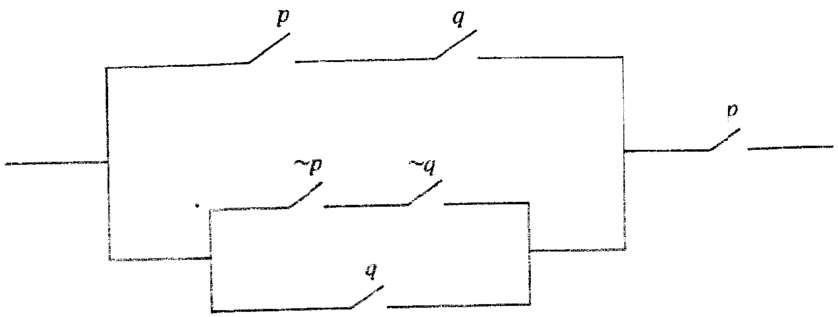
1-31. Se tiene el siguiente circuito:



i) determinar la proposición correspondiente

ii) simplificar ésta, y construir el circuito asociado.

1-32. Expresar simbólicamente el siguiente teorema: "si un número es impar, entonces su cuadrado es impar".
Enunciar el contrarrecíproco, el contrario y el recíproco. Demostrar el primero.

1-33. Siendo

$$p : a \,.\, b \text{ es impar}$$
$$q : a \text{ y } b \text{ son impares}$$

Demostrar $p \Rightarrow q$

1-34. Justificar el razonamiento

$$\begin{array}{c} p \vee \sim q \\ \sim q \Leftrightarrow r \\ p \vee \sim r \\ \hline p \end{array}$$

1-35. Lo mismo en el siguiente caso:

$$\begin{array}{c} p \wedge q \\ (p \wedge q) \Rightarrow r \\ r \Rightarrow s \\ \hline s \end{array}$$

1-36. Investigar la validez del razonamiento siguiente:

Si el interés no es egoísta, entonces es la fuerza vital de las personas y es espontáneo.
El interés no es la fuerza vital de las personas y es espontáneo

---

El interés es egoísta

Capítulo 2

CONJUNTOS

2.1. INTRODUCCION

El propósito de esta sección es el estudio de la teoría intuitiva de conjuntos. En este sentido, los términos "conjunto", "pertenencia" y "elemento" son considerados como primitivos. Sobre esta base se definen la inclusión y la igualdad, y se estudian sus propiedades. El mismo tratamiento se hace corresponder a las operaciones entre conjuntos. El capítulo se completa con el desarrollo de ejemplos en los que se pretende mostrar un método adecuado de trabajo.

2.2. DETERMINACION DE CONJUNTOS

2.2.1. Notaciones

Para denotar conjuntos utilizaremos generalmente letras mayúsculas, y para especificar elementos se usarán letras minúsculas, a menos que dichos elementos sean, a su vez, conjuntos. Para indicar la pertenencia de un elemento a un conjunto será utilizado el símbolo $\in$.

La proposición "$a \in$ A" se lee: "a pertenece a A", o bien "el elemento a pertenece al conjunto A".

Su negación es "$a \notin$ A", que se lee: "a no pertenece a A".

Si el conjunto A está formado por los elementos a, b y c, escribimos

$$A = \{a, b, c\}$$

en este caso se nombran todos los elementos del conjunto, y se dice que está determinado por extensión.

Las notaciones usuales para caracterizar conjuntos numéricos son las siguientes:

N conjunto de los números naturales
Z conjunto de los números enteros

Q conjunto de los números racionales
R conjunto de los números reales
C conjunto de los números complejos

La representación por extensión del conjunto cuyos elementos son -1, 0 y 1, es

$$A = \{-1, 0, 1\}$$

Es fácil ver que se trata del conjunto de los números enteros cuyo valor absoluto es menor que 2; en este enunciado hacemos referencia a elementos del conjunto **Z**, de los números enteros, el cual se llama referencial o universal; además, estamos interesados en aquellos que satisfacen la propiedad de ser, en valor absoluto, menores que 2.

La notación correspondiente es

$$A = \{x \in \mathbf{Z} \,/\, |x| < 2\}$$

y se dice que el conjunto ha sido determinado por comprensión.

El conjunto universal depende de la disciplina en estudio, se fija de antemano, y está formado por todos los elementos que intervienen en el tema de interés. En general se denotará con U.

Definición

Un conjunto se determina por extensión si y sólo si se enumeran todos los elementos que lo constituyen. Un conjunto se define por comprensión si y sólo si se da la propiedad que caracteriza a sus elementos.

El conjunto cuyos elementos verifican la propiedad P se indica

$$A = \{x \in U \,/\, P(x)\}$$

o más brevemente, si U está sobrentendido

$$A = \{x \,/\, P(x)\}$$

y se lee: "A es el conjunto formado por los elementos x, tales que $P(x)$". $P(x)$ es una función proposicional, y un objeto del universal pertenece al conjunto si y sólo si verifica la propiedad, es decir

$$a \in A \Leftrightarrow P(a) \text{ es V}$$

En consecuencia

$$a \notin A \Leftrightarrow P(a) \text{ es F}$$

2.2.2. Conjuntos especiales

Extendemos la noción intuitiva de conjunto a los casos de carencia de elementos y de unicidad de elementos, mediante la introducción de los conjuntos vacío y unitario.

Un conjunto vacío es aquel que carece de elementos. Un conjunto unitario está formado por un único elemento.

Una propiedad o función proposicional, que se convierte en proposición falsa para todos los elementos del universal, caracteriza por comprensión un conjunto vacío. Designaremos con ϕ al conjunto vacío, y puede definirse simbólicamente así

$$\phi = \{x \,/\, x \neq x\}$$

En este caso la propiedad relativa a x es $P(x) : x \neq x$, la cual resulta falsa cualquiera que sea x.

Si A es el conjunto cuyo único elemento es a, escribiremos

$$A = \{a\} = \{x \,/\, x = a\}$$

Ejemplo 2-1.

Determinar simbólicamente y por extensión los siguientes conjuntos definidos por comprensión:

i) A es el conjunto de los números enteros cuyo cuadrado es igual a 1.

En este caso la propiedad que caracteriza a los elementos de A es la conjunción de

$$P(x) : x \in \mathbf{Z} \quad \text{y} \quad Q(x) : x^2 = 1$$

Entonces

$$A = \{x \,/\, x \in \mathbf{Z} \wedge x^2 = 1\}$$

y como universal puede sobrentenderse el conjunto de los números reales o racionales. Si proponemos a **Z** como universal, puede escribirse

$$A = \{x \in \mathbf{Z} \,/\, x^2 = 1\}$$

Obviamente, la determinación por extensión es

$$A = \{-1, 1\}$$

ii) B es el conjunto de los números naturales mayores que 2, y que no superan a 6.

Considerando a **N** como universal, la propiedad característica de los elementos de B es la conjunción de

$$P(x) : x > 2 \quad \text{y} \quad Q(x) : x \leqslant 6$$

que podemos expresar $\qquad R(x) : 2 < x \leqslant 6$

y se tiene

$$B = \{x \in \mathbf{N} \,/\, 2 < x \leqslant 6\}$$

Por extensión nos queda

$$B = \{ 3 , 4 , 5 , 6 \}$$

iii) C es el conjunto de los números reales cuyo cuadrado es igual a -1.

Se tiene:

$$C = \{ x \in \mathbf{R} \,/\, x^2 = -1 \}$$

Como el cuadrado de ningún número real es negativo, $P(x) : x^2 = -1$ es F para todo real, y resulta $C = \phi$.

Ejemplo 2-2.

La determinación de conjuntos por extensión no es posible en el caso de infinitos elementos, y hay que limitarse a la definición por comprensión. La matemática trabaja casi con exclusividad en este sentido, a través de propiedades.

Caracterizamos simbólicamente los siguientes conjuntos:

i) P es el conjunto de los números enteros pares.

Por definición, un entero es par si y sólo si se identifica con el duplo de algún entero. Es decir

$$a \text{ es par} \Leftrightarrow \exists\, k \in \mathbf{Z} \,/\, a = 2k$$

Entonces

$$P = \{ x \in \mathbf{Z} \,/\, x = 2k \ \wedge \ k \in \mathbf{Z} \}$$

Es claro que P consiste en el conjunto de los múltiplos de 2.

A veces, acudiendo a un abuso de notación, suele proponerse una aparente determinación por extensión de un conjunto infinito, con la adjunción de puntos suspensivos. Así

$$P = \{ \ldots\ldots , -4 , -2 , 0 , 2 , 4 , 6 , \ldots\ldots \}$$

ii) A es el conjunto de los números naturales que son múltiplos de 3.

$$A = \{ x \in \mathbf{N} \,/\, x = 3k \ \wedge \ k \in \mathbf{N} \}$$

En $\mathbf{N}$ no incluimos al cero, y se tiene

$$A = \{ 3 , 6 , 9 , \ldots\ldots \}$$

Si 0 se considera natural, escribiremos $\mathbf{N}_0$ y en este caso

$$A = \{ x \in \mathbf{N}_0 \,/\, x = 3k \ \wedge \ k \in \mathbf{N}_0 \}$$

Es decir

$$A = \{ 0 , 3 , 6 , 9 , \ldots\ldots \}$$

iii) B es el conjunto de los números naturales cuyo cuadrado es par.

$$B = \{ x \in \mathbf{N} \,/\, x^2 \ \text{ es par} \}$$

O bien

$$B = \{ x \in \mathbf{N} \,/\, x^2 = 2k \ \wedge \ k \in \mathbf{N} \}$$

¿Cómo se determina la pertenencia de un elemento a B? De acuerdo con la definición de B, dado un número natural, se analiza su cuadrado; si dicho cuadrado es par, el número pertenece a B; si su cuadrado es impar, no pertenece a B. Es decir

$$a \in B \Leftrightarrow a^2 \ \text{ es par}$$

iv) C es el conjunto de los puntos del plano cuyas distancias a un punto 0 son iguales a 1.

Entendemos que el conjunto universal es el de los puntos del plano α. Si bien 0 es un elemento, como es usual en geometría, lo denotamos con mayúscula. Indicamos la distancia entre A y 0 mediante $d(A , 0)$. Entonces

$$C = \{ X \in \alpha \,/\, d(X , 0) = 1 \}$$

es la definición simbólica de la circunferencia de centro 0 y radio 1.

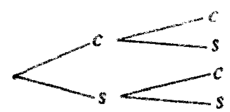
v) D es el conjunto de los puntos del plano que equidistan de dos puntos fijos A y B.

$$D = \{ X \in \alpha \,/\, d(X , A) = d(X , B) \}$$

D consiste en la mediatriz del segmento AB.

Ejemplo 2-3.

El conjunto S está formado por los posibles resultados que se obtienen al lanzar dos monedas. Los resultados para la primera moneda son c (cara) y s (sello) y por cada uno de ellos se tienen las mismas posibilidades para la segunda, es decir



Entonces

$$S = \{ cc , cs , sc , ss \}$$

2.3. INCLUSION

2.3.1. Concepto

Sean A y B dos conjuntos. Si ocurre que todo elemento de A pertenece a B, diremos que A está incluido en B, o que A es parte de B, o que A es un subconjunto de B, y escribimos $A \subset B$.

Definición

$$A \subset B \Leftrightarrow \forall x : x \in A \Rightarrow x \in B$$

Esta definición tiene el siguiente significado: si sabemos que $A \subset B$, entonces la proposición $\forall x : x \in A \Rightarrow x \in B$ es V; recíprocamente, si esta proposición es V, entonces se verifica que $A \subset B$.

En repetidas ocasiones se necesitará demostrar que un conjunto es parte de otro; entonces, de acuerdo con la definición, será suficiente demostrar que cualquier elemento del primero pertenece al segundo.

Teniendo en cuenta la equivalencia entre una implicación y la contrarrecíproca, la definición anterior puede expresarse así

$$A \subset B \Leftrightarrow \forall x : x \notin B \Rightarrow x \notin A$$

Además, considerando la equivalencia entre $p \Rightarrow q$ y $\sim(p \wedge \sim q)$, podemos traducir la misma definición de la siguiente manera

$$A \subset B \Leftrightarrow \exists x / x \in A \wedge x \notin B \text{ es F}$$

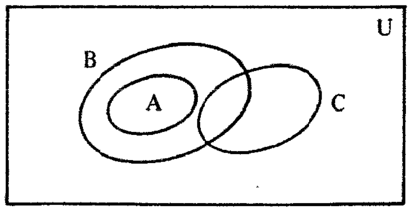
Es decir, en la inclusión no puede darse que haya un elemento de A que no pertenezca a B.

Sobrentendiendo el cuantificador universal, para descargar la notación, escribiremos

$$A \subset B \Leftrightarrow x \in A \Rightarrow x \in B$$

2.3.2. Diagramas de Venn

Existe una representación visual de los conjuntos dada por diagramas llamados de Venn. En este sentido, el conjunto universal suele representarse por un rectángulo, y los conjuntos por recintos cerrados. Es claro que todo elemento de A pertenece a U, es decir, $A \subset U$. Sean A, B y C subconjuntos de U, como indica el diagrama



En este caso se verifica $A \subset B$.

Ejemplo 2-4.

Sean $U = \mathbf{N}$ y los conjuntos

$$A = \{ x / x \mid 6 \}$$
$$B = \{ x / x \mid 8 \}$$
$$C = \{ x / x \leqslant 2 \}$$

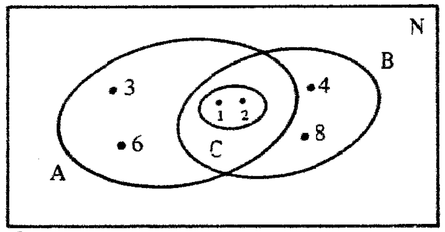
Se pide la representación de tales conjuntos mediante diagramas de Venn. Definimos la relación de divisor en **N** mediante

$$a \mid b \text{ si y sólo si } \exists\, n \in \mathbf{N} / b = a \,.\, n$$

Teniendo en cuenta esta definición, y la relación de menor o igual, la representación por extensión de tales conjuntos es

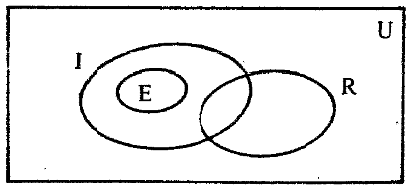
$$A = \{ 1, 2, 3, 6 \} \qquad B = \{ 1, 2, 4, 8 \}$$
$$C = \{ 1, 2 \}$$

y en términos de diagramas de Venn



Ejemplo 2-5.

Consideremos el conjunto U de todos los triángulos; si I denota el conjunto de los triángulos isósceles, E de los equiláteros y R de los triángulos rectángulos, se tiene



Ya que todo triángulo equilátero tiene los tres lados iguales, en consecuencia tiene dos iguales, es decir, es isósceles. Además existen triángulos isósceles que son rectángulos, pero ningún triángulo equilátero es rectángulo.

2.3.3. Igualdad de conjuntos

Es claro que dos conjuntos son iguales si son idénticos, es decir, si tienen los mismos elementos. Entonces, todo elemento del primero pertenece al segundo, y todo elemento de éste pertenece al primero.

Definición

$$A = B \Leftrightarrow A \subset B \;\wedge\; B \subset A.$$

Ejemplo 2-6.

Los conjuntos de números reales

$$A = \{ x / x^2 = x \}$$

$$B = \{ x / (x-1) \,.\, x = 0 \}$$

son iguales ya que

$$x \in A \Leftrightarrow x^2 = x \Leftrightarrow x^2 - x = 0 \Leftrightarrow x \,.\, (x-1) = 0 \Leftrightarrow x \in B$$

El bicondicional se desdobla en las dos implicaciones que prueban la doble inclusión, y en consecuencia la igualdad.

Ejemplo 2-7.

Sean los conjuntos de números enteros

$$A = \{ x / x^2 = 1 \}$$

$$B = \{ x / |x| = 1 \}$$

Teniendo en cuenta que el cuadrado de un número entero es igual al cuadrado de su valor absoluto, resulta

$$x \in A \Leftrightarrow x^2 = 1 \Leftrightarrow |x|^2 = 1 \Leftrightarrow |x| = 1 \Leftrightarrow x \in B$$

En consecuencia, A = B.

Ejemplo 2-8.

Demostrar que el conjunto de los números naturales impares es igual al conjunto de los números naturales cuyo cuadrado es impar.

Hipótesis) $A = \{ x \in \mathbf{N} / x \text{ es impar} \}$ Tesis) A = B

$B = \{ x \in \mathbf{N} / x^2 \text{ es impar} \}$

Demostración)

Nota previa:

Por definición, un número natural x es impar si y sólo si existe $k \in \mathbf{N}$ tal que $x = 2k - 1$.

Por otra parte, es fácil ver que el producto de dos naturales consecutivos es impar, y que la diferencia entre un número par y uno impar es impar. Vamos ahora a nuestra demostración, la cual consiste en probar las dos inclusiones que definen la igualdad

1°) $A \subset B$. En efecto: sea $x \in A$.

Se tiene $x \in A \Rightarrow x$ es impar $\Rightarrow x = 2k - 1$ con $k \in \mathbf{N} \Rightarrow$

$\Rightarrow x^2 = 4k^2 - 4k + 1$ con $k \in \mathbf{N} \Rightarrow x^2 = 2 \,.\, (2k^2 - 2k) + 2 - 1 \Rightarrow$

$\Rightarrow x^2 = 2 \,.\, (2k^2 - 2k + 1) - 1 \Rightarrow x^2 = 2 \,.\, k' - 1$ siendo $k' \in \mathbf{N} \Rightarrow$

$\Rightarrow x^2$ es impar $\Rightarrow x \in B$

Hemos utilizado sucesivamente, la definición de A, la definición de número impar, cuadrado de un binomio, la distributividad de la multiplicación, la sustitución de 1 por (2 − 1), nuevamente la distributividad, la definición de número impar, y finalmente la definición de B.

2°) $B \subset A$. Es claro que $x = x \,.\, (x+1) - x^2$.

Ahora bien

$x \in B \Rightarrow x^2$ es impar $\Rightarrow x \,.\, (x+1) - x^2$ es impar $\Rightarrow$

$\Rightarrow x$ es impar $\Rightarrow x \in A$

En consecuencia A = B.

2.3.4. Propiedades de la inclusión

i) REFLEXIVIDAD. Todo conjunto es parte de sí mismo.

En efecto, si A es un conjunto, la implicación

$$\forall x : x \in A \Rightarrow x \in A \text{ es } V$$

En consecuencia, por definición, se tiene $A \subset A$.

ii) TRANSITIVIDAD. Si un conjunto es parte de otro y éste es parte de un tercero, entonces el primero está incluido en el tercero

Hipótesis) $A \subset B$ Tesis) $A \subset C$

$B \subset C$

Demostración)

Sea $x \in A$. Por hipótesis se tiene

$$x \in A \Rightarrow x \in B$$

$$\text{y } x \in B \Rightarrow x \in C$$

Entonces, por ley del silogismo hipotético

$$x \in A \Rightarrow x \in C$$

Y, en consecuencia, por definición de inclusión $A \subset C$.

iii) ANTISIMETRIA. Si un conjunto es parte de otro y éste es parte del primero, entonces son iguales.

$$A \subset B \wedge B \subset A \Rightarrow A = B$$

es una consecuencia de la definición de igualdad.

2.3.5. Caracterización del conjunto vacío

i) **Propiedad.** El conjunto vacío está incluido en cualquier otro.

Hipótesis) A es un conjunto.

Tesis) $\phi \subset A$.

Demostración) Consideramos la siguiente proposición:

$$\forall x : x \in \phi \Rightarrow x \in A$$

la cual es V por ser el antecedente F. En consecuencia, de acuerdo con la definición de inclusión, se tiene $\phi \subset A$.

Nota:

El teorema es válido cualquiera que sea A; en particular, A puede ser vacío.

ii) **Propiedad.** El conjunto vacío es único.

En efecto, suponemos que, además de ϕ, existe ϕ' también vacío. Entonces, de acuerdo con i), es verdadera la proposición

$$\phi' \subset \phi \wedge \phi \subset \phi'$$

y, por definición de igualdad, resulta $\phi' = \phi$

Ejemplo 2-9.

Demostrar $A \subset \phi \Rightarrow A = \phi$.

Como se trata de una igualdad se requieren dos inclusiones.

1°) $\phi \subset A$ por 2.3.5. i).

2°) $A \subset \phi$. Se verifica por hipótesis.

Luego $A = \phi$.

2.4. CONJUNTO DE PARTES

Dado un conjunto A, podemos formar un nuevo conjunto constituido por todos los subconjuntos de A, el cual recibe el nombre de conjunto de partes de A.

Definición

Conjunto de partes de A es el conjunto cuyos elementos son todos subconjuntos de A.

$$\boldsymbol{P}(A) = \{ X / X \subset A \}$$

Los elementos de este conjunto son a su vez conjuntos, y, en consecuencia, $\boldsymbol{P}(A)$ es un conjunto de conjuntos.

De acuerdo con la definición, se tiene

$$X \in \boldsymbol{P}(A) \Leftrightarrow X \subset A$$

El problema de decidir si un objeto es un elemento de $\boldsymbol{P}(A)$ se reduce a determinar si dicho objeto es un subconjunto de A.

De acuerdo con la propiedad reflexiva de la inclusión, cualquiera que sea A, se tiene $A \subset A$, y en consecuencia $A \in \boldsymbol{P}(A)$ por definición de conjunto de partes.

Además, por 2.3.5. i) se sabe que $\phi \subset A$, y por la misma definición $\phi \in \boldsymbol{P}(A)$. Es decir, cualquiera que sea A, el mismo A y el vacío son elementos de $\boldsymbol{P}(A)$.

Ejemplo 2-10.

Determinar el conjunto de partes de $A = \{2, 3, 4\}$

Los elementos de $\boldsymbol{P}(A)$ son todos los subconjuntos de A, es decir

$$\begin{array}{c} \phi \\ \{2\}, \{3\}, \{4\} \\ \{2,3\}, \{2,4\}, \{3,4\} \\ A \end{array}$$

Y la notación por extensión es

$$\boldsymbol{P}(A) = \{ \phi, \{2\}, \{3\}, \{4\}, \{2,3\}, \{2,4\}, \{3,4\}, A \}$$

Ejemplo 2-11.

i) El conjunto de partes del vacío es el conjunto cuyo único elemento es el vacío.

$$\boldsymbol{P}(\phi) = \{ \phi \}$$

ii) La pertenencia relaciona elemento a conjunto, mientras que la inclusión relaciona conjuntos entre sí. Desde este punto de vista, damos los valores de verdad de las siguientes proposiciones relativas al ejemplo 2-10.

$\phi \subset A$	V
$\phi \in A$	F
$\phi \in \boldsymbol{P}(A)$	V

$$\phi \subset P(\mathrm{A}) \qquad \mathrm{V}$$
$$\{2, 3\} \in P(\mathrm{A}) \qquad \mathrm{V}$$
$$2 \in P(\mathrm{A}) \qquad \mathrm{F}$$
$$\{2\} \in P(\mathrm{A}) \qquad \mathrm{V}$$
$$\mathrm{A} \in P(\mathrm{A}) \qquad \mathrm{V}$$
$$\mathrm{A} \in \mathrm{A} \qquad \mathrm{F}$$
$$\mathrm{A} \subset \mathrm{A} \qquad \mathrm{V}$$

Ejemplo 2-12.

Si A tiene n elementos, entonces $P(\mathrm{A})$ tiene 2^n elementos. Se trata de computar el número de subconjuntos de A. Uno de ellos es el vacío. Conjuntos unitarios hay exactamente $n = \binom{n}{1}$, es decir, tantos como combinaciones de n elementos, de orden 1.

El número de subconjuntos de dos elementos es el de combinaciones de n elementos de orden 2, es decir $\binom{n}{2}$.

Subconjuntos ternarios hay $\binom{n}{3}$.

Y así sucesivamente, hasta obtener el único subconjunto de n elementos.

El número total está dado por la suma

$$1 + \binom{n}{2} + \binom{n}{3} + \ldots + \binom{n}{n-1} + 1 = \binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \ldots + \binom{n}{n} =$$
$$= \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} 1^i \cdot 1^{n-i} = (1+1)^n = 2^n$$

En este desarrollo hemos aplicado la fórmula del binomio de Newton, que se justificará en el Capítulo 6.

2.5. COMPLEMENTACION DE CONJUNTOS

Sean A y B subconjuntos de U.

2.5.1. Definición

Complemento de A es el conjunto formado por los elementos de U que no pertenecen a A.

El complemento de A se denotará por A^c; suelen usarse también A' y $\overline{\mathrm{A}}$.

En símbolos

$$\mathrm{A}^c = \{ x \in \mathrm{U} \,/\, x \notin \mathrm{A} \}$$

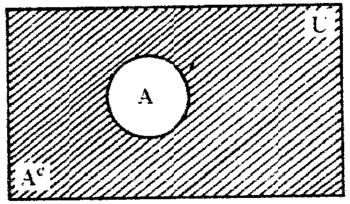
o bien

$$\mathrm{A}^c = \{ x \,/\, x \notin \mathrm{A} \}$$

Se tiene

$$x \in \mathrm{A}^c \Leftrightarrow x \notin \mathrm{A}$$

El diagrama de Venn correspondiente es



La complementación es una operación unitaria, en el sentido de que a partir de un conjunto se obtiene otro.

Es usual también obtener el complemento de un conjunto A, respecto de otro B, en cuyo caso la definición es

$$\mathbf{C}_{\mathbf{B}}\mathrm{A} = \{ x \in \mathrm{B} \,/\, x \notin \mathrm{A} \}$$

En particular se tiene

i) El complementario del vacío es el universal.

$$x \in \mathrm{U} \Rightarrow x \notin \phi \Rightarrow x \in \phi^c$$

O sea $\mathrm{U} \subset \phi^c$

Y como $\phi^c \subset \mathrm{U}$, resulta $\phi^c = \mathrm{U}$

ii) El complementario del universal es el vacío.

$$\mathrm{U}^c = \{ x \,/\, x \in \mathrm{U} \wedge x \notin \mathrm{U} \} = \phi$$

2.5.2. Propiedades de la complementación

I) INVOLUCION. $(\mathrm{A}^c)^c = \mathrm{A}$

Demostración)

$$x \in (\mathrm{A}^c)^c \Leftrightarrow x \notin \mathrm{A}^c \Leftrightarrow \sim (x \in \mathrm{A}^c) \Leftrightarrow \sim (x \notin \mathrm{A}) \Leftrightarrow x \in \mathrm{A}$$

En esta demostración hemos utilizado la definición de complemento y la ley involutiva del cálculo proposicional.

II) $A \subset B \Rightarrow B^c \subset A^c$

Demostración) Utilizando sucesivamente las definiciones de complemento, de inclusión y de complemento, se tiene

$$x \in B^c \Rightarrow x \notin B \Rightarrow x \notin A \Rightarrow x \in A^c$$

Luego $$B^c \subset A^c$$

Ejemplo 2-13.

Demostrar $A = B \Rightarrow A^c = B^c$

$$x \in A^c \Leftrightarrow x \notin A \Leftrightarrow x \notin B \Leftrightarrow x \in B^c$$

En virtud de las definiciones de complemento, igualdad y complemento.

Ejemplo 2-14.

i) Si r es una recta incluida en el plano α, entonces su complemento es el par de semiplanos opuestos abiertos, de borde r.

ii) El complementario del conjunto de los números naturales pares es el conjunto de los naturales impares.

iii) El complementario de **Q** en **R** es el conjunto de los números irracionales.

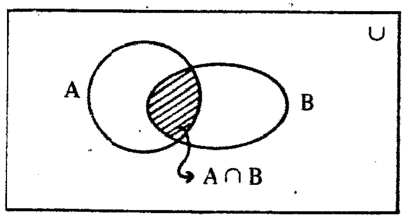
2.6. INTERSECCION DE CONJUNTOS

Sean A y B subconjuntos de U.

2.6.1. Definición

Intersección de dos conjuntos A y B es el conjunto formado por los elementos que pertenecen a A y a B.

El diagrama de Venn correspondiente es



En símbolos se tiene

$$A \cap B = \left\{x \in U \,/\, x \in A \ \wedge \ x \in B\right\}$$

O bien, sobrentendido U

$$A \cap B = \left\{x \,/\, x \in A \ \wedge \ x \in B\right\}$$

La intersección entre conjuntos es una operación binaria, porque a partir de dos conjuntos se obtiene un tercero.

La propiedad que caracteriza a los elementos de la intersección es la de pertenecer simultáneamente a los dos conjuntos, y se establece en términos de una conjunción.

La definición de intersección establece

$$x \in A \cap B \Leftrightarrow x \in A \ \wedge \ x \in B$$

Si la intersección de dos conjuntos es vacía, dichos conjuntos se llaman disjuntos.

$$A \text{ y } B \text{ son disjuntos} \Leftrightarrow A \cap B = \phi$$

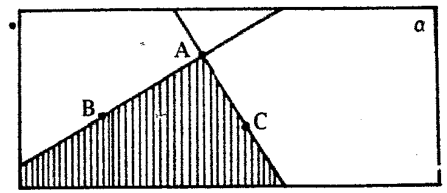
Ejemplo 2-15.

i) Si r y r' son dos rectas distintas incluidas en un plano, entonces su intersección puede ser vacía, o bien reducirse a un punto. En el primer caso son paralelas, y en el segundo caso se llaman incidentes.

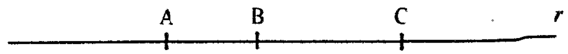
ii) Sean dos rectas AC y AB, donde A, B y C son tres puntos no alineados pertenecientes al plano α. Quedan definidos los conjuntos

S (AB , C) : semiplano de borde AB que pasa por C
S (AC , B) : semiplano de borde AC que pasa por B

Entonces el conjunto S (AB , C) ∩ S (AC , B) es el ángulo convexo BAC



iii) Consideremos tres puntos distintos A, B y C pertenecientes a la recta r:



Las semirrectas S (A , B) (de origen A que pasa por B), S (A , C) y S (C , B) son subconjuntos de r, tales que

$$S(A,C) \cap S(C,B) = \overline{AC}$$
$$S(A,C) \cap S(A,B) = S(A,C) = S(A,B)$$

iv) La intersección entre el conjunto de los números enteros pares y el conjunto de los números impares es vacía, ya que no existe ningún entero que sea simultáneamente par e impar.

v) En **Z**, la intersección entre el conjunto de los números pares y el conjunto de los números primos es el conjunto $\{-2, 2\}$

2.6.2. Propiedades de la intersección

I) IDEMPOTENCIA: $A \cap A = A$.

En efecto

$$x \in A \cap A \Leftrightarrow x \in A \ \wedge \ x \in A \Leftrightarrow x \in A$$

II) ASOCIATIVIDAD: $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$.

Utilizando la definición de intersección, y la asociatividad de la conjunción, se tiene

$$x \in (A \cap B) \cap C \Leftrightarrow x \in A \cap B \ \wedge \ x \in C \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow (x \in A \ \wedge \ x \in B) \ \wedge \ x \in C \Leftrightarrow x \in A \ \wedge \ (x \in B \ \wedge \ x \in C) \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow x \in A \ \wedge \ x \in B \cap C \Leftrightarrow x \in A \cap (B \cap C)$$

III) CONMUTATIVIDAD: $A \cap B = B \cap A$.

La demostración es obvia aplicando la definición de intersección y la conmutatividad de la conjunción.

IV) ELEMENTO NEUTRO PARA LA INTERSECCION ES EL UNIVERSAL.

La intersección opera sobre elementos de P (U), es decir, sobre subconjuntos de U. Interesa determinar si existe un subconjunto de U cuya intersección con cualquier otro no lo altere. Tal elemento de P(U) se llama neutro para la intersección, y en nuestro caso es el mismo U. En efecto

cualquiera que sea $A \subset U$, se verifica $A \cap U = U \cap A = A$

Ejemplo 2-16.

La propiedad IV es un corolario del siguiente teorema

$$A \subset B \Leftrightarrow A \cap B = A$$

Por tratarse de una condición necesaria y suficiente realizamos las demostraciones de las dos implicaciones:

i) $A \subset B \Rightarrow A \cap B = A$

Con la información proporcionada por la hipótesis $A \subset B$, tenemos que demostrar la igualdad $A \cap B = A$. Por definición de igualdad hemos de probar dos inclusiones:

a) Sea $x \in U$ tal que $x \in A \cap B$. Ahora bien

$$x \in A \cap B \Rightarrow x \in A \ \wedge \ x \in B \Rightarrow x \in A$$

por definición de intersección, y ley lógica $p \wedge q \Rightarrow p$.

En consecuencia $A \cap B \subset A$ (1).

La relación (1) nos dice que la intersección entre dos conjuntos está incluida en cualquiera de ellos.

b) Sea ahora

$$x \in A \Rightarrow x \in A \ \wedge \ x \in B \Rightarrow x \in A \cap B$$

por la hipótesis y por definición de intersección.

Entonces se verifica $A \subset A \cap B$ (2).

De (1) y (2) resulta $A \cap B = A$.

ii) $A \cap B = A \Rightarrow A \subset B$

Para demostrar que $A \subset B$, consideramos

$$x \in A \Rightarrow x \in A \cap B \Rightarrow x \in A \ \wedge \ x \in B \Rightarrow x \in B$$

pues por hipótesis $A = A \cap B$; hemos utilizado además la definición de intersección y la ley lógica $p \wedge q \Rightarrow q$.

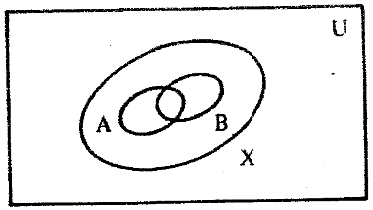
Queda probado así que $A \subset B$.

Nótese que en i) a) no hemos hecho uso de la hipótesis, pero sí en b). Esto nos dice que la proposición $A \cap B \subset A$ es independiente de toda condición, es decir, es una propiedad intrínseca de la intersección.

Ejemplo 2-17.

Demostraremos que si dos conjuntos están incluidos en un tercero, entonces la intersección de los dos primeros es parte del tercero.

Esto se "ve" en el diagrama



$$A \subset X \ \wedge \ B \subset X \Rightarrow A \cap B \subset X$$

Lo demostramos así

$$x \in A \cap B \Rightarrow x \in A \ \wedge \ x \in B \Rightarrow x \in X \ \wedge \ x \in X \Rightarrow x \in X$$

Hemos aplicado sucesivamente la definición de intersección, la hipótesis y la ley lógica $p \wedge p \Rightarrow p$.

Ejemplo 2-18.

Demostrar que el conjunto de partes de la intersección es igual a la intersección de los conjuntos de partes.

$$P(A \cap B) = P(A) \cap P(B)$$

En efecto: teniendo en cuenta que los elementos de las partes de un conjunto son subconjuntos, consideramos

$$X \in P(A \cap B) \Leftrightarrow X \subset A \cap B \Leftrightarrow X \subset A \ \wedge \ X \subset B \Leftrightarrow X \in P(A) \ \wedge \ X \in P(B)$$
$$\Leftrightarrow X \in P(A) \cap P(B)$$

por definición de conjunto de partes; teniendo en cuenta i) a) del ejemplo 2-16, la transitividad de la relación de inclusión, la definición de conjunto de partes y la definición de intersección.

2.7. UNION DE CONJUNTOS

2.7.1. Definición

Unión de dos conjuntos A y B es el conjunto formado por los elementos que pertenecen a A o a B.

Simbólicamente se indica

$$A \cup B = \{ x \in U \,/\, x \in A \ \vee \ x \in B \}$$

Prescindiendo del universal

$$A \cup B = \{ x \,/\, x \in A \ \vee \ x \in B \}$$

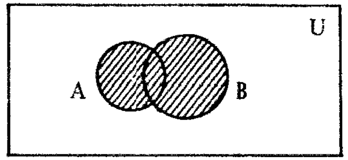
La unión de conjuntos, lo mismo que la intersección, es una operación binaria definida en el conjunto de partes de U.

De acuerdo con la definición, podemos escribir

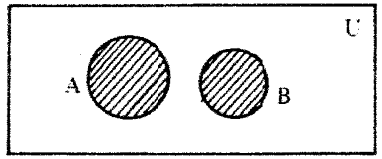
$$a \in A \cup B \Rightarrow a \in A \ \vee \ a \in B$$

El "o" utilizado es incluyente, y pertenecen a la unión aquellos elementos de U para los cuales es verdadera la disyunción; entonces un elemento pertenece a la unión si y sólo si pertenece a alguno de los dos conjuntos.

El diagrama correspondiente es



A la unión pertenecen todos los elementos de los conjuntos dados. En el caso disjunto se tiene



donde la parte sombreada es $A \cup B$.

Es claro que todo conjunto está contenido en su unión con cualquier otro. En efecto

$$x \in A \Rightarrow x \in A \ \vee \ x \in B \Rightarrow x \in A \cup B$$

en virtud de la ley lógica $p \Rightarrow p \vee q$, y de la definición de unión. Entonces

$$A \subset A \cup B \quad \text{como queríamos.}$$

Ejemplo 2-19.

i) La unión de un par de rectas r y r' contenidas en un plano es el par de rectas.

ii) La unión de dos semiplanos opuestos y cerrados es el plano.

iii) Sean los puntos A, B y C, como en el ejemplo 2-15. iii). Se tiene

$$S(B, A) \cup S(B, C) = r$$
$$S(A, B) \cup S(B, C) = S(A, B)$$

2.7.2. Propiedades de la unión

I) IDEMPOTENCIA. Cualquiera que sea A, se verifica

$$A \cup A = A$$

Pues $\quad x \in A \cup A \Leftrightarrow x \in A \ \vee \ x \in A \Leftrightarrow x \in A$

por definición de unión, y la ley lógica $p \vee p \Leftrightarrow p$.

II) ASOCIATIVIDAD. Cualesquiera que sean A, B y C

$$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$$

La demostración es análoga a la propuesta en el caso de la asociatividad de la intersección, utilizando ahora la definición de unión y propiedades de la disyunción.

III) CONMUTATIVIDAD. Para todo par de subconjuntos de U, se verifica

$$A \cup B = B \cup A$$

pues $x \in A \cup B \Leftrightarrow x \in A \ \vee \ x \in B \Leftrightarrow x \in B \ \vee \ x \in A \Leftrightarrow x \in B \cup A$

IV) ELEMENTO NEUTRO PARA LA UNION ES EL CONJUNTO VACIO.

Es decir, cualquiera que sea $A \subset U$, se tiene

$$A \cup \phi = \phi \cup A = A$$

Tratamos sólo el caso $A \cup \phi = A$, ya que la conmutatividad nos exime de la otra situación.

Sabemos por 2.7.1. que $A \subset A \cup \phi$ (1)

Sea ahora $x \in A \cup \phi \Rightarrow x \in A \ \vee \ x \in \phi \Rightarrow x \in A$

por definición de unión, y por ser falso $x \in \phi$.

Luego $A \cup \phi \subset A$ (2)

Por (1) y (2) resulta la igualdad propuesta.

Ejemplo 2-20.

Demostrar $A \subset B \Leftrightarrow A \cup B = B$.

Seguimos el mismo esquema empleado en el ejemplo 2-16.

i) Hipótesis) $A \subset B$

Tesis) $A \cup B = B$

Demostración) Como cada conjunto está contenido en su unión con cualquier otro, según 2.7.1., se tiene

$$B \subset A \cup B \qquad (1)$$

Consideremos ahora

$$x \in A \cup B \Rightarrow x \in A \ \vee \ x \in B \Rightarrow x \in B \ \vee \ x \in B \Rightarrow x \in B$$

por definición de unión, por hipótesis y por la ley $p \vee p \Rightarrow p$.

Entonces: $A \cup B \subset B$ (2)

De (1) y (2) resulta $A \cup B = B$

ii) Hipótesis) $A \cup B = B$

Tesis) $A \subset B$

Demostración) $x \in A \Rightarrow x \in A \cup B \Rightarrow x \in B$

porque si un elemento pertenece a un conjunto, entonces pertenece a su unión con cualquiera y además por hipótesis, ya que $A \cup B = B$.

Es decir: $A \subset B$.

Ejemplo 2-21.

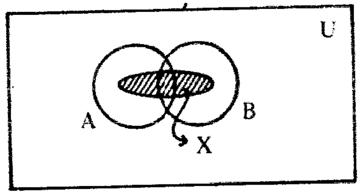
i) Demostrar $X \subset A \ \wedge \ X \subset B \Rightarrow X \subset A \cup B$.

En efecto, sea

$$x \in X \Rightarrow x \in A \ \vee \ x \in B \Rightarrow x \in A \cup B$$

lo que es cierto por hipótesis y definición de unión.

ii) La implicación anterior no admite recíproca verdadera, ya que puede darse que $X \subset A \cup B$, y sin embargo $X \not\subset A$ y $X \not\subset B$, como puede verse en el diagrama siguiente



iii) Demostrar $P(A) \cup P(B) \subset P(A \cup B)$.

Consideremos

$$X \in P(A) \cup P(B) \Rightarrow X \in P(A) \ \vee \ X \in P(B) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow X \subset A \ \vee \ X \subset B \Rightarrow X \subset A \cup B \Rightarrow X \in P(A \cup B)$$

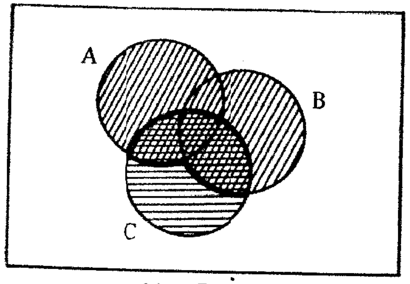
por definición de unión, de conjunto de partes, propiedad i), y definición de conjunto de partes.

2.8. LEYES DISTRIBUTIVAS

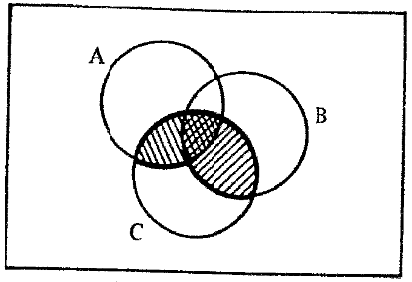
La unión e intersección de conjuntos pueden conectarse a través de dos propiedades fundamentales, llamadas leyes distributivas, que se expresan mediante las fórmulas

$$(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$$
$$(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C)$$

Vamos a verificar, mediante diagramas de Venn, la primera de estas leyes. Los dibujos corresponden al primero y al segundo miembro de la igualdad.



$(A \cup B) \cap C$



$(A \cap C) \cup (B \cap C)$

Las demostraciones formales son las siguientes:

2.8.1. Distributividad de la intersección respecto de la unión

$$x \in (A \cup B) \cap C \Leftrightarrow x \in A \cup B \ \wedge \ x \in C \Leftrightarrow (x \in A \ \vee \ x \in B) \ \wedge \ x \in C \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow (x \in A \ \wedge \ x \in C) \ \vee \ (x \in B \ \wedge \ x \in C) \Leftrightarrow x \in A \cap C \ \vee \ x \in B \cap C \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow x \in (A \cap C) \cup (B \cap C)$$

por definiciones de intersección y de unión, y distributividad de la conjunción respecto de la disyunción.

2.8.2. Distributividad de la unión respecto de la intersección

$$x \in (A \cap B) \cup C \Leftrightarrow x \in A \cap B \ \vee \ x \in C \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow (x \in A \ \wedge \ x \in B) \ \vee \ x \in C \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow (x \in A \ \vee \ x \in C) \ \wedge \ (x \in B \ \vee \ x \in C) \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow x \in A \cup C \ \wedge \ x \in B \cup C \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow x \in (A \cup C) \cap (B \cup C)$$

Se han utilizado las definiciones de unión, de intersección, y la ley distributiva de la disyunción respecto de la conjunción.

2.9. LEYES DE DE MORGAN

Estas leyes, de gran aplicación, permiten relacionar la complementación con la unión e intersección.

2.9.1. Teorema. El complemento de la unión de dos conjuntos es igual a la intersección de sus complementos.

Tesis) $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$

Demostración) $x \in (A \cup B)^c \Leftrightarrow x \notin A \cup B \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \sim (x \in A \cup B) \Leftrightarrow \sim (x \in A \ \vee \ x \in B) \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow x \notin A \ \wedge \ x \notin B \Leftrightarrow x \in A^c \ \wedge \ x \in B^c \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow x \in A^c \cap B^c$$

Por definición de complemento, de unión, negación de una disyunción, y definición de intersección.

2.9.2. Teorema. El complemento de la intersección de dos conjuntos es igual a la unión de sus complementos.

Tesis) $(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$

Demostración) $x \in (A \cap B)^c \Leftrightarrow x \notin A \cap B \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \sim (x \in A \cap B) \Leftrightarrow \sim (x \in A \ \wedge \ x \in B) \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow x \notin A \ \vee \ x \notin B \Leftrightarrow x \in A^c \ \vee \ x \in B^c \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow x \in A^c \cup B^c$$

De acuerdo con las definiciones de complemento, de intersección, negación de una conjunción y definición de unión.

Ejemplo 2-22.

Demostrar la equivalencia de las siguientes proposiciones:

$$A \subset B \quad ; \quad B^c \subset A^c \quad ; \quad A \cup B = B \quad ; \quad A \cap B = A$$

De acuerdo con lo establecido en el Capítulo 1, para demostrar la equivalencia de una cadena de n proposiciones, es suficiente probar n implicaciones. En nuestro caso

$$p \Rightarrow q \Rightarrow r \Rightarrow s \Rightarrow p$$

1°) $A \subset B \Rightarrow B^c \subset A^c$

En efecto $x \in B^c \Rightarrow x \notin B \Rightarrow x \notin A \Rightarrow x \in A^c$

por definición de complemento, por hipótesis y definición de complemento.

2°) $B^c \subset A^c \Rightarrow A \cup B = B$

$$\text{Sea } x \in A \cup B \Rightarrow x \in A \ \vee \ x \in B \Rightarrow$$
$$\Rightarrow x \notin A^c \ \vee \ x \in B \Rightarrow x \notin B^c \ \vee \ x \in B \Rightarrow$$
$$\Rightarrow x \in B \ \vee \ x \in B \Rightarrow x \in B$$

por definiciones de unión y de complemento, por hipótesis, definición de complemento y ley lógica $p \vee p \Rightarrow p$.

Así

$$A \cup B \subset B \qquad (1)$$

Por otra parte

$$B \subset A \cup B \qquad (2)$$

ya que todo conjunto es parte de su unión con cualquier otro.

De (1) y (2) resulta $A \cup B = B$

3º) $A \cup B = B \Rightarrow A \cap B = A$

a) Como la intersección está incluida en cualquiera de los dos conjuntos, se tiene

$$A \cap B \subset A \qquad (1)$$

b) Sea $x \in A \Rightarrow x \in A \cup B \Rightarrow x \in B$

pues $A \subset A \cup B$ y por hipótesis

Entonces

$$x \in A \Rightarrow x \in A \;\wedge\; x \in B \Rightarrow x \in A \cap B$$

Es decir $\qquad A \subset A \cap B \qquad (2)$

Por (1) y (2) resulta

$$A \cap B = A$$

4º) $A \cap B = A \Rightarrow A \subset B$

Está demostrado en el ejemplo 2-16 ii)

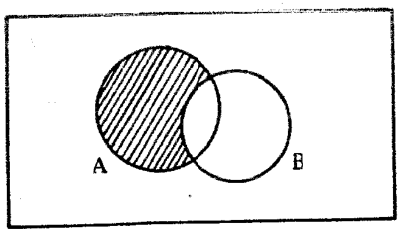
2.10. DIFERENCIA DE CONJUNTOS

2.10.1. Definición

Diferencia entre dos conjuntos A y B es el conjunto formado por los elementos de A que no pertenecen a B.

$$A - B = \left\{ x \,/\, x \in A \;\wedge\; x \notin B \right\}$$

El diagrama correspondiente es



Es claro que $A - B \neq B - A$; es decir, la diferencia de conjuntos no es conmutativa.

Ejemplo 2-23.

i) Considerando como universal al conjunto de los puntos del plano, la diferencia entre la recta r y el segmento AB es la unión de las semirrectas abiertas AM y BN

ii) La diferencia entre el conjunto de los números pares y el conjunto de los números primos es el conjunto de los números enteros del tipo $x = 2 \cdot k$ siendo $k \neq \pm 1$.

2.10.2. Propiedad. La diferencia entre dos conjuntos es igual a la intersección del primero con el complemento del segundo.

Se trata de probar que $A - B = A \cap B^c$.

En efecto, aplicando sucesivamente las definiciones de diferencia, complementación e intersección, se tiene

$$A - B = \left\{ x \,/\, x \in A \;\wedge\; x \notin B \right\} = \left\{ x \,/\, x \in A \;\wedge\; x \in B^c \right\} = A \cap B^c$$

Ejemplo 2-24.

Demostrar $\quad B \subset A \Leftrightarrow (A - B) \cup B = A$

$$(A - B) \cup B = (A \cap B^c) \cup B = (A \cup B) \cap (B^c \cup B) =$$

$$= (A \cup B) \cap U = A \cup B = A$$

Por 2.10.2, distributividad de la unión respecto de la intersección, por ser $B^c \cup B = U$, por neutro para la intersección y lo demostrado en el ejemplo 2-20.

Ejemplo 2-25.

Demostrar la distributividad de la intersección respecto de la diferencia, es decir

$$A \cap (B - C) = (A \cap B) - (A \cap C)$$

En lugar de seguir el método general de probar las dos inclusiones, vamos a trasformar cada miembro de la igualdad utilizando las propiedades demostradas.

Así

$$A \cap (B - C) = A \cap (B \cap C^c) = A \cap B \cap C^c \qquad (1)$$

por 2.10.2 y asociatividad de la intersección. Considerando el segundo miembro y aplicando 2.10.2, ley de De Morgan, distributividad de la intersección respecto de la unión

$$(A \cap B) - (A \cap C) = (A \cap B) \cap (A \cap C)^c =$$
$$= (A \cap B) \cap (A^c \cup C^c) =$$
$$= (A \cap B \cap A^c) \cup (A \cap B \cap C^c) =$$
$$= \phi \cup (A \cap B \cap C^c) = A \cap B \cap C^c \qquad (2)$$

De (1) y (2) resulta

$$A \cap (B - C) = (A \cap B) - (A \cap C)$$

2.11. DIFERENCIA SIMETRICA

Sean A y B dos subconjuntos de U.

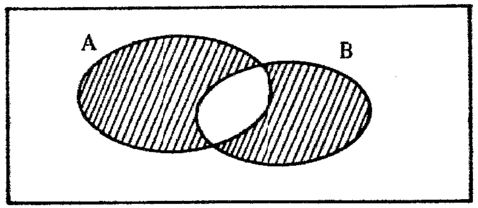
2.11.1. Definición

Diferencia simétrica de los conjuntos A y B es la unión de los conjuntos A − B y B − A.

La notación es

$$A \;\triangle\; B = (A - B) \cup (B - A) \qquad (1)$$

y el diagrama correspondiente



Otra identificación de la diferencia simétrica es

$$A \;\triangle\; B = (A \cap B^c) \cup (B \cap A^c) \qquad (2)$$

que se deduce como consecuencia inmediata de la definición, teniendo en cuenta que la diferencia entre dos conjuntos es igual a la intersección del primero con el complemento del segundo, según 2.10.2.

Resulta también

$$A \;\triangle\; B = (A \cup B) - (A \cap B) \qquad (3)$$

En efecto

$$A \;\triangle\; B = (A - B) \cup (B - A) = (A \cap B^c) \cup (B \cap A^c) =$$
$$= [(A \cap B^c) \cup B] \cap [(A \cap B^c) \cup A^c] =$$
$$= (A \cup B) \cap (B^c \cup B) \cap (A \cup A^c) \cap (B^c \cup A^c) =$$
$$= (A \cup B) \cap U \cap U \cap (A^c \cup B^c) =$$
$$= (A \cup B) \cap (A^c \cup B^c) = (A \cup B) \cap (A \cap B)^c = (A \cup B) - (A \cap B)$$

De acuerdo con (2), por ley distributiva de la unión respecto de la intersección, por ser $B^c \cup B = A \cup A^c = U$, por ser U neutro para la intersección, por conmutatividad de la unión, por ley de De Morgan y por 2.10.2.

Las expresiones alternativas para la diferencia simétrica son

$$A \;\triangle\; B = (A - B) \cup (B - A) = (A \cap B^c) \cup (B \cap A^c) =$$
$$= (A \cup B) - (A \cap B) = (A \cup B) \cap (A \cap B)^c$$

2.11.2. Propiedades de la diferencia simétrica

I) CONMUTATIVIDAD

$$A \;\triangle\; B = (A - B) \cup (B - A) = (B - A) \cup (A - B) = B \;\triangle\; A$$

II) EXISTENCIA DE NEUTRO. En ***P*** (U), el vacío es neutro para la diferencia simétrica. En efecto

$$A \triangle \phi = (A - \phi) \cup (\phi - A) = A \cup \phi = A = \phi \triangle A$$

III) EXISTENCIA DE INVERSOS. En una operación entre elementos de un conjunto (en este caso el conjunto es ***P*** (U), los elementos son los subconjuntos de U y la operación es la diferencia simétrica), interesa determinar si, dado un conjunto, existe otro cuya diferencia simétrica con él es el neutro. Afirmamos que todo conjunto $A \subset U$ admite al mismo A como inverso respecto de la diferencia simétrica.
En efecto

$$A \triangle A = (A - A) \cup (A - A) = \phi \cup \phi = \phi$$

IV) ASOCIATIVIDAD. Cualesquiera que sean A, B y C pertenecientes a ***P*** (U) se verifica

$$(A \triangle B) \triangle C = A \triangle (B \triangle C)$$

Demostración)

$$(A \triangle B) \triangle C = [(A \triangle B) \cap C^c] \cup [(A \triangle B)^c \cap C] =$$
$$= \left\{ [(A \cap B^c) \cup (A^c \cap B)] \cap C^c \right\} \cup \left\{ [(A \cup B) \cap (A \cap B)^c]^c \cap C \right\} =$$
$$= (A \cap B^c \cap C^c) \cup (A^c \cap B \cap C^c) \cup \left\{ [(A \cup B)^c \cup (A \cap B)] \cap C \right\} =$$

$$= (A \cap B^c \cap C^c) \cup (A^c \cap B \cap C^c) \cup (A^c \cap B^c \cap C) \cup (A \cap B \cap C) =$$
$$= (A \cap B \cap C) \cup (A \cap B^c \cap C^c) \cup (A^c \cap B \cap C^c) \cup (A^c \cap B^c \cap C) \qquad (1)$$

En este desarrollo se han utilizado las consecuencias de la definición de diferencia simétrica, leyes de De Morgan, distributividad de la intersección respecto de la unión y la conmutatividad.

Desarrollamos ahora el segundo miembro aplicando la conmutatividad de la diferencia simétrica y utilizando el resultado anterior

$$A \triangle (B \triangle C) = (B \triangle C) \triangle A =$$
$$= (B \cap C \cap A) \cup (B \cap C^c \cap A^c) \cup (B^c \cap C \cap A^c) \cup (B^c \cap C^c \cap A) =$$
$$= (A \cap B \cap C) \cup (A^c \cap B \cap C^c) \cup (A^c \cap B^c \cap C) \cup (A \cap B^c \cap C^c) \qquad (2)$$

De (1) y (2) resulta

$$(A \triangle B) \triangle C = A \triangle (B \triangle C)$$

Ejemplo 2-26.

i) La diferencia simétrica entre los intervalos reales

$$[1, \infty) \triangle (-\infty, 3] = (3, \infty) \cup (-\infty, 1)$$

ii) En cambio

$$(1, \infty) \triangle (-\infty, 3) = [3, \infty) \cup (-\infty, 1]$$

Ejemplo 2-27.

Demostrar la ley cancelativa de la diferencia simétrica, es decir

$$A \triangle B = A \triangle C \Rightarrow B = C$$

En efecto

$$A \triangle B = A \triangle C \Rightarrow A \triangle (A \triangle B) = A \triangle (A \triangle C) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow (A \triangle A) \triangle B = (A \triangle A) \triangle C \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \phi \triangle B = \phi \triangle C \Rightarrow B = C$$

Ejemplo 2-28.

Demostrar la distributividad de la intersección respecto de la diferencia simétrica.
Tesis) $(A \triangle B) \cap C = (A \cap C) \triangle (B \cap C)$
Demostración) Desarrollamos los dos miembros por separado

$$(A \triangle B) \cap C = [(A \cap B^c) \cup (A^c \cap B)] \cap C =$$
$$= (A \cap B^c \cap C) \cup (A^c \cap B \cap C) \qquad (1)$$

$$(A \cap C) \triangle (B \cap C) = [(A \cap C) \cap (B \cap C)^c] \cup [(A \cap C)^c \cap (B \cap C)] =$$
$$= [(A \cap C) \cap (B^c \cup C^c)] \cup [(A^c \cup C^c) \cap (B \cap C)] =$$
$$= (A \cap C \cap B^c) \cup (A \cap C \cap C^c) \cup (A^c \cap B \cap C) \cup (C^c \cap B \cap C) =$$
$$= (A \cap B^c \cap C) \cup \phi \cup (A^c \cap B \cap C) \cup \phi =$$
$$= (A \cap B^c \cap C) \cup (A^c \cap B \cap C) \qquad (2)$$

Hemos utilizado las alternativas de la definición de diferencia simétrica, la distributividad de la intersección respecto de la unión, una ley de De Morgan, la conmutatividad de la intersección, la definición de conjuntos disjuntos y la neutralidad del ϕ para la unión.

2.12. PRODUCTO CARTESIANO

2.12.1 Par ordenado

Dados dos elementos a y b interesa formar un conjunto que dependa de dichos elementos y del orden en que se consideran.

Definición

Par ordenado (a, b) es el conjunto cuyos elementos son $\{a\}$ y $\{a, b\}$

$$(a, b) = \{\{a\}, \{a, b\}\}$$

a y b son la primera y la segunda componentes del par ordenado.

En particular se tiene

$$(a, a) = \{\{a\}, \{a, a\}\} = \{\{a\}\}$$

Si $a \neq b$, entonces $(a, b) \neq (b, a)$

Queda como ejercicio la siguiente propiedad: dos pares ordenados son iguales si y sólo si tienen sus componentes respectivamente iguales.

2.12.2. Definición

Producto cartesiano de dos conjuntos A y B es el conjunto cuyos elementos son todos los pares ordenados cuya primera componente pertenece a A y la segunda a B.

En símbolos

$$A \times B = \{(a, b) \mid a \in A \wedge b \in B\}$$

En particular

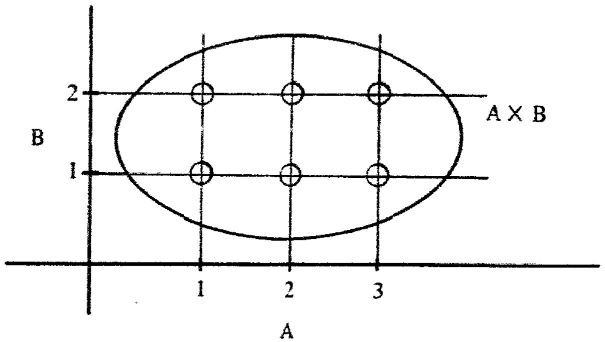
$$A \times A = A^2 = \{(a, b) / a \in A \wedge b \in A\}$$

Ejemplo 2-29.

i) Producto cartesiano de $A = \{1, 2, 3\}$ y $B = \{1, 2\}$

$$A \times B = \{(1, 1), (1, 2), (2, 1), (2, 2), (3, 1), (3, 2)\}$$

ii) Por ser pares ordenados, los elementos del producto cartesiano de dos conjuntos pueden representarse mediante puntos del plano cuya abscisa y ordenada son, respectivamente, la primera y la segunda componente.



Los vértices de la cuadrícula obtenida son los elementos del producto cartesiano.

iii) El producto cartesiano no es conmutativo, pues

$$(3, 1) \in A \times B \text{ y } (3, 1) \notin B \times A \Rightarrow$$
$$\Rightarrow A \times B \neq B \times A$$

Ejemplo 2-30.

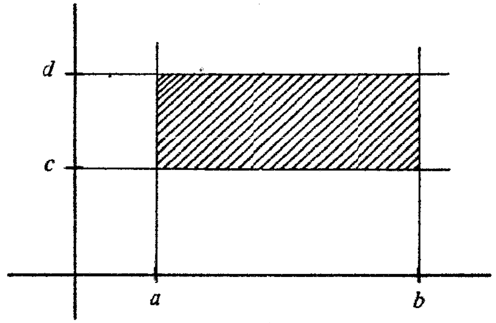
Sean los intervalos cerrados de números reales

$$[a, b] = \{x \in \mathbf{R} / a \leq x \leq b\}$$
$$[c, d] = \{y \in \mathbf{R} / c \leq y \leq d\}$$

Entonces

$$[a, b] \times [c, d] = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 / a \leq x \leq b \wedge c \leq y \leq d\}$$

es el rectángulo cuyos lados son dichos intervalos.



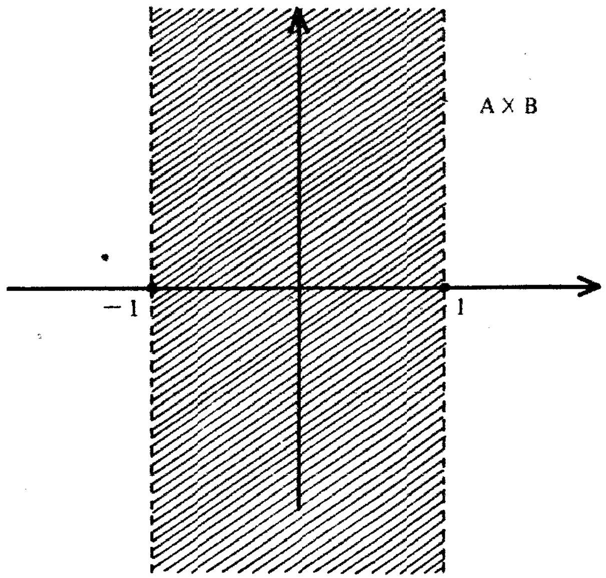
Ejemplo 2-31.

Sean $A = \{x \in \mathbf{R} / |x| < 1\}$ y $B = \mathbf{R}$

Entonces

$$A \times B = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 / -1 < x < 1 \wedge y \in \mathbf{R}\}$$

es la faja abierta de la figura



Ejemplo 2-32.

El producto cartesiano es distributivo respecto de la unión

$$(A \cup B) \times C = (A \times C) \cup (B \times C)$$

En efecto

$$\begin{aligned}
&(x, y) \in (A \cup B) \times C \Leftrightarrow x \in A \cup B \ \wedge \ y \in C \Leftrightarrow \\
&\Leftrightarrow (x \in A \ \vee \ x \in B) \ \wedge \ y \in C \Leftrightarrow \\
&\Leftrightarrow (x \in A \ \wedge \ y \in C) \ \vee \ (x \in B \ \wedge \ y \in C) \Leftrightarrow \\
&\Leftrightarrow (x, y) \in A \times C \ \vee \ (x, y) \in B \times C \Leftrightarrow \\
&\Leftrightarrow (x, y) \in (A \times C) \cup (B \times C)
\end{aligned}$$

Hemos aplicado, sucesivamente: definiciones de producto cartesiano, de unión, distributividad de la conjunción respecto de la unión, definiciones de producto cartesiano y de unión.

El producto cartesiano de tres conjuntos se define mediante

$$A \times B \times C = (A \times B) \times C$$

Sus elementos son ternas ordenadas.

Como caso particular, se tiene

$$A^3 = A \times A \times A = \left\{ (x, y, z) \,/\, x \in A \ \wedge \ y \in A \ \wedge \ z \in A \right\}$$

En este caso, la representación es espacial.

2.13. OPERACIONES GENERALIZADAS

Sea $\{A_1, A_2, \ldots, A_n\}$ un conjunto finito de conjuntos; en este caso podemos formar la unión e intersección de dicha familia, es decir

$$A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n = \bigcup_{i=1}^{n} A_i$$

$$A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n = \bigcap_{i=1}^{n} A_i$$

donde los segundos miembros denotan abreviadamente tales operaciones.

Si consideramos $I_n = \{1, 2, \ldots, n\}$, entonces escribimos

$$\bigcup_{i \in I_n} A_i = \bigcup_{i=1}^{n} A_i$$

$$\bigcap_{i \in I_n} A_i = \bigcap_{i=1}^{n} A_i$$

I_n es un intervalo natural inicial (conjunto de los n primeros números naturales) y se llama un conjunto de índices.

Si el conjunto de índices I se identifica con **N**, es decir, $I = \{1, 2, 3, \ldots, n, \ldots\}$, entonces la familia de conjuntos $\{A_1, A_2, \ldots, A_n, \ldots\}$ se llama sucesión de conjuntos y la notación es

$$\bigcup_{i \in I} A_i = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$$

$$\bigcap_{i \in I} A_i = \bigcap_{i=1}^{\infty} A_i$$

También puede abreviarse la notación de la familia de conjuntos

$$\{A_1, A_2, \ldots, A_n\} = \{A_i\}_{i \in I}$$

2.13.1. Sea $\{A_i\}_{i \in I}$ una familia de conjuntos.

Definición

Unión de la familia $\{A_i\}_{i \in I}$ es el conjunto

$$\bigcup_{i \in I} A_i = \{ x \,/\, \exists\, i \in I \ \wedge \ x \in A_i \}$$

Es decir, un elemento pertenece a la unión de la familia si y sólo si pertenece a alguno de los conjuntos de dicha familia.

2.13.2. Definición

Intersección de la familia $\{A_i\}_{i \in I}$ es el conjunto

$$\bigcap_{i \in I} A_i = \{ x \,/\, x \in A_i, \forall i \}$$

Un elemento pertenece a la intersección si y sólo si pertenece a todos los conjuntos de dicha familia.

Para las uniones e intersecciones generalizadas subsisten las propiedades del caso binario. En particular las leyes de De Morgan son

$$\left(\bigcup_{i \in I} A_i \right)^c = \bigcap_{i \in I} A_i^c$$

$$\left(\bigcap_{i \in I} A_i \right)^c = \bigcup_{i \in I} A_i^c$$

Ejemplo 2-33.

Operaciones con intervalos reales

i) $\displaystyle\bigcup_{i=1}^{\infty}[i-1\,,i)=[0,1)\cup[1,2)\cup[2,3)\cup\ldots=$

$$=\mathbf{R}^{+}\cup\{0\}=[0,\infty)$$

donde R^{+} denota el conjunto de los números reales positivos.

ii) $\displaystyle\bigcap_{i=1}^{\infty}\left(-\frac{1}{i}\,,\,\frac{1}{i}\right)=(-1,1)\cap\left(-\frac{1}{2}\,,\,\frac{1}{2}\right)\cap\ldots=\{0\}$

iii) $\displaystyle\bigcap_{i=1}^{\infty}\left(0\,,\,\frac{1}{i}\right)=(0,1)\cap\left(0\,,\,\frac{1}{2}\right)\cap\left(0\,,\,\frac{1}{3}\right)\cap\ldots=\phi$

2.14. UNIONES DISJUNTAS

En Probabilidades se utilizan uniones de conjuntos disjuntos y en lugar de utilizar las notaciones

$$A\cup B \quad \text{para el caso} \quad A\cap B=\phi$$

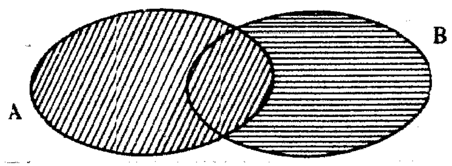
es usual escribir

$$A+B$$

símbolo que indica una unión disjunta.

Si se tiene una unión arbitraria de conjuntos, ésta puede expresarse como unión disjunta de la siguiente manera

$$A\cup B=A+A^{c}\cap B$$



Consideremos ahora la unión de tres conjuntos A_1, A_2 y A_3; la podemos expresar como unión disjunta mediante

$$\bigcup_{i=1}^{3}A_i=A_1+A_1^c\cap A_2+A_1^c\cap A_2^c\cap A_3$$

Indicando con el símbolo Σ la unión en el caso disjunto, la expresión anterior en el caso de una sucesión de conjuntos puede escribirse así

$$\bigcup_{i\in N}A_i=A_1+\sum_{j=2}^{\infty}A_1^c\cap A_2^c\cap\ldots\cap A_{j-1}^c\cap A_j$$

Se trata de probar esta igualdad.

a) El segundo miembro es una unión disjunta.
Sean dos términos de la sumatoria con $i\neq j$, por ejemplo: $i<j$. Se tiene

$$(A_1^c\cap\ldots\cap A_{i-1}^c\cap A_i)\cap(A_1^c\cap\ldots\cap A_i^c\cap\ldots\cap A_{j-1}^c\cap A_j)=$$
$$=\phi \text{ pues } A_i\cap A_i^c=\phi$$

b) Todo elemento del primer miembro pertenece al segundo.

$$\text{Sea } x\in\bigcup_{i\in N}A_i\Rightarrow\exists\, i\in N\,/\,x\in A_i$$

Si k es el menor entero positivo para el cual $x\in A_k$, se tiene $x\notin A_1\cup A_2\cup\ldots\cup A_{k-1}$ ya que x no pertenece a ningún A_i con $i<k$.

Luego

$$x\in(A_1\cup A_2\cup\ldots\cup A_{k-1})^c\Rightarrow$$
$$\Rightarrow x\in A_1^c\cap A_2^c\cap\ldots\cap A_{k-1}^c \text{ y como } x\in A_k\Rightarrow$$
$$\Rightarrow x\in A_1^c\cap A_2^c\cap\ldots\cap A_{k-1}^c\cap A_k$$

y en consecuencia x pertenece al segundo miembro.

c) Sea ahora un elemento del segundo miembro. Por ser una unión disjunta, dicho elemento pertenece a uno y sólo uno de los términos, es decir

$$\exists\, k\,/\,x\in A_1^c\cap A_2^c\cap\ldots\cap A_{k-1}^c\cap A_k\Rightarrow$$
$$\Rightarrow x\in A_k \text{ para un único } k\Rightarrow$$
$$\Rightarrow x\in\bigcup_{i\in N}A_i$$

TRABAJO PRACTICO II

2-34. Se considera un experimento aleatorio consistente en lanzar tres monedas. Si una moneda cae cara, se anota 1, y si cae sello se anota 0. Formar el conjunto cuyos elementos son los posibles resultados del experimento.

2-35. Con relación al ejercicio anterior, determinar por extensión los siguientes subconjuntos:

S_1 : se dan más caras que sellos.
S_2 : se obtienen al menos dos caras.
S_3 : se obtiene el mismo resultado en las tres monedas.

2-36. Con los conjuntos definidos en 2-30, obtener:

$$S_2^c \, ; S_2 - S_3 \, ; S_1 \cap S_3 \, ; (S_2 \cup S_3) \cap S_1$$

2-37. Sean los conjuntos

$$A = \{ x \in \mathbf{Z} \, / \, |x| \leqslant 3 \}$$
$$B = \{ x \in \mathbf{Z} \, / \, x^2 < 7 \}$$

determinar $A \cap B$, $A \cup B$, $A - B$, $B - A$, $A \Delta B$

2-38. Dados

$$A = \left\{ x \in \mathbf{R} \, / \left| x - \frac{1}{2} \right| \leqslant 2 \right\}$$
$$B = \left\{ x \in \mathbf{R} \, / \left| x - 1 \right| \leqslant \frac{3}{2} \right\}$$

Obtener $A \cap B$, $A \cup B$, B^c

2-39. Siendo

$$A = \{ x \in \mathbf{R} \, / \, x^2 - 1 = 0 \}$$
$$B = \{ x \in \mathbf{R} \, / \, |x| \leqslant 1 \}$$

obtener $A \cap B$, $(A \cup B)^c$

2-40. Si

$$A = \{ x \in \mathbf{Z} \, / \, |x| < 4 \} \quad \text{y}$$
$$B = \{ x \in \mathbf{Z} \, / \, x | \, 6 \} \quad \text{determinar}$$

$$A \cup B \, , A \cap B \, , A - B \, , B - A \, , A \Delta B$$

2-41. Formar todos los subconjuntos de

$$A = \{ (0,0) \, , \, (1,0) \}$$

2-42. Siendo $A = \{ a \, , b \}$, obtener $P(A^2)$

2-43. Demostrar

$$(A \cap B) \subset A \subset (A \cup B)$$

2-44. Demostrar

$$A \subset B \;\wedge\; A \subset C \Rightarrow A \subset (B \cap C)$$

2-45. Demostrar que si dos conjuntos están incluidos en un tercero, entonces su unión también lo está.

2-46. Demostrar

$$A \subset \phi \Rightarrow A = \phi$$

2-47. Demostrar

$$A - B = A - (A \cap B) = (A \cup B) - B$$

2-48. Demostrar

$$(A \cup B) - C = (A - C) \cup (B - C)$$

2-49. Demostrar

$$(A \cap B) - C = (A - C) \cap (B - C)$$

2-50. Demostrar

$$(A - B) - C = A - (B \cup C)$$

2-51. Demostrar

$$A - (B - C) = (A - B) \cup (A \cap C)$$

2-52. Demostrar

$$(A - B) - C \subset A - (B - C)$$

2-53. Demostrar

$$A \cup (B - C) = (A \cup B) - (C - A)$$

2-54. Demostrar

$$A = (A \cap B) \cup (A \cap B^c)$$

2-55. Demostrar

$$B \subset A \Leftrightarrow (A - B) \cup B = A$$

2-56. Demostrar

$$(A - B) \cup B = A \cup B$$

2-57. Demostrar

$$A \triangle B = \phi \Leftrightarrow A = B$$

2-58. Demostrar

$$A \times B = \phi \Leftrightarrow A = \phi \ \vee \ B = \phi$$

2-59. Demostrar

$$A \subset B \ \wedge \ C \subset D \Leftrightarrow A \times C \subset B \times D$$

2-60. Demostrar

$$(A \cap B) \times C = (A \times C) \cap (B \times C)$$

2-61. Demostrar

$$(A - B) \times C = (A \times C) - (B \times C)$$

2-62. Demostrar

i) $A \subset B \Rightarrow (A \cup C) \subset (B \cup C)$
ii) $A \subset B \Rightarrow (A \cap C) \subset (B \cap C)$

2-63. Demostrar

$$A \subset B \ \wedge \ A \subset C \Leftrightarrow A \subset (B \cap C)$$

2-64. Demostrar

$$A \subset C \ \wedge \ B \subset C \Leftrightarrow (A \cup B) \subset C$$

2-65. Demostrar

$$A \cap B = \phi \ \wedge \ A \cup B = C \Rightarrow A = C - B$$

2-66. Demostrar

i) $U^c = \phi$ iii) $A \cap A^c = \phi$
ii) $U = \phi^c$ iv) $A \cup A^c = U$

2-67. Demostrar

$$A \cup B = U \ \wedge \ A \cap B = \phi \Rightarrow B = A^c$$

2-68. Demostrar

i) $A - (A - B) = A \cap B$
ii) $A \cup (B - A) = A \cup B$

2-69. Demostrar la equivalencia de

$$A \cup B = U \quad y \quad A^c \subset B$$

2-70. Demostrar la equivalencia de

$$A \subset B^c \quad y \quad A \cap B = \phi$$

2-71. Si A tiene n elementos escribimos $C(A) = n$ (cardinal de A es igual a n). Si A y B son finitos, entonces el cardinal de la unión es igual a la suma de los cardinales, menos el cardinal de la intersección, es decir

$$C(A \cup B) = C(A) + C(B) - C(A \cap B)$$

Demostrar

$$C(A \cup B \cup C) = C(A) + C(B) + C(C) - C(A \cap B) - C(A \cap C) - C(B \cap C) + C(A \cap B \cap C)$$

2-72. Sean $U \neq \phi$ y $\mathcal{A}$ una familia no vacía de subconjuntos de U, es decir: $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(U)$.
Por definición, $\mathcal{A}$ es un álgebra de Boole de partes de U, si y sólo si $\mathcal{A}$ es cerrada para la complementación, para la unión, y contiene al vacío. Es decir

i) $A \in \mathcal{A} \Rightarrow A^c \in \mathcal{A}$
ii) $A_i \in \mathcal{A}, i \in I \Rightarrow \bigcup_{i \in I} A_i \in \mathcal{A}$
iii) $\phi \in \mathcal{A}$

donde I denota un conjunto de índices a lo sumo numerable.
Demostrar que $\mathcal{A}$ contiene a U, y que es cerrado para la intersección.

2-73. Sean: $\Omega \neq \phi$, $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ dos álgebras de Boole de partes de Ω. Demostrar que $\mathcal{A} \cap \mathcal{B}$ es un álgebra de Boole.