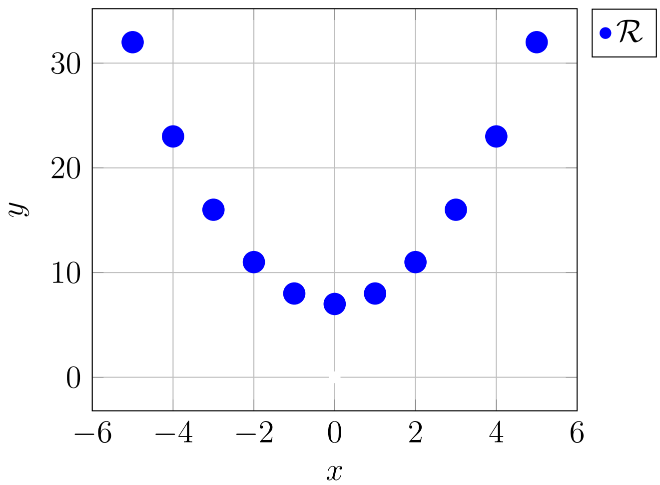
Álgebra y Geometría Analítica I

Funciones - Resolución de ejercicios selectos

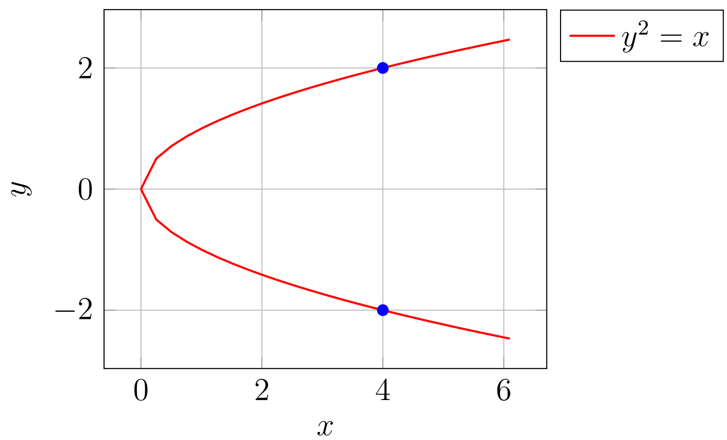
1. Determinar si cada una de las siguientes relaciones es una función. En caso que lo sea, determinar su imagen.
   (a) $\mathcal{R} = \{(x, y) : x, y \in \mathbb{Z}; y = x^2 + 7\}, \mathcal{R}$ es una relación de $\mathbb{Z}$ en $\mathbb{Z}$.
   (b) $\mathcal{R} = \{(x, y) : x, y \in \mathbb{R}; y^2 = x\}, \mathcal{R}$ es una relación de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$.
   (c) $\mathcal{R} = \{(x, y) : x, y \in \mathbb{R}; y = 3x + 1\}, \mathcal{R}$ es una relación de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$.
   (d) $\mathcal{R} = \{(x, y) : x, y \in \mathbb{Q}; x^2 + y^2 = 1\}, \mathcal{R}$ es una relación de $\mathbb{Q}$ en $\mathbb{Q}$.

Solución:

(a) $\mathcal{R}$ es función.
$Im(R) = \{7, 8, 11, 16, 23, 32, \dots\}$



(b) $\mathcal{R}$ no es función porque para $x > 0$ todos los pares ordenados (x, y) de la forma $(x, \sqrt{x})$ y $(x, -\sqrt{x})$ satisfacen que $y^2 = x$ a la relación, por lo tanto para cada valor de x existen dos pares ordenados que .
Por ejemplo, en la gráfica podemos ver que los pares $(4, 2)$ y $(4, -2)$ pertenecen a $\mathcal{R}$.

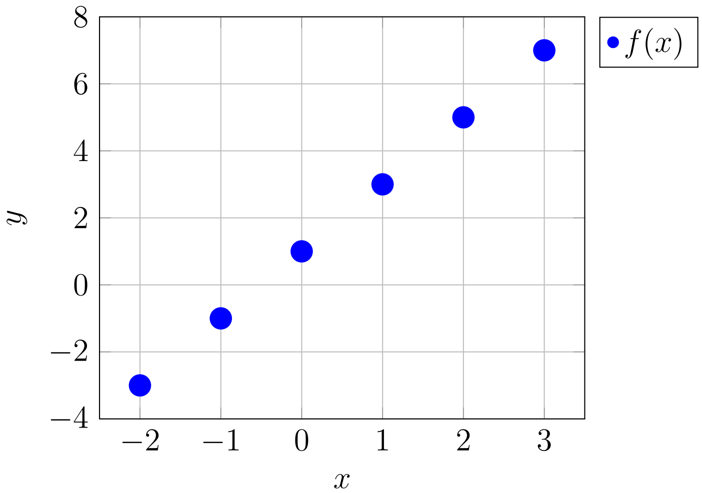


3. Para cada una de las siguientes funciones, determinar $Im(f)$, $f(A)$ y $f^{-1}(B)$ para los subconjuntos A y B indicados.
   (a) $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}, f(x) = 2x + 1,\ A = \{1, 2, 3\},\ B = \{7, 8, 9\}$.
   (b) $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}, f(x) = x^3 - x,\ A = \{-2, -1, 0, 1, 2\},\ B = \{-5, -4, -3\}$.
   (c) $f : \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \to \mathbb{R}, f(x) = \operatorname{sen} x,\ A = \left[0, \frac{\pi}{2}\right],\ B = [-1, 0]$.
   (d) $f : \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}, f(x) = 2x,\ A = \{2^{-n} : n \in \mathbb{Z}\},\ B = \{4^n : n \in \mathbb{Z}\}$
   (e) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = x^2,\ A = [1, +\infty),\ B = [4, 9]$.

Solución:

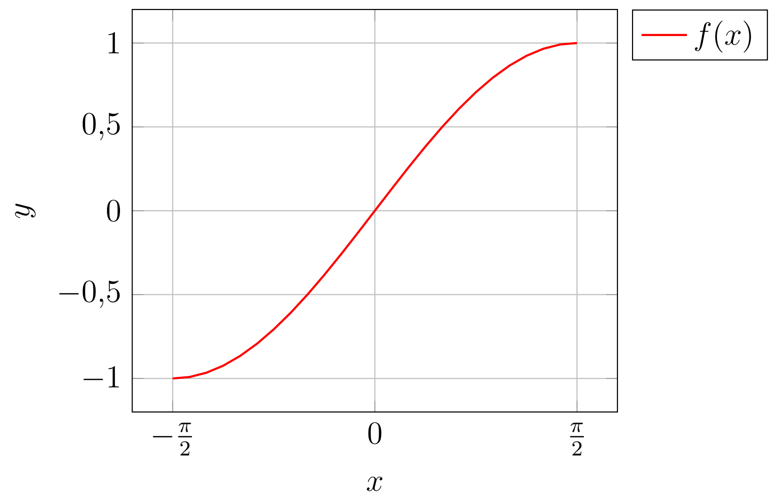
(a) $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}, f(x) = 2x + 1,\ A = \{1, 2, 3\},\ B = \{7, 8, 9\}$.

$Im(f) = \{2x + 1, x \in \mathbb{Z}\}$. El conjunto imagen de f está formado por todos los números enteros impares.
$f(A) = \{3, 5, 7\}$
$f^{-1}(B) = \{3, 4\}$.



(c) $f : \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \to \mathbb{R}, f(x) = \operatorname{sen} x,\ A = \left[0, \frac{\pi}{2}\right],\ B = [-1, 0]$.

$Im(f) = [-1, 1]$.
$f(A) = [0, 1]$
$f^{-1}(B) = \left[-\frac{\pi}{2}, 0\right]$



5. Dar un ejemplo de una función $f : A \to B$ y de dos subconjuntos A_1, A_2 de A de modo que $f(A_1 \cap A_2) \neq f(A_1) \cap f(A_2)$.

Solución:

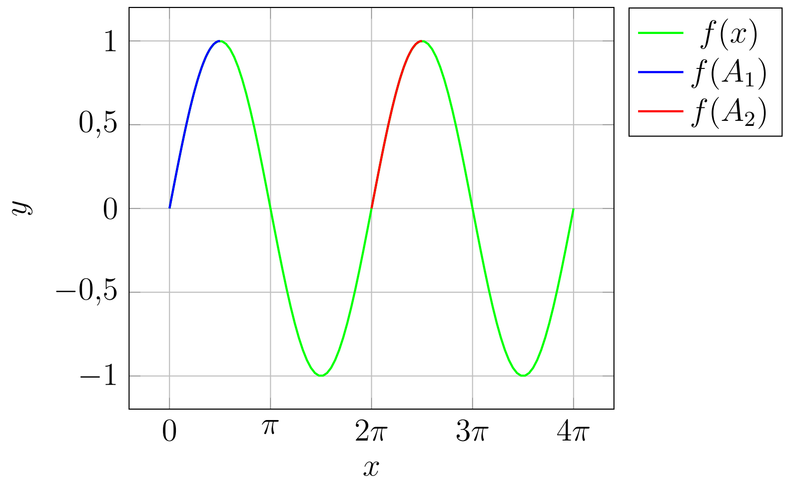
Podemos tomar la función $f : \mathbb{R} \to [-1, 1]\,, f(x) = \operatorname{sen}(x)$ y los subconjuntos $A_1 = \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ y $A_2 = \left[2\pi, \frac{5\pi}{2}\right]$.

Tenemos que:

$$A_1 \cap A_2 = \emptyset \Rightarrow f(A_1 \cap A_2) = \emptyset$$

mientras que:

$$f(A_1) = f(A_2) = [0, 1] \Rightarrow f(A_1) \cap f(A_2) = [0, 1]$$



7. Dar, en cada caso, un ejemplo de conjuntos finitos A y B con $|A|$, $|B| \geqq 4$, y una función f tal que:

(a) f no sea inyectiva ni sobre;
(b) f sea inyectiva pero no sobre;
(c) f sea sobre pero no inyectiva;
(d) f sea sobre e inyectiva.

Solución:

(a) Si $A = \{1, 2, 3, 4\}$, $B = \{w, x, y, z\}$ y $f = \{(1, w), (2, x), (3, w), (4, x)\}$
f no es *inyectiva* ni *sobre*.

(b) Si $A = \{1, 2, 3, 4\}$, $B = \{w, x, y, z, v\}$ y $f = \{(1, w), (2, x), (3, y), (4, z)\}$
f es *inyectiva* pero no *sobre*.

(c) Si $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $B = \{w, x, y, z\}$ y $f = \{(1, w), (2, x), (3, y), (4, z), (5, z)\}$
f es *sobre* pero no *inyectiva*.

9. Determinar si cada una de las siguientes funciones $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ es inyectiva y/o sobreyectiva. En caso de que no sea sobre, determinar su imagen.

(a) $f(x) = x + 7$
(b) $f(x) = x^2$
(c) $f(x) = 2x - 3$
(d) $f(x) = -x + 5$
(e) $f(x) = x^2 + x$
(f) $f(x) = x^3$

Solución:

(a) f es *inyectiva* y *sobre*.

(b) f no es *inyectiva* y tampoco *sobre*.
$Im(f) = \mathbb{Z}_0^+$
No es inyectiva porque x y $-x$ tienen la misma imagen, es decir, $f(x) = f(-x)$.
No es sobre porque los enteros negativos no forman parte del conjunto $Im(f)$.

(c) f es *inyectiva* pero no *sobre*.
$Im(f) = \{y : y = 2n + 1, n \in \mathbb{Z}\}$, es decir, el conjunto imagen de f está formado por los números enteros impares.