Facultad de Ciencias Exactas, Ingeniería y Agrimensura
Departamento de Matemática - Escuela de Ciencias Exactas y Naturales
ÁLGEBRA y GEOMETRÍA ANALÍTICA I
Licenciatura en Ciencias de la Computación - Año 2012

Autor Dr. Francisco Vittone

Polinomios

1. Polinomios: Definiciones y propiedades básicas.

Comenzamos repasando algunos conceptos básicos de polinomios (que asumiremos dados en el curso introductorio).

Un **polinomio** es una expresión de la forma

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$$

donde $n \in \mathbb{N}_0$, cada $a_k \in \mathbb{C}$, para $i = 0, 1, \cdots, n$ y x toma valores en $\mathbb{C}$.

Cada término de la forma $a_k x^k$ se denomina un **monomio** y k es el **grado** del monomio. Cada a_k es un **coeficiente** de P.

Si $a_k = 0$ para cada $k = 0, \cdots, n$ entonces $P(x) \equiv 0$ se denomina **polinomio nulo**, y se denota $P = 0$.

Si $P \neq 0$, se denomina **grado** del polinomio P al mayor grado de los monomios no nulos que componen el polinomio P. El polinomio nulo no tiene grado.

P se dice un polinomio a **coeficientes complejos** y el conjunto de todos los polinomios a coeficientes complejos se denota $\mathbb{C}[x]$.

P se dice un polinomio a **coeficientes reales** (respectivamente racionales o enteros) si todos sus coeficientes son reales (resp. racionales o enteros).

Denotamos por $\mathbb{R}[x]$, $\mathbb{Q}[x]$ o $\mathbb{Z}[x]$ al conjunto de polinomios a coeficientes reales, racionales o enteros respectivamente.

Decimos que dos polinomios P y Q **son iguales** si tienen igual grado y los coeficientes de los términos de igual grado son iguales. Esto es, si

$$P(x) = a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0,\ a_n \neq 0, \quad Q(x) = b_m x^m + \cdots + b_1 x + b_0,\ b_m \neq 0$$

entonces

$$P = Q \text{ si y sólo si } \begin{cases} n = m \\ a_k = b_k,\ \forall\, k = 0, \cdots, n = m. \end{cases}$$

Suma de polinomios:

Recordemos que para sumar dos polinomios, sumamos los coeficientes de los monomios de igual grado.

Ejemplo 1. *Si $P(x) = 2x^3 + 3x^2 + 1$ y $Q(x) = x^4 + x^2 + x$, entonces:*

$$\begin{array}{rccccc} P(x): & & 2x^3 & +3x^2 & & +1 \\ +Q(x): & x^4 & & +x^2 & +x & \\ \hline (P+Q)(x) = & x^4 & +2x^3 & +4x^2 & +x & +1 \end{array}$$

De manera formal, definimos la suma como sigue:

Definición 2. *Dados los polinomios $P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots a_1 x + a_0$ y $Q(x) = b - mx^m + \cdots b_1 x + b_0$, se define el polinomio $P + Q$ como:*

- *Si $n = m$, $(P+Q)(x) = \sum_{k=1}^{n} (a_k + b_k)x^k$.*
- *Si $n > m$ $P + Q = P + Q^*$, donde $Q^* = 0x^n + 0x^{n-1} + \cdots + b_m x^m + \cdots b_0$.*
- *Si $m > n$, $P + Q = P^* + Q$, donde P^* se define de manera análoga a Q^*.*

Teorema 3. *La suma de polinomios es una operación cerrada en $\mathbb{C}[x]$, asociativa, conmutativa, con elemento neutro (el polinomio nulo) y tal que cada $P \in \mathbb{C}[x]$ admite un elemento opuesto, que denotamos $-P$.*

Además, si $P, Q \in \mathbb{C}[x]$ se verifica

$$gr(P+Q) \leq \text{máx}\{gr(P),\ gr(Q)\}.$$

Demostración. Ejercicio □

Observación 4. *De hecho si $P(x) = a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0 \in \mathbb{C}[x]$, entonces $(-P)(x) = (-a_n)x^n + \cdots + (-a_1)x + (-a_0)$.*

Definición 5. *Dados dos polinomios P y Q, se define la diferencia entre P y Q por $P - Q = P + (-Q)$, donde $-Q$ es el opuesto de Q.*

Ejemplo 6. *Si $P(x) = 2x^3 + 3x^2 + 1$ y $Q(x) = x^4 + x^2 + x$ son como en el ejemplo 1 entonces:*

$$\begin{array}{rccccc}
P(x): & & 2x^3 & +3x^2 & & +1 \\
(-Q)(x): & -x^4 & & -x^2 & -x & \\
\hline
(P-Q)(x) = & -x^4 & +2x^3 & +2x^2 & -x & +1
\end{array}$$

<u>Producto de polinomios:</u>

Recordemos que para multiplicar dos polinomios, esencialmente aplicamos la propiedad distributiva y las propiedades de la potencia de números complejos.

Ejemplo 7. *$P(x) = x^5 - ix^2 + 2x$ y $Q(x) = x^2 + 3$, entonces*

$$\begin{aligned}
P(x) \cdot Q(x) &= (x^5 - ix^2 + 2x) \cdot (x^2 + 3) = (x^5 - ix^2 + 2x) \cdot x^2 + (x^5 - ix^2 + 2x) \cdot 3 \\
&= (x^7 - ix^4 + 2x^3) + (3x^5 - 3ix^2 + 6x) \\
&= x^7 + 3x^5 - ix^4 + 2x^3 - 3ix^2 + 6x
\end{aligned}$$

Otra forma de esquematizar el producto es la siguiente, que recuerda el algoritmo para multiplicar números enteros:

$$\begin{array}{rcccccc}
P(x): & & & & x^5 & -ix^2 & +2x \\
Q(x): & & & & & x^2 & +3 \\
\hline
\textit{multiplicamos } P(x) \textit{ por } x^2: & x^7 & & -ix^4 & +2x^3 & & \\
\textit{multiplicamos } P(x) \textit{ por } 3: & & 3x^5 & & & -3ix^2 & +6x \\
\hline
P(x) \cdot Q(x) = & x^7 & +3x^5 & -ix^4 & +2x^3 & -3ix^2 & +6x
\end{array}$$

Definición 8. *Dados los polinomios $P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots a_1 x + a_0$ y $Q(x) = b - mx^m + \cdots b_1 x + b_0$, se define el polinomio $P \cdot Q$ como:*

$$(P \cdot Q)(x) = (a_n \cdot b_m)x^{n+m} + (a_n b_{m-1} + a_{n-1} b_m)x^{n+m-1} + \cdots + (a_1 b_0 + a_0 b_1)x + a_0 b_0$$

Teorema 9. *El producto de polinomios es una operación cerrada en $\mathbb{C}[x]$, asociativa, conmutativa y con elemento neutro (el polinomio constante igual a 1).*

Además, si $P, Q \in \mathbb{C}[x]$ son no nulos, se verifica

$$gr(P \cdot Q) = gr(P) + gr(Q)$$

Demostración. Ejercicio □

2. Divisibilidad

A diferencia de la suma, para el producto no existe, en general, un elemento simétrico. Es decir, dado un polinomio $P \in \mathbb{C}[x]$, no existe, en general, un polinomio $P^* \in \mathbb{C}[x]$ tal que $P \cdot P^* = 1$. De hecho esto es posible si y sólo si $gr(P) = 0$, esto es, si P es un polinomio constante no nulo (intentar una prueba). En consecuencia, no es posible definir el cociente de polinomios como una operación cerrada en $\mathbb{C}[x]$.

Los polinomios se comportan en este sentido como los números enteros. Dados dos número enteros p y q, con $q > 0$, el cociente p/q no es, en general, un número entero. Pero existen enteros c y r, con $r < q$, denominados cociente y resto, tales que $p = c \cdot q + r$. Así por ejemplo, tenemos que el cociente de dividir 25 por 6 es 4, y el resto es 1, esto es $25 = 6 \cdot 4 + 1$, o $137 = 7 \cdot 19 + 4$, o sea que el cociente de dividir 137 por 7 es 19, y el resto es 4.

Existe un algoritmo similar para dividir polinomios:

Teorema 10. ***Algoritmo de la división***

Dados dos polinomios P, $Q \in \mathbb{C}[x]$ con $Q \neq 0$, existen únicos polinomios C y R en $\mathbb{C}[x]$ tales que $R = 0$ o $gr(R) < gr(Q)$ y $P = C \cdot Q + R$.

El polinomio C se denomina **cociente** y el polinomio R se denomina **resto**.

Observación 11. *Si $gr(P) < gr(Q)$, tomamos $C = 0$ y $R = P$.*

Antes de ver la demostración del teorema, recordemos cómo hallar en forma práctica los polinomios C y R.

Ejemplo 12. *Supongamos que queremos dividir el polinomio $P(x) = 4x^4 - 2x^3 + 2x$ por el polinomio $Q(x) = x^2 - x - 1$. Entonces procedemos de la siguiente manera:*

En primera instancia completamos el polinomio P, es decir, multiplicamos por 0 los monomios de grados que no aparezcan en P, menores al grado de P. Luego disponemos P y Q como en el siguiente diagrama:

$$\begin{array}{rrrrr|l} 4x^4 & -2x^3 & +0x^2 & +2x & +0 & \; x^2 - x - 1 \\ \cline{6-6} \end{array}$$

Dividimos el monomio de mayor grado de P por el monomio de mayor grado de Q, en este caso $\dfrac{4x^4}{x^2} = 4x^2$. Multiplicamos el resultado por Q, escribimos su opuesto debajo de P, y realizamos la operación $P(x) - 4x^2Q(x)$:

$$\begin{array}{rrrrr|l} 4x^4 & -2x^3 & +0x^2 & +2x & +0 & \; x^2 - x - 1 \\ \cline{6-6} -4x^4 & +4x^3 & +4x^2 & & & \; 4x^2 \\ \cline{1-3} & 2x^3 & +4x^2 & +2x & +0 & \end{array}$$

Repetimos este proceso, hasta llegar a un polinomio (resto) de grado menor que el de Q.

$$\begin{array}{rrrrr|ll} 4x^4 & -2x^3 & +0x^2 & +2x & +0 & \; x^2 - x - 1 & \\ \cline{6-6} -4x^4 & +4x^3 & +4x^2 & & & \; 4x^2 + 2x + 6 & \leftarrow \textit{Cociente} \\ \cline{1-3} & 2x^3 & +4x^2 & +2x & +0 & & \\ & -2x^3 & +2x^2 & +2x & & & \\ \cline{2-4} & & 6x^2 & +4x & +0 & & \\ & & -6x^2 & +6x & +6 & & \\ \cline{3-5} & & & 10x & +6 & \quad \leftarrow \textit{Resto} & \end{array}$$

En este caso, el cociente es $C(x) = 4x^2 + 2x + 6$ y el resto es $R(x) = 10x + 6$, y es fácil verificar que $P = C \cdot Q + R$.

Haremos ahora la demostración del Teorema 10:

Demostración. Consideremos el conjunto

$$A = \{P - H \cdot Q : H \in \mathbb{C}[x]\}$$

Existen dos opciones: que el polinomio nulo esté en A o que no esté en A.

Si el polinomio nulo está en A, entonces existe $\widetilde{H} \in \mathbb{C}[x]$ tal que $P - \widetilde{H} \cdot Q = 0$. Luego tomando $C = \widetilde{H}$ se verifica $P = C \cdot Q$, y vale el teorema con $R = 0$.

Si el polinomio nulo no está en A, entonces para todo $H \in \mathbb{C}[x]$ debe ser $P - H \cdot Q \neq 0$.

Sea n_0 el mínimo de los grados de los polinomios que están en A. Luego existe $H_0 \in \mathbb{C}[x]$ tal que $gr(P - H_0 \cdot Q) = n_0$. Sea $R_0 = P - H_0 \cdot Q$. O sea que $R_0 \in A$ y $gr(R_0) = n_0$ es el menor grado entre todos los polinomios de A.

Veamos que $gr(R_0) < gr(Q)$.

Supongamos que $R_0 = \sum_{i=1}^{n_0} r_i x^i$ y que $Q = \sum_{i=0}^{m} q_i x^i$ con $gr(Q) = m$, o sea $q_m \neq 0$. Supongamos que $n_0 \geq m$. Construyamos el polinomio

$$\widetilde{R} = R_0 - \frac{r_{n_0}}{q_m} x^{n_0-m} \cdot Q = P - H_0 \cdot Q - \frac{r_{n_0}}{q_m} x^{n_0-m} \cdot Q = P - \left(H_0 + \frac{r_{n_0}}{q_m} x^{n_0-m} \right) \cdot Q.$$

Observemos que $\widetilde{R} \in A$ pues $(H_0 + \frac{r_{n_0}}{q_m} x^{n_0-m}) \in \mathbb{C}[x]$.

Como $gr(R_0) = n_0$ y $gr(\frac{r_{n_0}}{q_m} x^{n_0-m} \cdot Q) = gr(\frac{r_{n_0}}{q_m} x^{n_0-m}) + gr(Q) = n_0 - m + m = n_0$, resulta $gr(\widetilde{R}) \leq n_0$.

Pero el término de grado n_0 de $\widetilde{R}$ debería ser $r_{n_0} x^{n_0} - \frac{r_{n_0}}{q_m} x^{n_0-m} q_m x^m = 0$. Luego $gr(\widetilde{R}) < n_0$, lo cual es absurdo pues $\widetilde{R} \in A$ y el menor grado de los polinomios de A es n_0. El absurdo proviene de suponer que $n_0 \geq m$. Por lo tanto $n_0 < m$ y tomando $C = H_0$, $R = R_0$ se tiene $P = C \cdot Q + R$, con $gr(R) < gr(Q)$.

Probemos finalmente la unicidad de C y R.

Supongamos que existen C' y R' en $\mathbb{C}[x]$ tales que $P = C' \cdot Q + R'$, con $gr(R') < gr(Q)$. Tenemos entonces

$$P = C \cdot Q + R = C' \cdot Q + R' \Rightarrow (C - C') \cdot Q = R' - R$$

Observemos que si fuese $C - C' \neq 0$, se tendría $gr((C - C') \cdot Q) = gr(C - C') + gr(Q) \geq gr(Q)$, pero por otra parte $gr(R' - R) \leq \text{máx}(gr(R'), gr(R)) < gr(Q)$, de donde resulta $gr((C - C') \cdot Q) > gr(R' - R)$ lo cual no puede ocurrir.

Luego $C - C' = 0$ y $R' - R = 0$, con lo cual $C = C'$ y $R = R'$. $\square$

Corolario 13. *Sean P, $Q \in \mathbb{C}[x]$ con $Q \neq 0$, $gr(P) \geq gr(Q)$ y tal que $P = C \cdot Q + R$. Entonces $gr(C) = gr(P) - gr(Q)$*

Cuando dividimos por un polinomio de la forma $Q(x) = x - \alpha$, existe un algoritmo sencillo para realizar la división denominado **regla de Ruffini**.

Veamos primero cómo se efectúa este algoritmo. Supongamos que queremos dividir $P(x) = 5x^4 - 3x^3 + 2x^2 + 3$ por $Q(x) = x - 2$. Comencemos observando que como Q es un polinomio de grado 1, el cociente de dividir P por Q será un polinomio de grado 3 y el resto será el polinomio nulo o un polinomio de grado 0, es decir, un polinomio constante.

Para aplicar la regla de Ruffini, armamos una tabla como la siguiente, donde escribimos los coeficientes de P en orden decreciente de sus grados y separando el término independiente. En la primer columna del segundo renglón, colocamos el opuesto del término independiente de Q.

$$\begin{array}{c|cccc|c} & 5 & -3 & 2 & 0 & 3 \\ 2 & & & & & \\ \hline & & & & & \end{array}$$

Como segundo paso, colocamos en la tercer fila el coeficiente principal de P:

$$\begin{array}{c|cccc|c} & 5 & -3 & 2 & 0 & 3 \\ 2 & \downarrow & & & & \\ \hline & 5 & & & & \end{array}$$

Realizamos un proceso repetitivo, de izquierda a derecha, que consiste en sumar cada columna, anotar el resultado debajo de la línea y multiplicar por el número de la izquierda (en nuestro caso 2) y poner el resultado encima de la línea, pero en la columna siguiente:

$$\begin{array}{c|cccc|c} & 5 & -3 & 2 & 0 & 3 \\ 2 & \downarrow & 10 & 14 & 32 & 64 \\ \hline & 5 & 7 & 16 & 32 & 67 \end{array}$$

El último número obtenido es el resto de la división. Los anteriores representan los coeficientes del cociente, en orden decreciente de los grados, que tiene un grado menos que P. Esto es

$$C(x) = 5x^3 + 7x^2 + 16x + 32, \quad R(x) = 67.$$

Formalizaremos este método en el siguiente teorema:

Teorema 14. ***Regla de Ruffini***

Sea $P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots a_1 x + a_0$ y $Q(x) = x - \alpha$, $\alpha \in \mathbb{C}$. Entonces $P(x) = C(x)(x - \alpha) + r$, con $C(x) = b_{n-1} x^{n-1} + \cdots b_1 x + b_0$ y $r = a_0 + \alpha b_0$, donde los coeficientes b_i se definen recursivamente por:

$$\begin{cases} b_{n-1} = a_n \\ b_i = a_{i+1} + \alpha b_{i+1}, \quad i = n-2, \cdots, 0 \end{cases}$$

Demostración. Por el algoritmo de la división, sabemos que existe $C \in \mathbb{C}[x]$ y $r \in \mathbb{C}$ (un polinomio nulo o de grado cero) tal que $P = C \cdot Q + r$.

Si $C(x) = b_{n-1}x^{n-1} + \cdots b_1 x + b_0$, entonce $(C \cdot Q)(x) + r = b_{n-1}x^n + (b_{n-2} - \alpha b_{n-1})x^{n-2} + \cdots (b_0 + \alpha b_1)x - b_0 + r\alpha$. El teorema sigue de igualar con P □

Como corolario obtenemos el siguiente resultado:

Teorema 15. ***Teorema del Resto*** *Sea $P \in \mathbb{C}[x]$ con $gr(P) \geq 1$ y $z \in \mathbb{C}$. Entonces $P(z)$ es el resto de dividir P por $Q(x) = x - z$.*

Demostración. Sea $C(x)$ el cociente de dividir P por Q y r el resto. Entonces $P(x) = C(x)Q(x) + r$. Como $Q(z) = 0$, evaluando en z tenemos $P(z) = C(z)Q(z) + r = r$. □

Definición 16. *Decimos que un polinomio P es divisible por un polinomio Q si el resto de dividir P por Q es 0.*

Observación 17. *En virtud del algoritmo de la división, si P es divisible por Q, entonces P se factoriza como el producto $P = C \cdot Q$, donde C es el cociente de la división de P por Q.*

3. Factorización de polinomios

Cuando trabajamos con números enteros, sabemos que existe una única manera de factorizarlos como producto de factores primos. Así $8 = 2^3$, $14 = 2 \times 7$, $220 = 2^2 \cdot 5 \cdot 11$, etc. Esta descomposición resulta extremadamente útil para resolver muchos problemas que involucran números enteros. En particular, permiten reducir una fracción a su forma más sencilla.

Nuestro objetivos es obtener un resultado similar para polinomios: probaremos que todo polinomio a coeficientes complejos admite una única descomposición en factores lineales, y cualquier polinomio a coeficientes reales admite una única factorización en factores lineales y cuadráticos.

Definición 18. *Sea $P \in \mathbb{C}[x]$. Decimos que un número complejo α es una* ***raíz*** *de P si $P(\alpha) = 0$.*

En función del teorema del resto tenemos

Lema 19. *Sea $P \in \mathbb{C}[x]$. Entonces α es una raíz de P si y sólo si P es divisible por $Q(x) = (x - \alpha)$.*

Demostración. Ejercicio. □

Definición 20. *Sea $P \in \mathbb{C}[x]$ y $h \in \mathbb{N}$. Decimos que α es una raíz de multiplicidad h de P si P es divisible por $(x - \alpha)^h$ pero no es divisible por $(x - \alpha)^{h+1}$.*

Esto es, α es una raíz de multiplicidad h de P si y sólo si

$$P(x) = (x - \alpha)^h C(x), \quad \text{con } C(\alpha) \neq 0.$$

Observemos que si α es una raíz de P, entonces $P(x) = (x - \alpha)C(x)$. Como además las raíces de C son también raíces de P, para completar su factorización de P necesitamos encontrar las raíces de C que es de un grado menos que P. Por lo tanto, es importante garantizar la existencia de (y encontrar!) al menos una raíz de P.

Este hecho es garantizado por el Teorema Fundamental del Álgebra. Su demostración requiere de conocimientos que escapan a los objetivos de este curso, y por lo tanto la omitimos.

Teorema 21. ***Teorema Fundamental del Álgebra*** *Todo polinomio $P \in \mathbb{C}[x]$ de grado mayor o igual a 1 admite al menos una raíz compleja.*

Corolario 22. *Todo polinomio $P \in \mathbb{C}[x]$ de grado $n \geq 1$ admite exactamente n raíces complejas, contadas con su multiplicidad.*

Demostración. Sea $P \in \mathbb{C}[x]$. Por el teorema fundamental del álgebra, existe una raíz compleja α_1 de P. Luego, existe un polinomio $C_1 \in \mathbb{C}[x]$ tal que $P(x) = (x - \alpha_1)C_1(x)$, y $gr(C_1) = n - 1$. Aplicando el teorema fundamental del álgebra a C_1, existen una raíz compleja α_2 de C_2 y un polinomio $C_2 \in \mathbb{C}[x]$ con $gr(C_2) = n - 2$ tal que $C_1 = (x - \alpha_2)C_2(x)$, o sea,

$$P(x) = (x - \alpha_1)(x - \alpha_2)C_2(x).$$

Podemos aplicar el mismo procedimiento a C_2. Así siguiendo, en n pasos encontramos las n raíces $\alpha_1, \cdots, \alpha_n$ de P (que podrían llegar a coincidir). □

Corolario 23. ***Teorema de descomposición factorial***

Sea $P = a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0 \in \mathbb{C}[x]$ y sean $\alpha_1, \cdots, \alpha_s$ las s raíces distintas de P, de multiplicidades $h_1, \cdots, h_s$ respectivamente, tales que
$h_1 + \cdots + h_s = n$. Entonces

$$P(x) = a_n (x - \alpha_1)^{h_1} \cdots (x - \alpha_s)^{h_s}$$

Demostración. Si seguimos los pasos de la demostración del Corolario 22, obtenemos que tras $n-1$ pasos encontramos $n-1$ raíces de P, $\alpha_1, \cdots, \alpha_{n-1}$, que pueden llegar a repetirse. Además P queda factorizado como

(1) $$P(x) = (x - \alpha_1)(a - \alpha_2) \cdots (x - \alpha_{n-1})C_{n-1}(x)$$

donde $C_{n-1}(x)$ es un polinomio de grado 1, o sea $C_{n-1}(x) = ax + b$, con $a, b \in \mathbb{C}$, $a \neq 0$. Para completar la factorización, observamos que $C_{n-1}(x) = a(x + \frac{b}{a})$, o sea, $\alpha_n = -\frac{b}{a}$ y reemplazando en (1) obtenemos

(2) $$P(x) = a(x - \alpha_1)(a - \alpha_2) \cdots (x - \alpha_{n-1})(x - \alpha_n)$$

Si desarrollamos el lado derecho de la igualdad (2), obtenemos que el coeficiente del término de grado n es a, luego debe ser $a = a_n$, y contando las multiplicidades de cada raíz, obtenemos la descomposición dada por el teorema. □

Para factorizar un polinomio P en factores lineales, procedemos como en la demostración del Corolario 22 o aplicamos el Corolario 23.

Observemos que encontrar una raíz de P equivale a encontrar una solución de la ecuación $P(x) = 0$.

Ejemplo 24. *Supongamos que queremos factorizar el polinomio $P(x) = 2x^3 - 8x^2 + 10x - 4$. Observemos primero que $P(1) = 0$. Luego 1 es raíz de P, y P es divisible por $Q(x) = x - 1$. Dividimos P por Q aplicando la regla de Ruffini y encontramos el cociente C tal que $P(x) = (x-1)C(x)$:*

$$\begin{array}{c|ccc|c} & 2 & -8 & 10 & -4 \\ 1 & \downarrow & 2 & -6 & 4 \\ \hline & 2 & -6 & 4 & 0 \end{array}$$

Luego $C(x) = 2x^2 - 6x + 4$ y las dos raíces restantes de P son las raíces de C que podemos calcular aplicando la resolvente:

$$x_{1,2} = \frac{6 \pm \sqrt{(-6)^2 - 32}}{4} \Rightarrow \; x_1 = 1, \; x_2 = 2$$

Por lo tanto $C_2(x) = 2(x-1)(x-2)$ y entonces

$$P(x) = 2(x-1)^2(x-2).$$

O sea que las raíces de P son $\alpha_1 = 1$, de multiplicidad 2 y $\alpha_2 = 2$ de multiplicidad 1.

Ejemplo 25. *Cuando P no tiene término independiente, $\alpha = 0$ es siempre una raíz de P cuya multiplicidad es el menor grado de los monomios que componen el polinomio. Tomemos $P(x) = x^7 + x^5$. Entonces $\alpha = 0$ es una raíz de multiplicidad 5 de P, pues P es divisible por $Q(x) = x^5$ pero no lo es por $Q'(x) = x^6$. En este caso tenemos*

$$P(x) = x^5(x^2 + 1).$$

Este procedimiento se conoce en general como "sacar factor común", pues x^5 es un factor común de todos los términos que componen P: $P(x) = x^7 + x^5 = x^5 \cdot x^2 + x^5 \cdot 1 = x^5(x^2 + 1)$. Observemos que no hemos hecho más que aplicar la propiedad distributiva del producto de números complejos respecto de la suma.

Para terminar de factorizar P, debemos factorizar $C(x) = x^2 + 1$, o sea, necesitamos resolver la ecuación $x^2 + 1 = 0$, que tiene como soluciones $x_1 = i$ y $x_2 = -i$. Luego $C(x) = (x + i)(x - i)$ y entonces

$$P(x) = x^5(x + i)(x - i)$$

*o sea que $\alpha_1 = 0$ es una raíz de multiplicidad 5 de P y $\alpha_2 = i$ y $\alpha_3 = -i$ son raíces de multiplicidad 1 (o raíces **simples**). Contadas con su multiplicidad, tenemos las siete raíces de P.*

Ejemplo 26. *Factoricemos $P(x) = x^8 - x^4$. Sacando factor común x^4 obtenemos que $P(x) = x^4(x^4 - 1)$. Para completar la factorización de P debemos resolver la ecuación $x^4 - 1 = 0$, o bien $x^4 = 1$. Es decir que las restantes cuatro raíces de P son las cuatro raíces cuartas complejas de 1. Como 1 en forma polar es 1_0, aplicando la fórmula de De Moivre, obtenemos que las cuatro raíces cuartas de 1 son*

$$x_1 = 1_0 = 1,\ x_2 = 1_{\frac{\pi}{2}} = i,\ x_3 = 1_\pi = -1,\ x_4 = 1_{\frac{3}{2}\pi} = -i.$$

Luego $P(x) = x^4(x - 1)(x + 1)(x - i)(x + i)$, y las ocho raíces de P son $\alpha_1 = 0$ de multiplicidad 4 y $\alpha_2 = 1$, $\alpha_3 = -1$, $\alpha_4 = i$ y $\alpha_5 = -i$ de multiplicidad 1.

Para factorizar polinomios más complicados necesitaremos de otros resultados. Comencemos observando que en los ejemplos que hemos analizado, las raíces complejas de los polinomios a coeficientes reales vienen de a pares: cada vez que un complejo α es raíz de un polinomio a coeficientes reales, su conjugado $\overline{\alpha}$ también lo es.

Teorema 27. *Sea $P \in \mathbb{R}[x]$ un polinomio a coeficientes reales. Si $\alpha \in \mathbb{C}$ es una raíz de P, entonces $\overline{\alpha}$ también es raíz de P.*

Demostración. Supongamos que $P(x) = a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0$ con $a_i \in \mathbb{R}$ y $\alpha \in \mathbb{C}$ es una raíz de P. Entonces $P(\alpha) = a_n\alpha^n + \cdots + a_1\alpha + a_0 = 0$. Aplicando las propiedades del conjugado de un número complejo y del hecho que $\overline{a_i} = a_i$ pues cada a_i es un número real, tenemos:

$$P(\overline{\alpha}) = a_n\overline{\alpha}^n + \cdots + a_1\overline{\alpha} + a_0 = \overline{a_n\alpha^n + \cdots + a_1\alpha + a_0} = \overline{0} = 0.$$

□

Ejemplo 28. *Sea $P(x) = x^3 + x^2 + x + 1$. Si recordamos que cuatro potencias consecutivas de i suman 0, pues toman los valores 1, -1, i y $-i$, observamos que $P(i)$ debe ser 0. En efecto $P(i) = i^3 + i^2 + i + 1 = -i - 1 + i + 1 = 0$. Como P es a coeficientes reales, $-i$ también debe ser raíz de P. Aplicando dos veces la regla de Ruffini tenemos:*

$$\begin{array}{c|ccc|c} & 1 & 1 & 1 & 1 \\ i & \downarrow & i & -1+i & -1 \\ \hline & 1 & 1+i & i & 0 \end{array} \qquad \begin{array}{c|cc|c} & 1 & 1+i & i \\ -i & \downarrow & -i & -i \\ \hline & 1 & 1 & 0 \end{array}$$

con lo cual

$$P(x) = (x - i)(x + i)(x + 1)$$

Observación 29.

- *En función del teorema 27 todo polinomio a coeficientes reales tiene una cantidad par de raíces complejas.*
- *Todo polinomio a coeficientes reales puede factorizarse siempre como producto de polinomios lineales o cuadráticos a coeficientes reales. En efecto, si $\alpha = a + ib$ es una raíz compleja de P de multiplicidad h, $\overline{\alpha} = a - ib$ también es una raíz compleja de multiplicidad h y los factores $(x - \alpha)^h(x - \overline{\alpha})^h$ pueden escribirse como*

  $$(x - \alpha)^h(x - \overline{\alpha})^h = \left[x^2 - (\alpha + \overline{\alpha})x + \alpha\overline{\alpha}\right]^h$$

  Observando que $\alpha + \overline{\alpha} = 2a \in \mathbb{R}$ y $\alpha\overline{\alpha} = a^2 + b^2 \in \mathbb{R}$, resulta $x^2 - (\alpha + \overline{\alpha})x + \alpha\overline{\alpha}$ un polinomio cuadrático a coeficientes reales.

Para finalizar, mostraremos un método para encontrar las raíces racionales de un polinomio a coeficientes enteros

Teorema 30. ***Teorema de Gauss***

Sea $P(x) = a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0 \in \mathbb{Z}[x]$ un polinomio a coeficientes enteros, con $a_0 \neq 0$. Si $\alpha = \dfrac{r}{s}$ es una raíz racional de P, con r y s primos relativos, entonces r divide a a_0 y s divide a a_n.

Observación 31. *Si $a_0 = 0$, basta sacar factor común x^m, para m el menor grado de los términos de P, y obtenemos $P(x) = x^m C(x)$, con C un polinomio a coeficientes enteros con término independiente no nulo.*

Demostración. Como $\alpha = \dfrac{r}{s}$ es una raíz de P, debe ser $P(\alpha) = 0$. Luego

$$a_n \frac{r^n}{s^n} + \cdots a_1 \frac{r}{s} + a_0 = 0$$

Multiplicando ambos miembros por s^n, obtenemos

$$a_n r^n + a_{n-1} s r^n - 1 + \cdots a_1 s^{n-1} r + a_0 s^n = 0 \tag{3}$$

O sea, que

$$r(a_n r^{n-1} + \cdots a_1 s^{n-1}) = -a_0 s^n. \tag{4}$$

Como $a_0 \neq 0$, $r \neq 0$ pues 0 no es raíz de P. Luego, como $a_n r^{n-1} + \cdots a_1 s^{n-1} \in \mathbb{Z}$, resulta $\dfrac{-a_0 s^n}{r} \in \mathbb{Z}$, con lo cual r divide a a_0 o r divide a s^n. Pero r no puede dividir a s^n pues r y s son primos relativos (no tienen factores primos comunes). Luego r divide a a_0.

Ahora podemos sacar factor común s en 3 y obtenemos

$$s(a_0 s^{n-1} + \cdots + a_{n-1} r^{n-1}) = -a_n r^n$$

Con el mismo razonamiento que antes, concluimos que s divide a a_n. □

Ejemplo 32. *Supongamos que queremos factorizar el polinomio $P(x) = 2x^6 + x^5 - 6x^4 + x^3 + 2x^2$. Comenzamos sacando factor común x^2 y tenemos $P(x) = x^2(2x^4 + x^3 - 6x^2 + x + 2)$. Nos queda factorizar el polinomio $C(x) = 2x^4 + x^3 - 6x^2 + x + 2$.*

Como es un polinomio a coeficientes enteros, podemos aplicar el Teorema de Gauss a $C(x)$. Las posibles raíces racionales son de la forma r/s con r un divisor de $a_0 = 2$ y s un divisor de $a_n = a_4 = 2$. Los posibles valores para r son ± 1 y ± 2, y lo mismo ocurre con s. Luego las posibles raíces racionales de C son ± 1, ± 2 y $\pm 1/2$.

Evaluando P en cada uno de los valores obtenidos, concluimos que 1, -2 y $-1/2$ son raíces de P. Podemos aplicar tres veces seguidas la regla de Ruffini y obtenemos:

$$\begin{array}{c|cccc|c} & 2 & 1 & -6 & 1 & 2 \\ 1 & \downarrow & 2 & 3 & -3 & -2 \\ \hline & 2 & 3 & -3 & -2 & 0 \end{array} \qquad \begin{array}{c|ccc|c} & 2 & 3 & -3 & -2 \\ -2 & \downarrow & -4 & 2 & 2 \\ \hline & 2 & -1 & -1 & 0 \end{array} \qquad \begin{array}{c|cc|c} & 2 & -1 & -1 \\ -\frac{1}{2} & \downarrow & -1 & 1 \\ \hline & 2 & -2 & 0 \end{array}$$

Luego $P(x) = x^2(x-1)(x+2)(x+\frac{1}{2})(2x-2) = 2x^2(x-1)^2(x+2)(x+\frac{1}{2})$.

Ejemplo 33. *El teorema de Gauss nos sirve también para factorizar polinomios a coeficientes racionales. Supongamos que queremos factorizar el polinomio $P(x) = \frac{1}{2}x^3 - \frac{7}{12}x^2 + \frac{1}{12} \in \mathbb{Q}[x]$. El mecanismo general es multiplicar y dividir P por el denominador común de todos sus coeficientes para obtener coeficientes enteros. En este caso, multiplicando por 12 tenemos que $P(x) = \frac{12}{12}(\frac{1}{2}x^3 - \frac{7}{12}x^2 + \frac{1}{12}) = \frac{1}{12}(6x^3 - 7x^2 + 1)$. Aplicando el teorema de Gauss a $C(x) = 6x^3 - 7x^2 + 1$, obtenemos que las posibles raíces racionales de C son ± 1, $\pm\frac{1}{2}$, $\pm\frac{1}{3}$ y $\pm\frac{1}{6}$. Evaluando P en cada una de las opciones, vemos que 1, $\frac{1}{2}$ y $-\frac{1}{3}$ son raíces de C. Luego $C(x) = 6(x-1)(x-\frac{1}{2})(x+\frac{1}{3})$ y por lo tanto $P(x) = \frac{1}{2}(x-1)(x-\frac{1}{2})(x+\frac{1}{3})$.*

TRABAJO PRÁCTICO Nº 5: Polinomios

1. Sean $P(x) = x^5 + 4x^2 - 2i$, $Q(x) = x^2 + (2 - i)$, $R(x) = x^7 + 5x^3 - ix^2 + 2x + 1 - i$. Hallar los polinomios indicados en cada caso:

   a) $P + Q$ *b*) $P + Q - R$; *c*) $P \cdot Q$ *d*) $Q \cdot (P + 2R)$; *e*) $-2P \cdot (R - Q)$

2. En cada uno de los siguientes casos hallar el cociente y el resto de dividir el polinomio P por el polinomio Q dados. En los casos que sea posible aplicar la regla de Ruffini.
   a) $P(x) = 4x^3 + x^2$, $Q(x) = x^2 + 1 + i$.
   b) $P(x) = 4x^3 + x^2$, $Q(x) = x + 1 + i$.
   c) $P(x) = 3x^4 - x^2 + ix - 2$, $Q(x) = 5x - 4$.
   d) $P(x) = 3x^6 - x^4 + ix^3 - 2x^2$, $Q(x) = 5x^3 - 4x^2$.
3. Analizar por qué son iguales los resultados de los ejercicios $2c$ y $2d$.
4. Siendo $P(x) = x^4 - ix^3 - ix + 1 + i$, hallar $P(0)$, $P(-1)$, $P(-i)$, $P(i)$, $P(i + 1)$, $P(5)$, $P(6)$, $P(2 - i)$. Cuando resulte más conveniente, utilizar el teorema del resto.
5. Siendo $P(x) = kx^4 + kx^3 - 33x^2 + 17x - 10$, calcular $P(4)$ sabiendo que $P(5) = 0$.
6. Determinar si los números 1, -1, i y $-i$ son raíces del polinomio $P(x) = -3x^{12} + x^9 - x^6 + 2x^5 + 2x^4 - 3x^2 + 2$.
7. Dar en cada caso un polinomio P que cumpla con las condiciones pedidas, explicitando si es único o no.
   a) P tiene a 2 como raíz simple y a i como raíz triple.
   b) P tiene a 2 como raíz simple y a i como raíz triple y es de grado 4.
   c) P tiene a 2 como raíz simple y a i como raíz triple y es de grado 4 y $P(1) = 3i$.
   d) 1, 4, 2 y 0 son raíces de P y P es de grado 6.
   e) 1, 4, 2 y 0 son raíces de P, P es de grado 5 y a coeficientes reales.
8. Encontrar la descomposición factorial de los siguientes polinomios. En los casos que existan raíces complejas, dar la descomposición en factores lineales exclusivamente y en factores lineales y cuadráticos a coeficientes reales.
   a) $P(x) = 2x^4 + 5x^3 - 11x^2 - 20x + 12$
   b) $P(x) = x^5 - 3x^4 + x^3 + x^2 + 4$
   c) $P(x) = x^5 - \frac{2}{3}x^4 + \frac{11}{2}x^3 - \frac{7}{12}x^2 - \frac{1}{12}x + \frac{1}{12}$
   d) $P(x) = (x^3 - 2x^2 + 5x)(x^4 + 1)$
   e) $P(x) = 2x^6 - 5x^5 + 4x^4 - 5x^3 + 2x^2$.
   f) $P(x) = x^6 - 2x^5 + x^4 - 8x^3 - 8x^2 - 8x - 12$.
   g) $P(x) = 2x^7 - 3x^6 + 14x^5 - 20x^4 - 36x^3 + 61x^2 - 18$.
   h) $P(x) = (x^7 + x^4 - 9x^3 - 9)(x^3 + 1)$.
9. Determinar si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas justificando adecuadamente la respuesta.
   a) Dado $P \in \mathbb{C}[x]$, α es una raíz de P si y sólo si $-\alpha$ es una raíz de $Q(x) = P(-x)$.
   b) Si α es una raíz de P, entonces α es una raíz de $P \cdot Q$, cualquiera sea $Q \in \mathbb{C}[x]$.
   c) Todo polinomio de grado impar tiene al menos una raíz real.
   d) Todo polinomio a coeficientes reales de grado impar tiene al menos una raíz real.
   e) Dos polinomios P y Q son iguales si y sólo si tienen exactamente las mismas raíces.
   f) Dos polinomios de grado n son iguales si coinciden en n valores distintos que tome la variable.