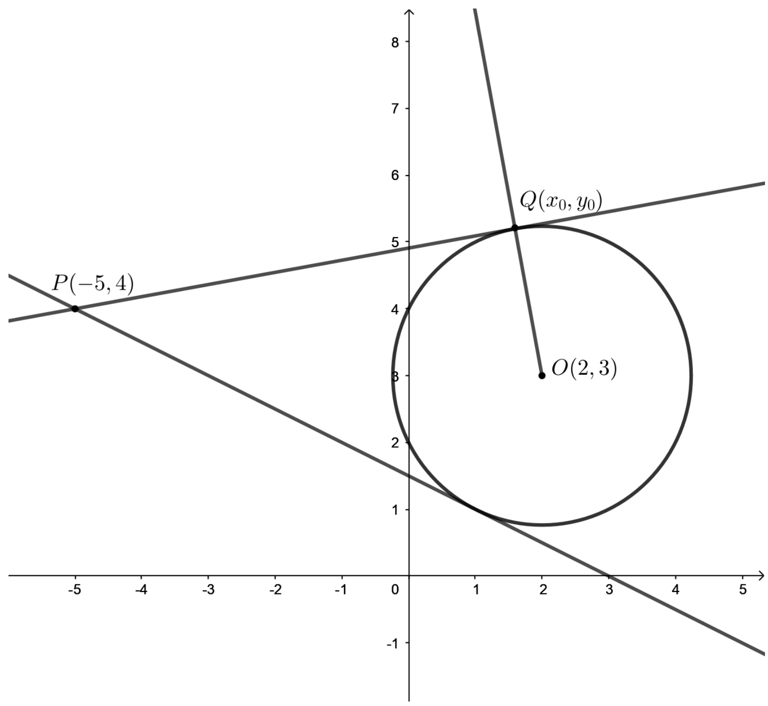
Problemas resueltos

9. a) Sea $\mathcal{C}$ la circunferencia de ecuación

$$(x-2)^2+(y-3)^2=5$$

y sea P el punto de coordenadas $(-5,4)$.

En el siguiente gráfico denotemos por $Q\,(x_0,y_0)$ al punto de intersección de una de las rectas tangentes a $\mathcal{C}$ que pasa por el punto P.



Recordemos que toda recta tangente a una circunferencia es perpendicular al segmento determinado por el centro de la circunferencia y el punto donde la recta y la circunferencia se intersectan. Entonces, usando esta propiedad geométrica de las circunferencias, tenemos que el vector $\overline{PQ}=(x_0+5,y_0-4)$ (que es un vector dirección de la recta determinada por los puntos P y Q) es perpendicular al vector $\overline{OQ}=(x_0-2,y_0-3)$ y, consecuentemente, el producto escalar entre $\overline{PQ}$ y $\overline{OQ}$ deber ser igual a cero. Planteando el producto escalar en términos de las compomentes de $\overline{PQ}$ y $\overline{OQ}$ y trabajando algebraicamante obtenemos

$$x_0^2+3x_0-10+y_0^2-7y_0+12=0 \tag{1}$$

Por otra parte, como el punto $Q\in\mathcal{C}$, tenemos que sus coordenadas deben verificar la ecuación

$$(x_0-2)^2+(y_0-3)^2=5. \tag{2}$$

Ahora, desarrollando los cuadrados en la ecuación (2) y restándole miembro a miembro la ecuación (1) obtenemos

$$-7x_0+11+y_0=5,$$

de donde sigue que

$$y_0 = 7x_0 - 6.$$

Usando esta última igualdad junto con la ecuación (2), obtenemos la ecuación cuadratica

$$(x_0 - 2)^2 + (7x_0 - 9)^2 = 5$$

cuyas soluciones son $x_0 = 1$ y $x_0 = \frac{8}{5}$. Para la primera de estas soluciones tenemos que el vector dirección de la recta tangente es $\overline{PQ} = (6, -3)$ y para la segunda tenemos que $\overline{PQ} = \left(\frac{33}{5}, \frac{6}{5}\right)$ y por lo tanto las ecuaciones de las rectas tangentes a $\mathcal{C}$ que pasan por el punto P son

$$\left\{ \begin{array}{c} x = -5 + 6t \\ y = 4 - 3t \end{array} \right., t \in \mathbb{R} \quad \text{y} \quad \left\{ \begin{array}{c} x = -5 + \frac{33}{5}t \\ y = 4 + \frac{6}{5}t \end{array} \right., t \in \mathbb{R}.$$

17. Recordemos que si r es una recta del plano dada por la ecuación

$$Ax + By + C = 0$$

y P es un punto del plano de coordenadas (x_0, y_0), entonces la distancia entre r y P puede calcularse como

$$d(r, P) = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}.$$

Ahora. si $\mathcal{H}$ es la hipérbola de ecuación

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

sabemos que las asíntotas de $\mathcal{H}$ son las rectas dadas por las ecuaciones

$$r_1)\ y = -\frac{b}{a}x \ \text{ y } \ r_2)\ y = \frac{b}{a}x,$$

y los focos de $\mathcal{H}$ son los puntos $F_1(-c, 0)$ y $F_2(c, 0)$, donde $c = \sqrt{a^2 + b^2}$. Luego,

$$d(r_1, F_1) = \frac{|b(-c) + a0|}{\sqrt{a^2 + b^2}} = b,$$

y, análogamente,

$$d(r_2, F_1) = \frac{|b(-c) - a0|}{\sqrt{a^2 + b^2}} = b,$$

$$d(r_1, F_2) = \frac{|bc + a0|}{\sqrt{a^2 + b^2}} = b$$

y

$$d(r_2, F_2) = \frac{|bc - a0|}{\sqrt{a^2 + b^2}} = b.$$

27. a) Una transformación rígida es una función biyectiva $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ que preserva la distancia, i.e., para todo par de puntos $P, Q \in \mathbb{R}^2$, se tiene que

$$d(f(P), f(Q)) = d(P, Q).$$

Notemos que como f es biyectiva, existe f^{-1} que tambiés será una transformación rígida. En efecto, si $P, Q \in \mathbb{R}^2$ entonces, como f preserva la distancia, tenemos que

$$\begin{aligned} d\left(f^{-1}(P), f^{-1}(Q)\right) &= d\left(f\left(f^{-1}(P)\right), f\left(f^{-1}(Q)\right)\right) \\ &= d(P, Q). \end{aligned}$$

Ahora, si $\mathcal{E}(F_1, F_2, a)$ es la elipse con focos F_1, F_2 y distancia $2a$, por definición tenemos que

$$\mathcal{E}(F_1, F_2, a) = \left\{P \in \mathbb{R}^2 : d(P, F_1) + d(P, F_2) = 2a\right\}.$$

Queremos ver que la imagen de $\mathcal{E}(F_1, F_2, a)$ por una transformación rígida f (esto es el conjunto $f(\mathcal{E}(F_1, F_2, a)) = \{f(P) : P \in \mathcal{E}(F_1, F_2, a)\}$) es la elipse con focos $f(F_1), f(F_2)$ y distancia $2a$. Para esto, vamos a probar una doble contención de conjuntos.

Si $Q \in f(\mathcal{E}(F_1, F_2, a))$, entonces $Q = f(P)$, para algún $P \in \mathcal{E}(F_1, F_2, a)$. Luego, como f preserva la distancia, tenemos que

$$\begin{aligned} d(Q, f(F_1)) + d(Q, f(F_2)) &= d(f(P), f(F_1)) + d(f(P), f(F_2)) \\ &= d(P, F_1) + d(P, F_2) \\ &= 2a, \end{aligned}$$

y consecuentemente, $Q \in \mathcal{E}(f(F_1), f(F_2), a)$. Recíprocamente, si $Q \in \mathcal{E}(f(F_1), f(F_2), a)$ y $P = f^{-1}(Q)$, entonces (dado que f^{-1} es también una transformación rígida) tenemos que

$$\begin{aligned} d(P, F_1) + d(P, F_2) &= d\left(f^{-1}(Q), f^{-1}(f(F_1))\right) + d\left(f^{-1}(Q), f^{-1}(f(F_2))\right) \\ &= d(Q, f(F_1)) + d(Q, f(F_2)) \\ &= 2a. \end{aligned}$$

Luego, $P \in \mathcal{E}(F_1, F_2, a)$ y por lo tanto $Q = f(P) \in f(\mathcal{E}(F_1, F_2, a))$.