

# Introducción a la Matemática

Iker M. Canut

March 13, 2020

## **Contents**

<b>1</b>	<b>Unidad 1: Numeros Reales</b>	<b>3</b>
----------	---------------------------------	----------

# 1 Unidad 1: Numeros Reales

## Demostracion de la Propiedad Cancelativa de la Suma

Sea  $d = a + b$ , y por ende,  $d = b + c$ , por el Axioma 5, existe  $y$  que es opuesto a  $a$ , entonces:

$$y + d = y + (a + b) \stackrel{A2}{=} (y + a) + b = 0 + b \stackrel{A4}{=} b$$

$$y + d = y + (a + c) \stackrel{A2}{=} (y + a) + c = 0 + c \stackrel{A4}{=} c$$
$$b = c$$

□

## Demostracion de la Unicidad del Elemento Neutro de la suma

Supongamos que  $0'$  es un numero que tambien funciona como neutro de la suma, entonces

$$a + 0 = a \wedge a + 0' = a$$

$$a + 0 = a + 0'$$

Y por propiedad cancelativa de la suma

$$0 = 0'$$

□

## Demostracion de la Unicidad del Elemento Opuesto

La existencia de un numero  $b$  esta dada por el axioma 5, hay que demostrar que es unico. Suponiendo que existe  $b' / a + b' = b' + a = 0$ , tenemos que

$$a + b = 0 \wedge a + b' = 0$$

$$a + b = a + b'$$

Y por propiedad cancelativa de la suma

$$b = b'$$

□

## Demostracion de que el opuesto al opuesto de $a$ es $a$

Sea  $b$  el opuesto de  $a$ , se puede concluir que  $a + b = 0 \wedge b = (-a) \wedge a = (-b)$

(1)  $\wedge$  (2)  $\wedge$  (3)

$$-(-a) \stackrel{(2)}{=} -b \stackrel{(3)}{=} a$$

□

## Demostracion de que el opuesto de 0 es 0

Por el axioma 5, todo numero real tiene su opuesto. Llamemos  $0'$  al opuesto de 0, siendo  $0 + 0' = 0$  y Del axioma 3 se concluye que  $0 + 0 = 0$

$$si\ 0 + 0' = 0 \wedge 0 + 0 = 0 \Rightarrow 0' = 0$$

□

### Demostracion de que el producto de 0 con cualquier otro numero es 0

$$\begin{aligned} a \cdot 0 &\stackrel{A4}{=} a \cdot 0 + 0 \stackrel{A5}{=} a \cdot 0 + (a + (-a)) \stackrel{A2}{=} (a \cdot 0 + a) + (-a) \stackrel{A4}{=} (a \cdot 0 + a \cdot 1) + (-a) \stackrel{A3}{=} \\ &a(0 + 1) + (-a) \stackrel{A4}{=} a \cdot 1 + (-a) \stackrel{A4}{=} a + (-a) \stackrel{A5}{=} 0 \end{aligned}$$

□

### $a(-b) = -(ab) = (-a)b$

$$\begin{aligned} a(-b) &\stackrel{A4}{=} a(-b) + 0 \stackrel{A5}{=} a(-b) + (ab + -(ab)) \stackrel{A2}{=} (a(-b) + ab) + -(ab) \stackrel{A3}{=} \\ &(a((-b) + b) + -(ab)) \stackrel{A5}{=} a \cdot 0 + -(ab) \stackrel{T2.3}{=} 0 + -(ab) \stackrel{A4}{=} -(ab) \end{aligned}$$

□

### $(-a)(-b) = ab$

$$(-a)(-b) \stackrel{T2.4}{=} -((-a)(-(-b))) \stackrel{T2.1}{=} -((-a)b) \stackrel{T2.4}{=} -(-(ab)) \stackrel{T2.1}{=} ab$$

□

### $a(b - c) = ab - ac$

Por la definicion de diferencia, se puede reescribir como:

$$a(b + (-c)) \stackrel{A3}{=} ab + a(-c) \stackrel{T2.4}{=} ab + -(ac)$$

Que por la definicion de diferencia, se puede reescribir como:  $ab - ac$

□

### $a < b \implies a + c < b + c$

$$a < b \stackrel{Def<}{\implies} b - a \in \mathbb{R}^+ \stackrel{A4}{\implies} (b - a) + 0 \in \mathbb{R}^+ \stackrel{A5}{\implies} (b - a) + (c + (-c)) \in \mathbb{R}^+ \stackrel{Def-}{\implies} (b + (-a)) + (c + (-c)) \in \mathbb{R}^+$$

Reescribiendo usando A1 y A2:

$$(b + c) + (-a + (-c)) \in \mathbb{R}^+ \stackrel{T?}{\implies} (b + c) + -(a + c) \in \mathbb{R}^+ \stackrel{Def-}{\implies} (b + c) - (a + c) \in \mathbb{R}^+ \stackrel{Def<}{\implies} a + c < b + c$$

□

### $a < b \wedge c > 0 \implies ac < bc$

Tenemos que:  $c > 0 \implies c \in \mathbb{R}^+$

Analizamos  $a < b$ :

$$a < b \stackrel{Def<}{\implies} b - a \in \mathbb{R}^+ \stackrel{A7yc>0}{\implies} (b - a)c \in \mathbb{R}^+ \stackrel{A?}{\implies} bc - ac \in \mathbb{R}^+ \stackrel{Def<}{\implies} ac < bc$$

□

### $a \neq 0 \implies a^2 > 0$

Por la propiedad tricotómica,  $a \neq 0 \implies a > 0 \text{ o } a < 0$ . Analicemos los dos casos.

Analizamos  $a > 0$ :

$$a > 0 \stackrel{Def>}{\implies} a - 0 \in \mathbb{R}^+ \stackrel{Def-}{\implies} a + (-0) \in \mathbb{R}^+ \stackrel{T?}{\implies} a \in \mathbb{R}^+ \stackrel{A?}{\implies} a * a \in \mathbb{R}^+ \stackrel{Def>yDefx^2}{\implies} a^2 > 0$$

Analizamos  $a < 0$ :

$$a < 0 \xRightarrow{Def<} 0 - a \in \mathbb{R}^+ \xRightarrow{Def-} 0 + -a \in \mathbb{R}^+ \xRightarrow{A?} -a \in \mathbb{R}^+ \xRightarrow{A?} -a * -a \in \mathbb{R}^+ \xRightarrow{T?}$$

$$(-1 * a) * (-1 * a) \in \mathbb{R}^+ \xRightarrow{A?} (-1 * -1) * (a * a) \in \mathbb{R}^+ \xRightarrow{A?} 1 * (a * a) \in \mathbb{R}^+ \xRightarrow{A?} a * a \in \mathbb{R}^+ \xRightarrow{Def>yDefx^2} a^2 > 0$$

□

$1 \in \mathbb{R}^+$

Existen neutros, 0 y 1,  $0 \neq 1$

Ax 8,  $1 \in \mathbb{R}^+ \text{ xor } -1 \in \mathbb{R}^+$

Supongo  $-1 \in \mathbb{R}^+$ , entonces  $1 \notin \mathbb{R}^+$

Por Ax 7  $-1 * -1 \in \mathbb{R}^+$

$-1 * -1 = 1 \in \mathbb{R}^+$ , pero esto es una contradicción con lo supuesto

□