Unidad 6: Inducción

Iker M. Canut

28 de julio de 2020

1. Inducción

Objetivo general: Demostrar enunciados del estilo: $\forall n, P(n)$, donde $P(n)$ es una proposición que depende del numero natural n.

Axiomas: $\forall a, b, c \in \mathbb{R}$:

$S_1)$ $(a+b)+c = a+(b+c)$

$S_2)$ $(a+b) = (b+a)$

$S_3)$ $\exists 0 \in \mathbb{R} : a+0 = a$

$S_4)$ $\exists -a \in \mathbb{R} : a+(-a) = 0$

$P_1)$ $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$

$P_2)$ $(a \cdot b) = (b \cdot a)$

$P_3)$ $\exists 1 \in \mathbb{R} : 1 \neq 0 \wedge a \cdot 1 = a$

$P_4)$ $(a \neq 0) \Rightarrow \exists a^{-1} \in \mathbb{R} : a \cdot a^{-1} = 1$

$D)$ $a \cdot (b+c) = a \cdot b + a \cdot c$

$O_1)$ $(a = b) \veebar (a < b) \veebar (a > b)$

$O_2)$ $[(a < b) \wedge (b < c)] \Rightarrow (a < c)$

CS $(a < b) \Rightarrow (a+c < b+c)$

CP $[(a < b) \wedge (0 < c)] \Rightarrow (a \cdot c) < (b \cdot c)$

AS *Axioma del Supremo*

....

Un subconjunto $H \subset \mathbb{R}$ se llama **inductivo** si:

- $1 \in H$
- $x \in H \Rightarrow x+1 \in H$

....

Lema 1: *La intersección de una familia arbitraria de subconjuntos inductivos de $\mathbb{R}$ es un subconjunto inductivo.* Se demuestra considerando una familia $\{X_i : i \in I\}$ en donde $X_i \subset \mathbb{R}$ es inductivo $\forall i \in I$. Entonces tenemos que:

- $1 \in X_i$ $\forall i \in I$, luego $1 \in \bigcap\limits_{i \in I} X_i$
- Si $x \in X_i \Rightarrow x+1 \in X_i$ $\forall i \in I$, luego $x \in \bigcap\limits_{i \in I} Xi \Rightarrow x+1 \in \bigcap\limits_{i \in I} X_i$

Entonces tenemos que $\bigcap\limits_{i \in I} X_i$ es un subconjunto inductivo. ■

....

Se define a $\mathbb{N}$ como la intersección de todos los subconjuntos inductivos de $\mathbb{R}$. Como el único valor que **debe** estar por definición es el 1 (y sus sucesores), entonces $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, 5...\}$

....

Teorema: **Principio de Inducción**: Sea $P(n)$ una proposición que depende de $n \in \mathbb{N}$. Si:

1. $P(1)$ es verdadera
2. $P(k) \Rightarrow P(k+1)$ $\forall k \in \mathbb{N}$

Entonces $P(n)$ es verdadera $\forall n \in \mathbb{N}$.

Se demuestra considerando $H = \{k \in \mathbb{N} : P(k) \text{ es verdadera}\}$. Sabemos que $1 \in H$ y que si $k \in H \Rightarrow k+1 \in H$. Luego, H es un subconjunto inductivo de $\mathbb{R}$, contenido en $\mathbb{N}$. Y como $\mathbb{N}$ es el menor de subconjunto inductivo de $\mathbb{R}$, resulta $H = \mathbb{N}$ y $\therefore P(n)$ es verdadera $\forall n \in \mathbb{N}$. ■

....

Teorema: Sea $P(n)$ una proposición que depende de $n \in \mathbb{N}$. Si:

1. $P(n_0)$ es verdadera
2. $P(k) \Rightarrow P(k+1)\ \forall k \geq n_0$

Entonces $P(n)$ es verdadera $\forall k \geq n_0$

Se demuestra considerando $Q(n) = P(n_0 + n - 1)$. Luego sabemos que $Q(1) = P(n_0)$ es verdadera. Y sea $k \geq 1$, vemos que si $Q(k) = P(n_0 + k - 1)$ es verdadera, entonces $Q(k+1) = P(n_0 + k)$ también lo es. Y por el principio de inducción, $Q(n)$ es verdadera $\forall n \in \mathbb{N}$. I.e $P(n)$ es verdadera $\forall n \geq n_0$. $\blacksquare$

Observación: $P(n) \Rightarrow P(n+1)$ ocurre siempre. Pero que $P(1) \Rightarrow P(2)$ no quiere decir que $P(2)$ sea verdadera... Es decir, $P(1)$ puede ser falso y sin importar el valor de $P(2)$, la proposición es verdadera.

. . . .

Propiedades elementales de los $\mathbb{N}$

1. $n \in \mathbb{N} \wedge n \neq 1 \Rightarrow n - 1 \in \mathbb{N}$, es decir, $\exists m \in \mathbb{N} :\ n = m + 1$
   $P(1)$ es falsa, $P(2)$ es verdadera. Suponemos $P(n)$ y probamos $P(n+1)$: $(n+1) - 1 = n$.
   Luego es verdadera $\forall\ n \geq 2$, que es equivalente a decir $P(n)$, $(\forall n \in \mathbb{N} \wedge n \neq 1)$ $\blacksquare$
2. $m, n \in \mathbb{N} \Rightarrow (m + n \in \mathbb{N} \wedge m \cdot n \in \mathbb{N})$
   Fijamos m, inducción en n. $P(n) = m + n,\ Q(n) = m \cdot n$. Luego, $P(1)$ y $Q(1)$ son verdaderas.
   $P(n) \Rightarrow P(n+1) = m + (n+1) = (m+n) + 1 \in \mathbb{N}$.
   $Q(n) \Rightarrow Q(n+1) = m(n+1) = mn + m \in \mathbb{N}$ $\blacksquare$
3. $m, n \in \mathbb{N} \wedge m < n \Rightarrow n - m \in \mathbb{N}$
   Fijamos n y hacemos inducción en m. $P(1) : 1 < n \Rightarrow n - 1 \in \mathbb{N}$. Luego $P(m) \Rightarrow P(m+1) :$ $(m+1) < n \Rightarrow n - (m+1) \in \mathbb{N}$. Tenemos que $m < n$ y por HI. tenemos que $1 < n - m$. Luego, $n - (m+1) = (n-m) - 1 \in \mathbb{N}$ $\blacksquare$
4. $n \in \mathbb{N} \wedge (a \in \mathbb{R} :\ \ n - 1 < a < n) \Rightarrow a \notin \mathbb{N}$ $P(1)$ es veradera, pues $0 < a < 1 \Rightarrow a \notin \mathbb{N}$. $P(n) \Rightarrow P(n+1)$: $n < a < n + 1$. Suponemos que $a \in \mathbb{N}$, luego $0 < a - n < 1$, pero es absurdo ya que $a > n \Rightarrow a - n \in \mathbb{N}$. $\blacksquare$

. . . .

2. Definiciones Recursivas

Una sucesión $u_1, u_2, ...u_n$ está **definida recursivamente** si puede obtenerse de la siguiente manera:

- Se explicita el/los primer/os elemento/s $u_1[, u_2, ..., u_{n0}]$.
- Hay una regla para obtener el elemento u_{n+1} con $n \geq 1$ [o $n \geq n_0$] en función de los elementos anteriores de la sucesión.

2.1. Sumatoria

Dados n números $x_1, x_2, ..., x_n$, podemos definir recursivamente su suma $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_i$ como:

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^{n} x_i = x_1 \\ \\ \sum_{i=1}^{k+1} x_i = \sum_{i=1}^{k} x_i + x_{k+1},\ 2 \leq k \leq n-1 \end{cases}$$

2.2. Productoria

Dados n números $x_1, x_2, ..., x_n$, podemos definir recursivamente su producto $\prod_{i=1}^{n} x_i$ como:

$$\begin{cases} \prod_{i=1}^{n} x_i = x_1 \\ \\ \prod_{i=1}^{k+1} x_i = \prod_{i=1}^{k} x_i \cdot x_{k+1}, \ 2 \leq k \leq n-1 \end{cases}$$

....

3. Orden

Un subconjunto A de $\mathbb{R}$ tiene **primer elemento** si $\exists\ a \in A : a \leq x,\ \forall x \in A$ (se dice que a es el mínimo, no hay que confundirlo con el ínfimo)
Un subconjunto A de $\mathbb{R}$ se dice **bien ordenado** si todo subconjunto no vacio de A tiene primer elemento. Hay que tener cuidado porque el conjunto vacio está bien ordenado.

Sea $a < b$, los intervalos (a, b) y $(a, b]$ no tienen primer elemento, mientras que $[a, b)$ y $[a, b]$ si tienen. De todas maneras, ninguno de éstos está bien ordenado, ya que se puede encontrar un intervalo dentro del mismo en donde no se tenga un primer elemento!

Teorema: **Principio de buena ordenación**: $\mathbb{N}$ es un conjunto bien ordenado.
Demostración: Por el absurdo, suponemos $X \subset \mathbb{N}$: que no tiene primer elemento.
Sea $H = \{n \in \mathbb{N} : \{1, ..., n\} \subset \mathbb{N} - X\}$; la idea es demostrar que H es inductivo, ergo X es $\emptyset$.
Comenzamos con que $1 \in H$ (si no sucede es primer elemento de X).
Luego, si tenemos que el natural $k \in H$, hay dos posibilidades para $k+1$, que esté en H o que no esté, significando ésto que pertenece a X. Pero si perteneciera a X, éste sería el primer elemento, lo cual es absurdo. Entonces $x + 1 \in H$ y H es inductivo $\Rightarrow H = \mathbb{N}$ y $X = \emptyset$.
$\therefore$ Todo subconjunto no vacío de $\mathbb{N}$ tiene primer elemento. ■

Teorema: **Principio de Inducción Fuerte** Sea $P(n)$ una proposición que depende del natural n:

1. Si $P(1)$ es verdadera
2. Si $\forall k \geq 1$, si $P(1), P(2), ..., P(k)$ son verdaderas, entonces $P(k+1)$ es verdadera.

Entonces $P(n)$ es verdadera para todo $n \in \mathbb{N}$.
Demostración: Sea $X = \{n \in \mathbb{N} : \text{ P(n) es falsa}\}$, queremos ver que $X = \emptyset$.
Supongamos $x \neq \emptyset$ y que n_0 es el primer elemento de X. Observar que $n_0 \geq 2$, pues $P(1)$ es verdadera. Luego, $1, ..., n_0 - 1 \notin X$, o equivalentemente, $P(1), ..., P(n_0 - 1)$ son verdaderas. Pero el *item 2* nos dice implica que $P(n_0)$ tiene que ser verdadera, y por ende no pertenecer a X, lo cual es absurdo.