Facultad de Ciencias Exactas, Ingeniería y Agrimensura

Escuela de Ciencias Exactas

Departamento de Matemática

Álgebra y Geometría analítica I - 2020

Ejercicios resueltos

17. Dados dos conjuntos A y B cualesquiera, demostrar que las siguientes proposiciones son equivalentes:

   a) $A \subseteq B$

   b) $A \cup B = B$

   c) $A \cap B = A$

Tenemos que probar que las proposiciones (a), (b) y (c) son equivalentes, i.e.,(a)⇔(b)⇔(c). Para esto es suficiente con probar la siguiente cadena de implicaciones (a)⇒(b)⇒(c)⇒(a) (¿por qué?).

(a)⇒(b)

Notemos que la inclusión $B \subseteq A \cup B$ se verifica trivialmente. Luego, para mostrar que $A \cup B = B$ será suficiente con probar que $A \cup B \subseteq B$. Para esto consideremos $x \in A \cup B$ y veamos que $x \in B$.

$$x \in A \cup B \Rightarrow x \in A \vee x \in B \underset{A \subseteq B}{\Rightarrow} x \in B \vee x \in B \Rightarrow x \in B.$$

Como x es arbitrario, tenemos que $A \cup B \subseteq B$ y, en consecuencia, $A \cup B = B$.

(b)⇒(c)

Consideremos $x \in A$ y veamos que $x \in A \cap B$.

$$x \in A \underset{A \subseteq A \cup B}{\Rightarrow} x \in A \wedge x \in A \cup B \underset{A \cup B = B}{\Rightarrow} x \in A \wedge x \in B \Rightarrow x \in A \cap B.$$

Esto muestra que $A \subseteq A \cap B$ y, como $A \cap B \subseteq A$, tenemos que $A = A \cap B$.

(c)⇒(a)

Para ver que $A \subseteq B$, consideremos $x \in A$ y veamos que $x \in B$.

$$x \in A \underset{A = A \cap B}{\Rightarrow} x \in A \cap B \underset{A \cap B \subseteq B}{\Rightarrow} x \in B.$$

Esto completa la prueba.

19. Determinar qué relación existe entre $P(A \cup B)$ con $P(A) \cup P(B)$ y entre $P(A \cap B)$ con $P(A) \cap P(B)$.

Primero, recordemos que si A es un conjunto, $P(A)$ denota al conjunto de todos los subconjuntos de A, i.e.,

$$P(A) = \{X : X \subseteq A\}.$$

El problema que nos planteamos es el siguiente: si A y B son dos conjuntos, ¿cuál es la relación entre $P(A \cup B)$ y $P(A) \cup P(B)$?,¿vale la igualdad $P(A \cup B) = P(A) \cup P(B)$?,¿vale alguna de las contenciones $P(A \cup B) \subseteq P(A) \cup P(B)$ y $P(A) \cup P(B) \subseteq P(A \cup B)$?, análogamente, ¿cuál es la relación entre $P(A \cap B)$ y $P(A) \cap P(B)$?

Consideremos los conjuntos $P(A \cup B)$ y $P(A) \cup P(B)$ y veamos que la igualdad $P(A \cup B) = P(A) \cup P(B)$ no es cierta en general. Por ejemplo, si $A = \{a, b\}$ y $B = \{c, d\}$, entonces tenemos que el conjunto $C = \{a, c\} \subseteq A \cup B$, y en consecuencia, $C \in P(A \cup B)$, mientras que $C \notin P(A) \cup P(B) = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{d\}, \{a, b\}, \{c, d\}\}$. Este ejemplo muestra que la contención $P(A \cup B) \subseteq P(A) \cup P(B)$ no es cierta en general. De hecho, no es difícil de probar que $P(A \cup B) \subseteq P(A) \cup P(B)$ si y sólo si $A \subseteq B$ o $B \subseteq A$[1]. Sin embargo, la contención $P(A) \cup P(B) \subseteq P(A \cup B)$ vale siempre. En efecto, cualesquiera sean los conjuntos A y B, tenemos que

$$\begin{aligned} X \in P(A) \cup P(B) &\Rightarrow X \in P(A) \vee X \in P(B) \\ &\Rightarrow X \subseteq A \vee X \subseteq (B) \\ &\Rightarrow X \subseteq A \cup B \\ &\Rightarrow X \in P(A \cup B). \end{aligned}$$

Para el caso de la intersección, el siguiente argumento muestra que vale la igualdad $P(A \cap B) = P(A) \cap P(B)$.

$$\begin{aligned} X \in P(A \cap B) &\Leftrightarrow X \subseteq A \cap B \\ &\Leftrightarrow X \subseteq A \wedge X \subseteq B \\ &\Leftrightarrow X \in P(A) \wedge X \in P(B) \\ &\Leftrightarrow X \in P(A) \cap P(B). \end{aligned}$$

21. Demostrar las siguientes proposiciones, justificando en cada paso la propiedad de la teoría de conjuntos aplicada.

    a) $(A - B) - C \subseteq A - (B - C)$

    Notemos que cualesquiera sean los conjuntos X e Y, tenemos que

    $$X - Y = \{x : x \in X \wedge x \notin Y\} = X \cap \overline{Y}.$$

    Luego,

    $$\begin{array}{rcll} A - (B - C) & = & A \cap \left(\overline{B - C}\right) & \\ & = & A \cap \left(\overline{B \cap \overline{C}}\right) & \\ & = & A \cap \left(\overline{B} \cup \overline{\overline{C}}\right) & \textit{(Ley de De Morgan)} \\ & = & A \cap \left(\overline{B} \cup C\right) & \textit{(Ley del doble complemento)} \\ & = & \left(A \cap \overline{B}\right) \cup (A \cap C) & \textit{(Propiedad distributiva)} \end{array}$$

[1]Si quiere intentar probar esta afirmación, para probar que

$$P(A \cup B) \subseteq P(A) \cup P(B) \Rightarrow A \subseteq B \vee B \subseteq A,$$

se sugiere lo siguiente: si $A \nsubseteq B$ y $B \nsubseteq A$ entonces $A - B \neq \emptyset$ y $B - A \neq \emptyset$. Luego, si $C = \{x, z\}$, donde $x \in A - B$ y $z \in B - A$, se tiene que $C \in P(A \cup B)$ pero $C \notin P(A) \cup P(B)$.

Ahora,

$$\begin{aligned}
(A-B)-C &= \left(A\cap\overline{B}\right)\cap\overline{C}\\
&\subseteq A\cap\overline{B}\\
&\subseteq \left(A\cap\overline{B}\right)\cup(A\cap C)\\
&= A-(B-C)\,.
\end{aligned}$$

b) $\overline{\overline{(A\cup B)\cap C}\cup\overline{B}}=B\cap C$

$$\begin{aligned}
\overline{\overline{(A\cup B)\cap C}\cup\overline{B}} &= \overline{\overline{(A\cup B)\cap C}}\cap\overline{\overline{B}} && \textit{(Ley de De Morgan)}\\
&= (A\cup B)\cap C\cap B && \textit{(Ley del doble complemento)}\\
&= (A\cup B)\cap(C\cap B) && \textit{(Propiedad asociativa)}\\
&= (A\cap(C\cap B))\cup(B\cap(C\cap B)) && \textit{(Propiedad distributiva)}\\
&= (A\cap C\cap B)\cup(C\cap B) && \textit{(Propiedad asociativa)}\\
&= C\cap B && (A\cap C\cap B\subseteq C\cap B)
\end{aligned}$$

c) $\overline{A\Delta B}=A\Delta\overline{B}$

Notemos que $A\Delta B=(A\cup B)\cap\overline{(A\cap B)}=B\Delta A$. Luego, tenemos que

$$\begin{aligned}
\overline{A\Delta B} &= \overline{(A\cup B)\cap\overline{(A\cap B)}}\\
&= \overline{(A\cup B)}\cup\overline{\overline{(A\cap B)}} && \textit{(Ley de De Morgan)}\\
&= \left(\overline{A}\cap\overline{B}\right)\cup\overline{\overline{(A\cap B)}} && \textit{(Ley de De Morgan)}\\
&= \left(\overline{A}\cap\overline{B}\right)\cup(A\cap B) && \textit{(Ley del doble complemento)}\\
&= \left(A\cup\overline{A}\right)\cap\left(\overline{B}\cup A\right)\cap\left(\overline{A}\cup B\right)\cap\left(B\cup\overline{B}\right) && \textit{(Propiedad distributiva)}\\
&= \mathcal{U}\cap\left(\overline{B}\cup A\right)\cap\left(\overline{A}\cup B\right)\cap\mathcal{U} && \textit{(Propiedad del inverso)}\\
&= \left(\overline{B}\cup A\right)\cap\left(\overline{A}\cup B\right) && \textit{(Propiedad del neutro)}\\
&= \left(\overline{B}\cup A\right)\cap\left(\overline{A\cap\overline{B}}\right) && \textit{(Ley de De Morgan)}\\
&= A\Delta\overline{B}.
\end{aligned}$$