FACULTAD DE CIENCIAS EXACTAS, INGENIERÍA Y AGRIMENSURA
ESCUELA DE CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
CARRERAS: LM - PM - LF - PF - LCC

ÁLGEBRA Y GEOMETRÍA ANALÍTICA I - Año 2019
PRÁCTICA: El principio de inducción matemática

Equipo docente: Argiroffo, Escalante, Lombardi, Alet, Philipp, Pizzi, Recanzone, Borbiconi, Fragoletti.

1. Probar que las siguientes proposiciones son verdaderas para todo $n \in \mathbb{N}$:

   a) $1+3+5+..+(2n-1)=n^2$.
   b) $1\cdot 3\cdot 5\cdot ..\cdot(2n-1)=\frac{(2n)!}{2^n n!}$.
   c) $1\cdot 3+2\cdot 4+3\cdot 5+..+n(n+2)=\frac{n(n+1)(2n+7)}{6}$.
   d) $\sum_{i=1}^{n} i^3=\frac{n^2(n+1)^2}{4}=(\sum_{i=1}^{n} i)^2$.
   e) $\sum_{i=1}^{n}(i)(i!)=(n+1)!-1$.

2. Analizar la veracidad de las siguientes afirmaciones:

   a) Para todo $n \in \mathbb{N}$, $8|(3^{2n}-1)$.
   b) Para todo $n \in \mathbb{N}$, $n! \geq 2^n$.

3. Demostrar que las siguientes igualdades son válidas para todo $n \in \mathbb{N}$:

   a) Suma de una **Progresión aritmética**:

   $$a+(a+d)+(a+2d)+..+(a+(n-1)d)=\frac{[a+(a+(n-1)d)]\,n}{2}.$$

   b) Suma de una **Progresión geométrica**: Si $r \neq 1$,

   $$a+ar+ar^2+..+ar^{n-1}=a\frac{r^n-1}{r-1}.$$

4. Probar las siguientes propiedades de los símbolos sumatoria y productoria: Sean $x_1,..,x_n$, e $y_1,..,y_n$ valores reales dados. Entonces:

   a) $\sum_{i=1}^{n}(a\cdot x_i+y_i)=a\cdot\sum_{i=1}^{n}x_i+\sum_{i=1}^{n}y_i$.
   b) Si $j \in \mathbb{Z}$, entonces $\sum_{i=j+1}^{n+j}x_{i-j}=\sum_{i=1}^{n}x_i$.
   c) (Propiedad telescópica). $\sum_{i=1}^{n}(x_i-x_{i-1})=x_n-x_0$.
   d) $\prod_{i=1}^{n}x_i\cdot y_i=\prod_{i=1}^{n}x_i\cdot\prod_{i=1}^{n}y_i$.
   e) $\prod_{i=1}^{n}c\cdot x_i=c^n\cdot\prod_{i=1}^{n}x_i$.

5. Demostrar que las siguientes afirmaciones son verdaderas para todo $n \in \mathbb{N}$:

   a) $x>-1 \Rightarrow (1+x)^n \geq 1+nx$.
   b) Si $n \geq 2$, entonces $1+2^2+..+n^2<\frac{(n+1)^3}{3}<1+2^2+..+(n+1)^2$.

6. Para qué valores naturales de n resulta $2n^3 > 3n^2 + 3n + 1$?. Demostrar su respuesta.

7. Dada la proposición: $P(n) : 1 + 2 + 3 + .. + n = \frac{(2n+1)^2}{8}$, demostrar que si $P(k)$ es verdadera para algún $k \in \mathbb{N}$, entonces $P(k+1)$ es verdadera. Analizar luego si esta propiedad es válida para todo $n \in \mathbb{N}$.

8. Observemos que:
   $1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$
   $(1 - \frac{1}{2}) \cdot (1 - \frac{1}{3}) = \frac{1}{3}$
   $(1 - \frac{1}{2}) \cdot (1 - \frac{1}{3}) \cdot (1 - \frac{1}{4}) = \frac{1}{4}$
   Conjeturar una ley que generalice estos casos particulares y demostrarla utilizando el principio de inducción.

9. Leer la siguiente demostración por inducción de la siguiente proposición:

   Todo conjunto de n bolas de billar está formado por bolas del mismo color.

   Base de la inducción: Para $n = 1$ la afirmación es trivialmente verdadera.

   Paso de inducción: Supongamos que tenemos $k+1$ bolas de billar que numeramos $1, 2, .., k, (k+1)$. De acuerdo con la hipótesis de inducción, las bolas $1, 2, .., k$ son del mismo color; además, por la misma razón, las bolas $2, .., k, (k+1)$ son del mismo color. En consecuencia, las bolas $1, 2, .., k, (k+1)$ son del mismo color. ¿Dónde está el error en esta demostración?.