Relaciones - Parte 1

1 Definiciones

Recordemos que dados dos conjuntos A y B, un par ordenado es un objeto de la forma (a, b) donde a pertenece al conjunto A y b pertenece al conjunto B. El elemento a es la primera componente de (a, b) y b es la segunda componente de (a, b).

Observar que si (a, b) y (c, d) son pares ordenados, entonces $(a, b) = (c, d)$ si y solo si $a = c$ y $b = d$.

Definición: Dados dos conjuntos A y B, llamaremos producto cartesiano de A y B y lo indicaremos con $A \times B$ al conjunto formado por los pares ordenados (a, b) tales que a pertenece al conjunto A y b pertenece al conjunto B. Con las notaciones usuales de la teoría de conjuntos esto se escribe como:

$$A \times B = \{(a, b) : a \in A, b \in B\}.$$

Ejemplo 1. Si $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{a, b\}$, $C = \emptyset$, entonces:

$A \times B = \{(1, a), (1, b), (2, a), (2, b), (3, a), (3, b)\}$

$B \times A = \{(a, 1), (a, 2), (a, 3), (b, 1), (b, 2), (b, 3)\}$

$A \times C = B \times C = \emptyset$

Podemos graficar los elementos de un producto cartesiano como se muestra en la Figura 1. Por ejemplo si $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{a, b\}$, graficamos al conjunto A en una recta horizontal y al conjunto B en una recta vertical (los puntos en negro). Los elementos del producto cartesiano están representados por los puntos rojos. Cada uno de ellos corresponde a la combinación de un elemento de A y uno de B.

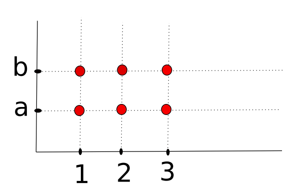

Figure 1: $\{1, 2, 3\} \times \{a, b\}$

Otro ejemplo: si $A = [2,3)$ y $B = [1,2)$, el producto cartesiano $A \times B$ puede graficarse en el plano como muestra la Figura 2, donde los elementos del producto cartesiano son los puntos del interior del rectángulo y los puntos de la frontera marcados con trazo continuo.

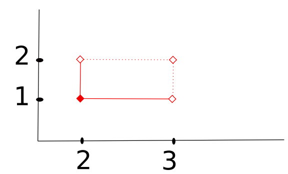

Figure 2: $[2,3) \times [1,2)$

Teorema 1.1. *Sean A, B y C conjuntos. Entonces:*

1. $A \times (B \cap C) = (A \times B) \cap (A \times C)$
2. $A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C)$
3. $(A \cap B) \times C = (A \times C) \cap (B \times C)$
4. $(A \cup B) \times C = (A \times C) \cup (B \times C)$

Demostración: Vamos a probar la primera igualdad. Hay que probar una igualdad de conjuntos, es decir, tenemos que probar la *doble inclusión*.

Para probar que $A \times (B \cap C) \subseteq (A \times B) \cap (A \times C)$, consideramos un elemento arbitrario de $A \times (B \cap C)$ y vemos que también pertenece a $(A \times B) \cap (A \times C)$.

Un elemento arbitrario de $A \times (B \cap C)$ es de la forma (a, x) donde $a \in A$ y $x \in B \cap C$ (por def. de producto cartesiano).

Ahora, por definición de intersección, $x \in B$ y $x \in C$.

Entonces, nuestro elemento arbitrario (a, x) en $A \times (B \cap C)$, verifica que $a \in A$, $x \in B$ y $x \in C$.

Por definición de producto cartesiano, resulta que (a, x) está en $A \times B$ y (a, x) está en $A \times C$.

Finalmente, por definición de intersección, (a, x) está en $(A \times B) \cap (A \times C)$, y probamos la primera inclusión.

La otra inclusión es análoga (el razonamiento inverso al anterior).

Ejercicio: Completar la demostración del Teorema. ■

Definición: Una relación de un conjunto A en un conjunto B es un subconjunto $\mathcal{R}$ de $A \times B$. Si $(a, b) \in \mathcal{R}$ se dice que a está relacionado con b por $\mathcal{R}$ y se nota $a\mathcal{R}b$. Si $(a, b) \notin \mathcal{R}$ se dice que a no está relacionado con b por $\mathcal{R}$.

Gráficamente, si $A = \{1, 2, 3\}$ y $B = \{a, b\}$, los puntos rojos de la Figura 3 representan tres relaciones diferentes de A en B.

A la izquierda está graficada la relación $\mathcal{R}_1 = \{(x, b) : x \in A\}$, es decir, todos los elementos de $A \times B$ cuya segunda componente es b. En el medio está graficada la relación $\mathcal{R}_2 = \{(3, x) : x \in B\}$, es decir, todos los elementos de $A \times B$ cuya primera componente es 3. Finalmente, a la derecha está graficada la relación $\mathcal{R}_3 = \{(1, a), (3, b)\}$.

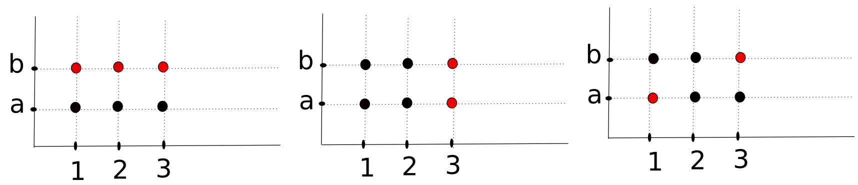

Figure 3: Relaciones $\mathcal{R}_1$, $\mathcal{R}_2$ y $\mathcal{R}_3$

Otra manera de graficar las relaciones es mediante diagramas de Venn. Las relaciones $\mathcal{R}_1$, $\mathcal{R}_2$ y $\mathcal{R}_3$ anteriores podemos representarlas como se muestra en la Figura 4 donde una flecha desde un elemento x de A hacia uno y de B indica que estos elementos están relacionados, es decir, que $x\mathcal{R}y$.

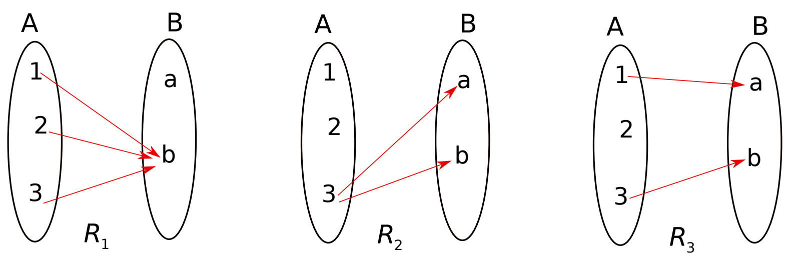

Figure 4: Relaciones $\mathcal{R}_1$, $\mathcal{R}_2$ y $\mathcal{R}_3$

Sea $\mathcal{R} \subseteq A \times B$. El dominio de $\mathcal{R}$, denotado $Dom(\mathcal{R})$, es el conjunto

$$Dom(\mathcal{R}) = \{a \in A : (a, b) \in \mathcal{R}, \text{ para algún } \ b \in B\},$$

y la imagen de $\mathcal{R}$, denotada por $Im(\mathcal{R})$ es el conjunto

$$Im(\mathcal{R}) = \{b \in B : (a, b) \in \mathcal{R}, \text{ para algún } \ a \in A\}.$$

Observar que, por definición, $Dom(\mathcal{R}) \subseteq A$ y $Im(\mathcal{R}) \subseteq B$.

Ejemplo 2.

1. Si $\mathcal{R}_1$, $\mathcal{R}_2$ y $\mathcal{R}_3$ son las relaciones de la Figura 4, tenemos que:
   $Dom(\mathcal{R}_1) = \{1, 2, 3\} = A$, $Im(\mathcal{R}_1) = \{b\}$.
   $Dom(\mathcal{R}_2) = \{3\}$, $Im(\mathcal{R}_2) = \{a, b\} = B$.
   $Dom(\mathcal{R}_3) = \{1, 3\}$, $Im(\mathcal{R}_3) = \{a, b\} = B$.
2. Sean $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{2, 3, 4, 5\}$ y $\mathcal{R}_4 = \{(a, b) : a < b\} \subseteq A \times B$.
   En este ejemplo: $Dom(\mathcal{R}_4) = \{1, 2, 3\}$, $Im(\mathcal{R}_4) = B$.
3. Sea $A = \mathbb{R}$. Para $x, y \in \mathbb{R}$ se define $x\mathcal{R}_5y$ si y solo si $y = x^2$
   Resulta $Dom(\mathcal{R}_5) = \mathbb{R}$, $Im(\mathcal{R}_5) = \{x \in \mathbb{R} : x \geq 0\}$.

4. Si $x, y \in \mathbb{Z}$ se define $x\mathcal{R}y$ si y solo si x divide a y $(x|y)$. $\mathcal{R}$ es una relación de $\mathbb{Z}$ en $\mathbb{Z}$, con $Dom(\mathcal{R}_6) = Im(\mathcal{R}_6) = \mathbb{Z}$

5. Sea $\mathcal{R}_7$ la relación de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$ tal que $(x, y) \in \mathcal{R}_7$ si y solo si $y \geq 0$ y $2y \leq x \leq 2$. Esta relación puede graficarse como muestra la Figura 5, donde los elementos de la relación son los puntos del triángulo rojo (incluida su frontera). En este ejemplo, $Dom(\mathcal{R}_7) = [0, 2]$ y $Im(\mathcal{R}_6) = [0, 1]$

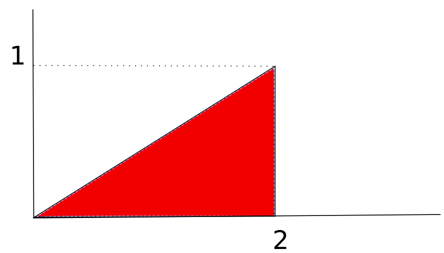

Figure 5: $\mathcal{R}_7$

Ejercicio: Graficar las relaciones $\mathcal{R}_4$, $\mathcal{R}_5$ y $\mathcal{R}_6$ del Ejemplo 2.

Definición: Sea $\mathcal{R}$ una relación de un conjunto A en un conjunto B. Si $a \in A$, el conjunto

$$\mathcal{R}(\{a\}) = \mathcal{R}(a) = \{b \in B : (a, b) \in \mathcal{R}\}$$

es la imagen de a por $\mathcal{R}$, y si $b \in B$, la pre-imagen de b por $\mathcal{R}$ es el conjunto

$$\mathcal{R}^{-1}(\{b\}) = \mathcal{R}^{-1}(b) = \{a \in A : (a, b) \in \mathcal{R}\}.$$

Por ejemplo, considerando las relaciones del ítem 1 del Ejemplo 2 tenemos que:

- $\mathcal{R}_1(\{1\}) = \{b\}$
- $\mathcal{R}_2(\{1\}) = \emptyset$
- $\mathcal{R}_3(\{1\}) = \{a\}$
- $\mathcal{R}_1^{-1}(\{a\}) = \emptyset$
- $\mathcal{R}_2^{-1}(\{a\}) = \{3\}$
- $\mathcal{R}_3^{-1}(\{a\}) = \{1\}$

En el caso del Ejemplo 2.5, para encontrar $\mathcal{R}_7(1)$, tenemos que mirar el segmento azul de la Figura 6, por lo tanto $\mathcal{R}_7(1) = [0, 1/2]$.

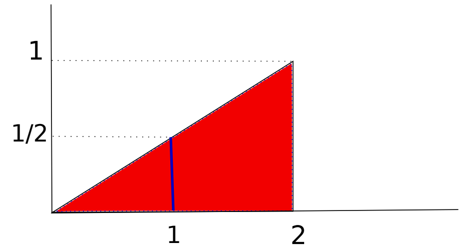

Figure 6: $\mathcal{R}_7(1)$

Y, si queremos encontrar $\mathcal{R}_7^{-1}(1/2)$, tenemos que mirar el segmento azul de la Figura 7, por lo tanto $\mathcal{R}_7^{-1}(1/2) = [1, 2]$

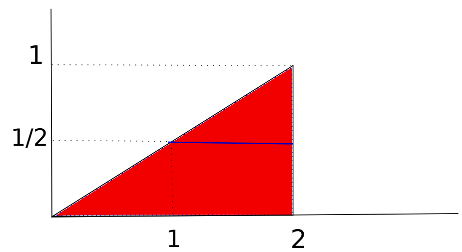

Figure 7: $\mathcal{R}_7(1)$

Definición: En general, si $\mathcal{R}$ una relación de un conjunto A en un conjunto B y X es un subconjunto de A, el conjunto

$$\mathcal{R}(X) = \{b \in B : (a, b) \in \mathcal{R}, \text{para algún } a \in X\}$$

es la imagen de X por $\mathcal{R}$, y si Y es un subconjunto de B, la pre-imagen de Y por $\mathcal{R}$ es el conjunto

$$\mathcal{R}^{-1}(Y) = \{a \in A : (a, b) \in \mathcal{R}, \text{para algún } b \in Y\}.$$

Por ejemplo, en el ítem 2 del Ejemplo 2, tenemos que si $X = \{1, 2\}$

$$\mathcal{R}_4(X) = \mathcal{R}_4(\{1, 2\}) = \mathcal{R}_4(\{1\}) \cup \mathcal{R}_4(\{2\}) = B \cup \{3, 4, 5\} = B.$$

Ahora, en el mismo ejemplo, si $Y = \{2, 3\}$

$$\mathcal{R}_4^{-1}(Y) = \mathcal{R}_4^{-1}(\{2, 3\}) = \mathcal{R}_4^{-1}(\{2\}) \cup \mathcal{R}_4^{-1}(\{3\}) = \{1\} \cup \{1, 2\}.$$

Definición: Sea $\mathcal{R}$ una relación de un conjunto A en un conjunto B. La relación inversa de $\mathcal{R}$, denotada por $\mathcal{R}^{-1}$ es una relación de B en A definida por: $x\mathcal{R}^{-1}y$ si y solo si $y\mathcal{R}x$. es decir:

$$\mathcal{R}^{-1} = \{(x, y) : (y, x) \in \mathcal{R}\}.$$

Ejemplo 3. Sean $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{x, y, z\}$ y $\mathcal{R}$ la relación de A en B definida por $\mathcal{R} = \{(1, y), (1, z), (2, z)\}$. Entonces, $\mathcal{R}^{-1}$ es la relación de B en A definida por $\mathcal{R}^{-1} = \{(y, 1), (z, 1), (z, 2)\}$.

Gráficamente, las relaciones $\mathcal{R}$ y $\mathcal{R}^{-1}$ del Ejemplo 3 son como muestra la Figura 8.

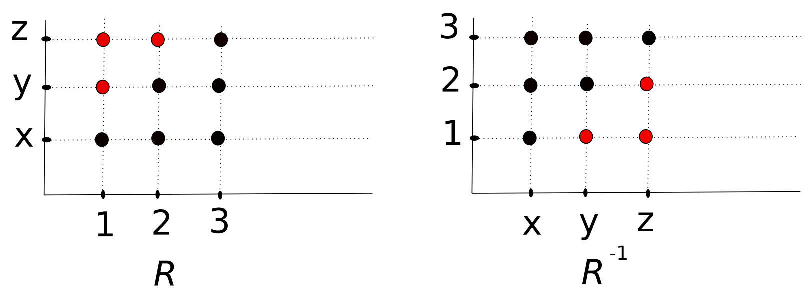

Figure 8: $\mathcal{R}$ y $\mathcal{R}^{-1}$

Es fácil observar que $Dom(\mathcal{R}^{-1}) = Im(\mathcal{R})$ y que $Im(\mathcal{R}^{-1}) = Dom(\mathcal{R})$. (Justificar!)

Nota 1.2. *No confundir!*
Si $\mathcal{R}$ es una relación de un conjunto A en un conjunto B, $x \in A$, $X \subseteq A$, entonces:

1. *$\mathcal{R}^{-1}(x)$ es la pre-imagen del elemento x por $\mathcal{R}$.*
2. *$\mathcal{R}^{-1}(X)$ es la pre-imagen del subconjunto X por $\mathcal{R}$.*
3. *$\mathcal{R}^{-1}$ es la relación inversa de $\mathcal{R}$.*

Teorema 1.3. *Si $\mathcal{R}$ es una relación de un conjunto A en un conjunto B, entonces $(\mathcal{R}^{-1})^{-1} = \mathcal{R}$.*

Demostración: Ejercicio. ■

Definición: Sean $\mathcal{R}$ una relación de un conjunto A en un conjunto B y $\mathcal{S}$ una relación de B en un conjunto C. La relación *composición* de $\mathcal{R}$ con $\mathcal{S}$, denotada por $\mathcal{S} \circ \mathcal{R}$ es una relación de A en C definida por: $x\mathcal{S} \circ \mathcal{R}y$ si y solo si existe $u \in B$ tal que $x\mathcal{R}u$ y $u\mathcal{S}y$. Es decir,

$$\mathcal{S} \circ \mathcal{R} = \{(x, y) \in A \times C : (x, u) \in \mathcal{R}\text{y}(u, y) \in \mathcal{S},\ \text{para algún}\, u \in B\}.$$

Ejemplo 4.

Figure 9: $\mathcal{R}$ y $\mathcal{S}$

1. Sean $A = \{1, 2, 3, 4\}$, $B = \{x, y, z, w\}$ y $C = \{1, 2, 4, 8\}$ y las relaciones

$$\mathcal{R} = \{(1, x), (1, z), (2, w), (3, x)\} \subseteq A \times B$$

y

$$\mathcal{S} = \{(x, 8), (y, 4), (z, 2), (w, 1)\} \subseteq B \times C$$

.

Gráficamente, las relaciones $\mathcal{R}$ y $\mathcal{S}$ son:

Entonces

- como $(1, x) \in \mathcal{R}$ y $(x, 8) \in \mathcal{S}$, resulta $(1, 8) \in \mathcal{S} \circ \mathcal{R}$,
- también $(2, 1) \in \mathcal{S} \circ \mathcal{R}$ ya que $(2, w) \in \mathcal{R}$ y $(w, 1) \in \mathcal{S}$,
- pero $(1, 4) \notin \mathcal{S} \circ \mathcal{R}$ ya que no existe $u \in B$ tal que $(1, u) \in \mathcal{R}$ y $(u, 4) \in \mathcal{S}$.

Gráficamente, podemos pensar en que la composición de relaciones está dada por los *caminos de flechas* entre los diagramas de Venn. Observar que las dos flechas rojas de la Figura 10 garantizan que el elemento $(1, 8)$ pertenece a $\mathcal{S} \circ \mathcal{R}$, y las dos flechas azules, que $(1, 2)$ pertenece a $\mathcal{S} \circ \mathcal{R}$,

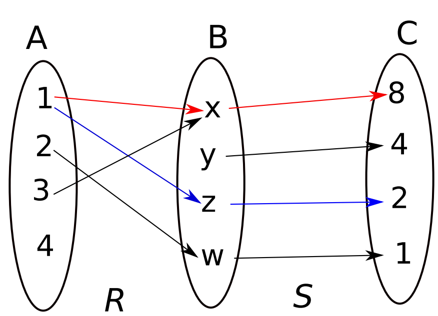

Figure 10: $\mathcal{S} \circ \mathcal{R}$

2. Si $\mathcal{R}$ es la relación del Ejemplo 3, no es difícil ver que $\mathcal{R}^{-1} \circ \mathcal{R} = \{(1,1),(1,2),(2,2),(2,1)\}$ (Ejercicio: justificar).

Teorema 1.4. *Sean $\mathcal{R}$ una relación de un conjunto A en un conjunto B, $\mathcal{S}$ una relación de B en un conjunto C y $\mathcal{T}$ una relación de C en un conjunto D. Entonces*

1. $\mathcal{T} \circ (\mathcal{S} \circ \mathcal{R}) = (\mathcal{T} \circ \mathcal{S}) \circ \mathcal{R}$. *Es decir, la composición de relaciones es asociativa.*
2. $(\mathcal{T} \circ \mathcal{S})^{-1} = \mathcal{S}^{-1} \circ \mathcal{T}^{-1}$.

Nota 1.5. *En general, la composición de relaciones no es conmutativa, como muestra el siguiente ejemplo.*

Ejemplo 5. Sean $A = B = C = \{1,2,3,4\}$, y las relaciones $\mathcal{R} = \{(1,1),(1,2),(2,3),(3,4)\} \subseteq A \times B$ y $\mathcal{S} = \{(1,4),(2,4),(3,2),(4,1)\} \subseteq B \times C$. Es fácil verificar que $(1,4) \in \mathcal{R} \circ \mathcal{S}$ pero $(1,4) \notin \mathcal{S} \circ \mathcal{R}$

2 Ejercicios

1. Si $U = \mathbb{N}$, $A = \{1,2,3,4\}$, $B = \{2,5\}$ y $C = \{3,4,7\}$, determinar y graficar los siguientes conjuntos como subconjuntos del plano:
   (a) $A \times B$
   (b) $B \times A$
   (c) $(A \times C) \cap (B \times C)$
   (d) $(A \cap B) \times C$
   (e) $(A \times C) \cup (B \times C)$
   (f) $(A \cup B) \times C$
2. Completar la prueba del Teorema 1.1.
3. Sean $U = R$, $A = [1,2)$, $B = [2,3]$ y $C = (\frac{3}{2},3)$. Determinar gráficamente en R^2:
   (a) $A \times C$
   (b) $B \times C$
   (c) $(A \times C) \cap (B \times C)$
   (d) $(A \cap B) \times C$
   (e) $(A \times C) \cup (B \times C)$
   (f) $(A \cup B) \times C$

En cada caso determinar un punto del plano que pertenezca al conjunto dado y uno que no.

4. Sean A, B, C subconjuntos de un conjunto universal U . Demostrar que $A \times (B - C) = A \times B - A \times C$.

5. Si $A = \{1, 2, 3\}$ y $B = \{2, 4, 5\}$, dar ejemplos de:

   (a) Tres relaciones binarias no vacías de A en B. Graficar $A \times B$ y las tres relaciones como subconjuntos del plano.

   (b) Tres relaciones binarias no vacías de A en A. Graficar $A^2 = A \times A$ y las tres relaciones como subconjuntos del plano.

6. Sean $A = \{0, 1, 2, 3, 4\}$, $B = \{3, 4, 5, 6\}$. Expresar por extensión los subconjuntos $\mathcal{R}$ de $A \times B$ definidos por:

   (a) $(x, y) \in \mathcal{R}$ si y solo si $x + y$ es múltiplo de 3.

   (b) $(x, y) \in \mathcal{R}$ si y solo si $y - x$ es un número natural primo.

7. Sea $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$. Expresar por extensión los subconjuntos $\mathcal{R}$ de $A \times A$ definidos por las relaciones siquientes:

   (a) $(x, y) \in \mathcal{R}$ si y solo si $x + y \leq 6$.

   (b) $(x, y) \in \mathcal{R}$ si y solo si $x = y - 1$.

8. Para cada una de las relaciones de los ejercicios 6 y 7 determinar

   (a) $\mathcal{R}(1)$, $\mathcal{R}(3)$

   (b) $\mathcal{R}^{-1}(4)$ y $\mathcal{R}^{-1}(5)$

9. Sean $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, $B = \{a, b, c, d, e, f, g, h\}$ y sea $\mathcal{R}$ la relación de A en B definida por:

$$\mathcal{R} = \{(2, a), (2, b), (5, g), (6, f), (3, a), (4, b), (2, c), (5, d), (4, d), (3, d)\}$$

   Graficar $\mathcal{R}$ y hallar:

   (a) $\mathcal{R}(\{1\})$

   (b) $\mathcal{R}(\{2, 3\})$

   (c) $\mathcal{R}(\{1, 4, 5\})$

   (d) $\mathcal{R}(A)$

   (e) $\mathcal{R}^{-1}(\{c\})$

   (f) $\mathcal{R}^{-1}(\{a, d\})$

   (g) $\mathcal{R}^{-1}(\{b, c, g\})$

   (h) $\mathcal{R}^{-1}(B)$

10. Sea $\mathcal{R}$ la relación de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$ definida por:

    $(x, y) \in \mathcal{R}$ si y solo si $x, y \geq 0$ y $x \leq y$.

    Graficar $\mathcal{R}$ y hallar:

(a) $\mathcal{R}(\{2\})$

(b) $\mathcal{R}(\{-1\})$

(c) $\mathcal{R}((0,1])$

(d) $\mathcal{R}(\mathbb{R})$

(e) $\mathcal{R}^{-1}(\{0\})$

(f) $\mathcal{R}^{-1}(\{-1\})$

(g) $\mathcal{R}^{-1}((2,3))$

(h) $\mathcal{R}^{-1}(\mathbb{R})$

11. Hallar $\mathcal{S} \circ \mathcal{R}$ en el Ejemplo 4.

12. Determinar $\mathcal{R}_1 \circ \mathcal{R}_2$ y $\mathcal{R}_2 \circ \mathcal{R}_1$, siendo $\mathcal{R}_1$ y $\mathcal{R}_2$ las relaciones en $A = \{1, 2, 3, 4\}$ dadas por: $\mathcal{R}_1 = \{(1, 1), (1, 2), (3, 4), (4, 2)\}$ y $\mathcal{R}_2 = \{(1, 1), (2, 1), (3, 1), (4, 4), (2, 2)\}$.

13. Completar la prueba del Teorema 1.4.