Facultad de Ciencias Exactas, Ingeniería y Agrimensura

Departamento de Matemática - Escuela de Ciencias Exactas y Naturales

ANÁLISIS MATEMÁTICO II

Licenciatura y Profesorado en Física, Licenciatura en Ciencias de la Computación,

Licenciatura y Profesorado en Matemática - Año 2020

Práctica 7: Integrales impropias.

---

1. Determine $\int_1^\infty x^r\, dx$ si $r \neq -1$.

2. Demuestre que $\int_1^\infty \frac{1}{x}\, dx$ no existe (es divergente).

3. Suponga que $f(x) \geq 0$ para $x \geq a$ y que existe $\int_a^\infty f(x)\, dx$. Demuestre que si g es integrable en $[a, x]$ para cada x y $0 \leq g(x) \leq f(x)$ para todo $x \geq a$, entonces existe $\int_a^\infty g(x)\, dx$.

4. Demuestre que existen las integrales
$$\int_0^\infty \frac{1}{1+x^2}\, dx \qquad\qquad \int_{-\infty}^\infty \frac{1}{1+x^2}\, dx.$$

5. Demuestre que si existe $\int_{-\infty}^\infty f(x)\, dx$ entonces existe $\lim_{N\to\infty} \int_{-N}^N f(x)\, dx$ y coincide con $\int_{-\infty}^\infty f(x)\, dx$. Demuestre además que $\lim_{N\to\infty} \int_{-N}^{N+1} f(x)\, dx$ existe y coincide con $\int_{-\infty}^\infty f(x)\, dx$.

6. Halle $\int_0^a \frac{1}{\sqrt{x}}\, dx$ para $a > 0$.

7. Halle $\int_0^a \frac{1}{x^r}\, dx$ para $a > 0$ y $0 < r < 1$.

8. Halle $\int_a^0 |x|^r\, dx$ para $a < 0$ y $-1 < r < 0$.

9. Si f es continua en $[0, 1]$, calcule $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} x \int_x^1 \frac{f(t)}{t}\, dt$.

10. Si f es integrable en $[0, 1]$ y $\lim_{x\to 0} f(x)$ existe, calcule $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} x \int_x^1 \frac{f(t)}{t^2}\, dt$.

11. Demuestre que $\int_0^\infty x^r\, dx$ nunca tiene sentido. Distinga los casos $r > 0$, $-1 < r < 0$ y $r < -1$.

12. Decida si existen las siguientes integrales impropias:
$$\int_0^\infty \frac{1}{\sqrt{1+x^3}}\, dx, \qquad\qquad \int_0^\infty \frac{x}{1+x^{3/2}}\, dx.$$