- Algebra y Geometría Analítica I - (ECEN)

• Trabajo Práctico: Polinomios. - Ejercicios resueltos

- Ejercicio 2: En cada caso hallar el cociente y el resto de dividir el polinomio P por el polinomio Q. En los casos en que sea posible, aplicar la regla de Ruffini

(a) $P(x) = 4X^3 + X^2$, $Q(x) = X^2 + 1 + i$

Aplicamos el algoritmo de división. No se puede aplicar la regla de Ruffini porque $Q(x)$ no es de la forma $X-a$

$$
\begin{array}{rl|l}
- & 4X^3 + X^2 + 0X + 0 & X^2 + 1 + i \\
\cline{3-3}
& 4X^3 \qquad (4+4i)X & 4X + 1 \\
\hline
- & 0 \quad X^2 - (4+4i)X + 0 & \\
& X^2 \qquad\quad 1+i & \\
\hline
& 0 \; -4(1+i)X - (1+i) &
\end{array}
$$

$$\boxed{\begin{array}{l} C(X) = 4X + 1 \\ R(X) = -4(i+1) - (1+i) \end{array}}$$

(c) $P(x) = 3X^4 - X^2 + iX - 2$, $Q(x) = 5X - 4$

En principio no podemos aplicar la regla de Ruffini porque $Q(x)$ no es de la forma $X-a$.

Sin embargo, si consideramos el polinomio $q(x) = X - 4/5$, tal que:

$Q(x) = 5 . q(x) = 5 . (X - 4/5) = 5X - 4$.

Sabemos que si $C(x)$ es el cociente de la división de $P(x)$ y $Q(x)$; y $R(x)$ es el resto, podemos escribir:

$$P(x) = Q(x) . C(x) + R(x)$$

Reemplazando $Q(x)$, obtenemos:

$$P(x) = 5\, q(x)\, C(x) + R(x)$$

$$= q(x) . c(x) + R(x) \qquad \text{si } c(x) = C(x) . 5$$

De esta manera podemos utilizar la regla de Ruffini para calcular la división de $P(x)$ por el polinomio $q(x)$. Como resultado obtendremos el polinomio cociente $c(x)$ y el resto $R(x)$.

Hay que tener en cuenta que para hallar el polinomio $C(x)$, que es el cociente entre $P(x)$ y $Q(x)$, tenemos que hacer: $C(x) = \frac{1}{5} c(x)$.

Aplicamos Ruffini con: $P(x) = 3x^4 - x^2 + ix - 2$

$$q(x) = x - 4/5$$

$$\begin{array}{c|cccc|c}
 & 3 & 0 & -1 & i & -2 \\
4/5 & & \frac{12}{5} & \frac{48}{25} & \frac{92}{125} & \frac{368}{625} + \frac{4}{5}i \\
\hline
 & 3 & \frac{12}{5} & \frac{23}{25} & \frac{92}{125} + i & -\frac{882}{625} + \frac{4}{5}i
\end{array}$$

→ el cero es el coeficiente de x^3. Recordar que el polinomio debe estar completo para aplicar Ruffini

Entonces:

$$c(x) = 3x^3 + \frac{12}{5}x^2 + \frac{23}{25}x + \frac{92}{125} + i \Rightarrow$$

$$C(x) = \frac{3}{5}x^3 + \frac{12}{25}x^2 + \frac{23}{125}x + \frac{92}{625} + \frac{i}{5}$$

$$R(x) = \frac{-882}{625} + \frac{4}{5}i$$

- Ejercicio 4: Siendo $P(x) = x^4 - ix^3 - ix + 1 + i$, hallar $P(0), P(1), P(i), P(i+1), P(5), P(6)$ y $P(2-i)$. Cuando resulte más conveniente, utilizar el teorema del resto.

Teorema del Resto: Sea $P \in \mathbb{C}[x]$ con $gr(P) \geq 1$ y $z \in \mathbb{C}$. Entonces $P(z)$ es el resto de dividir P por $Q(x) = x - z$

- $P(0) = 0^4 - i \cdot 0^3 - i \cdot 0 + 1 + i = \boxed{1+i}$

- $P(1) = 1^4 - i\, 1^3 - i \cdot 1 + 1 + i = \boxed{2-i}$

• $P(i) = i^4 - i \cdot i^3 - i \cdot i + 1 + i$

$= i^4 - i^4 - i^2 + 1 + i$

$= 0 - (-1) + 1 + i = \boxed{2+i}$

• $P(1+i)$

En este caso debería calcular $(1+i)^4$ y $(1+i)^3$, lo cual va a ser largo y aumenta la posibilidad de cometer errores.

Así que es preferible utilizar el teorema del resto. Dividimos $P(x)$ por $Q(x) = X - (1+i)$, para lo cual usamos la regla de Ruffini.

	1	$-i$	0	$-i$	$1+i$
$1+i$		$1+i$	$1+i$	$2i$	$-1+i$
	1	1	$1+i$	i	$\boxed{2i}$

$R(x) = 2i$ es el resto de la división.

Por teorema del resto: $\boxed{P(1+i) = 2i}$

Ejercicio 8: Encontrar la descomposición factorial de los siguientes polinomios. En los casos que existan raíces complejas, dar la descomposición en factores lineales exclusivamente y en factores lineales y cuadráticos a coeficientes reales.

(a) $P(x) = 2X^4 + 5X^3 - 11X^2 - 20X + 12$

Observemos que $P(2) = 0$. Dividimos $P(x)$ por $Q_1(x) = X - 2$

	2	5	-11	-20	12
2		4	18	14	-12
	2	9	7	-6	0

$\therefore C_1(x) = 2X^3 + 9X^2 + 7X - 6$

- Hasta ahora tenemos: $P(x) = (X-2)(2X^3 + 9X^2 + 7X - 6)$

Vemos también que $C_1(-2)=0$. Dividimos $C_1(x)$ por $Q_2(x)=X+2=X-(-2)$

$$\begin{array}{r|ccc|c} & 2 & 9 & 7 & -6 \\ -2 & & -4 & -10 & 6 \\ \hline & 2 & 5 & -3 & 0 \end{array}$$

$$\Rightarrow C_2(x) = 2X^2+5X-3$$

- Hasta aquí tenemos que: $P(x) = Q_1(x) \cdot Q_2(x) \cdot C_2(x) = (X-2)(X+2)(2X^2+5X-3)$

· Los restantes raíces de $P(x)$ serán los raíces de $C_2(x)$, las cuales podemos obtener aplicando la resolvente para la ecuación $C_2(x)=0$

$$2X^2+5X-3=0 \qquad X_{1,2} = \frac{-5 \pm \sqrt{5^2-4.2.(-3)}}{2.2} = \frac{-5 \pm \sqrt{25+24}}{4} = \frac{-5 \pm 7}{4}$$

$$\Rightarrow X_1 = \frac{-5+7}{4} = \frac{1}{2} \quad ; \quad X_2 = \frac{-5-7}{4} = -3$$

Los restantes raíces de $P(x)$ son $1/2$ y -3.

Por lo tanto, la descomposición factorial de $P(x)$ es:

$$\boxed{P(x) = (X-2)(X+2)(X-1/2)(X+3)}$$