Práctica de Relaciones -Relaciones de Equivalencia

18. Debemos determinar si las colecciones dadas son o no particiones de cada conjunto A.
Recordemos:
Una **partición** P de un conjunto A es una colección de conjuntos no vacíos $\{X_1, X_2, ...\}$ tales que

   (i) Si $i \neq j$, $X_i \cap X_j = \emptyset$.
   (ii) $\forall a \in A$, $\exists X_i \in P$ tal que $a \in X_i$, esto es equivalente a decir $A \subseteq \bigcup\limits_{i \in I} X_i$.

   d) $A = \mathbb{Z}$, $A_n = \{-n, n\}$, $n \in \mathbb{N}_0$. Sea $P_d = \bigcup\limits_{n \in \mathbb{N}_0} A_n$.
   ¿P_d es una partición de A?
   Debemos chequear si se verifican (i) y (ii).
      (i) Si $i \neq j$, ¿$A_i \cap A_j = \emptyset$?
      Para probar esto, supongamos por el absurdo que $A_i \cap A_j \neq \emptyset$, es decir que existe $a \in A_i \cap A_j$.
      Entonces $a \in A_i = \{-i, i\} \wedge a \in A_j = \{-j, j\} \Rightarrow (a = i \vee a = -i) \wedge (a = j \vee a = -j)$.
      Veamos las distintas posibilidades para que ocurra esto:
      - Supongamos que $a = i \wedge a = j \Rightarrow i = j$, esto está en contradicción con la hipótesis $i \neq j$.
      - Supongamos que $a = i \wedge a = -j \Rightarrow i = -j$, pero como $i, j \in \mathbb{N}_0$ la única posibilidad es que $i = j = 0$, esto está en contradicción con la hipótesis $i \neq j$.
      - Los casos $a = -i \wedge a = j$ y $a = -i \wedge a = -j$ son análogos.

      Estas contradicciones surgen de suponer que $A_i \cap A_j \neq \emptyset$.
      Por lo tanto $A_i \cap A_j = \emptyset$.

      (ii) $\forall a \in A$, ¿$\exists A_i \in P$ tal que $a \in A_i$?
      Sea $a \in A = \mathbb{Z}$, tenemos:
      - Si $a \in \mathbb{N}_0$ entonces $a \in A_a = \{-a, a\}$.
      - Si no, es decir si $a \in \mathbb{Z} \backslash \mathbb{N}_0$, entonces $a < 0$. Tendríamos $-a > 0$ y entero, con lo que $-a \in \mathbb{N}_0$. Luego $a \in A_{-a} = \{a, -a\}$.

      Por lo tanto, $\forall a \in A$, $\exists A_i \in P$ tal que $a \in A_i$.

   Podemos concluir que P_d sí es una partición de A.

   e) $A = \mathbb{R}$, $A_n = (-n, n^2)$, $n \in \mathbb{Z}$. Sea $P_e = \bigcup\limits_{n \in \mathbb{Z}} A_n$.
   ¿P_e es una partición de A?
   Debemos chequear si se verifican (i) y (ii).
      (i) Si $i \neq j$, ¿$A_i \cap A_j = \emptyset$?
      Esto no se verifica, puesto que por ejemplo $A_2 \cap A_{-2} = (2, 4) \cap (-2, 4) = (2, 4) \neq \emptyset$.
      Por lo tanto, $\exists i \neq j$ tal que $A_i \cap A_j \neq \emptyset$.

   Con esto podemos concluir que P_e no es una partición de A.

   g) **Arreglar enunciado:** $A = \mathbb{C}$, $An = \{z \in \mathbb{C} : n - 1 < |z| \leq n\}$ $n \in \mathbb{N}$.

19. Analizar si la relación dada es de equivalencia y en caso de serlo describir su conjunto cociente.
Recordemos:

- $\mathcal{R}$ es una relacion de **equivalencia** si es reflexiva, simétrica y transitiva.
- Llamaremos **conjunto cociente** de A por $\mathcal{R}$ al conjunto:

$$A\,|_{\mathcal{R}} = \{[a] : a \in A\}$$

donde

$$[a] = \{x \in A : (a, x) \in \mathcal{R}\}$$

b) $A = \mathbb{Z},\ x\mathcal{R}y \Leftrightarrow x - y$ es un entero par.
Veamos si se verifican las propiedades reflexiva, simétrica y transitiva.

- ¿$\mathcal{R}$ es reflexiva?
Sea $a \in A = \mathbb{Z}$ arbitrario. ¿$a\mathcal{R}a$?
Como $a - a = 0$ entero par $\Rightarrow a\mathcal{R}a$.
Por lo tanto $\mathcal{R}$ es reflexiva (1).

- ¿$\mathcal{R}$ es simétrica?
Sean $a, b \in A = \mathbb{Z}$ arbitrarios tales que $a\mathcal{R}b$, ¿$b\mathcal{R}a$?
$a\mathcal{R}b \Rightarrow a - b$ es un entero par, esto es $a - b = 2x$ con $x \in \mathbb{Z}$.
Luego, $b - a = -(a - b) = -2x = 2(-x)$ siendo $(-x) \in \mathbb{Z}$, es decir $b - a$ es entero par $\Rightarrow b\mathcal{R}a$.
Por lo tanto $\mathcal{R}$ es simétrica (2).

- ¿$\mathcal{R}$ es transitiva?
Sean $a, b, c \in A = \mathbb{Z}$ arbitrarios tales que $a\mathcal{R}b$ y $b\mathcal{R}c$, ¿$a\mathcal{R}c$?
De la misma manera que pensamos el item anterior,
$a\mathcal{R}b \Rightarrow a - b = 2x$ con $x \in \mathbb{Z}$.
$b\mathcal{R}c \Rightarrow b - c = 2y$ con $y \in \mathbb{Z}$.
Luego, $a - c = a + 0 - c = a \underbrace{-b + b}_{=0} - c = 2x + 2y = 2(x + y)$ siendo $(x + y) \in \mathbb{Z} \Rightarrow a\mathcal{R}c$.
Por lo tanto $\mathcal{R}$ es transitiva (3).

De (1),(2) y (3) resulta $\mathcal{R}$ una relación de equivalencia.

Ahora veamos su conjunto cociente.
Sea $a \in A = \mathbb{Z}$.

- Si a es par entonces $a\mathcal{R}b,\ \forall b$ entero par, en efecto,
a par $\Rightarrow a = 2x$ con $x \in \mathbb{Z}$.
b par $\Rightarrow b = 2y$ con $y \in \mathbb{Z}$.
Luego, $a - b = 2x - 2y = 2(x - y)$ con $(x - y) \in \mathbb{Z} \Rightarrow a\mathcal{R}b$.
Por lo tanto $a\mathcal{R}b,\ \forall b$ entero par.
- Si a es impar entonces $a\mathcal{R}b,\ \forall b$ entero impar, en efecto,
a impar $\Rightarrow a = 2x + 1$ con $x \in \mathbb{Z}$.
b impar $\Rightarrow b = 2y + 1$ con $y \in \mathbb{Z}$.
Luego, $a - b = 2x + 1 - (2y + 1) = 2x + 1 - 2y - 1 = 2(x - y)$ con $(x - y) \in \mathbb{Z} \Rightarrow a\mathcal{R}b$.
Por lo tanto $a\mathcal{R}b,\ \forall b$ entero impar.

Como ya vimos todas las posibilidades, podemos concluir que $A|_{\mathcal{R}} = \{[0], [1]\}$ o bien podemos escribirlo como $\mathbb{Z}|_{\mathcal{R}} = \{$enteros pares, enteros impares$\}$.

e) $A = \mathbb{R},\ x\mathcal{R}y \Leftrightarrow xy \geq 0$.
Veamos que $\mathcal{R}$ NO es de equivalencia, pues no verifica la propiedad transitiva.
$\forall\, a, b, c \in A = \mathbb{Z}$ tales que $a\mathcal{R}b$ y $b\mathcal{R}c$, ¿$a\mathcal{R}c$?
NO, pues existen $-1, 0, 1 \in \mathbb{Z}$ tales que:

$-1\mathcal{R}0$ pues $-1.0 = 0 \geq 0$.
$0\mathcal{R}1$ pues $0.1 = 0 \geq 0$.

Sin embargo, $-1 \not{\mathcal{R}} 1$ (no se relaciona) pues $-1.1 = -1 < 0$.
Por lo tanto $\mathcal{R}$ no es de equivalencia.

21. $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ y $\mathcal{R} = \{(1, 1), (1, 2), (2, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4), (4, 5), (5, 4), (5, 5), (6, 6)\}$ relación de equivalencia.

a) Veamos las relaciones de equivalencia pedidas:
$[1] = \{a \in A : 1\mathcal{R}a\} = \{1, 2\}$.
$[2] = \{a \in A : 2\mathcal{R}a\} = \{1, 2\} = [1]$, y esto tiene sentido puesto que como $\mathcal{R}$ es de equivalencia y $2 \in [1]$ debía ser necesariamente que $[2] = [1]$.
$[3] = \{a \in A : 3\mathcal{R}a\} = \{3\}$.

b) Siguiendo con el razonamiento del item anterior podemos establecer $A|_{\mathcal{R}} = \{[1], [3], [4], [6]\}$ también podemos escribirlo como $A|_{\mathcal{R}} = \{1, 2\} \cup \{3\} \cup \{4, 5\} \cup \{6\}$.

c) $R(1) = \{1, 2\} = R^{-1}(2)$.

25. Consideramos la relación $\mathcal{R}$ en $\mathbb{N}$ como $x\mathcal{R}y \Leftrightarrow \frac{x}{y} = 2^n$ para algún $n \in \mathbb{Z}$.

a) Veamos que $\mathcal{R}$ es de equivalencia.
Veamos que se verifican las propiedades reflexiva, simétrica y transitiva.

- $\mathcal{R}$ es reflexiva.
  Sea $x \in \mathbb{N}$ arbitrario. ¿$x\mathcal{R}x$?
  Como $\frac{x}{x} = 1 = 2^0$ con $0 \in \mathbb{Z} \Rightarrow x\mathcal{R}x$.
  Por lo tanto $\mathcal{R}$ es reflexiva (1).

- $\mathcal{R}$ es simétrica.
  Sean $x, y \in \mathbb{N}$ arbitrarios tales que $x\mathcal{R}y$, ¿$y\mathcal{R}x$?
  $x\mathcal{R}y \Rightarrow \frac{x}{y} = 2^n$ para algún $n \in \mathbb{Z}$.
  Luego, $\frac{y}{x} = 2^{-n}$ siendo $-n \in \mathbb{Z}$, es decir $y\mathcal{R}x$.
  Por lo tanto $\mathcal{R}$ es simétrica (2).

- $\mathcal{R}$ es transitiva.
  Sean $x, y, z \in \mathbb{N}$ arbitrarios tales que $x\mathcal{R}y$ e $y\mathcal{R}z$, ¿$x\mathcal{R}z$?
  De la misma manera que pensamos el item anterior,
  $x\mathcal{R}y \Rightarrow \frac{x}{y} = 2^n$ con $n \in \mathbb{Z}$.
  $y\mathcal{R}z \Rightarrow \frac{y}{z} = 2^m$ con $m \in \mathbb{Z}$.

Luego, $\frac{x}{z} = x.\underbrace{\frac{y}{y}}_{=1}.\frac{1}{z} = \frac{x}{y}\frac{y}{z} = 2^n 2^m = 2^{n+m}$ siendo $n + m \in \mathbb{Z} \Rightarrow x\mathcal{R}z$.

Por lo tanto $\mathcal{R}$ es transitiva (3).

De (1),(2) y (3) resulta $\mathcal{R}$ una relación de equivalencia.

b) ¿Cuántas clases de equivalencia distintas hay entre $[1], [2], [3]$ y $[4]$?
Recordemos que dos clases de equivalencia o bien coinciden o bien no poseen intersección, entonces se tiene que si un par $(a, b) \in \mathcal{R}$ es porque $[a] = [b]$.
Vamos viendo entonces,
¿$(1, 2) \in \mathcal{R}$? $\frac{1}{2} = 2^{-1}$, $-1 \in \mathbb{Z} \Rightarrow (1, 2) \in \mathcal{R} \Rightarrow [1] = [2]$.

¿$(1, 3) \in \mathcal{R}$? $\frac{1}{3} \neq 2^n$, $\forall n \in \mathbb{Z} \Rightarrow (1, 3) \notin \mathcal{R} \Rightarrow [1] \neq [3]$.

¿$(1, 4) \in \mathcal{R}$? $\frac{1}{4} = 2^{-2}$, $-2 \in \mathbb{Z} \Rightarrow (1, 4) \in \mathcal{R} \Rightarrow [1] = [4]$.

En conclusión tenemos dos clases de equivalencia entre las dadas, éstas son $[1] = [2] = [4]$ y $[3]$.