Unidad 3: Límite y Continuidad
Analisis Matemático I (R-112)
Licenciatura en Ciencias de la Computación

Iker M. Canut

2020

1 Distancia de Puntos y Entornos

Para $x, y \in \mathbb{R}$, la **distancia** entre x e y es $d(x,y) = |x - y|$

Llamamos **entorno** de un real a, de radio δ al intervalo abierto $(a - \delta, a + \delta)$ y lo notamos $E(a, \delta) = \{x \in \mathbb{R} : a - \delta < x < a + \delta\} = \{x \in \mathbb{R} : -\delta < x - a < \delta\} = \{x \in \mathbb{R} : |x - a| < \delta\}$

Llamamos **entorno reducido** de un real a, de radio δ al conjunto $E(a, \delta) - \{a\}$ y lo notamos $E'(a, \delta) = \{x \in \mathbb{R} : |x - a < \delta \wedge x \neq a|\} = \{x \in \mathbb{R} : 0 < |x - a| < \delta\}$

Sea a un real, δ_1, δ_2 dos reales positivos, y $\delta \leq min\{\delta_1, \delta_2\}$, se tiene que:

$$\begin{array}{ccc} E(a,\delta) \subseteq E(a,\delta_1) \cap E(a,\delta_2) & & E'(a,\delta) \subseteq E'(a,\delta_1) \cap E'(a,\delta_2) \\ |x-a| < \delta \Rightarrow |x-a| < \delta_1 \wedge |x-a| < \delta_2 & \text{y} & 0 < |x-a| < \delta \Rightarrow 0 < |x-a| < \delta_1 \wedge 0 < |x-a| < \delta_2 \end{array}$$

2 Límite Finito en un Punto

Dada una función real f y un real a, tal que f está definida en un entorno reducido del punto a, decimos que l es el límite de la función f, cuando la variable independiente tiende al valor a y notamos

$$\lim_{x \to a} f(x) = l$$

si para cualquier valor $\epsilon > 0$, prefijado, existe un número positivo δ tal que:

$$0 < |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - l| < \epsilon$$

$$x \in E'(a, \delta) \Rightarrow f(x) \in E(l, \epsilon)$$

$$\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0 / \ \forall x : (0 < |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - l| < \epsilon)$$

No se exige que a esté en el dominio de f, pero si que f este definida en un entorno reducido de a. La siguiente simbología es equivalente:

$$\lim_{x \to a} f(x) = l \qquad \lim_{x \to 0} f(x + a) = l \qquad \lim_{x \to a} f(x) - l = 0$$

Por último, observamos que el número δ depende tanto del valor de ϵ como del punto a. Además, si en un punto a, para un ϵ, un número δ satisface la definición de límite, entonces cualquier $\delta' < \delta$ tambien es válido. Por otro lado, si un δ es útil para un ϵ, también es útil para un $\epsilon' > \epsilon$.

$$0 < |x - a| < \delta' \Rightarrow 0 < |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - l| < \epsilon < \epsilon'$$

3 Límites Finitos

3.1 Función Constante

$f(x) = c \in \mathbb{R}$, $\lim_{x \to a} c = c$, pues cualquier $\epsilon > 0$ y $\delta > 0$, se verifica que

$$0 < |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - c| = |c - c| = 0 < \epsilon$$

3.2 Función Lineal

$f(x) = mx + h, m \neq 0$, $\lim_{x \to a} mx + h = ma + h$

$$\forall \epsilon > 0, \ \exists \delta > 0 : \ \forall x : (0 < |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - l| < \epsilon)$$

$$|(mx + h) - (ma + h)| = |m| \cdot |x - a| < \epsilon \Rightarrow |x - a| < \delta < \frac{\epsilon}{|m|}$$

Y considerando $\delta < \frac{\epsilon}{|m|}$ tenemos que $0 < |x - a| < \delta < \frac{\epsilon}{|m|} \Rightarrow |(mx + h) - (ma + h)| = |m| \cdot |x - a| < \epsilon$

3.3 Función Cuadratica

$f(x) = x^2$, $\lim_{x\to a} x^2 = a^2$ hay que demostrar $\forall\epsilon > 0,\ \exists\delta > 0 :\ \forall x : (0 < |x-a| < \delta \Rightarrow |x^2 - a^2| < \epsilon)$ Se ve que $|x^2 - a^2| = |x-a| \cdot |x+a|$

- Caso $a = 0$: $\forall\epsilon > 0,\ \exists\delta > 0 :\ \forall x : (0 < |x| < \delta \Rightarrow |x^2| < \epsilon)$
  Luego $|x^2| < \epsilon \iff |x|^2 < \epsilon \iff |x| < \sqrt{\epsilon}$ y tenemos que:

$$0 < |x| < \delta = \sqrt{\epsilon} \Rightarrow |x|^2 < \epsilon \Rightarrow |x^2| < \epsilon$$

- Caso $a \neq 0$: $\forall\epsilon > 0,\ \exists\delta > 0 :\ \forall x : (0 < |x-a| < \delta \Rightarrow |x-a| \cdot |x+a| < \epsilon)$ **(1)**
  Hay que acotar $|x+a|$. Sea $0 < \delta < |a|$, **(2)**

$$\begin{aligned}|x-a| < \delta &\Rightarrow -|a| < -\delta < x-a < \delta < |a| \Rightarrow -|a| + 2a < -\delta + 2a < x+a < \delta + 2a < |a| + 2a\\ &\Rightarrow -|a| - 2|a| < x+a < |a| + 2|a| \Rightarrow |x+a| < 3|a|\end{aligned}$$

  Y tenemos que $|x-a| < \delta \Rightarrow |x+a| < 3|a|$. **(3)**
  De **(2)** para que se verifique **(3)** y de **(1)** tenemos que $\delta \leq min\left\{|a|, \dfrac{\epsilon}{3|a|}\right\}$
  Luego, $|x-a| < \dfrac{\epsilon}{3|a|} \wedge |x+a| < 3|a|$. Y tenemos que

$$0 < |x-a| < \delta \Rightarrow |x^2 - a^2| = |x-a| \cdot |x+a| < \frac{\epsilon}{3|a|} \cdot 3|a| = \epsilon$$

3.4 Función Reciproca

$f(x) = \dfrac{1}{x}$, $\lim_{x\to a} \dfrac{1}{x} = \dfrac{1}{a}$ hay que demostrar $\forall\epsilon > 0,\ \exists\delta > 0 :\ \forall x : (0 < |x-a| < \delta \Rightarrow |\dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{a}| < \epsilon)$

Se demuestra fijando un ϵ a cualquier número. Después se calcula la otra parte del mínimo.

4 Unicidad del Límite

Teorema 1: **Unicidad del Límite**. Sea f una función real definida en un entorno reducido del punto a y sean l_1 y l_2 dos números reales tales que: $\lim_{x\to a} f(x) = l_1 \ \wedge\ \lim_{x\to a} f(x) = l_2 \quad \Rightarrow \quad l_1 = l_2$
Demostración: Dado $\epsilon > 0$, tenemos δ_1 y δ_2 tales que:

$$0 < |x-a| < \delta_1 \Rightarrow |f(x) - l_1| < \frac{\epsilon}{2} \quad \wedge \quad 0 < |x-a| < \delta_2 \Rightarrow |f(x) - l_2| < \frac{\epsilon}{2}$$

Considerando $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$, considerando cualquier $E'(a, \delta)$, tenemos que:

$$|l_1 - l_2| = |l_1 - f(x) + f(x) - l_2| \leq |l_1 - f(x)| + |l_2 - f(x)| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon$$

Y como tenemos $0 \leq |l_1 - l_2| < \epsilon$, podemos asegurar que $|l_1 - l_2| = 0 \Rightarrow l_1 = l_2$ ■

5 No Existencia de Límite

Negando la forma proposicional de la definición de límite, llegamos a que no existe el límite si:

$$\exists\epsilon > 0/\ \forall\delta > 0, \exists x : (0 < |x-a| < \delta \wedge |f(x) - l| \geq \epsilon)$$

Generalmente se demuestra que un $l = b$ no es límite (fijo), y que $l \neq b$ tampoco lo es (relación a l).

6 Límites Laterales

$$\lim_{x\to a^+} f(x) = l, \text{ si } \forall\epsilon > 0,\ \exists\delta > 0 : a < x < a+\delta \Rightarrow |f(x) - l| = \epsilon$$
$$\lim_{x\to a^-} f(x) = l, \text{ si } \forall\epsilon > 0,\ \exists\delta > 0 : a-\delta < x < a \Rightarrow |f(x) - l| = \epsilon$$

Proposición 1: $\lim_{x\to a} f(x) = l \iff \lim_{x\to a^-} f(x) = l \wedge \lim_{x\to a^+} f(x) = l$
Demostración:
$\Rightarrow$) Si $\forall\epsilon > 0,\ \exists\delta > 0 :\ \forall x : (0 < |x-a| < \delta \Rightarrow |f(x) - l| < \epsilon$
Para ese δ se verifica $a-\delta < x < a \Rightarrow 0 < |x-a| < \delta \Rightarrow |f(x) = l| \therefore$ Existe el límite por izquierda.
$a < x < a+\delta \Rightarrow 0 < |x-a| < \delta \Rightarrow |f(x) = l| \therefore$ Existe el límite por derecha.

□

$\Leftarrow$) Si $\forall\epsilon > 0, \exists\delta_1, \delta_2$ tales que: $a-\delta_1 < x < a \Rightarrow |f(x)-l| < \epsilon \quad \wedge \quad a < x < a+\delta \Rightarrow |f(x)-l| < \epsilon$
Sea $\delta = \min \delta_1, \delta_2$:
$a-\delta < x < a \Rightarrow a-\delta_1 < x < a \Rightarrow |f(x)-l| < \epsilon \ \wedge \ a < x < a+\delta \Rightarrow a < x < a+\delta_2 \Rightarrow |f(x)-l| < \epsilon$
$\Rightarrow 0 < |x-a| < \delta \Rightarrow |f(x) - l| < \epsilon \therefore \lim_{x\to a} f(x) = l$

■

Nota: Como la existencia e igualdad de límites laterales en un punto es condición necesaria y suficiente para garantizar la existencia de límites allí, la no existencia de alguno de los límites laterales, o la diferencia entre ambos, implica la no existencia de límites finito de la función en el punto.

Proposición 2: Sea f una función y a un numero tal que existe $\lim_{x\to a} f(x) = l \Rightarrow \lim_{x\to a} |f(x)| = |l|$
Demostración: Dado $\epsilon > 0,\ \exists\delta > 0 : (0 < |x-a| < \delta \Rightarrow |f(x) - l) < \epsilon)$
Y como $||f(x)| - |l|| < |f(x) - l|$, para el mismo δ: $(0 < |x-a| < \delta \Rightarrow ||f(x)| - |l|| < |f(x) - l) < \epsilon)$

■

Teorema 2: **Caracter Local del Límite**: Sean a un real, y dos funciones f y g para las cuales:

$$\lim_{x\to a} f(x) = l \quad \wedge \quad f(x) = g(x) \text{ en algún } E'(a,\rho) \quad \Rightarrow \quad \lim_{x\to a} g(x) = l$$

Demostración: Dado $\epsilon > 0, \exists\delta' > 0 : (0 < |x-a| < \delta' \Rightarrow |f(x) - l| < \epsilon)$
Por Hipotesis, existe $\rho > 0$ tal que $0 < |x-a| < \rho \Rightarrow f(x) = g(x)$, y eligiendo $\delta = \min\{\delta', \rho\}$, vale:

$0 < |x-a| < \delta \Rightarrow |f(x)-l| < \epsilon \ \wedge \ f(x) = g(x) \Rightarrow |g(x)-l| < \epsilon \ \therefore \ 0 < |x-a| < \delta \Rightarrow |g(x)-l| < \epsilon$

■

....

Sea A un subconjunto no vacio de $\mathbb{R}$ y f una función definida en A, diremos que la función F está **acotada** en el conjunto A si existe un número real $M > 0$ tal que $\forall x \in A$: $|f(x)| \leq M$.
De manera alternativa, f está acotada en A si $\{f(x) : x \in A\}$ es un subconjunto acotado de $\mathbb{R}$.

Teorema 3: Si tenemos que $\lim_{x\to a} f(x) = l$, entonces existe $E'(a,\delta)$ en el cual la función está acotada.
Demostración: Dado, por ejemplo, $\epsilon = 1$, existe $\delta > 0 : x \in E'(a,\delta) \Rightarrow |f(x) - l| < 1$. Luego,

$$\begin{aligned}|f(x) - l| < 1 &\Rightarrow -1 < f(x) - l < 1 \Rightarrow l - 1 < f(x) < l + 1 \\ &\Rightarrow -|l| - 1 \leq l - 1 < f(x) < l + 1 \leq |l| + 1 \\ &\Rightarrow -(|l| + 1) < f(x) < (|l| + 1) \Rightarrow |f(x)| < |l| + 1\end{aligned}$$

■

La recíproca no necesariamente es cierta, hay funciones acotadas en todo entorno reducido de a que no tienen límite en a (e.g signo en $a = 0$).

Teorema 4: Si tenemos que $\lim_{x\to a} f(x) = l$ y dos números k y h, tales que $h < l < k$, entonces existe un entorno reducido $E'(a, \delta)$ donde, $\forall x \in E'(a, \delta)$, se verifica $h < f(x) < k$.
Demostración:
Siendo $l < k$, eligiendo $\epsilon = k - l > 0$, sabemos que existe $\delta_1 > 0$ tal que
si $x \in E'(a, \delta_1) \Rightarrow |f(x) - l| < k - l$. Y en ese entorno, $f(x) - l \leq |f(x) - l| < k - l \therefore f(x) < k$ **(1)**
Siendo $h < l$, eligiendo $\epsilon = l - h > 0$, sabemos que existe $]dekta_2 > 0$ tal que
si $x \in E'(a, \delta_2) \Rightarrow |f(x) - l| < l - h$. Y en ese entorno, $h - l < f(x) - l < l - h \therefore h < f(x)$ **(2)**
Considerando $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$, vale de **(1)** y **(2)** que $x \in E'(a, \delta) \Rightarrow h < f(x) < k$

■

Corolario 1: **Teorema de Conservación del Signo**. Si tenemos que $\lim_{x\to a} f(x) = l \neq 0$, entonces existe un entorno reducido $E'(a, \delta)$ donde $f(x) \neq 0$. Y vale, por ejemplo, $|f(x)| > \frac{|l|}{2}$
Demostración: Teorema anterior. Si $l < 0, h = \dfrac{l}{2} < l$. Si $l > 0, k = \dfrac{l}{2} > l$. Por la proposición 2, vale $\lim_{x\to a} |f(x)| = |l| \neq 0$

■

7 Álgebra de Límites

Teorema 5: Sea a un real, f y g dos funciones tales que $\lim_{x\to a} f(x) = l_1$ y $\lim_{x\to a} g(x) = l_2$, entonces:

- $\lim_{x\to a} (f + g)(x) = l_1 + l_2$
  Dem: $0 < |x - a| < \delta_1 \Rightarrow |f(x) - l_1| < \dfrac{\epsilon}{2}$ y $0 < |x - a| < \delta_2 \Rightarrow |g(x) - l_2| < \dfrac{\epsilon}{2}$
  Sea $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$, y x tal que $0 < |x - a| < \delta$,
  $|(f + g)(x) - (l_1 + l_2)| = |(f(x) - l_1) + (f(x) - l_2)| \leq |f(x) - l_1| + |f(x) - l_2| < \dfrac{\epsilon}{2} + \dfrac{\epsilon}{2} = \epsilon$

  ■

- Sea $c \in \mathbb{R}$, $\lim_{x\to a} (c \cdot f)(x) = c \cdot l_1$
  Dem: Si $c = 0$ es trivial. Sea $c \neq 0$, dado $\epsilon > 0$, sea $\delta > 0 : 0 < |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - l_1| < \dfrac{\epsilon}{|c|}$.
  Entonces para los $x : 0 < |x - a| < \delta$, $|(c \cdot f)(x) - (c \cdot l_1)| = |c \cdot (f(x) - l_1)| = |c| \cdot |f(x) - l_1| < |c| \cdot \dfrac{\epsilon}{|c|} = \epsilon$

  ■

- $\lim_{x\to a} (f - g)(x) = l_1 - l_2$
  Dem: $\lim_{x\to a} (f - g)(x) = \lim_{x\to a} (f + (-1)g)(x) = \lim_{x\to a} f(x) + (-1) \lim_{x\to a} g(x) = l_1 - l_2$

  ■

....

Teorema 6: Si $\lim_{x\to a} f(x) = 0$ y g está acotada en un entorno reducido $E'(a, \rho)$, entonces $\lim_{x\to a} (fg)(x) = 0$
Demostración: Tenemos que $0 < |x - a| < \delta' \Rightarrow |f(x)| < \dfrac{\epsilon}{M}$ y $0 < |x - a| < \rho \Rightarrow |g(x)| \leq M$.
Luego, considerando $\delta = \min\{\delta', \rho\}$, y x tal que $0 < |x - a| < \delta$,

$$|(f \cdot g)(x) - 0| = |f(x) \cdot g(x)| = |f(x)| \cdot |g(x)| < \frac{\epsilon}{M} \cdot M = \epsilon$$

■

....

Teorema 7: Si $\lim_{x \to a} f(x) = l_1$ y $\lim_{x \to a} g(x) = l_2$

- Existe el limite de la función fg en a y vale $\lim_{x \to a}(f \cdot g)(x) = l_1 \cdot l_2$
  Dem: Sabemos que f está acotada en $E'(a, \rho)$ por M, es decir, $0 < |x-a| < \rho \Rightarrow |f(x)| \leq M$, que $0 < |x-a| < \delta_1 \Rightarrow |f(x) - l_1| < \epsilon'$ y que $0 < |x-a| < \delta_2 \Rightarrow |g(x) - l_2| < \epsilon''$.
  Luego, para $\delta = \min\{\rho, \delta_1, \delta_2\}$, para x tal que :

$$\begin{aligned} 0 < |x-a| < \delta \Rightarrow & |f(x) \cdot g(x) - l_1 \cdot l_2| \\ & = |f(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot l_2 + f(x) \cdot l_2 - l_1 \cdot l_2| \\ & \leq |f(x) \cdot (g(x) - l_2)| + |l_2 \cdot (f(x) - l_1)| \\ & = |f(x)| \cdot |g(x) - l_2| + |l_2| \cdot |f(x) - l_1| \\ & < M \cdot \epsilon'' + |l_2| \cdot \epsilon' = \epsilon \end{aligned}$$

  Luego, $\epsilon' = \dfrac{\epsilon}{2 \cdot |l_2|}$ y $\epsilon'' = \dfrac{\epsilon}{2 \cdot M}$ ∎

- Si además $l_2 \neq 0$, $\lim_{x \to a} \left(\dfrac{f}{g}\right)(x) = \dfrac{l_1}{l_2}$
  Dem: Como $l_2 \neq 0$, $\exists E'(a, \rho)$ dentro del cual $|g(x)| > m$, para algún $m > 0$ (Corolario 1).
  Por otro lado, $\forall \epsilon > 0$, $\exists \delta > 0 : \forall x(0 < |x-a| < \delta' \Rightarrow |g(x) - l_2| < \epsilon')$.
  Para $\delta \leq \min\{\delta', \rho\}$ y x tal que $0 < |x-a| < \delta$
  $\left|\dfrac{1}{g(x)} - \dfrac{1}{l_2}\right| = \left|\dfrac{l_2 - g(x)}{l_2 \cdot g(x)}\right| = |l_2 - g(x)| \cdot \dfrac{1}{|g(x)|} \cdot \dfrac{1}{|l_2|} < \epsilon' \cdot \dfrac{1}{m} \cdot \dfrac{1}{|l_2|} = \epsilon \quad \therefore \epsilon' = |l_2| \cdot m \cdot \epsilon$ ∎

- $\lim_{x \to a} \left(\dfrac{f}{g}\right)(x) = \lim_{x \to a} f(x) \cdot \left(\dfrac{1}{g}\right)(x) = l_1 \cdot \dfrac{1}{l_2} = \dfrac{l_1}{l_2}$ ∎

....

Combinando los apartados anteriores, se puede asegurar que:

- $\forall n \in \mathbb{N}, a \in \mathbb{R}$, existe $\lim_{x \to a} x^n = a^n$
- Dado un polinomio $p(x) = \alpha_n x^n + \alpha_{n-1} x^{n-1} + ... + \alpha_1 x + \alpha_0, a \in \mathbb{R}$, existe

$$\lim_{x \to a} p(x) = \alpha_n a^n + \alpha_{n-1} a^{n-1} + ... + \alpha_1 a + \alpha_0 = p(a)$$

- Dada una función racional $\dfrac{p(x)}{q(x)}$ y un $a \in \mathbb{R}$, $\lim_{x \to a} \dfrac{p(x)}{q(x)} = \dfrac{p(a)}{q(a)}$, siempre que $q(a) \neq 0$

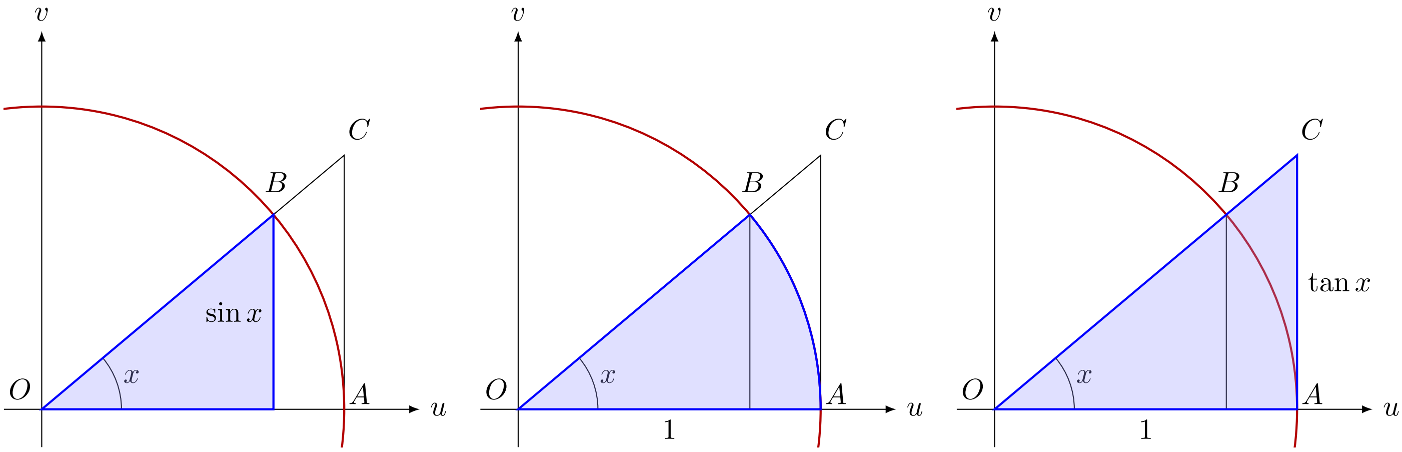
....

Todos los resultado son válidos si se reemplazan los símbolos $x \to a$ por $x \to a^+$ o $x \to a^-$.

8 Límite de Funciones Trigonométricas

Proposición 4: Si $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$, $|sin\ x| \leq |x| \leq |tan\ x|$.

Demostración: Para $x = 0$ vale la igualdad. Luego, para $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}, x \neq 0$



Luego, comparando las areas, $\overset{\triangle}{AOB} <$ área sector circular $AOB < \overset{\triangle}{AOC}$.

Puesto en valores queda: $\frac{|\sin x|}{2} < \frac{|x|}{2} < \frac{|\tan x|}{2}$ e inmediatamente implica el enunciado.

Nota: La desigualdad $|\sin x| < |x|$ es cierta $\forall x \neq 0$. $|\sin x| \leq 1 < \frac{\pi}{2} \leq |x|$

Podemos asegurar también que $\lim_{x \to 0} \sin x = 0$, pues $0 < |x| < \delta \Rightarrow |\sin x| < |x| < \delta < \epsilon$

También es útil ver que:

$$\begin{aligned}\cos x = \cos\left(2\frac{x}{2}\right) = \cos\left(\frac{x}{2} + \frac{x}{2}\right) &= \left(\cos\frac{x}{2} \cdot \cos\frac{x}{2} - \sin\frac{x}{2} \cdot \sin\frac{x}{2}\right) \\ &= \cos^2\left(\frac{x}{2}\right) - \sin^2\left(\frac{x}{2}\right) = 1 - \sin^2\left(\frac{x}{2}\right) - \sin^2\left(\frac{x}{2}\right) = 1 - 2 \cdot \sin^2\left(\frac{x}{2}\right)\end{aligned}$$

De esta manera podemos concluir que:

$$\lim_{x \to 0} \cos x = \lim_{x \to 0} \left(1 - 2 \cdot \sin^2\left(\frac{x}{2}\right)\right) = 1$$

Teorema 8: Para $a \in \mathbb{R}$:

$$\lim_{x \to a} \sin x = \sin a \quad \wedge \quad \lim_{x \to a} \cos x = \cos a$$

Demostración: Usando lo anterior más las siguientes formulas:

- $\lim_{x \to a} (\sin x) = \lim_{x \to 0} (\sin(x + a)) = \lim_{x \to 0} (\sin x \cdot \cos a + \cos x \cdot \sin a) = 0 \cdot \cos a + 1 \cdot \sin a = \sin a$
- $\lim_{x \to a} (\cos x) = \lim_{x \to 0} (\cos(x + a)) = \lim_{x \to 0} (\cos x \cdot \cos a - \sin x \cdot \sin a) = 1 \cdot \cos a - 0 \cdot \sin a = \cos a$

Corolario 2:

1. Para $a \neq \left(\frac{\pi}{2} + k \cdot \pi\right), k \in \mathbb{Z}:$ $\quad \lim_{x \to a} \tan x = \tan a \quad \wedge \quad \lim_{x \to a} \sec x = \lim_{x \to a} \frac{1}{\cos x} = \frac{1}{cosa} = \sec a$
2. Para $a \neq k{\cdot}\pi, k \in \mathbb{Z}:$ $\lim_{x \to a} \csc x = \lim_{x \to a} \frac{1}{\sin x} = \frac{1}{\sin a} = \csc a \quad \wedge \quad \lim_{x \to a} \cot x = \lim_{x \to a} \frac{\sin x}{\cos x} = \frac{\sin a}{\cos a} = \cot a$

■

9 El Principio de Intercalación

Teorema 9: **El Principio de Intercalación**: Sean f, g, h tres funciones y a un real, tales que en algún entorno reducido $E'(a,\rho)$ se tiene: $g(x) \leq f(x) \leq h(x)$,
y además las funciones g y h tienen límite en a siendo $\lim\limits_{x\to a} g(x) = \lim\limits_{x\to a} h(x) = l$,
Entonces f tiene límite en el punto a y vale $\lim\limits_{x\to a} f(x) = l$.
Demostración: Tenemos $0 < |x-a| < \delta_1 \Rightarrow |g(x) - l| < \epsilon \quad \wedge \quad 0 < |x-a| < \delta_2 \Rightarrow |h(x) - l| < \epsilon$
Entonces para $\delta = \min\{\rho, \delta_1, \delta_2\}$, y x tal que:

$$0 < |x-a| < \delta \begin{cases} g(x) \leq f(x) \leq h(x) \\ l - \epsilon < g(x) \\ h(x) < l + \epsilon \end{cases} \Rightarrow (l - \epsilon < f(x) < l + \epsilon) \Rightarrow (|f(x) - l| < \epsilon)$$

Proposición 5: El Principio de Intercalación es valido si se reemplaza $x \to a$ por $x \to a^+$ o $x \to a^-$.
Proposición 6: $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin x}{x} = 1$
Demostración: Para $-\dfrac{\pi}{2} < x < \dfrac{\pi}{2}, x \neq 0$, tenemos que $|\sin x| < |x| < |\tan x|$
Para los x tales que $0 < x < \dfrac{\pi}{2}$, si dividimos por $\sin x > 0$, tenemos $1 < \dfrac{x}{\sin x} < \dfrac{1}{\cos x}$
Para los x tales que $\dfrac{\pi}{2} < x < 0$, si dividimos por $-\sin x > 0$, tenemos $1 < \dfrac{x}{\sin x} < \dfrac{1}{\cos x}$
Y como sabemos que $\lim\limits_{x\to 0} \cos x = 1 \neq 0 \Rightarrow \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1}{\cos x} = 1$
Utilizando el Teorema del Sandwich, se concluye que $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x}{\sin x} = 1 \neq 0$ y luego $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin x}{x} = 1$ ■

Además, se puede concluir que si $f(x) \neq 0$ en un $E'(a,\rho)$, y $\lim\limits_{x\to a} f(x) = 0$ entonces $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{\sin f(x)}{f(x)} = 1$

10 Generalización del Concepto de Límite

- Una función tiene limite $+\infty$ en el punto a si para cualquier $M > 0$ existe un $\delta > 0$ tal que: $0 < |x-a| < \delta \Rightarrow f(x) > M$. Luego, notamos $\lim\limits_{x\to a} f(x) = +\infty$
- Una función tiene limite $-\infty$ en el punto a si para cualquier $M > 0$ existe un $\delta > 0$ tal que: $0 < |x-a| < \delta \Rightarrow f(x) > -M$ Luego, notamos $\lim\limits_{x\to a} f(x) = -\infty$

Teorema 10: **Álgebra de Límites Infinitos**: Sean a un real, y f y g dos funciones tales que:

- $\lim\limits_{x\to a} f(x) = +\infty$ y $\lim\limits_{x\to a} g(x) = +\infty$, entonces $\lim\limits_{x\to a} (f+g)(x) = +\infty$
- $\lim\limits_{x\to a} f(x) = -\infty$ y $\lim\limits_{x\to a} g(x) = -\infty$, entonces $\lim\limits_{x\to a} (f+g)(x) = -\infty$
- Si $c > 0$, $\lim\limits_{x\to a} f(x) = +\infty$ y $\lim\limits_{x\to a} g(x) = -\infty$, entonces $\lim\limits_{x\to a} (cf)(x) = +\infty$ y $\lim\limits_{x\to a} (cg)(x) = -\infty$
- Si $c < 0$, $\lim\limits_{x\to a} f(x) = +\infty$ y $\lim\limits_{x\to a} g(x) = -\infty$, entonces $\lim\limits_{x\to a} (cf)(x) = -\infty$ y $\lim\limits_{x\to a} (cg)(x) = +\infty$
- Si $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \pm\infty$ y $\lim\limits_{x\to a} g(x) = \pm\infty$, entonces $\lim\limits_{x\to a} (f \cdot g)(x) = +\infty$
- Si $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \pm\infty$ y $\lim\limits_{x\to a} g(x) = \mp\infty$, entonces $\lim\limits_{x\to a} (f \cdot g)(x) = -\infty$

Demostraciones

- $\left.\begin{array}{l} 0 < |x-a| < \delta' \Rightarrow f(x) > M' \\ 0 < |x-a| < \delta'' \Rightarrow f(x) > M'' \end{array}\right\} \Rightarrow \delta \leq \min\{\delta', \delta''\}, 0 < |x-a| < \delta,$
  $(f+g)(x) = f(x) + g(x) < M' + M'' = M \therefore M' = \dfrac{M}{2} \wedge M'' = \dfrac{M}{2}$ ■

- $\left.\begin{array}{l} 0 < |x-a| < \delta' \Rightarrow f(x) > -M' \\ 0 < |x-a| < \delta'' \Rightarrow f(x) > -M'' \end{array}\right\} \Rightarrow \delta \leq \min\{\delta', \delta''\}, 0 < |x-a| < \delta,$
  $(f-g)(x) = f(x) - g(x) < -M' + -M'' = M \therefore M' = -\dfrac{M}{2} \wedge M'' = -\dfrac{M}{2}$ ■

- $0 < |x-a| < \delta_1 \Rightarrow f(x) > M',\ (c \cdot f)(x) = c \cdot f(x) < c \cdot M' = M \therefore M' = \dfrac{M}{c}$
  $0 < |x-a| < \delta_2 \Rightarrow g(x) > -M'',\ (c \cdot g)(x) = c \cdot g(x) < c \cdot -M'' = M \therefore M'' = -\dfrac{M}{c}$ ■

- $0 < |x-a| < \delta_1 \Rightarrow f(x) > M',\ (c \cdot f)(x) = c \cdot f(x) < c \cdot M' = -M \therefore M' = -\dfrac{M}{c}$
  $0 < |x-a| < \delta_2 \Rightarrow g(x) > M'',\ (c \cdot g)(x) = c \cdot g(x) < c \cdot M'' = M \therefore M'' = \dfrac{M}{c}$

- $\left.\begin{array}{l} 0 < |x-a| < \delta' \Rightarrow f(x) > M' \\ 0 < |x-a| < \delta'' \Rightarrow f(x) > M'' \end{array}\right\} \Rightarrow \delta \leq \min\{\delta', \delta''\}, 0 < |x-a| < \delta,$
  $(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x) < M' \cdot M'' = M \therefore M' = \sqrt{M} \wedge M'' = \sqrt{M}$ (análogamente el resto) ■

10.1 Límites laterales infinitos

- Una función tiene limite $+\infty$ (resp. $-\infty$) por izquierda en el punto a, si para $M > 0$, $\exists \delta > 0$:

$$a - \delta < x < a \Rightarrow f(x) > M \text{ (resp. } f(x) < -M)$$

- Una función tiene limite $+\infty$ (resp. $-\infty$) por derecha en el punto a, si para $M > 0$, $\exists \delta > 0$:

$$a < x < a + \delta \Rightarrow f(x) > M \text{ (resp. } f(x) < -M)$$

Proposición 7: **Álgebra de Límites Laterales Infinitos**: Los resultados del *Teorema 10* son válidos si se reemplazan los símbolos $x \to a$ por $x \to a^+$ o $x \to a^-$.

11 Límites en el Infinito

- Una función f tiene límite l cuando $x \to +\infty$, si $\forall \epsilon > 0$, $\exists H > 0$:
  $x > H \Rightarrow |f(x) - l| < \epsilon$ y notamos $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = l$

- Una función f tiene límite l cuando $x \to -\infty$, si $\forall \epsilon > 0$, $\exists H > 0$:
  $x < -H \Rightarrow |f(x) - l| < \epsilon$ y notamos $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = l$

Notamos que si una propiedad se verifica $\forall x > H_1$, y otra propiedad se verifica $\forall x > H_2$, ambas se verifican para $H \geq \max\{H_1, H_2\}$.

Proposición 8: **Álgebra de Límites en el Infinito**: Los resultados de la sección de *Álgebra de Límites* son válidos si se reemplazan los símbolos $x \to a$ por $x \to +\infty$ o $x \to -\infty$.

12 Límites Infinitos en el Infinito

- Una función f tiene límite $+\infty$ cuando $x \to +\infty$, si $\forall M > 0$, $\exists H > 0$: $(x > H \Rightarrow f(x) > M)$

- Una función f tiene límite $+\infty$ cuando $x \to -\infty$, si $\forall M > 0$, $\exists H > 0$: $(x < -H \Rightarrow f(x) > M)$

- Una función f tiene límite $-\infty$ cuando $x \to +\infty$, si $\forall M > 0$, $\exists H > 0$: $(x > H \Rightarrow f(x) < -M)$

- Una función f tiene límite $-\infty$ cuando $x \to -\infty$, si $\forall M > 0$, $\exists H > 0$: $(x < -H \Rightarrow f(x) < -M)$

Proposición 9: **Álgebra de Límites Infinitos en el Infinito**: Los resultados de la sección de *Álgebra de Límites Infinitos* son válidos si se reemplazan los símbolos $x \to a$ por $x \to +\infty$ o $x \to -\infty$.

Proposición 10:

- $\lim\limits_{x \to a} f(x) \Rightarrow \pm\infty \Rightarrow \lim\limits_{x \to a} \left(\frac{1}{f}\right)(x) = 0$
  (Lo mismo ocurre si se reemplaza $x \to a$ por $x \to a^+$, $x \to a^-$, $x \to +\infty$ o $x \to -\infty$).
  Demostración: Queremos demostrar que
  $[0 < |x-a| < \delta \Rightarrow f(x) > M] \Rightarrow \left[0 < |x-a| < \delta \Rightarrow \left|\frac{1}{f(x)} - 0\right| < \epsilon\right]$.
  Y como $f(x) > M > 0 \Rightarrow 0 < \frac{1}{f(x)} < \frac{1}{M} \Rightarrow \left|\frac{1}{f(x)} - 0\right| < \frac{1}{M}$, consideramos $\frac{1}{M} = \epsilon > 0$ ■

- $\lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x) = l \iff \lim\limits_{x \to 0^\pm} f\left(\frac{1}{x}\right) = l$
  (Lo mismo ocurre si se reemplaza l por $+\infty$ o $-\infty$).
  Demostración: Queremos demostrar que
  $[0 < H < x \Rightarrow |f(x) - l| < \epsilon] \iff \left[0 < x < 0 + \delta \Rightarrow \left|f\left(\frac{1}{x}\right) - l\right| < \epsilon\right]$
  Y como $0 < H < x \Rightarrow 0 < \frac{1}{x} < \frac{1}{H} \Rightarrow |f(x) - l| < \epsilon$, tomando $\delta = \frac{1}{H}$ y haciendo un cambio de variable $x' = x$, tenemos que $0 < x' < \delta \Rightarrow \left|f\left(\frac{1}{x'}\right) - l\right| < \epsilon$ ■

12.1 Límites de Funciones Racionales en el Infinito

- Se puede demostrar que si $n \in \mathbb{N}$, entonces $\lim\limits_{x \to +\infty} x^n = +\infty$ a través de la definición formal:
  $\forall M > 0,\ \exists H > 0 : x > H > 0 \Rightarrow x^n > M$, luego $x^n > M > 0 \Rightarrow x > H = \sqrt[n]{M} > 0 \Rightarrow x^n > M$
  Y tenemos que $H = \sqrt[n]{M} > 0$, $x > H = \sqrt[n]{M} \Rightarrow x^n > M$ ■

- Dada la función polinómica $p(x) = x^n + a_{n-1} \cdot x^{n-1} + ... + a_1 \cdot x + a_0$, $\lim\limits_{x \to +\infty} p(x) = +\infty$.
  Se empieza sacando factor común x^n. Ya esta demostrado que $\lim\limits_{x \to +\infty} x^n = +\infty$, y por la $P10$,
  $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1}{x^n} = 0$. Obteniendo así: $\overbrace{x^n}^{\to +\infty} \cdot \overbrace{(1 + \underbrace{a_{n-1} \cdot \frac{1}{x}}_{\to 0} + ... + \underbrace{a_1 \cdot \frac{1}{x^{n-1}}}_{\to 0} + \underbrace{a_0 \cdot \frac{1}{x^n}}_{\to 0})}^{\to 1} = +\infty$ ■

- Sean $a_n, b_m \in \mathbb{R} - \{0\}$:

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0}{b_m x^m + b_{m-1}x^{m-1} + ... + b_1 x + b_0} = \begin{cases} +\infty & : m < n, a_n \cdot b_m > 0 \\ -\infty & : m < n, a_n \cdot b_m < 0 \\ \frac{a_n}{b_m} & : m = n \\ 0 & : m > n \end{cases}$$

  - Si tenemos que $m < n$ y $a_n \cdot b_m > 0 \Rightarrow n - m \in \mathbb{N}$, entonces $\lim\limits_{x \to +\infty} n^{n-m} = +\infty$:
    $$\lim_{x \to +\infty} \underbrace{x^{n-m}}_{\to +\infty} \cdot \underbrace{\frac{a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0}{b_m x^m + b_{m-1}x^{m-1} + ... + b_1 x + b_0}}_{\to \frac{a_n}{b_m} > 0} = +\infty \quad ■$$
  - Si $m < n$ y $a_n \cdot b_m < 0 \Rightarrow n - m \in \mathbb{N}$, entonces $\lim\limits_{x \to +\infty} n^{n-m} = +\infty$:
    $$\lim_{x \to +\infty} \underbrace{x^{n-m}}_{\to +\infty} \cdot \underbrace{\frac{a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0}{b_m x^m + b_{m-1}x^{m-1} + ... + b_1 x + b_0}}_{\to \frac{a_n}{b_m} < 0} = -\infty \quad ■$$

- Si $m = n$, entonces $\lim_{x \to +\infty} n^{n-m} = n^0 = 1$:

$$\lim_{x \to +\infty} \underbrace{x^{n-m}}_{\to +\infty} \cdot \underbrace{\frac{a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0}{b_m x^m + b_{m-1}x^{m-1} + ... + b_1 x + b_0}}_{\to \frac{a_n}{b_m}} = \frac{a_n}{b_m} \qquad \blacksquare$$

- Si $m > n$, $m - n \in \mathbb{N}$, entonces $\lim_{x \to +\infty} x^{m-n} = +\infty$ y $\lim_{x \to +\infty} x^{n-m} = \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x^{m-n}} = 0$:

$$\lim_{x \to +\infty} \underbrace{x^{n-m}}_{\to 0} \cdot \underbrace{\frac{a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0}{b_m x^m + b_{m-1}x^{m-1} + ... + b_1 x + b_0}}_{\text{un valor acotado}} = 0 \qquad \blacksquare$$

13 Más Algebra de Límites

Teorema: Sea $a \in \mathbb{R}$,f y g funciones tales que: $\lim_{x \to a^+} f(x) = L \wedge \lim_{x \to a^+} g(x) = +\infty \wedge \lim_{x \to a^+} h(x) = -\infty$

$$\lim_{x \to a^+} (f + x)(x) = +\infty$$

$$\lim_{x \to a^+} (f + h)(x) = -\infty$$

$$\lim_{x \to a^+} (fg)(x) = \begin{cases} +\infty & , L > 0 \\ -\infty & , L < 0 \end{cases}$$

Se puede reemplazar $x \to a^+$ por $x \to a^-$, $x \to +\infty$ o $x \to -\infty$.

14 Asíntotas

Se dice que la recta vertical $x = a$ es una **asíntota vertical** de la función f en el punto a si se verifica por lo menos uno de estos cuatro límites:

$$\lim_{x \to a^+} f(x) = +\infty \qquad \lim_{x \to a^+} f(x) = -\infty \qquad \lim_{x \to a^-} f(x) = +\infty \qquad \lim_{x \to a^-} f(x) = -\infty$$

Se dice que la recta horizontal $y = b$ es una **asíntota horizontal** de la función f si se verifica por lo menos uno de estos dos límites:

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = b \qquad \lim_{x \to -\infty} f(x) = b$$

Se dice que la recta $y = mx + b$, con $m \neq 0$, es una **asíntota oblicua** de la función f si se verifica por lo menos uno de estos dos límites:

$$\lim_{x \to +\infty} (f(x) - (mx + b)) = 0 \qquad \lim_{x \to -\infty} (f(x) - (mx + b)) = 0$$

15 Límites Indeterminados

- Cociente de dos funciones con límite cero: $\frac{0}{0}$
- Cociente de dos funciones con límite infinito: $\frac{\infty}{\infty}$
- Producto de un límite cero por uno infinito: $0 \cdot \infty$
- Suma de dos infinitos de distinto signo: $\pm\infty + \mp\infty$

Cuando se tiene una indeterminación del límite, el límite puede ser un número real o incluso $\pm\infty$, y hay que realizar simplificaciones o reemplazos para poder calcularlo.
Nota: Si tenemos $g(x)$ definida en un entorno reducido del punto a, donde no se anula y que tiende a 0 en dicho punto, entonces $\dfrac{0}{g(x)} = 0$, y por Caracter Local del Limite, $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{0}{g(x)} = 0$
Nota: Las consideraciones hechas para el cálculo de límites puntuales valen para los límites en el infinito y para el cálculo de límites laterales, con los mismos casos de indeterminación.

16 Definición de Continuidad

Sean f una función y a un número real, entonces se dice que: f es continua en $a \iff$

1. Existe el valor $f(a)$,
2. Existe el valor $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ y es finito,
3. $\lim\limits_{x\to a} f(x) = f(a)$.

Definiendo usando entornos de a y $f(a)$,

$$f \text{ es continua en } a \iff \forall\, \epsilon > 0,\ \exists \delta > 0 :\ |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \epsilon$$

Difiriendo de la definición de límite al reemplazar l por $f(a)$ y la condición se debe verificar en el entorno completo, ya que f debe estar definida en a (en dicho punto vale $\forall\, \epsilon > 0$, ya que $|f(a) - f(a)| = 0 < \epsilon$).

16.1 Continuidad Lateral

Una función f se dice continua por izquierda (resp. derecha) en el punto a, si existe el valor de $f(a)$, el valor del lmite lateral por izquierda (resp. derecha) y ambos coinciden.

16.2 Funciones Continuas

Una función se dice que es continua si es continua en todos los puntos de su dominio. Entre ellas:

- La función lineal $f(x) = m \cdot x + h$.
- Los polinomios y las funciones racionales.
- Las funciones seno y coseno, y las demás funciones trigonométricas.
- La funcion valor absoluto $f(x) = |x|$.

17 Discontinuidades

17.1 Discontinuidad Evitable

Sucede cuando existe el límite finito de la función en un punto, pero no coincide con el valor de la función en dicho punto (pudiendo incluso no estar definido).

17.2 Discontinuidad Inevitable de Salto Finito

Sucede cuando una función posee ambos límites laterales finitos, pero no coinciden. La distancia entre ambos límites se la denomina discontinuidad del salto.

17.3 Discontinuidad Inevitable de Salto Infinito

Sucede si al menos uno de los dos límites laterales en un punto es infinito y el otro existe, siendo el segundo finito o infinito.

17.4 Discontinuidades Esenciales

Sucede si alli la discontinuidad no es evitable, ni de salto finito o infinito. En el punto no existe uno de los límites laterales, finito o infinito.
Ejemplos:

- $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in \mathbb{Q} \\ 0 & \text{si } x \in \mathbb{R} - \mathbb{Q} \end{cases}$
  Es discontinua en todo número real. Dado $\epsilon = \frac{1}{2}$, y a racional, en cualquier entorno $E(a, \delta)$ existen irracionales para los cuales $|f(x) - f(a) = |0 - 1| = 1 > \frac{1}{2} = \epsilon$. Análogamente para los b irracionales, en $E(b, \delta)$ existen racionales en los que $|f(x) - f(a)| = |1 - 0| = 1 > \frac{1}{2} = \epsilon$. Como en ningún punto la función es continua, tiene discontinuidades esenciales en todos los puntos.

- $f(x) = \sin\left(\frac{1}{x}\right)$. Tiene una discontinuidad esencial en 0, ya que a medida que se acerca a 0, los valores fluctuan entre -1 y 1, sin tender a ningún valor. Es continua en todo punto distinto de 0.

- $f(x) = x \cdot \sin\left(\frac{1}{x}\right)$. Es continua en todo $\mathbb{R}$. Es continua en 0 por el T6[1], en el resto por composición de funciones continuas.

18 Teoremas de Funciones Continuas

Proposición 11: Sea f una función continua en a, entonces existe un entorno de a en el cual f está acotada. Es decir, existen $\delta > 0$, $M > 0 : x \in E(a, \delta) \Rightarrow |f(x)| \leq M$
Proposición 12: Sea f una función continua en a y k un número real tal que $f(a) > k$ (resp. $f(a) < k$), entonces existe un entorno de a en el cual f asume valores todos mayores (resp. menores) a k, es decir, existe $\delta > 0 : x \in E(a, \delta) \Rightarrow f(x) > k$ (resp. $f(x) < k$).
Corolario 3: **Principio de Conservación del Signo**: Sea f continua en a, tal que $f(a) > 0$ (resp. $f(a) < 0$), entonces existe un entorno de a en el cual la función se mantiene positiva (resp. negativa).
Corolario 4: Sea f una función continua en a tal que, en cualquier entorno de a la función asume tanto valores positivos como negativos, entonces $f(a) = 0$. Se demuestra por el absurdo, ya que si suponemos $f(a) > 0$ entonces tenemos un entorno de a donde f es siempre positiva, contradiciendo la hipotesis, luego $f(a) \leq 0$. Analogamente suponemos $f(a) < 0$, y llegamos a que $f(a) \geq 0 \Rightarrow f(a) = 0$.

Teorema 11: **Álgebra de Funciones Continuas**: Sean f y g funciones continuas en a, entonces son continuas en a las funciones $f \pm g$, $c \cdot f (c \in \mathbb{R})$, $f \cdot g$ y $\frac{f}{g}$ $(g(a) \neq 0)$.
Demostración: Sabemos que existen $f(a)$ y $g(a)$, luego existe $(f+g)(a) = f(a)+g(a)$. Ademas existen los límites de f y g en a, y vale $\lim_{x \to a}(f+g)(x) = \lim_{x \to a} f(x) + \lim_{x \to a} g(x) = f(a) + g(a) = (f+g)(a)$.
■
Teorema 12: **Límite de la Función Compuesta**: Sean f y g dos funciones tales que $Rec(g) \subset Dom(f)$. Si existe el límite $\lim_{x \to a} g(x) = l$ y que f es continua en l, entonces existe $\lim_{x \to a}(f \circ g)(x) = f(l)$.
Demostración: Queremos llegar a que $0 < |x - a| < \delta \Rightarrow |(f \circ g)(x) - f(l)| < \epsilon$. Partiendo con ese ϵ, sabemos que existe $\rho > 0$ para el cual $|z - l| < \rho \Rightarrow |f(z) - f(l)| < \epsilon$. Y como $0 < |x - a| < \delta \Rightarrow |g(x) - l| < \rho$, combinando las expresiones llegamos a que:

$$0 < |x - a| < \delta \Rightarrow |g(x) - l| < \rho \Rightarrow |f(g(x)) - f(l)| < \epsilon$$

■
Corolario 5: **Continuidad de la Función Compuesta**: Sea g continua en a y f continua en $g(a)$, entonces $(f \circ g)(a)$ es continua en a.

[1] $\lim_{x \to a} f(x) = 0$ y g está acotada en un entorno reducido $E'(a, \rho)$, entonces $\lim_{x \to a}(fg)(x) = 0$

19 Ceros de Funciones Continuas y Teorema de Bolzano

Teorema 13: **Teorema de Bolzano**: Sea f una función continua en el intervalo $[a, b] : f(a) \cdot f(b) < 0$ (i.e tienen distino signo), entonces existe $\xi \in (a, b)$ donde $f(\xi) = 0$.

Recordando el teorema de conservación de signo de las funciones continuas, que se demuestra más adelante, Sea f continua en c, y supongamos que $f(c) \neq 0$, existe entonces un intervalo $(c - \rho, c + \rho)$ en el que f tiene el mismo signo que $f(x)$.

Demostración del Teorema de Bolzano: Supongase $f(a) < 0$ y $f(b) > 0$. Sea S el conjunto de todos los puntos del intervalo $[a, b]$ para los cuales $f(x) \leq 0$. Hay al menos un punto, puesto que $f(a) < 0$. Luego, S es un conjunto no vacio y está acotado superiormente, puesto que todos los valores están en $[a, b]$, luego tiene un supremo, llamémoslo c. Y se demostrará que $f(c) = 0$.

Como sabemos por tricotomía que solo hay 3 posibilidades, $f(c) > 0 \veebar f(c) < 0 \veebar f(x) = 0$.

Comenzamos suponiendo que $f(x) > 0$, luego existe un intervalo $(c - \delta, c + \delta)$, o $(c - \delta, c)$ si $c = b$, en donde si x está en ese intervalo $f(x)$ es positivo. Y como ningún punto mayor que $c - \delta$ puede pertenecer al conjunto S (puesto que su imagen es positiva), entonces $c - \delta$ es una cota superior de S. Lo cual contradice que c es supremo del conjunto.

Suponiendo que $f(c) < 0$, luego existe un intervalo $c - \delta, c + \delta$ (o $(c, c + \delta$ si $a = c$) en donde si x pertenece a dicho intervalo, entonces su imagen es negativa. Pero entonces existe $x > c$ tal que su imagen es menor que cero, entonces x deberia pertenecer al conjunto, y contradice que c sea el supremo del mismo.

Luego, solo queda la posibilidad de que $f(c) = 0$ y queda demostrado el Teorema de Bolzano. ■

Método de Bisección: Dada una función f continua en un intervalo, que asume valores de diferente signo en los extremos, sucesivamente se calculan los valores de dos sucesiones a_n y b_n que convergen a un cero de la función. Conocidos a_n y b_n, se calcula el valor del punto medio $c_{n+1} = \dfrac{a_n + b_n}{2}$ y se tendrá que el valor c_{n+1} aproxima al valor ξ de un cero, con cota $|c_{n+1} - \xi| \leq \dfrac{b-a}{2^{n+1}}$. Es decir, dada una tolerancia ϵ, buscamos n para el cual $\dfrac{b-a}{2^{n+1}} < \epsilon$, encontrando un valor c_{n+1} a menos de una distancia ϵ de ξ.

Nota: El cero de f puede no ser único, y si se utilizan otros puntos a y b, quizas se encuentran ceros diferentes.

Teorema 14: **Propiedad de los Valores Intermedios**: Sea f una función continua en $[a, b]$, donde $f(a) \neq f(b)$ y k un valor comprendido estrictamente entre $f(a)$ y $f(b)$, entonces existe un punto $\xi \in (a, b)$ para el cual resulta $f(\xi) = k$

Demostración: Supongamos $f(a) < f(b)$ (si no sucede, es análogo), entonces $f(a) < k < f(b)$. Luego definimos la función $g(x) = f(x) - k$, y tenemos que g es continua en $[a, b]$ por ser resta de funciones continuas, $g(a) < 0$ y $g(b) > 0$. Y al satisfacer las hipótesis del Teorema de Bolzano, entonces existe un valor $\xi \in (a, b)$ para el cual $0 = g(\xi) = f(\xi) - k \therefore f(\xi) = k$

Nota: Dada la función potencia $f(x) = x^m$, sabemos que es continua. Con PVI y la Propiedad Arquimediana se puede demostrar que todo número real (real positivo, si m par) es imagen de algún otro. Por ejemplo, $m = 2$ se empieza con que dado $y \in \mathbb{R}_0^+$ $0 < y < 1 \Rightarrow \exists 0 < x < 1 : f(x) = y$. Luego si $1 \leq y$ por Propiedad Arquimediana se sabe que existe $y < n$, luego $f(1) = 1 \leq y < n \leq n^2 = f(n)$ y aplicando PVI existe $1 \leq x < n$ tal que $f(x) = y$.

20 Continuidad de la Función Inversa

Sabemos que una función biyectiva admite una función inversa, y que la misma tambien es biyectiva. Además, sabemos que es creciente si $\forall x_1, x_2 \in A$, $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$

Teorema 15: **Continuidad de la Función Inversa**: Si f es creciente y continua en un intervalo $[a, b]$, entonces:

1. Existe la función inversa f^{-1} definida sobre el intervalo $[f(a), f(b)]$
2. f^{-1} es creciente en $[f(a), f(b)]$
3. f^{-1} es continua en $[f(a), f(b)]$

Demostración:

1. f creciente implica f inyectiva o biyectiva restringiendo el dominio. Luego $Rec(f) = [f(a), f(b)]$, por PVI, como f es continua sobre $[a, b]$, podemos asegurar que dado un $z \in [f(a), f(b)]$, existe un $c \in [a, b])$ tal que $f(c) = z$. Luego f admite inversa, y el domino es $[f(a), f(b)]$.
2. Sean y_1, y_2 dos puntos cualesquiera de $[f(a), f(b)]$, y sean $x_1, x_2 \in [a, b]$ tales que $f(x_1) = y_1$ y $f(x_2) = y_2$, para mostrar que f^{-1} es creciente, habrá que ver que $y_1 < y_2 \Rightarrow f^{-1}(y_1) < f^{-1}(y_2)$:
$$\begin{aligned}\Big(y_1 < y_2 \Rightarrow f^{-1}(y_1) < f^{-1}(y_2)\Big) &\iff \Big(f(x_1) < f(x_2) \Rightarrow f^{-1}(f(x_1)) < f^{-1}(f(x_2))\Big) \\ &\iff \Big(f(x_1) < f(x_2) \Rightarrow x_1 < x_2\Big)\end{aligned}$$
Si $x_1 > x_2$ con $f(x_1) < f(x_2)$, contradice que es creciente. Si $x_1 = x_2$ con $f(x_1) < f(x_2)$, contradice que es función. Ergo, f^{-1} es creciente monótona sobre $[f(a), f(b)]$.
3. DEMOSTRAR!!!!!!!! TO DO

Teorema 16: Si f es decreciente y continua en un intervalo $[a, b]$, entonces:

1. Existe la función inversa f^{-1} definida sobre el intervalo $[f(a), f(b)]$
2. f^{-1} es decreciente en $[f(a), f(b)]$
3. f^{-1} es continua en $[f(a), f(b)]$

21 Valores Extremos y Teoremas de Weierstrass

Sea f una función definida sobre un conjunto A, diremos que:

- el valor M es el **máximo** de f en A si existe un número $x^* \in A : M = f(x^*) \geq f(x), \ \forall x \in A$.
- el valor m es el **máximo** de f en A si existe un número $x^* \in A : Mm = f(x^*) \leq f(x), \ \forall x \in A$.

Luego notamos $\quad M = \max_{x \in A} f(x) \quad$ y $\quad m = \min_{x \in A} f(x)$

Nota: $\max_{x \in A} f(x) = -\min_{x \in A}(-f)(x) \quad$ y $\quad \min_{x \in A} f(x) = -\max_{x \in A}(-f)(x)$

Teorema 17: **Primer Teorema de Weierstrass**: Si f es una función continua en un intervalo $[a, b]$, entonces f está acotada en dicho intervalo.

Teorema 18: **Segundo Teorema de Weierstrass**: Si f es una función continua en un intervalo $[a, b]$, entonces f alcanza sus valores máximo y mínimo en $[a, b]$.
Demostración: Por W1, f está acotada en $[a, b]$, es decir, $\exists M : f(x) \leq M \ \forall x \in [a, b]$.
Luego M puede pertenecer o no al $Rec(f)$.
Suponiendo que no pertenece, es decir, $f(x) < M, \forall x \in [a, b]$, tenemos que $M - f(x) > 0, \ \forall x \in [a, b]$.
Luego queda bien definida la función $g(x) = \dfrac{1}{M - f(x)}$ (la cual es continua por ser la recíproca de una función continua). Nuevamente por W1, g está acotada en el intervalo $[a, b]$. Por lo tanto, existe $M' > 0 : g(x) < M', \ \forall x \in [a, b]$. En consecuencia se tiene que:

$$0 < g(x) < M' \Rightarrow 0 < \frac{1}{M - f(x)} < M' \Rightarrow 0 < \frac{1}{M'} < M - f(x) \Rightarrow f(x) < M - \frac{1}{M'} < M$$

Lo cual quiere decir que f admite una cota superior estrictamente menor que M, asumido como supremo.

Entonces M tiene que pertenecer al $Rec(f)$, luego existe $x^* \in Dom(f) : f(x^*) = M$ y la existencia del máximo está probada.

Teorema 19: **Teorema de los Valores Intermedios**: Sea f una función definida en un intervalo cerrado y acotado $[a, b]$, y supongamos que f es continua en $[a, b]$, con m y M sus respectivos valores mínimo y máximo absolutos. Entonces, f alcanza todos los valores entre m y M. Es decir, $Rec(f) = [m, M]$