

Unidad 4: Cálculo Diferencial

Análisis Matemático I

Iker M. Canut

July 27, 2020

1 Motivacion

Recta tangente: fijando el punto A sobre la curva de una función, y otro punto $P \neq A$, la recta AP es secante a la curva, y su pendiente es la tangente trigonométrica del ángulo $B\hat{A}P$:

$$\text{Pendiente de } AP = \tan(B\hat{A}P) = \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

Luego, la pendiente de la recta tangente, es la tangente trigonométrica del ángulo $B\hat{A}T$:

$$\text{Pendiente de } AT = \tan(B\hat{A}T) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

Velocidad Instantánea: Se define la velocidad instantánea en el tiempo $t = a$ como:

$$v(a) = \lim_{t \rightarrow a} \frac{f(t) - f(a)}{t - a}$$

2 Definición de Derivada

Sea f una función definida en un intervalo abierto y a un punto cualquiera de dicho intervalo, se dice que la función f tiene **derivada** en el punto $a \iff$ existe el límite: $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$.

Proponiendo el **cambio de variable** $h = x - a$, f es derivable en $a \iff \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$

Llamamos **cociente incremental** a cualquiera de las expresiones: $\frac{f(x) - f(a)}{x - a}$ o $\frac{f(a+h) - f(a)}{h}$, y al límite, si existe, lo denominamos derivada de f en a , y lo denotamos con $f'(a)$.

Algunas **notaciones** para referir a la derivada de la función f en un punto a son:

$$f'(a), \quad Df(a), \quad \frac{df}{dx}(a), \quad \frac{dy}{dx}(a), \text{ donde } y = f(x)$$

3 Función Derivada y Derivadas Sucesivas

En el conjunto $\{x \in \text{Dom}(f) : f \text{ es derivable en } x\} \subseteq \text{Dom}(f)$ definimos la **función derivada primera** de f como $f' : \text{Dom}(f') \rightarrow \mathbb{R}, x \rightarrow f'(x)$.

Dada la función derivada $(n-1)$ -ésima de la función f , se llama derivada n -ésima de f a la función derivada primera de la función $f^{(n-1)}$ y se lo nota $f^{(n)} = (f^{(n-1)})'$.

Para las funciones derivadas de orden n , notamos:

$$f^{(n)}(a), \quad D^n f(a), \quad \frac{d^n f}{dx^n}(a), \quad \frac{d^n y}{dx^n}(a), \text{ donde } y = f(x)$$

4 Interpretaciones de la Derivada

Si f es una función derivable en un punto a , la **recta tangente** a la gráfica de f en el punto $(a, f(a))$ es la recta que pasa por dicho punto, con pendiente $f'(a)$. O en forma explícita, $y = f'(a)(x-a) + f(a)$.

Si el cociente incremental no tiene límite en el punto, pero si tiene límites laterales diferentes, al punto se lo llama anguloso, y no cuenta con recta tangente allí.

La **recta normal** de una gráfica de una función f en el punto $(a, f(a))$ es la recta que pasa por dicho punto, con pendiente $-\frac{1}{f'(a)}$, si $f'(a) \neq 0$, de ecuación $-\frac{1}{f'(a)}(x-a) + f(a)$, o $x = a$ si $f'(a) = 0$.

Dada una función $y = f(x)$, el valor de la derivada $f'(a)$ se interpreta como la **razón de cambio** de la variable y , respecto de la variable x , cuando $x = a$. Es decir, $\frac{dy}{dx}(a) = f'(a)$, donde $y = f(x)$.

La razón de cambio de la **posición** es la **velocidad**, y su razón de cambio es la **aceleración**.

5 Algunas Derivadas

5.1 Función Lineal

La función lineal $f(x) = m \cdot x + h$ es derivable en todo $a \in \mathbb{R}$ y vale $f'(a) = m$.

Demostración: $f'(a) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{(mx + h) - (ma + h)}{x - a} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{m(x - a)}{x - a} = m$

5.2 Función Potencia

Recordamos que $(x + y)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^{n-k} \cdot y^k$, luego

Para $n \in \mathbb{N}$, la función $f(x) = x^n$ es derivable en todo $a \in \mathbb{R}$ y vale $f'(a) = n \cdot a^{n-1}$.

Demostración:

$$\begin{aligned} f'(a) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(a+h)^n - a^n}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^{n-k} \cdot h^k) - a^n}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(a^n + \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} a^{n-k} \cdot h^k) - a^n}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sum_{k=1}^n \binom{n}{k} a^{n-k} \cdot h^k}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\binom{n}{1} a^{n-1} h + \sum_{k=2}^n \binom{n}{k} a^{n-k} \cdot h^k}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} n \cdot a^{n-1} + \sum_{k=2}^n \binom{n}{k} a^{n-k} \cdot h^{k-1} = n \cdot a^{n-1} + 0 = n \cdot a^{n-1} \end{aligned}$$

5.3 Funciones Trigonómicas

Recordando que:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin h}{h} = 1 \qquad \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cos h - 1}{h} = 0$$

$$\sin(a+h) = \sin a \cdot \cos h + \cos a \cdot \sin h \qquad \cos(a+h) = \cos a \cdot \cos h - \sin a \cdot \sin h$$

$f(x) = \sin x$ y $g(x) = \cos x$ son derivables en todo $a \in \mathbb{R}$ y valen $f'(x) = \cos x$ y $g'(x) = -\sin x$

Demostración:

$$\begin{aligned} f'(a) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin(a+h) - \sin a}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(\sin a \cdot \cos h + \cos a \cdot \sin h) - \sin a}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \sin a \cdot \frac{\cos h - 1}{h} + \cos a \cdot \frac{\sin h}{h} = \sin a \cdot 0 + \cos a \cdot 1 = \cos a \\ g'(a) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cos(a+h) - \cos a}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(\cos a \cdot \cos h - \sin a \cdot \sin h) - \cos a}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \cos a \cdot \frac{\cos h - 1}{h} - \sin a \cdot \frac{\sin h}{h} = \cos a \cdot 0 - \sin a \cdot 1 = -\sin a \end{aligned}$$

6 Continuidad de las Funciones Derivables

Teorema 1: Si una función f es derivable en un punto, entonces es continua en dicho punto.

Demostración: Sea f derivable en un punto a y $x \neq a$, $f(x) - f(a) = \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \cdot (x - a)$. Luego,

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) - f(a) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \cdot \lim_{x \rightarrow a} (x - a) = f'(a) \cdot 0 = 0 \therefore \lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a) \text{ y } f \text{ continua en } a. \blacksquare$$

7 Álgebra de Derivadas

Teorema 2: Sean f y g dos funciones derivables en un punto a y c una constante real:

- $(f + g)'(a) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{(f + g)(x) - (f + g)(a)}{x - a} = \lim_{x \rightarrow a} \left(\frac{f(x) - f(a)}{x - a} + \frac{g(x) - g(a)}{x - a} \right) = f'(a) + g'(a)$
- $(c \cdot f)'(a) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{(c \cdot f)(x) - (c \cdot f)(a)}{x - a} = \lim_{x \rightarrow a} c \cdot \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = c \cdot f'(a)$
- $(f - g)'(a) = f'(a) - g'(a)$ ■

Teorema 3: Regla del Producto

$$\begin{aligned} (f \cdot g)'(a) &= \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) \cdot g(x) - f(a) \cdot g(a)}{x - a} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) \cdot g(x) - \overbrace{f(a) \cdot g(x)} + \overbrace{f(a) \cdot g(x)} - f(a) \cdot g(a)}{x - a} \\ &= \lim_{x \rightarrow a} \frac{(f(x) - f(a)) \cdot g(x) + f(a) \cdot (g(x) - g(a))}{x - a} \\ &= \lim_{x \rightarrow a} \left(\frac{f(x) - f(a)}{x - a} \cdot g(x) + f(a) \cdot \frac{g(x) - g(a)}{x - a} \right) = f'(a) \cdot g(a) + f(a) \cdot g'(a) \end{aligned}$$

Proposición 4: Derivada de una Potencia de Exponente Natural:

Si $n \in \mathbb{N}$ entonces $f(x) = x^n$ es derivable en a y vale $f'(a) = n \cdot a^{n-1}$.

Demostración: Sea $n = 1$, $f(a) = a$ y $f'(a) = 1 = 1 \cdot a^1 - 1$.

Para n , sea $f(x) = x^{n+1}$, se puede reescribir $f(x) = g(x) \cdot h(x)$, $g(x) = x^n$ y $h(x) = x$. Luego

$$f'(a) = g'(a) \cdot h(a) + g(a) \cdot h'(a) = n \cdot a^n \cdot a + a^n \cdot 1 = n \cdot a^n + a^n = (n + 1) \cdot a^n$$

y vale para $n + 1$, luego vale para todo $n \in \mathbb{N}$ que $f(x) = x^n \Rightarrow f'(a) = (n + 1) \cdot a^n$, $\forall a \in \mathbb{R}$ ■

Teorema 4: Derivada del Cociente de dos Funciones: Sea $g(a) \neq 0$

$$\begin{aligned} \left(\frac{f}{g} \right)'(a) &= \lim_{x \rightarrow a} \frac{\left(\frac{f}{g} \right)(x) - \left(\frac{f}{g} \right)(a)}{x - a} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) \cdot g(a) + f(a) \cdot g(x)}{g(x) \cdot g(a) \cdot (x - a)} \\ &= \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) \cdot g(a) - \overbrace{f(a) \cdot g(a)} + \overbrace{f(a) \cdot g(a)} + f(a) \cdot g(x)}{g(x) \cdot g(a) \cdot (x - a)} \\ &= \lim_{x \rightarrow a} \frac{(f(x) - f(a)) \cdot g(a) + f(a) \cdot (g(x) - g(a))}{g(x) \cdot g(a) \cdot (x - a)} \\ &= \lim_{x \rightarrow a} \frac{\frac{f(x) - f(a)}{x - a} \cdot g(a) - f(a) \frac{g(x) - g(a)}{x - a}}{g(x) \cdot g(a)} \\ &= \frac{f'(a) \cdot g(a) - f(a) \cdot g'(a)}{(g(a))^2} \end{aligned}$$

Proposición 5: Derivada de Potencias de Exponentes Enteros Negativos:

Sea $n \in \mathbb{N}$, entonces $f(x) = x^{-n} = \frac{1}{x^n}$ es derivable en todo $a \neq 0$ y vale $f'(a) = -n \cdot a^{-n-1}$. Definimos

$h(x) = 1$ y $g(x) = x^n$, luego $f = \frac{h}{g}$, y como ambas son derivables en $a \neq 0$, y $g(a) \neq 0$,

$$f'(a) = \frac{0 \cdot a^n - 1 \cdot n \cdot a^{n-1}}{a^{2n}} = -n \cdot a^{-n-1}$$

Combinando todos los resultados, concluimos que los polinomios son derivables en todo \mathbb{R} , al igual que las funciones racionales en todo su dominio.

Teorema 5: Regla de la Cadena: Sean dos funciones f y g tal que $\text{Rec}(g) \subseteq \text{Dom}(f)$, y un punto a tal que g es derivable en a y f derivable en $g(a)$, luego $(f \circ g)$ es derivable en a y vale:

$$(f \circ g)'(a) = f'(g(a)) \cdot g'(a)$$

Demostración: Si para un incremento de h unidades de a , notamos con la variable k al incremento de la función g , entonces $k = g(a + h) - g(a)$.

$$\begin{aligned} (f \circ g)'(a) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(f \circ g)(a + h) - (f \circ g)(a)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(g(a) + k) - (f(g(a)))}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(g(a) + k) - (f(g(a)))}{k} \cdot \frac{g(a + h) - g(a)}{h} \end{aligned}$$

Luego, tenemos que $h \rightarrow 0 \Rightarrow k = g(a + h) - g(a) \rightarrow 0$, y como f es derivable en $g(a)$,

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(g(a) + k) - (f(g(a)))}{k} = \lim_{k \rightarrow 0} \frac{f(g(a) + k) - (f(g(a)))}{k} = f'(g(a))$$

Por otro lado, como tenemos g derivable en a , $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(a + h) - g(a)}{h} = g'(a)$

Y finalmente llegamos a que $(f \circ g)'(a) = f'(g(a)) \cdot g'(a)$ ■

Nota: Si tenemos $(f \circ g \circ h)$, tenemos que es derivable en los puntos a tales que $(g \circ h)$ sea derivable en a y f sea derivable en $(g \circ h)'(a)$. Luego, vale $(f \circ (g \circ h))(a) = f'(g(h(a))) \cdot g'(h(a)) \cdot h'(a)$

Nota: Luego, cobra sentido la notación de Leibniz para la derivada. Si notamos $u = g(x)$,

$$\frac{d(f \circ g)}{dx} = \frac{df}{du} \cdot \frac{du}{dx}$$

8 Derivada de la Función Inversa

Teorema 6: Derivada de la Función Inversa: Sea f biyectiva, definida en el intervalo abierto I , derivable en $a \in I$, con $f'(a) \neq 0$, entonces su función inversa f^{-1} es derivable en $f(a)$ y vale:

$$(f^{-1})'(f(a)) = \frac{1}{f'(a)}$$

Demostración: $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f^{-1}(f(a) + h) - f^{-1}(f(a))}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f^{-1}(f(a) + h) - a}{h}$

Y como todo punto $f(a) + h$ en el dominio de f^{-1} es un punto en el recorrido de f , puede ser reescrito como $f(a) + h = f(a + k)$, para un único k (por la biyectividad de f). Luego,

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f^{-1}(f(a) + h) - a}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f^{-1}(f(a + k)) - a}{f(a + k) - f(a)} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{k}{f(a + k) - f(a)}$$

Y surge que $f(a) + h = f(a + k) \Rightarrow f^{-1}(f(a) + h) = a + k \Rightarrow k = f^{-1}(f(a) + h) - f^{-1}(f(a))$.

Por el Teorema de Continuidad de la Función Inversa, f^{-1} es continua en $f(a) \Rightarrow h \rightarrow 0 \Rightarrow k \rightarrow 0 \therefore$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{k}{f(a + k) - f(a)} = \lim_{k \rightarrow 0} \frac{k}{f(a + k) - f(a)} = \lim_{k \rightarrow 0} \frac{1}{\frac{f(a + k) - f(a)}{k}} = \lim_{k \rightarrow 0} \frac{1}{f'(a)}$$

■

Proposición 6: Derivada de Potencias de Exponente Racional:

1. Si $n \in \mathbb{N}$, entonces $x^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{x}$ es derivable en todo a del dominio con $a \neq 0$ y vale $f'(a) = \frac{1}{n} \cdot a^{\frac{1}{n}-1}$

Demostración: Sabemos que $f(x) = \sqrt[n]{x}$ es la inversa de $g(x) = x^n$. Luego, f es derivable en todo $b = g(a)$, donde $g'(a) \neq 0$, en este caso, $b \neq 0$. Y vale

$$f'(b) = \frac{1}{g'(a)} = \frac{1}{n \cdot a^{n-1}} = \frac{1}{n(\sqrt[n]{x})^{n-1}} = \frac{1}{n \cdot b^{1-\frac{1}{n}}} = \frac{1}{n} \cdot b^{\frac{1}{n}-1}$$

2. Si $n = \frac{p}{q} \in \mathbb{Q} \Rightarrow f(x) = x^{\frac{p}{q}}$ es derivable en todo a del dominio, $a \neq 0$, y vale: $f'(a) = \frac{p}{q} a^{\frac{p}{q}-1}$

Demostración: $f(x) = x^{\frac{p}{q}} = (x^{\frac{1}{q}})^p$. Por la regla de la cadena,

$$f'(a) = p(a^{\frac{1}{q}})^{p-1} \cdot \frac{1}{q} a^{\frac{1}{q}-1} = \frac{p}{q} a^{\frac{p}{q}} - 1$$

9 Derivada de Funciones Trigonométricas Inversas

9.1 Derivada del Arco Seno

Sea $f : [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \rightarrow [-1, 1]$, $f(x) = \sin x$, con la inversa $f^{-1} : [-1, 1] \rightarrow [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, $f^{-1}(x) = \arcsin x$,

Para todos los puntos a donde $f'(a) = \cos a \neq 0$, es decir, $a \neq \pm \frac{\pi}{2}$, se tendrá que f^{-1} es derivable en $b = f(a)$ y será:

$$(f^{-1})(f(a)) = \frac{1}{\cos x} = \frac{1}{\sqrt{1 - \sin^2 a}} = \frac{1}{\sqrt{1 - (f(a))^2}}$$

9.2 Derivada del Arco Coseno

Sea $g : [0, \pi] \rightarrow [-1, 1]$, $g(x) = \cos x$, con la inversa $g^{-1} : [-1, 1] \rightarrow [0, \pi]$, $g^{-1}(x) = \arccos x$

Para todos los puntos a donde $g'(a) = -\sin a \neq 0$, es decir, $a \neq 0 \wedge a \neq \pi$, se tendrá que g^{-1} es derivable en $b = g(a)$ y será:

$$(g^{-1})(g(a)) = \frac{1}{-\sin x} = -\frac{1}{\sqrt{1 - \cos^2 a}} = -\frac{1}{\sqrt{1 - (g(a))^2}}$$

9.3 Derivada del Arco Tangente

Sea $h : (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \rightarrow \mathbb{R}$, $h(x) = \tan x$, con la inversa $h^{-1} : \mathbb{R} \rightarrow (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$, $h^{-1}(x) = \arctan x$

Para todos los puntos a donde $h'(a) = \frac{1}{\cos^2 a} = \sec^2 a \neq 0$, se tendrá que h^{-1} es derivable en $b = g(a)$ y será:

$$(h^{-1})(h(a)) = \frac{1}{\sec^2 a} = \frac{1}{\sqrt{1 + \tan^2 a}} = \frac{1}{\sqrt{1 + (h(a))^2}}$$

9.4 Pasando en Limpio

$$(\arcsin)'(b) = \frac{1}{\sqrt{1-b^2}} \quad (\arccos)'(b) = -\frac{1}{\sqrt{1-b^2}} \quad (\arctan)'(b) = \frac{1}{1+b^2}$$