PRÁCTICA 3 COMPLEMENTARIA - Límite y Continuidad

Límite

1. -a- Demostrar la validez de las siguientes afirmaciones:

   I. $|x-3|<1 \Rightarrow |x+3|<7.$ II. $|x-2|<1 \Rightarrow \dfrac{1}{|x|}<1.$

   -b- Interpretar geométricamente los resultados obtenidos en los ítem anteriores.

2. -a- En el siguiente ejemplo determinar, si ello resulta posible, un número $\delta>0$ tal que

$$0<|x-a|<\delta \Rightarrow |f(x)-c|<\epsilon,$$

   para los valores de a, c y ϵ dados en cada caso:

$$f(x)=\frac{1}{x},\ a=2,\ c=\frac{1}{2},\ \epsilon=0{,}0001.$$

   -b- Representar gráficamente la función f en un entorno del punto a e interpretar geométricamente el resultado obtenido.

3. -a- Si $\lim\limits_{x\to 1} f(x)=3$, ¿debería estar definida f en $x=1$? Si fuera así, ¿debe ser $f(1)=3$? Justificar la respuesta.

   -b- Si $g(0)=5$, ¿debería existir $\lim\limits_{x\to 0} g(x)$? Si fuera así, ¿debe cumplirse que $\lim\limits_{x\to 0} g(x)=5$? Justificar la respuesta.

   -c- Representar gráficamente tres funciones que carezcan, por razones diferentes, de límite en el punto $x=0$.

4. Dada la función

$$f(x)=\begin{cases}(x-1)^2 & x\leq 1,\\ \dfrac{x}{2}+1 & x>1,\end{cases}$$

   -a- graficar f y comprobar a partir de la gráfica la siguiente afirmación:

   Dado $\epsilon=1$, para todo $0<\delta<1$ se verifica que $0<|x-1|<\delta \ \Rightarrow |f(x)-1|<\epsilon.$

   -b- Del resultado de la parte -a-, ¿se puede concluir que $\lim\limits_{x\to 1} f(x)=1$?

5. Para cada una de las siguientes funciones determinar su dominio y su gráfica. A partir de la gráfica indicar el valor de cada límite.

   I. $f_1(x)=\dfrac{x^3-8}{x-2},\quad \lim\limits_{x\to 2} f_1(x).$ II. $f_2(x)=\dfrac{e^{2x}-1}{e^x-1},\quad \lim\limits_{x\to 0} f_2(x)$

ESCUELA DE CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
Av. Pellegrini 250. Rosario
+54 0341 - 480 2649 internos 216 - 119

6. Utilizando la definición, demostrar los siguientes límites.

.I. $\lim_{x\to 9} \sqrt{x-5} = 2.$ .II. $\lim_{x\to -3} \dfrac{x^2-9}{x+3} = -6.$

7. Probar que $\lim_{x\to c} f(x) = L$ si y sólo si $\lim_{h\to 0} f(c+h) = L.$

Cálculo de límites

8. Calcular el siguiente límite, indicando las propiedades aplicadas.

$$\lim_{x\to 2} \left(x^2+x\right)\left(x^3-1\right).$$

9. Sabiendo que:

$$\lim_{x\to a} f(x) = -3, \qquad \lim_{x\to a} g(x) = 0, \qquad \lim_{x\to a} h(x) = 6$$

determinar, si existen, los siguientes límites:

.I. $\lim_{x\to a} \dfrac{f(x)}{h(x)}.$ .II. $\lim_{x\to a} \dfrac{2f(x)}{g(x)+3h(x)}.$ .III. $\lim_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)}.$

10. Calcular los siguientes límites:

-a- $\lim_{x\to -1} (x^2+3x+2).$

-b- $\lim_{x\to 1} \ln(3x-2).$

-c- $\lim_{x\to -3} \dfrac{3x+4}{x+1}.$

-d- $\lim_{x\to 2} \dfrac{\sqrt{x+14}-4}{x-2}.$

-e- $\lim_{h\to 0} \dfrac{(3+h)^{-1}-3^{-1}}{h}.$

-f- $\lim_{x\to 5} \dfrac{(x-5)\cos(\pi x)}{x^2-25}.$

-g- $\lim_{u\to 3} \dfrac{15-5u}{2u^2-4u-6}.$

-h- $\lim_{x\to 1} \dfrac{\frac{1}{x}-1}{x-1}.$

-i- $\lim_{x\to 2} \left(4x+x^3\right)^{\frac{3}{2}}.$

-j- $\lim_{h\to 0} \dfrac{(2+h)^3-8}{h}.$

-k- $\lim_{x\to -1} \dfrac{\ln(x^2+4x+4)}{\ln(x+2)}.$

11. -a- Demostrar que $\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} f(x^3).$

-b- Dar un ejemplo en que exista $\lim_{x\to 0} f(x^2)$, pero no exista $\lim_{x\to 0} f(x).$

12. Si $g(x) \leq f(x) \leq h(x)$ para todo $x \neq 2$ y $\lim_{x\to 2} g(x) = \lim_{x\to 2} h(x) = -5$. ¿Se puede concluir algo acerca de los valores de f, g y h en $x=2$? ¿Es posible que $f(2)=0$? ¿Es posible que $\lim_{x\to 2} f(x) = 0$? Justificar las respuestas.

13. Calcular los siguientes límites.

-a- $\lim_{x\to 0} \dfrac{\cos x - 1}{x}.$

-b- $\lim_{t\to 0} \dfrac{\tan(t)\sec(2t)}{3t}.$

-c- $\lim_{x\to 0} \dfrac{x + x\cos(x)}{\operatorname{sen}(x)\cos(x)}.$

-d- $\lim_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{sen} ax}{\operatorname{sen} bx}.$

-e- $\lim_{x\to 0} \dfrac{\tan^2 x + 2x}{x+x^2}.$

-f- $\lim_{x\to 0} \operatorname{sen}(x)\cot(3x).$

ESCUELA DE CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
Av. Pellegrini 250. Rosario
+54 0341 - 480 2649 internos 216 - 119

14. Utilizar las definiciones formales para probar los siguientes límites.

-a- $\lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{1}{x} = -\infty.$ -b- $\lim\limits_{x\to 1^-} \dfrac{1}{x^2-1} = -\infty.$

15. Calcular los siguientes límites laterales:

-a- $\lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{x-1}{x}.$

-b- $\lim\limits_{x\to (\frac{\pi}{2})^+} \tan(x).$

-c- $\lim\limits_{x\to 0^+} \operatorname{sen}(3x)\cot(x).$

-d- $\lim\limits_{x\to -2^-} (x+4)\dfrac{|x+2|}{x+2}.$

-e- $\lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{5x^2+11x+6}}{x}.$

-f- $\lim\limits_{x\to -2^+} \left(\dfrac{2x}{5x+1}\right)\left(\dfrac{x-3}{x+2}\right)\left(\dfrac{x-2}{x-1}\right).$

16. Calcular el siguiente límite:

$$\lim_{x\to 0} \frac{x+x^2}{x^2(x+3)}$$

17. Dada la función

$$g(x) = \begin{cases} x^4-3x^2 & x\geq 2, \\ \lambda x - 4 & x < 2, \end{cases}$$

determinar el número real λ tal que exista $\lim\limits_{x\to 2} g(x)$.

18. Utilizando el Teorema de Intercalación del Límite, calcular:

$$\lim_{x\to -\infty} \frac{2-x+\operatorname{sen} x}{x+\cos x}.$$

19. Calcular, para la función racional enunciada, el límite cuando $x\to +\infty$ y el límite cuando $x\to -\infty$.

$$\frac{2x^3+7}{x^2+x+7}.$$

20. Calcular los siguientes límites en el infinito.

-a- $\lim\limits_{x\to +\infty} \left(\dfrac{x^2+62x-4}{5x^2+13}\right)^3.$ -c- $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{1}{x^4-x+1}.$

-b- $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{2+\sqrt{x}}{2-\sqrt{x}}.$ -d- $\lim\limits_{x\to -\infty} \left(\dfrac{x^3-1}{x^2+3x}\right)^5.$

21. En cada uno de los siguientes ítems, determinar una función que satisfaga las condiciones indicadas. Elaborar un bosquejo de su gráfica.

-a- $g(0)=0,\ g(1)=2,\ g(-1)=-2,\ \lim\limits_{x\to -\infty} g(x) = -1$ y $\lim\limits_{x\to +\infty} g(x) = 1.$

-b- $\lim\limits_{x\to \pm\infty} k(x) = 1,\ \lim\limits_{x\to 1^+} k(x) = -\infty,\ \lim\limits_{x\to 1^-} k(x) = 2.$

Aclaración: En general las respuestas no son únicas; cualquier función que cumpla con las condiciones es aceptable. Se puede utilizar funciones definidas por partes, si esto ayuda.

22. Si f y g son funciones polinómicas tales que $\lim\limits_{x\to +\infty} (f(x)/g(x)) = 2$. ¿Qué se puede concluir sobre $\lim\limits_{x\to -\infty} (f(x)/g(x))$? Fundamentar la respuesta.

23. Si f y g son funciones polinómicas con $g(x)$ tal que nunca es cero, ¿la gráfica de $f(x)/g(x)$ puede tener una asíntota vertical? Fundamentar la respuesta.

24. La gráfica de una función racional, ¿cuántas asíntotas horizontales puede tener? Justificar la respuesta.

ESCUELA DE CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
Av. Pellegrini 250. Rosario
+54 0341 - 480 2649 internos 216 - 119

25. Determinar algebraicamente los siguientes límites:

-a- $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{x \operatorname{sen} x}{x^2+5}$.

-b- $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x+\operatorname{sen}^3 x}{5x+6}$.

-c- $\lim\limits_{x\to-\infty} \left(2x+\sqrt{4x^2+3x-2}\right)$.

-d- $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{x^2+\operatorname{sen}^2 x}{(x+\operatorname{sen} x)^2}$.

26. Hallar las asíntotas oblicuas de las siguientes funciones:

-a- $f(x)=\dfrac{x^2-1}{x}$.

-b- $f(x)=\dfrac{x^2-1}{2x+4}$.

-c- $f(x)=\dfrac{x^2-4}{4x-1}$.

I Si se quisiera graficar estas funciones, ¿es posible que aparezcan otro tipo de asíntotas en ellas (verticales, horizontales)? ¿Por qué?

II Realizar un bosquejo de la gráfica de cada una de las funciones.

Continuidad

27. Analizar la continuidad de cada una de las siguientes funciones en el punto x_0 indicado en cada caso.

-a- $f_1(x)=\begin{cases} 2x+1 & x<2 \\ 1+x & x>2 \end{cases}$, $(x_0=2)$.

-b- $f_2(x)=\begin{cases} \dfrac{x^2-9}{x-3} & x\neq 3 \\ -5 & x=3 \end{cases}$, $(x_0=3)$.

-c- $f_3(x)=\begin{cases} x^2-2 & x\leq 3 \\ 2x+1 & x>3 \end{cases}$, $(x_0=3)$.

28. Dar un ejemplo de una función cuyo dominio sea el intervalo $[0,1]$, que sea continua en el intervalo $(0,1)$ pero no en el intervalo $[0,1]$.

29. Determinar los puntos de continuidad y clasificar las discontinuidades de las siguientes funciones:

-a- $f_1(x)=\operatorname{mant}(x)=x-[x]$.

-b- $f_2(x)=\begin{cases} 1-x & x\leq 2 \\ x^2-2x & x>2 \end{cases}$.

-c- $f_3(x)=\begin{cases} \dfrac{x}{x^2-1} & x<1, x\neq 1 \\ \dfrac{x-1}{x^2-1} & x>1 \end{cases}$.

-d- $f_4(x)=\begin{cases} \dfrac{\sin(x-2)}{x^2-4} & |x|\neq 2 \\ 3 & |x|=2 \end{cases}$.

30. -a- Probar que si f es una función continua en el punto $x=a$, entonces la función $|f|$ también lo verifica.

-b- Mostrar, mediante un ejemplo, que la afirmación recíproca no es cierta. Es decir, si $|f|$ es continua en el punto $x=a$, no necesariamente f es continua en $x=a$.

31. Sea f una función continua en a y $f(a)=0$. Demostrar que si $\alpha\neq 0$, entonces $f+\alpha$ es distinto de 0 en algún intervalo abierto que contiene a a.

ESCUELA DE CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
Av. Pellegrini 250. Rosario
+54 0341 - 480 2649 internos 216 - 119

32. En los siguientes ejemplos se consideran dos funciones f y g. Hallar, en cada caso, la ley de la composición $h = f \circ g$ y analizar sus puntos de continuidad.

   -a- $f(x) = x^2 - x$, $g(x) = x + 1$.

   -b- $f(x) = \dfrac{x+1}{x-1}$, $g(x) = \sqrt{x}$.

   -c- $f(x) = \begin{cases} x \operatorname{sen} \dfrac{\pi}{x} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$, $g(x) = \begin{cases} 1/x & x \neq 0 \\ 2 & x = 0 \end{cases}$.

33. Determinar los valores $a, b \in \mathbb{R}$ tales que la función resulte continua en $\mathbb{R}$.

$$f(x) = \begin{cases} 2x & x < 1 \\ ax^2 + b & 1 \leq x \leq 2 \\ 4x & x > 2 \end{cases}$$

Teoremas de valor intermedio

34. Sea la función $f(x) = \tan(x)$.

   -a- Probar que $f\left(\frac{\pi}{4}\right) \cdot f\left(\frac{3\pi}{4}\right) < 0$.

   -b- A partir de la gráfica de la función f, analizar si existe $\alpha \in \left(\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}\right)$ tal que $f(\alpha) = 0$.

   -c- Explicar los motivos por los cuales lo obtenido en los ítems anteriores no contradice al teorema de Bolzano.

35. Una raíz real de una ecuación se dice aislada si se tiene un intervalo $[a, b]$ tal que contiene a dicha raíz y ninguna otra. Con ayuda del Teorema de Bolzano, mostrar que las cuatro raíces reales de cada una de las siguientes ecuaciones son aisladas.

$$(i)\ 3x^4 - 2x^3 - 36x^2 + 36x - 8 = 0, \qquad (ii)\ 2x^4 - 14x^2 = -14x + 1.$$

36. Demostrar que existe un único número $c \in \mathbb{R}$ solución de la ecuación:

$$\operatorname{sen} x = -x + 1.$$

37. Un monje tibetano sale del monasterio a las $7:00$ a.m. y toma su camino cotidiano a la cima de la montaña, donde llega a las $7:00$ p.m. A la mañana siguiente baja de la cima a las $7:00$ a.m., y siguiendo el mismo camino arriba al monasterio a las $7:00$ p.m. Utilizando el teorema de los valores intermedios, demostrar que hay un punto del camino por el cual el monje pasa exactamente a la misma hora de los dos días.

38. Demostrar que existe un número positivo c tal que $c^2 = 2$. (Con esto se demuestra la existencia del número $\sqrt{2}$).

39. En cada uno de los siguientes casos demostrar que la función f_i es estrictamente monótona en su dominio. Obtener su inversa (ley y dominio) y estudiar la continuidad de la misma.

   -a- $f_1(x) = x^2 + 4$, $x \geq 0$.

   -b- $f_2 = 2x^3 - 5$, $x \in \mathbb{R}$.

ESCUELA DE CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
Av. Pellegrini 250. Rosario
+54 0341 - 480 2649 internos 216 - 119