Unidad 6: Inducción

Iker M. Canut

14 de julio de 2020

Objetivo general: Demostrar enunciados del estilo: $\forall n, P(n)$, donde $P(n)$ es una proposición que depende del numero natural n.

Axiomas: $\forall a, b, c \in \mathbb{R}$:

$S_1)$ $(a+b)+c = a+(b+c)$

$P_1)$ $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$

$S_2)$ $(a+b) = (b+a)$

$P_2)$ $(a \cdot b) = (b \cdot a)$

$S_3)$ $\exists 0 \in \mathbb{R} : a + 0 = a$

$P_3)$ $\exists 1 \in \mathbb{R} : 1 \neq 0 \wedge a \cdot 1 = a$

$S_4)$ $\exists -a \in \mathbb{R} : a + (-a) = 0$

$P_4)$ $(a \neq 0) \Rightarrow \exists a^{-1} \in \mathbb{R} : a \cdot a^{-1} = 1$

$D)$ $a \cdot (b+c) = a \cdot b + a \cdot c$

$O_1)$ $(a = b) \veebar (a < b) \veebar (a > b)$

$O_2)$ $[(a < b) \wedge (b < c)] \Rightarrow (a < c)$

CS $(a < b) \Rightarrow (a + c < b + c)$

CP $[(a < b) \wedge (0 < c)] \Rightarrow (a \cdot c) < (b \cdot c)$

AS *Axioma del Supremo*

....

Un subconjunto $H \subset \mathbb{R}$ se llama **inductivo** si:

- $1 \in H$
- $x \in H \Rightarrow x + 1 \in H$

....

Lema 1: *La intersección de una familia arbitraria de subconjuntos inductivos de $\mathbb{R}$ es un subconjunto inductivo.* Se demuestra considerando una familia $\{X_i : i \in I\}$ en donde $X_i \subset \mathbb{R}$ es inductivo $\forall i \in I$. Entonces tenemos que:

- $1 \in X_i$ $\forall i \in I$, luego $1 \in \bigcap_{i \in I} X_i$
- Si $x \in X_i \Rightarrow x + 1 \in X_i$ $\forall i \in I$, luego $x \in \bigcap_{i \in I} Xi \Rightarrow x + 1 \in \bigcap_{i \in I} X_i$

Entonces tenemos que $\bigcap_{i \in I} X_i$ es un subconjunto inductivo.

....

Se define a $\mathbb{N}$ como la intersección de todos los subconjuntos inductivos de $\mathbb{R}$. Como el único valor que **debe** estar por definición es el 1 (y sus sucesores), entonces $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, 5...\}$

....

Teorema: Principio de Inducción: Sea $P(n)$ una proposición que depende de $n \in \mathbb{N}$. Si:

1. $P(1)$ es verdadera
2. $P(k) \Rightarrow P(k+1)$ $\forall k \in \mathbb{N}$

Entonces $P(n)$ es verdadera $\forall n \in \mathbb{N}$.

Se demuestra considerando $H = \{k \in \mathbb{N} : P(k) \text{ es verdadera}\}$. Sabemos que $1 \in H$ y que si $k \in H \Rightarrow k + 1 \in H$. Luego, H es un subconjunto inductivo de $\mathbb{R}$, contenido en $\mathbb{N}$. Y como $\mathbb{N}$ es el menor de subconjunto inductivo de $\mathbb{R}$, resulta $H = \mathbb{N}$ y $\therefore$ $P(n)$ es verdadera $\forall n \in \mathbb{N}$.

....

Teorema: Sea $P(n)$ una proposición que depende de $n \in \mathbb{N}$. Si:

1. $P(n_0)$ es verdadera
2. $P(k) \Rightarrow P(k+1)$ $\forall k \geq n_0$

Entonces $P(n)$ es verdadera $\forall k \geq n_0$

Se demuestra considerando $Q(n) = P(n_0 + n - 1)$. Luego sabemos que $Q(1) = P(n_0)$ es verdadera. Y sea $k \geq 1$, vemos que si $Q(k) = P(n_0 + k - 1)$ es verdadera, entonces $Q(k+1) = P(n_0 + k)$ también lo es. Y por el principio de inducción, $Q(n)$ es verdadera $\forall n \in \mathbb{N}$. I.e $P(n)$ es verdadera $\forall n \geq n_0$.