Facultad de Ciencias Exactas, Ingeniería y Agrimensura
Departamento de Matemática – Escuela de Ciencias Exactas y Naturales
ÁLGEBRA Y GEOMETRÍA ANALÍTICA I

Lista de ejercicios N°3: Relaciones

1. Si $U = \mathbb{N}$, $A = \{1, 2, 3, 4\}$, $B = \{2, 5\}$ y $C = \{3, 4, 7\}$, determinar los siguientes conjuntos, graficarlos como subconjuntos del plano y hallar dominio e imagen:

   a) $A \times B$
   b) $B \times A$
   c) $(A \times A) \cup (B \times C)$
   d) $(A \cup B) \times C$
   e) $(A \times C) \cup (B \times C)$

2. Sean $U = \mathbb{R}$, $A = [1, 2)$, $B = [2, 3]$, $C = (\frac{3}{2}, 3) \subseteq \mathbb{R}$. Determinar gráficamente en $\mathbb{R}^2$:

   a) $A \times C$
   b) $B \times C$
   c) $(A \cup B) \times C$
   d) $(A \times C) \cup (B \times C)$
   e) $(A \cap C) \times C$

   En cada caso determinar un punto del plano que pertenezca al conjunto dado y uno que no.

3. Sean A, B, C, D subconjuntos no vacíos de un universo U. Demostrar que
   a) $A \times (B - C) = (A \times B) - (A \times C)$.
   b) $A \times B \subseteq C \times D$ si y sólo si $A \subseteq C$ y $B \subseteq D$.
4. *a*) ¿Para qué conjuntos $A, B \subseteq U$ se verifica $A \times B = B \times A$?
   b) ¿Existe alguna relación entre $P(A \times B)$ y $P(A) \times P(B)$?

5. Si $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{2, 4, 5\}$ dar ejemplos de:
   a) Tres relaciones binarias no vacías de A en B. Graficar $A \times B$ y las tres relaciones como subconjuntos del plano.
   b) Tres relaciones binarias no vacías en A. Graficar $A^2 = A \times A$ y las tres relaciones como subconjuntos del plano.
6. Sean $A = \{0, 1, 2, 3, 4\}$, $B = \{3, 4, 5, 6\}$, expresar por extensión el subconjunto R de $A \times B$ definido por:

   a) $(x, y) \in R$ si y sólo si $x + y$ es múltiplo de 3.
   b) xRy si y sólo si $y - x$ es primo.

7. Sea $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$. Expresar por extensión el subconjunto R de $A \times A$ definido por las relaciones siguientes:

   a) $(x, y) \in R$ si $x + y \leq 6$.
   b) $x\ R\ y$ si $x = y - 1$.

8. Esbozar la gráfica de cada una de las relaciones siguientes de A en B y determinar su imagen.
   a) $\{(x, y)/x < y \leq 0\}$ $A = \mathbb{R}$ $B = \mathbb{R}$
   b) $\{(2, 1), (3, 4), (1, 4), (2, 1), (4, 4)\}$ $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ $B = \{1, 2, 3, 4\}$
   c) $\{(x, y)/0 \leq x < 1, y \geq x\}$ $A = \mathbb{R}$ $B = \mathbb{R}$
   d) $\{(x, y)/x \in \mathbb{N}, y = \sqrt{x}\}$ $A = \mathbb{R}$ $B = \mathbb{R}$
   e) $\{(x, y)/x \in \mathbb{N}, y = \sqrt{x}\}$ $A = \mathbb{N}$ $B = \mathbb{R}$
   f) $\{(x, \sqrt{x}), x \in \mathbb{R}\}$ $A = \mathbb{R}$ $B = \mathbb{R}_0^+$
9. Para cada una de las relaciones de los ejercicios 6 y 7 determinar $R(1)$, $R(3)$, $R^{-1}(4)$, $R^{-1}(5)$.

10. Con referencia a las relaciones del ejercicio 8, hallar:
    a) En (a), $R((-1,\frac{1}{2}))$, $R([-3,5])$, $R(\mathbb{Z})$, $R^{-1}([-4,2])$, $R^{-1}(\{-7\})$, $R^{-1}(\mathbb{N})$
    b) En (b), $R(\{5\})$, $R(\{2,3,5\})$, $R()$, $R^{-1}(\{1,3\})$, $R^{-1}(\{1\})$, $R^{-1}()$
    c) En (d), $R((5,6))$, $R([3,5])$, $R((3,5))$, $R^{-1}(\mathbb{R}_0^+)$, $R^{-1}((-4,4])$, $R^{-1}((1,\frac{12}{10}))$

11. Sean A, B y C conjuntos, R una relación de A en B y S una relación de B en C. Hallar, en cada caso $S\circ R$ y $R^{-1}\circ S^{-1}$ sus dominios e imágenes.
    a) $A=\{1,2,3\}$, $B=\{1,2,3,4\}$ y $C=\{0,1,2\}$.
    $R=\{(1,1),(1,4),(2,3),(3,1),(3,4)\}$, $S=\{(1,0),(2,0),(3,1),(3,2),(4,1)\}$
    b) $A=\{1,2,3\}$, $B=\{2,4,6,8\}$ y $C=\{s,t,u\}$.
    $R=\{(1,2),(1,6),(2,4),(3,4),(3,6),(3,8)\}$, $S=\{(2,u),(4,s),(4,t),(6,t),(8,u)\}$
    c) $A=\{a,b,c,d\}$, $B=\{s,t,u,v\}$ y $C=\{1,2,3,4,5\}$.
    $R=\{(a,s),(a,t),(c,v),(d,u)\}$, $S=\{(s,2),(t,1),(t,4),(u,3)\}$

12. Sean $A=\{1,2,4\}$, $B=\{1,3,4\}$ y sean $R=\{(1,3),(1,4),(4,4)\}$ una relación de A en B y $S=\{(1,1),(3,4),(3,2)\}$ una relación de B en A. Hallar:
    a) $S\circ R$
    b) $R\circ S$
    c) $Dom(S\circ R)$
    d) $Dom(R\circ S)$
    e) $Im(S\circ R)$
    f) $Im(R\circ S)$

Relaciones en un conjunto

13. En cada uno de los siguientes casos, determinar si la relación R definida en $\mathbb{Z}$ es reflexiva, simétrica, transitiva o antisimétrica. Para los casos a,b,c,d y e determinar $R(1)$ y $R^{-1}(1)$.
    a) $(x,y)\in R$ si $x=y^2$;
    b) $(x,y)\in R$ si $x>y$;
    c) $(x,y)\in R$ si $x\geq y$;
    d) $(x,y)\in R$ si $x+y$ es par;
    e) $(x,y)\in R$ si $x-y$ es impar;
    f) $(x,y)\in R$ si x^3+y^3 es par.

14. Sea $A=\{1,2,3,4\}$. Proporcionar ejemplos de relaciones en A que tengan las propiedades especificadas en cada caso.
    a) Reflexiva, simétrica y no transitiva.
    b) Reflexiva, no simétrica y no antisimétrica.
    c) Reflexiva, antisimétrica y no transitiva.
    d) No reflexiva, simétrica y transitiva.

15. Sean R_1 y R_2 relaciones reflexivas en un conjunto A. Determinar si cada una de las siguientes proposiciones son verdaderas o falsas justificando adecuadamente la respuesta:
    a) $R_1\cup R_2$ es reflexiva;
    b) $R_1\cap R_2$ es reflexiva;
    c) $R_1\circ R_2$ es reflexiva.

16. Repetir el ejercicio anterior cambiando "reflexiva"por simétrica, antisimétrica o transitiva.

17. Sea A un conjunto finito no vacío con $|A|=n$. Determinar si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas justificando adecuadamente la respuesta.
    a) Si R es una relación reflexiva sobre A, entonces $|R|\geq n$.
    b) Si R_1 y R_2 son relaciones en A y $R_1\subseteq R_2$ entonces, si R_1 es reflexiva (simétrica, antisimétria o transitiva), entonces R_2 es reflexiva (resp. simétrica, antisimétria o transitiva).
    c) Si R_1 y R_2 son relaciones en A y $R_1\subseteq R_2$ entonces, si R_2 es reflexiva (simétrica, antisimétria o transitiva), entonces R_1 es reflexiva (resp. simétrica, antisimétria o transitiva).

Relaciones de equivalencia

18. Determinar si cada una de las colecciones dadas a continuación es o no una partición del conjunto A dado. Justificar por qué.
    a) $A = \{1,2,3,4,5,6,7,8\}$, $A_1 = \{4,5,6\}$, $A_2 = \{1,8\}$, $A_3 = \{2,3,7\}$.
    b) $A = \{1,2,3,4,5,6,7,8\}$, $A_1 = \{1,3,4,7\}$, $A_2 = \{2,6\}$, $A_3 = \{5,8\}$.
    c) $A = \mathbb{Z}$, $A_n = \{-n, n\}$, $n \in \mathbb{Z}$.
    d) $A = \mathbb{Z}$, $A_n = \{-n, n\}$, $n \in \mathbb{N}_0$.
    e) $A = \mathbb{R}$, $A_n = (n, n^2)$, $n \in \mathbb{Z}$.
    f) $A = \mathbb{R}$, $B = \mathbb{Z}$, $A_n = (n, n+1)$, $n \in \mathbb{Z}$, $\mathcal{P} = \{B\} \cup \{A_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$.
    g) $A = \mathbb{C}$, $A_n = \{z \in \mathbb{C} : n-1 < z \leq n\}$, $n \in \mathbb{N}$.
19. Analizar, en cada caso, si la relación dada en el conjunto A indicado es de equivalencia. En caso de serlo, describir su conjunto cociente.
    a) $A = \mathbb{R}$, $xRy \Leftrightarrow x - y \in \mathbb{Q}$.
    b) $A = \mathbb{Z}$, $xRy \Leftrightarrow x - y$ es un entero par.
    c) $A = \mathbb{Z}$, $p \in \mathbb{N}$ fijo, $xRy \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z}/x - y = kp$.
    d) $A = \mathbb{R}$, $xRy \Leftrightarrow xy > 0$.
    e) $A = \mathbb{R}$, $xRy \Leftrightarrow xy \geq 0$.
    f) $A = \{1,2,3,4,5,6\}$, $xRy \Leftrightarrow x = y$ o $x + y = 5$.
20. Sea $A = \{1,2,3,4,5\}$, y R la relación de equivalencia en A que induce la partición $A = \{1,2\} \cup \{3,4\} \cup \{5\}$. Dar R por extensión y determinar $R(1)$, $R^{-1}(1)$.
21. En $A = \{1,2,3,4,5,6\}$ tenemos la relación de equivalencia

$$R = \{(1,1),(1,2),(2,1),(2,2),(3,3),(4,4),(4,5),(5,4),(5,5),(6,6)\}.$$

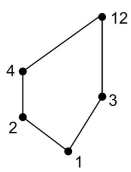
    a) Determinar $[1]$, $[2]$ y $[3]$.
    b) Determinar la partición de A que induce R.
    c) Determinar $R(1)$ y $R^{-1}(2)$.
22. Mostrar que para una relación de equivalencia R en A, para cada $x \in A$ $R(x) = R^{-1}(x) = [x]$.
23. Si $A = A_1 \cup A_2 \cup A_3$, donde $A_1 = \{1,2\}$, $A_2 = \{2,3,4\}$ y $A_3 = \{5\}$, definimos la relación R en A por

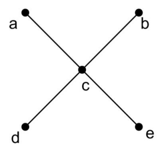
$$x\ R\ y \text{ si están en el mismo subconjunto } A_i, \text{ para algún } i \in \{1,2,3\}.$$

    ¿Es R una relación de equivalencia?
24. Para $A = \mathbb{R}^2$ definimos R en A por $(x_1, y_1)\ R\ (x_2, y_2)$ si $x_1 = x_2$.
    a) Verificar que R es una relación de equivalencia en A.
    b) Describir geométricamente las clases de equivalencia y la partición de A inducida por R.
25. Definimos la relación R en $\mathbb{N}$ por $x\ R\ y$ si $x/y = 2^n$ para algún $n \in \mathbb{Z}$.
    a) Verificar que R es una relación de equivalencia.
    b) ¿Cuántas clases distintas encontramos entre $[1]$, $[2]$, $[3]$ y $[4]$?
26. Considerar en $\mathbb{Z}$ la relación de congruencia módulo n, esto es, $x\ R\ y$ si $x - y$ es múltiplo de n.
    a) Mostrar que R es una relación de equivalencia.
    b) Mostrar que R induce la partición $\mathbb{Z} = [0] \cup [1] \cup \cdots \cup [n-1] = \cup_{i=0}^{n-1}[i]$.

Relaciones de orden

27. Determinar el diagrama de Hasse para el conjunto parcialmente ordenado $(P(X), \subseteq)$, con $X = \{1,2,3,4\}$.
28. Sea $A = \{1,2,3,6,9,18\}$ y R la relación en A dada por $x\ R\ y$ si x divide a y. Mostrar que es una relación de orden y trazar el diagrama de Hasse correspondiente.
29. Los siguientes son diagramas de Hasse correspondientes a un conjunto parcialmente ordenado (A, R). Determinar A y R en cada caso.





30. Definimos en $\mathbb{C}$ la relación $z_1 R z_2$ si $|z_1| \leq |z_2|$. ¿Es una relación de orden? Determinar sus propiedades. Dado z_0 fijo, determinar geométricamente el conjunto $B_1 = \{z \in \mathbb{C} : z \ R \ z_0\}$ y $B_2 = \{z \in \mathbb{C} : z_0 \ R \ z\}$.
31. Determinar los elementos maximales, minimales, máximos y mínimos de cada una de las relaciones de los ejercicios 27, 28 y 29.
32. Sea $X = \{1, 2, 3, 4\}$ y consideremos el conjunto parcialmente ordenado $(A, \subseteq)$, con $A = \mathcal{P}(X)$. Para cada uno de los siguientes subconjuntos B de A, determine el ínfimo y el supremo de B.

    a) $B = \{\{1\}, \{2\}\}$;
    b) $B = \{\{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}\}$;
    c) $B = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{1, 2\}\}$;
    d) $B = \{\{1\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{1, 2, 3\}\}$;
    e) $B = \{\{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}\}$;
    f) $B = \{\{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, \{1, 2, 3\}\}$.

33. Definimos en $\mathbb{Z}$ la relación $\mathbb{R}$ por $x \ R \ y$ si $x - y$ es un entero par no negativo. Probar que R es un orden parcial en $\mathbb{Z}$. ¿Es un orden total?
34. Dados dos conjuntos X_1 y X_2, sean R_1 un orden parcial en X_1 y R_2 un orden parcial sobre X_2. Probar que R es un orden parcial en $X_1 \times X_2$, donde
$$(x_1, x_2) \ R \ (y_1, y_2) \text{ si } x_1 \ R_1 \ y_1 \text{ y } x_2 \ R_2 \ y_2.$$
35. Probar que $(\mathbb{R}, \leq)$ es totalmente ordenado. ¿Lo es $(\mathbb{R}^2, R)$, donde R es la relación definida en el ejercicio 34?
36. Sea (X, R) un conjunto parcialmente ordenado ordenado y $B \subseteq X$.
    a) Mostrar que $R_B = (B \times B) \cap R$ define un orden parcial en B.
    b) Mostrar que si (X, R) es totalmente ordenado, entonces (B, R_B) es totalmente ordenado.
    c) Si (X, R) no es totalmente ordenado, ¿implica esto que (B, R_B) no es totalmente ordenado?
37. Sea (A, R) un conjunto parcialmente ordenado. Decimos que (A, R) es un *retículo* si dados $x, y \in A$ cualesquiera, $\sup\{x, y\}$ e $\inf\{x, y\}$ existen en A.
    a) Mostrar que $(\mathbb{R}, \leq)$, $(\mathbb{Q}, \leq)$, $(\mathbb{N}, \leq)$ son retículos.
    b) Mostrar que si $X \neq \emptyset$, $(\mathcal{P}(X), \subseteq)$ es un retículo.
    c) Determinar si los conjuntos parcialmente ordenados del ejercicio 29 son retículos.
    d) Probar que todo orden total es un retículo. ¿Es un retículo un conjunto totalmente ordenado?
38. Sean (X_1, R_1), (X_2, R_2) conjuntos parcialmente ordenados y consideremos el conjunto parcialmente ordenado $(X_1 \times X_2, R)$ definido en el ejercicio 34. Determinar si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas justificando adecuadamente la respuesta.
    a) Si x_0 es un elemento maximal (o minimal) para (X_1, R_1) e y_0 es un elemento maximal (o minimal) para (X_2, R_2) entonces (x_0, y_0) es un elemento maximal (o minimal) para $(X_1 \times X_2, R)$.
    b) Si x_0 es máximo (o mínimo) para (X_1, R_1) e y_0 es un máximo (o mínimo) para (X_2, R_2) entonces (x_0, y_0) es un máximo (o mínimo) para $(X_1 \times X_2, R)$.
    c) Si (X_1, R_1) y (X_2, R_2) son totalmente ordenados, entonces $(X_1 \times X_2, R)$ es totalmente ordenado.
    d) Sean $B_1 \subset X_1$ y $B_2 \subset X_2$. Si b_1 es cota superior (o inferior) de B_1 y b_2 es cota superior (o inferior) de B_2, entonces (b_1, b_2) es cota superior (o inferior) de $B_1 \times B_2$.
    e) Sean $B_1 \subset X_1$ y $B_2 \subset X_2$. Si b_1 es supremo (o ínfimo) de B_1 y b_2 es supremo (o ínfimo) de B_2, entonces (b_1, b_2) es supremo (o ínfimo) de $B_1 \times B_2$.
    f) Si (X_1, R_1) y (X_2, R_2) son retículos, entonces $(X_1 \times X_2, R)$ es un retículo.
39. Sea (A, R) un conjunto totalmente ordenado. Se dice que (A, R) está *bien ordenado* si para todo $B \subseteq A$, con $B \neq \emptyset$, el conjunto totalmente ordenado (B, R_B) definido en el ejercicio 36 tiene un elemento mínimo. Determinar si los siguientes conjuntos totalmente ordenados están bien ordenados.
    a) $(\mathbb{N}, \leq)$;
    b) $(\mathbb{Z}, \leq)$;
    c) $(\mathbb{Q}, \leq)$;
    d) $(P, \leq)$, donde P es el conjunto de todos los primos;
    e) $(A, \leq)$, donde A es un subconjunto no vacío de $\mathbb{N}$;
    f) $(A, \leq)$, donde A es un subconjunto no vacío finito de $\mathbb{Z}$.