quad \Rightarrow \quad x - x_0 < 0 \quad \text{y} \quad \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} > 0 \quad \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \quad f(x) - f(x_0) < 0 \quad \Rightarrow \quad f(x) < f(x_0).$$

Si x es tal que

$$x_0 < x < x_0 + \delta \quad \text{y} \quad \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} > 0 \quad \Rightarrow \quad x - x_0 > 0 \quad \text{y} \quad \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} > 0 \quad \Rightarrow$$
$$\Rightarrow f(x) - f(x_0) > 0 \quad \Rightarrow \quad f(x) > f(x_0).$$

De lo anterior se concluye que f no podría tener un extremo relativo en x_0, lo cual contradice la hipótesis del teorema, y por lo tanto no puede ser $f'(x_0) > 0$.

Por un razonamiento similar, que se deja como ejercicio, se llega a concluir que no podrá ser $f'(x_0) < 0$. Luego, $f'(x_0) = 0$. *Q.E.D.*

NOTA

1. El teorema anterior nos dice que si f es derivable en x_0, esto es, existe $f'(x_0)$ y f tiene un extremo relativo en x_0, entonces $f'(x_0) = 0$.

Nota

1. El teorema anterior nos dice que si f es derivable en x_0, esto es, existe $f'(x_0)$ y f tiene un extremo relativo en x_0, entonces $f'(x_0) = 0$.

   La proposición recíproca no es siempre cierta. Si f es derivable en x_0 y $f'(x_0) = 0$, no necesariamente en x_0 se encuentra un extremo relativo de f.

Nota

1. El teorema anterior nos dice que si f es derivable en x_0, esto es, existe $f'(x_0)$ y f tiene un extremo relativo en x_0, entonces $f'(x_0) = 0$.

   La proposición recíproca no es siempre cierta. Si f es derivable en x_0 y $f'(x_0) = 0$, no necesariamente en x_0 se encuentra un extremo relativo de f.

   Por ejemplo, la función $f(x) = x^3$, es derivable en $x_0 = 0$, con $f'(0) = 0$ y f no tiene extremo relativo en 0.

Nota

1. El teorema anterior nos dice que si f es derivable en x_0, esto es, existe $f'(x_0)$ y f tiene un extremo relativo en x_0, entonces $f'(x_0) = 0$.

   La proposición recíproca no es siempre cierta. Si f es derivable en x_0 y $f'(x_0) = 0$, no necesariamente en x_0 se encuentra un extremo relativo de f.

   Por ejemplo, la función $f(x) = x^3$, es derivable en $x_0 = 0$, con $f'(0) = 0$ y f no tiene extremo relativo en 0.

2. Por otro lado, se afirma que si f tiene un extremo relativo en x_0, o bien $f'(x_0) = 0$ o bien f no es derivable en x_0.

Nota

1. El teorema anterior nos dice que si f es derivable en x_0, esto es, existe $f'(x_0)$ y f tiene un extremo relativo en x_0, entonces $f'(x_0) = 0$.

   La proposición recíproca no es siempre cierta. Si f es derivable en x_0 y $f'(x_0) = 0$, no necesariamente en x_0 se encuentra un extremo relativo de f.

   Por ejemplo, la función $f(x) = x^3$, es derivable en $x_0 = 0$, con $f'(0) = 0$ y f no tiene extremo relativo en 0.

2. Por otro lado, se afirma que si f tiene un extremo relativo en x_0, o bien $f'(x_0) = 0$ o bien f no es derivable en x_0.

   Por ejemplo, la función $f(x) = |x|$ tiene un mínimo absoluto (por lo tanto relativo) en 0, donde no es derivable.

DEFINICIÓN (PUNTO CRÍTICO)

Decimos que $x_0 \in \mathrm{Dom}(f)$ es un *punto crítico* de f si $f'(x_0) = 0$ o si f no es derivable en x_0.

Definición (Punto Crítico)

Decimos que $x_0 \in \mathrm{Dom}(f)$ es un *punto crítico* de f si $f'(x_0) = 0$ o si f no es derivable en x_0.

Nota

1. El Teorema de Fermat nos dice que si f tiene un extremo relativo en x_0, entonces x_0 es un punto crítico de f.

Definición (Punto Crítico)

Decimos que $x_0 \in \text{Dom}(f)$ es un *punto crítico* de f si $f'(x_0) = 0$ o si f no es derivable en x_0.

Nota

1. El Teorema de Fermat nos dice que si f tiene un extremo relativo en x_0, entonces x_0 es un punto crítico de f.

   Por lo tanto, para hallar extremos relativos de una función, luego de localizar sus puntos críticos, necesitamos establecer un criterio para analizar si en ellos hay o no extremos y de qué tipo.

Definición (Punto Crítico)

Decimos que $x_0 \in \mathrm{Dom}(f)$ es un *punto crítico* de f si $f'(x_0) = 0$ o si f no es derivable en x_0.

Nota

1. El Teorema de Fermat nos dice que si f tiene un extremo relativo en x_0, entonces x_0 es un punto crítico de f.

   Por lo tanto, para hallar extremos relativos de una función, luego de localizar sus puntos críticos, necesitamos establecer un criterio para analizar si en ellos hay o no extremos y de qué tipo.

2. El teorema de Weierstrass nos asegura la existencia de máximo y mínimo absolutos para una función continua en $[a,b]$.

Definición (Punto Crítico)

Decimos que $x_0 \in \mathrm{Dom}(f)$ es un *punto crítico* de f si $f'(x_0) = 0$ o si f no es derivable en x_0.

Nota

1. El Teorema de Fermat nos dice que si f tiene un extremo relativo en x_0, entonces x_0 es un punto crítico de f.

   Por lo tanto, para hallar extremos relativos de una función, luego de localizar sus puntos críticos, necesitamos establecer un criterio para analizar si en ellos hay o no extremos y de qué tipo.

2. El teorema de Weierstrass nos asegura la existencia de máximo y mínimo absolutos para una función continua en $[a,b]$.

   Éstos pueden alcanzarse en a, en b o en puntos interiores del intervalo.

Definición (Punto Crítico)

Decimos que $x_0 \in \mathrm{Dom}(f)$ es un *punto crítico* de f si $f'(x_0) = 0$ o si f no es derivable en x_0.

Nota

1. El Teorema de Fermat nos dice que si f tiene un extremo relativo en x_0, entonces x_0 es un punto crítico de f.

   Por lo tanto, para hallar extremos relativos de una función, luego de localizar sus puntos críticos, necesitamos establecer un criterio para analizar si en ellos hay o no extremos y de qué tipo.

2. El teorema de Weierstrass nos asegura la existencia de máximo y mínimo absolutos para una función continua en $[a,b]$.

   Éstos pueden alcanzarse en a, en b o en puntos interiores del intervalo.

   Así, para hallar los extremos absolutos, deberemos localizar los puntos críticos de f en (a,b) y comparar el valor de f en ellos con $f(a)$ y $f(b)$.

Definición (Punto Crítico)

Decimos que $x_0 \in \mathrm{Dom}(f)$ es un *punto crítico* de f si $f'(x_0) = 0$ o si f no es derivable en x_0.

Nota

1. El Teorema de Fermat nos dice que si f tiene un extremo relativo en x_0, entonces x_0 es un punto crítico de f.

   Por lo tanto, para hallar extremos relativos de una función, luego de localizar sus puntos críticos, necesitamos establecer un criterio para analizar si en ellos hay o no extremos y de qué tipo.

2. El teorema de Weierstrass nos asegura la existencia de máximo y mínimo absolutos para una función continua en $[a,b]$.

   Éstos pueden alcanzarse en a, en b o en puntos interiores del intervalo.

   Así, para hallar los extremos absolutos, deberemos localizar los puntos críticos de f en (a,b) y comparar el valor de f en ellos con $f(a)$ y $f(b)$.

   El mayor de todos será el máximo absoluto (MA) y el menor de todos, el mínimo absoluto (ma).

EJEMPLO

Hallar los extremos de $f(x) = x^3 - 3x^2 + 1$ en el intervalo $[-\frac{1}{2}, 4]$.

EJEMPLO

Hallar los extremos de $f(x) = x^3 - 3x^2 + 1$ en el intervalo $[-\frac{1}{2}, 4]$.

- f es continua en $[-\frac{1}{2}, 4]$ luego por teorema de Weierstrass tiene extremos absolutos.

Ejemplo

Hallar los extremos de $f(x) = x^3 - 3x^2 + 1$ en el intervalo $[-\frac{1}{2}, 4]$.

• f es continua en $[-\frac{1}{2}, 4]$ luego por teorema de Weierstrass tiene extremos absolutos.

• Puntos críticos: como f es derivable en $(-\frac{1}{2}, 4)$, no hay puntos críticos donde la derivada no existe, entonces busquemos en los x tales $f'(x) = 0$, es decir, donde $f'(x) = 3x^2 - 6x = 0$. Esto nos da, $x = 0$ o $x = 2$, ambos valores están en $(-\frac{1}{2}, 4)$.

Ejemplo

Hallar los extremos de $f(x) = x^3 - 3x^2 + 1$ en el intervalo $[-\frac{1}{2}, 4]$.

• f es continua en $[-\frac{1}{2}, 4]$ luego por teorema de Weierstrass tiene extremos absolutos.

• Puntos críticos: como f es derivable en $(-\frac{1}{2}, 4)$, no hay puntos críticos donde la derivada no existe, entonces busquemos en los x tales $f'(x) = 0$, es decir, donde $f'(x) = 3x^2 - 6x = 0$. Esto nos da, $x = 0$ o $x = 2$, ambos valores están en $(-\frac{1}{2}, 4)$.

• Calculamos f en los extremos del intervalo,

$$f\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{8} \quad \text{y} \quad f(4) = 17,$$

y en los puntos críticos

$$f(0) = 1 \quad \text{y} \quad f(2) = -3,$$

y comparamos todos los valores.

Ejemplo

Concluyendo que

$$f(2) = -3 \text{ es el mínimo absoluto (ma)}$$

y

$$f(4) = 17 \text{ es el máximo absoluto (MA)}$$

de f en el intervalo $[-\frac{1}{2}, 4]$.

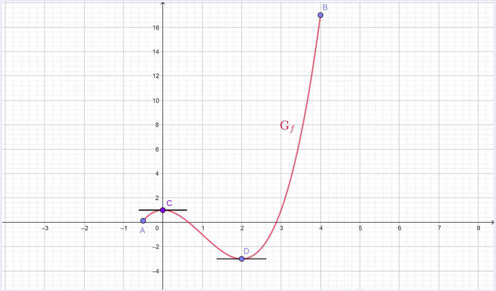


Figura: Teorema de Fermat

Ejemplo

Hallar los extremos de

$$g(x) = \begin{cases} |x-1| & \text{si } 0 \leq x < 2 \\ -(x-3)^2+2 & \text{si } 2 \leq x \leq 4 \end{cases}$$

en el intervalo $[0,4]$.

Ejemplo

Hallar los extremos de

$$g(x) = \begin{cases} |x-1| & \text{si } 0 \leq x < 2 \\ -(x-3)^2 + 2 & \text{si } 2 \leq x \leq 4 \end{cases}$$

en el intervalo $[0,4]$.

• g es continua en $[0,4]$ (verificarlo!), luego por teorema de Weierstrass tiene extremos absolutos.

Ejemplo

Hallar los extremos de

$$g(x) = \begin{cases} |x-1| & \text{si } 0 \leq x < 2 \\ -(x-3)^2 + 2 & \text{si } 2 \leq x \leq 4 \end{cases}$$

en el intervalo $[0,4]$.

• g es continua en $[0,4]$ (verificarlo!), luego por teorema de Weierstrass tiene extremos absolutos.

• g es derivable en $(0,1)$, en $(1,2)$ y en $(2,4)$ (justificarlo!). Sabemos que no es derivable en $x=1$, veamos qué sucede en $x=2$. Calculemos los límites laterales del cociente incremental

Ejemplo

Hallar los extremos de

$$g(x)=\begin{cases} |x-1| & \text{si } 0\leq x<2 \\ -(x-3)^2+2 & \text{si } 2\leq x\leq 4 \end{cases}$$

en el intervalo $[0,4]$.

• g es continua en $[0,4]$ (verificarlo!), luego por teorema de Weierstrass tiene extremos absolutos.

• g es derivable en $(0,1)$, en $(1,2)$ y en $(2,4)$ (justificarlo!). Sabemos que no es derivable en $x=1$, veamos qué sucede en $x=2$. Calculemos los límites laterales del cociente incremental

$$\lim_{x\to 2^-}\frac{g(x)-g(2)}{x-2}=\lim_{x\to 2^-}\frac{|x-1|-g(2)}{x-2}=\lim_{x\to 2^-}\frac{x-1-1}{x-2}\underbrace{=}_{CLL}1$$

y

$$\lim_{x\to 2^+}\frac{g(x)-g(2)}{x-2}=\lim_{x\to 2^+}\frac{-(x-2)(x-4)}{x-2}\underbrace{=}_{CLL}2$$

Como estos límites son distintos, g no es derivable en $x=2$.

Ejemplo

• Los puntos críticos serán donde g no sea derivable, en $x = 1$ y en $x = 2$, y en los $x \in (0,1) \cup (1,2) \cup (2,4)$ donde $g'(x) = 0$.

Ejemplo

• Los puntos críticos serán donde g no sea derivable, en $x=1$ y en $x=2$, y en los $x \in (0,1) \cup (1,2) \cup (2,4)$ donde $g'(x)=0$.

Siendo la función derivada (verificarlo!)

$$g'(x) = \begin{cases} -1 & \text{si } 0 \leq x < 1 \\ 1 & \text{si } 1 < x < 2 \\ -2(x-3) & \text{si } 2 < x \leq 4 \end{cases}$$

Buscamos los x tales $g'(x)=0$; como $g'(x)$ no se anula en $(0,1)$ ni en $(1,2)$, sólo queda buscar los ceros de la derivada en $(2,4)$, es decir, cuando $g'(x) = -2(x-3) = 0$, esto nos da, $x = 3 \in (2,4)$.

Ejemplo

• Calculamos g en los extremos del intervalo $\boxed{g(0)=1 \quad \text{y} \quad g(4)=1,}$ y en los puntos críticos $\boxed{g(1)=0\,, \quad g(2)=1 \quad \text{y} \quad g(3)=2,}$ y comparamos todos los valores.

EJEMPLO

- Calculamos g en los extremos del intervalo $\boxed{g(0)=1 \quad \text{y} \quad g(4)=1,}$ y en los puntos críticos $\boxed{g(1)=0\,, \quad g(2)=1 \quad \text{y} \quad g(3)=2,}$ y comparamos todos los valores.

Concluyendo que

$$g(1)=0 \text{ es el mínimo absoluto (ma)}$$

y

$$g(3)=2 \text{ es el máximo absoluto (MA)}$$

de g en el intervalo $[0,4]$.