# Relaciones sobre un conjunto. Problemas resueltos.

13. En cada uno de los siguientes casos, determinar si la relación $\mathcal{R}$ definida en $\mathbb{Z}$ es reflexiva, simétrica, transitiva o antisimétrica. Para los casos a, b, c, d y e determinar $\mathcal{R}(1)$ y $\mathcal{R}^{-1}(1)$.

(a) $(x,y)\in\mathcal{R}$ si $x=y^2$;

(b) $(x,y)\in\mathcal{R}$ si $x>y$;

(c) $(x,y)\in\mathcal{R}$ si $x\geq y$;

(d) $(x,y)\in\mathcal{R}$ si $x+y$ es par;

(e) $(x,y)\in\mathcal{R}$ si $x-y$ es impar;

(f) $(x,y)\in\mathcal{R}$ si $x^3+y^3$ es par.

Solución:
Haremos solamente los apartados a,b y d.
Comencemos recordando algunas definiciones.

Si $\mathcal{R}$ es una relación definida en un conjunto $A$ y $x\in A$, los conjuntos $\mathcal{R}(x)$ y $\mathcal{R}^{-1}(x)$ se definen, respectivamente, como

$$\mathcal{R}(x)=\{y\in A:(x,y)\in\mathcal{R}\}$$

y

$$\mathcal{R}^{-1}(x)=\{y\in A:(y,x)\in\mathcal{R}\}.$$

Una relación $\mathcal{R}$ definida en un conjunto $A$ se dice:

*i)* *reflexiva* si el par $(x,x)\in\mathcal{R}$ para todo $x\in A$.

*ii)* *simétrica* si

$$(x,y)\in\mathcal{R}\Rightarrow(y,x)\in\mathcal{R}.$$

*iii)* *antisimétrica* si

$$((x,y)\in\mathcal{R}\wedge(y,x)\in\mathcal{R})\Rightarrow x=y.$$

*iv)* *transitiva* si

$$((x,y)\in\mathcal{R}\wedge(y,z)\in\mathcal{R})\Rightarrow(x,z)\in\mathcal{R}.$$

(a) Consideremos la relación $\mathcal{R}$ definida en $\mathbb{Z}$ por $(x,y)\in\mathcal{R}$ sii $x=y^2$. Para ver que $\mathcal{R}$ no es reflexiva es suficiente con exhibir un elemento $x\in\mathbb{Z}$ tal que el par $(x,x)\notin\mathcal{R}$. Por ejemplo, si elegimos el elemento $x=2$, tenemos que, como $2\neq 2^2$, el par $(2,2)\notin\mathcal{R}$. También, para ver que $\mathcal{R}$ no es simétrica, basta con mostrar un par de elementos $x,y\in\mathbb{Z}$ tales que $(x,y)\in\mathcal{R}$ pero $(y,x)\notin\mathcal{R}$. Por ejemplo, el par $(4,2)\in\mathcal{R}$ (puesto que $4=2^2$), mientras que $(2,4)\notin\mathcal{R}$ ($2\neq 4^2$). $\mathcal{R}$ tampoco es transitiva. En efecto, $(16,4)\in\mathcal{R}$ y $(4,2)\in\mathcal{R}$, pero $(16,2)\notin\mathcal{R}$. Veamos ahora que la relación es antisimétrica. Para esto, supongamos que $(x,y)\in\mathcal{R}$ y $(y,x)\in\mathcal{R}$. Luego, tenemos que $x=y^2$ y $y=x^2$. De estas igualdades sigue que $x=x^4$, y por lo tanto, tenemos que $x=0$ o $x=1$. Ahora, como $y=x^2$, si $x=0$ tenemos que $y=0$, mientras que si $x=1$ resulta $y=1$. Así, si $(x,y)\in\mathcal{R}$ y $(y,x)\in\mathcal{R}$, entonces $x=y$.

Finalmente,

$$\begin{aligned}\mathcal{R}(1) &= \{y\in\mathbb{Z}:(1,y)\in\mathcal{R}\}\\ &= \left\{y\in\mathbb{Z}:1=y^2\right\}\\ &= \{-1,1\},\end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} \mathcal{R}^{-1}(1) &= \{x \in \mathbb{Z} : (x,1) \in \mathcal{R}\} \\ &= \left\{x \in \mathbb{Z} : x = 1^2\right\} \\ &= \{1\}. \end{aligned}$$

(b) Sea $\mathcal{R}$ la relación definida en $\mathbb{Z}$ por $(x,y) \in \mathcal{R}$ sii $x > y$. $\mathcal{R}$ no es reflexiva ($(1,1) \notin \mathcal{R}$), $\mathcal{R}$ no es simétrica ($(2,1) \in \mathcal{R}$, mientras que $(1,2) \notin \mathcal{R}$). $\mathcal{R}$ es transitiva. En efecto, si $(x,y) \in \mathcal{R}$ y $(y,z) \in \mathcal{R}$, entonces tenemos que $x > y$ e $y > z$, de donde sigue que $x > z$, i.e., $(x,z) \in \mathcal{R}$. Para ver que $\mathcal{R}$ es antisimétrica, notemos que no existe ningún par de enteros $x, y$ para los cuales se verifiquen simultáneamente las desigualdades $x > y$ e $y > x$. Luego, la condición

$$((x,y) \in \mathcal{R} \wedge (y,x) \in \mathcal{R}) \Rightarrow x = y,$$

se verifica trivialmente. Finalmente,

$$\begin{aligned} \mathcal{R}(1) &= \{y \in \mathbb{Z} : (1,y) \in \mathcal{R}\} \\ &= \{y \in \mathbb{Z} : 1 > y\} \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} \mathcal{R}^{-1}(1) &= \{x \in \mathbb{Z} : (x,1) \in \mathcal{R}\} \\ &= \{x \in \mathbb{Z} : x > 1\}. \end{aligned}$$

(d) Sea $\mathcal{R}$ la relación definida en $\mathbb{Z}$ por $(x,y) \in \mathcal{R}$ sii $x+y$ es par. $\mathcal{R}$ es reflexiva. En efecto, $x+x = 2x$ es par, cualquiera sea $x \in \mathbb{Z}$, i.e., para todo $x \in \mathbb{Z}$, $(x,x) \in \mathcal{R}$. $\mathcal{R}$ es simétrica (si $x+y$ es par, entonces $y+x$ es par). $\mathcal{R}$ es transitiva. Para ver esto, supongamos que $(x,y) \in \mathcal{R}$ y $(y,z) \in \mathcal{R}$. Luego, existen $k, j \in \mathbb{Z}$ tales que $x + y = 2k$ y $y + z = 2j$. Sumando miembro a miembro las igualdades anteriores tenemos que

$$x + y + y + z = 2k + 2j,$$

de donde sigue que

$$\begin{aligned} x + z &= 2k + 2j - 2y \\ &= 2(k + j - y). \end{aligned}$$

Esto muestra que $x + z$ es par, o equivalentemente, $(x,z) \in \mathcal{R}$. $\mathcal{R}$ no es antisimétrica ($(1,3) \in \mathcal{R}$ y $(3,1) \in \mathcal{R}$ pero $1 \neq 3$).

Los conjuntos $\mathcal{R}(1)$ y $\mathcal{R}^{-1}(1)$ están dados por

$$\begin{aligned} \mathcal{R}(1) &= \{y \in \mathbb{Z} : (1,y) \in \mathcal{R}\} \\ &= \{y \in \mathbb{Z} : 1 + y = 2k, k \in \mathbb{Z}\} \\ &= \{y \in \mathbb{Z} : y = 2k - 1, k \in \mathbb{Z}\}, \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} \mathcal{R}^{-1}(1) &= \{x \in \mathbb{Z} : (x,1) \in \mathcal{R}\} \\ &= \{x \in \mathbb{Z} : x + 1 = 2k, k \in \mathbb{Z}\} \\ &= \{x \in \mathbb{Z} : x = 2k - 1, k \in \mathbb{Z}\}, \end{aligned}$$

i.e., tanto $\mathcal{R}(1)$ como $\mathcal{R}^{-1}(1)$ están constituidos por los enteros impares.

14. Sea $A = \{1, 2, 3, 4\}$. Proporcionar ejemplos de relaciones en $A$ que tengan las propiedades especificadas en cada caso.

    *a*) Reflexiva, simétrica y no transitiva.

    *b*) Reflexiva, no simétrica y no antisimétrica.

    *c*) Reflexiva, antisimétrica y no transitiva.

    *d*) No reflexiva, simétrica y transitiva.

Solución:
Haremos solo los apartados a y b.

(a) Buscamos una relación $\mathcal{R}$ definida sobre $A$ que sea reflexiva, simétrica y no transitiva. Como queremos que $\mathcal{R}$ sea reflexiva, los elementos de la forma $(x, x)$, con $x \in A$, deben estar en $\mathcal{R}$, i.e., $\{(1,1), (2,2), (3,3), (4,4)\} \subseteq \mathcal{R}$. Notemos que si $\mathcal{R}$ fuese la relación $\mathcal{R} = \{(1,1), (2,2), (3,3), (4,4)\}$, resultaría reflexiva y simétrica pero también transitiva, por lo que debemos agregar algo más. Consideremos la relación

$$\mathcal{R} = \{(1,1), (1,3), (2,2), (2,3), (3,1), (3,2), (3,3), (4,4)\}.$$

Así definida, $\mathcal{R}$ satisface las condiciones que pide el enunciado. En efecto, $\mathcal{R}$ es, claramente, reflexiva y simétrica, pero $\mathcal{R}$ no es transitiva ($(1,3) \in \mathcal{R}$ y $(3,2) \in \mathcal{R}$, pero $(1,2) \notin \mathcal{R}$).

(b) Queremos definir en $A$ una relación que sea reflexiva, no simétrica y no antisimétrica. Veamos que la relación

$$\mathcal{R} = \{(1,1), (1,3), (2,2), (3,1), (3,2), (3,3), (4,4)\}$$

cumple con estos requisitos. $\mathcal{R}$ es, claramente, reflexiva. $\mathcal{R}$ no es simétrica ($(3,2) \in \mathcal{R}$, pero $(2,3) \notin \mathcal{R}$). $\mathcal{R}$ no es antisimétrica ($(1,3) \in \mathcal{R}$ y $(3,1) \in \mathcal{R}$, pero $1 \neq 3$).

17. Sea $A$ un conjunto finito no vacío con $|A| = n$. Determinar si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas justificando adecuadamente la respuesta.

    *a*) Si $\mathcal{R}$ es una relación reflexiva sobre $A$, entonces $|\mathcal{R}| \geq n$.

    *b*) Si $\mathcal{R}_1$ y $\mathcal{R}_2$ son relaciones en $A$ y $\mathcal{R}_1 \subseteq \mathcal{R}_2$ entonces, si $\mathcal{R}_1$ es reflexiva (simétrica, antisimétrica o transitiva), entonces $\mathcal{R}_2$ es reflexiva (resp. simétrica, antisimétrica o transitiva).

    *c*) Si $\mathcal{R}_1$ y $\mathcal{R}_2$ son relaciones en $A$ y $\mathcal{R}_1 \subseteq \mathcal{R}_2$ entonces, si $\mathcal{R}_2$ es reflexiva (simétrica, antisimétrica o transitiva), entonces $\mathcal{R}_1$ es reflexiva (resp. simétrica, antisimétrica o transitiva).

Solución:

(a) La afirmación es verdadera. En efecto, si $A = \{a_1, a_2, ..., a_n\}$, entonces, como $\mathcal{R}$ es una relación reflexiva sobre $A$, tenemos que $\{(a_1, a_1), (a_2, a_2), ..., (a_n, a_n)\} \subseteq \mathcal{R}$. Por lo tanto $|\mathcal{R}| \geq n$.

(b) Si $\mathcal{R}_1$ es reflexiva, entonces $\{(x,x) : x \in A\} \subseteq \mathcal{R}_1$ y como $\mathcal{R}_1 \subseteq \mathcal{R}_2$, resulta $\{(x,x) : x \in A\} \subseteq \mathcal{R}_2$, i.e., $\mathcal{R}_2$ es reflexiva. Por lo tanto la primera afirmación es verdadera.

Para mostrar que $\mathcal{R}_1$ puede ser simétrica o transitiva sin que necesariamente lo sea $\mathcal{R}_2$, consideremos las relaciones $\mathcal{R}_1$ y $\mathcal{R}_2$ definidas en $A = \{1, 2, 3\}$ por

$$\mathcal{R}_1 = \{(2,2), (2,3), (3,2), (3,3)\}$$

y

$$\mathcal{R}_2 = \{(1,3), (2,2), (2,3), (3,2), (3,3)\}$$

Claramente, $\mathcal{R}_1 \subseteq \mathcal{R}_2$, $\mathcal{R}_1$ es simétrica y además transitiva, mientras que $\mathcal{R}_2$ no es simétrica ni transitiva.

Para ver que $\mathcal{R}_1$ puede ser antisimétrica sin que necesariamente lo sea $\mathcal{R}_2$, consideremos las relaciones $\mathcal{R}_1$ y $\mathcal{R}_2$ definidas en $A = \{1, 2, 3\}$ por

$$\mathcal{R}_1 = \{(2,2)\,, (3,3)\}$$

y

$$\mathcal{R}_2 = \{(2,2)\,, (2,3)\,, (3,2)\,, (3,3)\}$$

Claramente, $\mathcal{R}_1 \subseteq \mathcal{R}_2$, $\mathcal{R}_1$ es antisimétrica, mientras que $\mathcal{R}_2$ no es antisimétrica.

(c) Veamos que $\mathcal{R}_2$ puede ser reflexiva sin que lo sea $\mathcal{R}_1$. Por ejemplo, si $\mathcal{R}_1$ y $\mathcal{R}_2$ son las relaciones definidas en $A = \{1, 2, 3\}$ por

$$\mathcal{R}_1 = \{(2,2)\,, (3,2)\,, (3,3)\}$$

y

$$\mathcal{R}_2 = \{(1,1)\,, (2,2)\,, (2,3)\,, (3,2)\,, (3,3)\}\,,$$

tenemos que $\mathcal{R}_1 \subseteq \mathcal{R}_2$ y $\mathcal{R}_2$ es reflexiva, mientras que $\mathcal{R}_1$ no lo es.

Para ver que si $\mathcal{R}_2$ es antisimétrica, entonces $\mathcal{R}_1$ también lo es, supongamos que $\mathcal{R}_2$ es antisimétrica y consideremos $x, y \in A$ tales que $(x, y) \in \mathcal{R}_1$ y $(y, x) \in \mathcal{R}_1$. Como $\mathcal{R}_1 \subseteq \mathcal{R}_2$, tenemos que $(x, y) \in \mathcal{R}_2$ y $(y, x) \in \mathcal{R}_2$. Luego, como supusimos que $\mathcal{R}_2$ es antisimétrica, resulta que $x = y$. En consecuencia, $\mathcal{R}_1$ también es antisimétrica.