Relaciones - Parte 2

1 Relaciones en un conjunto

En esta sección consideraremos relaciones $\mathcal{R} \subseteq A \times A$ para algún conjunto A.

Ejemplo 1.1. *Consideremos las siguientes relaciones:*

1. *La igualdad de elementos siempre es una relación en cualquier conjunto A: $\mathcal{R} = \{(a,a), a \in A\}$, es decir para todo par $a, b \in A$, $a\mathcal{R}b$ si y solo si $a = b$.*
2. *La relación $<$ (menor usual) es una relación en $\mathbb{R}$.*
3. *En $\mathbb{Z}$ consideremos: $\mathcal{R} = \{(a,b)/a, b \in \mathbb{Z}, a - b \text{ es múltiplo de } 2\}$.*
4. *Las relaciones de perpendicularidad o de paralelismo en el conjunto de rectas de un plano.*
5. *En $\mathbb{R}$, la relación $x\mathcal{R}y$ si y solo si $x = y^2$.*
6. *Sea $A = \{a, b, c, d\}$, entonces $\mathcal{R} = \{(a,a), (a,b), (a,d), (b,b), (c,c), (c,d), (d,a), (d,d)\}$ es una relación en A.*
7. *Si A es un conjunto arbitrario, definimos en $\mathcal{P}(A)$ la relación $\mathcal{R}$ como $X\mathcal{R}Y$ si y solo si $X \subseteq Y$.*

Ya sabemos cómo graficar relaciones en general. Sin embargo, cuando el conjunto A es finito (como en en el ejemplo 6 anterior), podemos realizar un único diagrama, poniendo una flecha que parte de x y llega a y para cada elemento $(x, y) \in \mathcal{R}$, es decir cada vez que $x\mathcal{R}y$.

Ejemplo 1.2. *Supongamos que $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$.*

1. *La relación del Ejemplo 1.1.1 puede graficarse como muestra la Figura 1.*

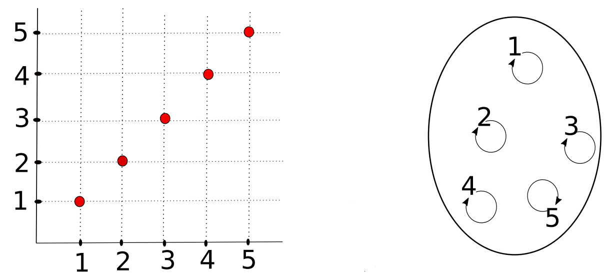


Figure 1: $\mathcal{R} : x = y$

2. La relación del Ejemplo 1.1.2 puede graficarse de la siguiente manera:

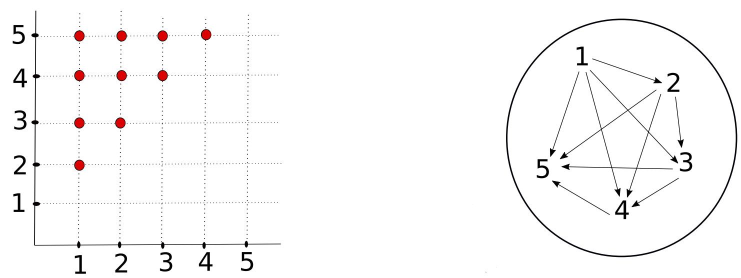


Figure 2: $\mathcal{R} : x < y$

3. La relación del Ejemplo 1.1.3 puede graficarse de la siguiente manera:

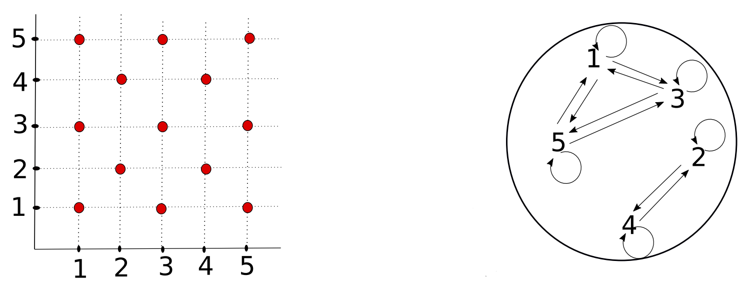


Figure 3: $\mathcal{R} : x - y = 2k$

Ejercicio: graficar la relación del Ejemplo 1.1.5 si $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, la relación del Ejemplo 1.1.6 y la relación del Ejemplo 1.1.7 si $A = \{a, b, c\}$.

En el caso particular de relaciones en un conjunto, nos interesa estudiar algunas propiedades que definimos a continuación.

Definición:
Sean R una relación $\mathcal{R}$ en un conjunto A y $a, b, c \in A$. Se dice que $\mathcal{R}$ es:

- reflexiva si $(a, a) \in \mathcal{R}$ para todo $a \in A$,
- simétrica si $(a, b) \in \mathcal{R}$ implica $(b, a) \in \mathcal{R}$,
- antisimétrica si $(a, b) \in \mathcal{R}$ y $a \neq b$ implica $(b, a) \notin \mathcal{R}$ o, equivalentemente, si $(a, b) \in \mathcal{R}$ y $(b, a) \in \mathcal{R}$ implica $a = b$,
- transitiva si $(a, b) \in \mathcal{R}$ y $(b, c) \in \mathcal{R}$ implica $(a, c) \in \mathcal{R}$.

Ejemplo 1.3. *Volvamos a las relaciones del Ejemplo 1.1.*

1. *En cualquier conjunto A la igualdad de elementos es una relación reflexiva ya que cada elemento es igual a sí mismo, es decir $a = a$ para todo $a \in A$, de donde $(a, a) \in \mathcal{R}$ para todo $a \in A$.*

   Es simétrica, porque si $(a, b) \in \mathcal{R}$, entonces $a = b$ y por lo tanto $(b, a) \in \mathcal{R}$.

   También es antisimétrica, porque si $(a, b) \in \mathcal{R}$ y $(b, a) \in \mathcal{R}$ implica $a = b$.

   Y es transitiva, porque si $(a, b) \in \mathcal{R}$, entonces $a = b$ y $(b, c) \in \mathcal{R}$ entonces $b = c$ y por la transitividad de la igualdad, resulta $a = c$.

2. *La relación $<$ (menor usual) en $\mathbb{R}$ no es reflexiva. Basta mostrar un elemento que no satisfaga la definición, por ejemplo 1 no es menor que 1, por lo tanto $(1, 1) \notin \mathcal{R}$.*

   Tampoco es simétrica. Por ejemplo $(1, 2) \in \mathcal{R}$ pero $(2, 1) \notin \mathcal{R}$.

   Es antisimétrica, porque si $(a, b) \in \mathcal{R}$ y $a \neq b$ implica $a < b$ y por lo tanto $(b, a) \notin \mathcal{R}$.

   También es transitiva, ya que si si $(a, b) \in \mathcal{R}$, entonces $a < b$ y $(b, c) \in \mathcal{R}$ entonces $b < c$, de donde $a < b$.

3. *En el caso de la relación $\mathcal{R} = \{(a, b)/a, b \in \mathbb{Z}, a - b \text{ es múltiplo de } 2\}$ en $\mathbb{Z}$. Es fácil ver que es reflexiva ya que si $a \in \mathbb{Z}$, $a - a = 0 = 2.0$, por lo tanto $(a, a) \in \mathcal{R}$ para todo $a \in \mathbb{Z}$.*

   Para ver que es simétrica, consideremos $a, b \in \mathbb{Z}$ tales que $(a, b) \in \mathcal{R}$. Es decir $a - b = 2k$ para algún $k \in \mathbb{Z}$. Entonces $b - a = -(a - b) = -2k$ es decir $a - b$ también es un entero par. Por lo tanto $(b, a) \in \mathcal{R}$.

   Para verificar que no es antisimétrica, es suficiente mostrar un ejemplo que no satisfaga la definición: si $a = 2$ y $b = 4$, es fácil ver que $(a, b), (b, a) \in \mathcal{R}$ pero $a \neq b$.

   Finalmente probemos que es transitiva. Sean $a, b, c \in \mathbb{Z}$ tales que $(a, b), (b, c) \in \mathcal{R}$. Por definición, existen enteros k, j tales que $a - b = 2k$ y $b - c = 2j$..

   Entonces $a - c = a - b + b - c = 2k + 2j = 2(k + j)$. Como $k + j$ es entero, resulta que $(a, c) \in \mathcal{R}$.

Ejercicio: Analizar que propiedades tienen la relación del Ejemplo 1.1.5 si $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ y las relaciones del Ejemplo 1.1 6 y 7.

2 Relaciones de orden

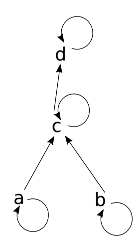
Definición: Una relación $\mathcal{R}$ en un conjunto A es una relación de orden si es reflexiva, antisimétrica y transitiva.

Cuando $\mathcal{R}$ es una relación de orden en un conjunto A, si $(a, b) \in \mathcal{R}$ diremos que a es anterior a b (o que que a precede a b) y se nota $a \prec b$.

Al par $(A, \mathcal{R})$ (o $(A, \prec)$) se lo llama conjunto ordenado.

Ejemplo 2.1. *Veamos algunos ejemplos:*

1. *La relación $\leq$ usual en el conjunto de los números reales.*
2. *La relación $\geq$ usual en el conjunto de los números reales.*
3. *Para un conjunto arbitrario A, la relación $\subseteq$ en $P(A)$.*
4. *En el conjunto de los números enteros, la relación $a \prec b$ si y solo si a divide a b.*
5. *La reláción $a \prec b$ si y solo si puede se puede llegar de a a b por un 'camino de $\rightarrow$' en el siguiente gráfico:*



Nota 2.2. *A veces resulta útil graficar las relaciones de orden en forma de gráficos (llamados diagramas de Hasse) como el de la Figura 5 anterior. Para facilitar su comprensión, se acuerda la siguiente convención: no se dibujan las flechas correspondientes a $a \prec a$ ni la flecha $a \prec c$ cuando están presentes las flechas correspondientes a $a \prec b$ y $b \prec c$.*

Por ejemplo, el diagrama de Hasse de la relación $a \prec b$ si y solo si a divide a b en el conjunto $A = \{1, 2, 3, 4, 6, 8\}$, se muestra en la Figura 4. Observar que en el diagrama anterior no graficamos las flechas $x \rightarrow x$. Tampoco graficamos, por ejemplo, la flecha $1 \rightarrow 4$.

Ejercicio: Describir $\mathcal{R}$ del ejemplo anterior por extensión.

Para ver otro ejemplo, sea $A = \{1, 2, 3\}$ y consideremos la relación del Ejemplo 2.1.3. El digrama de Hasse de esta relación es como se muestra en la Figura 5.

Definición: Sea $(A, \prec)$ un conjunto ordenado. Diremos que dos elementos distintos $x, y \in A$ son comparables si $x \prec y$ o $y \prec x$. En caso contrario, diremos que x e y son no comparables.

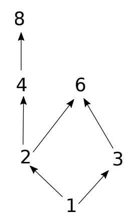


Figure 4: $(A, \prec)$

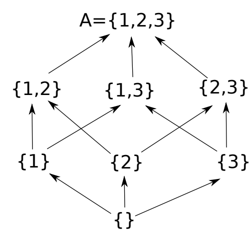


Figure 5: $\mathcal{P}(A), \subseteq)$

Un conjunto ordenado es totalmente ordenado si todo par de elementos es comparable y en este caso, decimos que el orden es un orden total.

Ejemplo 2.3. *Veamos algunos ejemplos:*

1. *La relación $\leq$ usual en el conjunto de los números reales es un orden total.*
2. *Para un conjunto A con al menos dos elementos, la relación $\subseteq$ en $\mathcal{P}(A)$ no es un orden total. En efecto, si tenemos dos elementos distintos $a, b \in A$, entonces $\{a\}$ y $\{b\}$ son elementos no comparables ya que $\{a\} \nsubseteq \{b\}$ y $\{b\} \nsubseteq \{a\}$.*
3. *En el conjunto de los números enteros, la relación $a \prec b$ si y solo si a divide a b no es un orden total. Por ejemplo, 2 y 3, son elementos no comparables.*
4. *En el conjunto $\{1, 2, 4\}$, la relación $a \prec b$ si y solo si a divide a b es un orden total.*

Definición: Sean $(A, \mathcal{R})$ un conjunto ordenado y $B \subseteq A$. El orden inducido por $\mathcal{R}$ en B es $\mathcal{R}_B = \mathcal{R} \cap (B \times B)$, es decir, si $x, y \in B$, $x\mathcal{R}_B y$ si y solo si $x\mathcal{R}y$. La relación $\mathcal{R}_B$ se llama orden en B inducido por $\mathcal{R}$

Un conjunto ordenado $(B, \mathcal{S})$ es un subconjunto ordenado de $(A, \mathcal{R})$ si $B \subseteq A$ y $S = \mathcal{R}_B$.

Además, si $\mathcal{R}_B$ es un orden total en B, $(B, \mathcal{R}_B)$ se llama subconjunto ordenado de $(A, \mathcal{R})$ o cadena.

Consideremos la relación $a \prec b$ si y solo si a divide a b en el conjunto $A = \{1, 2, 3, 4, 6, 8\}$, graficada en la Figura 4.

Si $B_1 = \{1, 3, 4\} \subseteq A$, obtenemos el subconjunto ordenado de la Figura 6 (a).
Por otro lado, si $B_2 = \{1, 2, 8\}$, obtenemos la cadena de la Figura 6 (b).
Finalmente, si $B_3 = \{2, 3, 8\}$, obtenemos el subconjunto ordenado de la Figura 6 (c).

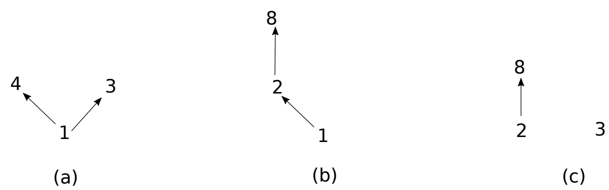


Figure 6: Subconjuntos ordenados

Elementos distinguidos de un conjunto ordenado

Definición: Sea $(A, \prec)$ un conjunto ordenado.
Un elemento $a \in A$ es un elemento minimal si para todo $x \in A$ tal que $x \prec a$, se tiene que $x = a$.
Un elemento $a \in A$ es un elemento maximal si para todo $x \in A$ tal que $a \prec x$, se tiene que $x = a$.

Ejemplo 2.4. *Veamos algunos ejemplos:*

1. *En* $(\mathbb{R}, \leq)$ *no hay elementos maximales ni minimales.*

2. *En* $(\mathbb{N}, \leq)$ 0 *es el único elemento minimal y no hay elementos maximales.*

3. *Si* A *es un conjunto arbitrario, en* $(\mathcal{P}(A), \subseteq)$, $\emptyset$ *es el único elemento minimal y* A *es el único elemento maximal.*

4. *En el conjunto ordenado de la Figura 6 (a),* 1 *es el único elemento minimal y* 3 *y* 4 *son elementos maximales.*

5. *En el conjunto ordenado de la Figura 6 (c),* 2 *y* 3 *son elementos minimales y* 3 *y* 8 *son elementos maximales.*

6. *En el conjunto ordenado de la Figura 4,* 1 *es el único elemento minimal y* 6 *y* 8 *son elementos maximales.*

7. *Sea* $A = \mathbb{Z} \cup \{alpha\}$*. Consideremos el orden* $\prec$ *definido como sigue: si* $x, y \in \mathbb{Z}$*,* $x \prec y$ *si y solo si* $x \leq y$ *y* $\alpha \prec x$ *para todo* x *no negativo. El únicoo elemento minimal es* α *y no hay elementos maximales.*

Definición: Sea $(A, \prec)$ un conjunto ordenado.
Un elemento $a \in A$ se llama mínimo (o primer elemento) si $a \prec x$ para todo $x \in A$.
Un elemento $a \in A$ se llama máximo (o último elemento) si $x \prec a$ para todo $x \in A$.

Si un conjunto tiene máximo o mínimo, este es único. (Justificar!)

Ejemplo 2.5. *Veamos algunos ejemplos:*

1. *En* $(\mathbb{R}, \leq)$ *no hay elementos máximo ni mínimo.*

2. *En* $(\mathbb{N}, \leq)$ 0 *es el mínimo y no hay máximo.*

3. *En el conjunto ordenado de la Figura 6 (a),* 1 *es el mínimo y no hay máximo.*

4. *En el conjunto ordenado de la Figura 6 (c), no hay elementos máximo ni mínimo.*

5. *En el conjunto ordenado del Ejemplo 2.5 (7), no hay elementos máximo ni mínimo.*

Definición: Sean $(A, \prec)$ un conjunto ordenado y $B \subseteq A$.
Un elemento $a \in A$ se llama cota inferior para B si $a \prec x$ para todo $x \in B$. Una cota inferior a' de B es el ínfimo de B si $a \prec a'$ para toda cota inferior de B.
Un elemento $a \in A$ se llama cota superior para B si $x \prec a$ para todo $x \in B$. Una cota superior a' de B es el supremo de B si $a' \prec a$ para toda cota superior de B.

Si un conjunto ordenado tiene cotas superiores (inferiores) se dice que está acotado superiormente (inferiormente). Si tiene ambas, se dice que el conjunto es acotado.

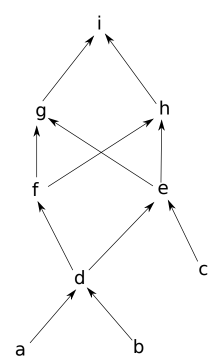


Figure 7: Cotas

Consideremos el ejemplo de la Figura 7.

- Si $B_1 = \{e, f, g, h, i\}$, la única cota superior (y también supremo) es i. Las cotas inferiores son a, b y d y el ínfimo es d.

- Si $B_2 = \{d, e, f\}$, las cotas superiores son g, h e i y no hay supremo. Las cotas inferiores son a, b y d y el ínfimo es d.

- Si $B_3 = \{g, h, i\}$, la única cota superior (y también supremo) es i. Las cotas inferiores son a, b, d, f y e y no hay ínfimo.

- Si $B_4 = \{c, d\}$, las cotas superiores son e, g, h e i, el supremo es e. No hay cotas inferiores.

3 Relaciones de equivalencia

Definición: Una relación $\mathcal{R}$ en un conjunto A es una relación de equivalencia si es reflexiva, simétrica y transitiva.

Cuando $\mathcal{R}$ es una relación de equivalencia en un conjunto A, si $(a,b) \in \mathcal{R}$ diremos que a es equivalente a b y se nota $a \sim b$.

Ejemplo 3.1. *1. En todo conjunto A se tiene una relación de equivalencia trivial: $\mathcal{R} = \{(a,a) : a \in A\}$, es decir $a \sim b \Leftrightarrow a = b$.*

2. *Dado $m \in \mathbb{Z}$ fijo, se define una relación de equivalencia en $\mathbb{Z}$ como $a \sim b$ si y solo si $a - b$ es múltiplo de m. En este caso se escribe $a = b(mod\ m)$ para indicar que $a \sim b$ y se dice que a y b son congruentes módulo m.*

3. *En el conjunto $\mathbb{R}$ se tiene una relación de equivalencia tomando $x \sim y$ si y solo si $x - y \in \mathbb{Z}$.*

4. *La relación de paralelismo entre rectas de un plano es una relación de equivalencia.*

Dada una relación de equivalencia $\mathcal{R}$ en un conjunto A y un elemento $a \in A$, el conjunto $\mathcal{R}(a)$ se llama clase de equivalencia de a, y se nota $[a]$, es decir,

$$[a] = \{x \in A : (a,x) \in R\}.$$

Observar que, como $\mathcal{R}$ es simétrica, $[a] = \{x \in A : (x,a) \in \mathcal{R}\}$. Todo elemento $x \in [a]$ se dice que es un representante de esa clase de equivalencia.

Proposición 3.2. *Sean $\mathcal{R}$ una relación de equivalencia en un conjunto A y $a, b \in A$. Entonces:*

(1) $[a] \neq \emptyset$

(2) $(a,b) \in \mathcal{R}$ *si y solo si* $[a] = [b]$.

(3) $(a,b) \notin \mathcal{R}$ *si y solo si* $[a] \cap [b] = \emptyset$.

Demostración: Para ver que (1) es cierto, es suficiente observar que $a \in [a]$ ya que $\mathcal{R}$ es reflexiva.

(2) Sean ahora $a, b \in A$ tales que $(a,b) \in \mathcal{R}$. Si $x \in [a]$, por definición, $(a,x) \in \mathcal{R}$ o, dado que $\mathcal{R}$ es simétrica, $(x,a) \in \mathcal{R}$. Puesto que, por hipótesis $(a,b) \in \mathcal{R}$ y $\mathcal{R}$ es transitiva, resulta $(x,b) \in \mathcal{R}$ y por lo tanto $x \in [b]$. Esto prueba que $[a] \subseteq [b]$. La prueba de que $[b] \subseteq [a]$ es análoga.

Recíprocamente, sean ahora $a, b \in A$ tales que $[a] = [b]$. Esto implica, en particular, que $a \in [b]$ y, por definición de clases de equivalencia, $(a,b) \in \mathcal{R}$.

(3) Finalmente, sean ahora $a, b \in A$. Si existe $x \in [a] \cap [b]$, por definición de clases de equivalencia, $(a,x) \in \mathcal{R}$ y $(b,x) \in \mathcal{R}$. Dado que $\mathcal{R}$ es simétrica, resulta $(a,x) \in \mathcal{R}$ y $(x,b) \in \mathcal{R}$, y como $\mathcal{R}$ es transitiva, $(a,b) \in \mathcal{R}$.

Recíprocamente, sean ahora $a, b \in A$. Si $(a,b) \in \mathcal{R}$, por (2) sabemos que $[a] = [b]$. En particular $a \in [a] \cap [b]$. ■

Observar que el resultado anterior nos dice que:

- Todo elemento de A pertenece a alguna clase.
- Dos clases de equivalencia, o bien son iguales, o bien son conjuntos disjuntos.

Es decir, una relación de equivalencia separa los elementos de A en conjuntos disjuntos dos a dos (las clases de equivalencias).

Definición: Una partición P de un conjunto A es una colección de conjuntos no vacíos $\{X_1, X_2, ...\}$ tales que

- si $i \neq j$, $X_i \cap X_j = \emptyset$,
- para todo $a \in A$, existe $X_i \in P$ tal que $a \in X_i$.

Es claro, a partir de la Proposición 3.2, que una relación de equivalencia da lugar a una partición a través de las clases de equivalencia. Además, si tenemos una partición de un conjunto, entonces existe una relación de equivalencia subyacente, como demuestra el teorema siguiente.

Proposición 3.3. *Sea P una partición del conjunto A . Existe una única relación de equivalencia en A cuyas clases de equivalencia son los elementos de P.*

Demostración: Definamos la relación $\mathcal{R}$ en A como sigue: $(a, b) \in \mathcal{R}$ si y solo si existe $X_i \in P$ tal que $a, b \in X_i$.

Se puede demostrar, que $\mathcal{R}$ es una relación de equivalencia (Ejercicio). ■

Definición: Sea $\mathcal{R}$ una relación de equivalencia en un conjunto A. Llamaremos conjunto cociente de A por $\mathcal{R}$, y lo notaremos $A|_{\mathcal{R}}$, al conjunto cuyos elementos son las clases de equivalencia de A definidas por $\mathcal{R}$, es decir:

$$A|_R = \{[a] : a \in A\}.$$

Por ejemplo, el conjunto cociente de la relación de equivalencia de la Figura 3 es $\{[1], [2]\}$ o, equivalentemente $\{[3], [4]\}$ ya que hay solamente dos clases de equivalencia.