La regla de L'Hôpital

Sean f y g funciones derivables en $A = (a-\delta, a+\delta) - \{a\}$ y tales que $g'(x) \neq 0$ en A. Entonces:

$$\left.\begin{array}{l} \lim_{x\to a} f(x) = 0 \\ \lim_{x\to a} g(x) = 0 \\ \lim_{x\to a} f'(x)/g'(x) = L \text{ o } \pm\infty \end{array}\right\} \Rightarrow \lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = L \text{ o } \pm\infty$$

La regla de L'Hôpital permite resolver indeterminaciones del tipo "$\frac{0}{0}$".

Ejemplo: $\lim_{x\to 0} \frac{\text{sen}(x)}{x}$

$$\left.\begin{array}{l} \lim_{x\to 0} \text{sen}(x) = 0 \\ \lim_{x\to 0} x = 0 \\ f'(x)/g'(x) = \cos(x) \xrightarrow{x\to 0} 1 \end{array}\right\} \Rightarrow \lim_{x\to 0} \frac{\text{sen}(x)}{x} = 1$$

Demostración:

Redefinimos f y g poniendo $f(a) = g(a) = 0$. Entonces f y g son continuas en a.

Tomemos x tal que $a < x < a + \delta$. Entonces f y g son continuas en $[a, x]$ y derivables en (a, x).

Aplicamos el TVM a g para concluir que debe ser $g(x) \neq 0$. En efecto, si fuede $g(x) = 0$, existiría $x_1 \in (a, x)$ tal que $g'(x_1) = \frac{g(a)-g(x)}{a-x} = 0$. Aplicamos ahora el Teorema de Cauchy a f y g en $[a, x]$. Como $f(a) = g(a) = 0$, existe $c_x \in [a, x]$ tal que

$$f(x)g'(c_x) = g(x)f'(c_x) \quad \Rightarrow \quad \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(c_x)}{g'(c_x)}.$$

Como $c_x \to a$ cuando $x \to a$,

$$\lim_{x\to a} \frac{f'(c_x)}{g'(c_x)} = \lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

.

Variantes de la Regla de L'Hôpital

1. Vale también si los límites son laterales.

$$\left.\begin{array}{l} \lim_{x\to a^\pm} f(x) = 0,\ \lim_{x\to a^\pm} g(x) = 0 \\ \lim_{x\to a^\pm} f'(x)/g'(x) = L \text{ o } \pm\infty \end{array}\right\} \Rightarrow \lim_{x\to a^\pm} \frac{f(x)}{g(x)} = L \ o \pm\infty$$

2. Vale también si x tiende a $\pm\infty$.

$$\left.\begin{array}{l} \lim_{x\to\pm\infty} f(x) = 0,\ \lim_{x\to\pm\infty} g(x) = 0 \\ \lim_{x\to\pm\infty} f'(x)/g'(x) = L \text{ o } \pm\infty \end{array}\right\} \Rightarrow \lim_{x\pm\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = L \ o \pm\infty$$

3. Vale también para indeterminaciones "$\frac{\infty}{\infty}$".

$$\left.\begin{array}{l} \lim_{x\to **} f(x) = \pm\infty,\ \lim_{x\to **} g(x) = \pm\infty \\ \lim_{x\to **} f'(x)/g'(x) = L \text{ o } \pm\infty \end{array}\right\} \Rightarrow \lim_{x\to **} \frac{f(x)}{g(x)} = L \ o \pm\infty$$

reemplazando $**$ por a, a^+, a^-, $\pm\infty$.

Ejemplo: Calculemos

$$\lim_{x \to 0^+} x \ln(x).$$

Tenemos una indeterminación del tipo "$0.(-\infty)$. La transformamos en "$\frac{\infty}{\infty}$" y aplicamos L'Hôpital poniendo

$$x \ln(x) = -\frac{-\ln(x)}{\frac{1}{x}}.$$

Tenemos entonces $(\ln)'(x) = \frac{1}{x}$, $(x^{-1})' = -\frac{1}{x^2}$, y entonces

$$\frac{-(\ln)'(x)}{(x^{-1})'} = x \xrightarrow{x \to 0^+} 0.$$

Aplicando la Regla de L'Hôpital concluimos que

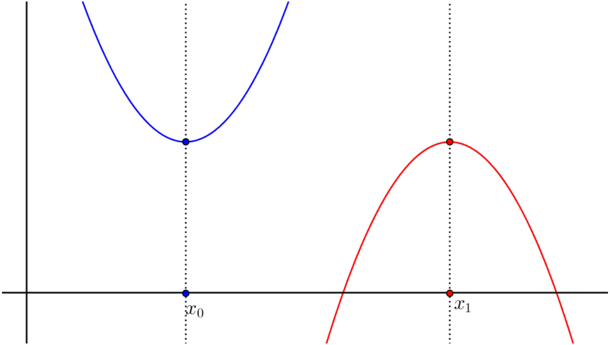
$$\lim_{x \to 0^+} x \ln(x) = 0.$$

Análisis de una función

Máximos y mínimos locales: f alcanza un mínimo local en x_0 si $f(x_0) \leq f(x)$ para cada x en un entorno de x_0. De manera análoga (invirtiendo la desigualdad) se define cuando f asume un máximo local en x_0. En ambos casos, x_0 es un **extremo local** de f.

$$x_0 \text{ mínimo local de } f \;\Rightarrow\; f'(x_0) = 0$$

La recíproca es **falsa**. **¿Ejemplo?**
¿Cómo podemos distinguir si un punto crítico es un extremo local?
¿Cuál es el comportamiento típico de f arededor de un mínimo local? ¿Y de un máximo?


x_0
x_1

Intervalos de crecimiento y decrecimiento

Teorema 50: Sea f una función derivable en (a, b). Entonces:

1. si $f'(x) > 0$ para cada $x \in (a, b)$, entonces f es creciente en (a, b).
2. si $f'(x) < 0$ para cada $x \in (a, b)$, entonces f es decreciente en (a, b).

Demostración:

Supongamos $f'(x) > 0$ para cada $x \in (a, b)$. Tomemos $x_1 < x_2 \in (a, b)$ cualesquiera.

f es continua en $[x_1, x_2]$ y derivable en (x_1, x_2) (¿por qué?).

Por el TVM, existirá $\alpha \in (x_1, x_2)$ tal que

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = f'(\alpha).$$

Pero por hipótesis $f'(\alpha) < 0$, y como $x_2 - x_1 > 0$, resulta $f(x_2) - f(x_1) < 0$, o sea $f(x_2) < f(x_1)$. $\square$

Ejemplo

Las recíprocas del Teorema anterior son **falsas**. **¿Algún contraejemplo?**

Ejemplo: Intentaremos esbozar la gráfica de

$$f(x) = x^4 - 2x^2$$

a partir de sus propiedades y las propiedades de su derivada.

- **Paridad / imparidad**. En este caso, $f(-x) = f(x)$ para cada x, y por lo tanto f es **par**. Su gráfica será simétrica respecto del eje y.
- **Ceros de** f. $f(x) = x^2(x^2 - 2)$, de donde resulta que $f(x) = 0$ sii $x = 0$ o $x = \pm\sqrt{2}$.
- **Puntos singulares o críticos de** f**.** Son los puntos tales que $f'(x) = 0$.

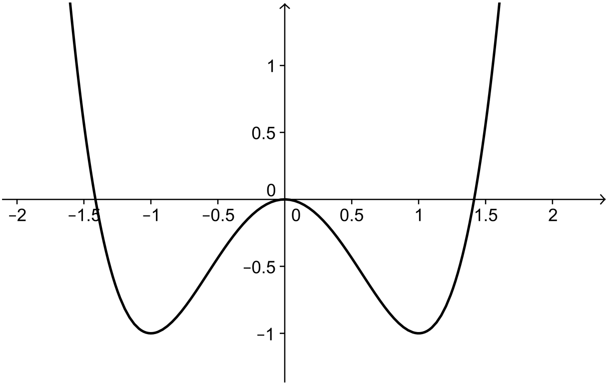
$$f'(x) = 4x^3 - 4x = 4x(x^2 - 1) = 4x(x + 1)(x - 1).$$

Luego $f'(x) = 0$ sii $x = 0$, $x = -1$ o $x = 1$.

- **Intervalos de crecimiento y decrecimiento.** Como f' es continua, en los intervalos $(-\infty,-1)$, $(-1,0)$, $(0,1)$ y $(1,\infty)$, f' no cambiará de signo.
    - $f'(-2) = -24$, entonces $f'(x) < 0$ en $(-\infty, 1)$ y por lo tanto f es decreciente en $(-\infty, 1)$.
    - $f'(-1/2) = 3/2 > 0$, entonces $f'(x) > 0$ en $(-1, 0)$ y por lo tanto f es creciente en $(-1, 0)$.
    - $f(1/2) = -3/2$, entonces $f'(x) < 0$ en $(0, 1)$ y por lo tanto f es decreciente en $(0, 1)$.
    - $f(2) = 24$, entonces $f'(x) > 0$ y por lo tanto f es creciente en $(-1, 0)$.

  Concluimos que f alcanza un mínimo local en $x = -1$ y en $x = 1$ y un máximo local en $x = 0$.
- **Asíntotas y límite al infinito** En este caso es fácil ver que f no tiene asíntotas y que $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \infty$.

Podemos con estos datos esbozar la gráfica de f:



Observación: Estos datos sin embargo son insuficientes para determinar las "panzas" de la gráfica de f. Es simple imaginar gráficas distintas a ésta para funciones que tengan las mismas propiedades que hemos estudiado hasta ahora.

Caracterización de los extremos locales mediante f''.

Teorema 51: Sea f una función dos veces derivable en un entorno de un punto a y tal que $f'(a) = 0$. Entonces:

1. Si $f''(a) > 0$ entonces f alcanza un mínimo local en a.
2. Si $f''(a) < 0$ entonces f alcanza un máximo local en a.

<u>Demostración:</u>

$$f''(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f'(a+h) - f'(a)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{f'(a+h)}{h}.$$

O sea, para cada $\varepsilon > 0$, existirá $\delta > 0$ tal que si $-\delta < h < \delta$, entonces

$$f''(a) - \varepsilon < \frac{f'(a+h)}{h} < f''(a) + \varepsilon$$

.

Supongamos que $f''(a) > 0$. Tomando $\varepsilon < f''(a)$, resulta $\frac{f'(a+h)}{h} > 0$ si $-\delta < h < \delta$.

Por lo tanto, si $0 < h < \delta$, $f'(a+h) > 0$ y si $-\delta < h < 0$, $f'(a+h) < 0$.

En función del Teorema 50, f es decreciente en $(a-\delta, a)$ y creciente en $(a, a+\delta)$, con lo cual f alcanza un mínimo en a.

De manera análoga se prueba el caso en que $f''(a) < 0$. La dejamos como **ejercicio** $\square$

La recíproca del Teorema 51 es **falsa**. Existe sin embargo una especie de recíproca más debil:

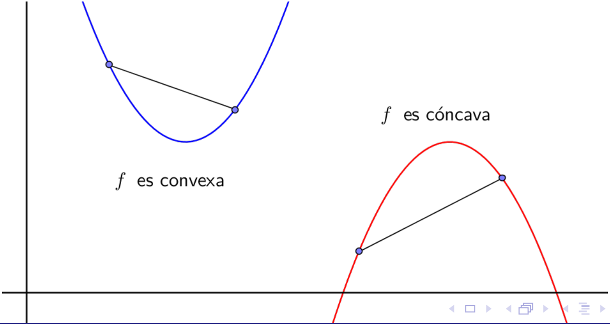
Teorema 52: Sea f una función dos veces derivable en a. Entonces:

1. Si f tiene un mínimo local en a, entonces $f''(a) \geq 0$.
2. Si f tiene un máximo local en a, entonces $f''(a) \leq 0$.

Convexidad y concavidad

Decimos que una función f es **convexa** (o cóncava hacia arriba) en un intervalo (a, b) si el segmento que une los puntos $(a, f(a))$ y $(b, f(b))$ queda por encima de gráfica de f.

Si en cambio este segmento queda debajo de la gráfica de la función, decimos que f es **cóncava** (o cóncava hacia abajo) en (a, b).



La recta que determinan $(a, f(a))$ y $(b, f(b))$ puede representarse por la gráfica de la función

$$g(x) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a) + f(a).$$

Esta recta queda por encima de la gráfica de f si para cada x entre a y b se tiene que $g(x) > f(x)$, es decir, si para cada $x \in [a, b]$,

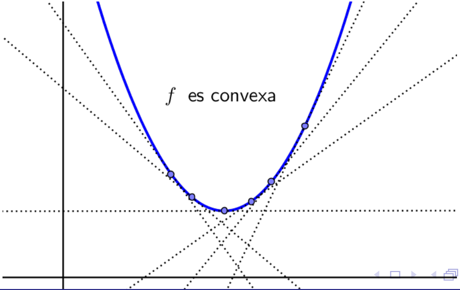
$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a) + f(a) > f(x) \iff \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a) > f(x) - f(a)$$

$$\iff \boxed{\frac{f(b) - f(a)}{b - a} > \frac{f(x) - f(a)}{x - a}.}$$

Para establecer la “forma” de la gráfica de una función convexa o cóncaba, podemos recurrir al siguiente resultado:

Teoremas 54-55: Sea f una función derivable en un intervalo I. Entonces

1. f es convexa en I si y sólo si para cada $a \in I$ la gráfica de f queda por encima de la recta tangente por $(a, f(a))$, exepto en $(a, f(a))$.
2. f es cóncava en I si y sólo si para cada $a \in I$ la gráfica de f queda por debajo de la recta tangente por $(a, f(a))$, exepto en $(a, f(a))$.



Leyendo las demostraciones de los teoremas anteriores, se llega a la conclusión que:

Teorema 56: Sea f una función derivable en un intervalo I. Entonces:

1. f es convexa en I si y sólo si f' es creciente.
2. f es cóncava en I si y sólo si f' es decreciente.

Y en caso de que f'' sea no nula en el intervalo I, obtenemos el **criterio de la derivada segunda:**

Teorema 57: Sea f una función dos veces derivable en un intervalo I. Entonces:

1. Si $f''(x) > 0$ para todo $x \in I$, entonces f es convexa.
2. Si $f''(x) < 0$ para todo $x \in I$, entonces f es cóncava.

Definición 58: Sea f una función y a un punto de su dominio. Decimos que a es un **punto de infexión** de f si f es convexa (resp. cóncava) en $(a-\varepsilon, a)$ y cóncava (resp. convexa) en $(a, a+\varepsilon)$ para algún $\varepsilon > 0$. En pocas palabras, suele decirse que un punto de inflexión hay un *cambio de concavidad* de f.

Observemos que si es posible determinar los intervalos de convexidad/concavidad de una función f por medio del Teorema 57 y f'' es continua, entonces necesariamente en un punto de inflexión deberá ser $f''(a) = 0$.
La recíproca es **falsa**. ¿Ejemplo?

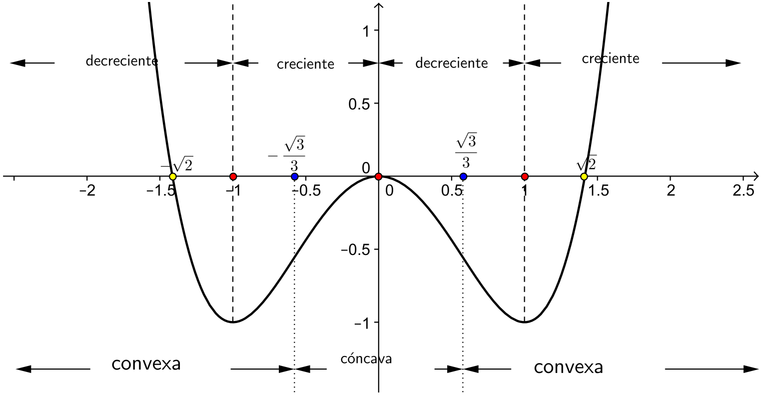
Continuamos el ejemplo de $f(x) = x^4 - 2x^2$

Determinamos los **intervalos de convexidad y concavidad**. Tenemos

$$f''(x) = 12x^2 - 4$$

Entonces los posibles puntos de inflexión son $x = \pm\frac{\sqrt{3}}{3}$
Como f'' es una función cuadrática con las ramas hacia arriba, tendremos que

- $f''(x) > 0$ si $x < -\frac{\sqrt{3}}{3}$, $\Rightarrow$ f es convexa en $(-\infty, -\frac{\sqrt{3}}{3})$.
- $f''(x) < 0$ en $(-\sqrt{3}/3, \sqrt{3}/3)$, $\Rightarrow$ f es cóncava en $(-\sqrt{3}/3, \sqrt{3}/3)$.
- $f''(x) > 0$ si $x > \frac{\sqrt{3}}{3}$, $\Rightarrow$ f es convexa en $(\frac{\sqrt{3}}{3}, \infty)$.



decreciente
creciente
decreciente
creciente
1
0.5
0
−0.5
−1
−2
−1.5
−1
−0.5
0
0.5
1
1.5
2
2.5
$-\sqrt{2}$
$-\frac{\sqrt{3}}{3}$
$\frac{\sqrt{3}}{3}$
$\sqrt{2}$
convexa
cóncava
convexa