Unidad 5 – Introducción al Cálculo Integral

Recordemos

Definición

Decimos que F es una *primitiva* de f sobre el conjunto I si $F'(x) = f(x)\ \forall x \in I$.

Observación

- Si F es una primitiva de f entonces $F + c$ es una primitiva de f.
- Si F y G son dos primitivas de f, entonces $G - F = c$ o bien $G(x) = F(x) + c\ \forall x \in I$.

Definición

Llamamos *integral indefinida* de una función f al conjunto de todas las primitivas de f, y la notamos $\int f(x)dx$.

$$\underbrace{\int}_{\text{símbolo integral}} \overbrace{f(x)}^{\text{integrando}} \underbrace{dx}_{\substack{\text{indica la}\\ \text{variable de}\\ \text{integración}}} = \underbrace{\overbrace{F(x)}^{\text{Primitiva de } f} + c}_{\substack{\text{familia de funciones que}\\ \text{constituyen la integral}\\ \text{indefinida}}}$$

1.2 Regla de sustitución

Por regla de la cadena, la derivada de la composición de dos funciones es

$$[f(g(x))]' = f'(g(x))\,g'(x) \Longrightarrow \int f'(g(x))\,g'(x)\,dx = f(g(x)) + c$$

De lo anterior, surge el siguiente:

1.2 Regla de sustitución

Por regla de la cadena, la derivada de la composición de dos funciones es

$$[f(g(x))]' = f'(g(x))\,g'(x) \Longrightarrow \int f'(g(x))\,g'(x)\,dx = f(g(x)) + c$$

De lo anterior, surge el siguiente:

Teorema

(Método de sustitución o cambio de variable) Sea f continua en I. Sea g una función derivable con derivada continua en I tal que $\operatorname{Im}(g) \subset I$. Entonces

$$\int f'(g(x))\,g'(x)\,dx \underset{t=g(x)}{=} \int f(t)\,dt$$

donde $dt = g'(x)dx$.

Ejemplo

1. $\int e^{\alpha x}\, dx$

EJEMPLO

1. $\int e^{\alpha x}\,dx$

   Consideremos $f(x) = e^x$ y $g(x) = \alpha x$, entonces la integral $\int e^{\alpha x}\,dx = \int f(g(x))dx$.

Ejemplo

1. $\int e^{\alpha x}\, dx$

   Consideremos $f(x) = e^x$ y $g(x) = \alpha x$, entonces la integral $\int e^{\alpha x}\, dx = \int f(g(x))dx$.

   Luego si hacemos el cambio de variable $t = g(x) = \alpha x$ y multiplicamos y dividimos por $g'(x) = \alpha$, tendremos que

Ejemplo

1. $\int e^{\alpha x}\,dx$

   Consideremos $f(x) = e^x$ y $g(x) = \alpha x$, entonces la integral $\int e^{\alpha x}\,dx = \int f(g(x))dx$.

   Luego si hacemos el cambio de variable $t = g(x) = \alpha x$ y multiplicamos y dividimos por $g'(x) = \alpha$, tendremos que

$$\int e^{\alpha x}\,dx = \frac{1}{\alpha}\int e^{\alpha x}\,\alpha\,dx = \frac{1}{\alpha}\int f(g(x))g'(x)\,dx \underset{dt=\alpha dx}{\overset{t=\alpha x}{=}} \frac{1}{\alpha}\int f(t)\,dt =$$

EJEMPLO

1. $\int e^{\alpha x}\,dx$

Consideremos $f(x) = e^x$ y $g(x) = \alpha x$, entonces la integral $\int e^{\alpha x}\,dx = \int f(g(x))dx$.

Luego si hacemos el cambio de variable $t = g(x) = \alpha x$ y multiplicamos y dividimos por $g'(x) = \alpha$, tendremos que

$$\int e^{\alpha x}\,dx = \frac{1}{\alpha}\int e^{\alpha x}\,\alpha\,dx = \frac{1}{\alpha}\int f(g(x))g'(x)\,dx \underset{dt=\alpha dx}{\overset{t=\alpha x}{=}} \frac{1}{\alpha}\int f(t)\,dt =$$

$$= \frac{1}{\alpha}\int e^t dt = \frac{1}{\alpha}(e^t + c') \overset{t=\alpha x}{=} \frac{1}{\alpha}e^{\alpha x} + c$$

EJEMPLO

2. $\int (4x-2)^2 dx.$

Ejemplo

2. $\int (4x-2)^2 dx$.

   Consideramos $f(x)=x^2$ y $g(x)=4x-2$, entonces $\int (4x-2)^2 dx = \int f(g(x))dx$.

Ejemplo

2. $\int (4x-2)^2 dx$.

   Consideramos $f(x) = x^2$ y $g(x) = 4x-2$, entonces $\int (4x-2)^2 dx = \int f(g(x)) dx$.

   Luego si hacemos el cambio de variable $t = g(x) = 4x-2$ y multiplicamos y dividimos por $g'(x) = 4$, tendremos que

EJEMPLO

2. $\int (4x-2)^2 dx$.

   Consideramos $f(x) = x^2$ y $g(x) = 4x-2$, entonces $\int (4x-2)^2 dx = \int f(g(x))dx$.

   Luego si hacemos el cambio de variable $t = g(x) = 4x-2$ y multiplicamos y dividimos por $g'(x) = 4$, tendremos que

$$\int (4x-2)^2 dx = \frac{1}{4}\int (4x-2)^2\, 4\, dx \underset{dt=4dx}{\overset{t=4x-2}{=}} \frac{1}{4}\int f(t)\, dt =$$

EJEMPLO

2. $\int (4x-2)^2 dx$.

Consideramos $f(x) = x^2$ y $g(x) = 4x-2$, entonces $\int (4x-2)^2 dx = \int f(g(x))dx$.

Luego si hacemos el cambio de variable $t = g(x) = 4x-2$ y multiplicamos y dividimos por $g'(x) = 4$, tendremos que

$$\int (4x-2)^2 dx = \frac{1}{4}\int (4x-2)^2\, 4\, dx \underset{dt=4dx}{\overset{t=4x-2}{=}} \frac{1}{4}\int f(t)\, dt =$$

$$= \frac{1}{4}\int t^2 dt = \frac{1}{4}\left(\frac{t^3}{3} + c'\right) \overset{t=4x-2}{=} \frac{(4x-2)^3}{12} + c$$

Ejemplo

3. $\int \cos(3x)dx.$

Ejemplo

3. $\int \cos(3x)dx$.

   Consideramos $f(x) = \cos x$ y $g(x) = 3x$, entonces $\int \cos(3x)dx = \int f(g(x))dx$.

Ejemplo

3. $\int \cos(3x)dx$.

   Consideramos $f(x) = \cos x$ y $g(x) = 3x$, entonces $\int \cos(3x)dx = \int f(g(x))dx$.

   Luego si hacemos el cambio de variable $t = g(x) = 3x$ y multiplicamos y dividimos por $g'(x) = 3$, tendremos que

Ejemplo

3. $\int \cos(3x)dx$.

   Consideramos $f(x) = \cos x$ y $g(x) = 3x$, entonces $\int \cos(3x)dx = \int f(g(x))dx$.

   Luego si hacemos el cambio de variable $t = g(x) = 3x$ y multiplicamos y dividimos por $g'(x) = 3$, tendremos que

$$\int \cos(3x)dx = \frac{1}{3}\int \cos(3x)\,3\,dx \underset{dt=3dx}{\overset{t=3x}{=}} \frac{1}{3}\int f(t)\,dt =$$

Ejemplo

3. $\int \cos(3x)dx$.

Consideramos $f(x) = \cos x$ y $g(x) = 3x$, entonces $\int \cos(3x)dx = \int f(g(x))dx$.

Luego si hacemos el cambio de variable $t = g(x) = 3x$ y multiplicamos y dividimos por $g'(x) = 3$, tendremos que

$$\int \cos(3x)dx = \frac{1}{3}\int \cos(3x)\,3\,dx \overset{t=3x}{\underset{dt=3dx}{=}} \frac{1}{3}\int f(t)\,dt =$$

$$= \frac{1}{3}\int \cos(t)\,dt = \frac{1}{3}(\sin t + c') \overset{t=3x}{=} \frac{1}{3}\sin(3x) + c$$

Ejemplo

4. $\int \frac{3}{1+4x^2}\,dx.$

Ejemplo

4. $\int \frac{3}{1+4x^2}\,dx.$

   Observemos primero que $\int \frac{3}{1+4x^2}dx = 3\int \frac{1}{1+(2x)^2}dx$, ahora consideramos $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$ y $g(x) = 2x$, entonces la integral $\int \frac{3}{1+4x^2}\,dx = 3\int f(g(x))\,dx$.

Ejemplo

4. $\int \frac{3}{1+4x^2}\,dx.$

   Observemos primero que $\int \frac{3}{1+4x^2}dx = 3\int \frac{1}{1+(2x)^2}dx$, ahora consideramos $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$ y $g(x) = 2x$, entonces la integral $\int \frac{3}{1+4x^2}\,dx = 3\int f(g(x))\,dx$.

   Luego si hacemos el cambio de variable $t = g(x) = 2x$ y multiplicamos y dividimos por $g'(x) = 2$, tendremos que

EJEMPLO

4. $\int \frac{3}{1+4x^2}dx.$

Observemos primero que $\int \frac{3}{1+4x^2}dx = 3\int \frac{1}{1+(2x)^2}dx$, ahora consideramos $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$ y $g(x) = 2x$, entonces la integral $\int \frac{3}{1+4x^2}\,dx = 3\int f(g(x))\,dx$.

Luego si hacemos el cambio de variable $t = g(x) = 2x$ y multiplicamos y dividimos por $g'(x) = 2$, tendremos que

$$\int \frac{3}{1+4x^2}dx = \frac{3}{2}\int \frac{1}{1+(2x)^2}\,2dx \underset{dt=2dx}{\overset{t=2x}{=}} \frac{3}{2}\int f(t)\,dt =$$

Ejemplo

4. $\int \frac{3}{1+4x^2}dx.$

   Observemos primero que $\int \frac{3}{1+4x^2}dx = 3\int \frac{1}{1+(2x)^2}dx$, ahora consideramos $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$ y $g(x) = 2x$, entonces la integral $\int \frac{3}{1+4x^2}\,dx = 3\int f(g(x))\,dx$.

   Luego si hacemos el cambio de variable $t = g(x) = 2x$ y multiplicamos y dividimos por $g'(x) = 2$, tendremos que

$$\int \frac{3}{1+4x^2}dx = \frac{3}{2}\int \frac{1}{1+(2x)^2}\,2dx \underset{dt=2dx}{\overset{t=2x}{=}} \frac{3}{2}\int f(t)\,dt =$$

$$= \frac{3}{2}\int \frac{1}{1+t^2}dt = \frac{3}{2}(\arctan t + c') \overset{t=2x}{=} \frac{3}{2}\arctan(2x) + c$$

1.3 Integración por partes

Por el álgebra de derivadas, la derivada del producto de dos funciones es

$$[f(x)\,g(x)]' = f(x)\,g'(x) + f'(x)\,g(x) \implies \int \big(f(x)g'(x) + f'(x)g(x)\big)\,dx = f(x)g(x) + c$$

De aquí surge el siguiente:

Teorema

(Integración por partes) Sean f y g derivables con derivada continua en I. Entonces

$$\int f(x)\,g'(x)\,dx = f(x)g(x) - \int f'(x)\,g(x)dx$$

Veamos algunos casos particulares que se resuelven con este método

EJEMPLO

1. $\int x^m e^{\alpha x} dx$ donde $m \in \mathbb{N}$ y $\alpha \in \mathbb{R}$.
    - $m = 1$, $\alpha \in \mathbb{R}$, buscamos primitivas de $\int x e^{\alpha x} dx$.

Veamos algunos casos particulares que se resuelven con este método

Ejemplo

1. $\int x^m e^{\alpha x}\, dx$ donde $m \in \mathbb{N}$ y $\alpha \in \mathbb{R}$.
   - $m = 1$, $\alpha \in \mathbb{R}$, buscamos primitivas de $\int x e^{\alpha x}\, dx$.

     Sean $f(x) = x$ y $g'(x) = e^{\alpha x}$, entonces serán $f'(x) = 1$ y g una primitiva de g' o sea $g(x) = \frac{1}{\alpha} e^{\alpha x}$, luego

Veamos algunos casos particulares que se resuelven con este método

Ejemplo

1. $\int x^m e^{\alpha x}\, dx$ donde $m \in \mathbb{N}$ y $\alpha \in \mathbb{R}$.
   - $m = 1$, $\alpha \in \mathbb{R}$, buscamos primitivas de $\int x e^{\alpha x}\, dx$.

     Sean $f(x) = x$ y $g'(x) = e^{\alpha x}$, entonces serán $f'(x) = 1$ y g una primitiva de g' o sea $g(x) = \frac{1}{\alpha} e^{\alpha x}$, luego

$$\int x e^{\alpha x}\, dx = \tfrac{1}{\alpha} x e^{\alpha x} - \tfrac{1}{\alpha} \int e^{\alpha x}\, dx = \tfrac{1}{\alpha} x e^{\alpha x} - \tfrac{1}{\alpha^2} e^{\alpha x} + c$$

Veamos algunos casos particulares que se resuelven con este método

Ejemplo

1. $\int x^m e^{\alpha x} dx$ donde $m \in \mathbb{N}$ y $\alpha \in \mathbb{R}$.
   - $m = 1$, $\alpha \in \mathbb{R}$, buscamos primitivas de $\int x e^{\alpha x} dx$.

     Sean $f(x) = x$ y $g'(x) = e^{\alpha x}$, entonces serán $f'(x) = 1$ y g una primitiva de g' o sea $g(x) = \frac{1}{\alpha} e^{\alpha x}$, luego

     $$\int x e^{\alpha x} dx = \frac{1}{\alpha} x e^{\alpha x} - \frac{1}{\alpha} \int e^{\alpha x} dx = \frac{1}{\alpha} x e^{\alpha x} - \frac{1}{\alpha^2} e^{\alpha x} + c$$

   - $m = 2$, $\alpha \in \mathbb{R}$, buscamos primitivas de $\int x^2 e^{\alpha x} dx$.

Veamos algunos casos particulares que se resuelven con este método

EJEMPLO

1. $\int x^m e^{\alpha x}\,dx$ donde $m \in \mathbb{N}$ y $\alpha \in \mathbb{R}$.
   - $m = 1$, $\alpha \in \mathbb{R}$, buscamos primitivas de $\int x\,e^{\alpha x}\,dx$.

     Sean $f(x) = x$ y $g'(x) = e^{\alpha x}$, entonces serán $f'(x) = 1$ y g una primitiva de g' o sea $g(x) = \frac{1}{\alpha}e^{\alpha x}$, luego

     $$\int x\,e^{\alpha x}\,dx = \frac{1}{\alpha}xe^{\alpha x} - \frac{1}{\alpha}\int e^{\alpha x}\,dx = \frac{1}{\alpha}xe^{\alpha x} - \frac{1}{\alpha^2}e^{\alpha x} + c$$

   - $m = 2$, $\alpha \in \mathbb{R}$, buscamos primitivas de $\int x^2\,e^{\alpha x}\,dx$.

     Sean $f(x) = x^2$ y $g'(x) = e^{\alpha x}$, entonces serán $f'(x) = 2x$ y $g(x) = \frac{1}{\alpha}e^{\alpha x}$, luego

Veamos algunos casos particulares que se resuelven con este método

EJEMPLO

1. $\int x^m e^{\alpha x}\, dx$ donde $m \in \mathbb{N}$ y $\alpha \in \mathbb{R}$.
   - $m = 1$, $\alpha \in \mathbb{R}$, buscamos primitivas de $\int x\, e^{\alpha x}\, dx$.

     Sean $f(x) = x$ y $g'(x) = e^{\alpha x}$, entonces serán $f'(x) = 1$ y g una primitiva de g' o sea $g(x) = \frac{1}{\alpha} e^{\alpha x}$, luego

     $$\int x e^{\alpha x}\, dx = \frac{1}{\alpha} x e^{\alpha x} - \frac{1}{\alpha}\int e^{\alpha x}\, dx = \frac{1}{\alpha} x e^{\alpha x} - \frac{1}{\alpha^2} e^{\alpha x} + c$$

   - $m = 2$, $\alpha \in \mathbb{R}$, buscamos primitivas de $\int x^2 e^{\alpha x}\, dx$.

     Sean $f(x) = x^2$ y $g'(x) = e^{\alpha x}$, entonces serán $f'(x) = 2x$ y $g(x) = \frac{1}{\alpha} e^{\alpha x}$, luego

     $$\int x^2 e^{\alpha x}\, dx = \frac{1}{\alpha} x^2 e^{\alpha x} - \frac{1}{\alpha}\int 2x e^{\alpha x}\, dx = \frac{1}{\alpha} x^2 e^{\alpha x} - \frac{2}{\alpha}\int x e^{\alpha x}\, dx =$$

Veamos algunos casos particulares que se resuelven con este método

EJEMPLO

1. $\int x^m e^{\alpha x}\,dx$ donde $m \in \mathbb{N}$ y $\alpha \in \mathbb{R}$.
   - $m = 1$, $\alpha \in \mathbb{R}$, buscamos primitivas de $\int x\,e^{\alpha x}\,dx$.

     Sean $f(x) = x$ y $g'(x) = e^{\alpha x}$, entonces serán $f'(x) = 1$ y g una primitiva de g' o sea $g(x) = \frac{1}{\alpha} e^{\alpha x}$, luego

     $$\int x e^{\alpha x}\,dx = \frac{1}{\alpha} x e^{\alpha x} - \frac{1}{\alpha}\int e^{\alpha x}\,dx = \frac{1}{\alpha} x e^{\alpha x} - \frac{1}{\alpha^2} e^{\alpha x} + c$$

   - $m = 2$, $\alpha \in \mathbb{R}$, buscamos primitivas de $\int x^2 e^{\alpha x}\,dx$.

     Sean $f(x) = x^2$ y $g'(x) = e^{\alpha x}$, entonces serán $f'(x) = 2x$ y $g(x) = \frac{1}{\alpha} e^{\alpha x}$, luego

     $$\int x^2 e^{\alpha x}\,dx = \frac{1}{\alpha} x^2 e^{\alpha x} - \frac{1}{\alpha}\int 2x e^{\alpha x}\,dx = \frac{1}{\alpha} x^2 e^{\alpha x} - \frac{2}{\alpha}\int x e^{\alpha x}\,dx =$$

     $$= \frac{1}{\alpha} x^2 e^{\alpha x} - \frac{2}{\alpha}\left[\frac{1}{\alpha} x e^{\alpha x} - \frac{1}{\alpha^2} e^{\alpha x} + c'\right] = \frac{1}{\alpha} x^2 e^{\alpha x} - \frac{2}{\alpha^2} x e^{\alpha x} + \frac{2}{\alpha^3} e^{\alpha x} + c$$

Veamos algunos casos particulares que se resuelven con este método

EJEMPLO

1. $\int x^m e^{\alpha x}\,dx$ donde $m \in \mathbb{N}$ y $\alpha \in \mathbb{R}$.
   - $m = 1$, $\alpha \in \mathbb{R}$, buscamos primitivas de $\int x\,e^{\alpha x}\,dx$.

     Sean $f(x) = x$ y $g'(x) = e^{\alpha x}$, entonces serán $f'(x) = 1$ y g una primitiva de g' o sea $g(x) = \frac{1}{\alpha}e^{\alpha x}$, luego

     $$\int x\,e^{\alpha x}\,dx = \frac{1}{\alpha}xe^{\alpha x} - \frac{1}{\alpha}\int e^{\alpha x}\,dx = \frac{1}{\alpha}xe^{\alpha x} - \frac{1}{\alpha^2}e^{\alpha x} + c$$

   - $m = 2$, $\alpha \in \mathbb{R}$, buscamos primitivas de $\int x^2\,e^{\alpha x}\,dx$.

     Sean $f(x) = x^2$ y $g'(x) = e^{\alpha x}$, entonces serán $f'(x) = 2x$ y $g(x) = \frac{1}{\alpha}e^{\alpha x}$, luego

     $$\int x^2\,e^{\alpha x}\,dx = \frac{1}{\alpha}x^2e^{\alpha x} - \frac{1}{\alpha}\int 2xe^{\alpha x}\,dx = \frac{1}{\alpha}x^2e^{\alpha x} - \frac{2}{\alpha}\int xe^{\alpha x}\,dx =$$

     $$= \frac{1}{\alpha}x^2e^{\alpha x} - \frac{2}{\alpha}\left[\frac{1}{\alpha}xe^{\alpha x} - \frac{1}{\alpha^2}e^{\alpha x} + c'\right] = \frac{1}{\alpha}x^2e^{\alpha x} - \frac{2}{\alpha^2}xe^{\alpha x} + \frac{2}{\alpha^3}e^{\alpha x} + c$$

   - $m = 3$, $\alpha \in \mathbb{R}$, siendo $f(x) = x^3$ y $g'(x) = e^{\alpha x}$, serán $f'(x) = 3x^2$ y $g(x) = \frac{1}{\alpha}e^{\alpha x}$, luego

Veamos algunos casos particulares que se resuelven con este método

Ejemplo

1. $\int x^m e^{\alpha x}\,dx$ donde $m \in \mathbb{N}$ y $\alpha \in \mathbb{R}$.
   - $m = 1$, $\alpha \in \mathbb{R}$, buscamos primitivas de $\int x e^{\alpha x}\,dx$.

     Sean $f(x) = x$ y $g'(x) = e^{\alpha x}$, entonces serán $f'(x) = 1$ y g una primitiva de g' o sea $g(x) = \frac{1}{\alpha} e^{\alpha x}$, luego

     $$\int x e^{\alpha x}\,dx = \frac{1}{\alpha} x e^{\alpha x} - \frac{1}{\alpha} \int e^{\alpha x}\,dx = \frac{1}{\alpha} x e^{\alpha x} - \frac{1}{\alpha^2} e^{\alpha x} + c$$

   - $m = 2$, $\alpha \in \mathbb{R}$, buscamos primitivas de $\int x^2 e^{\alpha x}\,dx$.

     Sean $f(x) = x^2$ y $g'(x) = e^{\alpha x}$, entonces serán $f'(x) = 2x$ y $g(x) = \frac{1}{\alpha} e^{\alpha x}$, luego

     $$\int x^2 e^{\alpha x}\,dx = \frac{1}{\alpha} x^2 e^{\alpha x} - \frac{1}{\alpha} \int 2x e^{\alpha x}\,dx = \frac{1}{\alpha} x^2 e^{\alpha x} - \frac{2}{\alpha} \int x e^{\alpha x}\,dx =$$

     $$= \frac{1}{\alpha} x^2 e^{\alpha x} - \frac{2}{\alpha} \left[\frac{1}{\alpha} x e^{\alpha x} - \frac{1}{\alpha^2} e^{\alpha x} + c' \right] = \frac{1}{\alpha} x^2 e^{\alpha x} - \frac{2}{\alpha^2} x e^{\alpha x} + \frac{2}{\alpha^3} e^{\alpha x} + c$$

   - $m = 3$, $\alpha \in \mathbb{R}$, siendo $f(x) = x^3$ y $g'(x) = e^{\alpha x}$, serán $f'(x) = 3x^2$ y $g(x) = \frac{1}{\alpha} e^{\alpha x}$, luego

     $$\int x^3 e^{\alpha x}\,dx = \frac{1}{\alpha} x^3 e^{\alpha x} - \frac{1}{\alpha} \int 3x^2 e^{\alpha x}\,dx = \frac{1}{\alpha} x^3 e^{\alpha x} - \frac{3}{\alpha} \int x^2 e^{\alpha x}\,dx =$$

Veamos algunos casos particulares que se resuelven con este método

Ejemplo

1. $\int x^m e^{\alpha x}\,dx$ donde $m \in \mathbb{N}$ y $\alpha \in \mathbb{R}$.
   - $m = 1$, $\alpha \in \mathbb{R}$, buscamos primitivas de $\int x\, e^{\alpha x}\,dx$.

     Sean $f(x) = x$ y $g'(x) = e^{\alpha x}$, entonces serán $f'(x) = 1$ y g una primitiva de g' o sea $g(x) = \frac{1}{\alpha}e^{\alpha x}$, luego

     $$\int x e^{\alpha x}\,dx = \frac{1}{\alpha}xe^{\alpha x} - \frac{1}{\alpha}\int e^{\alpha x}\,dx = \frac{1}{\alpha}xe^{\alpha x} - \frac{1}{\alpha^2}e^{\alpha x} + c$$

   - $m = 2$, $\alpha \in \mathbb{R}$, buscamos primitivas de $\int x^2 e^{\alpha x}\,dx$.

     Sean $f(x) = x^2$ y $g'(x) = e^{\alpha x}$, entonces serán $f'(x) = 2x$ y $g(x) = \frac{1}{\alpha}e^{\alpha x}$, luego

     $$\int x^2 e^{\alpha x}\,dx = \frac{1}{\alpha}x^2e^{\alpha x} - \frac{1}{\alpha}\int 2xe^{\alpha x}\,dx = \frac{1}{\alpha}x^2e^{\alpha x} - \frac{2}{\alpha}\int xe^{\alpha x}\,dx =$$

     $$= \frac{1}{\alpha}x^2e^{\alpha x} - \frac{2}{\alpha}\left[\frac{1}{\alpha}xe^{\alpha x} - \frac{1}{\alpha^2}e^{\alpha x} + c'\right] = \frac{1}{\alpha}x^2e^{\alpha x} - \frac{2}{\alpha^2}xe^{\alpha x} + \frac{2}{\alpha^3}e^{\alpha x} + c$$

   - $m = 3$, $\alpha \in \mathbb{R}$, siendo $f(x) = x^3$ y $g'(x) = e^{\alpha x}$, serán $f'(x) = 3x^2$ y $g(x) = \frac{1}{\alpha}e^{\alpha x}$, luego

     $$\int x^3 e^{\alpha x}\,dx = \frac{1}{\alpha}x^3e^{\alpha x} - \frac{1}{\alpha}\int 3x^2e^{\alpha x}\,dx = \frac{1}{\alpha}x^3e^{\alpha x} - \frac{3}{\alpha}\int x^2e^{\alpha x}\,dx =$$

     $$= \frac{1}{\alpha}x^3e^{\alpha x} - \frac{3}{\alpha}\left[\frac{1}{\alpha}x^2e^{\alpha x} - \frac{2}{\alpha^2}xe^{\alpha x} + \frac{2}{\alpha^3}e^{\alpha x} + c'\right] = \frac{1}{\alpha}x^3e^{\alpha x} - \frac{3}{\alpha^2}x^2e^{\alpha x} + \frac{6}{\alpha^3}xe^{\alpha x} - \frac{6}{\alpha^4}e^{\alpha x} + c$$

Ejemplo

2. $\int x^m \cos(\alpha x)\,dx$ ó $\int x^m \sin(\alpha x)\,dx$ donde $m \in \mathbb{N}$ y $\alpha \in \mathbb{R}$.

Ejemplo

2. $\int x^m \cos(\alpha x)\, dx$ ó $\int x^m \sin(\alpha x)\, dx$ donde $m \in \mathbb{N}$ y $\alpha \in \mathbb{R}$.
   - $m = 1,\ \alpha = 1.$

   Para calcular la integral $\int x \cos x dx$, ponemos $f(x) = x$ y $g'(x) = \cos x$, serán $f'(x) = 1$ y $g(x) = \sin x$, luego

$$\int x \cos x\, dx = x \sin x - \int \sin x\, dx = x \sin x + \cos x + c$$

EJEMPLO

2. $\int x^m \cos(\alpha x)\,dx$ ó $\int x^m \sin(\alpha x)\,dx$ donde $m \in \mathbb{N}$ y $\alpha \in \mathbb{R}$.
   - $m = 1$, $\alpha = 1$.

   Para calcular la integral $\int x\cos x dx$, ponemos $f(x) = x$ y $g'(x) = \cos x$, serán $f'(x) = 1$ y $g(x) = \sin x$, luego

$$\int x\cos x\,dx = x\sin x - \int \sin x\,dx = x\sin x + \cos x + c$$

   y para la integral $\int x\sin x dx$, ponemos $f(x) = x$ y $g'(x) = \sin x$, serán $f'(x) = 1$ y $g(x) = -\cos x$, luego

$$\int x\sin x\,dx = -x\cos x + \int \cos x\,dx = -x\cos x + \sin x + c$$

Ejemplo

2. $\int x^m \cos(\alpha x)\,dx$ ó $\int x^m \sin(\alpha x)\,dx$ donde $m \in \mathbb{N}$ y $\alpha \in \mathbb{R}$.
   - $m = 1$, $\alpha = 1$.

   Para calcular la integral $\int x \cos x dx$, ponemos $f(x) = x$ y $g'(x) = \cos x$, serán $f'(x) = 1$ y $g(x) = \sin x$, luego

$$\int x \cos x\,dx = x \sin x - \int \sin x\,dx = x \sin x + \cos x + c$$

   y para la integral $\int x \sin x dx$, ponemos $f(x) = x$ y $g'(x) = \sin x$, serán $f'(x) = 1$ y $g(x) = -\cos x$, luego

$$\int x \sin x\,dx = -x \cos x + \int \cos x\,dx = -x \cos x + \sin x + c$$

   - $m = 2$, $\alpha = 1$.

   Para la integral $\int x^2 \cos x dx$, ponemos $f(x) = x^2$ y $g'(x) = \cos x$, serán $f'(x) = 2x$ y $g(x) = \sin x$, luego

$$\int x^2 \cos x\,dx = x^2 \sin x - \int 2x \sin x\,dx = x^2 \sin x - 2 \int x \sin x\,dx =$$

EJEMPLO

2. $\int x^m \cos(\alpha x)\,dx$ ó $\int x^m \sin(\alpha x)\,dx$ donde $m \in \mathbb{N}$ y $\alpha \in \mathbb{R}$.

   • $m = 1$, $\alpha = 1$.

   Para calcular la integral $\int x \cos x dx$, ponemos $f(x) = x$ y $g'(x) = \cos x$, serán $f'(x) = 1$ y $g(x) = \sin x$, luego

$$\int x \cos x\, dx = x \sin x - \int \sin x\, dx = x \sin x + \cos x + c$$

   y para la integral $\int x \sin x dx$, ponemos $f(x) = x$ y $g'(x) = \sin x$, serán $f'(x) = 1$ y $g(x) = -\cos x$, luego

$$\int x \sin x\, dx = -x \cos x + \int \cos x\, dx = -x \cos x + \sin x + c$$

   • $m = 2$, $\alpha = 1$.

   Para la integral $\int x^2 \cos x dx$, ponemos $f(x) = x^2$ y $g'(x) = \cos x$, serán $f'(x) = 2x$ y $g(x) = \sin x$, luego

$$\int x^2 \cos x\, dx = x^2 \sin x - \int 2x \sin x\, dx = x^2 \sin x - 2 \int x \sin x\, dx =$$

$$= x^2 \sin x - 2(-x \cos x + \sin x + c') = x^2 \sin x + 2x \cos x - 2 \sin x + c$$

Ejemplo

3. $\int \sin(\alpha x)\, e^{\beta x}\, dx$ ó $\int \cos(\alpha x)\, e^{\beta x}\, dx$ donde $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

EJEMPLO

3. $\int \sin(\alpha x)\, e^{\beta x}\, dx$ ó $\int \cos(\alpha x)\, e^{\beta x}\, dx$ donde $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.
   - $\alpha = 1$, $\beta = 1$, para calcular $\int \sin x\, e^x\, dx$, ponemos $f(x) = \sin x$ y $g'(x) = e^x$, serán $f'(x) = \cos x$ y $g(x) = e^x$, luego

Ejemplo

3. $\int \sin(\alpha x)\, e^{\beta x}\, dx$ ó $\int \cos(\alpha x)\, e^{\beta x}\, dx$ donde $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.
   - $\alpha = 1, \beta = 1$, para calcular $\int \sin x\, e^x\, dx$, ponemos $f(x) = \sin x$ y $g'(x) = e^x$, serán $f'(x) = \cos x$ y $g(x) = e^x$, luego

$$\int \sin x\, e^x\, dx = \sin x\, e^x - \int \cos x\, e^x\, dx =$$

Ejemplo

3. $\int \sin(\alpha x)\, e^{\beta x}\, dx$ ó $\int \cos(\alpha x)\, e^{\beta x}\, dx$ donde $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.
   - $\alpha = 1, \beta = 1$, para calcular $\int \sin x\, e^x\, dx$, ponemos $f(x) = \sin x$ y $g'(x) = e^x$, serán $f'(x) = \cos x$ y $g(x) = e^x$, luego

$$\int \sin x\, e^x\, dx = \sin x\, e^x - \int \cos x\, e^x\, dx =$$

ahora, consideramos $f(x) = \cos x$ y $g'(x) = e^x$, serán $f'(x) = -\sin x$ y $g(x) = e^x$, luego

Ejemplo

3. $\int \sin(\alpha x)\, e^{\beta x}\, dx$ ó $\int \cos(\alpha x)\, e^{\beta x}\, dx$ donde $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.
   - $\alpha = 1, \beta = 1$, para calcular $\int \sin x\, e^x\, dx$, ponemos $f(x) = \sin x$ y $g'(x) = e^x$, serán $f'(x) = \cos x$ y $g(x) = e^x$, luego

$$\int \sin x\, e^x\, dx = \sin x\, e^x - \int \cos x\, e^x\, dx =$$

ahora, consideramos $f(x) = \cos x$ y $g'(x) = e^x$, serán $f'(x) = -\sin x$ y $g(x) = e^x$, luego

$$= \sin x\, e^x - \left[\cos x\, e^x - \int (-\sin x)\, e^x\, dx\right]$$

EJEMPLO

3. $\int \sin(\alpha x)\, e^{\beta x}\, dx$ ó $\int \cos(\alpha x)\, e^{\beta x}\, dx$ donde $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.
   - $\alpha = 1$, $\beta = 1$, para calcular $\int \sin x\, e^x\, dx$, ponemos $f(x) = \sin x$ y $g'(x) = e^x$, serán $f'(x) = \cos x$ y $g(x) = e^x$, luego

     $$\int \sin x\, e^x\, dx = \sin x\, e^x - \int \cos x\, e^x\, dx =$$

     ahora, consideramos $f(x) = \cos x$ y $g'(x) = e^x$, serán $f'(x) = -\sin x$ y $g(x) = e^x$, luego

     $$= \sin x\, e^x - \left[\cos x\, e^x - \int (-\sin x)\, e^x\, dx\right]$$

     Es decir que

     $$\int \sin x\, e^x\, dx = \sin x\, e^x - \cos x\, e^x - \int \sin x\, e^x\, dx$$

Ejemplo

3. $\int \sin(\alpha x)\, e^{\beta x}\, dx$ ó $\int \cos(\alpha x)\, e^{\beta x}\, dx$ donde $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.
   - $\alpha = 1$, $\beta = 1$, para calcular $\int \sin x\, e^x\, dx$, ponemos $f(x) = \sin x$ y $g'(x) = e^x$, serán $f'(x) = \cos x$ y $g(x) = e^x$, luego

$$\int \sin x\, e^x\, dx = \sin x\, e^x - \int \cos x\, e^x\, dx =$$

ahora, consideramos $f(x) = \cos x$ y $g'(x) = e^x$, serán $f'(x) = -\sin x$ y $g(x) = e^x$, luego

$$= \sin x\, e^x - \left[\cos x\, e^x - \int (-\sin x)\, e^x\, dx\right]$$

Es decir que

$$\int \sin x\, e^x\, dx = \sin x\, e^x - \cos x\, e^x - \int \sin x\, e^x\, dx$$

y por lo tanto

$$2 \int \sin x\, e^x\, dx = \sin x\, e^x - \cos x\, e^x + c' \implies \int \sin x\, e^x\, dx = \frac{e^x}{2}(\sin x - \cos x) + c$$

EJEMPLO

4. $\int x^{\alpha} \ln(\beta x)\, dx$ con $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ y $\alpha \neq -1, \beta \neq 0$.

EJEMPLO

4. $\int x^{\alpha} \ln(\beta x)\,dx$ con $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ y $\alpha \neq -1, \beta \neq 0$.
   - $\alpha = 0, \beta = 1,$

Ejemplo

4. $\int x^{\alpha} \ln(\beta x)\, dx$ con $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ y $\alpha \neq -1, \beta \neq 0$.
   - $\alpha = 0$, $\beta = 1$, para la integral $\int \ln x\, dx$, ponemos $f(x) = \ln x$ y $g'(x) = 1$, serán $f'(x) = \frac{1}{x}$ y $g(x) = x$, luego

EJEMPLO

4. $\int x^{\alpha} \ln(\beta x)\,dx$ con $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ y $\alpha \neq -1, \beta \neq 0$.
   - $\alpha = 0$, $\beta = 1$, para la integral $\int \ln x\,dx$, ponemos $f(x) = \ln x$ y $g'(x) = 1$, serán $f'(x) = \frac{1}{x}$ y $g(x) = x$, luego

$$\int \ln x\,dx = \int \ln x \cdot 1\,dx = \ln x \cdot x - \int \frac{1}{x} x\,dx = x \ln x - x + c$$

Ejemplo

4. $\int x^{\alpha}\ln(\beta x)\,dx$ con $\alpha,\beta \in \mathbb{R}$ y $\alpha \neq -1, \beta \neq 0$.
   - $\alpha = 0$, $\beta = 1$, para la integral $\int \ln x\,dx$, ponemos $f(x) = \ln x$ y $g'(x) = 1$, serán $f'(x) = \frac{1}{x}$ y $g(x) = x$, luego

$$\int \ln x\,dx = \int \ln x \cdot 1\,dx = \ln x \cdot x - \int \frac{1}{x}x\,dx = x\ln x - x + c$$

   - $\alpha \neq -1$, $\beta \neq 0$,

Ejemplo

4. $\int x^{\alpha} \ln(\beta x)\, dx$ con $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ y $\alpha \neq -1, \beta \neq 0$.
   - $\alpha = 0$, $\beta = 1$, para la integral $\int \ln x\, dx$, ponemos $f(x) = \ln x$ y $g'(x) = 1$, serán $f'(x) = \frac{1}{x}$ y $g(x) = x$, luego

$$\int \ln x\, dx = \int \ln x \cdot 1\, dx = \ln x \cdot x - \int \frac{1}{x} x\, dx = x \ln x - x + c$$

   - $\alpha \neq -1$, $\beta \neq 0$, para la integral $\int x^{\alpha} \ln(\beta x)\, dx$, ponemos $f(x) = \ln(\beta x)$ y $g'(x) = x^{\alpha}$, serán $f'(x) = \frac{1}{\beta x} \beta$ y $g(x) = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}$, luego

Ejemplo

4. $\int x^{\alpha}\ln(\beta x)\,dx$ con $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$ y $\alpha\neq -1, \beta\neq 0$.
   - $\alpha=0$, $\beta=1$, para la integral $\int \ln x\,dx$, ponemos $f(x)=\ln x$ y $g'(x)=1$, serán $f'(x)=\frac{1}{x}$ y $g(x)=x$, luego

$$\int \ln x\,dx=\int \ln x\cdot 1\,dx=\ln x\cdot x-\int \frac{1}{x}x\,dx=x\ln x-x+c$$

   - $\alpha\neq -1$, $\beta\neq 0$, para la integral $\int x^{\alpha}\ln(\beta x)\,dx$, ponemos $f(x)=\ln(\beta x)$ y $g'(x)=x^{\alpha}$, serán $f'(x)=\frac{1}{\beta x}\beta$ y $g(x)=\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}$, luego

$$\int \ln(\beta x)x^{\alpha}dx=\ln(\beta x)\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}-\int \frac{1}{x}\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}dx=$$

Ejemplo

4. $\int x^{\alpha}\ln(\beta x)\,dx$ con $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$ y $\alpha\neq -1,\beta\neq 0$.
   - $\alpha=0$, $\beta=1$, para la integral $\int \ln x\,dx$, ponemos $f(x)=\ln x$ y $g'(x)=1$, serán $f'(x)=\frac{1}{x}$ y $g(x)=x$, luego

$$\int \ln x\,dx=\int \ln x\cdot 1\,dx=\ln x\cdot x-\int \frac{1}{x}x\,dx=x\ln x-x+c$$

   - $\alpha\neq -1$, $\beta\neq 0$, para la integral $\int x^{\alpha}\ln(\beta x)\,dx$, ponemos $f(x)=\ln(\beta x)$ y $g'(x)=x^{\alpha}$, serán $f'(x)=\frac{1}{\beta x}\beta$ y $g(x)=\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}$, luego

$$\int \ln(\beta x)x^{\alpha}dx=\ln(\beta x)\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}-\int\frac{1}{x}\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}dx=$$

$$=\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}\ln(\beta x)-\int\frac{x^{\alpha}}{\alpha+1}\,dx=\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}\ln(\beta x)-\frac{x^{\alpha+1}}{(\alpha+1)^2}+c$$

Ejemplo

1. $\int (4x-2)\sin x\,dx$.
Consideramos $f(x)=4x-2$ y $g'(x)=\sin x$, entonces serán $f'(x)=4$ y $g(x)=-\cos x$. Luego

$$\int (4x-2)\sin x\,dx = (4x-2)(-\cos x) - \int 4(-\cos x)\,dx = -(4x-2)\cos x + 4\sin x + c$$

Ejemplo

1. $\int (4x-2)\sin x\, dx$.
   Consideramos $f(x)=4x-2$ y $g'(x)=\sin x$, entonces serán $f'(x)=4$ y $g(x)=-\cos x$. Luego

$$\int (4x-2)\sin x\, dx = (4x-2)(-\cos x) - \int 4(-\cos x)\, dx = -(4x-2)\cos x + 4\sin x + c$$

2. $\int \cos x \sin x\, dx$.
   Consideramos $f(x)=\cos x$ y $g'(x)=\sin x$, entonces serán $f'(x)=-\sin x$ y $g(x)=-\cos x$. Luego

$$\int \cos x \sin x\, dx = \cos x(-\cos x) - \int (-\sin x)(-\cos x)\, dx = -\cos^2 x - \int \sin x \cos x\, dx + c'$$

   luego

$$2\int \cos x \sin x\, dx = -\cos^2 x + c' \Rightarrow \int \cos x \sin x\, dx = -\frac{1}{2}\cos^2 x + c$$

Ejemplo

3. $\int e^x(x^2-5x+3)dx.$

Ejemplo

3. $\int e^x(x^2-5x+3)dx$.
   Observemos primero que tanto la derivada como una primitiva de la función e^x es también e^x, luego para calcular $\int e^x(x^2-5x+3)dx$ podemos (por propiedad conmutativa del producto) considerar $f(x)=x^2-5x+3$ (que es la función que tenemos que derivar) y $g'(x)=e^x$ (que es la función que tenemos que integrar); entonces $f'(x)=2x-5$ y $g(x)=e^x$, luego la integral

Ejemplo

3. $\int e^x(x^2-5x+3)dx.$
Observemos primero que tanto la derivada como una primitiva de la función e^x es también e^x, luego para calcular $\int e^x(x^2-5x+3)dx$ podemos (por propiedad conmutativa del producto) considerar $f(x)=x^2-5x+3$ (que es la función que tenemos que derivar) y $g'(x)=e^x$ (que es la función que tenemos que integrar); entonces $f'(x)=2x-5$ y $g(x)=e^x$, luego la integral

$$\int e^x(x^2-5x+3)dx = \int (x^2-5x+3)e^x dx = (x^2-5x+3)e^x - \int (2x-5)e^x dx =$$

$$= (x^2-5x+3)e^x - 2\int xe^x dx + 5\int e^x dx = (x^2-5x+3)e^x + 5e^x - 2\underbrace{\int xe^x dx}_{A} \ldots.(**)$$

Ejemplo

3. $\int e^x(x^2-5x+3)dx$.
Observemos primero que tanto la derivada como una primitiva de la función e^x es también e^x, luego para calcular $\int e^x(x^2-5x+3)dx$ podemos (por propiedad conmutativa del producto) considerar $f(x)=x^2-5x+3$ (que es la función que tenemos que derivar) y $g'(x)=e^x$ (que es la función que tenemos que integrar); entonces $f'(x)=2x-5$ y $g(x)=e^x$, luego la integral

$$\int e^x(x^2-5x+3)dx = \int (x^2-5x+3)e^x dx = (x^2-5x+3)e^x - \int (2x-5)e^x dx =$$

$$= (x^2-5x+3)e^x - 2\int xe^x dx + 5\int e^x dx = (x^2-5x+3)e^x + 5e^x - 2\underbrace{\int xe^x dx}_{A} \ldots .(**)$$

Nos resta aún calcular $A=\int xe^x dx$, considerando ahora $f(x)=x$ y $g'(x)=e^x$, siendo $f'(x)=1$ y $g(x)=e^x$ nuevamente aplicando partes, tendremos que

$$A=\int xe^x dx = xe^x - \int 1e^x dx = xe^x - e^x + c'$$

Ejemplo

Volviendo a (**) tendremos

$$\int e^x(x^2-5x+3)dx = (x^2-5x+3)e^x + 5e^x - 2(xe^x - e^x + c') = (x^2-5x+8)e^x - 2xe^x + 2e^x + c$$

O sea,

$$\int e^x(x^2-5x+3)dx = e^x(x^2-7x+10) + c$$