(5) • $\beta = \{\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_s\} \subseteq \mathbb{F}^n$

c) $s = n$ y β l.i $\Rightarrow$ β genera $\mathbb{F}^n$ (∴ β es una base de $\mathbb{F}^n$)

Sabemos $(\mathbb{F}^n, +, \cdot)$ es un $\mathbb{F}$-espacio vectorial con $+$, $\cdot$ usuales.

• Supongamos que β no genera $\mathbb{F}^n$.

Como β no genera $\mathbb{F}^n$, $\exists\ \bar{v} \in \mathbb{F}^n \,/\, v$ NO es combinación lineal de $\bar{x}_1, \bar{x}_2, \ldots, \bar{x}_s$. $\Rightarrow$

$\underset{(*)}{\Rightarrow}$ $\beta \cup \{v\}$ es li (I)

β li

Pero: $\left.\begin{array}{l} |\beta \cup \{v\}| = s+1 \underset{\text{hip.}}{=} n+1 \\ \dim \mathbb{F}^n = n \end{array}\right\} \underset{5,a)}{\Rightarrow} \beta \cup \{v\}$ es l.d. (II)

Contradicción

(de I y II)

∴ β genera $\mathbb{F}^n$ // ✓

(*) Probemos que:

Si $\beta = \{\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots \bar{x}_n\}$ es l.i y v <u>no</u> es combinación lineal de $\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n$ entonces $\beta \cup \{v\}$ es l.i:

Sea $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n, \alpha \in \mathbb{F}$ /

$$\alpha_1 \bar{x}_1 + \dots + \alpha_n \bar{x}_n + \alpha \bar{v} = \bar{0} \quad \cdots (*)$$

<u>Caso 1</u>: $\alpha = 0$

En $(*)$ $\alpha_1 \bar{x}_1 + \alpha_2 \bar{x}_2 + \dots + \alpha_n \bar{x}_n = 0 \underset{\beta \text{ l.i}}{\Longrightarrow}$

$\Rightarrow \alpha_1 = 0 = \alpha_2 = \dots = \alpha_n$

$\therefore \alpha_i = 0 \ \forall i = 1, \dots, n$ y $\alpha = 0$.

$\therefore \beta \cup \{v\}$ es l.i.

<u>Caso 2</u>: $\alpha \neq 0$

De $(*)$ $\underset{\neq 0}{\alpha} \bar{v} = -\alpha_1 \bar{x}_1 - \alpha_2 \bar{x}_2 - \dots - \alpha_n \bar{x}_n$

$$\bar{v} = -\frac{\alpha_1}{\alpha} \bar{x}_1 - \frac{\alpha_2}{\alpha} \bar{x}_2 - \dots - \frac{\alpha_n}{\alpha} \bar{x}_n$$

$\therefore$ v es combinación lineal de $x_1, \ldots, x_n$.

Contradicción (por hipótesis)

$\therefore$ El caso 2 <u>no</u> pasa.

$$\boxed{\therefore\ \beta \cup \{v\} \text{ es l.i}}$$

Escaneado con CamS