

Introducción a la Matemática

Iker M. Canut

March 14, 2020

Contents

1	Unidad 1: Numeros Reales	3
1.1	Axiomas de Cuerpo	3
1.2	Axiomas de Orden	5
2	Demostraciones	7

1 Unidad 1: Numeros Reales

Los números reales son elementos de un conjunto denominado R entre los que existen dos operaciones que, por definición, satisfacen ciertas propiedades específicas llamadas axiomas.

Las operaciones son la suma y el producto. Si $a, b \in R$

- Y la operación suma les asigna el elemento $c \in R$, escribimos: $a + b = c$
- Y la operación producto les asigna el elemento $d \in R$, escribimos $a.b = d$

1.1 Axiomas de Cuerpo

Axioma de Cuerpo 1: Conmutativa

$$a + b = b + a \wedge a.b = b.a$$

Axioma de Cuerpo 2: Asociativa

$$(a + b) + c = a + (b + c) \wedge (a.b).c = a.(b.c)$$

Axioma de Cuerpo 3: Distributiva de la Multiplicación respecto a la Suma

$$a.(b + c) = a.b + a.c$$

Axioma de Cuerpo 4: Existencia de Elementos Neutros

Existen dos números reales, notados 0 y 1 / $\forall a \in R$

$$0 + a = a + 0 = a \wedge 1.a = a.1 = a$$

Axioma de Cuerpo 5: Existencia de Elementos Opuestos

$$\forall a \in R, \exists b \in R / a + b = b + a = 0$$

Axioma de Cuerpo 6: Existencia de Elementos Recíprocos

$$\forall a \in R - \{0\}, \exists b \in R / a.b = b.a = 1$$

Teorema 1: Propiedad Cancelativa de la Suma

$$a, b, c \in R, \text{ si } a + b = a + c, \text{ entonces } b = c$$

Junto con los axiomas, se presupone la validez de las siguientes propiedades de la igualdad:

- Propiedad de Reflexividad: $\forall a, a = a$
- Propiedad de Simetría: si $a = b \Rightarrow b = a$
- Propiedad de Transitividad: si $a = b \wedge b = c \Rightarrow a = c$

Unicidad del Elemento Neutro de la suma

Si $0'$ es un numero que verifica que $a + 0' = 0' + a = a$, $\forall a \in R$, entonces $0' = 0$

Unicidad del Elemento Opuesto

$\forall a \in R, \exists$ un unico numero b / $a + b = b + a = 0$

Para cualquier numero a , denotamos con $-a$ al unico elemento opuesto de a .

Llamamos *diferencia* entre dos numeros reales a y b , y lo denotamos como $a - b$, al numero dado por la suma de a y el opuesto de b .

$$a - b = a + (-b)$$

Teorema 2

$$-(-a) = a$$

$$-0 = 0$$

$$0 \cdot a = 0$$

$$a(-b) = -(ab) = (-a)b$$

$$(-a)(-b) = ab$$

$$a(b - c) = ab - ac$$

$$-(a - b) = b - a$$

$$a = b \iff -a = -b$$

Propiedad

Sean $a, b \in R$, $a - b = 0 \iff a = b$

Teorema 3: Propiedad Cancelativa del Producto

$a, b, c \in R, a \neq 0$, si $ab = ac \Rightarrow b = c$

Teorema 4: Unicidad del Elemento Neutro del Producto

Si $1'$ es un numero que verifica que $a \cdot 1' = 1' \cdot a = a$, $\forall a \in R$, entonces $1' = 1$

Unicidad del Reciproco

$\forall a \in R - \{0\}, \exists!$ b / $ab = ba = 1$

ado $a \in R - \{0\}$, el reciproco se nota como a^{-1}

Si $a, b \in R, b \neq 0$, llamamos cociente entre a y b , y lo notamos $\frac{a}{b}$, al numero dado por el producto de a y el reciproco de b .

Teorema 5

1. 0 no tiene recíproco

2. $1^{-1} = 1$

3. $\frac{a}{1} = a$ y si $a \neq 0 \Rightarrow \frac{1}{a} = a^{-1}$

4. Si $ab = 0 \Rightarrow a = 0 \vee b = 0$

5. Si $b \neq 0 \wedge d \neq 0 \Rightarrow$

i $(bd)^{-1} = b^{-1} \cdot d^{-1}$

ii $\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad + bc}{bd}$

iii $\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$

6. Si $a \neq 0 \wedge b \neq 0 \Rightarrow \left(\frac{a}{b}\right)^{-1} = \frac{a^{-1}}{b^{-1}} = \frac{b}{a}$

7. $-a = -1 \cdot a$

1.2 Axiomas de Orden

Suponemos la existencia de un subconjunto de R , al que llamaremos conjunto de números positivos, y lo notaremos R^+ , tal que satisface los siguientes axiomas.

Axioma de Orden 7

Si $a \in R^+ \wedge b \in R^+ \Rightarrow a + b \in R^+ \wedge a \cdot b \in R^+$

Axioma de Orden 8

$\forall a \in R - \{0\}, a \in R^+ \vee (-a) \in R$

Axioma de Orden 9

$\emptyset \in R^+$

• $a < b = b - a \in R^+$

• $a > b = a - b \in R^+$

• $a \leq b = b - a \in R^+ \vee b = a$

• $a \geq b = a - b \in R^+ \vee b = a$

• $a > 0 \iff a \in R^+$

• $a > 0 \Rightarrow (-a) < 0$

• $a < 0 \Rightarrow (-a) > 0$

Si $a < 0$ se dice que a es negativo.

Teorema 6: Propiedad de Tricotomía

Dados dos números reales cualesquiera a y b , se verifica exactamente una de las siguientes afirmaciones:

i $a < b$

ii $a = b$

iii $a > b$

Teorema 7: Propiedad Transitiva de a relacion menor

Dados $a, b, c \in R$, si $a < b \wedge b < c \Rightarrow a < c$

1. Si $a < b \Rightarrow a + c < b + c$

2. Si $a < b \wedge c < d \Rightarrow a + c < b + d$

3. (a) $a < b \wedge c > 0 \Rightarrow ac < bc$

(b) $a < b \wedge c < 0 \Rightarrow ac > bc$

4. $a \neq 0 \Rightarrow a^2 > 0$

5. $1 > 0$. Es decir, $1 \in R^+$

6. $a < b \Rightarrow -b < -a$

7. $ab > 0 \iff a$ y b son positivos o los dos son negativos

8. $ab < 0 \Rightarrow$ o a es positivo y b es negativo o viceversa.

9. $a > 0 \iff \frac{1}{a} > 0$

10. $0 < a < b \Rightarrow a < \frac{1}{b} < \frac{1}{a}$

2 Demostraciones

Demostracion de la Propiedad Cancelativa de la Suma

Sean $a, b, c \in R$, $a + b = a + c \Rightarrow b = c$ Sea $d = a + b$, y por ende, $d = a + c$, por la existencia de elementos opuestos, existe y que es opuesto a a , entonces:

- $y + d$ Hipotesis
- $y + (a + b)$ Asociativa
- $(y + a) + b$ Hipotesis
- $0 + b$ Elemento neutro de la suma
- b

- $y + d$ Hipotesis
- $y + (a + c)$ Asociativa
- $(y + a) + c$ Hipotesis
- $0 + c$ Elemento neutro de la suma
- c

Ergo, $b = c$

□

Demostracion de la Unicidad del Elemento Neutro de la suma

Supongamos que $0'$ es un numero que tambien funciona como neutro de la suma, entonces

$$a + 0 = a \wedge a + 0' = a$$

$$a + 0 = a + 0'$$

Y por propiedad cancelativa de la suma

$$0 = 0'$$

□

Demostracion de la Unicidad del Elemento Opuesto

La existencia de un numero b esta dada por el axioma 5, hay que demostrar que es unico. Suponiendo que existe $b' / a + b' = b' + a = 0$, tenemos que

$$a + b = 0 \wedge a + b' = 0$$

$$a + b = a + b'$$

Y por propiedad cancelativa de la suma

$$b = b'$$

□

Demostracion de que el opuesto al opuesto de a es a

Sea b el opuesto de a , se puede concluir que $a + b = 0 \wedge b = (-a) \wedge a = (-b)$

(1) \wedge (2) \wedge (3)

$$-(-a) \stackrel{(2)}{=} -b \stackrel{(3)}{=} a$$

□

Demostracion de que el opuesto de 0 es 0

Por el axioma 5, todo numero real tiene su opuesto. Llamemos $0'$ al opuesto de 0, siendo $0 + 0' = 0$ y Del axioma 3 se concluye que $0 + 0 = 0$

$$\text{si } 0 + 0' = 0 \wedge 0 + 0 = 0 \Rightarrow 0' = 0$$

□

Demostracion de que el producto de 0 con cualquier otro numero es 0

$$\begin{aligned} a \cdot 0 &\stackrel{A4}{=} a \cdot 0 + 0 \stackrel{A5}{=} a \cdot 0 + (a + (-a)) \stackrel{A2}{=} (a \cdot 0 + a) + (-a) \stackrel{A4}{=} (a \cdot 0 + a \cdot 1) + (-a) \stackrel{A3}{=} \\ &a(0 + 1) + (-a) \stackrel{A4}{=} a \cdot 1 + (-a) \stackrel{A4}{=} a + (-a) \stackrel{A5}{=} 0 \end{aligned}$$

□

$a(-b) = -(ab) = (-a)b$

$$\begin{aligned} a(-b) &\stackrel{A4}{=} a(-b) + 0 \stackrel{A5}{=} a(-b) + (ab + -(ab)) \stackrel{A2}{=} (a(-b) + ab) + -(ab) \stackrel{A3}{=} \\ &(a((-b) + b) + -(ab)) \stackrel{A5}{=} a \cdot 0 + -(ab) \stackrel{T2.3}{=} 0 + -(ab) \stackrel{A4}{=} -(ab) \end{aligned}$$

□

$(-a)(-b) = ab$

$$(-a)(-b) \stackrel{T2.4}{=} -((-a)(-(-b))) \stackrel{T2.1}{=} -((-a)b) \stackrel{T2.4}{=} -(-(ab)) \stackrel{T2.1}{=} ab$$

□

$a(b - c) = ab - ac$

Por la definicion de diferencia, se puede reescribir como:

$$a(b + (-c)) \stackrel{A3}{=} ab + a(-c) \stackrel{T2.4}{=} ab + -(ac)$$

Que por la definicion de diferencia, se puede reescribir como: $ab - ac$

□