3

Teoría de conjuntos

Detrás de las matemáticas que estudiamos en álgebra, geometría, combinatoria y casi todas las demás áreas de las matemáticas contemporáneas está el concepto de conjunto. Con mucha frecuencia, este concepto proporciona una estructura subyacente para una formulación concisa del tema matemático en cuestión. En consecuencia, muchos libros de matemáticas tienen un capítulo introductorio de teoría de conjuntos, o mencionan en un apéndice aquellas partes de la teoría necesarias en el texto. En nuestro caso, al abrir el libro con un capítulo acerca de los fundamentos del conteo, parecería que hemos dejado de lado la teoría de conjuntos. En realidad, hemos confiado en la intuición; cada vez que aparecía la palabra *colección* en el capítulo 1, hablábamos de un conjunto. También en las secciones 2.4 y 2.5 utilizamos el concepto de conjunto (aunque no el término) cuando hablamos del universo (de discurso) para una proposición abierta.

Tratar de definir un conjunto es bastante difícil y con frecuencia da lugar a un uso circular de sinónimos como "clase", "colección" y "agregado". Cuando comenzamos el estudio de la geometría, utilizamos nuestra intuición para manejar las ideas de punto, línea e incidencia. Después empezamos a definir nuevos términos y a demostrar teoremas con base en estas nociones intuitivas, junto con ciertos axiomas y postulados. En nuestro estudio sobre la teoría de conjuntos volveremos a apelar a la intuición, esta vez para las ideas comparables de elemento, conjunto y pertenencia.

Veremos que las ideas de la lógica desarrolladas en el capítulo 2 están íntimamente ligadas a la teoría de conjuntos, y muchas de las demostraciones que estudiaremos en este capítulo se basan en ellas. Este capítulo incluye también unos cuantos casos en los que se aplica el tipo de demostración combinatoria (del capítulo 1).

3.1 Conjuntos y subconjuntos

Tenemos cierta "noción intuitiva" en el sentido de que un conjunto debe ser una colección bien definida de objetos. Estos objetos se llaman *elementos* y se dice que son *miembros* del conjunto.

El adjetivo *bien definido* implica que para cualquier elemento que consideremos, podemos determinar si está en el conjunto observado. En consecuencia, evitaremos trabajar con conjuntos que dependan de las opiniones, como el conjunto de los mejores lanzadores de las ligas mayores de béisbol en la década de 1980.

Utilizaremos letras mayúsculas, como A, B, C, . . . , para representar los conjuntos y letras minúsculas para representar los elementos. Para un conjunto A, escribiremos $x \in A$ si x es un elemento de A; $y \notin A$ indica que y no es miembro de A.

Ejemplo 3.1

Un conjunto puede designarse enumerando sus elementos dentro de *llaves*. Por ejemplo, si A es el conjunto formado por los cinco primeros enteros positivos, escribimos $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$. En este caso, $2 \in A$ pero $6 \notin A$.

Otra notación común para este conjunto es $A = \{x | x \text{ es un entero y } 1 \leq x \leq 5\}$. En este caso, la línea vertical | que aparece dentro de las llaves se lee como "tal que". Los símbolos $\{x | \ldots\}$ se leen como "el conjunto de todos los x tales que..." Las propiedades que van después de | nos ayudan a determinar los elementos del conjunto descrito.

¡Tenga cuidado! La notación $\{x | 1 \leq x \leq 5\}$ no es una descripción adecuada del conjunto A, a menos hayamos acordado previamente que los elementos considerados son enteros. Al adoptar esa convención, decimos que estamos especificando un *universo*, o *universo de discurso*, que por lo general se denota como $\mathcal{U}$; así, sólo elegiremos elementos de $\mathcal{U}$ para formar nuestros conjuntos. En este problema particular, si $\mathcal{U}$ denota el conjunto de todos los enteros o el conjunto de todos los enteros positivos, entonces $\{x | 1 \leq x \leq 5\}$ es una descripción adecuada de A. Si $\mathcal{U}$ es el conjunto de todos los números reales, $\{x | 1 \leq x \leq 5\}$ contendría todos los números reales entre 1 y 5 inclusive; si $\mathcal{U}$ está formado solamente por enteros pares, los únicos miembros de $\{x | 1 \leq x \leq 5\}$ serían 2 y 4.

Ejemplo 3.2

Si $\mathcal{U} = \{1, 2, 3, \ldots\}$ es el conjunto de los enteros positivos, sean

a) $A = \{1, 4, 9, \ldots, 64, 81\} = \{x^2 | x \in \mathcal{U}, x^2 < 100\} = \{x^2 | x \in \mathcal{U} \wedge x^2 < 100\} = \{x \in \mathcal{U} | x^2 < 100\}$.
b) $B = \{1, 4, 9, 16\} = \{y^2 | y \in \mathcal{U}, y^2 < 20\} = \{y^2 | y \in \mathcal{U}, y^2 < 23\} = \{y^2 | y \in \mathcal{U} \wedge y^2 < 17\} = \{y^2 \in \mathcal{U} | y^2 \leq 16\}$.
c) $C = \{2, 4, 6, 8, \ldots\} = \{2k | k \in \mathcal{U}\}$.

Los conjuntos A y B son ejemplos de conjuntos *finitos*, mientras que C es un conjunto *infinito*. Al trabajar con conjuntos como A o C, podemos describir los conjuntos en términos de las propiedades que deben satisfacer sus elementos o enumerar los elementos suficientes para indicar, esperemos, un patrón evidente. Para cualquier conjunto finito A, $|A|$ denota el número de sus elementos y se conoce como el *cardinal*, o *tamaño*, de A. En este ejemplo, tenemos que $|A| = 9$ y $|B| = 4$.

En este caso, los conjuntos B y A son tales que todo elemento de B es también un elemento de A. Esta importante relación aparece en toda la teoría de conjuntos y sus aplicaciones, y conduce a la siguiente definición.

Definición 3.1

Si C, D son conjuntos del universo $\mathcal{U}$, decimos que C es un *subconjunto* de D y escribimos $C \subseteq D$, o $D \supseteq C$, si cada elemento de C es un elemento de D. Si, además, D contiene un elemento que no está en C, entonces C es un *subconjunto propio* de D y se denota como $C \subset D$ o $D \supset C$.

Observe que para cualesquiera conjuntos C, D del universo $\mathscr{U}$, si $C \subseteq D$, entonces

$$\forall x[x \in C \Rightarrow x \in D],$$

y si $\forall x[x \in C \Rightarrow x \in D]$, entonces $C \subseteq D$.

Aquí el cuantificador universal $\forall x$ indica que debemos considerar cada elemento x del universo dado $\mathscr{U}$. Sin embargo, para cada reemplazo c (elemento de $\mathscr{U}$) tal que la proposición $c \in C$ sea falsa, sabemos que la implicación $c \in C \rightarrow c \in D$ es verdadera, independientemente del valor de verdad de la proposición $c \in D$. En consecuencia, realmente sólo necesitamos considerar aquellos reemplazos c' (elementos de $\mathscr{U}$) en los que la proposición $c' \in C$ sea verdadera. Si para cada c' tenemos que la proposición $c' \in D$ es verdadera, entonces sabemos que $\forall x[x \in C \Rightarrow x \in D]$ o, en forma equivalente, $C \subseteq D$.

Además, para todos los subconjuntos C, D de $\mathscr{U}$,

$$C \subset D \Rightarrow C \subseteq D,$$

y cuando C, D son finitos,

$$C \subseteq D \Rightarrow |C| \leq |D|, \qquad \text{y}$$
$$C \subset D \Rightarrow |C| < |D|.$$

Sin embargo, para $\mathscr{U} = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $C = \{1, 2\}$ y $D = \{1, 2\}$, vemos que C es un subconjunto de D (es decir, $C \subseteq D$), pero no es un subconjunto propio de D ($C \not\subset D$). Así, en general, *no* tenemos que $C \subseteq D \Rightarrow C \subset D$.

Ejemplo 3.3

El nombre de una variable en el ANSI FORTRAN (ANSI son las siglas del American National Standards Institute, Instituto Nacional de Estándares de Estados Unidos) consta de una sola letra seguida a lo sumo de cinco caracteres (letras o dígitos). Si $\mathscr{U}$ es el conjunto de todos estos nombres de variables, entonces, por las reglas de la suma y el producto, $|\mathscr{U}| = 26 + 26(36) + 26(36)^2 + \cdots + 26(36)^5 = 26\sum_{i=0}^{5} 36^i = 1{,}617{,}038{,}306$, de modo que $\mathscr{U}$ es un conjunto grande, aunque finito. Una variable entera en este lenguaje de programación debe comenzar con una de las letras I, J, K, L, M, N. Así, si A es el subconjunto de todas las variables enteras en ANSI FORTRAN, entonces $|A| = 6 + 6(36) + 6(36)^2 + \cdots + 6(36)^5 = 6\sum_{i=0}^{5} 36^i = 373{,}162{,}686$.

Podemos usar ahora el concepto de subconjunto para desarrollar la idea de igualdad entre conjuntos. Consideremos primero el siguiente ejemplo.

Ejemplo 3.4

Para el universo $\mathscr{U} = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, consideremos el conjunto $A = \{1, 2\}$. Si $B = \{x \mid x^2 \in \mathscr{U}\}$, entonces los miembros de B son 1, 2. En este caso, A y B contienen los mismos elementos (y ninguno más), lo cual nos lleva a pensar que los conjuntos A y B son *iguales*.

Sin embargo, también es cierto que $A \subseteq B$ y $B \subseteq A$, por lo que preferimos definir la idea de igualdad entre conjuntos mediante estas relaciones de contenido. Esto nos lleva a la siguiente definición.

Definición 3.2

Para un universo dado $\mathscr{U}$, los conjuntos C y D (tomados de $\mathscr{U}$) son *iguales*, y esto se escribe $C = D$, cuando $C \subseteq D$ y $D \subseteq C$.

A partir de estas ideas de igualdad entre conjuntos, vemos que el orden o la repetición no son significativos para un conjunto en general. Así, tenemos, por ejemplo: $\{1, 2, 3\} = \{3, 1, 2\} = \{2, 2, 1, 3\} = \{1, 2, 1, 3, 1\}$.

Ahora que hemos establecido los conceptos de subconjunto e igualdad entre conjuntos, usaremos los cuantificadores de la sección 2.4 para analizar las negaciones de estas ideas.

Para un universo dado $\mathcal{U}$, sean A, B conjuntos tomados de $\mathcal{U}$. Entonces podemos escribir

$$A \subseteq B \Leftrightarrow \forall x[x \in A \Rightarrow x \in B].$$

De la definición (cuantificada) de $A \subseteq B$, tenemos que

$$\begin{aligned} A \nsubseteq B &\text{ (es decir, } A \text{ no es subconjunto de } B\text{)} \\ &\Leftrightarrow \neg\, \forall x[x \in A \Rightarrow x \in B] \\ &\Leftrightarrow \exists x \neg[x \in A \Rightarrow x \in B] \\ &\Leftrightarrow \exists x \neg[\neg(x \in A) \vee x \in B] \\ &\Leftrightarrow \exists x[x \in A \wedge \neg(x \in B)] \\ &\Leftrightarrow \exists x[x \in A \wedge x \notin B]. \end{aligned}$$

Por lo tanto, $A \nsubseteq B$ si existe al menos un elemento x en el universo tal que x es miembro de A pero x no es miembro de B.

De manera análoga, como $A = B \Leftrightarrow A, \subseteq B \wedge B \subseteq A$, entonces

$$A \neq B \Leftrightarrow \neg(A \subseteq B \wedge B \subseteq A) \Leftrightarrow \neg(A \subseteq B) \vee \neg(B \subseteq A) \Leftrightarrow A \nsubseteq B \vee B \nsubseteq A.$$

Por lo tanto, dos conjuntos A y B no son iguales si y sólo si (1) existe al menos un elemento $x \in \mathcal{U}$ tal que $x \in A$ pero $x \notin B$, o (2) existe al menos un elemento $y \in \mathcal{U}$ tal que $y \in B$ pero $y \notin A$; o tal vez ocurran (1) y (2).

También observamos que para cualesquiera conjuntos $C, D \subseteq \mathcal{U}$ (es decir, $C \subseteq \mathcal{U}$ y $D \subseteq \mathcal{U}$),

$$C \subset D \Leftrightarrow C \subseteq D \wedge C \neq D.$$

Ahora que hemos presentado las cuatro ideas de pertenencia, igualdad entre conjuntos, subconjunto y subconjunto propio, examinaremos un ejemplo más para ver que lo *no* indican estos conceptos. Después de este ejemplo, la demostración del primer teorema de este capítulo será casi directa, ya que se sigue sin dificultad de algunas de estas ideas.

Ejemplo 3.5 Sea $\mathcal{U} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, x, y, \{1, 2\}, \{1, 2, 3\}, \{1, 2, 3, 4\}\}$ (donde x, y son letras minúsculas del alfabeto y no representan nada más, al igual que 3, 5 o $\{1, 2\}$). Entonces, $|\mathcal{U}| = 11$.

a) Si $A = \{1, 2, 3, 4\}$, entonces $|A| = 4$ y tenemos

i) $A \subseteq \mathcal{U}$; **ii)** $A \subset \mathcal{U}$; **iii)** $A \in \mathcal{U}$;
iv) $\{A\} \subseteq \mathcal{U}$; **v)** $\{A\} \subset \mathcal{U}$; pero **vi)** $\{A\} \notin \mathcal{U}$.

b) Ahora sea $B = \{5, 6, x, y, A\} = \{5, 6, x, y, \{1, 2, 3, 4\}\}$. Entonces $|B| = 5$, *no* 8. Y ahora vemos que

i) $A \in B$; **ii)** $\{A\} \subseteq B$; y, **iii)** $\{A\} \subset B$.

Pero

iv) $\{A\} \notin B$;

v) $A \not\subseteq B$ (es decir, A no es subconjunto de B); y

vi) $A \not\subset B$ (es decir, A no es subconjunto propio de B).

EOREMA 3.1 Sean $A, B, C \subseteq \mathcal{U}$.

a) Si $A \subseteq B$ y $B \subseteq C$, entonces $A \subseteq C$. **b)** Si $A \subset B$ y $B \subseteq C$, entonces $A \subset C$.
c) Si $A \subseteq B$ y $B \subset C$, entonces $A \subset C$. **d)** Si $A \subset B$ y $B \subset C$, entonces $A \subset C$.

Antes de demostrar este teorema queremos recordar un comentario de la sección 2.5, relativo a nuestro tratamiento de las reglas de especificación y generalización universales, que apareció antes de la definición 2.8, ya que es apropiado en esta nueva área de la teoría de conjuntos. Por ejemplo, cuando queremos demostrar que $x \in A \Rightarrow x \in C$, debemos comenzar considerando cualquier elemento x en $\mathcal{U}$, fijo pero elegido en forma arbitraria; queremos que este elemento x sea tal que "$x \in A$" sea una proposición verdadera (*no* una proposición abierta). Entonces, debemos mostrar que este mismo elemento x, fijo pero elegido en forma arbitraria, también está en C. Las demostraciones que presentamos a continuación se conocen como *argumentos de pertenencia de un elemento*. Siempre habrá que tener presente que, en todas estas demostraciones, x representa un elemento de A, fijo pero elegido en forma arbitraria; y aunque x sea genérico (ya que *no* es un elemento específico de A), es el mismo durante toda la demostración.

Demostración: nos dedicaremos a las partes(a) y (b) y dejaremos el resto para los ejercicios.

a) Para demostrar que $A \subseteq C$, necesitamos verificar que para todo $x \in \mathcal{U}$, si $x \in A$ entonces $x \in C$. Partimos de un elemento x de A. Como $A \subseteq B$, $x \in A$ implica $x \in B$. Entonces, con $B \subseteq C$, $x \in B$ implica $x \in C$. Así, $x \in A$ implica $x \in C$ (por la ley del silogismo, regla 2 de la tabla 2.20, ya que $x \in A$, $x \in B$ y $x \in C$ son proposiciones) y $A \subseteq C$.

b) Como $A \subset B$, si $x \in A$ entonces $x \in B$. Con $B \subseteq C$, se sigue entonces que $x \in C$, por lo que $A \subseteq C$. Sin embargo $A \subset B \Rightarrow$ existe un elemento $b \in B$ tal que $b \notin A$. Como $B \subseteq C$, $b \in B \Rightarrow b \in C$. Así, $A \subseteq C$ y existe un elemento $b \in C$ con $b \notin A$, por lo que $A \subset C$.

Nuestro siguiente ejemplo se refiere a varias relaciones de contenido.

Ejemplo 3.6 Sea $\mathcal{U} = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, con $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{3, 4\}$ y $C = \{1, 2, 3, 4\}$. Entonces se cumplen las siguientes relaciones de contenido de subconjuntos.

a) $A \subseteq C$ **b)** $A \subset C$
c) $B \subset C$ **d)** $A \subseteq A$
e) $B \not\subseteq A$ **f)** $A \not\subset A$ (es decir, A no es un subconjunto propio de A)

Los conjuntos A, B son sólo dos de los subconjuntos de C. Nos interesa determinar cuántos subconjuntos tiene C en total. Sin embargo, antes de responder esto, necesitamos presentar el conjunto sin elementos.

Definición 3.3 El *conjunto vacío*, o *nulo*, es el (único) conjunto que no contiene elementos. Se denota como $\emptyset$ o $\{\}$.

Observemos que $|\emptyset| = 0$, pero $\{0\} \neq \emptyset$. Así mismo, $\emptyset \neq \{\emptyset\}$, ya que $\{\emptyset\}$ es un conjunto con un elemento, a saber, el conjunto vacío.

El conjunto vacío satisface la siguiente propiedad dada en el teorema 3.2. Para establecer dicha propiedad usamos el método de demostración por contradicción (o *reducción al absurdo*). Después de la demostración del teorema 2.4 (en la sección 2.5), dijimos que, al establecer un teorema con este método, habíamos supuesto la negación del resultado y llegado a una contradicción. En nuestro trabajo anterior (como en el ejemplo 2.33 y la tercera demostración del teorema 2.4), llegamos a una contradicción de la forma $r \wedge \neg r$ o $p(m) \wedge \neg p(m)$, respectivamente, donde $\neg r$ era una premisa del ejemplo 2.33 y $p(m)$ un caso específico de la hipótesis del teorema 2.4. Las cosas varían un poco para la demostración del teorema 3.2. Esta vez estaremos negando (o contradiciendo) un resultado anterior que aceptamos como verdadero, esto es, la definición del conjunto vacío.

TEOREMA 3.2 Para cualquier universo $\mathscr{U}$, sea $A \subseteq \mathscr{U}$. Entonces $\emptyset \subseteq A$ y si $A \neq \emptyset$, entonces $\emptyset \subset A$.

Demostración: Si el primer resultado no es verdadero, entonces $\emptyset \not\subseteq A$, por lo que existe un elemento x del universo tal que $x \in \emptyset$ pero $x \notin A$. Pero $x \in \emptyset$ es imposible. Así, rechazamos la hipótesis $\emptyset \not\subseteq A$ y vemos que $\emptyset \subseteq A$. Además, si $A \neq \emptyset$, entonces existe un elemento $a \in A$ (y $a \notin \emptyset$), por lo que $\emptyset \subset A$.

Ejemplo 3.7 Si volvemos al ejemplo 3.6, determinaremos el número de subconjuntos del conjunto $C = \{1, 2, 3, 4\}$. Al construir un subconjunto de C, tenemos dos opciones diferentes para cada elemento x de C: x está incluido en el subconjunto o no está incluido. En consecuencia, existen $2 \times 2 \times 2 \times 2$ opciones, lo que produce $2^4 = 16$ subconjuntos de C. Esto incluye el conjunto vacío $\emptyset$ y el propio conjunto C. Si necesitamos el número de subconjuntos de C que tengan exactamente dos elementos, el resultado es igual al número de formas en que podemos seleccionar dos objetos de un conjunto de cuatro objetos, es decir, $C(4, 2)$ o $\binom{4}{2}$. Como resultado, el número total de subconjuntos de C, 2^4, es también la suma $\binom{4}{0} + \binom{4}{1} + \binom{4}{2} + \binom{4}{3} + \binom{4}{4}$, en la que el primer sumando corresponde al conjunto vacío, el segundo sumando corresponde a los subconjuntos *de un elemnto*, el tercer sumando a los seis subconjuntos de tamaño dos, etcétera. Así, $2^4 = \sum_{k=0}^{4} \binom{4}{k}$.

Definición 3.4 Si A es un conjunto del universo $\mathscr{U}$, el *conjunto potencia*, que se denota $\mathscr{P}(A)$, es la colección (o conjunto) de todos los subconjuntos de A.

Ejemplo 3.8 Para el conjunto C del ejemplo 3.7, $\mathcal{P}(C) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{4\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{1, 4\}, \{2, 3\}, \{2, 4\}, \{3, 4\}, \{1, 2, 3\}, \{1, 2, 4\}, \{1, 3, 4\}, \{2, 3, 4\}, C\}$.

En general, para cualquier conjunto finito A con $|A| = n \geq 0$, A tiene 2^n subconjuntos y $|\mathcal{P}(A)| = 2^n$. Para cualquier $0 \leq k \leq n$, existen $\binom{n}{k}$ subconjuntos de tamaño k. Si contamos los subconjuntos de A hasta el número k de elementos de un subconjunto, tenemos la identidad combinatoria $\binom{n}{0}+\binom{n}{1}+\binom{n}{2}+\cdots+\binom{n}{n}=2^n$, para $n \geq 0$.

Esta identidad ya fue establecida en el corolario 1.1(a). Esta presentación es otro ejemplo de una demostración combinatoria, ya que la identidad se establece contando la misma colección de objetos (los subconjuntos de A) de dos formas diferentes.

La capacidad para contar algunos, o todos, los subconjuntos de un conjunto dado proporciona un segundo método para la solución de dos de nuestros ejemplos anteriores.

Ejemplo 3.9 En el ejemplo 1.14, contamos el número de trayectorias (escalonadas) en el plano xy que van de (2, 1) a (7, 4), donde cada trayectoria está formada por escalones individuales que van una unidad a la derecha (R) o una unidad hacia arriba (U). La figura 3.1 es igual a la figura 1.1, donde se muestran dos trayectorias posibles.

La trayectoria de la figura 3.1(a) tiene tres movimientos hacia arriba (U) localizados en las posiciones 2, 5 y 8 de la lista que aparece en la parte inferior de la figura. En consecuencia, esta trayectoria determina el subconjunto de tres elementos $\{2, 5, 8\}$ del conjunto $\{1, 2, 3, \ldots, 8\}$. En la figura 3.1(b), la trayectoria determina el subconjunto de tres elementos $\{1, 5, 6\}$. En forma recíproca, si partimos, por ejemplo, del subconjunto $\{1, 3, 7\}$ de $\{1, 2, 3, \ldots, 8\}$, entonces la trayectoria que determina este subconjunto está dada por U, R, U, R, R, R, U, R.

Por lo tanto, el número de trayectorias buscada es igual al número de subconjuntos A de $\{1, 2, 3, \ldots, 8\}$, donde $|A| = 3$. Existen $\binom{8}{3}=\frac{8!}{3!5!}= 56$ de esas trayectorias (y subconjuntos), como vimos en el ejemplo 1.14.

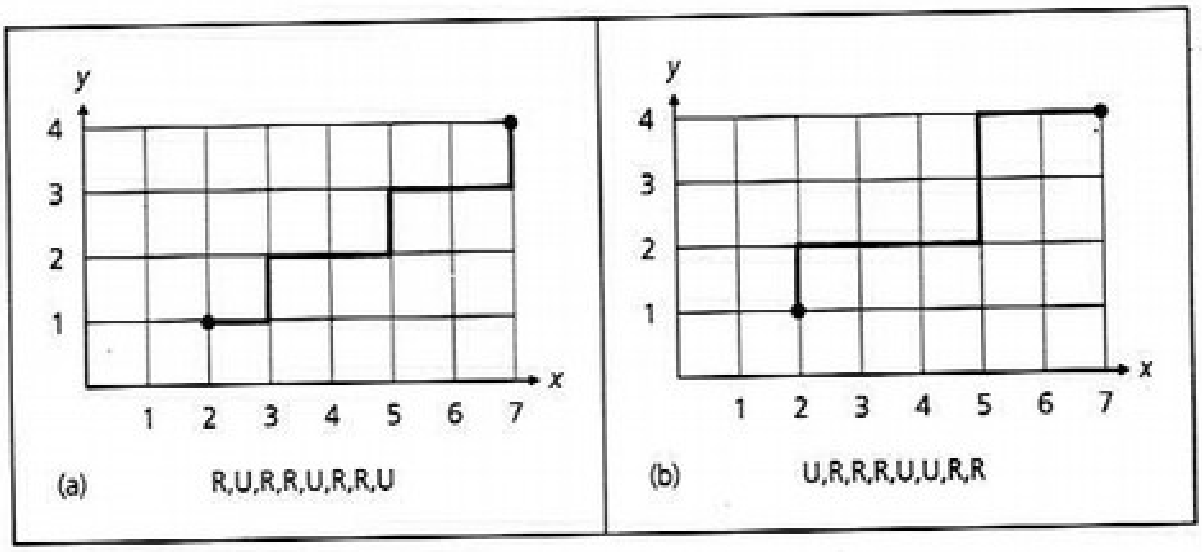


Figura 3.1

Si hubiésemos considerado los movimientos R hacia la derecha, en vez de los movimientos hacia arriba U , tendríamos que la respuesta sería el número de subconjuntos B de $\{1, 2, 3, \ldots, 8\}$, donde $|B| = 5$. Existen $\binom{8}{5} = \frac{8!}{5!3!} = 56$ de tales subconjuntos. (Esta idea fue analizada antes para el resultado desarrollado en la tabla 1.4.)

Ejemplo 3.10 En la parte (b) del ejemplo 1.36 de la sección 1.4, aprendimos que existen 2^6 composiciones del entero 7; es decir, hay 2^6 formas de escribir 7 como una suma de uno o más enteros positivos, donde el orden de los sumandos es significativo. El resultado obtenido utilizaba el teorema del binomio junto con las respuestas de siete casos resumidos en la tabla 1.7. Ahora podemos obtener este resultado en una forma un tanto diferente y más sencilla.

Primero consideremos la siguiente composición de 7:

$$1 \underset{\substack{\swarrow \\ 1^{\text{er}}\text{ signo} \\ \text{más}}}{+} 1 \underset{\substack{\downarrow \\ 2^{\text{o}}\text{ signo} \\ \text{más}}}{+} 1 + 1 \underset{\cdots}{+} 1 \underset{\substack{\downarrow \\ 5^{\text{o}}\text{ signo} \\ \text{más}}}{+} 1 \underset{\substack{\searrow \\ 6^{\text{o}}\text{ signo} \\ \text{más}}}{+} 1$$

Aquí tenemos siete sumandos, cada uno de los cuales es 1, y seis signos más (+).

Para el conjunto $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, existen 2^6 subconjuntos. ¿Pero qué tiene esto que ver con las composiciones de 7?

Consideremos un subconjunto de $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, digamos $\{1, 4, 6\}$. Formemos ahora la siguiente composición de 7:

$$(1 \underset{\substack{\downarrow \\ 1^{\text{er}}\text{ signo} \\ \text{más}}}{+} 1) + 1 + (1 \underset{\substack{\downarrow \\ 4^{\text{o}}\text{ signo} \\ \text{más}}}{+} 1) + (1 \underset{\substack{\downarrow \\ 6^{\text{o}}\text{ signo} \\ \text{más}}}{+} 1)$$

En este caso, el subconjunto $\{1, 4, 6\}$ indica que debemos colocar paréntesis entre los unos que aparecen a los lados del primero, cuarto y sexto signos más. Esto produce la composición

$$2 + 1 + 2 + 2.$$

De la misma forma, vemos que el subconjunto $\{1, 2, 5, 6\}$ indica el uso del primero, segundo, quinto y sexto signos más, lo que da

$$(1 \underset{\substack{\swarrow \\ 1^{\text{er}}\text{ signo} \\ \text{más}}}{+} 1 \underset{\substack{\downarrow \\ 2^{\text{o}}\text{ signo} \\ \text{más}}}{+} 1) + 1 + (1 \underset{\substack{\swarrow \\ 5^{\text{o}}\text{ signo} \\ \text{más}}}{+} 1 \underset{\substack{\downarrow \\ 6^{\text{o}}\text{ signo} \\ \text{más}}}{+} 1)$$

o la composición $3 + 1 + 3$.

En sentido contrario, vemos que la composición $1 + 1 + 5$ proviene de

$$1 + 1 + (1 + 1 + 1 + 1 + 1)$$

y está determinada por el subconjunto $\{3, 4, 5, 6\}$ de $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. En la tabla 3.1 tenemos enumeradas ocho composiciones de 7, junto con el subconjunto correspondiente de $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ determinado por cada una de ellas.

Tabla 3.1

Composición de 7		Subconjunto determinado de $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$	
(i)	$1+1+1+1+1+1+1$	(i)	$\emptyset$
(ii)	$2+1+1+1+1+1$	(ii)	$\{1\}$
(iii)	$1+2+1+1+1+1$	(iii)	$\{2\}$
(iv)	$1+1+3+1+1$	(iv)	$\{3, 4\}$
(v)	$1+2+1+3$	(v)	$\{2, 5, 6\}$
(vi)	$2+3+2$	(vi)	$\{1, 3, 4, 6\}$
(vii)	$4+3$	(vii)	$\{1, 2, 3, 5, 6\}$
(viii)	7	(viii)	$\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

Los ejemplos obtenidos hasta ahora muestran una correspondencia entre las composiciones de 7 y los subconjuntos de $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Por lo tanto, de nuevo tenemos que existen 2^6 composiciones de 7.

Nuestro siguiente ejemplo genera otra identidad combinatoria importante.

Ejemplo 3.11

Para los enteros n, r con $n \geq r > 1$,

$$\binom{n+1}{r} = \binom{n}{r} + \binom{n}{r-1}.$$

Aunque podemos establecer este resultado en forma algebraica a partir de la definición de $\binom{n}{r}$ como $n!/(r!(n-r)!)$, usaremos un enfoque combinatorio. Sea $A = [x, a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ y consideremos todos los subconjuntos de A que contienen r elementos. Hay $\binom{n+1}{r}$ de tales subconjuntos. Cada uno de ellos cae exactamente en uno de los dos casos siguientes: aquellos subconjuntos que contienen el elemento x y los que no lo contienen. Para obtener un subconjunto C de A, donde $x \in C$ y $|C| = r$, colocamos x en C y después elegimos $r-1$ elementos de los $a_1, a_2, \ldots, a_n$. Esto se puede hacer de $\binom{n}{r-1}$ formas. Para el otro caso, queremos un subconjunto B de A con $|B| = r$ y $x \notin B$. Así, podemos elegir r elementos de los $a_1, a_2, \ldots, a_n$, lo que podemos hacer de $\binom{n}{r}$ formas. De la regla de la suma se sigue que $\binom{n+1}{r} = \binom{n}{r} + \binom{n}{r-1}$.

Antes de continuar, volvamos a analizar el resultado del ejemplo 3.11, pero esta vez a la luz de lo aprendido en el ejemplo 3.9.

De nuevo, sean n, r enteros positivos tales que $n \geq r \geq 1$. Entonces $\binom{n+1}{r}$ cuenta el número de trayectorias (escalonadas) en el plano xy, de $(0, 0)$ a $(n + 1 - r, r)$, donde, como en el ejemplo 3.9, cada una de las trayectorias tiene

$(n+1)-r$ movimientos horizontales de la forma $(x, y) \to (x+1, y)$, y
r movimientos verticales de la forma $(x, y) \to (x, y+1)$.

La última arista de cada una de estas trayectorias (escalonadas) termina en el punto $(n+1-r, r)$ y comienza en (i) el punto $(n-r, r)$ o (ii) el punto $(n+1-r, r-1)$.

En el caso (i), tenemos la última arista horizontal, es decir, $(n-r, r) \rightarrow (n+1-r, r)$; el número de trayectorias (escalonadas) de $(0, 0)$ a $(n-r, r)$ es $\binom{(n-r)+r}{r} = \binom{n}{r}$. Para el caso (ii), la última arista es vertical, $(n+1-r, r-1) \rightarrow (n+1-r, r)$; el número de trayectorias (escalonadas) de $(0, 0)$ hasta $(n+1-r, r-1)$ es $\binom{(n+1-r)+(r-1)}{r-1} = \binom{n}{r-1}$. Como estos dos casos abarcan todas las posibilidades y no tienen nada en común, se sigue que

$$\binom{n+1}{r} = \binom{n}{r} + \binom{n}{r-1}.$$

Ejemplo 3.12 Analizaremos ahora la forma en que la identidad del ejemplo 3.11 nos puede ayudar a resolver el ejemplo 1.34, donde buscábamos el número de soluciones enteras no negativas de la desigualdad $x_1 + x_2 + \cdots + x_6 < 10$.

Para cada entero k, $0 \le k \le 9$, el número de soluciones de $x_1 + x_2 + \cdots + x_6 = k$ es $\binom{6+k-1}{k} = \binom{5+k}{k}$. Así que el número de soluciones enteras no negativas para $x_1 + x_2 + \cdots + x_6 < 10$ es

$$\begin{aligned}
&\binom{5}{0} + \binom{6}{1} + \binom{7}{2} + \binom{8}{3} + \cdots + \binom{14}{9} \\
&\quad = \left[\binom{6}{0} + \binom{6}{1}\right] + \binom{7}{2} + \binom{8}{3} + \cdots + \binom{14}{9} \\
&\quad = \left[\binom{7}{1} + \binom{7}{2}\right] + \binom{8}{3} + \cdots + \binom{14}{9} = \left[\binom{8}{2} + \binom{8}{3}\right] + \binom{9}{4} + \cdots + \binom{14}{9} \\
&\quad = \left[\binom{9}{3} + \binom{9}{4}\right] + \cdots + \binom{14}{9} = \ldots = \binom{14}{8} + \binom{14}{9} = \binom{15}{9} = 5005.
\end{aligned}$$

Ejemplo 3.13 En la figura 3.2 tenemos parte de una útil e interesante disposición de números llamada el *triángulo de Pascal*.

$$\begin{array}{lccccccccccc}
(n=0) & & & & & & \binom{0}{0} & & & & & \\
(n=1) & & & & & \binom{1}{0} & & \binom{1}{1} & & & & \\
(n=2) & & & & \binom{2}{0} & & \binom{2}{1} & & \binom{2}{2} & & & \\
(n=3) & & & \binom{3}{0} & & \binom{3}{1} & & \binom{3}{2} & & \binom{3}{3} & & \\
(n=4) & & \binom{4}{0} & & \binom{4}{1} & & \binom{4}{2} & & \binom{4}{3} & & \binom{4}{4} & \\
(n=5) & \binom{5}{0} & & \binom{5}{1} & & \binom{5}{2} & & \binom{5}{3} & & \binom{5}{4} & & \binom{5}{5}
\end{array}$$

Figura 3.2

Observe que, en esta lista parcial, los dos triángulos que se muestran satisfacen la condición de que el coeficiente binomial de la parte inferior del triángulo invertido es la suma de los otros dos términos del triángulo. Este resultado se sigue de la identidad del ejemplo 3.11.

Cuando reemplazamos cada uno de los coeficientes binomiales por su valor numérico, el triángulo de Pascal toma la apariencia que se muestra en la figura 3.3.

$(n = 0)$						1					
$(n = 1)$					1		1				
$(n = 2)$				1		2		1			
$(n = 3)$			1		3		3		1		
$(n = 4)$		1		4		6		4		1	
$(n = 5)$	1		5		10		10		5		1

Figura 3.3

Existen algunos conjuntos de números que aparecen con frecuencia en todo el libro. En consecuencia, cerraremos esta sección asignándoles los siguientes nombres.

a) $\mathbf{Z}$ = el conjunto de los *enteros* = $\{0, 1, -1, 2, -2, 3, -3, \ldots\}$

b) $\mathbf{N}$ = el conjunto de los *enteros no negativos* o *números naturales* = $\{0, 1, 2, 3, \ldots\}$

c) $\mathbf{Z}^+$ = el conjunto de los *enteros positivos* = $\{1, 2, 3, \ldots\} = \{x \in \mathbf{Z} \mid x > 0\}$

d) $\mathbf{Q}$ = el conjunto de los *números racionales* = $\{a/b \mid a, b \in \mathbf{Z}, b \neq 0\}$

e) $\mathbf{Q}^+$ = el conjunto de los *números racionales positivos* = $\{r \mid r \in \mathbf{Q}, r > 0\} = \{r \in \mathbf{Q} \mid r > 0\}$

f) $\mathbf{Q}^*$ = el conjunto de los *números racionales distintos de cero*

g) $\mathbf{R}$ = el conjunto de los *números reales*

h) $\mathbf{R}^+$ = el conjunto de los *números reales positivos*

i) $\mathbf{R}^*$ = el conjunto de los *números reales distintos de cero*

j) $\mathbf{C}$ = el conjunto de los *números complejos*: $\{x + yi \mid x, y \in \mathbf{R}, i^2 = -1\}$

k) $\mathbf{C}^*$ = el conjunto de *números complejos distintos de cero*

l) Para cualquier $n \in \mathbf{Z}^+$, $\mathbf{Z}_n = \{0, 1, 2, \ldots, n-1\}$

m) Para los números reales a, b con $a < b$, $[a, b] = \{x \in \mathbf{R} \mid a \leq x \leq b\}$, $(a, b) = \{x \in \mathbf{R} \mid a < x < b\}$, $[a, b) = \{x \in \mathbf{R} \mid a \leq x < b\}$, $(a, b] = \{x \in \mathbf{R} \mid a < x \leq b\}$. El primer conjunto se conoce como *intervalo cerrado*, el segundo como *intervalo abierto* y los otros dos como conjuntos de *intervalos semiabiertos*.

EJERCICIOS 3.1

1. ¿Cuáles de los siguientes conjuntos son iguales?

a) $\{1,2,3\}$ **b)** $\{3,2,1,3\}$ **c)** $\{3,1,2,3\}$ **d)** $\{1,2,2,3\}$

2. Sea $A = \{1, \{1\}, 2\}$. ¿Cuáles de las siguientes proposiciones son verdaderas?

a) $1 \in A$ **b)** $\{1\} \in A$ **c)** $\{1\} \subseteq A$ **d)** $\{\{1\}\} \subseteq A$
e) $\{2\} \in A$ **f)** $\{2\} \subseteq A$ **g)** $\{\{2\}\} \subseteq A$ **h)** $\{\{2\}\} \subset A$

3. Para $A = \{1,2,\{2\}\}$, ¿cuáles de las ocho proposiciones del ejercicio 2 son verdaderas?

4. ¿Cuáles de las siguientes proposiciones son verdaderas?

a) $\emptyset \in \emptyset$ **b)** $\emptyset \subset \emptyset$ **c)** $\emptyset \subseteq \emptyset$
d) $\emptyset \in \{\emptyset\}$ **e)** $\emptyset \subset \{\emptyset\}$ **f)** $\emptyset \subseteq \{\emptyset\}$

5. Determine todos los elementos de cada uno de los siguientes conjuntos.

a) $\{1 + (-1)^n \mid n \in \mathbf{N}\}$ **b)** $\{n + (1/n) \mid n \in \{1, 2, 3, 5, 7\}\}$
c) $\{n^3 + n^2 \mid n \in \{0, 1, 2, 3, 4\}\}$
d) $\{1/(n^2 + n) \mid n$ es un entero positivo impar y $n \leq 11\}$

6. Consideremos los siguientes seis subconjuntos de $\mathbf{Z}$:

$$A = \{2m + 1 \mid m \in \mathbf{Z}\}; \quad B = \{2n + 3 \mid n \in \mathbf{Z}\}; \quad C = \{2p - 3 \mid p \in \mathbf{Z}\};$$

$$D = \{3r + 1 \mid r \in \mathbf{Z}\}; \quad E = \{3s + 2 \mid s \in \mathbf{Z}\}; \quad F = \{3t - 2 \mid t \in \mathbf{Z}\}.$$

¿Cuáles de las siguientes proposiciones son verdaderas y cuáles falsas?

a) $A = B$ **b)** $A = C$ **c)** $B = C$
d) $D = E$ **e)** $D = F$ **f)** $E = F$

7. Sean A, B conjuntos de un universo $\mathscr{U}$.

a) Escriba una proposición cuantificada para expresar la relación de contenido propia $A \subset B$.

b) Niegue el resultado de la parte (a) para determinar cuándo $A \not\subset B$.

8. Para $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$, determine el número de

a) subconjuntos de A. **b)** subconjuntos no vacíos de A.
c) subconjuntos propios de A. **d)** subconjuntos propios no vacíos de A.
e) subconjuntos de A que contienen tres elementos. **f)** subconjuntos de A que contienen 1, 2.
g) subconjuntos de A que contienen cinco elementos, incluyendo 1, 2.
h) subconjuntos propios de A que contienen 1, 2.
i) subconjuntos de A con un número par de elementos.
j) subconjuntos de A con un número impar de elementos.
k) subconjuntos de A con un número impar de elementos y que incluyen el elemento 3.

9. **a)** Si un conjunto A tiene 63 subconjuntos propios, ¿cuánto vale $|A|$?
b) Si un conjunto B tiene 64 subconjuntos de cardinal impar, ¿cuánto vale $|B|$?
c) Generalice el resultado de la parte (b).

10. ¿Cuáles de los siguientes conjuntos son no vacíos?

a) $\{x \mid x \in \mathbf{N}, 2x + 7 = 3\}$ **b)** $\{x \in \mathbf{Z} \mid 3x + 5 = 9\}$
c) $\{x \mid x \in \mathbf{Q}, x^2 + 4 = 6\}$ **d)** $\{x \in \mathbf{R} \mid x^2 + 4 = 6\}$
e) $\{x \mid x \in \mathbf{R}, x^2 + 5 = 4\}$ **f)** $\{x \in \mathbf{R} \mid x^2 + 3x + 3 = 0\}$
g) $\{x \mid x \in \mathbf{C}, x^2 + 3x + 3 = 0\}$

11. Cuando está a punto de salir de un restaurante, un hombre nota que tiene una moneda de 1 centavo, otra de 5, una de 10, una de 25 y una de 50 centavos de dólar. ¿De cuántas formas puede dejar una (al menos una) de sus monedas para la propina si **a)** no hay restricciones? **b)** quiere quedarse con algo de cambio? **c)** quiere dejar al menos 10 centavos?

12. Para $\mathscr{U} = \mathbf{Z}^+$, sea $A \subseteq \mathscr{U}$ el conjunto $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 7, 8, 10, 11, 14, 17, 18\}$.
a) ¿Cuántos subconjuntos de A contienen seis elementos?

b) ¿Cuántos subconjuntos de seis elementos (de A) contienen cuatro enteros pares y dos enteros impares?
c) ¿Cuántos subconjuntos de A sólo contienen enteros impares?
d) ¿Cuántos de los subconjuntos de la parte (c) contienen los enteros 3 y 7?

13. Sea $S = \{1, 2, 3, \ldots, 29, 30\}$. ¿Cuántos subconjuntos A de S satisfacen
a) $|A| = 5$?
b) $|A| = 5$ y que el mínimo elemento de A sea 5?
c) $|A| = 5$ y que el mínimo elemento de A sea menor que 5?

14. **a)** ¿Cuántos subconjuntos de $\{1, 2, 3, \ldots, 11\}$ contienen al menos un entero par?
b) ¿Cuántos subconjuntos de $\{1, 2, 3, \ldots, 12\}$ contienen al menos un entero par?
c) Generalice los resultados de las partes (a) y (b).

15. Dé un ejemplo de tres conjuntos W, X, Y tales que $W \in X$ y $X \in Y$ pero $W \notin Y$.

16. Escriba las siguientes tres filas del triángulo de Pascal de la figura 3.3.

17. Complete la demostración del teorema 3.1.

18. Para los conjuntos $A, B, C \subseteq \mathcal{U}$, demuestre la verdad o falsedad (con un contraejemplo) de lo siguiente: Si $A \subseteq B$, $B \not\subseteq C$, entonces $A \not\subseteq C$.

19. En la parte (i) de la figura 3.4, tenemos las primeras seis filas del triángulo de Pascal, en los que aparece un hexágono centrado en 4, en las últimas tres filas. Si consideramos los seis números (que rodean a 4) como los vértices del hexágono, tenemos que las dos ternas alternadas (3, 1, 10 y 1, 5, 6) satisfacen que $3 \cdot 1 \cdot 10 = 30 = 1 \cdot 5 \cdot 6$. La parte (ii) de la figura contiene las filas 4 a 7 del mismo triángulo, donde vemos un hexágono cuyo centro está en 10; las ternas alternadas de los vértices (4, 10, 15 y 6, 20, 5) satisfacen $4 \cdot 10 \cdot 15 = 600 = 6 \cdot 20 \cdot 5$.
a) Conjeture el resultado general al que apuntan estos dos ejemplos.
b) Verifique la conjetura de la parte (a).

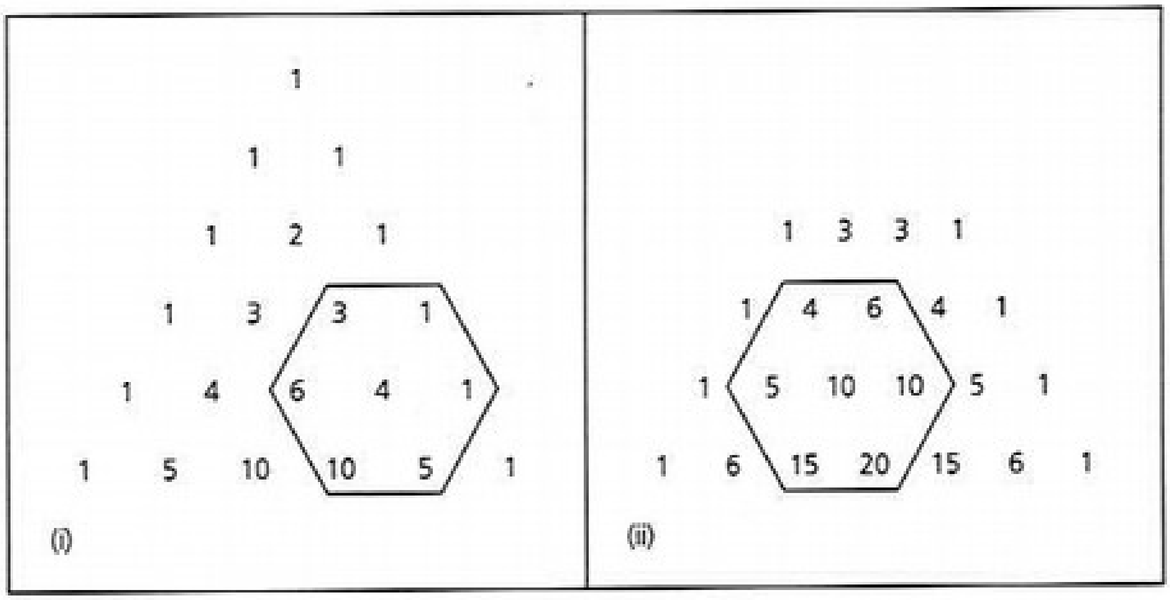


Figura 3.4

20. **a)** Algunas de las sucesiones estrictamente crecientes de enteros que comienzan con 1 y terminan con 7 son:

i) 1, 7; **ii)** 1, 2, 7; **iii)** 1, 4, 7;
iv) 1, 3, 4, 7; **v)** 1, 2, 3, 4, 7; **vi)** 1, 2, 4, 5, 6, 7.

¿Cuántas de estas sucesiones estrictamente crecientes de enteros comienzan con 1 y terminan en 7?
b) ¿Cuántas de estas sucesiones estrictamente crecientes de enteros comienzan con 3 y terminan en 9?

c) ¿Cuántas de estas sucesiones estrictamente crecientes de enteros comienzan con 1 y terminan en 37? ¿Cuántas comienzan con 62 y terminan en 98?

d) Generalice los resultados de las partes (a) a (c).

21. Una cuarta parte de los subconjuntos de cinco elementos de $\{1, 2, 3, \ldots, n\}$ contienen el elemento 7. Determine n ($n \geq 5$).

22. Establezca la identidad del ejemplo 3.11 en forma algebraica.

23. Dé un argumento combinatorio para mostrar que para los enteros n, r con $n \geq r \geq 2$,

$$\binom{n+2}{r} = \binom{n}{r} + 2\binom{n}{r-1} + \binom{n}{r-2}.$$

24. Para los enteros positivos n, r, muestre que

$$\binom{n+r+1}{r} = \binom{n+r}{r} + \binom{n+r-1}{r-1} + \cdots + \binom{n+2}{2} + \binom{n+1}{1} + \binom{n}{0}.$$

25. En la teoría abstracta general de conjuntos, formulada por Georg Cantor (1845–1918), un conjunto se definía como "cualquier colección de un todo de objetos definidos y separados en nuestra intuición o pensamiento". Por desgracia, en 1901, esta definición condujo a Bertrand Russell (1872–1970) al descubrimiento de una contradicción, un resultado que se conoce ahora como la *paradoja de Russell*, lo cual fue un golpe al centro de la teoría de conjuntos. (Pero, desde entonces, se han encontrado varias vías para definir las ideas básicas de la teoría de conjuntos de modo que esta contradicción ya no aparezca.)

La paradoja de Russell surge cuando nos preguntamos si un conjunto puede ser un elemento de sí mismo. Por ejemplo, el conjunto de todos los enteros positivos no es un entero positivo; es decir, $\mathbf{Z}^+ \notin \mathbf{Z}^+$. Pero el conjunto de todas las abstracciones es una abstracción.

Ahora bien, para desarrollar la paradoja de Russell, sea S el conjunto de todos los conjuntos A que no son miembros de sí mismos; es decir, $S = \{A \mid A \text{ es un conjunto} \wedge A \notin A\}$.

a) Muestre que si $S \in S$, entonces $S \notin S$.

b) Muestre que si $S \notin S$, entonces $S \in S$.

Los resultados de las partes (a) y (b) muestran que debemos evitar definir conjuntos como S. Para hacer esto, debemos restringir los tipos de elementos que pueden ser miembros de un conjunto. (Hablaremos más de esto en el resumen y repaso histórico de la sección 3.5.)

26. Sea $A = \{1, 2, 3, \ldots, 39, 40\}$.

a) Escriba un programa (o desarrolle un algoritmo) que genere los subconjuntos de seis elementos de A.

b) Para $B = \{2, 3, 6, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37\}$, escriba un programa de computadora (o desarrolle un algoritmo) que genere un subconjunto de seis elementos de A y después determine si es un subconjunto de B.

27. Sea $A = \{1, 2, 3, \ldots, 7\}$. Escriba un programa (o desarrolle un algoritmo) que enumere todos los subconjuntos B de A, tales que $|B| = 4$.

28. Escriba un programa (o desarrolle un algoritmo) que imprima todos los subconjuntos de $\{1, 2, 3, \ldots, n\}$, donde $1 \leq n \leq 10$. (El valor de n debe proporcionarse durante la ejecución del programa.)

3.2 Operaciones de conjuntos y las leyes de la teoría de conjuntos

Después de aprender a contar, el estudiante por lo regular se enfrenta a los métodos para combinar los números contados. El primer método es la suma. Generalmente, el mundo aritmético de los estudiantes gira en torno al conjunto $\mathbf{Z}^+$ (o un subconjunto de $\mathbf{Z}^+$ del que puedan hablar y escribir, así como teclearlo en una calculadora de bolsillo), donde la adición de dos elementos de $\mathbf{Z}^+$ produce un tercer elemento de $\mathbf{Z}^+$, llamado suma. Por lo tanto, los estudiantes pueden concentrarse en la adición sin tener que ampliar su mundo aritmético más allá de $\mathbf{Z}^+$. Esto también es cierto para la operación de multiplicación.

La adición y la multiplicación de enteros positivos son *operaciones binarias cerradas* en $\mathbf{Z}^+$. Por ejemplo, cuando calculamos $a + b$, para $a, b \in \mathbf{Z}^+$, hay dos *operandos*, a y b; por ello, la operación se llama *binaria*. Como $a + b \in \mathbf{Z}^+$ si $a, b \in \mathbf{Z}^+$, decimos que la operación binaria adición (en $\mathbf{Z}^+$) es *cerrada*. Sin embargo, la operación binaria de la división (con divisor distinto de cero) *no* es cerrada en $\mathbf{Z}^+$, ya que, por ejemplo, $1/2(= 1 \div 2) \notin \mathbf{Z}^+$, aunque $1, 2 \in \mathbf{Z}^+$. Pero esta operación sí es cerrada cuando consideramos el conjunto $\mathbf{Q}^+$ en lugar del conjunto $\mathbf{Z}^+$. (Veremos los conceptos generales de operación binaria y operación binaria cerrada en la sección 5.4.)

Ahora presentamos algunas operaciones binarias para conjuntos.

Definición 3.5 Para $A, B \subseteq \mathcal{U}$ definimos lo siguente:

a) $A \cup B$ (la *unión* de A y B) $= \{x | x \in A \vee x \in B\}$.
b) $A \cap B$ (la *intersección* de A y B) $= \{x | x \in A \wedge x \in B\}$.
c) $A \triangle C$ (la *diferencia simétrica* de A y B) $= \{x | (x \in A \vee x \in B) \wedge x \notin A \cap B\} = \{x | x \in A \cup B \wedge x \notin A \cap B\}$.

Observe que si $A, B \subseteq \mathcal{U}$, entonces $A \cap B, A \cup B, A \Delta B \subseteq \mathcal{U}$. En consecuencia, $\cap$, $\cup$ y $\triangle$ son operaciones binarias cerradas en $\mathcal{P}(\mathcal{U})$, y también podemos decir que $\mathcal{P}(\mathcal{U})$ es *cerrada* en estas operaciones (binarias).

Ejemplo 3.14 Si $\mathcal{U} = \{1, 2, 3, \ldots, 9, 10\}$, $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $B = \{3, 4, 5, 6, 7\}$ y $C = \{7, 8, 9\}$, tenemos:

a) $A \cap B = \{3, 4, 5\}$
b) $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$
c) $B \cap C = \{7\}$
d) $A \cap C = \emptyset$
e) $A \triangle B = \{1, 2, 6, 7\}$
f) $A \cup C = \{1, 2, 3, 4, 5, 7, 8, 9\}$
g) $A \triangle C = \{1, 2, 3, 4, 5, 7, 8, 9\}$

En el ejemplo 3.14 vemos que $A \cap B \subseteq A \subseteq A \cup B$. Este resultado no es algo particular de este ejemplo, sino que es verdadero en general y nos referiremos a él con frecuencia. El resultado se obtiene de

$$x \in A \cap B \Rightarrow (x \in A \wedge x \in B) \Rightarrow x \in A$$

(por la regla de simplificación conjuntiva, regla 7 de la tabla 2.20) y

$$x \in A \Rightarrow (x \in A \vee x \in B) \Rightarrow x \in A \cup B$$

(donde la primera implicación lógica es un resultado de la regla de amplificación disyuntiva, regla 8 de la tabla 2.20).

De las partes (d), (f) y (g) del ejemplo 3.14, presentamos las siguientes ideas generales.

Definición 3.6 Sean $S, T \subseteq \mathcal{U}$. Los conjuntos S y T son *disjuntos* o *mutuamente disjuntos* si $S \cap T = \emptyset$.

TEOREMA 3.3 Si $S, T \subseteq \mathcal{U}$, entonces S y T son disjuntos si y sólo si $S \cup T = S \triangle T$.

Demostración: Partimos de S, T disjuntos. (Para demostrar que $S \cup T = S \triangle T$ utilizamos la definición 3.2. En particular, daremos dos argumentos de pertenencia, uno para cada inclusión. Puesto que ésta es nuestra primera experiencia en la demostración de la igualdad de dos conjuntos, seremos cuidadosos y muy detallistas.) Consideremos cualquier $x \in \mathcal{U}$. Si $x \in S \cup T$, entonces $x \in S$ o $x \in T$ (o tal vez ambos). Pero como S y T son disjuntos, $x \notin S \cap T$, por lo que $x \in S \triangle T$. En consecuencia, como $x \in S \cup T$ implica $x \in S \triangle T$, tenemos $S \cup T \subseteq S \Delta T$. Para la inclusión opuesta, si $y \in S \triangle T$, entonces $y \in S$ o $y \in T$. (Pero $y \notin S \cap T$; no podemos usar esto.) Así, $y \in S \cup T$. Por lo tanto, $S \triangle T \subseteq S \cup T$. Y ahora que tenemos $S \cup T \subseteq S \triangle T$ y $S \triangle T \subseteq S \cup T$, se sigue de la definición 3.2 que $S \triangle T = S \cup T$.

Demostramos la recíproca por el método de demostración por contradicción. Para esto, consideramos $S, T \subseteq \mathcal{U}$ arbitrarios, conservamos la hipótesis (es decir, $S \cup T = S \triangle T$), pero suponemos la negación de la conclusión (es decir, suponemos que S y T *no* son disjuntos). Así, si $S \cap T \neq \emptyset$, sea $x \in S \cap T$. Entonces $x \in S$ y $x \in T$, por lo que $x \in S \cup T$ y

$$x \in S \Delta T (= S \cup T).$$

Pero cuando $x \in S \cup T$ y $x \in S \cap T$, entonces

$$x \notin S \Delta T.$$

Esta contradicción ($x \in S \triangle T \wedge x \notin S \triangle T$) indica que nuestra hipótesis original era incorrecta. En consecuencia, tenemos que S y T son disjuntos.

Al demostrar la primera parte del teorema 3.3, mostramos que si S, T son conjuntos cualesquiera, entonces $S \triangle T \subseteq S \cup T$. El hecho de que los conjuntos fueran disjuntos sólo fue necesario para la inclusión opuesta.

Después de adquirir la capacidad de sumar, se pasa a la resta. En este caso, el conjunto $\mathbf{N}$ presenta algo de dificultad. Por ejemplo, $\mathbf{N}$ contiene a 2 y 5 pero $2 - 5 = -3$ y $-3 \notin \mathbf{N}$. Por lo tanto, la operación binaria de sustracción no es cerrada para $\mathbf{N}$, aunque es cerrada para el *superconjunto* $\mathbf{Z}$ de $\mathbf{N}$. Así, para $\mathbf{Z}$ podemos introducir la *operación unaria*, o *monaria*, de la negación, en la que tomamos el "menos" o "negativo" de un número como el 3, y obtenemos -3. (La definición general de una operación unaria, o monaria, aparece en la sección 5.4.)

Ahora presentamos una operación unaria comparable para los conjuntos.

finición 3.7 Para un conjunto $A \subseteq \mathcal{U}$, el *complemento* de A, *que se denota* con $\mathcal{U} - A$ o $\overline{A}$, está dado por $\{x \mid x \in \mathcal{U} \wedge x \notin A\}$.

jemplo 3.15 Para los conjuntos del ejemplo 3.14, $\overline{A} = \{6, 7, 8, 9, 10\}$, $\overline{B} = \{1, 2, 8, 9, 10\}$ y $\overline{C} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 10\}$.

Para cualquier universo $\mathcal{U}$ y cualquier conjunto $A \subseteq \mathcal{U}$, tenemos que $\overline{A} \subseteq \mathcal{U}$. Por lo tanto, $\mathcal{P}(\mathcal{U})$ es *cerrado* en la operación unaria definida por el complemento.

El siguiente concepto se relaciona con el de complemento.

efinición 3.8 Para $A, B \subseteq \mathcal{U}$, el *complemento* (*relativo*) de A en B, que se denota con $B - A$ está dado por $\{x \mid x \in B \wedge x \notin A\}$.

Ejemplo 3.16 Para los conjuntos del ejemplo 3.14 tenemos:

a) $B - A = \{6, 7\}$ **b)** $A - B = \{1, 2\}$ **c)** $A - C = A$
d) $C - A = C$ **e)** $A - A = \emptyset$ **f)** $\mathcal{U} - A = \overline{A}$

Nuestro siguiente resultado, que hará uso nuevamente de la definición 3.2, proporciona un enlace entre las nociones de subconjunto, unión, intersección y complemento.

EOREMA 3.4 Para cualquier universo $\mathcal{U}$ y cualesquiera conjuntos $A, B \subseteq \mathcal{U}$, las siguientes proposiciones son equivalentes:

a) $A \subseteq B$ **b)** $A \cup B = B$
c) $A \cap B = A$ **d)** $\overline{B} \subseteq \overline{A}$

Demostración: Demostraremos que (a) $\Rightarrow$ (b), (b) $\Rightarrow$ (c), (c) $\Rightarrow$ (d) y (d) $\Rightarrow$ (a). [La razón por la que esto basta para demostrar este teorema se basa en la idea presentada en el ejercicio 15 que aparece al final de la sección 2.2.]

i) (a) $\Rightarrow$ (b) Si A, B son conjuntos cualesquiera, entonces $B \subseteq A \cup B$. Para la inclusión opuesta, si $x \in A \cup B$, entonces $x \in A$ o $x \in B$, pero como $A \subseteq B$, en ambos casos tenemos que $x \in B$. Así, $A \cup B \subseteq B$ y, como tenemos ambas inclusiones, se sigue (de nuevo de la definición 3.2) que $A \cup B = B$.

ii) (b) $\Rightarrow$ (c) Dados los conjuntos A, B, siempre tenemos $A \supseteq A \cap B$ (como se mencionó después del ejemplo 3.14). Para la inclusión opuesta, sea $y \in A$. Con $A \cup B = B$, $y \in A \Rightarrow y \in A \cup B \Rightarrow y \in B$ (como $A \cup B = B$) $\Rightarrow y \in A \cup B$, por lo que $A \subseteq A \cap B$ y concluimos que $A = A \cap B$.

iii) (c) $\Rightarrow$ (d) Aquí tenemos que $z \in \overline{B} \Rightarrow z \notin B \Rightarrow z \notin A \cap B$, ya que $A \cap B \subseteq B$. De $A \cap B = A$ se sigue que $z \notin A \cap B \Rightarrow z \notin A \Rightarrow z \in \overline{A}$, por lo que $\overline{B} \subseteq \overline{A}$.

iv) (d) $\Rightarrow$ (a) Por último, $w \in A \Rightarrow w \notin \overline{A}$ y como $\overline{B} \subseteq \overline{A}$, $w \notin \overline{A} \Rightarrow w \notin \overline{B}$. Entonces $w \notin \overline{B} \Rightarrow w \in B$, por lo que $A \subseteq B$.

Conociendo ya algo de demostración de teoremas, presentaremos ahora algunas de las principales propiedades que rigen la teoría de conjuntos, las cuales tienen una marcada semejanza con las leyes de la lógica dadas en la sección 2.2. En muchos casas, estas propiedades de la teoría de conjuntos son similares a las propiedades aritméticas de los números reales, donde "$\cup$" desempeña el papel de "+", e "$\cap$" el de "$\times$". Sin embargo, existen algunas diferencias.

Propiedades de la teoría de conjuntos

Para cualesquiera conjuntos *A*, *B* y *C* tomados de un universo $\mathcal{U}$:

1)	$\overline{\overline{A}} = A$	Ley del *doble complemento*
2)	$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$ $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$	Leyes de *De Morgan*
3)	$A \cup B = B \cup A$ $A \cap B = B \cap A$	Propiedades *conmutativas*
4)	$A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$ $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$	Propiedades *asociativas*
5)	$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$	Propiedades *distributivas*
6)	$A \cup A = A$ $A \cap A = A$	Propiedades *idempotentes*
7)	$A \cup \emptyset = A$ $A \cap \mathcal{U} = A$	Propiedades del *neutro*
8)	$A \cup \overline{A} = \mathcal{U}$ $A \cap \overline{A} = \emptyset$	Propiedades del *inverso*
9)	$A \cup \mathcal{U} = \mathcal{U}$ $A \cap \emptyset = \emptyset$	Propiedades de *dominación*
10)	$A \cup (A \cap B) = A$ $A \cap (A \cup B) = A$	Propiedades de *absorción*

Todas estas propiedades pueden establecerse mediante argumentos de pertenencia, como en la primera parte de la demostración del teorema 3.3. Demostramos esto estableciendo la primera de las leyes de De Morgan y la segunda propiedad distributiva de la intersección sobre la unión.

Demostración: Sea $x \in \mathcal{U}$. Entonces

$$\begin{aligned} x \in \overline{A \cup B} &\Rightarrow x \notin A \cup B \\ &\Rightarrow x \notin A \text{ y } x \notin B \\ &\Rightarrow x \in \overline{A} \text{ y } x \in \overline{B} \\ &\Rightarrow x \in \overline{A} \cap \overline{B}, \end{aligned}$$

por lo que $\overline{A \cup B} \subseteq \overline{A} \cap \overline{B}$. Para establecer la inclusión opuesta, podemos verificar que la recíproca de cada implicación lógica es también una implicación lógica (es decir, que cada implicación lógica es de hecho una equivalencia lógica). Como resultado tenemos que

$$\begin{aligned} x \in \overline{A} \cap \overline{B} &\Rightarrow x \in \overline{A} \text{ y } x \in \overline{B} \\ &\Rightarrow x \notin A \text{ y } x \notin B \\ &\Rightarrow x \notin A \cup B \\ &\Rightarrow x \in \overline{A \cup B}. \end{aligned}$$

Por lo tanto, $\overline{A} \cap \overline{B} \subseteq \overline{A \cup B}$. En consecuencia, como $\overline{A \cup B} \subseteq \overline{A} \cap \overline{B}$ y $\overline{A} \cap \overline{B} \subseteq \overline{A \cup B}$, se sigue de la definición 3.2 que $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$.

En nuestra segunda demostración estableceremos ambas relaciones de contenido en forma simultánea, usando la equivalencia lógica ($\Leftrightarrow$) en lugar de las implicaciones lógicas ($\Rightarrow$ y $\Leftarrow$).

Demostración: Para cada $x \in \mathcal{U}$,

$$\begin{aligned} x \in A \cap (B \cup C) &\Leftrightarrow (x \in A) \text{ y } (x \in B \cup C) \\ &\Leftrightarrow (x \in A) \text{ y } (x \in B \text{ o } x \in C) \\ &\Leftrightarrow (x \in A \text{ y } x \in B) \text{ o } (x \in A \text{ y } x \in C) \\ &\Leftrightarrow (x \in A \cap B) \text{ o } (x \in A \cap C) \\ &\Leftrightarrow x \in (A \cap B) \cup (A \cap C). \end{aligned}$$

Como todas las proposiciones son equivalentes, hemos establecido ambas relaciones de contenido en forma simultánea, por lo que $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$. (La equivalencia de la tercera y cuarta proposiciones se sigue del principio comparable en las leyes de la lógica dado por la propiedad distributiva de la conjunción sobre la disyunción.)

Sin duda, el lector espera que el emparejamiento de las propiedades en los puntos 2 a 10 tenga alguna importancia. Como con las leyes de la lógica, estas parejas de proposiciones se llaman *duales*. Una proposición puede obtenerse de la otra al reemplazar todas las ocurrencias de $\cup$ por $\cap$ y viceversa, y todas las ocurrencias de $\mathcal{U}$ por $\emptyset$ y viceversa.

Esto nos lleva a la siguiente idea formal.

Definición 3.9 Sea s una proposición (general) que trata de la igualdad de dos expresiones con conjuntos. Cada una de estas expresiones puede contener una o más ocurrencias de conjuntos (como A, $\overline{A}$, B, $\overline{B}$, etcétera), una o más ocurrencias de $\emptyset$ y $\mathcal{U}$ y solamente los símbolos de las operaciones con conjuntos $\cap$ y $\cup$. El *dual* de s, que se denota con s^d, se obtiene de s al reemplazar (1) cada ocurrencia de $\emptyset$ y $\mathcal{U}$ (en s) por $\mathcal{U}$ y $\emptyset$, respectivamente; y (2) cada ocurrencia de $\cap$ y $\cup$ (en s) por $\cup$ e $\cap$, respectivamente.

Como en la sección 2.2, estableceremos y usaremos el siguiente teorema. Demostraremos un resultado más general en el capítulo 15.

TEOREMA 3.5 *El principio de dualidad.* Sea s un teorema relativo a la igualdad de dos expresiones con conjuntos (como en la definición 3.9). Entonces s^d, el dual de s, es también un teorema.

El uso de este principio reduce nuestro trabajo en forma considerable. Para cada pareja de proposiciones en los puntos 2 al 10, sólo hay que demostrar una de las proposiciones y utilizar entonces el principio para obtener la otra proposición del par.

Debemos tener cuidado al aplicar el teorema 3.5. Este resultado no se puede aplicar a situaciones particulares, sino a resultados (teoremas) relativos a conjuntos en lo general. Por ejemplo, consideremos la situación *particular* donde $\mathcal{U} = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ y $A = \{1, 2, 3, 4\}$, $B = \{1, 2, 3, 5\}$, $C = \{1, 2\}$ y $D = \{1, 3\}$. En este caso,

$$A \cap B = \{1,2,3\} = C \cup D.$$

Sin embargo, no podemos concluir que $s: A \cap B = C \cup D \Rightarrow s^d: A \cup B = C \cap D$, ya que en este caso, $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, mientras que $C \cap D = \{1\}$. La razón por la que el teorema 3.5 no es aplicable es este caso es que, aunque $A \cap B = C \cup D$ en este ejemplo *particular*, no es verdadera en general (es decir, para cualesquiera conjuntos A, B, C, D tomados de un universo $\mathcal{U}$).

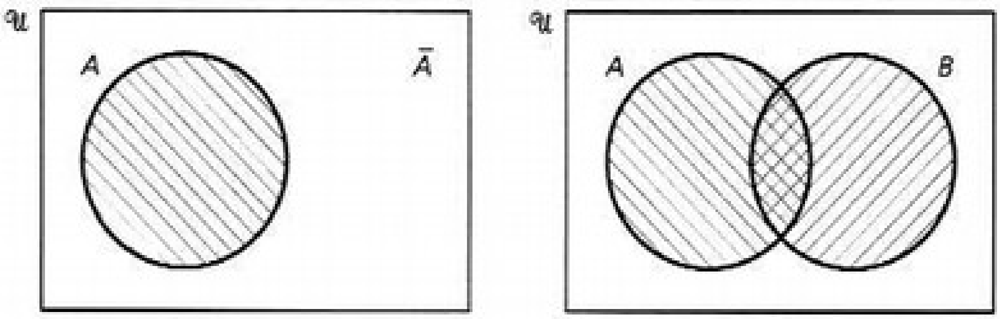
Ejemplo 3.17 Dado que en la definición 3.9 y el teorema 3.5 no mencionamos nada acerca de los subconjuntos, ¿podemos encontrar un dual de la proposición $A \subseteq B$ (donde $A, B \subseteq \mathcal{U}$)?

Aquí tenemos la oportunidad de usar alguno de los resultados del teorema 3.4. En particular, podemos trabajar con la proposición $A \subseteq B$ mediante la proposición equivalente $A \cup B = B$.

El dual de $A \cup B = B$ produce $A \cap B = B$. Pero $A \cap B = B \Leftrightarrow B \subseteq A$. En consecuencia, el dual de la proposición $A \subseteq B$ es la proposición $B \subseteq A$. (También podríamos haber obtenido este resultado usando $A \subseteq B \Leftrightarrow A \cap B = A$. En los ejercicios de esta sección pediremos al lector que verifique este caso.)

Cuando analizamos las relaciones que pueden existir entre los conjuntos implicados en una proposición de igualdad o contenido entre conjuntos, podemos estudiar la situación de manera gráfica.

Un *diagrama de Venn* (llamado así en honor del lógico inglés John Venn, 1834–1923) se construye de la manera siguiente: $\mathcal{U}$ aparece como el interior de un rectángulo, mientras que los subconjuntos de $\mathcal{U}$ se representan mediante los interiores de círculos y otras curvas cerradas. La figura 3.5 muestra dos diagramas de Venn. La región sombreada de la figura 3.5(a) representa el conjunto A, mientras que $\overline{A}$ queda representado por el área no sombreada. La región sombreada de la figura 3.5(b) representa $A \cup B$. El conjunto $A \cap B$ es el área cuadriculada de la figura.



(a) (b)

Figura 3.5

En la figura 3.6, usamos los diagramas de Venn para establecer la segunda ley de De Morgan. La figura 3.6(a) tiene sombreado todo excepto el área $A \cap B$, de modo que la parte sombreada representa $\overline{A \cap B}$. Ahora utilizaremos un diagrama de Venn para mostrar $\overline{A} \cup \overline{B}$. En la figura

3.6(b), $\overline{A}$ es la región representada por las líneas que van desde la parte inferior izquierda a la superior derecha; las líneas que van de la parte superior izquierda a la inferior derecha sombrean la región que representa $\overline{B}$. Por lo tanto, $\overline{A} \cup \overline{B}$ está dada por la región sombreada de la figura 3.6(b). Puesto que el área sombreada de la parte (b) es la misma que la de la parte (a), se sigue que $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$.

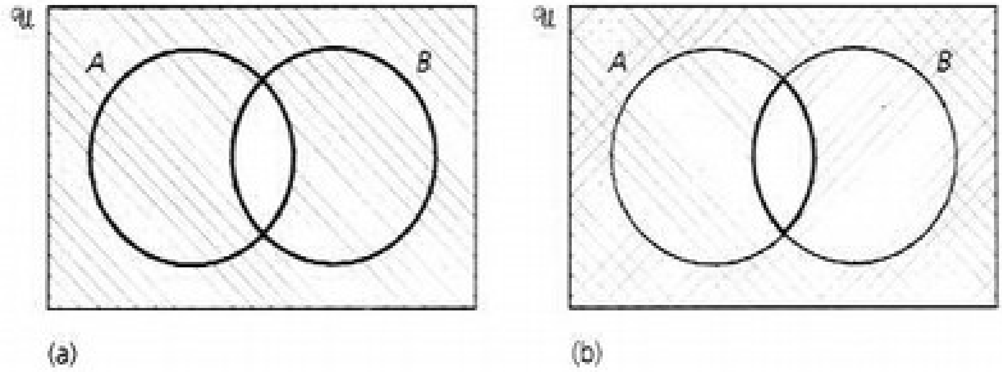


Figura 3.6

Podemos seguir ilustrando el uso de estos diagramas para mostrar que si $A, B, C \subseteq \mathcal{U}$,

$$\overline{(A \cup B) \cap C} = (\overline{A} \cap \overline{B}) \cup \overline{C}.$$

En vez de las regiones sombreadas, otro enfoque que también utiliza los diagramas de Venn numera las regiones, como se muestra en la figura 3.7, donde, por ejemplo, la región 3 es $\overline{A} \cap B \cap \overline{C}$ y la región 7 es $A \cap \overline{B} \cap C$. Cada región es un conjunto de la forma $S_1 \cap S_2 \cap S_3$, donde S_1 se reemplaza por A o $\overline{A}$, S_2 por B o $\overline{B}$ y S_3 por C o $\overline{C}$. Por lo tanto, por la regla del producto, existen ocho regiones posibles.

Al consultar la figura 3.7, vemos que $A \cup B$ abarca las regiones 2, 3, 5, 6, 7, 8 y que las regiones 4, 6, 7, 8 conforman el conjunto C. Por lo tanto, $(A \cup B) \cap C$ comprende las regiones comunes a $A \cup B$ y a C; es decir, las regiones 6, 7, 8. En consecuencia, $\overline{(A \cup B) \cap C}$ está formado por las regiones 1, 2, 3, 4, 5. El conjunto $\overline{A}$ consta de las regiones 1, 3, 4, 6, mientras que las regiones 1, 2, 4, 7 conforman $\overline{B}$. En consecuencia, $\overline{A} \cap \overline{B}$ comprende las regiones 1 y 4. Como las regiones 4, 6, 7, 8 comprenden C, el conjunto $\overline{C}$ está formado por las regiones 1, 2, 3, 5. Al tomar la unión de $\overline{A} \cap \overline{B}$ con $\overline{C}$, obtenemos las regiones 1, 2, 3, 4, 5, como en el caso de $\overline{(A \cup B) \cap C}$.

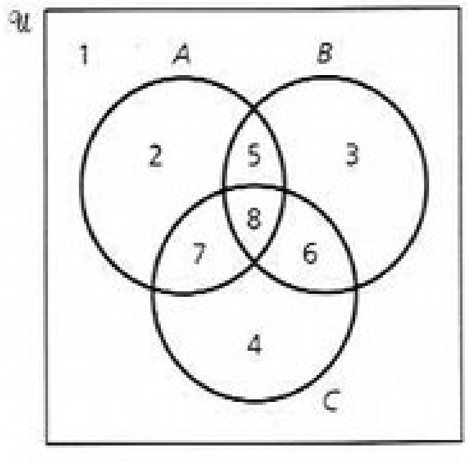


Figura 3.7

Otra técnica para establecer las igualdades entre conjuntos es la *tabla de pertenencia*. (Este método es similar al uso de la tabla de verdad presentada en la sección 2.1.)

Observamos que para los conjuntos $A, B \subseteq \mathcal{U}$, un elemento $x \in \mathcal{U}$ satisface exactamente una de las siguientes cuatro situaciones:

a) $x \notin A, x \notin B$ **b)** $x \notin A, x \in B$
c) $x \in A, x \notin B$ **d)** $x \in A, x \in B$.

Cuando x es un elemento de un conjunto dado, escribimos un 1 en la columna que representa ese conjunto en la tabla de pertenencia; cuando x no está en el conjunto, escribimos un 0. La tabla 3.2 proporciona las tablas de pertenencia para $A \cap B, A \cup B, \overline{A}$ con esta notación. Por ejemplo, en este caso, la tercera fila de la parte (a) indica que cuando un elemento $x \in \mathcal{U}$ está en el conjunto A pero no está en B, entonces no está en $A \cap B$ pero sí en $A \cup B$.

Estas operaciones con ceros y unos son iguales a las de la aritmética ordinaria, excepto que $1 \cup 1 = 1$.

Tabla 3.2

A	B	$A \cap B$	$A \cup B$
0	0	0	0
0	1	0	1
1	0	0	1
1	1	1	1

(a)

A	$\overline{A}$
0	1
1	0

(b)

Por medio de las tablas de pertenencia podemos establecer la igualdad de dos conjuntos si comparamos sus columnas respectivas en la tabla. La tabla 3.3 demuestra esto para la propiedad distributiva de la unión sobre la intersección. Vemos ahora cómo cada una de las ocho filas corresponde exactamente a una de las ocho regiones del diagrama de Venn de la figura 3.7. Por ejemplo, la fila 1 corresponde a la región 1: $\overline{A} \cap \overline{B} \cap \overline{C}$ y la fila 6 corresponde a la región 7: $A \cap \overline{B} \cap C$.

Tabla 3.3

A	B	C	$B \cap C$	$A \cup (B \cap C)$	$A \cup B$	$A \cup C$	$(A \cup B) \cap (A \cup C)$
0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	1	0	0	0	1	0
0	1	0	0	0	1	0	0
0	1	1	1	1	1	1	1
1	0	0	0	1	1	1	1
1	0	1	0	1	1	1	1
1	1	0	0	1	1	1	1
1	1	1	1	1	1	1	1

Puesto que estas columnas son idénticas, concluimos que $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$

Antes de continuar debemos señalar dos cosas: (1) un diagrama de Venn es simplemente una representación gráfica de una tabla de pertenencia; (2) el uso de los diagramas de Venn o las tablas de pertenencia podría ser atractivo, en particular, para el lector que por el momento no se interesa por la escritura de demostraciones. Sin embargo, ninguna de estas técnicas especifica la lógica y el razonamiento desplegados en los argumentos de pertenencia ya presentados, por ejemplo, al demostrar que para cada $A, B, C \subseteq \mathcal{U}$,

$$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}, \qquad \text{y}$$
$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C).$$

Los diagramas de Venn pueden ayudarnos a comprender ciertas situaciones matemáticas, pero cuando el número de conjuntos implicados es mayor de tres, el diagrama podría ser difícil de dibujar.

En resumen, el argumento de pertenencia (particularmente con sus explicaciones detalladas) es más riguroso que estas otras dos técnicas y es el método preferido para demostrar resultados en la teoría de conjuntos.

Ahora que disponemos de las leyes de la teoría de conjuntos, ¿qué podemos hacer con ellas? Los siguientes ejemplos demostrarán la forma de utilizar las leyes para simplificar una complicada expresión con conjuntos o para obtener nuevas igualdades entre conjuntos. (Cuando se use más de una ley en un paso dado, mencionaremos la ley principal como la razón.)

Ejemplo 3.18

Simplifique la expresión $\overline{\overline{(A \cup B) \cap C} \cup \overline{B}}$.

	Razones
$\overline{\overline{(A \cup B) \cap C} \cup \overline{B}}$	
$= \overline{\overline{((A \cup B) \cap C)}} \cap \overline{\overline{B}}$	Ley de De Morgan
$= ((A \cup B) \cap C) \cap B$	Ley del doble complemento
$= (A \cup B) \cap (C \cap B)$	Propiedad asociativa de la intersección
$= (A \cup B) \cap (B \cap C)$	Propiedad conmutativa de la intersección
$= [(A \cup B) \cap B] \cap C$	Propiedad asociativa de la intersección
$= B \cap C$	Ley de absorción

El lector debe notar la analogía entre los pasos y las razones de este ejemplo y los pasos y razones utilizados para simplificar la proposición

$$\neg[\neg[(p \vee q) \wedge r] \vee \neg q]$$

hasta obtener la proposición

$$q \wedge r$$

en el ejemplo 2.18.

Ejemplo 3.19

Exprese $\overline{A - B}$ en términos de $\cup$ y $\overline{}$.

De la definición de complemento relativo, $A - B = \{x \mid x \in A \wedge x \notin B\} = A \cap \overline{B}$. Por lo tanto,

	Razones
$\overline{A - B} = \overline{A \cap \overline{B}}$	
$= \overline{A} \cup \overline{\overline{B}}$	Ley de De Morgan
$= \overline{A} \cup B$	Ley del doble complemento

Ejemplo 3.20 De la observación hecha en el ejemplo 3.19, tenemos que $A \triangle B = \{x \mid x \in A \cup B \wedge x \notin A \cap B\} = (A \cup B) - (A \cap B) = (A \cup B) \cap \overline{(A \cap B)}$, por lo que

	Razones
$\overline{A \triangle B} = \overline{(A \cup B) \cap \overline{(A \cap B)}}$	
$= \overline{(A \cup B)} \cup \overline{\overline{(A \cap B)}}$	Ley de De Morgan
$= \overline{(A \cup B)} \cup (A \cap B)$	Ley del doble complemento
$= (A \cap B) \cup \overline{(A \cup B)}$	Propiedad conmutativa de $\cup$
$= (A \cap B) \cup (\overline{A} \cap \overline{B})$	Ley de De Morgan
$= [(A \cap B) \cup \overline{A}] \cap [(A \cap B) \cup \overline{B}]$	Propiedad distributiva de $\cup$ sobre $\cap$
$= [(A \cup \overline{A}) \cap (B \cup \overline{A})] \cap [(A \cup \overline{B}) \cap (B \cup \overline{B})]$	Propiedad distributiva de $\cup$ sobre $\cap$
$= [\mathcal{U} \cap (B \cup \overline{A})] \cap [(A \cup \overline{B}) \cap \mathcal{U}]$	Propiedad del inverso
$= (B \cup \overline{A}) \cap (A \cup \overline{B})$	Propiedad del neutro
$= (\overline{A} \cup B) \cap (A \cup \overline{B})$	Propiedad conmutativa de $\cup$
$= (\overline{A} \cup B) \cap \overline{(\overline{A} \cap B)}$	Ley de De Morgan
$= \overline{A} \triangle B$	
$= (A \cup \overline{B}) \cap (\overline{A} \cup B)$	Propiedad conmutativa de $\cap$
$= (A \cup \overline{B}) \cap \overline{(A \cap \overline{B})}$	Ley de De Morgan
$= A \triangle \overline{B}$	

Para terminar esta sección, extenderemos las operaciones de conjuntos $\cup$ e $\cap$ más allá de tres conjuntos.

Definición 3.10 Sea I un conjunto no vacío y $\mathcal{U}$ un universo. Para cada $i \in I$, sea $A_i \subseteq \mathcal{U}$. Entonces I es un *conjunto índice* (o *conjunto de índices*) y cada $i \in I$ es un *índice*.

$$\bigcup_{i \in I} A_i = \{x \mid x \in A_i \quad \text{para al menos un } i \in I\}, \qquad \text{y}$$
$$\bigcap_{i \in I} A_i = \{x \mid x \in A_i \quad \text{para todo } i \in I\}.$$

Podemos reformular la definición 3.10 usando cuantificadores:

$$x \in \bigcup_{i \in I} A_i \Leftrightarrow \exists\, i \in I \ (x \in A_i)$$
$$x \in \bigcap_{i \in I} A_i \Leftrightarrow \forall\, i \in I \ (x \in A_i)$$

Entonces, $x \notin \bigcup_{i \in I} A_i \Leftrightarrow \neg[\exists i \in I(x \in A_i)] \Leftrightarrow \forall i \in I(x \notin A_i)$; es decir, $x \notin \bigcup_{i \in I} A_i$ si y sólo si $x \notin A_i$ para *todo* índice $i \in I$. En forma análoga, $x \notin \bigcap_{i \in I} A_i \Leftrightarrow \neg[\forall i \in I(x \in A_i)] \Leftrightarrow \exists i \in I(x \notin A_i)$; es decir, $x \notin \bigcup_{i \in I} A_i$ si y sólo si $x \notin A_i$ para *al menos un índice* $i \in I$.

Si el conjunto de índices I es el conjunto $\mathbf{Z}^+$, podemos escribir

$$\bigcup_{i \in \mathbf{Z}^+} A_i = A_1 \cup A_2 \cup \cdots = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i, \qquad \bigcap_{i \in \mathbf{Z}^+} A_i = A_1 \cap A_2 \cap \cdots = \bigcap_{i=1}^{\infty} A_i.$$

Ejemplo 3.21 Sea $I = \{3, 4, 5, 6, 7\}$ y para $i \in I$ sea $A_i = \{1, 2, 3, \ldots, i\} \subseteq \mathscr{U} = \mathbf{Z}^+$. Entonces $\bigcup_{i\in I} A_i = \bigcup_{i=3}^{7} A_i = \{1, 2, 3, \ldots, 7\} = A_7$, mientras que $\bigcap_{i\in I} A_i = \{1, 2, 3\} = A_3$.

Ejemplo 3.22 Sean $\mathscr{U} = \mathbf{R}$ e $I = \mathbf{R}^+$. Si para cada $r \in \mathbf{R}^+$, $A_r = [-r, r]$, entonces $\bigcup_{r\in I} A_r = \mathbf{R}$ y $\bigcap_{r\in I} A_r = \{0\}$.

Por desgracia, al trabajar con uniones e intersecciones generalizadas, las tablas de pertenencia y los diagramas de Venn son casi inútiles; sin embargo, podemos seguir utilizando la definición rigurosa de pertenencia, como aparece en la primera parte de la demostración del teorema 3.3.

TEOREMA 3.6 *Leyes de De Morgan generalizadas*. Sea I un conjunto de índices, donde para cada $i \in I$, $A_i \subseteq \mathscr{U}$. Entonces

a) $\overline{\bigcup_{i\in I} A_i} = \bigcap_{i\in I} \overline{A_i}$ b) $\overline{\bigcap_{i\in I} A_i} = \bigcup_{i\in I} \overline{A_i}$

Demostración: Demostraremos la parte (a) y dejaremos la demostración de la parte (b) al lector. Para cada $x \in \mathscr{U}$, $x \in \overline{\bigcup_{i\in I} A_i} \Leftrightarrow x \notin \bigcup_{i\in I} A_i \Leftrightarrow x \notin A_i$, para cada $i \in I \Leftrightarrow x \in \overline{A_i}$, para todo $i \in I \Leftrightarrow x \in \bigcap_{i\in I} \overline{A_i}$.

EJERCICIOS 3.2

1. Para $\mathscr{U} = \{1, 2, 3, \ldots, 9, 10\}$ sean $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $B = \{1, 2, 4, 8\}$, $C = \{1, 2, 3, 5, 7\}$ y $D = \{2, 4, 6, 8\}$. Determine lo siguiente:

a) $(A \cup B) \cap C$ b) $A \cup (B \cap C)$ c) $\overline{C} \cup \overline{D}$
d) $\overline{C \cap D}$ e) $(A \cup B) - C$ f) $A \cup (B - C)$
g) $(B - C) - D$ h) $B - (C - D)$ i) $(A \cup B) - (C \cap D)$

2. Si $A = [0, 3]$, $B = [2, 7)$ y $\mathscr{U} = \mathbf{R}$, determine lo siguiente:

a) $A \cap B$ b) $A \cup B$ c) $\overline{A}$
d) $A \triangle B$ e) $A - B$ f) $B - A$

3. Sean $\mathscr{U} = \{a, b, c, \ldots, x, y, z\}$, $A = \{a, b, c\}$ y $C = \{a, b, d, e\}$. Si $|A \cap B| = 2$ y $(A \cap B) \subset B \subset C$, determine B.

4. a) Determine los conjuntos A, B cuando $A - B = \{1, 3, 7, 11\}$, $B - A = \{2, 6, 8\}$ y $A \cap B = \{4, 9\}$.
b) Determine los conjuntos C,D, donde $C - D = \{1, 2, 4\}$, $D - C = \{7, 8\}$ y $C \cup D = \{1, 2, 4, 5, 7, 8, 9\}$.

5. Para $\mathscr{U} = \{1, 2, 3, \ldots, 29, 30\}$, sean $B, C \subseteq \mathscr{U}$ con $B = \{1, 2, 3, 4, 6, 9, 15\}$ y $C = \{2, 3, 6, 15, 22, 29\}$. ¿Cuánto vale $|B \cup C|$?

6. Sean $A, B, C, D, E \subseteq \mathbf{Z}$ definidos como sigue:

$A = \{2n \mid n \in \mathbf{Z}\}$—es decir, A es el conjunto de todos los múltiplos (enteros) de 2;
$B = \{3n \mid n \in \mathbf{Z}\}$; $C = \{4n \mid n \in \mathbf{Z}\}$;
$D = \{6n \mid n \in \mathbf{Z}\}$; y $E = \{8n \mid n \in \mathbf{Z}\}$.

a) ¿Cuáles de las siguientes proposiciones son verdaderas y cuáles falsas?

i) $E \subseteq C \subseteq A$ ii) $A \subseteq C \subseteq E$ iii) $B \subseteq D$
iv) $D \subseteq B$ v) $D \subseteq A$ vi) $\overline{D} \subseteq \overline{A}$

b) Determine cada uno de los siguientes conjuntos.

i) $C \cap E$ **ii)** $B \cup D$ **iii)** $A \cap B$

iv) $B \cap D$ **v)** $\overline{A}$ **vi)** $A \cap E$

7. Sea $\mathcal{U}$ un universo *finito* con $A, B \subseteq \mathcal{U}$. Ordene la siguiente lista, en orden creciente de acuerdo con el tamaño.

a) $|A \cup B|, |B|, |\emptyset|, |A \cap B|, |\mathcal{U}|$

b) $|A - B|, |A| + |B|, |\emptyset|, |A \triangle B|, |A \cup B|, |\mathcal{U}|$

c) $|A - B|, |\emptyset|, |A|, |A| + |B|, |A \cup B|, |\mathcal{U}|$

8. Dado un universo $\mathcal{U}$ y los conjuntos $A, B \subseteq \mathcal{U}$, ¿a qué es igual $(A - B) \cap (B - A)$? Demuestre su afirmación.

9. Determine cuáles de las siguientes proposiciones son verdaderas y cuáles son falsas.

a) $\mathbf{Z}^+ \subseteq \mathbf{Q}^+$ **b)** $\mathbf{Z}^+ \subseteq \mathbf{Q}$ **c)** $\mathbf{Q}^+ \subseteq \mathbf{R}$

d) $\mathbf{R}^+ \subseteq \mathbf{Q}$ **e)** $\mathbf{Q}^+ \cap \mathbf{R}^+ = \mathbf{Q}^+$ **f)** $\mathbf{Z}^+ \cup \mathbf{R}^+ = \mathbf{R}^+$

g) $\mathbf{R}^+ \cap \mathbf{C} = \mathbf{R}^+$ **h)** $\mathbf{C} \cup \mathbf{R} = \mathbf{R}$ **i)** $\mathbf{Q}^* \cap \mathbf{Z} = \mathbf{Z}$

j) $\mathbf{Z} \cup \mathbf{Q} = \mathbf{Z}$

10. Demuestre cada uno de los siguientes resultados sin usar los diagramas de Venn o las tablas de pertenencia. (Suponga la existencia de un universo $\mathcal{U}$.)

a) Si $A \subseteq B$ y $C \subseteq D$, entonces $A \cap C \subseteq B \cap D$ y $A \cup C \subseteq B \cup D$.

b) Si $A \subseteq C$ y $B \subseteq C$, entonces $A \cap B \subseteq C$ y $A \cup B \subseteq C$.

c) $A \subseteq B$ si y sólo si $A \cap \overline{B} = \emptyset$.

d) $A \subseteq B$ si y sólo si $\overline{A} \cup B = \mathcal{U}$.

11. Demuestre o refute lo siguiente:

a) Para conjuntos $A, B, C \subseteq \mathcal{U}$, $A \cap C = B \cap C \Rightarrow A = B$.

b) Para conjuntos $A, B, C \subseteq \mathcal{U}$, $A \cup C = B \cup C \Rightarrow A = B$.

c) Para conjuntos $A, B, C \subseteq \mathcal{U}$, $[(A \cap C = B \cap C) \wedge (A \cup C = B \cup C)] \Rightarrow A = B$.

d) Para conjuntos $A, B, C \subseteq \mathcal{U}$, $A \triangle C = B \triangle C \Rightarrow A = B$.

12. Usando los diagramas de Venn, analice la verdad o falsedad de lo siguiente, para los conjuntos $A, B, C \subseteq \mathcal{U}$.

a) $A \triangle (B \cap C) = (A \triangle B) \cap (A \triangle C)$

b) $A \cap (B \triangle C) = (A \cap B) \triangle (A \cap C)$

c) $A \triangle (B \cup C) = (A \triangle B) \cup (A \triangle C)$

d) $A - (B \cup C) = (A - B) \cap (A - C)$

e) $A \triangle (B \triangle C) = (A \triangle B) \triangle C$

13. Si $A = \{a, b, d\}$, $B = \{d, x, y\}$ y $C = \{x, z\}$ ¿cuántos subconjuntos propios tiene el conjunto $(A \cap B) \cup C$? ¿cuántos tiene el conjunto $A \cap (B \cup C)$?

14. Para un universo dado $\mathcal{U}$, cada subconjunto A de $\mathcal{U}$ satisface las leyes de idempotencia para la unión y la intersección. (a) ¿Existe algún número real que satisfaga la propiedad de idempotencia para la suma? (Es decir, ¿podemos encontrar algún número o números reales tales que $x + x = x$?) (b) Responda la parte (a) reemplazando la suma por la multiplicación.

15. Escriba la proposición dual para cada uno de los siguientes resultados de la teoría de conjuntos.

a) $\mathcal{U} = (A \cap B) \cup (A \cap \overline{B}) \cup (\overline{A} \cap B) \cup (\overline{A} \cap \overline{B})$ **b)** $A = A \cap (A \cup B)$

c) $A \cup B = (A \cap B) \cup (A \cap \overline{B}) \cup (\overline{A} \cap B)$ **d)** $A = (A \cup B) \cap (A \cup \emptyset)$

16. Use la equivalencia $A \subseteq B \Leftrightarrow A \cap B = A$ para demostrar que la proposición dual de $A \subseteq B$ es la proposición $B \subseteq A$.

17. Demuestre o refute lo siguiente, para los conjuntos $A, B \subseteq \mathcal{U}$.

a) $\mathcal{P}(A \cup B) = \mathcal{P}(A) \cup \mathcal{P}(B)$ **b)** $\mathcal{P}(A \cap B) = \mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(B)$

18. Utilice las tablas de pertenencia para establecer lo siguiente:

a) $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$ **b)** $A \cup A = A$ **c)** $A \cup (A \cap B) = A$

d) $\overline{(A \cap B) \cup (\overline{A} \cap C)} = (A \cap \overline{B}) \cup (\overline{A} \cap \overline{C})$

19. **a)** ¿Cuántas filas se necesitan para construir la tabla de pertenencia para $A \cap (B \cup C) \cap (D \cup \overline{E} \cup \overline{F})$?

b) ¿Cuántas filas se necesitan para construir la tabla de pertenencia para un conjunto formado por los conjuntos $A_1, A_2, \ldots, A_n$, usando $\cap$, $\cup$ y $^-$?

c) Dadas las tablas de pertenencia para dos conjuntos A, B, ¿cómo puede reconocerse la relación $A \subseteq B$?

d) Utilice la tabla de pertenencia para determinar si $(A \cap B) \cup \overline{(B \cap C)} \supseteq A \cup \overline{B}$.

20. Proporcione la justificación (a partir de las propiedades de la teoría de conjuntos) de los pasos necesarios para simplificar el conjunto $(A \cap B) \cup [B \cap ((C \cap D) \cup (C \cap \overline{D}))]$, donde $A, B, C, D \subseteq \mathcal{U}$.

Pasos	**Razones**
$(A \cap B) \cup [B \cap ((C \cap D) \cup (C \cap \overline{D}))]$	
$= (A \cap B) \cup [B \cap (C \cap (D \cup \overline{D}))]$	
$= (A \cap B) \cup [B \cap (C \cap \mathcal{U})]$	
$= (A \cap B) \cup (B \cap C)$	
$= (B \cap A) \cup (B \cap C)$	
$= B \cap (A \cup C)$	

21. Mediante las leyes de la teoría de conjuntos, simplifique lo siguiente:

a) $A \cap (B - A)$ **b)** $(A \cap B) \cup (A \cap B \cap \overline{C} \cap D) \cup (\overline{A} \cap B)$

c) $(A - B) \cup (A \cap B)$ **d)** $\overline{A} \cup \overline{B} \cup (A \cap B \cap \overline{C})$

e) $\overline{A} \cup (A \cap \overline{B}) \cup (A \cap B \cap \overline{C}) \cup (A \cap B \cap C \cap \overline{D}) \cup \cdots$

22. Para cada $n \in \mathbf{Z}^+$, sea $A_n = \{1, 2, 3, \ldots, n-1, n\}$. (Aquí $\mathcal{U} = \mathbf{Z}^+$ y el conjunto índice es $I = \mathbf{Z}^+$.) Determine $\bigcup_{n=1}^{7} A_n$, $\bigcap_{n=1}^{11} A_n$, $\bigcup_{n=1}^{m} A_n$ y $\bigcap_{n=1}^{m} A_n$, donde m es un entero positivo fijo.

23. Para cada $n \in \mathbf{Z}^+$ sea $B_n = \{n+1, n+2, n+3, \ldots\}$. (En este caso, $\mathcal{U} = \mathbf{Z}^+$ y el conjunto índice es $I = \mathbf{Z}^+$.) Determine $\bigcup_{n=1}^{8} B_n$, $\bigcap_{n=3}^{12} B_n$, $\bigcup_{n=1}^{m} B_n$ y $\bigcap_{n=1}^{m} B_n$, donde m es un entero positivo fijo.

24. Sea $\mathcal{U} = \mathbf{R}$ y sea $I = \mathbf{Z}^+$. Para cada $n \in \mathbf{Z}^+$, sea $A_n = [-2n, 3n]$. Determine lo siguiente:

a) A_3 **b)** A_4 **c)** $A_3 - A_4$ **d)** $A_3 \triangle A_4$

e) $\bigcup_{n=1}^{7} A_n$ **f)** $\bigcap_{n=1}^{7} A_n$ **g)** $\bigcup_{n \in \mathbf{Z}^+} A_n$ **h)** $\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$

25. Dado un universo $\mathcal{U}$ y un conjunto índice I, para cada $i \in I$, sea $B_i \subseteq \mathcal{U}$. Demuestre que para $A \subseteq \mathcal{U}$, $A \cap (\bigcup_{i \in I} B_i) = \bigcup_{i \in I}(A \cap B_i)$ y $A \cup (\bigcap_{i \in I} B_i) = \bigcap_{i \in I}(A \cup B_i)$. (Propiedades distributivas generalizadas)

26. Proporcione los detalles para la demostración del teorema 3.6(b).

3.3 Técnicas de conteo y diagramas de Venn

Con todo el trabajo teórico y de demostración de teoremas que realizamos en la sección anterior, ahora es un buen momento para examinar algunos otros problemas de conteo.

Para los conjuntos A, B de un universo finito $\mathcal{U}$, los siguientes diagramas de Venn nos ayudarán a obtener fórmulas de conteo para $|\overline{A}|$ y $|A \cup B|$ en términos de $|A|$, $|B|$ y $|A \cap B|$.

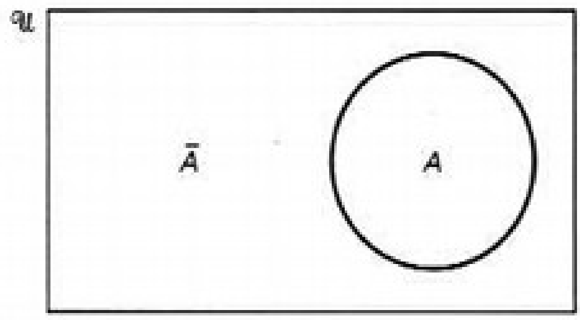


Figura 3.8

Como lo demuestra la figura 3.8, $A \cup \overline{A} = \mathcal{U}$ y $A \cap \overline{A} = \emptyset$, así que, por la regla de la suma, $|A| + |\overline{A}| = |\mathcal{U}|$ o $|\overline{A}| = |\mathcal{U}| - |A|$. Los conjuntos A, B de la figura 3.9 tienen intersección vacía, por lo que a partir de la regla de la suma obtenemos que $|A \cup B| = |A| + |B|$; es necesario que A, B sean finitos, pero no se impone una condición en el cardinal de $\mathcal{U}$.

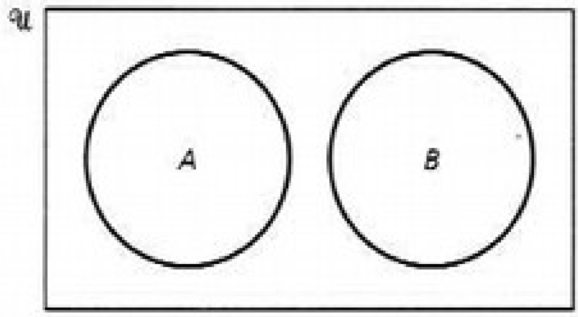


Figura 3.9

Regresaremos al caso en que A, B no son disjuntos y derivaremos la fórmula para $|A \cup B|$ con el siguiente ejemplo.

Ejemplo 3.23 En una clase de 50 alumnos de primer ingreso, 30 estudian BASIC, 25 Pascal y 10 están estudiando ambos lenguajes. ¿Cuántos alumnos de primer ingreso estudian algún lenguaje de computación?

Sea $\mathcal{U}$ la clase de 50 alumnos de primer ingreso, A el subconjunto de estudiantes que estudian BASIC y B el subconjunto de alumnos que estudian Pascal. Para responder la pregunta, necesitamos calcular $|A \cup B|$. En la figura 3.10, los números que aparecen en las regiones se obtienen de la información dada: $|A| = 30$, $|B| = 25$, $|A \cap B| = 10$. En consecuencia, $|A \cup B| = 45 \neq |A| + |B|$, ya que $|A| + |B|$ cuenta dos veces a los estudiantes que están en $A \cap B$. Para evitar este recuento excesivo, restamos $|A \cap B|$ de $|A| + |B|$ para obtener la fórmula correcta: $|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$.

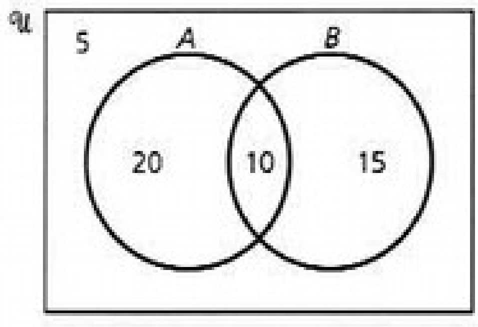


Figura 3.10

Para el caso general, si A y B son conjuntos finitos, entonces $|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$. En consecuencia, los conjuntos finitos A y B son (mutuamente) disjuntos si y sólo si $|A \cup B| = |A| + |B|$.

Esta situación se extiende al caso de tres conjuntos, como lo ilustra el siguiente ejemplo.

Ejemplo 3.24 Un chip lógico de 14 pins tiene cuatro puertas AND, cada una con dos entradas y una salida. (Véase la Fig. 3.11) La primera puerta AND (la puerta de los pins 1, 2, 3) puede tener cualquiera o todos los defectos siguientes:

D_1: la primera entrada (pin 1) está fija en 0.
D_2: la segunda entrada (pin 2) está fija en 0.
D_3: la salida (pin 3) está fija en 1.

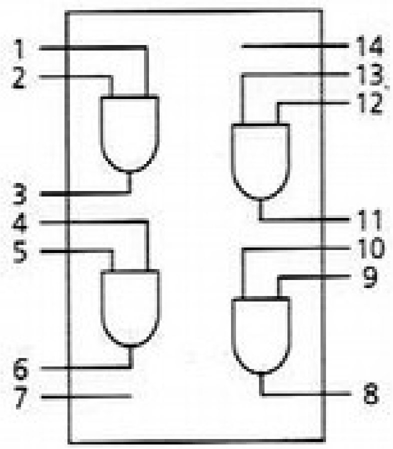


Figura 3.11

Para una muestra de 100 de estos chips lógicos, sean A, B y C los subconjuntos que tienen los defectos D_1, D_2 y D_3, respectivamente. Si $|A| = 23$, $|B| = 26$, $|C| = 30$, $|A \cap B| = 7$, $|A \cap C| = 8$, $|B \cap C| = 10$ y $|A \cap B \cap C| = 3$, ¿cuántos chips de la muestra tienen una primera puerta AND con defecto?

Si trabajamos en dirección contraria, de $|A \cap B \cap C| = 3$ a $|A| = 23$, etiquetamos las regiones como se muestra en la figura 3.12 y vemos que $|A \cup B \cup C| = 57 = |A| + |B| +$

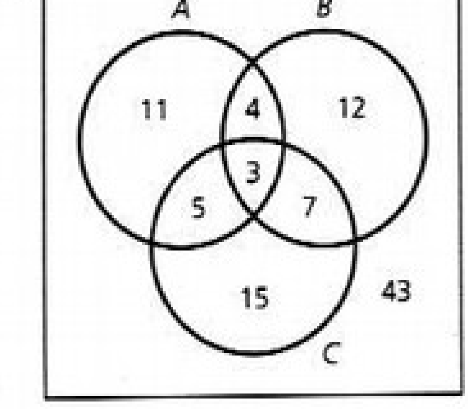


Figura 3.12

$|C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C|$. Así, el ejemplo muestra 57 chips que tienen una primera puerta AND con defecto y $100 - 57 = 43$ chips en los que la primera puerta AND no tiene defecto.

Apartir de la fórmula $|A \cup B \cup C|$ y las leyes de De Morgan, encontramos que si A, B, C son conjuntos de un universo finito $\mathscr{U}$, entonces $|\overline{A} \cap \overline{B} \cap \overline{C}| = |\overline{A \cup B \cup C}| = |\mathscr{U}| - |A \cup B \cup C| = |\mathscr{U}| - |A| - |B| - |C| + |A \cap B| + |A \cap C| + |B \cap C| - |A \cap B \cap C|$.

Cerraremos esta sección con un problema que utiliza este resultado.

Ejemplo 3.25 Un estudiante visita un salón de juegos al salir de la escuela y juega *Laser Man*, *Millipede* o *Space Conquerors*. ¿De cuántas formas puede jugar una de las opciones al día, de modo que juegue al menos una vez durante una semana de clases?

Aquí hay un cierto giro. El conjunto $\mathscr{U}$ consta de todos las disposiciones de tamaño cinco tomadas del conjunto de tres juegos, con repeticiones. El conjunto A representa el subconjunto de todas las series de cinco juegos practicados durante la semana *sin jugar Laser Man*. En forma análoga, los conjuntos B y C se definen dejando fuera *Millipede* y *Space Conquerors*, respectivamente. Las técnicas de conteo del capítulo 1 dan como resultado $|\mathscr{U}| = 3^5$, $|A| = |B| = |C| = 2^5$, $|A \cap B| = |A \cap C| = |B \cap C| = 1^5 = 1$ y $|A \cap B \cap C| = 0$, así que, por la fórmula anterior, existen $|\overline{A} \cap \overline{B} \cap \overline{C}| = 3^5 - 3 \cdot 2^5 + 3 \cdot 1^5 - 0 = 150$ maneras en que el estudiante puede seleccionar sus juegos diarios durante una semana de clases y jugar cada opción al menos una vez.

Este ejemplo también puede expresarse en forma de distribución, ya que buscamos el número de maneras de distribuir cinco objetos distintos (lunes, martes, . . . , viernes) entre tres recipientes distintos (los juegos de computador) sin dejar uno vacío. Diremos más acerca de esto en el capítulo 5.

3.4 Unas palabras en cuanto a la probabilidad

Cuando uno realiza un *experimento*, como tirar un solo dado o seleccionar dos estudiantes de una clase de 20 para trabajar en un proyecto, la lista de todos los posibles resultados para esta situación se llama *espacio muestral*. En consecuencia, $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ sirve como un espacio muestral para el primer experimento mencionado, mientras que $\{\{a_i, a_j\} \mid 1 \le i \le 20, 1 \le j \le 20, i \ne j\}$ puede utilizarse para el segundo experimento, si denotamos con a_i el i-ésimo estudiante, para cada $1 \le i \le 20$.

Por desgracia, un experimento puede tener más de un espacio muestral. Si tiramos una moneda tres veces y analizamos los resultados, un posible espacio muestral para nuestro experimento es $\{0, 1, 2, 3\}$, donde el número i, para $0 \le i \le 3$, se refiere al número de caras que aparecen en tres tiradas. Los resultados pueden darse también mediante el espacio muestral $\mathscr{S}$ = {cara, cara, cara; cruz, cara, cara; cara, cruz, cara; cara, cara, cruz; cruz, cruz, cara; cruz, cara, cruz; cara, cruz, cruz; y cruz, cruz, cruz}, donde intuimos que cada uno de los ocho posibles resultados tienen la *misma probabilidad* de ocurrir. Esto no sucede en nuestro primer espacio muestral $\{0, 1, 2, 3\}$, donde creemos que hay más oportunidad de obtener una cara en los tres tiros que de no obtenerla.

En este texto usaremos siempre un espacio muestral en el que cada elemento tiene la misma probabilidad de ocurrir. Sobre esta suposición de probabilidad idéntica, usaremos la definición de probabilidad dada por el matemático francés Pierre-Simon de Laplace (1749–1827) en su libro *Théorie analitique des possibilités*.

Siguiendo la hipótesis de igual probabilidad, sea $\mathscr{S}$ un espacio muestral para un experimento $\mathscr{E}$. Cualquier subconjunto A de $\mathscr{S}$ es un *suceso*. Cada elemento de $\mathscr{S}$ es un *suceso elemental*, por lo que si $|\mathscr{S}| = n$ y $a \in \mathscr{S}$, $A \subseteq \mathscr{S}$, entonces

$$Pr(a) = \textit{La probabilidad de que a ocurra} = \frac{1}{n} = \frac{|\{a\}|}{|\mathscr{S}|}, \qquad \text{y}$$

$$Pr(A) = \textit{La probabilidad de que A ocurra} = \frac{|A|}{|\mathscr{S}|} = \frac{|A|}{n} = \frac{1}{n}\left(\sum_{a \in A} |\{a\}|\right),$$

ya que A es la unión disjunta de los subconjuntos de un elemento.

Demostraremos estas ideas en los ejemplos siguientes.

Ejemplo 3.26

En una sola tirada de un dado, ¿cuál es la probabilidad de obtener un 5 o un 6?

Aquí $\mathscr{S} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ y el suceso A que queremos considerar es $\{5,6\}$. De aquí que

$$Pr(A) = \frac{|A|}{|\mathscr{S}|} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}.$$

Ejemplo 3.27

Si tiramos una moneda cuatro veces, ¿cuál es la probabilidad de obtener dos caras y dos cruces?

En este caso, el espacio muestral está formado por todas las sucesiones de la forma x_1, x_2, x_3, x_4, donde cada x_i, $1 \leq i \leq 4$, se reemplaza por una cruz, o una cara, así que $|\mathscr{S}| = 2^4 = 16$. El suceso A que nos interesa contiene todos las disposiciones de los cuatro símbolos cara, cara, cruz, cruz, por lo que $|A| = 4!/(2!\,2!) = 6$. En consecuencia, $Pr(A) = 6/16 = 3/8$.

Para el ejemplo 3.27, cada tirada es *independiente* del resultado de cualquier tirada anterior. Este caso se conoce como *prueba de Bernoulli*. En un primer curso de probabilidad, estas pruebas se analizan junto con la distribución binomial, un ejemplo importante de distribución de probabilidad discreta. Regresaremos a esto en la sección 16.4 del capítulo 16, cuando estudiemos la aplicación de los grupos abelianos en teoría de códigos.

Ejemplo 3.28

El acrónimo WYSIWYG (siglas en inglés de "lo que ves es lo que obtienes") se usa para describir una interfaz con el usuario. Esta interfaz presenta material en una VDT (iniciales en inglés para terminal de pantalla de vídeo) precisamente en el mismo formato en que aparece el material en una copia impresa.

Hay $7!/(2!\ 2!) = 1260$ formas en que pueden ordenarse las letras del acrónimo WYSIWYG. De estas, $120(=5!)$ disposiciones tienen las letras W y las letras Y consecutivas. Así, si ordenamos las letras de este acrónimo de una manera aleatoria, entonces la probabilidad de que la disposición tenga las letras W y Y consecutivas es $120/1260 \doteq 0.0952$.

La probabilidad de que una disposición aleatoria de estas siete letras comience y termine con la letra W es $[(5!/2!)]/[(7!/(2!\ 2!))] = 60/1260 \doteq 0.0476$.

En nuestro ejemplo final usaremos los conceptos de diagramas de Venn y de probabilidad.

Ejemplo 3.29

En una encuesta realizada a 120 pasajeros, una línea aérea descubrió que a 48 les gustaba el vino (V) con sus alimentos, a 78 les gustaban las bebidas preparadas (P) y a 66 el té helado (T). Además, a 36 les gustaba cualquier par de estas bebidas y a 24 pasajeros les gustaba todo. Si se seleccionan dos pasajeros aleatoriamente de la muestra examinada de 120, ¿cuál es la probabilidad de que

a) (suceso A) ambos deseen solamente té helado con sus alimentos?
b) (suceso B) ambos prefieran exactamente dos de las tres bebidas que se ofrecen?

Con esta información, construimos el diagrama de Venn que se muestra en la figura 3.13. El espacio muestral $\mathscr{S}$ está formado por los pares de pasajeros que podemos seleccionar de la muestra de 120, por lo que $|\mathscr{S}| = \binom{120}{2} = 7140$. El diagrama de Venn indica que hay 18 pasajeros que únicamente toman té helado, por lo que $|A| = \binom{18}{2}$ y $Pr(A) = 51/2380$. El lector deberá verificar que $Pr(B) = 3/34$.

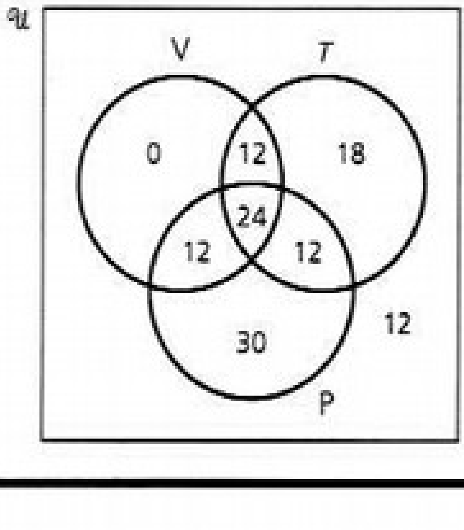


Figura 3.11

EJERCICIOS 3.3 y 3.4

1. ¿Cuántas permutaciones de 26 letras diferentes del alfabeto contienen (a) el patrón "OUT" o el patrón "DIG"; (b) ninguno de los patrones "MAN" o "ANT"?
2. Un nombre de variable de seis caracteres en ANSI FORTRAN empieza con una letra del alfabeto. Cualquiera de los otros cinco caracteres puede ser una letra o un dígito. (Se permiten

repeticiones.) ¿Cuántos nombres de variables de seis caracteres contienen el patrón "FUN" o el patrón "TIP"?

3. ¿Cuántas permutaciones de los dígitos $0, 1, 2, \ldots, 9$ empiezan con un 3 o terminan con un 7, o cumplen ambas condiciones?

4. Un profesor tiene dos docenas de libros de introducción a las ciencias de la computación y está interesado en la forma en que tratan los temas (A) compiladores, (B) estructuras de datos y (C) intérpretes. Los siguientes datos representan la cantidad de libros que contienen material relativo a estos temas:

$\lvert A\rvert = 8$	$\lvert B\rvert = 13$	$\lvert C\rvert = 13$
$\lvert A \cap B\rvert = 5$	$\lvert A \cap C\rvert = 3$	$\lvert B \cap C\rvert = 6$
$\lvert A \cap B \cap C\rvert = 2$		

(a) ¿Cuántos libros incluyen el material de exactamente uno de estos temas? (b)¿Cuántos no tratan ninguno de estos temas? (c)¿Cuántos no tienen material sobre compiladores?

5. Darío tira un dado tres veces. ¿Cuál es la probabilidad de que

a) su segundo y tercer tiros sean ambos mayores que su primer tiro?

b) el resultado de su segundo tiro sea mayor que el de su primer tiro, y el resultado de su tercer tiro sea mayor que el del segundo?

6. Al seleccionar un computador nuevo para su centro de cálculo, el responsable del mismo examina 15 modelos diferentes, considerando: (A) el dispositivo para cinta magnética, (B) la terminal para mostrar gráficas, (C) la memoria semiconductora (además de la memoria principal). El número de computadores con cualquiera o todas estas características es el siguiente: $|A| = |B| = |C| = 6$, $|A \cap B| = |B \cap C| = 1$, $|A \cap C| = 2$, $|A \cap B \cap C| = 0$. (a)¿Cuántos modelos tienen exactamente una de estas características? (b)¿Cuántos no tienen ninguna de estas características? (c) Si se selecciona un modelo al azar, ¿cuál es la probabilidad de que tenga exactamente dos de estas características?

7. En la comunidad femenina Gamma Kappa Phi, las 15 estudiantes de último año se forman de una manera aleatoria para una fotografía de fin de curso. Dos de ellas son Columba y Paty. ¿Cuál es la probabilidad de que en la fotografía

a) Paty quede en la posición central de la fila?

b) Paty y Columba queden juntas?

c) queden cinco estudiantes entre Paty y Columba?

d) Columba quede en algún lugar a la izquierda de Paty?

8. El grupo de primer ingreso en una escuela de ingeniería tiene 300 estudiantes. Se sabe que 180 pueden programar en Pascal, 120 en FORTRAN, 30 en APL, 12 en Pascal y APL, 18 en FORTRAN y APL, 12 en Pascal y FORTRAN y 6 en los tres lenguajes.

a) Se elige un estudiante al azar. ¿Cuál es la probabilidad de que pueda programar en exactamente dos lenguajes?

b) Seleccionamos dos estudiantes en forma aleatoria. ¿Cuál es la probabilidad de que

i) ambos puedan programar en Pascal?

ii) ambos puedan programar sólo en Pascal?

9. En una estantería hay ocho libros diferentes, tres de física y cinco de ingeniería eléctrica, colocados aleatoriamente. Encuentre la probabilidad de que queden juntos los tres libros de física.

10. Un cargamento de 24 autos nuevos contiene 15 en excelentes condiciones, seis con defectos mínimos y tres con defectos mayores. Si se seleccionan dos automóviles del cargamento, ¿cuál es la probabilidad de que (a) ambos se encuentren en excelentes condiciones? (b) ambos tengan defectos menores? (c) a lo más uno tenga un defecto mínimo? (d) al menos uno tenga un defecto mínimo? (e) exactamente uno tenga un defecto mínimo? (f) ninguno tenga un defecto mínimo?

¿Qué relación tienen los resultados de los apartados (b), (e) y (f)?

11. De manera aleatoria se selecciona un entero entre 3 y 7 inclusive. Si A es el suceso de que sea elegido un número divisible entre 3 y B es el suceso de que el número sea mayor que 10, determine $Pr(A)$, $Pr(B)$, $Pr(A \cap B)$ y $Pr(A \cup B)$. ¿Cómo se relaciona $Pr(A \cup B)$ con $Pr(A)$, $Pr(B)$ y $Pr(A \cap B)$?

12. **a)** Si las letras del acrónimo WYSIWYG se ordenan de manera aleatoria, ¿cuál es la probabilidad de que la disposición comience y termine con la misma letra?

b) ¿Cuál es la probabilidad de que una disposición aleatoria de las letras de WYSIWYG no tenga un par de letras idénticas consecutivas?

13. **a)** ¿Cuantas disposiciones de las letras de MISCELLANEOUS no tienen una pareja de letras idénticas consecutivas?

b) Si se genera una disposición de estas letras en forma aleatoria, ¿cuál es la probabilidad de que no haya parejas de letras idénticas consecutivas?

14. ¿Cuántas disposiciones de las letras de CHEMIST tienen la H antes de la E, la E antes de la T, o T antes de la M? (Aquí, "antes" significa cualquier lugar antes, y no inmediatamente antes.)

15. Si las letras de la palabra CORRESPONDENT se arreglan en orden aleatorio, ¿cuál es la probabilidad de que la disposición comience y termine con la misma letra?

3.5 Resumen y repaso histórico

En este capítulo presentamos algunos de los fundamentos de la teoría de conjuntos, además de ciertas relaciones con los problemas de conteo y de probabilidad elemental.

El álgebra de la teoría de conjuntos se desarrolló durante los siglos diecinueve y veinte. En Inglaterra, George Peacock (1791–1858) fue un pionero en reformas matemáticas y uno de los primeros, con su *Treatise on Algebra*, en revolucionar el concepto del álgebra y la aritmética. Sus ideas fueron desarrolladas más tarde por Duncan Gregory (1813–1844), William Rowan Hamilton (1805–1865) y Augustus De Morgan (1806–1871), quien intentó eliminar la ambigüedad del álgebra elemental para ponerla en forma de postulados estrictos. Sin embargo, fue en 1854, año en que Boole publicó su *Investigation of the Laws of Thought*, cuando se logró formalizar el álgebra de conjuntos y la lógica y se extendió el trabajo de Peacock y sus contemporáneos.

Nosotros nos hemos concentrado principalmente en los conjuntos finitos. Sin embargo, el estudio de los conjuntos infinitos y sus cardinales ha ocupado las mentes de muchos matemáticos y filósofos. [Veremos más de esto en el apéndice 3. No obstante, quizá el lector esté interesado en aprender más sobre funciones (tema que aparece en el capítulo 5) antes de ver el material de este apéndice.] El enfoque intuitivo de la teoría de conjuntos se realizó en tiempos del matemático ruso Georg Cantor (1845–1918), quien definió un conjunto, en 1895, en una forma comparable a las "nociones intuitivas" que mencionamos al comienzo de la sección 3.1. Sin embargo, su definición fue uno de los obstáculos que Cantor no fue capaz de eliminar completamente de su teoría de conjuntos.

Georg Cantor (1845–1918)
Reproducción por cortesía de The Granger Collection, Nueva York

En la década de 1870, cuando Cantor estaba estudiando las series trigonométricas y las series de números reales, necesitaba una forma para comparar el tamaño de los conjuntos infinitos de números. Su estudio del infinito como una realidad, que está en el mismo nivel que lo finito, fue realmente revolucionario. Parte de su trabajo fue rechazado ya que resultó ser mucho más abstracto de lo acostumbrado por muchos matemáticos de su tiempo. Sin embargo, su trabajo ganó la suficiente aceptación para que en 1890 la teoría de conjuntos, tanto finita como infinita, fuera considerada una rama de las matemáticas por derecho propio.

Si bien, al terminar el siglo, la teoría era aceptada ampliamente, en 1901 la paradoja ahora conocida como la paradoja de Russell (que fue analizada en el ejercicio 25 de la sección 3.1) mostró que la teoría de conjuntos propuesta originalmente tenía una inconsistencia interna. La dificultad parecía residir en la falta de restricciones al definir los conjuntos; la idea de que un conjunto pudiera ser elemento de sí mismo fue considerada particularmente sospechosa. En su trabajo *Principia Mathematica*, los matemáticos británicos Lord Bertrand Arthur William Russell (1872–1970) y Alfred North Whitehead (1861–1947) desarrollaron una jerarquía en la teoría de conjuntos conocida como la *teoría de tipos*. Esta teoría axiomática de los conjuntos, entre otras formulaciones del siglo veinte, evitaba la paradoja de Russell. Además de su trabajo en matemáticas, Russell escribió libros sobre filosofía, física y sobre sus opiniones políticas. Su gran talento literario fue reconocido en 1950 cuando ganó el premio Nobel de literatura.

El descubrimiento de la paradoja de Russell, aun cuando se pudo remediar, tuvo un profundo impacto en la comunidad matemática, ya que muchos comenzaron a preguntarse si habría otras contradicciones ocultas. En 1931, el matemático (y lógico) austriaco[1] Kurt Gödel (1906-1978) formuló la idea de que "en una condición de consistencia dada, cualquier sistema axiomático formal suficientemente fuerte debe contener una proposición tal que ni ésta ni su negación sea demostrable y tal que cualquier demostración de consistencia del sistema debe usar ideas y métodos que están más allá de los propios del sistema en

† En realidad, Kurt Gödel nació en lo que era Checoslovaquia.

Lord Bertrand Arthur William Russell (1872–1970)

sí". De esto aprendimos, lamentablemente, que no podemos establecer, de forma rigurosa desde el punto de vista matemático, que no existen contradicciones en matemáticas. Pero, a pesar de esta "prueba de Gödel", la investigación matemática continúa; de hecho, la cantidad de investigación realizada de 1931 a la fecha sobrepasa la de cualquier otro periodo en la historia.

El uso del símbolo de pertenencia $\in$ (una forma estilizada de la letra griega épsilon) fue introducido en 1889 por el matemático italiano Giuseppe Peano (1858–1932). El símbolo "$\in$" abrevia la palabra griega "$\varepsilon\sigma\tau\iota$" que significa "está".

Los diagramas de Venn de la sección 3.2 fueron introducidos por el lógico inglés John Venn (1834–1923) en 1881. En su libro *Symbolic Logic*, Venn aclaró ideas desarrolladas anteriormente por su compatriota George Boole (1815–1864). Además, Venn contribuyó al desarrollo de la teoría de la probabilidad, descrita en su ampliamente conocido libro de texto sobre esta materia.

Si quisiéramos resumir la importancia del papel de la teoría de conjuntos en el desarrollo de las matemáticas del siglo veinte, podríamos recurrir a la siguiente cita atribuida al matemático alemán David Hilbert (1862–1943): "Nadie podrá expulsarnos del paraíso que Cantor ha creado para nosotros"

En la sección 3.1 mencionamos la disposición de números conocida como el triángulo de Pascal. Podríamos haberla presentado en el capítulo 1, con el teorema del binomio, pero esperamos hasta contar con algunas identidades combinatorias necesarias para verificar la forma en que se construye el triángulo. La disposición ya aparece en el trabajo del algebrista chino Chu Shi-kie (1303), aunque su primera aparición en Europa fue en el siglo XVI, en la portada del libro de Petrus Apianus (1495–1552). Niccolo Tartaglia (1499–1559) utilizó este triángulo para calcular las potencias de $(x + y)$. Debido a su obra sobre las propiedades y aplicaciones de este triángulo, la disposición recibe el nombre del matemático francés Blaise Pascal (1623–1662).

Por último, aunque la probabilidad surgió con los juegos de azar y los problemas de enumeración, la mencionamos en este punto debido a que la teoría de conjuntos evolucionó como el medio necesario para establecer y resolver problemas de esta importante área contemporánea de las matemáticas aplicadas.

Gran parte de la historia y desarrollo de la teoría de conjuntos aparece en el capítulo 26 de C. Boyer [1]. El desarrollo formal de la teoría de conjuntos, incluyendo los resultados relativos a los conjuntos infinitos, se puede encontrar en H. Enderton [3], P. Halmos [4], J. Henle [5] y P. Suppes [7]. Una interesante historia de los orígenes de las ideas en probabilidad y estadística, hasta la época de Newton, aparece en F. N. David [2]. Los capítulos 1 y 2 de P. Meyer [6] son una fuente excelente para los interesados en aprender más acerca de la probabilidad discreta.

BIBLIOGRAFÍA

1. Boyer, Carl B., *History of Mathematics*, Nueva York, Wiley, 1968.
2. David, Florence Nightingale, *Games, Gods, and Gambling*, Nueva York, Hafner, 1962.
3. Enderton, Herbert B., *Elements of Set Theory*, Nueva York, Academic Press, 1977.
4. Halmos, Paul R., *Naive Set Theory*, Nueva York, Van Nostrand, 1960.
5. Henle, James M., *An Outline of Set Theory*, Nueva York, Springer-Verlag, 1986.
6. Meyer, Paul L., *Introductory Probability and Statistical Applications*, 2ª ed., Reading, Mass., Addison-Wesley, 1970.
7. Suppes, Patrick C., *Axiomatic Set Theory*, Nueva York, Van Nostrand, 1960.

EJERCICIOS COMPLEMENTARIOS

1. Sean $A, B, C \subseteq \mathcal{U}$. Demuestre que $(A - B) \subseteq C$ si y sólo si $(A - C) \subseteq B$.

2. Si $A, B \subseteq \mathcal{U}$, demuestre que $A \subseteq B$ si y sólo si $[\forall C \subseteq \mathcal{U}\ (C \subseteq A) \Rightarrow C \subseteq B)]$.

3. Sean $A, B, C \subseteq \mathcal{U}$. Demuestre la verdad o falsedad (con un contraejemplo) de lo siguiente:

a) $A - C = B - C \Rightarrow A = B$

b) $[(A \cap C = B \cap C) \wedge (A - C = B - C)] \Rightarrow A = B$

c) $[(A \cup C = B \cup C) \wedge (A - C = B - C)] \Rightarrow A = B$

d) $\mathcal{P}(A - B) = \mathcal{P}(A) - \mathcal{P}(B)$

4. a) Para los enteros positivos m, n, r, con $r \le \text{mín}\{m, n\}$, muestre que

$$\binom{m+n}{r} = \binom{m}{0}\binom{n}{r} + \binom{m}{1}\binom{n}{r-1} + \binom{m}{2}\binom{n}{r-2} + \cdots + \binom{m}{r}\binom{n}{0} = \sum_{k=0}^{r}\binom{m}{k}\binom{n}{r-k}.$$

b) Para un entero positivo n, muestre que

$$\binom{2n}{n} = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}^2$$

5. a) ¿De cuántas formas puede un profesor dividir un grupo de siete estudiantes en dos equipos, de modo que cada uno contenga al menos un estudiante? ¿al menos dos estudiantes?

b) Responda la parte (a) reemplazando siete por un entero positivo $n \ge 4$.

6. Determine si cada una de las siguientes proposiciones es verdadera o falsa. Para cada proposición falsa, dé un contraejemplo.

a) Si A y B son conjuntos infinitos, entonces $A \cap B$ es infinito.

b) Si B es infinito y $A \subseteq B$, entonces A es infinito.

c) Si $A \subseteq B$ con B finito, entonces A es finito.

d) Si $A \subseteq B$ con A finito, entonces B es finito.

7. Un conjunto tiene 128 subconjuntos de cardinal par. (a) ¿Cuántos subconjuntos de A tienen cardinal impar? (b) ¿Cuánto vale $|A|$?

8. Sea $A = \{1, 2, 3, \ldots, 15\}$.

a) ¿Cuántos subconjuntos de A contienen todos los enteros impares de A?

b) ¿Cuántos subconjuntos de A contienen exactamente tres enteros impares?

c) ¿Cuántos subconjuntos de A de ocho elementos contienen exactamente tres enteros impares?

d) Escriba un programa (o desarrolle un algoritmo) para generar un subconjunto de ocho elementos de A e imprimir el número de estos elementos que sean impares.

. Sean $A, B, C \subseteq \mathcal{U}$. Demuestre que $(A \cap B) \cup C = A \cap$ $\cup\, C)$ si y sólo si $C \subseteq A$.

. Para cualesquiera $A, B, C \subseteq \mathcal{U}$, demuestre que $(A - B) -$ $= (A - C) - (B - C)$.

. Para cualesquiera $A, B, C \subseteq \mathcal{U}$, demuestre que (a) $A \cup$ $= \mathcal{U}$ si y sólo si $\overline{A} \subseteq B$; (b); $A \cap B = \emptyset$ si y sólo si $\overline{A} \supseteq B$.

. Sea $\mathcal{U}$ un universo dado con $A, B \subseteq \mathcal{U}$, $|A \cap B| = 3$, $\cup\, B| = 8$ y $|\mathcal{U}| = 12$.

a) ¿Cuántos subconjuntos $C \subseteq \mathcal{U}$ satisfacen $A \cap B \subseteq C \subseteq A \cup B$? ¿Cuántos de estos subconjuntos C contienen un número par de elementos?

b) ¿Cuántos subconjuntos $D \subseteq \mathcal{U}$ satisfacen $\overline{A \cup B} \subseteq D \subseteq \overline{A} \cup \overline{B}$? ¿Cuántos de estos subconjuntos D contienen un número par de elementos?

. Sea $\mathcal{U} = \mathbf{R}$ y consideremos el conjunto índice $I = \mathbf{Q}^+$. ra cada $q \in \mathbf{Q}^+$, sean $A_q = [0, 2q]$ y $B_q = (0, 3q]$. Determine siguiente:

a) $A_{7/3}$ b) $B_{3/5}$ c) $A_3 - B_4$ d) $A_3 \triangle B_4$

e) $\bigcup_{q \in I} A_q$ f) $\bigcup_{q \in I} B_q$ g) $\bigcap_{q \in I} A_q$ h) $\bigcap_{q \in I} B_q$

. Para un universo $\mathcal{U}$ y conjuntos $A, B \subseteq \mathcal{U}$, demuestre siguiente:

a) $A \triangle B = B \triangle A$ b) $A \triangle \overline{A} = \mathcal{U}$

c) $A \triangle \mathcal{U} = \overline{A}$

d) $A \triangle \emptyset = A$, por lo que $\emptyset$ es el neutro para $\triangle$, al igual que para $\cup$

. Consideremos la siguiente tabla de pertenencia (Tabla 4). Si tenemos como condición que $A \subseteq B$, entonces sólo bemos tener en cuenta las filas de la tabla para las que to es verdadero (las filas 1, 2 y 4, que se indican mediante a flecha. Para estas filas, las columnas de B y $A \cup B$ son exactamente iguales, por lo que esta tabla de pertenencia muestra que $A \subseteq B \Rightarrow A \cup B = B$.

Tabla 3.4

	A	B	$A \cup B$
→	0	0	0
→	0	1	1
	1	0	1
→	1	1	1

Utilice las tablas de pertenencia para verificar lo siguiente:

a) $A \subseteq B \Rightarrow A \cap B = A$

b) $[(A \cap B = A) \wedge (B \cup C = C)] \Rightarrow A \cup B \cup C = C$

c) $C \subseteq B \subseteq A \Rightarrow (A \cap \overline{B}) \cup (B \cap \overline{C}) = A \cap \overline{C}$

d) $A \triangle B = C \Rightarrow A \triangle C = B$ y $B \triangle C = A$

16. Enuncie el dual de cada teorema del ejercicio 15. (Aquí se usa el resultado del ejemplo 3.17 junto con el teorema 3.5.)

17. a) Determine la cantidad de disposiciones lineales de m unos y r ceros sin que haya unos adyacentes. (Establezca las condiciones necesarias para m, r.)

b) Si $\mathcal{U} = \{1, 2, 3, \ldots, n\}$, ¿Cuántos conjuntos $A \subseteq \mathcal{U}$ son tales que $|A| = k$ y A no contiene enteros consecutivos? (Establezca las condiciones necesarias para n, k.)

18. Sea $A = \{n \mid n \in \mathbf{Z}^+, 1 \leq n \leq 100\}$. Si $B \subseteq A$, y ningún elemento de B es el triple de otro elemento de B, ¿cuál es el máximo valor posible de $|B|$?

19. En una exposición científica de una escuela secundaria, 34 estudiantes recibieron premios por sus proyectos científicos. Se dieron 14 premios por proyectos de biología, 13 de química y 21 de física. Si tres estudiantes recibieron premios en las tres áreas temáticas, ¿cuántos recibieron premios por exactamente (a) un área temática? (b) dos áreas temáticas?

20. Si las letras de la palabra BOOLEAN se ordenan al azar, ¿cuál es la probabilidad de que las dos letras O queden juntas en la disposición?

21. Si se distribuyen 16 galletas con chispas de chocolate entre cuatro niños, ¿cuál es la probabilidad de que cada niño reciba (a) al menos una galleta? (b) al menos dos galletas?

22. Cincuenta estudiantes, cada uno con 75 centavos, visitaron el salón de videojuegos del ejemplo 3.25. De ellos, 17 jugaron los tres videojuegos y 37 jugaron al menos dos de ellos. Ningún estudiante practicó otro del salón, ni tampoco el mismo juego más de una vez. Cada juego cuesta 25 centavos y el total obtenido de la visita de los estudiantes fue de \$24.25. ¿Cuántos estudiantes optaron por ver y no jugar ninguno de los juegos?

23. ¿De cuántas formas puede asignarse trabajo a 15 ayudantes de laboratorio en uno, dos o tres experimentos diferentes, de modo que en cada experimento haya al menos una persona al pendiente de él?

24. La profesora Diana puso un examen con tres preguntas a su grupo de química. Hay 21 estudiantes en su clase y cada uno de ellos contestó al menos una pregunta. Cinco estudiantes no contestaron la primera pregunta, siete fallaron al contestar la segunda, y seis no contestaron la tercera pregunta. Si nueve estudiantes contestaron las tres preguntas, ¿cuántos contestaron exactamente una pregunta?

25. Sea $\mathscr{U}$ un universo dado, con $A, B \subseteq \mathscr{U}$, $A \cap B = \emptyset$, $|A| = 12$ y $|B| = 10$. Si se eligen siete elementos de $A \cup B$, ¿cuál es la probabilidad de que la selección contenga cuatro elementos de A y tres de B?

26. Para un conjunto finito A de enteros, sea $\sigma(A)$ la suma de los elementos de A. Entonces, si $\mathscr{U}$ es un universo finito tomado de $\mathbf{Z}^+$, $\sum_{A \in \mathscr{P}(\mathscr{U})} \sigma(A)$ denota la suma de todos los elementos de todos los subconjuntos de $\mathscr{U}$. Determine $\sum_{A \in \mathscr{P}(\mathscr{U})} \sigma(A)$ para

a) $\mathscr{U} = \{1, 2, 3\}$. **b)** $\mathscr{U} = \{1, 2, 3, 4\}$.
c) $\mathscr{U} = \{1, 2, 3, 4, 5\}$. **d)** $\mathscr{U} = \{1, 2, 3, \ldots, n\}$.
e) $\mathscr{U} = \{a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n\}$, donde $s = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n$.

27. **a)** En ajedrez, el rey se puede mover una casilla en cualquier dirección. Si suponemos que el rey sólo se puede mover hacia adelante (una casilla hacia arriba, hacia la derecha o en forma diagonal hacia el noreste), a lo largo de cuántas trayectorias se puede mover un rey de la casilla de la esquina inferior izquierda hasta la de la esquina superior derecha en el tablero común de 8×8?

b) Para las trayectorias de la parte (a), ¿cuál es la probabilidad de que una de ellas contenga (i) exactamente dos movimientos diagonales? (ii) exactamente dos movimientos diagonales consecutivos? (iii) un número par de movimientos diagonales?