

Unidad 7: Vectores  
Álgebra y Geometría Analítica I (R-111)  
Licenciatura en Ciencias de la Computación

Iker M. Canut

2020

$\mathbb{R}^2 = \{(x, y) : x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}\}$ : es el conjunto de todos los pares ordenados de números reales.

$\mathbb{R}^n = \{(x_1, \dots, x_n) : x_i \in \mathbb{R}, i = 1..n\}$ : es el conjunto de todas las n-uplas ordenadas de números reales.

## 1. Sistema de Coordenadas

### 1.1. En la Recta

Dada una recta y un punto  $O$  llamado **origen** (al cual le corresponde el 0), quedan determinadas **dos semirectas**. Eligiendo arbitrariamente otro punto  $P \neq O$ , se le hace corresponder el 1. El segmento  $\overline{OP}$  se lo llama **segmento unitario**. El mismo determina la escala, y crea una correspondencia biunívoca entre los puntos de la recta y los números reales. El punto  $Q$  ubicado sobre la recta, simétricamente a  $P$  respecto del origen, le corresponde el número  $-1$ .  $P$  está en el **semieje positivo**,  $Q$  en el **negativo**.

### 1.2. En el Plano

Considerando un par de **rectas perpendiculares** (vertical y horizontal), se intersecan en el **origen**. Sobre cada recta se eligen unos puntos  $P_1$  y  $P_2$ , los cuales determinan la unidad de medida, la escala. Si ambas son iguales, se llama **sistema de ejes cartesianos ortogonales**. Luego, se establece una correspondencia biunívoca entre los puntos de un plano y el conjunto de los pares ordenados de  $\mathbb{R}^2$ . Sea  $P(a, b)$  un punto,  $a$  es la abscisa y  $b$  la ordenada de  $P$ .

### 1.3. En el Espacio

Consideramos 3 rectas que no están en el mismo plano, perpendiculares dos a dos entre si, que se cortan en el origen. Nuevamente tenemos  $P_1, P_2$  y  $P_3$ . Los 3 planos ( $XY, YZ$  y  $XZ$ ), forman 8 octantes. Luego, se establece una correspondencia biunívoca entre los puntos del espacio y las ternas de números reales: Si trazamos por  $P$  el plano paralelo a  $YZ$ , corta al eje  $x$  en un solo punto. Análogamente, trazando el plano paralelo a  $XZ$  corta en un solo punto al eje  $y$ , y el plano paralelo a  $XY$  corta en un solo punto al eje  $z$ . Obteniendo así las coordenadas  $a, b$  y  $c$  de  $P$ . Se escribe  $P(a, b, c)$ .

## 2. Vectores

Se llama **vector** a todo segmento orientado, es decir, a todo segmento determinado por un par ordenado  $(O, U)$  de puntos. El punto  $O$  se lo llama origen, y el punto  $U$  extremo del vector. En todo vector se distinguen:

- **Dirección:** dada por la recta que lo contiene (llamada recta sostén), o por una paralela a ella.
- **Sentido:** Dado por la orientación de la flecha. Cada flecha tiene dos sentidos.
- **Módulo:** Es igual a la longitud del segmento orientado. Si el módulo es 0, el vector es un punto, y aunque carece de dirección y sentido, se lo denomina vector nulo.

### 2.1. Igualdad de Vectores

Dos vectores son iguales cuando ambos tienen módulo 0 o cuando ambos tienen la misma dirección, sentido e iguales módulos. Dado un vector  $\overrightarrow{OU}$  y un punto  $A$ , se puede asegurar que existe un vector igual a  $\overrightarrow{OU}$  con origen en  $A$ , es decir, existe un  $B$  tal que  $\overrightarrow{OU} = \overrightarrow{AB}$ . Si dos vectores iguales tienen el mismo origen, se llaman **fijos**. Si están en la misma recta sostén, **deslizantes**, y sino se llaman **libres**.

### 2.2. Definiciones

- Se llama **versor** a todo vector de módulo 1.
- Se llama **versor asociado** a  $\vec{u}$  y se simboliza con  $\vec{u}_0$  al versor de igual sentido que  $\vec{u}$ .

- Dos vectores son **paralelos** cuando tienen igual dirección (aún con sentidos opuestos).
- Dado el vector  $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ , el vector  $\overrightarrow{BA}$  se lo llama **vector opuesto**. Se simboliza  $-\vec{u}$ . Si  $\vec{u}$  y  $\vec{v}$  son no nulos, tienen mismo módulo y dirección. El vector nulo es igual a su opuesto.
- Dados dos vectores no nulos  $\vec{u}$  y  $\vec{v}$ , se define el **ángulo** entre vectores, representandolo como  $(\vec{u} \wedge \vec{v})$  al ángulo convexo determinado por dichos vectores cuando sus orígenes aplican en un punto común. Si son paralelos el ángulo es  $0^\circ$  o  $180^\circ$ , dependiendo del sentido.
- $(\vec{u} \wedge \vec{v}) + (-\vec{u} \wedge \vec{v}) = 180^\circ$

### 3. Suma de Vectores

Sean  $\vec{u}$  y  $\vec{v}$ , fijando un  $A$ , queda determinado un  $B$  tal que  $\overrightarrow{AB} = \vec{u}$ , que a su vez determina un  $C$  tal que  $\overrightarrow{BC} = \vec{v}$ . Se llama **suma** de  $\vec{u}$  y  $\vec{v}$  al vector obtenido  $\overrightarrow{AC}$ , y simbolizamos  $\vec{u} + \vec{v}$ .

**Propiedades:** Sean  $\vec{u}$ ,  $\vec{v}$  y  $\vec{w}$ , se verifica que:

- $\vec{u} + \vec{v} = \vec{v} + \vec{u}$  (Conmutativa)
- $(\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w} = \vec{u} + (\vec{v} + \vec{w})$  (Asociativa)
- $\vec{u} + \vec{0} = \vec{0} + \vec{u}$  (Existencia de elemento neutro)
- $\vec{v} + -\vec{v} = -\vec{v} + \vec{v} = \vec{0}$  (Existencia del elemento opuesto)

Dados  $\vec{u}$  y  $\vec{v}$ , se llama **vector diferencia** entre  $\vec{u}$  y  $\vec{v}$ , simbolizando  $\vec{u} - \vec{v}$  a  $\vec{u} + -\vec{v}$ .

### 4. Producto de un Vector por un Escalar

Sea  $\vec{v}$  un vector y  $a$  un escalar cualquiera, se llama **producto del escalar  $a$  por el vector  $\vec{v}$**  y se simboliza  $a \cdot \vec{v}$  al vector que verifica:

- $|a \cdot \vec{v}| = |a| \cdot |\vec{v}|$
- Si  $a \neq 0$  y  $\vec{v} \neq \vec{0}$ , entonces  $a \cdot \vec{v}$  tiene la misma dirección que  $\vec{v}$  (son paralelos).
- Si  $a > 0$  entonces  $a \cdot \vec{v}$  tiene el mismo sentido que  $\vec{v}$ . Si  $a < 0$ , sentido opuesto.

**Propiedades:** Cualesquiera sean los escalares  $a$  y  $b$ , los vectores  $\vec{u}$  y  $\vec{v}$  verifican que:

- $a \cdot (\vec{u} + \vec{v}) = a \cdot \vec{u} + a \cdot \vec{v}$  (Distributiva respecto a la suma de vectores)
- $(a + b) \cdot \vec{u} = a \cdot \vec{u} + b \cdot \vec{u}$  (Distributiva respecto de la suma de escalares)
- $a \cdot (b \cdot \vec{u}) = (a \cdot b) \cdot \vec{u}$  (Homogeneidad o asociativa de los escalares)
- $1 \cdot \vec{u} = \vec{u}$  (El escalar 1 es la unidad para el producto)
- $(-1) \cdot \vec{u} = -\vec{u}$
- $(-a) \cdot \vec{u} = -(a \cdot \vec{u})$
- $a \cdot \vec{u} = \vec{0} \Rightarrow a = 0 \vee \vec{u} = \vec{0}$
- $\vec{u}_0 = \frac{1}{|\vec{u}|} \cdot \vec{u}$

### 5. Condición de Paralelismo entre Vectores

Dos vectores  $\vec{u}$ ,  $\vec{v}$  no nulos son paralelos  $\iff$  existe un real  $a \neq 0$  tal que  $\vec{v} = a \cdot \vec{u}$

$\Rightarrow$ ) Supongamos que  $\vec{u} \parallel \vec{v}$ . Pueden tener igual ( $a > 0$ ) o distinto sentido ( $a < 0$ ). Si tienen el mismo sentido,  $a = \frac{|\vec{v}|}{|\vec{u}|}$ , si no,  $a = -\frac{|\vec{v}|}{|\vec{u}|}$

$\Leftarrow$ ) Si existe  $a \neq 0 : \vec{v} = a \cdot \vec{u}$ , por definición de vector por escalar, son paralelos. ■

## 6. Proyección Ortogonal de un Vector Sobre la Dirección de Otro

Dados los vectores  $\vec{u} = \overrightarrow{OU}$  y  $\vec{v} = \overrightarrow{OV}$  no nulos, se llama **vector proyección ortogonal** de  $\vec{u}$  sobre  $\vec{v}$  y se nota  $proj_{\vec{v}} \vec{u}$  al vector  $\overrightarrow{OP}$ , donde  $P$  es el punto de intersección entre la recta sostén de  $\vec{v}$  y la perpendicular a ella que contiene a  $U$ . Si  $\vec{u} = \vec{0}$ , definimos  $proj_{\vec{v}} \vec{u} = \vec{0}$ . Al número  $p = |\vec{u}| \cdot \cos(\vec{u}, \vec{v})$  se lo llama **proyección escalar** de  $\vec{u}$  sobre  $\vec{v}$ .

## 7. Producto Escalar

Sean  $\vec{u}$  y  $\vec{v}$  dos vectores cualesquiera, se llama **producto escalar** de  $\vec{u}$  por  $\vec{v}$ , simbolizando  $\vec{u} \times \vec{v}$  al número real definido por:

$$\vec{u} \times \vec{v} \begin{cases} |\vec{u}| \cdot |\vec{v}| & \text{cuando } \vec{u} \neq \vec{0} \wedge \vec{v} \neq \vec{0} \\ 0 & \text{cuando } \vec{u} = \vec{0} \vee \vec{v} = \vec{0} \end{cases}$$

Luego,  $\vec{u} \times \vec{u} = |\vec{u}|^2$ , es decir "El producto escalar entre  $\vec{u}$  y  $\vec{u}$  es igual al módulo de  $\vec{u}$  al cuadrado".

**Propiedades:** Sean los vectores  $\vec{u}$ ,  $\vec{v}$ ,  $\vec{w}$  y el escalar  $a$ , se verifica que:

- $\vec{u} \times \vec{v} = \vec{v} \times \vec{u}$  (Conmutativa)
- $\vec{u} \times (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \times \vec{v} + \vec{u} \times \vec{w}$  (Distributiva)
- $a \cdot (\vec{u} \times \vec{v}) = (a \cdot \vec{u}) \times \vec{v} = \vec{u} \times (a \cdot \vec{v})$
- $\vec{u} \times \vec{u} \geq 0$ , valiendo la igualdad si y solo si  $\vec{u} = \vec{0}$

Sean  $\vec{u}$  y  $\vec{v}$  no nulos, decimos que  $\vec{u}$  es **perpendicular** a  $\vec{v}$ ,  $\vec{u} \perp \vec{v}$ , si y solo si  $(\vec{u} \wedge \vec{v}) = 90^\circ$ .  
Luego  $\vec{u} \perp \vec{v} \iff \vec{u} \times \vec{v} = 0$

Además,  $proj_{\vec{v}} \vec{u} = (\vec{u} \times \vec{v}_0) \cdot \vec{v}_0 = p \cdot \vec{v}_0$

## 8. Descomposición de un Vector

Notamos con  $\mathbb{V}_1$ ,  $\mathbb{V}_2$  y  $\mathbb{V}_3$  al conjunto de los vectores de una recta, un plano y del espacio.

### 8.1. En una Recta

Dado  $\vec{u}$  no nulo, cualquier otro vector  $\vec{v}$  de  $\mathbb{V}_1$  se puede expresar de manera única como  $\vec{v} = \alpha \cdot \vec{u}$ . A esto se lo llama **descomposición** de  $\vec{v}$  en la base formada por  $\vec{u}$ . Y  $\alpha$  es la **componente escalar** de  $\vec{v}$  en la base formada por  $\vec{u}$ . Luego, se establece una relación biunívoca entre vectores de  $\mathbb{V}_1$  y  $\mathbb{R}$ .

### 8.2. En el Plano

Sean dos vectores  $\vec{u} = \overrightarrow{OU}$  y  $\vec{v} = \overrightarrow{OV}$ , no nulos ni paralelos, cualquier otro vector  $\vec{w} = \overrightarrow{OW}$  puede escribirse como  $\vec{w} = a \cdot \vec{u} + b \cdot \vec{v}$  (trazando rectas paralelas a los vectores se determinan respectivamente los puntos  $A$  y  $B$  que son respectivamente paralelos a  $\vec{u}$  y  $\vec{v}$ , i.e existen únicos  $a$  y  $b$  tales que  $\overrightarrow{OA} = a \cdot \vec{u}$  y  $\overrightarrow{OB} = b \cdot \vec{v}$ ). Luego,  $\vec{u}$  y  $\vec{v}$  constituyen una base para los vectores de un plano, estableciendo así una correspondencia biunívoca entre  $\mathbb{V}_2$  y  $\mathbb{R}^2$ . Por ejemplo, a  $\vec{w}$  le corresponde el par ordenado  $(a, b)$ , que son los únicos escalares que permiten expresar a  $\vec{w}$  como combinación lineal de los vectores en la base dada. Obviamente si se cambia la base, los escalares también cambian.

En general el vector  $a_1 \cdot \vec{v}_1 + a_2 \cdot \vec{v}_2 + \dots + a_n \cdot \vec{v}_n$  se llama **combinación lineal** de los vectores  $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n$  con los escalares  $a_1, a_2, \dots, a_n$ .

### 8.3. En el Espacio

Dados 3 vectores  $\vec{u} = \overrightarrow{OU}$ ,  $\vec{v} = \overrightarrow{OV}$ ,  $\vec{w} = \overrightarrow{OW}$ , no nulos ni paralelos a un mismo plano. Sea un vector  $\vec{x} = \overrightarrow{OX}$ , si por dicho punto trazamos una recta paralela a  $\vec{w}$ , esta corta al plano determinado por  $\vec{u}$  y  $\vec{v}$  en un punto llamado  $M$ . Luego  $\overrightarrow{OM} = a \cdot \vec{u} + b \cdot \vec{v}$ . Por otra parte,  $\vec{x} = \overrightarrow{OM} + \overrightarrow{MX}$ , y  $\overrightarrow{MX} = \gamma \cdot \vec{w}$ , entonces  $\vec{x} = a \cdot \vec{u} + b \cdot \vec{v} + \gamma \cdot \vec{w}$ . Luego, de fijada la base, queda establecida una relación biunívoca entre los vectores de  $\mathbb{V}_3$  y las ternas ordenadas de  $\mathbb{R}^3$ .

## 9. Versores Fundamentales. Descomposición Canónica

Dado un sistema de ejes cartesianos ortogonales en el plano  $(O, x, y)$ , llamamos **versores fundamentales** y simbolizamos  $\vec{i}, \vec{j}$  a los versores cuyas direcciones y sentidos son los de los semi-ejes coordenados positivos  $x$  e  $y$  respectivamente. Dado un punto  $V(v_1, v_2)$ , queda determinado un  $\overrightarrow{OV}$ . Si trazamos paralelas a los ejes sobre  $V$ , se obtienen los puntos  $A(v_1, 0)$  y  $B(0, v_2)$ . Luego  $\vec{v} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} = v_1 \cdot \vec{i} + v_2 \cdot \vec{j}$ . Esto se llama **descomposición canónica** de  $\vec{v}$  en la base  $\{\vec{i}, \vec{j}\}$ . Luego escribimos  $\vec{v} = v_1 \cdot \vec{i} + v_2 \cdot \vec{j} = (v_1, v_2)$ . Análogamente para el espacio.

- Las componentes de  $\vec{i}$  son  $(1, 0, 0)$ , ya que  $\vec{i} = 1 \cdot \vec{i} + 0 \cdot \vec{j} + 0 \cdot \vec{k}$
- Sea  $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3)$  y  $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$ , entonces  $\vec{u} = \vec{v} \iff u_i = v_i, \forall i$
- $\vec{v} = (\vec{v} \times \vec{i}) \cdot \vec{i} + (\vec{v} \times \vec{j}) \cdot \vec{j} + (\vec{v} \times \vec{k}) \cdot \vec{k}$ . Recordar que  $v_1 = \vec{v} \cdot \vec{i}$

## 10. Operaciones por Componentes

- $\vec{u} + \vec{v} = u_1 \cdot \vec{i} + u_2 \cdot \vec{j} + u_3 \cdot \vec{k} + v_1 \cdot \vec{i} + v_2 \cdot \vec{j} + v_3 \cdot \vec{k} = (u_1 + v_1) \cdot \vec{i} + (u_2 + v_2) \cdot \vec{j} + (u_3 + v_3) \cdot \vec{k}$   
 $\therefore \vec{u} + \vec{v} = (u_1 + v_1, u_2 + v_2, u_3 + v_3)$
- $a \cdot \vec{u} = a \cdot (u_1 \cdot \vec{i} + u_2 \cdot \vec{j} + u_3 \cdot \vec{k}) = a \cdot u_1 \cdot \vec{i} + a \cdot u_2 \cdot \vec{j} + a \cdot u_3 \cdot \vec{k}$   
 $\therefore a \cdot \vec{u} = (a \cdot u_1, a \cdot u_2, a \cdot u_3)$
- $\vec{u} \times \vec{v} = (u_1 \cdot \vec{i} + u_2 \cdot \vec{j}) \times (v_1 \cdot \vec{i} + v_2 \cdot \vec{j})$   
 $= (u_1 \cdot \vec{i}) \times (v_1 \cdot \vec{i}) + (u_1 \cdot \vec{i}) \times (v_2 \cdot \vec{j}) + (u_2 \cdot \vec{j}) \times (v_1 \cdot \vec{i}) + (u_2 \cdot \vec{j}) \times (v_2 \cdot \vec{j})$   
 $= u_1 \cdot v_1 \cdot (\vec{i} \times \vec{i}) + u_1 \cdot v_2 \cdot (\vec{i} \times \vec{j}) + u_2 \cdot v_1 \cdot (\vec{j} \times \vec{i}) + u_2 \cdot v_2 \cdot (\vec{j} \times \vec{j})$   
 $= u_1 \cdot v_1 \cdot 1 + u_1 \cdot v_2 \cdot 0 + u_2 \cdot v_1 \cdot 0 + u_2 \cdot v_2 \cdot 1 = u_1 \cdot v_1 + u_2 \cdot v_2$   
 $\therefore \vec{u} \times \vec{v} = u_1 \cdot v_1 + u_2 \cdot v_2 + u_3 \cdot v_3$

### 10.1. Consecuencias inmediatas

- Del paralelismo de vectores, surge que si dos vectores (sin componentes nulas) son paralelos, entonces  $\frac{v_1}{u_1} = \frac{v_2}{u_2} = \frac{v_3}{u_3} = a$ . Si  $a > 0$  entonces tienen el mismo sentido. Si  $a < 0$ , opuesto.
- Si  $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3)$ , sabiendo que  $\vec{u} \times \vec{u} = |\vec{u}|^2$ , entonces  $|\vec{u}| = \sqrt{u_1^2 + u_2^2 + u_3^2}$ .
- $-\vec{u} = (-u_1, -u_2, -u_3)$  y  $\vec{u}_0 = \frac{1}{|\vec{u}|} \cdot \vec{u} = \left( \frac{u_1}{\sqrt{u_1^2 + u_2^2 + u_3^2}}, \frac{u_2}{\sqrt{u_1^2 + u_2^2 + u_3^2}}, \frac{u_3}{\sqrt{u_1^2 + u_2^2 + u_3^2}} \right)$ .
- $\cos(\vec{u} \wedge \vec{v}) = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|\vec{u}| \cdot |\vec{v}|} = \frac{u_1 \cdot v_1 + u_2 \cdot v_2 + u_3 \cdot v_3}{\sqrt{u_1^2 + u_2^2 + u_3^2} \cdot \sqrt{v_1^2 + v_2^2 + v_3^2}}$ .
- Dos vectores no nulos son perpendiculares si  $\vec{u} \times \vec{v} = 0$ , es decir, si  $u_1 \cdot v_1 + u_2 \cdot v_2 + u_3 \cdot v_3 = 0$ .
- Sea  $A$  el conjunto de todos los vectores paralelos a  $\vec{u}$ , y  $B$  todos los perpendiculares a  $\vec{u}$ , considerando el vector nulo paralelo y perpendicular a cualquier vector, se puede expresar como  $A = \{a \cdot \vec{u}, \text{ con } a \in \mathbb{R}\}$  y  $B = \{(a, b) : \vec{u} \times (a, b) = 0, \text{ con } a, b \in \mathbb{R}\} = \{(a, b) : u_1 \cdot a + u_2 \cdot b = 0\}$ .

## 11. Ángulos y Cosenos Directores de un Vector

Sea  $\vec{v} = \overrightarrow{OV} = (v_1, v_2)$  no nulo, determina los ángulos  $\alpha = (\vec{v} \wedge \vec{i})$  y  $\beta = (\vec{v} \wedge \vec{j})$ , que llamamos **ángulos directores**. A los cosenos de dichos ángulos, los llamamos **cosenos directores**. Luego,

$$\cos \alpha = \cos(\vec{v} \wedge \vec{i}) = \frac{v_1}{|\vec{v}|}, \quad \cos \beta = \cos(\vec{v} \wedge \vec{j}) = \frac{v_2}{|\vec{v}|}$$

Y se llega a que

$$(\cos \alpha, \cos \beta) = \left( \frac{v_1}{|\vec{v}|}, \frac{v_2}{|\vec{v}|} \right) = \vec{v}_0$$

Es decir, los cosenos directores son las componentes del versor asociado. Además,  $\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta = 1$ .

Análogamente,  $(\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma) = \left( \frac{v_1}{|\vec{v}|}, \frac{v_2}{|\vec{v}|}, \frac{v_3}{|\vec{v}|} \right) = \vec{v}_0$  y también  $\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1$ .

## 12. Problemas

### 12.1. Componentes de un Vector a partir de dos puntos

Dados  $P_0(x_0, y_0, z_0)$  y  $P_1(x_1, y_1, z_1)$ , si queremos encontrar las componentes de  $\overrightarrow{P_0P_1}$ , observamos que es equivalente a  $\overrightarrow{OP_1} - \overrightarrow{OP_0} = (x_1 - x_0, y_1 - y_0, z_1 - z_0)$

### 12.2. Coordenadas del Punto Medio entre dos puntos

Comenzando con que  $2 \cdot \overrightarrow{P_0M} = \overrightarrow{P_0P_1}$  y operando por componentes, llegamos a que:

$$x = \frac{x_0 + x_1}{2}, \quad y = \frac{y_0 + y_1}{2}, \quad z = \frac{z_0 + z_1}{2}$$

## 13. Orientabilidad

Curve los dedos de la **mano derecha** de tal forma que señalen el sentido de rotación del vector  $\vec{i}$  hacia el vector  $\vec{j}$ , por el camino más corto, entonces el dedo pulgar extendido marcará la dirección del vector producto vectorial  $\vec{i} \times \vec{j}$ . Luego se dice que es una terna orientada en sentido directo.

## 14. Producto Vectorial

Fijada una terna  $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$  y dados  $\vec{u}, \vec{v} \in \mathbb{V}_3$ , se llama **producto vectorial**:  $\vec{u} \wedge \vec{v}$  al vector que:

- Si  $\vec{u} \vee \vec{v}$  son nulos, entonces  $\vec{u} \wedge \vec{v} = \vec{0}$
- Si no son nulos, entonces
  - $|\vec{u} \wedge \vec{v}| = |\vec{u}| \cdot |\vec{v}| \cdot \sin(\vec{u} \wedge \vec{v})$
  - La dirección es perpendicular a la dirección de  $\vec{u}$  y  $\vec{v}$ .
  - El sentido es tal que la terna  $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{u} \wedge \vec{v})$  tenga la misma orientación que  $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ .

### 14.1. Consecuencias Inmediatas de la Definición

Sean  $\vec{u}$  y  $\vec{v}$  no nulos,  $\vec{u} \wedge \vec{v} = \vec{0} \iff |\vec{u}||\vec{v}| \cdot \sin(\vec{u} \wedge \vec{v}) \iff (\vec{u} \wedge \vec{v}) = 0^\circ \vee 180^\circ \iff \vec{u} \parallel \vec{v}$

$$\vec{i} \wedge \vec{i} = \vec{j} \wedge \vec{j} = \vec{k} \wedge \vec{k} = \vec{0}$$

$$\vec{i} \wedge \vec{j} = \vec{k} \quad \vec{j} \wedge \vec{k} = \vec{i} \quad \vec{k} \wedge \vec{i} = \vec{j} \quad \vec{i} \wedge \vec{k} = -\vec{j} \quad \vec{j} \wedge \vec{i} = -\vec{k} \quad \vec{k} \wedge \vec{j} = -\vec{i}$$

## 14.2. Algunas Propiedades del Producto Vectorial

- $\vec{u} \wedge \vec{v} = -(\vec{v} \wedge \vec{u})$
- $a \cdot (\vec{u} \wedge \vec{v}) = (a \cdot \vec{u}) \wedge \vec{v} = \vec{u} \wedge (a \cdot \vec{v})$
- $\vec{u} \wedge (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \wedge \vec{v} + \vec{u} \wedge \vec{w}$

## 14.3. Proucto Vectorial por Componentes

$$\begin{aligned} \vec{u} \wedge \vec{v} &= (u_1 \cdot \vec{i} + u_2 \cdot \vec{j} + u_3 \cdot \vec{k}) \wedge (v_1 \cdot \vec{i} + v_2 \cdot \vec{j} + v_3 \cdot \vec{k}) \\ &= u_1 v_1 (\vec{i} \wedge \vec{i}) + u_1 v_2 (\vec{i} \wedge \vec{j}) + u_1 v_3 (\vec{i} \wedge \vec{k}) + u_2 v_1 (\vec{j} \wedge \vec{i}) + u_2 v_2 (\vec{j} \wedge \vec{j}) + \\ &\quad u_2 v_3 (\vec{j} \wedge \vec{k}) + u_3 v_1 (\vec{k} \wedge \vec{i}) + u_3 v_2 (\vec{k} \wedge \vec{j}) + u_3 v_3 (\vec{k} \wedge \vec{k}) \\ &= (u_2 v_3 - u_3 v_2) \cdot \vec{i} + (u_3 v_1 - u_1 v_3) \cdot \vec{j} + (u_1 v_2 - u_2 v_1) \cdot \vec{k} \end{aligned}$$

Para simplificar se puede resolver un determinante.

$$\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix}$$

## 14.4. Interpretación geométrica del módulo del producto vectorial

El módulo del producto vectorial de dos vectores no nulos ni paralelos es igual al **área del paralelogramo** determinado por ambos vectores:

$$|\vec{u} \wedge \vec{v}| = |\vec{u}| |\vec{v}| \sin(\vec{u} \wedge \vec{v}) = |\vec{u}| \cdot h = \mathcal{A}(ABCD)$$

## 15. Producto Mixto

Dados  $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \in \mathbb{V}_3$ , se llama **producto mixto** a  $(\vec{u} \wedge \vec{v}) \times \vec{w}$ . El mismo es un número real.

### 15.1. Interpretación geométrica del módulo del producto mixto

Equivale al volumen del paralelepípedo determinado por los vectores (no coplanares).

$$\vec{u} \wedge \vec{v} \times \vec{w} = |\vec{u} \wedge \vec{v}| |\vec{w}| \cos(\vec{u} \wedge \vec{v} \wedge \vec{w}) = \mathcal{A}(ABCD) \cdot h = \mathcal{V}$$