

1 Primitiva de una función

Análisis Matemático I - 2020

(Lic. y Prof. en Matemática, Lic. en Cs. de la Computación, Lic. y Prof. en Física)

Unidad 5 – Introducción al Cálculo Integral

1 Primitiva de una función

Integración y derivación

Aunque el cálculo diferencial y el cálculo integral surgieron de problemas en apariencia no relacionados, el de la tangente y el del área, Isaac Barrow (1630-1677) descubrió que estos dos problemas estaban íntimamente relacionados. De hecho, se dio cuenta que la derivación y la integración son, de alguna forma, procesos inversos. Newton y Leibnitz explotaron esta relación y lograron transformar el cálculo en un método matemático sistemático.

1.1 Primitivas de funciones elementales

Definición. Decimos que F es una *primitiva* de f sobre el conjunto I si $F'(x) = f(x) \forall x \in I$. También suele decirse que F es una *antiderivada* de f en I .

Observación.

- Si F es una primitiva de f y si c es una constante cualquiera, entonces $F + c$ también es una primitiva de f . En efecto $(F + c)' = F' + c' = f + 0 = f$.
- Si F y G son dos primitivas cualesquiera de f , entonces dichas funciones difieren en una constante, es decir, $G - F = c$ o bien $G(x) = F(x) + c \forall x \in I$.
- Por lo tanto, $F(x) + c$ (donde F es una primitiva particular de f y c es una constante arbitraria) describe la *familia de todas las primitivas* de f sobre I .

Definición. Llamamos *integral indefinida* de una función f al conjunto de todas las primitivas de f , y la notamos $\int f(x)dx$. Luego, si F es una primitiva de f

$$\int f(x)dx = F(x) + c$$

Es decir, $\int f(x)dx$ nos da una familia de funciones, todas ellas primitivas de f , que difieren entre sí en una constante.

$$\int \overbrace{f(x)}^{\text{integrand}} \underbrace{dx}_{\text{indica la variable de integración}} = \underbrace{F(x) + c}_{\text{familia de funciones que constituyen la integral indefinida}}$$

símbolo integral

Ejemplo.

1) Si $f(x) = 1$ entonces $F(x) = x$ es una primitiva de $f(x)$ pues $F'(x) = (x)' = 1 = f(x)$, entonces la integral de f será,

$$\int 1 dx = x + c$$

1 Primitiva de una función

2) Si $f(x) = 2x$ entonces $F(x) = x^2$ es una primitiva de $f(x)$ pues $F'(x) = (x^2)' = 2x = f(x)$, entonces la integral de f será,

$$\int 2x dx = x^2 + c$$

3) Si $f(x) = \cos x$ entonces $F(x) = \sin x$ es una primitiva de $f(x)$ pues $F'(x) = (\sin x)' = \cos x = f(x)$, entonces la integral de f será,

$$\int \cos x dx = \sin x + c$$

Observación. Las gráficas de las funciones primitivas de una función dada, definida sobre I , son traslaciones verticales una de la otra. Por ejemplo x^3 y $x^3 + 5$ son primitivas de la función $3x^2$ y la gráfica de $x^3 + 5$ es un corrimiento de la gráfica de x^3 en 5 unidades hacia arriba.

De lo expuesto, conociendo las derivadas de algunas funciones elementales, podemos confeccionar una primera tabla de antiderivadas o integrales indefinidas.

Tabla de integrales inmediatas.

$$\int 1 dx = x + c$$

$$\int x^\alpha dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + c, \text{ si } \alpha \neq -1$$

$$\int \sin x dx = -\cos x + c$$

$$\int \cos x dx = \sin x + c$$

$$\int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \tan x + c$$

$$\int \frac{1}{\sin^2 x} dx = \cot x + c$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \arcsin x + c$$

$$\int \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \arccos x + c$$

$$\int \frac{1}{1+x^2} dx = \arctan x + c$$

$$\int \frac{1}{x} dx = \ln |x| + c$$

$$\int e^x dx = e^x + c$$

$$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + c$$

Proposición 1. (Linealidad) Si F y G son primitivas de f y g respectivamente, y a es una constante real entonces

a) aF es una primitiva de af , es decir

$$\int af(x) dx = aF(x) + c$$

b) $F + G$ es una primitiva de $f + g$, es decir

$$\int (f(x) + g(x)) dx = F(x) + G(x) + c$$

Demostración:

a) Como F es una primitiva de f , es $F' = f$, luego $(aF)' = aF' = af$ y entonces aF es una primitiva de af .

1 Primitiva de una función

- b) Por ser F es una primitiva de f y G una primitiva de g , tenemos que $(F + G)' = F' + G' = f + g$, luego $F + G$ es una primitiva de $f + g$. \square

En general es válido:

$$\int (af(x) + bg(x)) dx = a \int f(x) dx + b \int g(x) dx$$

A partir de la tabla de integrales inmediatas y la proposición 1, podemos encontrar las primitivas de las siguientes funciones:

Ejemplo.

1. $\int (4x - 2) dx = 4 \frac{x^2}{2} - 2x + c = 2x^2 - 2x + c$
2. $\int \frac{x^3 + 4x - 2}{x^2} dx = \frac{x^2}{2} + 4 \ln |x| + \frac{2}{x} + c$
3. $\int \frac{3+x^2}{1+x^2} dx = \int \frac{1+x^2+2}{1+x^2} dx = x + 2 \arctan x + c$
4. $\int \left(\frac{e^x}{2} + 3 \sin x \right) dx = \frac{1}{2} e^x - 3 \cos x + c$
5. $\int \tan^2 x dx = \int \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} dx = \int \frac{1 - \cos^2 x}{\cos^2 x} dx = \tan x - x + c$

1.2 La regla de sustitución

Observemos lo siguiente:

$$[f(g(x))]' = f'(g(x)) g'(x) \implies \int f'(g(x)) g'(x) dx = f(g(x)) + c$$

De lo anterior, surge el siguiente:

Teorema 1. (Método de sustitución o cambio de variable): Sea f continua en I . Sea g una función derivable con derivada continua en I tal que $\text{Im}(g) \subset I$. Entonces

$$\int f'(g(x)) g'(x) dx \underset{t=g(x)}{=} \int f(t) dt$$

donde $dt = g'(x) dx$.

Ejemplo. Hallar las primitivas de:

1 Primitiva de una función

1. $\int e^{\alpha x} dx$

Consideremos $f(x) = e^x$ y $g(x) = \alpha x$, entonces la integral $\int e^{\alpha x} dx = \int f(g(x)) dx$. Luego si hacemos el cambio de variable $t = g(x) = \alpha x$ y multiplicamos y dividimos por $g'(x) = \alpha$ tendremos que

$$\begin{aligned}\int e^{\alpha x} dx &= \frac{1}{\alpha} \int e^{\alpha x} \alpha dx = \frac{1}{\alpha} \int f(g(x)) g'(x) dx \stackrel{t=\alpha x}{\underset{dt=\alpha dx}} = \frac{1}{\alpha} \int f(t) dt \\ &= \frac{1}{\alpha} \int e^t dt = \frac{1}{\alpha} (e^t + c') \stackrel{t=\alpha x}{=} \frac{1}{\alpha} e^{\alpha x} + c\end{aligned}$$

2. $\int (4x-2)^2 dx$.

Consideramos $f(x) = x^2$ y $g(x) = 4x-2$, entonces la integral $\int (4x-2)^2 dx = \int f(g(x)) dx$. Luego si hacemos el cambio de variable $t = g(x) = 4x-2$ y multiplicamos y dividimos por $g'(x) = 4$ tendremos que

$$\int (4x-2)^2 dx = \frac{1}{4} \int (4x-2)^2 \cdot 4 dx \stackrel{t=4x-2}{\underset{dt=4dx}} = \frac{1}{4} \int f(t) dt = \frac{1}{4} \left(\frac{t^3}{3} + c' \right) \stackrel{t=4x-2}{=} \frac{(4x-2)^3}{12} + c$$

3. $\int \cos(3x) dx$.

Consideramos $f(x) = \cos x$ y $g(x) = 3x$, entonces la integral $\int \cos(3x) dx = \int f(g(x)) dx$. Luego si hacemos el cambio de variable $t = g(x) = 3x$ y multiplicamos y dividimos por $g'(x) = 3$ tendremos que

$$\int \cos(3x) dx = \frac{1}{3} \int \cos(3x) \cdot 3 dx \stackrel{t=3x}{\underset{dt=3dx}} = \frac{1}{3} \int f(t) dt = \frac{1}{3} (\sin t + c') \stackrel{t=3x}{=} \frac{1}{3} \sin(3x) + c$$

4. $\int \frac{3}{1+4x^2} dx$.

Observemos primero que $\int \frac{3}{1+4x^2} dx = 3 \int \frac{1}{1+(2x)^2} dx$, ahora consideramos $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$ y $g(x) = 2x$, entonces la integral $\int \frac{3}{1+4x^2} dx = 3 \int f(g(x)) dx$. Luego si hacemos el cambio de variable $t = g(x) = 2x$ y multiplicamos y dividimos por $g'(x) = 2$ tendremos que

$$\int \frac{3}{1+4x^2} dx = \frac{3}{2} \int \frac{1}{1+(2x)^2} \cdot 2 dx \stackrel{t=2x}{\underset{dt=2dx}} = \frac{3}{2} \int f(t) dt = \frac{3}{2} (\arctan t + c') \stackrel{t=2x}{=} \frac{3}{2} \arctan(2x) + c$$

1.3 Integración por partes

Observemos lo siguiente:

$$[f(x) \cdot g(x)]' = f(x) g'(x) + f'(x) g(x) \implies f(x) g(x) = \int (f(x) g'(x) + f'(x) g(x)) dx$$

De aquí surge el siguiente:

Teorema 2. (Integración por partes): Sean f y g derivables con derivada continua en I . Entonces

$$\int f(x) g'(x) dx = f(x) g(x) - \int f'(x) g(x) dx$$

1 Primitiva de una función

Veamos algunos casos particulares que se resuelven con este método

- $\int x^m e^{\alpha x} dx$ donde $m \in \mathbb{N}$ y $\alpha \in \mathbb{R}$.

$$m = 1, \alpha \in \mathbb{R}$$

$$\int x e^{\alpha x} dx = \frac{1}{\alpha} x e^{\alpha x} - \frac{1}{\alpha} \int e^{\alpha x} dx = \frac{1}{\alpha} x e^{\alpha x} - \frac{1}{\alpha^2} e^{\alpha x} + c$$

$$m = 2, \alpha \in \mathbb{R}$$

$$\begin{aligned} \int x^2 e^{\alpha x} dx &= \frac{1}{\alpha} x^2 e^{\alpha x} - \frac{1}{\alpha} \int 2x e^{\alpha x} dx = \frac{1}{\alpha} x^2 e^{\alpha x} - \frac{2}{\alpha} \int x e^{\alpha x} dx = \\ &= \frac{1}{\alpha} x^2 e^{\alpha x} - \frac{2}{\alpha} \left[\frac{1}{\alpha} x e^{\alpha x} - \frac{1}{\alpha^2} e^{\alpha x} + c' \right] = \frac{1}{\alpha} x^2 e^{\alpha x} - \frac{2}{\alpha^2} x e^{\alpha x} + \frac{2}{\alpha^3} e^{\alpha x} + c \end{aligned}$$

$$m = 3, \alpha \in \mathbb{R}$$

$$\begin{aligned} \int x^3 e^{\alpha x} dx &= \frac{1}{\alpha} x^3 e^{\alpha x} - \frac{1}{\alpha} \int 3x^2 e^{\alpha x} dx = \frac{1}{\alpha} x^3 e^{\alpha x} - \frac{3}{\alpha} \int x^2 e^{\alpha x} dx = \\ &= \frac{1}{\alpha} x^3 e^{\alpha x} - \frac{3}{\alpha} \left[\frac{1}{\alpha} x^2 e^{\alpha x} - \frac{2}{\alpha^2} x e^{\alpha x} + \frac{2}{\alpha^3} e^{\alpha x} + c' \right] = \\ &= \frac{1}{\alpha} x^3 e^{\alpha x} - \frac{3}{\alpha^2} x^2 e^{\alpha x} + \frac{6}{\alpha^3} x e^{\alpha x} - \frac{6}{\alpha^4} e^{\alpha x} + c \end{aligned}$$

- $\int x^m \cos(\alpha x) dx$ ó $\int x^m \sin(\alpha x) dx$ donde $m \in \mathbb{N}$ y $\alpha \in \mathbb{R}$.

$$m = 1, \alpha = 1$$

$$\int x \cos x dx = x \sin x - \int \sin x dx = x \sin x + \cos x + c$$

$$\int x \sin x dx = -x \cos x + \int \cos x dx = -x \cos x + \sin x + c$$

- $\int \sin(\alpha x) e^{\beta x} dx$ ó $\int \cos(\alpha x) e^{\beta x} dx$ donde $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

$$\alpha = 1, \beta = 1$$

$$\int \sin x e^x dx = \sin x e^x - \int \cos x e^x dx = \sin x e^x - \left[\cos x e^x - \int (-\sin x) e^x dx \right]$$

Es decir que

$$\int \sin x e^x dx = \sin x e^x - \cos x e^x - \int \sin x e^x dx$$

1 Primitiva de una función

y por lo tanto

$$2 \int \sin x e^x dx = \sin x e^x - \cos x e^x + c' \implies \int \sin x e^x dx = \frac{e^x}{2} (\sin x - \cos x) + c$$

- $\int x^\alpha \ln(\beta x) dx$ con $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ y $\alpha \neq -1, \beta \neq 0$

$$\alpha = 0, \beta = 1$$

$$\int \ln x dx = \int 1 \cdot \ln x dx = x \ln x - \int x \cdot \frac{1}{x} dx = x \ln x - x + c$$

$$\alpha \neq -1, \beta \neq 0$$

$$\begin{aligned} \int x^\alpha \ln(\beta x) dx &= \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} \ln(\beta x) - \int \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} \frac{1}{\beta x} \beta dx = \\ &= \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} \ln(\beta x) - \int \frac{x^\alpha}{\alpha+1} dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} \ln(\beta x) - \frac{x^{\alpha+1}}{(\alpha+1)^2} + c \end{aligned}$$

Ejemplo. Hallar las primitivas de:

1. $\int (4x - 2) \sin x dx$.

Consideramos $f(x) = 4x - 2$ y $g'(x) = \sin x$, entonces $f'(x) = 4$ y una primitiva de g' es $g(x) = -\cos x$. Luego

$$\int (4x - 2) \sin x dx = (4x - 2)(-\cos x) - \int 4(-\cos x) dx = -(4x - 2) \cos x + 4 \sin x + c$$

2. $\int \cos x \sin x dx$.

Consideramos $f(x) = \cos x$ y $g'(x) = \sin x$, entonces $f'(x) = -\sin x$ y una primitiva de g' es $g(x) = -\cos x$. Luego

$$\int \cos x \sin x dx = \cos x (-\cos x) - \int (-\sin x)(-\cos x) dx = -\cos^2 x - \int \sin x \cos x dx + c'$$

luego

$$2 \int \cos x \sin x dx = -\cos^2 x + c' \implies \int \cos x \sin x dx = -\frac{1}{2} \cos^2 x + c$$

3. $\int e^x (x^2 - 5x + 3) dx$.

Observemos primero que tanto la derivada como una primitiva de la función e^x es también e^x , luego para calcular $\int e^x (x^2 - 5x + 3) dx$ podemos (por propiedad conmutativa del producto) considerar $f(x) = x^2 - 5x + 3$ (que es la función que tenemos que derivar) y $g'(x) = e^x$ (que es la función que tenemos que integrar); entonces $f'(x) = 2x - 5$ y $g(x) = e^x$, luego la integral

$$\int e^x (x^2 - 5x + 3) dx = \int (x^2 - 5x + 3) e^x dx = (x^2 - 5x + 3) e^x - \int (2x - 5) e^x dx =$$

1 Primitiva de una función

$$= (x^2 - 5x + 3)e^x - 2 \int xe^x dx + 5 \int e^x dx = (x^2 - 5x + 3)e^x + 5e^x - 2 \underbrace{\int xe^x dx}_{A} \dots (**)$$

Nos resta aún calcular $A = \int xe^x dx$, considerando ahora $f(x) = x$ y $g'(x) = e^x$, siendo $f'(x) = 1$ y $g(x) = e^x$ nuevamente aplicando partes, tendremos que

$$A = \int xe^x dx = xe^x - \int 1e^x dx = xe^x - e^x + c'$$

Volviendo a (**) tendremos

$$\int e^x(x^2 - 5x + 3)dx = (x^2 - 5x + 3)e^x + 5e^x - 2(xe^x - e^x + c') = (x^2 - 5x + 8)e^x - 2xe^x + 2e^x + c$$

O sea,

$$\int e^x(x^2 - 5x + 3)dx = e^x(x^2 - 7x + 10) + c$$

1.4 Integración de funciones racionales propias.

Definición. Llamamos función racional propia al cociente $\frac{P(x)}{Q(x)}$ donde P y Q son polinomios y $\text{gr}(P) < \text{gr}(Q)$.

Si $\text{gr}(P) \geq \text{gr}(Q)$ sabemos que existen únicos polinomios C y R con $\text{gr}(R) < \text{gr}(Q)$ tales $P = CQ + R$ y luego $\frac{P}{Q} = C + \frac{R}{Q}$ donde será $\frac{R}{Q}$ propia.

Veremos algunos casos según sean las raíces del polinomio Q .

1º caso: Q tiene sólo raíces reales simples.

Entonces (si suponemos que el coeficiente principal de Q es 1) el polinomio Q factorizado es

$$Q(x) = (x - \alpha_1)(x - \alpha_2) \cdots (x - \alpha_n)$$

Será

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{A_1}{x - \alpha_1} + \frac{A_2}{x - \alpha_2} + \cdots + \frac{A_n}{x - \alpha_n} \quad (1)$$

con A_i constantes a determinar de manera tal que se verifique (1).

Ejemplo. Calcular $\int \frac{dx}{x^2 - 2x - 3}$.

En este caso $P(x) = 1$ y $Q(x) = x^2 - 2x - 3$; las raíces de Q son -1 y 3 , será entonces $Q(x) = (x + 1)(x - 3)$, luego

1 Primitiva de una función

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{1}{(x-1)(x-3)} = \frac{A_1}{x-1} + \frac{A_2}{x-3} = \frac{A_1(x-3) + A_2(x+1)}{(x+1)(x-3)} = \frac{(A_1 + A_2)x + (-3A_1 + A_2)}{(x+1)(x-3)}$$

$$\Leftrightarrow (A_1 + A_2)x + (-3A_1 + A_2) = P(x) = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} A_1 + A_2 = 0 \\ -3A_1 + A_2 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \left\{ A_2 = \frac{1}{4}, A_1 = -\frac{1}{4} \right\}$$

Por lo tanto

$$\int \frac{dx}{x^2 - 2x - 3} = \int \frac{-1/4}{x+1} dx + \int \frac{1/4}{x-3} dx = -\frac{1}{4} \ln|x+1| + \frac{1}{4} \ln|x-3| + c$$

2º caso: Q tiene raíces reales múltiples.

Entonces (podemos suponer que el coeficiente principal de Q es 1) el polinomio Q factorizado es

$$Q(x) = (x - \alpha_1)^{r_1} (x - \alpha_2)^{r_2} \dots (x - \alpha_n)^{r_n}$$

Será

$$\begin{aligned} \frac{P(x)}{Q(x)} &= \frac{A_{11}}{x - \alpha_1} + \frac{A_{12}}{(x - \alpha_1)^2} + \dots + \frac{A_{1r_1}}{(x - \alpha_1)^{r_1}} + \\ &+ \frac{A_{21}}{x - \alpha_2} + \frac{A_{22}}{(x - \alpha_2)^2} + \dots + \frac{A_{2r_2}}{(x - \alpha_2)^{r_2}} + \\ &+ \dots + \\ &+ \frac{A_{n1}}{x - \alpha_n} + \frac{A_{n2}}{(x - \alpha_n)^2} + \dots + \frac{A_{nr_n}}{(x - \alpha_n)^{r_n}} \end{aligned} \quad (2)$$

con A_{ij} constantes a determinar de manera tal que se verifique (2).

Ejemplo. Calcular $\int \frac{dx}{(x^2-1)^2}$.

En este caso $P(x) = 1$ y $Q(x) = (x^2 - 1)^2$; las raíces de Q son -1 y 1 , ambas dobles, entonces $Q(x) = (x-1)^2(x+1)^2$ luego

$$\begin{aligned} \frac{P(x)}{Q(x)} &= \frac{1}{(x^2-1)^2} = \frac{1}{(x-1)^2(x+1)^2} = \frac{A_{11}}{x-1} + \frac{A_{12}}{(x-1)^2} + \frac{A_{21}}{x+1} + \frac{A_{22}}{(x+1)^2} = \\ &= \frac{A_{11}(x-1)(x+1)^2 + A_{12}(x+1)^2 + A_{21}(x-1)^2 + A_{22}(x-1)^2}{(x-1)^2(x+1)^2} = \\ &= \frac{(A_{11} + A_{21})x^3 + (A_{11} + A_{12} - A_{21} + A_{22})x^2 + (-A_{11} + 2A_{12} - A_{21} - 2A_{22})x + (-A_{11} + A_{12} + A_{21} + A_{22})}{(x-1)^2(x+1)^2} \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow (A_{11} + A_{21})x^3 + (A_{11} + A_{12} - A_{21} + A_{22})x^2 + (-A_{11} + 2A_{12} - A_{21} - 2A_{22})x + (-A_{11} + A_{12} + A_{21} + A_{22}) = P(x) = 1$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} A_{11} + A_{21} = 0 \\ A_{11} + A_{12} - A_{21} + A_{22} = 0 \\ -A_{11} + 2A_{12} - A_{21} - 2A_{22} = 0 \\ -A_{11} + A_{12} + A_{21} + A_{22} = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \left\{ A_{11} = -\frac{1}{4}, A_{12} = \frac{1}{4}, A_{21} = \frac{1}{4}, A_{22} = \frac{1}{4} \right\}$$

2 Cálculo de integrales definidas

Por lo tanto

$$\begin{aligned}\int \frac{dx}{(x^2-1)^2} &= \frac{1}{4} \left(-\int \frac{dx}{x-1} + \int \frac{dx}{(x-1)^2} + \int \frac{dx}{x+1} + \int \frac{dx}{(x+1)^2} \right) \\ &= \frac{1}{4} \left(-\ln|x-1| - \frac{1}{x-1} + \ln|x+1| - \frac{1}{x+1} \right) + c \\ &= \frac{1}{4} \ln \left| \frac{x+1}{x-1} \right| - \frac{1}{4} \left(\frac{1}{x-1} + \frac{1}{x+1} \right) + c\end{aligned}$$

Los casos donde las raíces de Q son complejas se verán en otros cursos de Análisis.

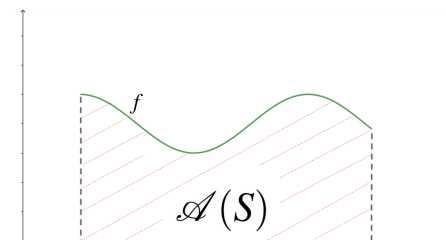
2 Cálculo de integrales definidas

Hay un concepto matemático que aprenderemos mas adelante: el de integral definida. Será introducido con toda formalidad en cursos de Análisis Matemático II. Aquí solamente vamos a vincularlo con el cálculo de primitivas mediante el Teorema de Barrow.

Introducción. El problema del área.

Históricamente el concepto de integral nació a partir de la necesidad de calcular el área de S , una región del plano (debajo de la gráfica de una función no negativa).

Problema: Si f está definida en $[a, b]$ y $f(x) \geq 0$ en $[a, b]$ queremos calcular el área de $S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : a \leq x \leq b, 0 \leq y \leq f(x)\}$.



En cursos avanzados de Análisis Matemático veremos que bajo ciertas hipótesis sobre la función f podemos calcular el área de la región S como la integral definida de f en $[a, b]$, es decir

$$\mathcal{A}(S) = \int_a^b f(x) dx$$

Como podemos ver aquí, la integral definida es un número, a diferencia de la integral indefinida que, como estudiamos en esta Unidad, es una familia de funciones. También se demostrarán en cursos más avanzados los teoremas fundamentales del cálculo:

Teorema 3. (Primer teorema fundamental del cálculo): Sea f integrable en $[a, x]$ para cada $x \in [a, b]$ y sea $c \in [a, b]$, definimos

$$F_c(x) = \int_c^x f(t) dt \quad \text{para } x \in [a, b]$$

Entonces F_c es continua en $[a, b]$ y además, si f es continua en $x \in (a, b)$, F_c es derivable en x y $F'_c(x) = f(x)$.

2 Cálculo de integrales definidas

Observación. El teorema nos dice, bajo hipótesis de continuidad de f , que

$$F_c(x) = \int_c^x f(t)dt \quad \text{es una primitiva de } f.$$

Teorema 4. (Segundo teorema fundamental del cálculo): Sea f continua en $[a, b]$ y sea P una primitiva de f en (a, b) . Entonces para todo $c \in (a, b)$ vale

$$P(x) = P(c) + \int_c^x f(t)dt \quad \text{para todo } x \in (a, b)$$

O bien

$$\int_c^x f(t)dt = P(x) - P(c)$$

Observación. El teorema anterior nos permite calcular integrales definidas, conocida una primitiva de la función integrando. Más precisamente, se tiene

Regla de Barrow Si P es una primitiva de f entonces

$$\int_a^b f(t)dt = P(b) - P(a)$$

Notación

$$P(x)|_a^b = P(b) - P(a)$$

Ejemplo.

$$\int_1^3 x^3 dx = \frac{x^4}{4} \Big|_1^3 = \frac{3^4}{4} - \frac{1^4}{4} = 20$$

Vimos que (Regla de Barrow) si f es continua en $[a, b]$ y P es una primitiva de f entonces podemos calcular la integral definida de f en $[a, b]$ como $P(b) - P(a)$, por lo tanto, el problema se centrará en hallar primitivas de f para luego aplicar Barrow.

Ejemplo. Calcular $\int_0^1 \frac{2}{x^2+1} dx$, para ello buscamos primitivas de $\frac{2}{x^2+1}$, o sea $\int \frac{2dx}{x^2+1} = 2\arctan x + c$. Luego aplicamos Barrow, entonces

$$\int_0^1 \frac{2dx}{x^2+1} = 2\arctan x \Big|_0^1 = 2(\arctan 1 - \arctan 0) = 2\frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2}.$$

Integración por sustitución y por partes en integrales definidas.

Combinando las fórmulas de integración por sustitución o por partes, con el 2º TFCI se puede probar que:

$$\begin{aligned} \int_a^b f(g(x))g'(x)dx &= \int_{g(a)}^{g(b)} f(t)dt \\ \int_a^b f(x)g'(x)dx &= f(x)g(x) \Big|_a^b - \int_a^b f'(x)g(x)dx \end{aligned}$$

2 Cálculo de integrales definidas

Ejemplo.

1) $\int_1^e \frac{\ln x}{x} dx$, haciendo la sustitución $\ln x = t$, es $\frac{1}{x} dx = dt$ y si $x = 1 \Rightarrow t = \ln 1 = 0$ y si $x = e \Rightarrow t = \ln e = 1$ luego

$$\int_1^e \frac{\ln x}{x} dx = \int_0^1 t dt = \left. \frac{t^2}{2} \right|_0^1 = \frac{1}{2}$$

2) $\int_0^1 x e^x dx$, por partes ponemos $f(x) = x \Rightarrow f'(x) = 1$ y $g'(x) = e^x \Rightarrow g(x) = e^x$ entonces

$$\int_0^1 x e^x dx = x e^x \Big|_0^1 - \int_0^1 e^x dx = 1e^1 - 0e^0 - e^x \Big|_0^1 = e - (e^1 - e^0) = 1$$