Unidad 8: Rectas

Iker M. Canut

August 2, 2020

1 Ecuaciones de la recta en el plano

Dado un punto P y un vector no nulo $\overrightarrow{u}$, la **recta** r que pasa por P en la dirección de $\overrightarrow{u}$, es el lugar geométrico de los puntos Q tales que $\overrightarrow{PQ} \parallel \overrightarrow{u}$. Es decir, $Q \in r \iff \exists\, \lambda \in \mathbb{R}: \ \overrightarrow{PQ} = \lambda \cdot \overrightarrow{u}$
Y como $\overrightarrow{OP} + \overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{OQ}$, la recta r está compuesta por todos los puntos Q que verifican:

$$\overrightarrow{OQ} = \overrightarrow{OP} + \lambda \cdot \overrightarrow{u}, \ \lambda \in \mathbb{R} \tag{1}$$

Ésto se llama **ECUACIÓN VECTORIAL** de la recta r.

Dada una recta que pasa por un punto $P(x_0, y_0)$, en la dirección de un vector $\overrightarrow{u} = (u_1, u_2)$, sabemos que un punto Q pertenece a la recta r si y solo si $\overrightarrow{OQ} = \overrightarrow{OP} + \lambda \cdot \overrightarrow{u}, \ \lambda \in \mathbb{R}$. Luego, se puede concluir que $\overrightarrow{OQ} = \overrightarrow{OP} + \lambda \cdot \overrightarrow{u} = (x_0 + \lambda \cdot u_1, y_0 + \lambda \cdot u_2)$. Y llegamos a que:

$$\left\{ \begin{array}{lcl} x & = & x_0 + \lambda \cdot u_1 \\ y & = & y_0 + \lambda \cdot u_2 \end{array} \right. \tag{2}$$

Y llegamos a las **ECUACIONES PARAMÉTRICAS** de la recta.

Suponiendo $u_1 \neq 0$, si $Q(x, y) \in r \Rightarrow \ \exists \lambda \in \mathbb{R}$, y despejando λ llegamos a que: $\lambda = \dfrac{x - x_0}{u_1}$ y por lo tanto, $y = y_0 + \dfrac{x - x_0}{u_1} \cdot u_2 \iff y - \dfrac{u_2 \cdot x}{u_1} + \dfrac{u_2 \cdot x_0}{u_1} - y_0 = 0 \iff u_2 \cdot x - u_1 \cdot y - u_2 \cdot x_0 + u_1 \cdot y_0 = 0$, y tomando $a = u_2, \ b = -u_1, \ c = -u_2 \cdot x_0 + u_1 \cdot y_0$, llegamos a:

$$a \cdot x + b \cdot y + c = 0 \tag{3}$$

Que se denomina **ECUACIÓN CARTESIANA (general)** de la recta.
Se observa que $(a, b) = (u_2, -u_1)$ es un vector *perpendicular*, es decir, normal a la recta. Y $\overrightarrow{u} = (b, -a)$ o $\overrightarrow{u'} = (-b, a)$ son las *direcciones* de r. Por último, sea $\alpha \in \mathbb{R}, \alpha \neq 0$, $a' = \alpha \cdot a, b' = \alpha \cdot b, c' = \alpha \cdot c$, entonces $ax + by + c = 0$ y $a'x + b'y + c' = 0$ son ecuaciones de la *misma* recta. Si $c = 0$ entonces pasa por el origen. Si $a = 0 \wedge b \neq 0$, se puede escribir como $y = \frac{c}{b}$ y es una recta *horizontal.* Si $a \neq 0, b = 0$, se puede escribir como $x = \frac{c}{a}$ y es una recta *vertical.*

Si tomamos particularmente los valores $a = \dfrac{a'}{\sqrt{a'^2 + b'^2}}, b = \dfrac{b'}{\sqrt{a'^2 + b'^2}}, c = \dfrac{c'}{\sqrt{a'^2 + b'^2}}$, tenemos que:

$$a \cdot x + b \cdot y + c = 0, \quad \text{donde } |(a, b)| = \sqrt{a^2 + b^2} = 1 \tag{4}$$

Siendo ésta la **ECUACIÓN NORMAL** de la recta. Notamos que $|c|$ es la distancia de r al origen.

Si restamos c a ambos terminos, y multiplicamos por el recíproco de $-c$, obtenemos:
$-\dfrac{a}{c}x - \dfrac{b}{c} = 1 \iff \dfrac{x}{-\frac{c}{a}} + \dfrac{y}{-\frac{c}{b}} = 1$. Llamando $k = -\dfrac{c}{a}$ y $h = -\dfrac{c}{b}$:

$$\frac{x}{k} + \frac{y}{h} = 1 \tag{5}$$

Que se denomina **ECUACIÓN SEGMENTARIA** de la recta. Observamos que $(k, 0)$ y $(0, h)$ son las intersecciones de la recta con los ejes x e y. Además, si r no pasa por el origen, o es paralelo a algun eje, la segmentaria es única.

Dado $ax + by + c = 0$, podemos reescribirlo como $y = -\dfrac{a}{b}x - \dfrac{c}{b}$, y llamando $m = -\dfrac{a}{b}$ y $h = -\dfrac{c}{b}$:

$$y = mx + h \tag{6}$$

Es la **ECUACIÓN EXPLICITA** de la recta. m es la pendiente, que es la tangente del angulo que forma r con el semieje positivo de las x. h es la ordenada al origen. Si $y = mx + h$, luego la general es: $-mx + y - h = 0$. Con lo cual $(-m, y)$ es normal a la recta, y $(1, m)$ es la dirección. Como h es la ordenada al origen, $(0, h) \in r$ y además tenemos que $\left\{ \begin{array}{l} x = \lambda \\ y = h + m \cdot \lambda \end{array} \right.$

2 Problemas con Rectas

2.1 Ángulo Entre 2 Rectas

Dadas r_1 y r_2, el ángulo entre las mismas se nota $(r_1 \hat{,} r_2)$ y es el ángulo agudo o recto que forman si se cortan en un punto. Si son paralelas, el ángulo es 0. Sean $\overrightarrow{u_1}$ y $\overrightarrow{u_2}$ las direcciones, $(r_1 \hat{,} r_2) = (\overrightarrow{u_1} \hat{,} \overrightarrow{u_2})$.

2.2 Posición Relativa Entre 2 Rectas

$$r_1, r_2 \begin{cases} \text{Paralelas} \begin{cases} \text{Coincidentes} \longrightarrow \textbf{Compatible Indeterminado} \\ \\ \text{No Coincidentes} \longrightarrow \textbf{Incompatible} \end{cases} \\ \\ \text{Secantes} \longrightarrow \textbf{Compatible Determinado} \end{cases}$$

2.2.1 Dadas Ecuaciones Paramétricas

Sean $r_1) \begin{cases} x = x_0 + \lambda u_1 \\ y = y_0 + \lambda u_2 \end{cases}$, $r_2) \begin{cases} x = x'_0 + \lambda' u'_1 \\ y = y'_0 + \lambda' u'_2 \end{cases}$, entonces $r_1 \parallel r_2 \iff \vec{u} \parallel \vec{u'}$.

Son paralelas coincidentes si la dirección que dan dos puntos, uno perteneciente a cada recta, es paralela a la dirección de r_1 y r_2. Equivalentemente, si dado $P(x_0, y_0) \in r_1$, verifica la ecuación de r_2.

2.2.2 Dadas Ecuaciones Cartesianas

Sean $r_1) ax+by+c = 0$, $r_2) a'x+b'y+c' = 0$, entonces $r_1 \parallel r_2 \iff (a,b) \perp (b,-a) \iff a \cdot b' - b \cdot a' = 0$.
Luego, si $r_1 \parallel r_2, r_1 = r_2 \iff \left(c = c' = 0 \vee \dfrac{c'}{c} = \dfrac{a'}{a} \vee \dfrac{c'}{c} = \dfrac{b'}{b}\right)$

2.2.3 Dadas Ecuaciones Explicitas

Sean $r_1) y = mx + h$, $r_2) y = m'x + h'$, $r_1 \parallel r_2 \iff m = m'$. Además, $r_1 = r_2 \iff m = m' \wedge h = h'$.

2.3 Determinante

El número $a \cdot b' - a' \cdot b$ se denomina **determinante** de la matriz $\begin{pmatrix} a & b \\ a' & b' \end{pmatrix}$ y se denota $\begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix} = a \cdot b' - a' \cdot b$

Un sistema es determinado $\iff \begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix} \neq 0$

Un sistema es incompatible o indeterminado $\iff \begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix} = 0$

2.4 Distancia de un Punto a una Recta

Trazamos una perpendicular a r que pase por P, corta a r en P'. Se denomina distancia de P a r, denotado como $d(P, r)$ a la distancia entre P y P'. Si $P \in r$ es inmediato que $d(P, r) = d(P, P) = 0$.
Sea r con ecuación general $ax + by + c = 0$ y $P(x_0, y_0)$, entonces $d(P, r) = \dfrac{|a \cdot x_0 + b \cdot y_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$.

Demostración: Sea $Q \in r$, $\vec{v} = (a, b) \perp r$, entonces $d(P, r) = |proy_{\vec{v}} \overrightarrow{QP}|$,
y como $Q \in r \Rightarrow ax' + by' + c = 0 \Rightarrow c = -ax' - by'$. Luego $\overrightarrow{QP} = (x_0 - x', y_0 - y')$.
Y el versor asociado a $\vec{v}$ es $\vec{v_0} = \left(\dfrac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} + \dfrac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}\right)$.

$$d(P, r) = |proy_{\vec{v}} \overrightarrow{QP}| = |\overrightarrow{QP} \times \vec{v_0}| \cdot \vec{v_0} = \left| \frac{a(x_0 - x') + b(x_0 - y')}{\sqrt{a^2 + b^2}} \right| = \left| \frac{a \cdot x_0 + b \cdot y_0 + c}{\sqrt{a^2 + b^2}} \right|$$

NOTA: Si $ax + by + c = 0$, donde $|(a, b)| = \sqrt{a^2 + b^2} = 1$, entonces $d(O, r) = |c|$.
NOTA: La distancia entre dos rectas paralelas es $d(r_1, r_2) = d(P, r_2)$, donde $P \in r_1$.

3 Inecuaciones Lineales de 2 Incógnitas

En general, una inecuación representará un semiplano: Dada una recta $r) ax+by+c=0,\ P(x_0,y_0) \in r$ y Q un punto tal que $\overrightarrow{n}=(a,b)=\overrightarrow{PQ}$, entonces el semiplano determinado por r que contiene a Q está caracterizado por $ax+by+c>0$, y el semiplano opuesto por $ax+by+c<0$.

Demostración: $\overrightarrow{n}=(a,b)\perp r$. Fijando $P(x_0,y_0)\in r$, y sea $Q:\overrightarrow{n}=\overrightarrow{PQ}$, S es el semiplano determinado por R que contiene a Q. Luego, $R(x,y)\in S \iff (\widehat{\overrightarrow{PR},\overrightarrow{n}})<90^\circ \iff \cos(\widehat{\overrightarrow{PR},\overrightarrow{n}})>0$, que es equivalente a $\overrightarrow{PR}\times\overrightarrow{n}>0$, i.e, $R\in S \iff (x-x_0,y-y_0)\times(a,b)=ax+by-ax_0-by_0>0$. Como $P\in r,\ c=-ax_0-by_0 \Rightarrow R\in S \iff ax+by+c>0$ $\blacksquare$