

## Anexo. Más resultados sobre límites

### Repaso de definiciones

#### Definición. Límite finito.

Se dice que un número  $L$  es el límite de la función  $f$  en el punto  $a$ , y se nota

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L,$$

si para cualquier  $\epsilon > 0$ , existe un número  $\delta > 0$ , tal que

$$x \in \text{Dom}(f) \wedge 0 < |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \epsilon.$$

#### Definición. Límites laterales finitos.

-a- Se dice que un número  $L$  es el límite por derecha de la función  $f$  en el punto  $a$ , y se nota

$$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = L,$$

si para cualquier  $\epsilon > 0$ , existe un número  $\delta > 0$ , tal que

$$x \in \text{Dom}(f) \wedge a < x < a + \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \epsilon.$$

-b- Se dice que un número  $L$  es el límite por izquierda de la función  $f$  en el punto  $a$ , y se nota

$$\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = L,$$

si para cualquier  $\epsilon > 0$ , existe un número  $\delta > 0$ , tal que

$$x \in \text{Dom}(f) \wedge a - \delta < x < a \Rightarrow |f(x) - L| < \epsilon.$$

#### Definición. Límites laterales infinitos.

-a- Se dice que el límite por derecha de la función  $f$  en el punto  $a$  es **más infinito**, y se nota

$$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = +\infty,$$

si para cualquier  $M > 0$ , existe un número  $\delta > 0$ , tal que

$$x \in \text{Dom}(f) \wedge a < x < a + \delta \Rightarrow f(x) > M.$$

-b- Se dice que el límite por derecha de la función  $f$  en el punto  $a$  es **menos infinito**, y se nota

$$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = -\infty,$$

si para cualquier  $M > 0$ , existe un número  $\delta > 0$ , tal que

$$x \in \text{Dom}(f) \wedge a < x < a + \delta \Rightarrow f(x) < -M.$$

- c- Análogamente, se definen los límites por izquierda de la función  $f$  en el punto  $a$  cuando sean  $+\infty$  o  $-\infty$ , considerando los semientornos a izquierda  $a - \delta < x < a$ .

**Definición.** Límites en el infinito.

- a- Se dice que el límite cuando  $x$  tiende a más infinito de una función  $f$  es  $L$ , y se nota

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = L,$$

si para cualquier  $\epsilon > 0$ , existe un número  $H > 0$ , tal que

$$x \in \text{Dom}(f) \wedge x > H \Rightarrow |f(x) - L| < \epsilon.$$

- b- Se dice que el límite cuando  $x$  tiende a menos infinito de una función  $f$  es  $L$ , y se nota

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = L,$$

si para cualquier  $\epsilon > 0$ , existe un número  $H > 0$ , tal que

$$x \in \text{Dom}(f) \wedge x < -H \Rightarrow |f(x) - L| < \epsilon.$$

- c- Se dice que el límite cuando  $x$  tiende a más infinito de una función  $f$  es más infinito, y se nota

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty,$$

si para cualquier  $M > 0$ , existe un número  $H > 0$ , tal que

$$x \in \text{Dom}(f) \wedge x > H \Rightarrow f(x) > M.$$

- d- Se dice que el límite cuando  $x$  tiende a más infinito de una función  $f$  es menos infinito, y se nota

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty,$$

si para cualquier  $M > 0$ , existe un número  $H > 0$ , tal que

$$x \in \text{Dom}(f) \wedge x > H \Rightarrow f(x) < -M.$$

- e- Se dice que el límite cuando  $x$  tiende a menos infinito de una función  $f$  es más infinito, y se nota

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty,$$

si para cualquier  $M > 0$ , existe un número  $H > 0$ , tal que

$$x \in \text{Dom}(f) \wedge x < -H \Rightarrow f(x) > M.$$

- f- Se dice que el límite cuando  $x$  tiende a menos infinito de una función  $f$  es menos infinito, y se nota

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty,$$

si para cualquier  $M > 0$ , existe un número  $H > 0$ , tal que

$$x \in \text{Dom}(f) \wedge x < -H \Rightarrow f(x) < -M.$$

## Algunos resultados - Más álgebra de límites

**Teorema.** Sea  $a \in \mathbb{R}$ , sean  $f$  y  $g$  funciones reales tales que

$$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = L \quad \wedge \quad \lim_{x \rightarrow a^+} g(x) = +\infty.$$

Entonces

$$\lim_{x \rightarrow a^+} (f + g)(x) = +\infty.$$

**Demostración.** Recordemos que  $\text{Dom}(f + g) = \text{Dom}(f) \cap \text{Dom}(g)$ .

Sea  $M > 0$  cualquiera. A partir de la definición, queremos hallar  $\delta > 0$  tal que

$$x \in \text{Dom}(f) \cap \text{Dom}(g) \wedge a < x < a + \delta \Rightarrow (f + g)(x) > M.$$

En primer lugar, como  $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = L$ , en particular se sabe que  $\exists \delta_1 > 0$  tal que

$$x \in \text{Dom}(f) \wedge a < x < a + \delta_1 \Rightarrow |f(x) - L| < 1 \Rightarrow L - 1 < f(x) < L + 1 \Rightarrow f(x) > L - 1. \quad (1)$$

Como  $\lim_{x \rightarrow a^+} g(x) = +\infty$ , considerando  $K = \max\{M, M - L + 1\}$ , resulta  $K > 0$ , y sabemos que  $\exists \delta_2 > 0$  tal que

$$x \in \text{Dom}(g) \wedge a < x < a + \delta_2 \Rightarrow g(x) > K \Rightarrow g(x) > M - L + 1. \quad (2)$$

Considerando ahora  $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$ , se tiene  $\delta > 0$  tal que, por (1) y (2),

$$x \in \text{Dom}(f) \cap \text{Dom}(g) \wedge a < x < a + \delta \Rightarrow (f + g)(x) = f(x) + g(x) > (L - 1) + (M - L + 1) = M.$$

Es decir, para  $M > 0$  hemos encontrado un  $\delta > 0$  tal que

$$x \in \text{Dom}(f + g) \wedge a < x < a + \delta \Rightarrow (f + g)(x) > M.$$

Por lo tanto,

$$\lim_{x \rightarrow a^+} (f + g)(x) = +\infty.$$

□

**Corolario.** Sea  $a \in \mathbb{R}$ , sean  $f$  y  $g$  funciones reales tales que

$$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = L \quad \wedge \quad \lim_{x \rightarrow a^+} g(x) = -\infty.$$

Entonces

$$\lim_{x \rightarrow a^+} (f + g)(x) = -\infty.$$

**Demostración.** Consideremos la función  $\tilde{g}$  tal que

$$x \in \text{Dom}(g) \Rightarrow \tilde{g}(x) = -g(x).$$

Luego, por el ítem 4 del Teorema 10 de la página 21 del apunte, sabemos que

$$\lim_{x \rightarrow a^+} \tilde{g}(x) = +\infty$$

(En realidad, estaríamos usando la Proposición 7 por tratarse de límites laterales).

Entonces, con  $\tilde{g}$  y  $f$  se puede utilizar el teorema anterior y obtener el resultado de este corolario.

□

**Corolario.** Sea  $a \in \mathbb{R}$ , sean  $f, g_1$  y  $g_2$  funciones reales tales que

$$\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = L \quad \wedge \quad \lim_{x \rightarrow a^-} g_1(x) = +\infty \quad \wedge \quad \lim_{x \rightarrow a^-} g_2(x) = -\infty.$$

Entonces

$$\lim_{x \rightarrow a^-} (f + g_1)(x) = +\infty \quad \wedge \quad \lim_{x \rightarrow a^-} (f + g_2)(x) = -\infty.$$

*Demostración.* Para ver este corolario basta reescribir la demostración del teorema anterior considerando siempre los semientornos a izquierda del punto  $a$ , es decir,  $a - \delta < x < a$ . □

**Teorema.** Sea  $a \in \mathbb{R}$ , sean  $f$  y  $g$  funciones reales tales que

$$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = L \neq 0 \quad \wedge \quad \lim_{x \rightarrow a^+} g(x) = +\infty.$$

Entonces

$$\lim_{x \rightarrow a^+} (fg)(x) = \begin{cases} +\infty & L > 0, \\ -\infty & L < 0. \end{cases}$$

*Demostración.* Consideremos primero el caso  $L > 0$ .

Recordemos que  $\text{Dom}(fg) = \text{Dom}(f) \cap \text{Dom}(g)$ .

Sea  $M > 0$  cualquiera. A partir de la definición, queremos hallar  $\delta > 0$  tal que

$$x \in \text{Dom}(f) \cap \text{Dom}(g) \wedge a < x < a + \delta \Rightarrow (fg)(x) > M.$$

Como  $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = L > 0$ , aplicando el Teorema 4 (para el caso de límite lateral) del Apunte de la Unidad 3, sabemos que existe  $\rho > 0$  tal que

$$x \in \text{Dom}(f) \wedge a < x < a + \rho \Rightarrow f(x) > \frac{L}{2} > 0.$$

Consideremos ahora  $K = \frac{2M}{L}$ . Luego,  $K > 0$ , ya que  $M > 0$  y  $L > 0$ . Ahora, como  $\lim_{x \rightarrow a^+} g(x) = +\infty$ , entonces existe  $\delta_1 > 0$  tal que

$$x \in \text{Dom}(g) \wedge a < x < a + \delta_1 \Rightarrow g(x) > K.$$

Consideremos entonces  $\delta = \min\{\rho, \delta_1\}$ . Resulta  $\delta > 0$  tal que

$$x \in \text{Dom}(f) \cap \text{Dom}(g) \wedge a < x < a + \delta \Rightarrow f(x)g(x) > \frac{L}{2} K = \frac{L}{2} \frac{2M}{L} = M.$$

Es decir, a partir de un  $M > 0$  dado, hemos encontrado un  $\delta > 0$  tal que

$$x \in \text{Dom}(fg) \wedge a < x < a + \delta \Rightarrow (fg)(x) > M.$$

Consideremos ahora el caso  $L < 0$ .

**Análisis Matemático I - ECEN - Com. 1- 2020**

Sea  $M > 0$  cualquiera. A partir de la definición, queremos hallar  $\delta > 0$  tal que

$$x \in \text{Dom}(f) \cap \text{Dom}(g) \wedge a < x < a + \delta \Rightarrow (fg)(x) < -M.$$

Como  $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = L < 0$ , aplicando nuevamente el Teorema 4, sabemos que existe  $\rho > 0$  tal que

$$x \in \text{Dom}(f) \wedge a < x < a + \rho \Rightarrow f(x) < \frac{L}{2} < 0.$$

Consideremos ahora  $K = \frac{-2M}{L}$ . Luego,  $K > 0$ , ya que  $M > 0$  y  $L < 0$ .

Ahora, como  $\lim_{x \rightarrow a^+} g(x) = +\infty$ , entonces existe  $\delta_1 > 0$  tal que

$$x \in \text{Dom}(g) \wedge a < x < a + \delta_1 \Rightarrow g(x) > K.$$

Consideremos entonces  $\delta = \min\{\rho, \delta_1\}$ . Resulta  $\delta > 0$  tal que

$$x \in \text{Dom}(f) \cap \text{Dom}(g) \wedge a < x < a + \delta \Rightarrow f(x) < \frac{L}{2} < 0 \wedge g(x) > K \Rightarrow f(x)g(x) < \frac{L}{2} K.$$

Es decir, a partir de un  $M > 0$  dado hemos encontrado un  $\delta > 0$  tal que

$$x \in \text{Dom}(fg) \wedge a < x < a + \delta \Rightarrow (fg)(x) > M.$$

□

**Corolario.** Sea  $a \in \mathbb{R}$ , sean  $f$  y  $g$  funciones reales tales que

$$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = L \neq 0 \quad \wedge \quad \lim_{x \rightarrow a^+} g(x) = -\infty.$$

Entonces

$$\lim_{x \rightarrow a^+} (fg)(x) = \begin{cases} -\infty & L > 0, \\ +\infty & L < 0. \end{cases}$$

**Demostración.** Consideremos la función  $\tilde{g}$  tal que

$$x \in \text{Dom}(g) \Rightarrow \tilde{g}(x) = -g(x).$$

Luego, por el ítem 4 del Teorema 10 de la página 21 del apunte, sabemos que

$$\lim_{x \rightarrow a^+} \tilde{g}(x) = +\infty$$

(En realidad, estaríamos usando la Proposición 7 por tratarse de límites laterales).

Entonces, con  $\tilde{g}$  y  $f$  se puede utilizar el teorema anterior y obtener el resultado de este corolario.

□

**Corolario.** Sea  $a \in \mathbb{R}$ , sean  $f$ ,  $g_1$  y  $g_2$  funciones reales tales que

$$\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = L \neq 0 \quad \wedge \quad \lim_{x \rightarrow a^-} g_1(x) = +\infty \quad \wedge \quad \lim_{x \rightarrow a^-} g_2(x) = -\infty.$$

Entonces

$$\lim_{x \rightarrow a^-} (f \cdot g_1)(x) = \begin{cases} +\infty & L > 0, \\ -\infty & L < 0. \end{cases}$$

y

$$\lim_{x \rightarrow a^-} (f \cdot g_2)(x) = \begin{cases} -\infty & L > 0, \\ +\infty & L < 0. \end{cases}$$

*Demostración.* Para ver este corolario basta reescribir la demostración del teorema anterior considerando siempre los semientornos a izquierda del punto  $a$ , es decir,  $a - \delta < x < a$ . □

**Teorema.** Sean  $f$  y  $g$  funciones reales tales que

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = L \quad \wedge \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty.$$

Entonces

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (f + g)(x) = +\infty.$$

*Demostración.* Probemos primero que  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f + g)(x) = +\infty$ .

Recordemos que  $\text{Dom}(f + g) = \text{Dom}(f) \cap \text{Dom}(g)$ .

Sea  $M > 0$  cualquiera. A partir de la definición, queremos hallar  $H > 0$  tal que

$$x \in \text{Dom}(f) \cap \text{Dom}(g) \wedge x > H \Rightarrow (f + g)(x) > M.$$

En primer lugar, como  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = L$ , se sabe que  $\exists H_1 > 0$  tal que

$$x \in \text{Dom}(f) \wedge x > H_1 \Rightarrow |f(x) - L| < 1 \Rightarrow L - 1 < f(x) < L + 1 \Rightarrow f(x) > L - 1. \quad (3)$$

Como  $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty$ , considerando  $K = \max\{M, M - L + 1\}$ , resulta  $K > 0$ , y sabemos que  $\exists H_2 > 0$  tal que

$$x \in \text{Dom}(g) \wedge x > H_2 \Rightarrow g(x) > K \Rightarrow g(x) > M - L + 1. \quad (4)$$

Considerando ahora  $H = \max\{H_1, H_2\}$ , se tiene  $H > 0$  tal que, por (3) y (4),

$$x \in \text{Dom}(f) \cap \text{Dom}(g) \wedge x > H \Rightarrow (f + g)(x) = f(x) + g(x) > (L - 1) + (M - L + 1) = M.$$

Es decir, para  $M > 0$  hemos encontrado un  $H > 0$  tal que

$$x \in \text{Dom}(f + g) \wedge x > H \Rightarrow (f + g)(x) > M.$$

Por lo tanto,

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (f + g)(x) = +\infty.$$

□

**Corolario.** Sean  $f$  y  $g$  funciones reales tales que

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = L \quad \wedge \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = -\infty.$$

Entonces

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (f + g)(x) = -\infty.$$

**Demostración.** Consideremos la función  $\tilde{g}$  tal que

$$x \in \text{Dom}(g) \Rightarrow \tilde{g}(x) = -g(x).$$

Luego, por álgebra de límites en el infinito, sabemos que

$$\lim_{x \rightarrow a^+} \tilde{g}(x) = +\infty$$

Entonces, con  $\tilde{g}$  y  $f$  se puede utilizar el teorema anterior y obtener el resultado de este corolario. □

**Corolario.** Sean  $f$ ,  $g_1$  y  $g_2$  funciones reales tales que

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = L \quad \wedge \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} g_1(x) = +\infty \quad \wedge \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} g_2(x) = -\infty.$$

Entonces

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (f + g_1)(x) = +\infty \quad \wedge \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} (f + g_2)(x) = -\infty.$$

**Demostración.** Para ver este corolario basta reescribir la demostración del teorema anterior o del corolario anterior, considerando siempre  $x < -H$  y las adaptaciones que correspondan. □

**Teorema.** Sean  $f$  y  $g$  funciones reales tales que

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = L \neq 0 \quad \wedge \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty.$$

Entonces

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (fg)(x) = \begin{cases} +\infty & L > 0, \\ -\infty & L < 0. \end{cases}$$

**Demostración.** Consideremos primero el caso  $L > 0$ .

Recordemos que  $\text{Dom}(fg) = \text{Dom}(f) \cap \text{Dom}(g)$ .

Sea  $M > 0$  cualquiera. A partir de la definición, queremos hallar  $H > 0$  tal que

$$x \in \text{Dom}(f) \cap \text{Dom}(g) \wedge x > H \Rightarrow (fg)(x) > M.$$

Como  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = L > 0$ , aplicando el Teorema 4 (para el caso de límite en el infinito) del Apunte de la Unidad 3, sabemos que existe  $T > 0$  tal que

$$x \in \text{Dom}(f) \wedge x > T \Rightarrow f(x) > \frac{L}{2} > 0.$$

Consideremos ahora  $K = \frac{2M}{L}$ . Luego,  $K > 0$ , ya que  $M > 0$  y  $L > 0$ . Ahora, como  $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty$ , entonces existe  $H_1 > 0$  tal que

$$x \in \text{Dom}(g) \wedge x > H_1 \Rightarrow g(x) > K.$$

Consideremos entonces  $H = \max\{T, H_1\}$ . Resulta  $H > 0$  tal que

$$x \in \text{Dom}(f) \cap \text{Dom}(g) \wedge x > H \Rightarrow f(x)g(x) > \frac{L}{2} K = \frac{L}{2} \frac{2M}{L} = M.$$

Es decir, a partir de un  $M > 0$  dado, hemos encontrado un  $H > 0$  tal que

$$x \in \text{Dom}(fg) \wedge x > H \Rightarrow (fg)(x) > M.$$

Consideremos ahora el caso  $L < 0$ .

Sea  $M > 0$  cualquiera. A partir de la definición, queremos hallar  $H > 0$  tal que

$$x \in \text{Dom}(f) \cap \text{Dom}(g) \wedge x > H \Rightarrow (fg)(x) < -M.$$

Como  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = L < 0$ , aplicando nuevamente el Teorema 4, sabemos que existe  $T > 0$  tal que

$$x \in \text{Dom}(f) \wedge x > T \Rightarrow f(x) < \frac{L}{2} < 0.$$

Consideremos ahora  $K = \frac{-2M}{L}$ . Luego,  $K > 0$ , ya que  $M > 0$  y  $L < 0$ .

Ahora, como  $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty$ , entonces existe  $H_1 > 0$  tal que

$$x \in \text{Dom}(g) \wedge x > H_1 \Rightarrow g(x) > K.$$

Consideremos entonces  $H = \max\{T, H_1\}$ . Resulta  $H > 0$  tal que

$$x \in \text{Dom}(f) \cap \text{Dom}(g) \wedge x > H \Rightarrow f(x) < \frac{L}{2} < 0 \wedge g(x) > K \Rightarrow f(x)g(x) < \frac{L}{2} K.$$

Es decir, a partir de un  $M > 0$  dado hemos encontrado un  $H > 0$  tal que

$$x \in \text{Dom}(fg) \wedge x > H \Rightarrow (fg)(x) > M.$$

□

**Corolario.** Sean  $f$  y  $g$  funciones reales tales que

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = L \neq 0 \quad \wedge \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = -\infty.$$

Entonces

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (fg)(x) = \begin{cases} -\infty & L > 0, \\ +\infty & L < 0. \end{cases}$$



**Demostración.** Consideremos la función  $\tilde{g}$  tal que

$$x \in \text{Dom}(g) \Rightarrow \tilde{g}(x) = -g(x).$$

Luego, por el ítem 4 del Teorema 10 de la página 21 del apunte (para el caso de límite en el infinito), sabemos que

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \tilde{g}(x) = +\infty$$

Entonces, con  $\tilde{g}$  y  $f$  se puede utilizar el teorema anterior y obtener el resultado de este corolario. □

**Corolario.** Sean  $f$ ,  $g_1$  y  $g_2$  funciones reales tales que

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = L \neq 0 \quad \wedge \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} g_1(x) = +\infty \quad \wedge \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} g_2(x) = -\infty.$$

Entonces

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (f \cdot g_1)(x) = \begin{cases} +\infty & L > 0, \\ -\infty & L < 0. \end{cases}$$

y

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (f \cdot g_2)(x) = \begin{cases} -\infty & L > 0, \\ +\infty & L < 0. \end{cases}$$

**Demostración.** Para ver este corolario basta reescribir la demostración del teorema anterior considerando siempre  $x < -H$  y las adaptaciones que correspondan. □

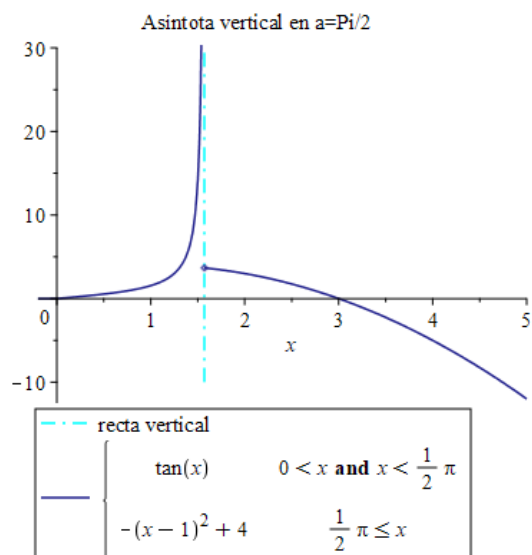
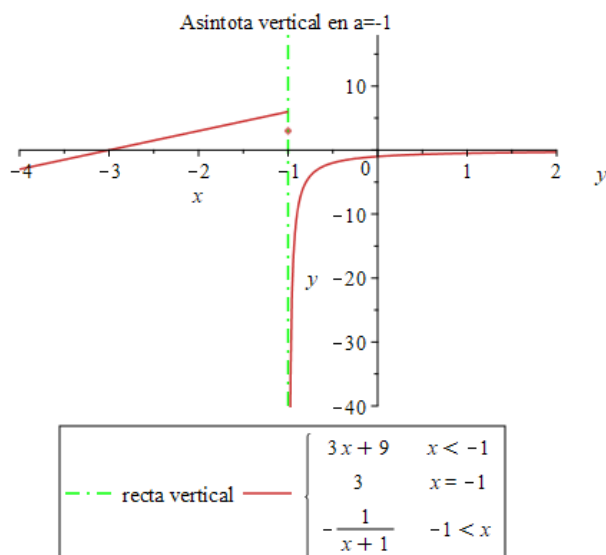
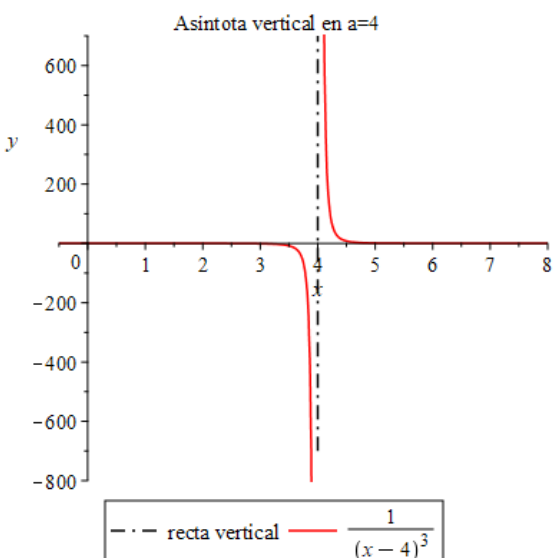
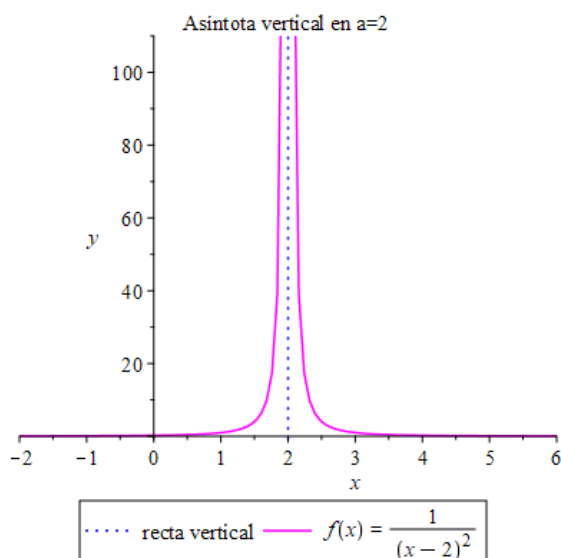
## Repaso: Asíntotas

Ahora podemos definir formalmente la idea de asíntota que ya veníamos usando.

**Definición.** Se dice que la recta vertical  $x = a$  es una asíntota vertical de la función  $f$  en el punto  $a$  si se verifica **por lo menos uno** de estos cuatro límites

$$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = -\infty.$$

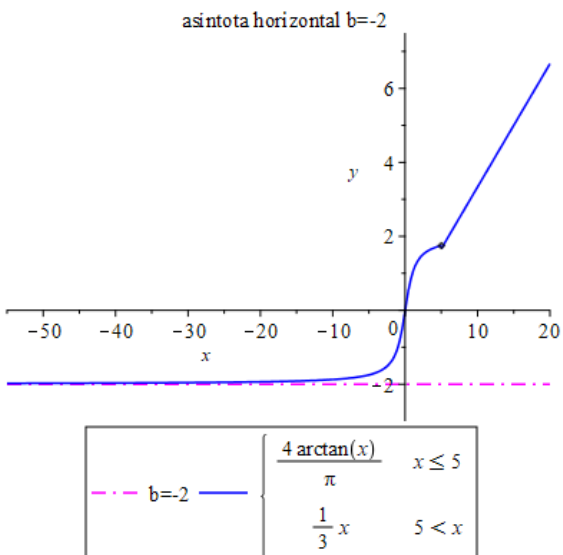
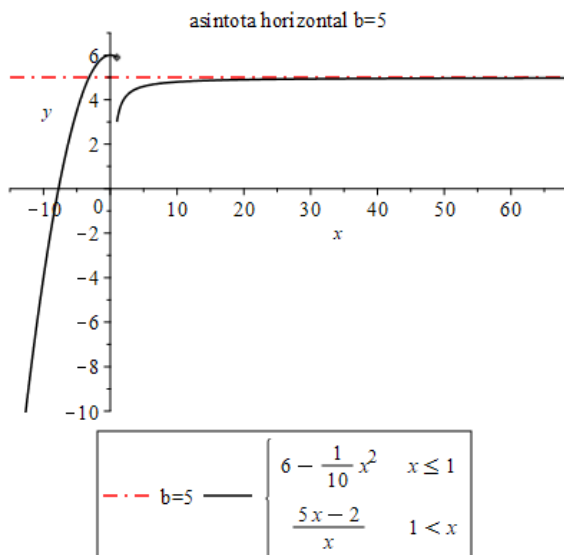
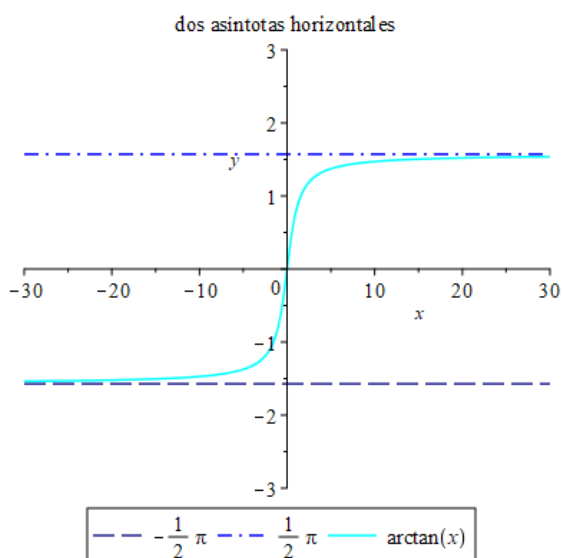
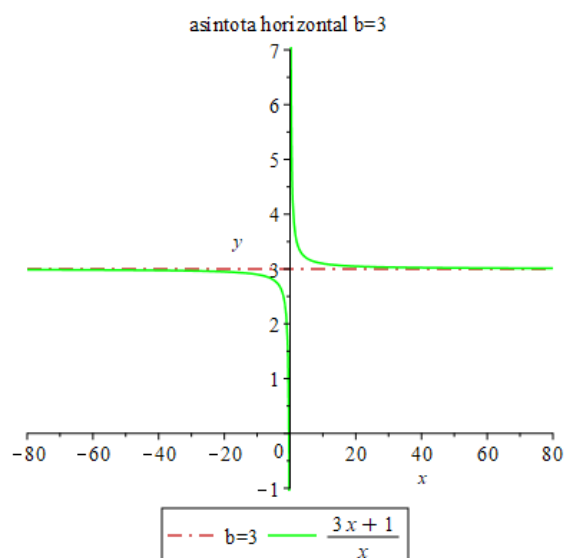
## Algunos ejemplos



**Definición.** Se dice que la recta horizontal  $y = b$  es una asíntota horizontal de función  $f$  si se verifica **por lo menos uno** de estos dos límites

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = b, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = b.$$

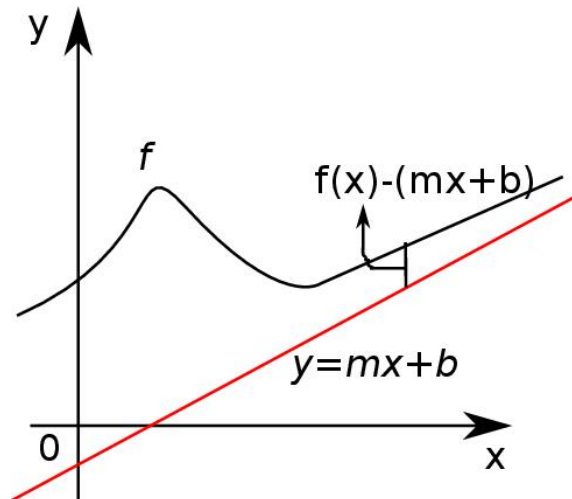
## Algunos ejemplos



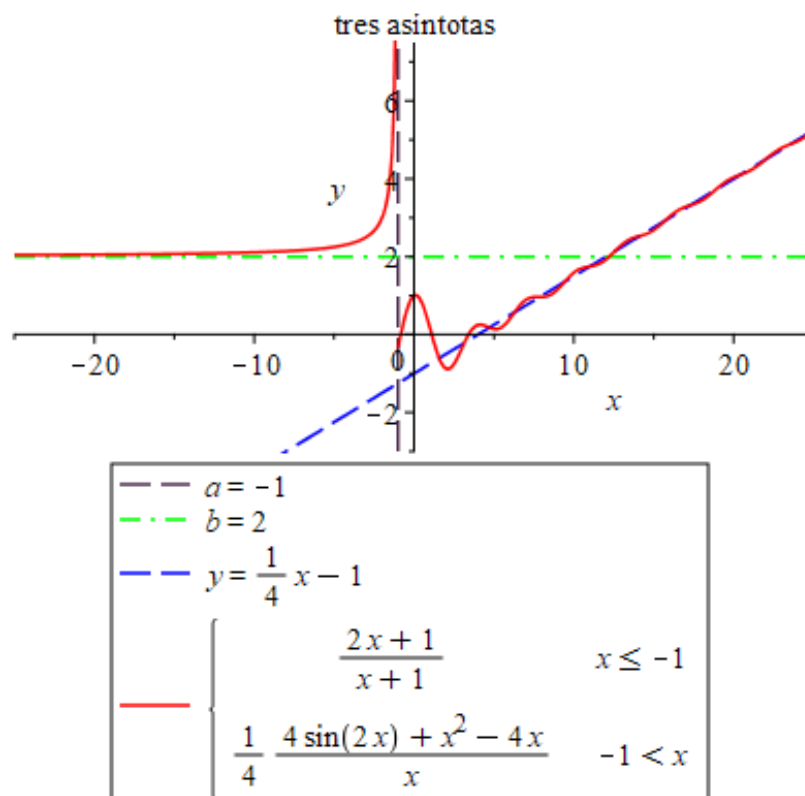
**Definición.** Se dice que la recta  $y = mx + b$ , con  $m \neq 0$ , es una asíntota oblicua de la función  $f$  si se verifica **por lo menos uno** de estos dos límites

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - (mx + b)) = 0 \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) - (mx + b)) = 0$$

La definición indica que la distancia entre la curva  $y = f(x)$  y la recta  $y = mx + b$  tiende a 0, como se observa en la figura .



### Ejemplo



## Ejercicios

1. Calcular los siguientes:

$$\begin{aligned} a) \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{2x^4 + x^3 + 1}{x^2}. \\ b) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x^4 + x^3 + x - 1}{x^2}. \\ c) \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} \frac{x - \frac{\pi}{2}}{\operatorname{sen}(x - \frac{\pi}{2})} \tan(x) \end{aligned}$$

2. Calcular los límites necesarios para verificar las asíntotas de los cinco ejemplos anteriores. Observar que en cada ejemplo se presenta la ley de la función, la ecuación de las asíntotas y las gráficas completas.

3. Determinar, si existen, todas las asíntotas de las siguientes funciones.

$$a) f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } x \leq 10 \\ \frac{x-1}{x^2-10x} & \text{si } x > 10. \end{cases}$$

$$b) g(x) = \begin{cases} \frac{3x-5}{x-2} & \text{si } x < 2 \\ \frac{x^4-1}{x^3} & \text{si } x > 2. \end{cases}$$

4. Probar que si

$$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = L \quad \wedge \quad \lim_{x \rightarrow a^+} g(x) = \pm\infty,$$

entonces

$$\lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f}{g}(x) = 0.$$

Sugerencia: Una opción para probarlo es utilizar el ítem 1 de la Proposición 10, el Teorema 3 y el Teorema 6 del Apunte de la Unidad 3. En cada caso con el límite que corresponda.

Observar que este resultado también es válido si reemplazamos  $x \rightarrow a^+$  por  $x \rightarrow a^-$ ,  $x \rightarrow +\infty$  o  $x \rightarrow -\infty$ .