Facultad de Ciencias Exactas, Ingeniería y Agrimensura

Escuela de Ciencias Exactas

Departamento de Matemática

Análisis Matemático I - 2020

Funciones trigonométricas. Problemas resueltos.

1. Grafique las siguientes funciones:

   a) $f_1(x) = 3 + 3\cos(x)$,

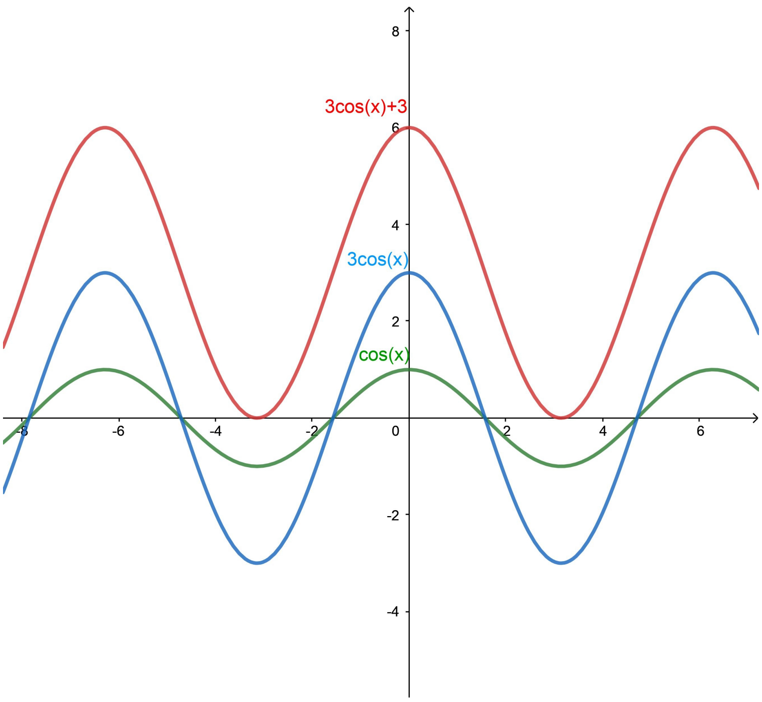
   b) $f_2(x) = |\cos(x)|$,

   c) $f_3(x) = \operatorname{sen}(2x)$.

   Solución:

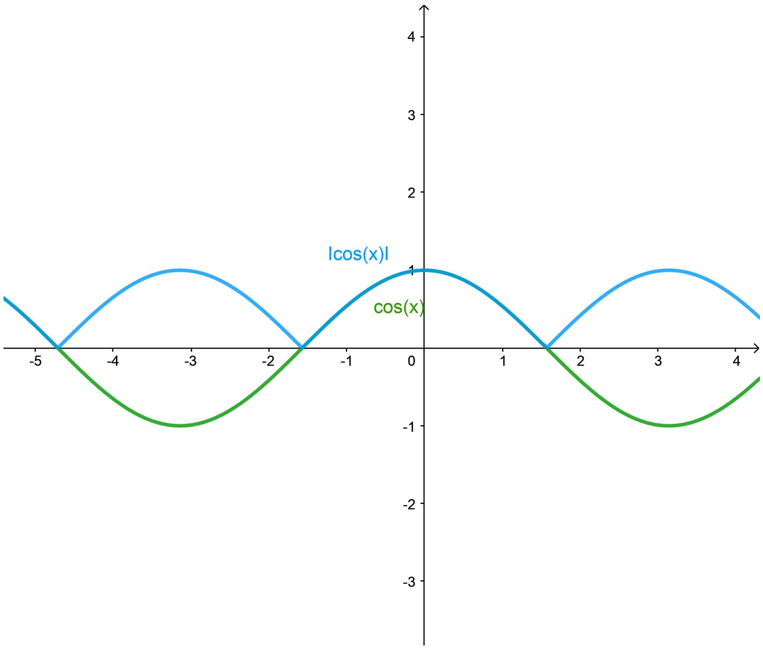
   Para resolver estos ejercicios, procederemos utilizando los métodos de corrimiento de funciones. Se muestran a continuación las gráficas paso a paso desde una función conocida a la función pedida por el ejercicio:

   a)



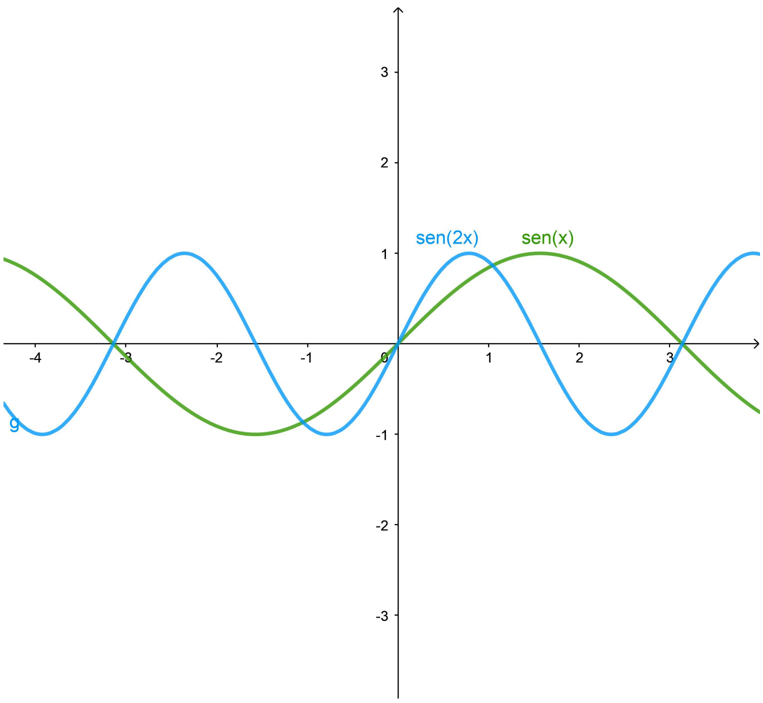
Observación: nótese como al multiplicar el $\cos(x)$ por tres se triplica su amplitud.

$b)$



Observación: la función $|\cos(x)|$ sigue siendo periódica, pero con un período igual a la mitad del período del $\cos(x)$, es decir, tiene período π.

$c)$



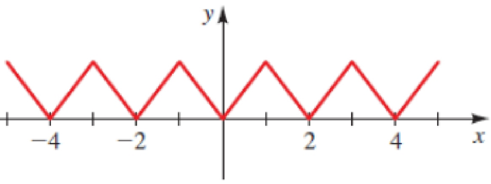
Observación: como vimos en el ejercicio $a)$, si multiplicamos la función coseno (lo mismo sucede con la función seno) por un número real, estaremos multiplicando su amplitud por ese número real. Ahora, observamos que cuando multiplicamos a la variable x en el argumento de la función, la amplitud no cambia sino que se modifica el período. En este caso, el período es la mitad cuando multiplicamos el argumento de la función por 2. En el caso general, el período de $f(x) = sen(kx)$ será el resultado de dividir el período del seno (es decir 2π) por k. En otras palabras,$f(x)$ tendrá período $T = \frac{2\pi}{k}$ (lo mismo para $g(x) = \cos(kx)$).

2. Una función f se dice *periódica* si existe un número positivo T tal que

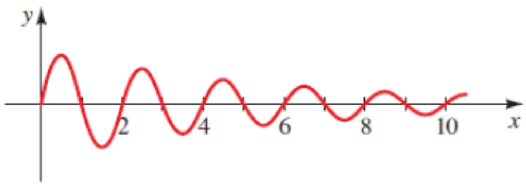
$$f(x+T) = f(x), \tag{1}$$

para todo x tal que $x, x+T \in Dom(f)$. El mínimo (si existe) de los valores de T que verifican (1) se denomina *período* de f. La gráfica de una función de período T se ve igual en cada intervalo de longitud T, de modo que podemos fácilmente determinar el período a partir de la gráfica. Determine si cada una de las funciones cuyas gráficas se muestran a continuación es periódica; si lo es, encuentre su período.

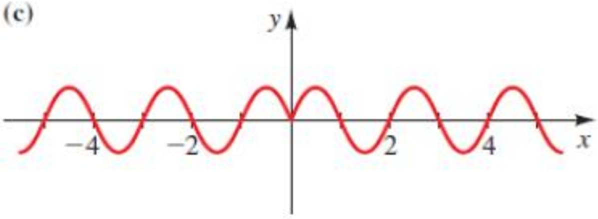
(a)



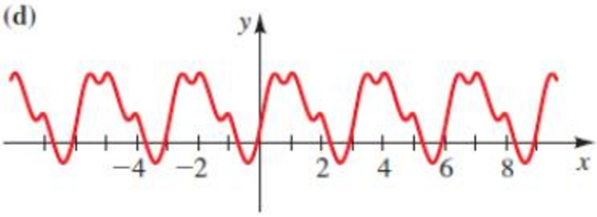
(b)



(c)



(d)

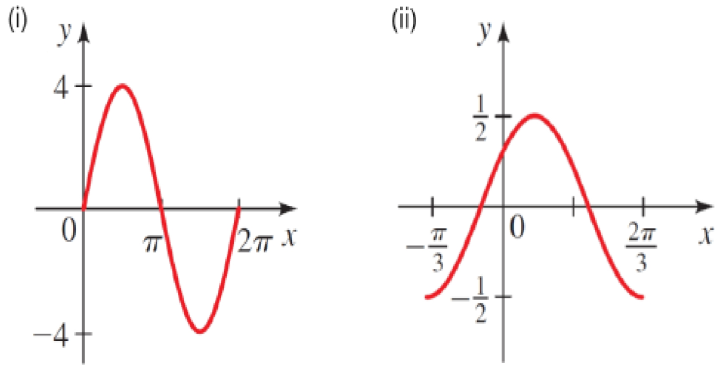


Solución:

La gráficas (a) y (d) son gráficas de funciones periódicas de período 2, mientras que las gráficas (b) y (c) no son gráficas de funciones periódicas. Note que en la gráfica (b) la amplitud disminuye a medida que crece la variable x. En la gráfica (c), podemos observar que la forma de la misma, para valores de la variable pertenecientes a cualquier intervalo (de longitud arbitraria) que contenga al 0, no se repite en ningún otro tramo de la curva.

3. Las funciones de la forma $f(x) = a\,\mathrm{sen}\,(k(x-b))$ y $f(x) = a\cos(k(x-b))$, donde a, b y k son parámetros reales, se denominan, respectivamente, funciones *sinusoidales* y *cosenoidales.*

   a) Las siguientes gráficas corresponden a funciones de este tipo. Determine la amplitud, el período y el defasaje, y halle la ley de cada una de estas funciones.



   b) Muestre que toda función sinusoidal es también una función cosenoidal y, recíprocamente, que toda función cosenoidal es una función sinusoidal.

Solución:

a) En la gráfica (i) se observa que la amplitud de la función es 4, el período es 2π y el desfasaje es 0 (con respecto a la función seno). Por lo tanto la ley de la función es $f(x) = 4sen(x)$.

La función representada en la gráfica (ii) tiene amplitud $\frac{1}{2}$, período 2π y desfasaje $-\frac{\pi}{3}$(con respecto a la función seno). Luego, la ley de la función es $f(x) = \frac{1}{2}sen\left(x + \frac{\pi}{3}\right)$.

b) Sabemos que las funciones *sen* y cos veriffican la identidad

$$sen(x) = \cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right).$$

Luego, tenemos que

$$\begin{aligned} f(x) &= asen(k(x-b)) \\ &= a\cos\left(k(x-b)-\frac{\pi}{2}\right) \\ &= a\cos\left(k\left(x-\left(b+\frac{\pi}{2k}\right)\right)\right), \end{aligned}$$

es decir, toda función sinusoidal f con amplitud $|a|$, período $\frac{2\pi}{k}$, y desfasaje b, puede reescribirse como una función cosenoidal con la misma amplitud y el mismo período que f y con desfasaje igual a $b+\frac{\pi}{2k}$. Análogamente, se prueba que toda función cosenoidal es también una función sinusoidal.

4. Para cada una de las siguientes funciones grafique un período completo y encuentre la amplitud, el período y el desfasaje.

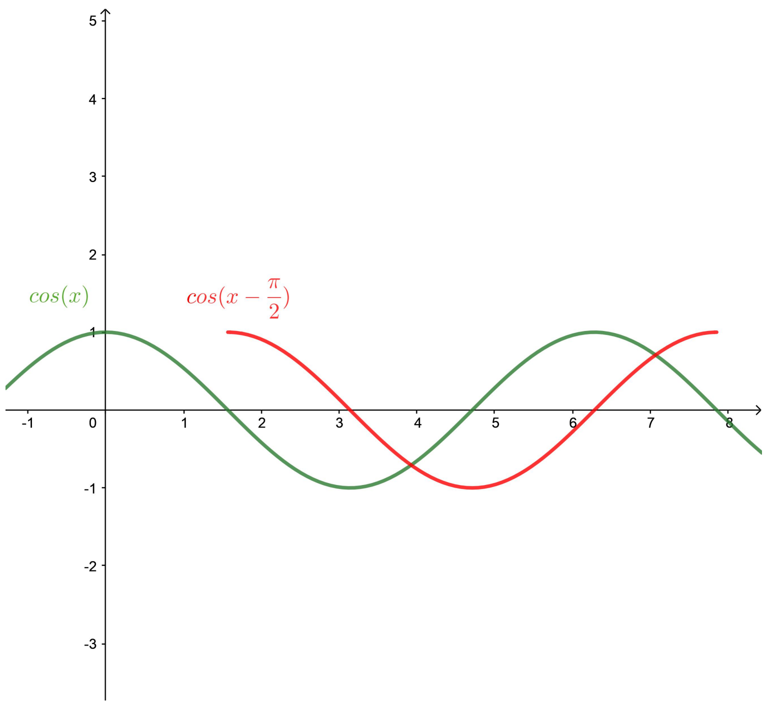
   a) $f_1(x)=\cos\left(x-\frac{\pi}{2}\right)$,

   b) $f_2\ x)=\frac{1}{2}\operatorname{sen}(x+\frac{\pi}{4})$,

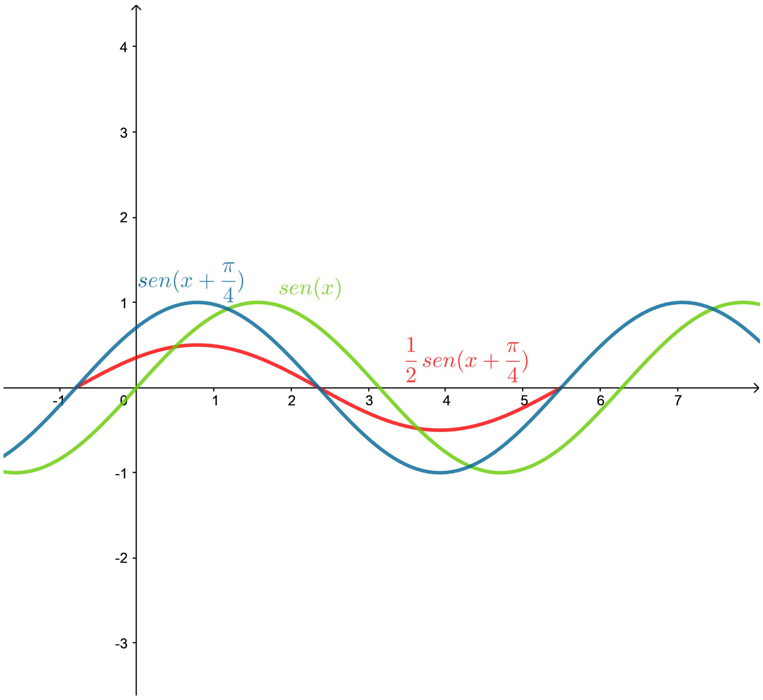
   c) $f_3(x)=\cos\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)$.

   Solución:

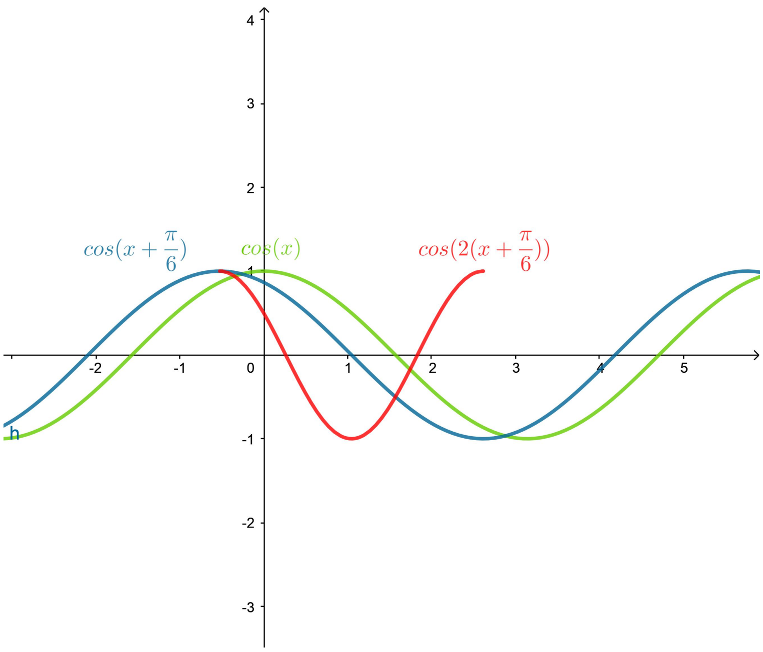
   a) La función $f_1(x)=\cos\left(x-\frac{\pi}{2}\right)$ la obtenemos desplazando la función $\cos(x)$ una cantidad $\frac{\pi}{2}$ a la derecha. Observamos que coincide por completo con la función $sen(x)$, lo cual era de esperar si estudiamos las identidades trigonométricas. Por lo tanto su amplitud es 1, su período 2π y su desfasaje $-\frac{\pi}{2}$ con respecto al $\cos(x)$.



   b) El primer paso, un corrimiento a la izquierda en $\frac{\pi}{4}$ de la gráfica de $sen(x)$, sólo produce lo que llamamos un desfasaje: no cambia el período ni la amplitud de la gráfica. Cuando multiplicamos toda la función $sen(x)$ por $\frac{1}{2}$, la amplitud de la misma (es decir, 1) se reduce a la mitad. Por eso la función $f_2(x)=\frac{1}{2}sen\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$ tiene período 2π (al igual que el seno), amplitud $\frac{1}{2}$ y desfasaje $\frac{\pi}{4}$.



c) Notemos que la función $f_3(x) = \cos\left(2x + \frac{\pi}{3}\right)$ puede reescribirse como $f_3(x) = \cos\left(2\left(x + \frac{\pi}{6}\right)\right)$. Luego, la amplitud de la función f_3 es 1, el desfasaje $-\frac{\pi}{6}$ y el período es π.



5. a) Esboce la gráfica de la función

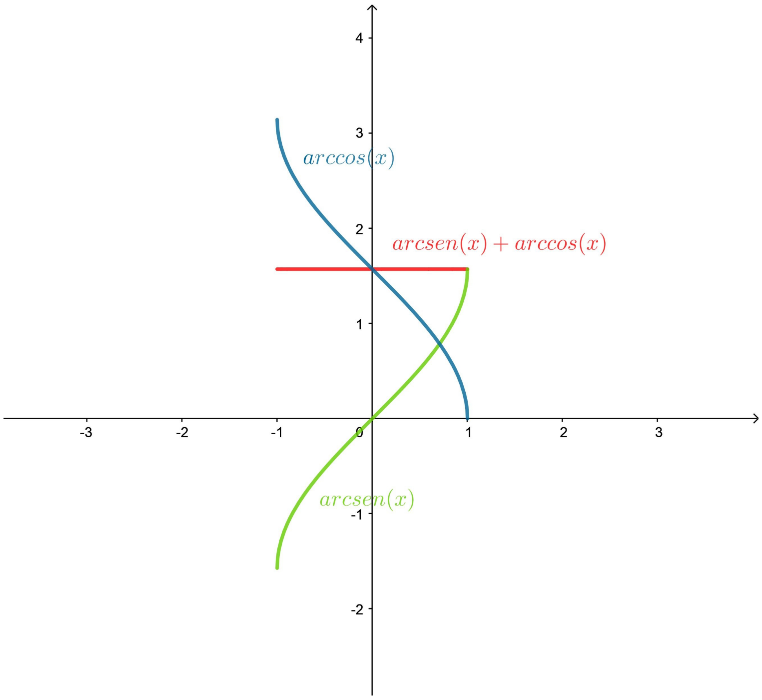
$$f(x) = \ arcsen(x) + \ arccos(x),$$

y haga una conjetura.

b) Pruebe la conjetura del apartado anterior.

Solución:

a) En la gráfica, se observa que la función $arcsen(x) + \arccos(x)$ es una función constante (aparentemente igual a $\frac{\pi}{2}$) con dominio de definición $[-1, 1]$.



b) Queremos probar que $arcsen\,(x) + \arccos(x) = \frac{\pi}{2}$. Si $\theta = arcsen\,(x)$, entonces $sen\,(\theta) = x$. Por otra parte,

$$sen\,(\theta) = \cos\left(\theta - \frac{\pi}{2}\right),$$

de donde sigue que $x = \cos\left(\theta - \frac{\pi}{2}\right)$. Ahora bien, para calcular, a partir de la última igualdad, el valor $\arccos(x)$ en términos de θ, debemos ser cuidadosos. Recordemos que

$$\arccos(\cos(x)) = x$$

si y sólo si $x \in [0, \pi]$. Luego, como $\theta = arcsen\,(x)$, tenemos que $\theta \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ y, en consecuencia, $\frac{\pi}{2} - \theta \in [0, \pi]$ (verifíquelo!). Además, como $\cos\left(\theta - \frac{\pi}{2}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)$ (¿por qué?), resulta que

$$\begin{aligned} arcsen\,(x) + \arccos(x) &= \theta + \arccos\left(\cos\left(\theta - \frac{\pi}{2}\right)\right) \\ &= \theta + \arccos\left(\cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)\right) \\ &= \theta + \frac{\pi}{2} - \theta \\ &= \frac{\pi}{2}. \end{aligned}$$

6. Cada vez que pulsa nuestro corazón, la presión sanguínea primero aumenta y después disminuye a medida que el corazón descansa entre una pulsación y otra. Las presiones sanguíneas máxima y mínima reciben el nombre de presiones *sistólica* y *diastólica*, respectivamente. Las *lecturas de presión sanguínea* se escriben como sistólica/diastólica. Una lectura de 120/80 se considera normal.

La presión sanguínea de cierta persona está modelada por la función

$$p(t) = 115 + 25\,sen\,(160\pi t),$$

donde $p(t)$ es la presión medida en $mmHg$ (milímetros de mercurio), en el tiempo t medido en minutos.

a) Encuentre el período de p.

b) Encuentre el número de pulsaciones por minuto.

c) Grafique la función p.

d) Encuentre la lectura de presión sanguínea.

Solución:

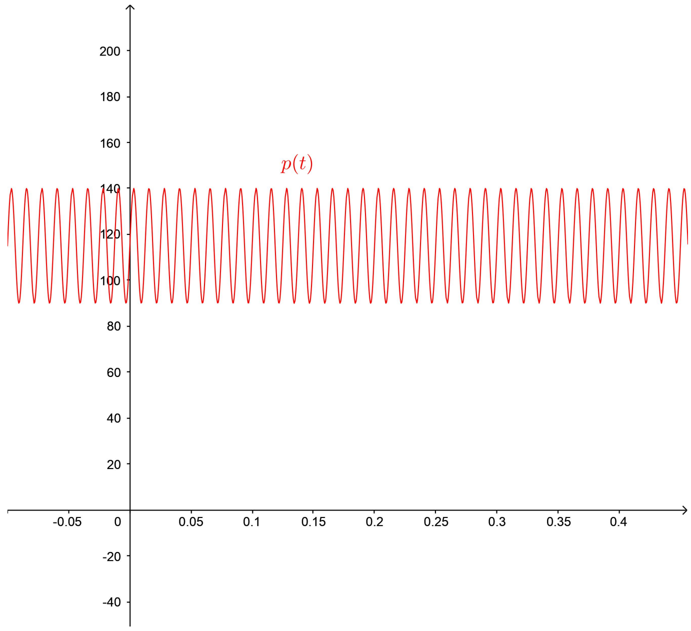
a) El período T de la función p puede obtenerse directamente de la expresión

$$p(t) = 115 + 25 sen(160\pi t),$$

como $T = \frac{2\pi}{160\pi} = \frac{1}{80}$.

b) Notemos que con cada pulsación, la presión p aumenta desde su mínimo hasta su máximo y, mientras el corazón descansa, vuelve a disminuir hasta alcanzar nuevamente su valor mínimo; es decir, cada pulsasión se corresponde con un período de la función p. Luego, para saber la cantidad pulsaciones por minuto, debemos contar la cantidad de períodos que hay en una unidad de tiempo. Así, el número de pulsaciones por minuto es $\frac{1}{T} = 80$.

c) Notemos que para apreciar la gráfica de p, debemos usar escalas diferentes en los ejes de las ordenadas y las abscisas.



d) Para obtener la lectura de presión debemos calcular el máximo y el mínimo de la función p. Como el máximo y el mínimo de la función seno (y, en consecuencia, de la función $sen(160\pi t)$) son, respectivamente, 1 y -1, tenemos que el máximo de p es

$$\text{máx}(p) = 115 + 25 = 140$$

y el mínimo de p es

$$\text{mín}(p) = 115 - 25 = 90.$$

Por lo tanto, la lectura de presión es $140/90$.

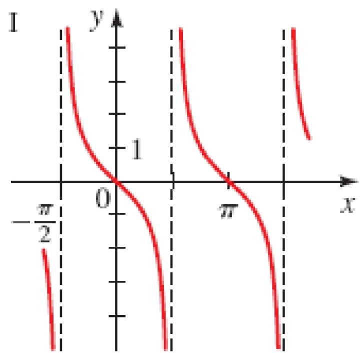
7. Relacione cada una de las funciones siguientes con su correspondiente gráfica.

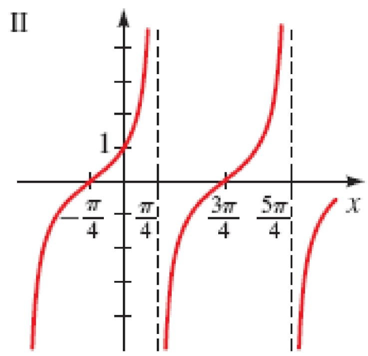
a) $f_1(x) = \tan\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$

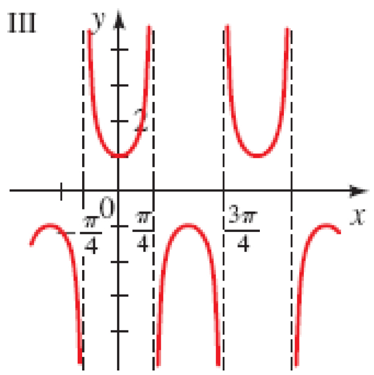
b) $f_2(x) = \sec(2x)$

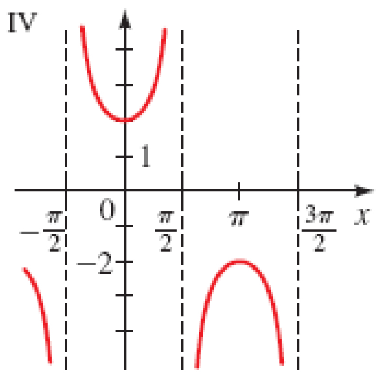
c) $f_3(x) = -\tan(x)$

d) $f_4(x) = 2\sec(x)$









Solución:

La gráfica de la función f_1 coincide con la gráfica de la función tangente desplazada $\frac{\pi}{4}$ unidades hacia la izquierda, es decir, la gráfica de la función f_1 es la II.

La gráfica de la función f_2 se obtiene comprimiendo la gráfica de la función secante a la mitad, con respecto al eje de las abscisas. Luego, la gráfica de la función f_2 es la III.

La gráfica de la función f_3 es simétrica con respecto al eje de las absisas de la gráfica de la función tangente. Luego, la gráfica de f_3 es la gráfica I.

La gráfica de la función f_4 debe ser igual a la gráfica de la función secante expandida con respecto al eje de las ordenadas. Luego, la gráfica de f_4 es la gráfica IV.