Unidad 6: Geometría Analítica del Espacio
Álgebra y Geometría Analítica II (R-121)
Licenciatura en Ciencias de la Computación

Iker M. Canut

2020

1. Recta en el Espacio

Tres puntos P, Q, R están alineados sii $\overrightarrow{PQ}$ y $\overrightarrow{PR}$ son vectores paralelos: $r = \{R : \overrightarrow{PR} = \lambda\overrightarrow{PQ}\}$

- **Ecuación Vectorial**: $R \in r \iff \exists\lambda \in \mathbb{R} : \overrightarrow{OR} = \overrightarrow{OP} + \lambda\overrightarrow{PQ}$.
- **Ecuaciones Paramétricas**: $R(x, y, z) \in r \iff \begin{cases} x = x_0 + \lambda u_1 \\ y = y_0 + \lambda u_2 \\ z = z_0 + \lambda u_3 \end{cases}$
- **Forma Simétrica**: $\dfrac{x - x_0}{u_1} = \dfrac{y - y_0}{u_2} = \dfrac{z - z_0}{u_3}$

Que forma, por ejemplo, el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} \dfrac{x - x_0}{u_1} = \dfrac{y - y_0}{u_2} \\ \dfrac{y - y_0}{u_2} = \dfrac{z - z_0}{u_3} \end{cases}$$

Y por ejemplo, la primer ecuación se puede escribir como $\dfrac{x}{u_1} - \dfrac{y}{u_2} + \left(\dfrac{y_0}{u_2} - \dfrac{x_0}{u_1}\right) = 0$.

La ausencia de la variable z no indica que la ecuación es de una recta, sino que es la ecuación de un plano paralelo al eje z. Por eso, para describir una recta en el espacio hay que plantearlo como la intersección de dos planos. La ecuación de antes es la ecuación de un plano que contiene a r y es perpendicular al plano xy. Este plano se denomina **plano proyectante** de r al plano xy.

Distancia punto a recta: Dado P_0 en r con dirección $\overline{u}$, la distancia a P está dada por $\dfrac{|\overline{P_0P} \wedge \overline{u}|}{|\overline{u}|}$.

2. Plano en el Espacio

Sea π un plano, y sean P, Q, R tres puntos no alineados de π, entonces un punto cualquiera S del espacio será un punto de π sii los vectores $\overrightarrow{PQ}, \overrightarrow{PS}, \overrightarrow{PR}$ son coplanares: $\overrightarrow{PS} = \alpha\overrightarrow{PQ} + \beta\overrightarrow{PR}$. Fijando un sistema de coordenadas, $\overrightarrow{PS} = \overrightarrow{OS} - \overrightarrow{OP}$ y finalmente:

- **Ecuación Vectorial**: $\overrightarrow{OS} = \overrightarrow{OP} + \alpha\overrightarrow{PQ} + \beta\overrightarrow{PR}$
- **Ecuaciones Paramétricas**: $S(x, y, z) \in r \iff \begin{cases} x = x_0 + \alpha u_1 + \beta u_1 \\ y = y_0 + \alpha u_2 + \beta v_2 \\ z = z_0 + \alpha u_3 + \beta v_3 \end{cases}$
- **Ecuación Cartesiana**: $ax + by + cz + d = 0$

Dos vectores no nulos ni paralelos son **vectores dirección** de un plano π si ambos son paralelos a π.

Teorema 1: La distancia de un punto $P(x_0, y_0, z_0)$ a un plano $\pi)\ ax + by + cz + d = 0$ es:

$$d(P, \pi) = \frac{|ax_0 + by_0 + cz_0 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

3. Superficies Cuadráticas

Determinar que lugar geométrico del espacio representa una ecuación cuadrática en tres variables:

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 + \underbrace{Dxy + Exz + Fyz}_{\text{términos rectangulares}} + Gx + Hy + Iz + J = 0$$

Estudiamos los casos en los que los términos rectangulares $D = E = F = 0$.

3.1. Elipsoide y Esferas

$$\frac{(x-x_0)^2}{a^2}+\frac{(y-y_0)^2}{b^2}+\frac{(z-z_0)^2}{c^2}=1$$

Si $a=b=c$ entonces es una **esfera**.
El punto $C(x_0,y_0,z_0)$ se denomina **centro de la elipsoide**.
Para darnos una idea de la forma, intersecamos a $\mathcal{E}$ con planos paralelos a los planos coordenados:
Por ejemplo, consideramos $\pi_1)$ $z=z_0$, y tenemos un plano paralelo a xy que pasa por C.
Luego, $\begin{cases} \frac{(x-x_0)^2}{a^2}+\frac{(y-y_0)^2}{b^2}=1 \\ z=z_0 \end{cases}$, y $\mathcal{E}\cap\pi_1$ es una elipse (circunferencia si $a=b$).
$V_1(x_0+a,y_0,z_0), V_2(x_0-a,y_0,z_0), V_3(x_0,y_0+b,z_0), V_4(x_0,y_0-b,z_0), V_5(x_0,y_0,z_0+c), V_6(x_0,y_0,z_0-c)$.
Lo intersecamos con planos paralelos a los planos coordenados. Dichas curvas se denominan **trazas**:
Por ejemplo, sea α_k el plano de ecuación $x=k$, tenemos: $\begin{cases} \frac{(y-y_0)^2}{b^2}+\frac{(z-z_0)^2}{c^2}=1-\frac{(k-x_0)^2}{a^2} \\ x=k \end{cases}$

- Si $\frac{(k-x_0)^2}{a^2}<1$, es decir, si $x_0-a<k<x_0+a$, entonces $\mathcal{E}\cap\alpha_k$ es una elipse en α_k.
- Si $|k-x_0|=a$, entonces $\mathcal{E}\cap\alpha_{x_0+a}=\{V_1\}$ o $\mathcal{E}\cap\alpha_{x_0-a}=\{V_2\}$.
- Si $|k-x_0|>a$, entonces $\mathcal{E}\cap\alpha_k=\emptyset$.

La elipse tiene ecuación: $\dfrac{(y-y_0)^2}{B-k^2}+\dfrac{(z-z_0)^2}{C_k^2}=1$, donde $B_k=b/\sqrt{1-\dfrac{(k-x_0)^2}{a^2}}\leq b$

3.2. Hiperboloides y Conos

$$\frac{(x-x_0)^2}{a^2}+\frac{(y-y_0)^2}{b^2}-\frac{(z-z_0)^2}{c^2}=1$$

$\mathcal{H}$ se denomina **hiperboloide de una hoja**. El punto $C(x_0,y_0,z_0)$ se denomina **centro**.
Considerando $\pi_1)$ $x=x_0$ o $\pi_2)$ $y=y_0$ entonces tenemos una hiperbola (eje focal $\|$ eje y o x).
La traza dada $\pi_3)$ $z=z_0$ es una elipse, y en los planos $\alpha_k)$ $z=k$ también, pues $1+\dfrac{(k-z_0)^2}{c^2}>0$.
$\mathcal{H}\cap\alpha_k$ está centrada en $P_k(x_0,y_0,k)$. Es decir, todos los centros están sobre la recta paralela al eje z que pasa por el centro de la hiperboloide.

$$-\frac{(x-x_0)^2}{a^2}-\frac{(y-y_0)^2}{b^2}+\frac{(z-z_0)^2}{c^2}=1$$

$\mathcal{H}$ se denomina **hiperboloide de dos hojas**. El punto $C(x_0,y_0,z_0)$ se denomina **centro**.
Cuando analizamos la traza dada por $\pi_1)$ $z=z_0$, vemos que $\mathcal{H}\cap\pi_1=\emptyset$.
Por $\pi_2)$ $x=x_0$ y $\pi_3)$ $y=y_0$ vemos hipérbolas con ejes focales paralelos al eje z.
Y tienen los mismos 2 vertices en $V_1(x_0,y_0,z+c)$ y $V_2(x_0,y_0,z-c)$.
Considerando $\alpha_k)$ $z=k$, analizamos $\mathcal{H}\cap\alpha_k$,

- Si $|k-z_0|<c$ entonces la intersección es vacia (Es decir, $z_0-c<k<z_0+c$).
- Si $|k-z_0|=c$ entonces tenemos los vértices.
- Si $|k-z_0|>c$ entonces tenemos una elipse en el plano $z=k$

La elipse está dada por $\begin{cases} \frac{(x-x_0)^2}{A_k^2}+\frac{(y-y_0)^2}{B_k^2}=1 \\ z=k \end{cases}$, con $A_k^2=a^2\cdot\left(\frac{(k-z_0)^2}{c^2}-1\right)$,
y las elipses se van haciendo cada vez más grandes puesto que $A_k\to\infty$ a medida que $|k-z_0|\to\infty$.

$$\frac{(x-x_0)^2}{a^2}+\frac{(y-y_0)^2}{b^2}=\frac{(z-z_0)^2}{c^2}$$

$\mathcal{C}$ se denomina **cono elíptico** de **vértice** $V(x_0,y_0,z_0)$.
$\pi_1)$ $z=z_0$ obtenemos el vértice.
$\pi_2)$ $x=x_0$ y $\pi_3)$ $y=y_0$, vemos que un punto pertenece a la intersección si y solo si:
$\begin{cases}\frac{(x-x_0)^2}{a^2}=\frac{(z-z_0)^2}{c^2}\\ y=y_0\end{cases} \iff \begin{cases}|x-x_0|=\frac{a}{c}|z-z_0|\\ y=y_0\end{cases}$, es decir, $\mathcal{C}\cap\pi_{2/3}$ es un par de rectas que se intersecan en V. Finalmente, $\alpha_k)$ $z=k$, obtenemos una elipse dada por $\begin{cases}\frac{(x-x_0)^2}{a^2}+\frac{(y-y_0)^2}{b^2}=\frac{(k-z_0)^2}{c^2}\\ z=k\end{cases}$.

3.3. Superficie Parabólicas

$$\frac{(x-x_0)^2}{a^2}+\frac{(y-y_0)^2}{b^2}=\frac{z-z_0}{c}$$

$\mathcal{P}$ se denomina **paraboloide elíptico** de **vértice** $V(x_0,y_0,z_0)$.
$\pi_1)$ $z=z_0$ obtenemos el vértice.
$\pi_2)$ $y=y_0$ tenemos una parábola, cuya directriz $\parallel$ eje x (eje $\parallel$ eje z), contenida en el plano $y=y_0, z\geq z_0$ $(c>0)$ o bien $y=y_0, z\leq z_0$ $(c<0)$. Análogo $\pi)$ $x=x_0$.
Sea $\alpha_k)$ $z=k$, obtendremos elipses para los valores $k>z_0$ y vacio para $k<z_0$ (si $c>0$).

$$\frac{(x-x_0)^2}{a^2}-\frac{(y-y_0)^2}{b^2}=\frac{z-z_0}{c}$$

$\mathcal{P}'$ se denomina **paraboloide hiperbólico**.
$\pi_1)$ $y=y_0$ obtenemos una parábola p_1 $\begin{cases}\frac{(x-x_0)^2}{a^2}=\frac{z-z_0}{c}\\ y=y_0\end{cases}$. Con $V(x_0,y_0,z_0)$, directriz $\parallel$ eje x (eje parabola $\parallel$ eje z), contenida en el semiplano $y=y_0, z\geq z_0$, con $c>0$ (o $y=y_0, z\leq z_0$, con $c<0$).
$\pi_2)$ $x=x_0$ obtenemos una parábola p_2 $\begin{cases}-\frac{(y-y_0)^2}{b^2}=\frac{z-z_0}{c}\\ x=x_0\end{cases}$. Con $V(x_0,y_0,z_0)$, directriz $\parallel$ eje x (eje parabola $\parallel$ eje z), contenida en el semiplano $y=y_0, z\leq z_0$, con $c>0$ (o $y=y_0, z\geq z_0$, con $c<0$).
$\pi_3)$ $z=z_0$ obtenemos un par de rectas que se intersecan en V, $\begin{cases}\frac{(x-x_0)^2}{a^2}=\frac{(y-y_0)^2}{b^2}\\ z=z_0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}|x-x_0|=\frac{a}{b}|y-y_0|\\ z=z_0\end{cases}$
Sea $\alpha_k)$ $x=k$, obtenemos $\begin{cases}\frac{(y-y_0)^2}{b^2}-\frac{(k-x_0)^2}{a^2}=-\frac{z-z_0}{c}\\ x=k\end{cases}$, que representa una parábola en el plano $x=k$, cuya directriz es paralela al eje y y su eje de simetrá es paralelo al eje x.
Si intersecamos $\mathcal{P}'$ con $z=k$, obtendremos hipérbolas, si $c>0$, entonces si $k>z_0$ eje focal $\parallel$ eje y.
Si $k<z_0$ entonces eje focal $\parallel$ eje z.

3.4. Cilindros

$$Ax^2+By^2+Gx+Hy+J=0$$

Los dos coeficientes que acompañan a una misma variable son nulos. $\mathcal{C}$ se llama **cilindro generalizado**.
Intersecando con el plano xy, vemos que

$\begin{cases}Ax^2+By^2+Gx+Hy+J=0\\ z=0\end{cases}$, y se verifica $\begin{cases}x=x_0\\ y=y_0\\ z=t\end{cases}$

La primera conica se denomina **directriz** del cilindro, y cada una de las rectas paralelas al eje z se denominan **generatrices** del cilindro.

4. Curvas en el Espacio

Para dar las ecuaciones cartesianas de una curva en el espacio, se las pueden considerar como intersección de dos superficies. Aunque no todas las curvas en el espacio pueden describirse asi, por ejemplo, la **hélice cilíndrica**, que usa las **ecuaciones paramétricas**, que siguen la forma:

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \\ z = z(t) \end{cases}$$

Y si queremos que pase por el punto $P_0(x_0, y_0, z_0)$, entonces

$$x(t) = x_0 + tu_1, y(t) = y_0 + tu_2, x(t) = z_0 + tu_3$$

Y de esta manera se define una **curva en el espacio** como cualquier lugar geométrico tal que las coordenadas de sus puntos puedan definirse a través de ecuaciones como las mencionadas anteriormente, donde x, y, z son funciones continuas de t. Usando esta definición, la hipérbola no es una curva, pues es la unión de dos curvas.

5. Superficies Parametrizadas y Superficies de Revolución

Un plano que pasa por el punto $P_0(x_0, y_0, z_0)$ que tiene como vectores dirección a $\overline{u}$ y $\overline{v}$, admite ecuaciones paramétricas de la forma

$$\begin{cases} x = x_0 + su_1 + tv_1 \\ y = y_0 + su_2 + tv_2 \\ z = z_0 + su_3 + tv_3 \end{cases}$$

Y decimos que una superficie admite **ecuaciones paramétricas** si las coordenadas de sus puntos pueden obtenerse en función de dos parámetros;

$$\begin{cases} x = x(s, t) \\ y = y(s, t) \\ z = z(s, t) \end{cases}$$

Y se introducen las **superficies de revolución**: Supongamos que tenemos una curva γ contenida en el semiplano yz con $y \geq 0$. Entonces las coordenadas son

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = \alpha(t) \\ z = \beta(t) \end{cases}$$

Luego, haciendola girar alrededor del eje z, obtenemos una superficie. Y si intersecamos S con el plano xy, obtenemos una circunferencia. Entonces el radio de $\mathcal{C}$ es $y(t)$ y todos los puntos del plano tienen componentes $z = \beta(t)$, y tiene ecuaciones paramétricas de la forma

$$\begin{cases} x = \alpha(t)\cos\theta \\ y = \alpha(t)\sin\theta \\ z = \beta(t) \end{cases}$$

Otro ejemplo, si la cuva está contenida en el plano yz, con $z \geq 0$, y giramos alrededor del eje z, entonces las ecuaciones paramétricas de la superficie de revolución S generada son:

$$\begin{cases} x = \beta(t)\cos\theta \\ y = \alpha(t) \\ z = \beta(t)\sin\theta \end{cases}$$

Es decir, el eje no lleva nada, cos en el positivo y sin en el que queda.