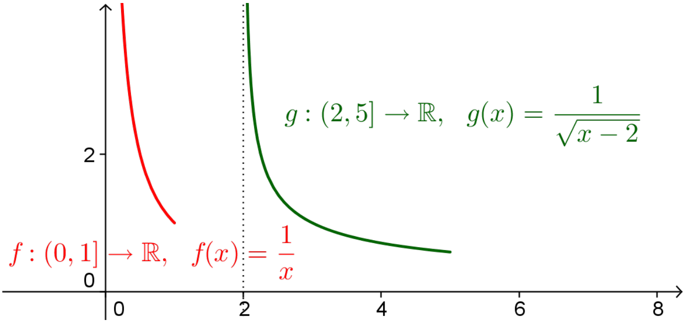
Integrales Impropias

[1] ECEN - FCEIA - Universidad Nacional de Rosario

¿Qué pasa con las siguientes integrales? Llamadas *integrales impropias*

$$(*) \quad \int_a^{\infty} f(t)\, dt \qquad\qquad (*) \quad \int_{-\infty}^{b} g(t)\, dt$$

$$(*) \quad \int_0^1 \frac{1}{x}\, dx \qquad \frac{1}{x} \text{ tiene una asíntota vertical en } x = 0$$



Si

1. f función integrable en $[a, x]$ para cada $x > a$.
2. Existe $\lim_{x\to\infty} \int_a^x f(t)dt = I$

Entonces definimos la *integral impropia* como

$$\int_a^{\infty} f(x)dx = I.$$

En caso que el límite anterior sea $\pm\infty$ decimos que la integral impropia de f en $(-\infty, a]$ es *divergente*.
¿Cómo se define $\int_{-\infty}^{b} g(t)\,dt$?

1. g función integrable en $[x, b]$ para cada $x < b$.
2. Existe $\lim_{x\to-\infty} \int_x^b g(t)\,dt = I \qquad \Rightarrow \qquad \int_{-\infty}^{b} g(t)\,dt = I$

Observación: (corregido y bien formulado) Si existe $\int_a^\infty f(t)dt$ y existe $\lim_{x\to\infty} f(x) = c$ entonces $c = 0$.
En efecto, supongamos que $c > 0$ y $f > 0$, con lo cual, existe un x_0 tal que para todo $x > x_0$ se cumple que $f(x) > c - c/2 = c/2$. Por lo tanto

$$\int_a^x f(t)dt = \int_a^{x_0} f(t)dt + \int_{x_0}^x f(t)dt > c/2(x - x_0)$$

de lo que sale que la integral debe diverger, lo cual es un absurdo.
Otro caso (Atender la definición!)

1. f función integrable en cualquier intervalo cerrado $[a, b]$ de $\mathbb{R}$,
2. existen $\lim_{x\to\infty} \int_a^x f(t)dt = I$ y $\int_{x\to-\infty} \int_x^b f(t)dt = I'$, $\forall a, b$
   $\Rightarrow$ existen las integrales impropias de f en $(-\infty, 0]$ y en $[0, \infty)$ denotamos por

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^{0} f(x)dx + \int_0^\infty f(x)dx.$$

Ejemplo No integrable impropiamente: $\int_{-\infty}^{\infty} t\ dt$

Si f es una función

1. integrable en $[x, b]$ para cada $a < x < b$
2. tiene una asíntota vertical en $x = a$
3. existe $\lim_{x\to a^+} \int_x^a f(t)\, dt = I$

entonces tenemos la *integral impropia de f en $(a, b]$*:

$$\int_a^b f(x)dx = I.$$

1. integrable en $[a, x]$ para cada $a < x < b$,
2. tiene una asíntota vertical en $x = b$,
3. existe $\lim_{x\to b^-} \int_a^x f(t)\, dt = I'$

entonces tenemos la *integral impropia de f en $[a, b)$*:

$$\int_a^b f(x)\, dx = I'.$$

En caso que uno de estos límites sea $\pm\infty$, decimos que la integral impropia de f en $(a, b]$ o en $[a, b)$ es *divergente*.