

# Introducción a la Matemática

Iker M. Canut

February 11, 2020

# Contents

<b>1</b>	<b>Conjuntos</b>	<b>3</b>
1.1	Definiciones Básicas . . . . .	3
1.2	Representación de conjuntos . . . . .	3
1.3	Subconjuntos . . . . .	3
1.4	Operaciones . . . . .	3
<b>2</b>	<b>Números Reales</b>	<b>4</b>
2.1	Suma y Producto . . . . .	4
2.2	Resta y División . . . . .	4
2.3	Potenciación . . . . .	4
2.4	Radicación . . . . .	5
2.5	Logaritmo . . . . .	5
2.6	Formas Especiales . . . . .	5
2.7	Relacion de Orden del Conjunto de los Numeros Reales . . . . .	5
2.8	Valor Absoluto . . . . .	6
<b>3</b>	<b>Números Complejos</b>	<b>7</b>
3.1	Forma Binómica de un Número Complejo . . . . .	7
3.2	La Unidad Imaginaria . . . . .	7
3.3	El conjunto de los Números Complejos . . . . .	7
3.4	Definiciones . . . . .	7
3.5	Conjugado de un complejo . . . . .	7
3.6	Reciproco de un Complejo NO nulo . . . . .	7
<b>4</b>	<b>Ecuaciones e Inecuaciones</b>	<b>8</b>
4.1	Ecuaciones Lineales . . . . .	8
4.2	Ecuaciones Cuadráticas . . . . .	8
4.3	Ecuaciones Bicuadrática . . . . .	8
4.4	Inecuaciones . . . . .	8

# 1 Conjuntos

## 1.1 Definiciones Básicas

Un Conjunto es una colección de objetos. Los conjuntos se denominan con letras mayúsculas. Y los elementos que lo forman con letras minúsculas. El conjunto vacío se denomina  $\emptyset$ .

## 1.2 Representación de conjuntos

- **Por Extensión:** Se lista todo entre llaves.  $\{a, b, c, d, \dots\}$
- **Por Comprensión:** Se dicen las propiedades.  $\{x/x\dots\}$

## 1.3 Subconjuntos

El conjunto B es subconjunto de A si y sólo si todo elemento de B, es también de A.

$$B \subset A \iff (x \in B \Rightarrow x \in A)$$

Dos conjuntos serán iguales cuando posean los mismos elementos.

$$B = A \iff (A \subset B \wedge B \subset A)$$

Al conjunto que contiene a todos los datos en un contexto específico lo denominaremos **Conjunto Universal** y se denota con la letra **U**.

## 1.4 Operaciones

- **Intersección de Conjuntos:**  $A \cap B = \{x/x \in A \wedge x \in B\}$
- **Unión de Conjuntos:**  $A \cup B = \{x/x \in A \vee x \in B\}$

Si dos conjuntos no tienen elementos en común, entonces son **disjuntos**. A y B disjuntos  $\iff A \cap B = \emptyset$

Propiedades	UNIÓN	INTERSECCIÓN
<i>Conmutativa</i>	$A \cup B = B \cup A$	$A \cap B = B \cap A$
<i>Asociativa</i>	$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$	$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$
<i>Distributiva</i>	$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$	$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$
<i>Idempotencia</i>	$A \cup A = A$	$A \cap A = A$

- **Diferencia:**  $A - B = \{x/x \in A \wedge x \notin B\}$
- **Complemento:**  $C_A = \overline{A} = U - A$ . Se cumple que  $A - B = A \cap \overline{B}$

Propiedades	
<i>Complemento</i>	$\overline{\overline{A}} = A$ $A \cup \overline{A} = U$ $A \cap \overline{A} = \emptyset$ $\overline{\emptyset} = U \wedge \overline{U} = \emptyset$
<i>Leyes de Morgan</i>	$\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$ $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$

- **Cardinal de un conjunto:** Es el número de elementos.  $|A| = \text{card}(A)$

## 2 Números Reales

- Naturales  $N$ :  $\{1, 2, 3, \dots\}$
- Naturales con cero  $N_0$ :  $\{0, 1, 2, 3, \dots\}$
- Enteros  $Z$ :  $\{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}$
- Racionales  $Q = \left\{x/x = \frac{p}{q}, p \in Z, q \in Z, q \neq 0\right\}$
- Irracionales  $I = Q \cap I = \emptyset \wedge Q \cup I = R$

$$N \subset N_0 \subset Z \subset Q \subset R \wedge I \subset R$$

### 2.1 Suma y Producto

	Suma	Producto
<i>Conmutativa</i>	$a + b = b + a$	$a.b = b.a$
<i>Asociativa</i>	$(a + b) + c = a + (b + c)$	$(a.b).c = a.(b.c)$
$\exists$ <i>Elemento Neutro</i>	$a + 0 = a$	$a.1 = a$
$\exists$ <i>Elemento Inverso</i>	$a + (-a) = 0$	$a.\frac{1}{a} = 1$
<i>Cancelativa</i>	$a + b = a + c \Rightarrow b = c$	$a.b = a.c \Rightarrow b = c, a \neq 0$
<i>Uniforme</i>	$a = b \Rightarrow a + c = b + c$	$a = b \Rightarrow a.c = b.c$
<i>Distributiva</i>	$a.(b + c) = a.b + a.c$	

### 2.2 Resta y División

- $a - b = a + (-b)$
- $a : b = \frac{a}{b} = a.\frac{1}{b}$
- $\frac{p}{q} + \frac{r}{s} = \frac{ps + rq}{qs}, q \neq 0 \wedge s \neq 0$
- $\frac{p}{q} \cdot \frac{r}{s} = \frac{pr}{qs}, q \neq 0 \wedge s \neq 0$
- $\frac{p}{q} \div \frac{r}{s} = \frac{ps}{qr}, q \neq 0 \wedge s \neq 0 \wedge r \neq 0$

### 2.3 Potenciación

- Si  $a \neq 0, a^0 = 1$
- $a^1 = a$
- Si  $n \in N, n > 1, a^n = \underbrace{a.a.\dots.a}_{n \text{ factores "a"}}$
- Si  $a \in R \wedge a \neq 0 \wedge n \in N, a^{-n} = \frac{1}{a^n} = \frac{1}{\underbrace{a.a.\dots.a}_{n \text{ veces}}}$

<i>Distributiva respecto a la multiplicación</i>	$(a.b)^n = a^n.b^n$
<i>Distributiva respecto al cociente</i>	$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}, b \neq 0$
<i>Producto de potencias de igual base</i>	$a^n.a^m = a^{n+m}$
<i>Cociente de potencias de igual base</i>	$a^n \div a^m = a^{n-m}$
<i>Potencia de potencia</i>	$(a^n)^m = a^{n.m}$

## 2.4 Radicación

$$\sqrt[n]{a} = b \iff b^n = a$$

y se nombra  $\sqrt[n]{a}$  <sup>índice</sup>  $\sqrt[n]{a}$  <sup>radicando</sup> = raíz enésima

No existe en los reales la raíz cuadrada (y de ningún índice par) de números negativos. Es decir:

- Si **n** es un numero natural **impar**, entonces es valida para todo número real **a**.
- Si **n** es un numero natural **par**, entonces es valida para todo número real **a no negativo**.

$$\frac{m}{a \cdot n} = \sqrt[n]{a^m} \wedge a^{-\frac{m}{n}} = \frac{1}{\sqrt[n]{a^m}}, a \neq 0$$

Distributiva respecto al producto	$\sqrt[n]{a \cdot b} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}$
Distributiva respecto al cociente	$\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$
Raiz de raiz	$\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[m \cdot n]{a}$

## 2.5 Logaritmo

El **logaritmo en base a de x** es **y** y lo notamos  $\log_a(x) = y$ , como el numero al cual tengo que elevar **a** para obtener **x**.

$$\log_a(x) = y \iff a^y = x, \text{ se necesita que } a > 0 \wedge x > 0 \wedge a \neq 1$$

- $\log_a(1) = 0$
- $\log_a(a) = 1$
- $\log_a(x \cdot y) = \log_a(x) + \log_a(y)$
- $\log_a\left(\frac{x}{y}\right) = \log_a(x) - \log_a(y)$
- $\log_a(x^c) = c \cdot \log_a(x)$
- $a^{\log_a(x)} = x$

$$\log_b(x) = \frac{\log_a(x)}{\log_a(b)}$$

## 2.6 Formas Especiales

**Binomio al Cuadrado**  $\leftrightarrow$  **Trinomio Cuadrado Perfecto**

$$(x + y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$$

**Binomio al Cubo**  $\leftrightarrow$  **Cuadrinomio Cubo Perfecto**

$$(x + y)^3 = x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3$$

**Diferencia de Cuadrados**

$$(a - b) \cdot (a + b) = a^2 - b^2$$

## 2.7 Relacion de Orden del Conjunto de los Numeros Reales

- $a < b$  si  $0 < b - a$
- $a < b \wedge b < c \Rightarrow a < c$
- $a < b \wedge c > 0 \Rightarrow a \cdot c < b \cdot c$
- $a > b$  si  $b < a$
- $a < b \Rightarrow a + c < b + c$
- $a < b \wedge c < 0 \Rightarrow a \cdot c > b \cdot c$

## 2.8 Valor Absoluto

Es la distancia que hay, en la recta numérica, desde su punto representativo al origen de coordenadas. El valor absoluto es será siempre un número positivo (o cero).

$$|x| = \begin{cases} x & \text{si } x \geq 0 \\ -x & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

- $|a| \geq 0$
- $|a| \cdot |b| = |a \cdot b|$
- $|a| = 0 \iff a = 0$
- $\left| \frac{a}{b} \right| = \frac{|a|}{|b|}, b \neq 0$
- $|-a| = |a|$
- $\sqrt{a^2} = |a|$

$$\forall a, b \in R \wedge k > 0$$

- $|a + b| \leq |a| + |b|$
- $|a - b| \geq ||a| - |b||$
- $|a| < k \iff -k < a < k$
- $|a| > k \iff (a > k \vee a < (-k))$

### 3 Números Complejos

Se define  $i$  como:

$$i^2 = -1$$

#### 3.1 Forma Binómica de un Número Complejo

$$z = a + bi$$

donde  $a$  y  $b$  son números reales, e  $i$  se define por la relación  $i^2 = -1$

El número  $a = \text{Re}(z)$  es la parte real de  $z$  y  $b = \text{Im}(z)$  es la parte imaginaria de  $z$ .

#### 3.2 La Unidad Imaginaria

El número  $i$  recibe el nombre de unidad imaginaria, aceptándose que se comporta como un número real.

- $i^r \cdot i^s = i^{r+s}$
- $i^0 = 1$
- $i^2 = -1$
- $(i^r)^s = i^{r \cdot s}$ , con  $r, s \in \mathbb{Z}$
- $i^1 = i$
- $i^3 = -i$

$$i^n = i^r, \text{ donde } r = n \% 4$$

#### 3.3 El conjunto de los Números Complejos

Se simboliza con la  $\mathbb{C}$  y contiene los números de la forma  $a + bi$ , donde  $a, b \in \mathbb{R}$  e  $i$  es la unidad imaginaria.

$$\mathbb{C} = \{z = a + bi/a, b \in \mathbb{R} \wedge i^2 = -1\}$$

- Los números reales son complejos  $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$ , ya que si  $x \in \mathbb{R} \Rightarrow x = x + 0i$ .
- A los complejos de la forma  $bi$  (aquellos que su parte real es nula), se los llama imaginarios puros.

#### 3.4 Definiciones

- **Igualdad de Números Complejos:**  $z_1 = z_2 \iff (a_1 = a_2 \wedge b_1 = b_2)$ .
- **Opuesto de un Número Complejo:**  $-z = (-a) + (-b)i$ .
- **Suma y Resta:**  $z_1 + z_2 = (a_1 + a_2) + (b_1 + b_2)i$ . De manera analoga,  $z_1 - z_2 = (a_1 - a_2) + (b_1 - b_2)i$
- **Multiplicación:**  $z_1 \cdot z_2 = (a_1 \cdot a_2 - b_1 \cdot b_2) + (a_2 \cdot b_1 + a_1 \cdot b_2)i$ .
- **División:**  $\frac{a + bi}{c + di} = \frac{ac + bd}{c^2 + d^2} + \frac{bc - ad}{c^2 + d^2}i$

#### 3.5 Conjugado de un complejo

El conjugado de un número complejo  $z = a + bi$  es  $\bar{z} = a - bi$ .

- $z = \bar{z} \iff z \in \mathbb{R}$
- $\overline{z_1 + z_2} = \bar{z}_1 + \bar{z}_2$
- $z \cdot \bar{z} = a^2 + b^2 = \text{Re}(z)^2 + \text{Im}(z)^2$
- $z + \bar{z} = 2a$
- $\overline{z_1 \cdot z_2} = \bar{z}_1 \cdot \bar{z}_2$
- $z - \bar{z} = 2bi$
- $-\bar{z} = \overline{-z}$

#### 3.6 Recíproco de un Complejo NO nulo

Definimos el recíproco de  $z \neq 0, z \in \mathbb{C}$ , como aquel complejo  $w$  /  $z \times w = 1$  y lo denotamos  $z^{-1} = \frac{1}{z}$ .

- $\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{\bar{z}_1}{\bar{z}_2}, z_2 \neq 0$
- $\overline{\left(\frac{1}{z}\right)} = \frac{1}{\bar{z}}, z \neq 0$

## 4 Ecuaciones e Inecuaciones

Una **ecuación** es una igualdad entre dos expresiones algebraicas:  $P(x) = Q(x)$ . Resolverla consta de encontrar el o los valores numéricos de la incógnita que verifican la ecuación.

### 4.1 Ecuaciones Lineales

Una ecuación es **lineal** cuando se puede escribir de la forma:

$$a.x + b = 0, \text{ con } a \neq 0$$

### 4.2 Ecuaciones Cuadráticas

Una ecuación es **cuadrática** cuando se puede escribir de la forma:

$$a.x^2 + b.x + c = 0, \text{ con } a \neq 0$$

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

El numero  $\Delta = b^2 - 4ac$  se llama **discriminante** y decide la naturaleza de las soluciones.

- Si  $\Delta > 0$  entonces las dos soluciones son reales y distintas.
- Si  $\Delta = 0$  entonces tiene una solución doble.
- Si  $\Delta < 0$  entonces las dos soluciones son numeros complejos conjugados.

$$\begin{aligned}x_1 + x_2 &= -\frac{b}{a} \\ x_1 \cdot x_2 &= \frac{c}{a}\end{aligned}$$

### 4.3 Ecuaciones Bicuadrática

Una ecuación es **bicuatráctica** cuando se puede escribir de la forma:

$$a.x^4 + b.x^2 + c = 0, \text{ con } a \neq 0$$

Para resolverlas, primero se sustituye  $y = x^2$  y despues se sigue normal.

### 4.4 Inecuaciones

Una **inecuación** es una desigualdad entre dos expresiones algebraicas:  $P(x) \leq Q(x)$ . Resolverla consta de encontrar el o los valores numéricos de la incógnita que verifican la ecuación.