Facultad de Ciencias Exactas, Ingeniería y Agrimensura
Escuela de Ciencias Exactas y Naturales
Departamento de Matemática

LM - LCC - LF - PM - PF

Algebra y Geometría Analítica I - 2018

1 Números complejos

El conjunto $\mathbb{C}$ de los números complejos es

$$\mathbb{C} = \{z = a + bi : a, b \in \mathbb{R}\}$$

donde i es la *unidad imaginaria* que verifica $i^2 = -1$.

Si $z \in \mathbb{C}$, la representación $z = a + bi$ se llama *forma binómica* de z. La *parte real* de z es a, y la *parte imaginaria* de z es b, y se escribe

$$\operatorname{Re} z = a, \qquad \operatorname{Im} z = b.$$

Notación:

$$a + (-b)i = a - bi, \qquad a + 0i = a, \qquad 0 + bi = bi.$$

Si $z, w \in \mathbb{C}$ entonces

$$z = w \qquad \Longleftrightarrow \qquad \operatorname{Re} z = \operatorname{Re} w \quad \text{y} \quad \operatorname{Im} z = \operatorname{Im} w.$$

Sean $z = a + bi$ y $w = c + di$ dos números complejos. La suma y el producto se definen por

$$\begin{aligned} z + w &= (a + c) + (b + d)i \\ z\,w &= (ac - bd) + (ad + bc)i. \end{aligned}$$

La suma es asociativa y conmutativa; el producto es asociativo y conmutativo y vale la propiedad distributiva del producto respecto de la suma. Si $z \in \mathbb{C}$, $z = a + bi$, llamamos *conjugado* de z al número complejo $\bar{z} = a - bi$, y llamamos *módulo* de z al número real $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$. Se verifica

$$1)\ |z|^2 = z\,\bar{z}, \qquad\qquad 2)\ \text{Si } z \neq 0, z^{-1} = \frac{\bar{z}}{|z|^2}.$$

Si $z = a + bi$ y $w = c + di$ con $w \neq 0$ entonces

$$\frac{z}{w} = \frac{ac + bd}{c^2 + d^2} + \frac{bc - ad}{c^2 + d^2} i.$$

Propiedades:

C1) $\bar{\bar{z}} = z$

C2) $\overline{z + w} = \bar{z} + \bar{w}$

C3) $\overline{z\,w} = \bar{z}\,\bar{w}$

C4) Si $z \neq 0$, $\overline{z^{-1}} = (\bar{z})^{-1}$

C5) $z + \bar{z} = 2 \operatorname{Re} z$

C6) $z - \bar{z} = 2 (\operatorname{Im} z)\, i$

M1) $z = 0 \Longleftrightarrow |z| = 0$

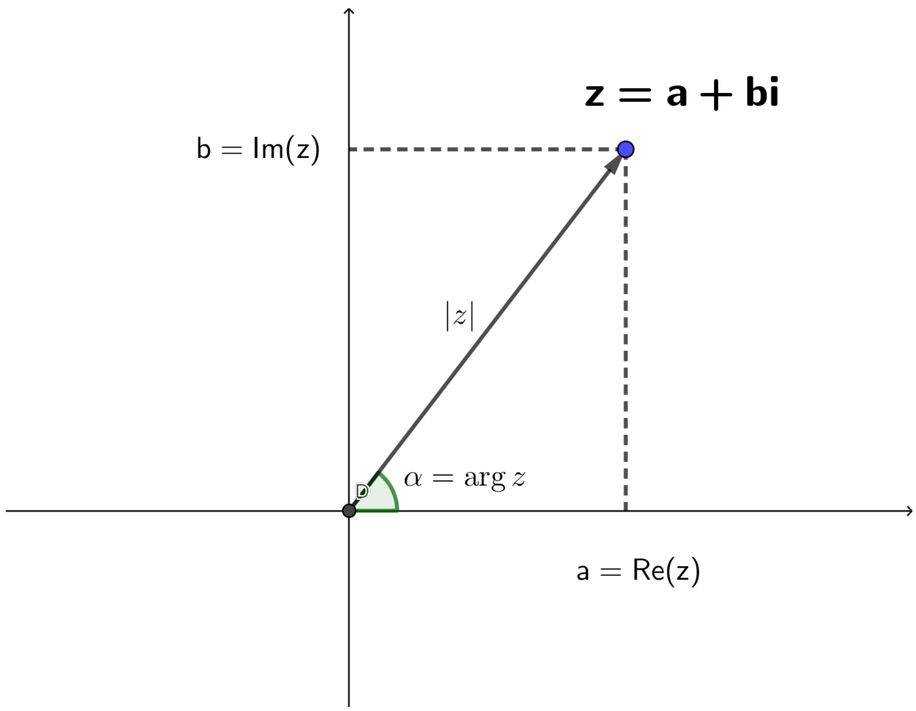
M2) $|zw| = |z||w|$

M3) $|z| = |\bar{z}|$

M4) $|z| = |-z|$

M5) Si $z \neq 0$, $|z^{-1}| = |z|^{-1}$

M6) Si $w \neq 0$, $\left|\frac{z}{w}\right| = \frac{|z|}{|w|}$



Si $z \in \mathbb{C}$, $z = a + bi$, $z \neq 0$, llamamos *argumento* de z al único número real $\arg z$ tal que

- $0 \leq \arg z \leq 2\pi$
- $\cos(\arg z) = \frac{a}{|z|}$
- $\sin(\arg z) = \frac{b}{|z|}$

Si $z \in \mathbb{C}$ la *forma trigonométrica* de z es

$$z = |z| \left(\cos \arg z + i \sin \arg z\right).$$

Si $z = \rho \left(\cos \alpha + i \sin \alpha\right)$ y $w = \tau \left(\cos \beta + i \sin \beta\right)$ con $\rho, \tau > 0$ y $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ entonces

$$z = w \qquad \Longleftrightarrow \qquad \rho = \tau \text{ (es decir, } |z| = |w|\text{) y } \alpha = \beta + 2k\pi \text{ para algún } k \in \mathbb{Z}.$$

Teorema de De Moivre. Sean $z, w \in \mathbb{C}$, $z \neq 0$, $w \neq 0$. Entonces si $z = |z| \left(\cos \alpha + i \sin \alpha\right)$ y $w = |w| \left(\cos \beta + i \sin \beta\right)$, entonces

$$zw = |z||w| \left[\cos(\alpha + \beta) + i \sin(\alpha + \beta)\right].$$

Corolario.

$$\begin{array}{rcll} z^{-1} & = & |z|^{-1} \left[\cos(-\alpha) + i \sin(-\alpha)\right] & \\ \bar{z} & = & |z| \left[\cos(-\alpha) + i \sin(-\alpha)\right] & \\ \dfrac{z}{w} & = & \dfrac{|z|}{|w|} \left[\cos(\alpha - \beta) + i \sin(\alpha - \beta)\right] & \\ z^n & = & |z|^n \left[\cos(n\alpha) + i \sin(n\alpha)\right] \quad n \in \mathbb{Z} & \qquad \text{(Fórmula de De Moivre)} \end{array}$$

Si $w \in \mathbb{C}$, $w \neq 0$, una *raíz n-ésima* de w, con $n \in \mathbb{N}$, es un número $z \in \mathbb{C}$ tal que $z^n = w$.
Propiedad. z es una raíz n-ésima de $w \neq 0$ si y solo si

$$z = |z|^{\frac{1}{n}} \left[\cos \frac{\arg w + 2k\pi}{n} + i \sin \frac{\arg w + 2k\pi}{n}\right]$$

para algún entero k con $0 \leq k \leq n-1$.
Si $z \in \mathbb{C}$, $z = |z|\,(\cos\alpha + i\sin\alpha)$, la *notación exponencial* de z es

$$z = |z|e^{i\alpha}.$$

Propiedades. Si $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, entonces

$$\begin{aligned} \overline{e^{i\alpha}} &= e^{\overline{i\alpha}} = e^{-i\alpha} \\ e^{i\alpha}e^{i\beta} &= e^{i(\alpha+\beta)}. \end{aligned}$$

2 Polinomios

Sea $\mathbb{K}$ el conjunto de números reales $\mathbb{R}$ o de números complejos $\mathbb{C}$. Un polinomio con coeficientes en $\mathbb{K}$ es una expresión de la forma

$$P(x) = a_0x^0 + a_1x^1 + \ldots + a_nx^n = \sum_{j=0}^{n} a_jx^j, \qquad \text{con} \quad a_j \in \mathbb{K}, 0 \leq j \leq n, \quad n \in \mathbb{N}. \tag{1}$$

Denotamos por $\mathbb{K}[x]$ al conjunto de todos los polinomios con coeficientes en $\mathbb{K}$. Si el polinomio P está dado por (1) con $a_n \neq 0$ decimos que P tiene *grado* n y escribimos $\operatorname{gr} P = n$. El *polinomio nulo*, $P(x) = 0$, no tiene grado.
Si $P(x) = a_0x^0 + a_1x^1 + \ldots + a_nx^n$ y $Q(x) = b_0x^0 + b_1x^1 + \ldots + b_mx^m$, entonces la suma de P y Q es el polinomio $P + Q$ definido por

$$(P+Q)(x) = c_0x^0 + c_1x^1 + \ldots + c_\ell x^\ell, \quad \text{con } \ell = \max\{n, m\} \quad \text{y} \quad c_j = a_j + b_j, 0 \leq j \leq \ell,$$

poniendo $a_j = 0$ si $j > n$ y $b_j = 0$ si $j > m$. También se define el polinomio producto $P \cdot Q$ de P y Q como

$$P \cdot Q(x) = d_0x^0 + d_1x^1 + \ldots d_{m+n}x^{m+n}$$

donde, para $0 \leq j \leq m+n$,

$$d_j = a_0b_j + a_1b_{j-1} + a_2b_{j-2} + \ldots + a_{j-1}b_1 + a_jb_0 = \sum_{k=0}^{j} a_kb_{j-k},$$

poniendo, de nuevo, $a_j = 0$ si $j > n$ y $b_j = 0$ si $j > m$.

Propiedades. Sean P y Q polinomios en $\mathbb{K}[x]$. Entonces

1. $\operatorname{gr}(P+Q) \leq \max\{\operatorname{gr} P, \operatorname{gr} Q\}$.
2. $\operatorname{gr}(P \cdot Q) = \operatorname{gr} P + \operatorname{gr} Q$.

Dado $P \in \mathbb{K}[x]$ como en (1), y un número $z \in \mathbb{C}$, la *evaluación* de P en z es el número, en general, complejo

$$P(z) = \sum_{j=0}^{n} a_jz^j \in \mathbb{C}.$$

Decimos que z es *raíz* de P si $P(z) = 0$.

Importante. Convenimos en que $x^0 = 1$ para todo $x \in \mathbb{K}$, o sea, la evalución de x^0 es siempre igual a 1.

Algoritmo de división. Dados P y Q en $\mathbb{K}[x]$, con $Q \neq 0$, existen únicos R y S en $\mathbb{K}[x]$ tales que

$$P = Q \cdot S + R, \qquad \operatorname{gr} R < \operatorname{gr} Q \text{ o } R = 0.$$

En este caso, R es el *resto* de la división de P por Q. Decimos que Q divide a P, o que P es divisible por Q, y escribimos $Q|P$, si el resto R de la división de P por Q es el polinomio nulo, o sea $R = 0$. En este caso, $P = Q \cdot S$.

Observación. Si uno de los polinomios P y Q está en $\mathbb{C}[x]$ y el otro en $\mathbb{R}[x]$, entonces solo podemos asegurar que S y R están en $\mathbb{C}[x]$.

Teorema del Resto. Si $P \in \mathbb{K}[x]$ y $a \in \mathbb{C}$, el resto de dividir P por $x - a$ es $P(a)$.

Corolario. Sea $P \in \mathbb{K}[x]$ y sea $a \in \mathbb{C}$. Entonces a es raíz de P si y solo si $(x - a)|P$.

Decimos que $a \in \mathbb{C}$ es una raíz de *multiplicidad* $k \in \mathbb{N}$ de un polinomio $P \in \mathbb{K}[x]$, si $(x - a)^k|P$ y $(x - a)^{k+1} \not| P$.

Teorema Fundamental del Álgebra. Todo polinomio $P \in \mathbb{C}[x]$ de grado mayor o igual a 1 admite una raíz compleja.

Corolario. Todo polinomio $P \in \mathbb{C}[x]$ de grado n mayor o igual a 1 admite exactamente n raíces complejas, contadas con su multiplicidad.

Observar que un polinomio $P \in \mathbb{R}[x]$ tiene exactamente n raíces complejas (contadas con multiplicidad), estas raíces pueden ser o no reales.

Teorema. Sea $P \in \mathbb{R}[x]$, y $a \in \mathbb{C}$. Si a es raíz de P de multiplicidad k, entonces $\bar{a}$ también es raíz de P de multiplicidad k.

Entonces si un polinomio P tiene coeficientes reales, sus raíces complejas aparecen de a pares. Esto implica el siguiente corolario.

Corolario. Si $P \in \mathbb{R}[x]$ y $\operatorname{gr} P$ es impar, entonces P tiene al menos una raíz real.

Factorización de polinomios.

1. Todo polinomio $P \in \mathbb{C}[x]$ puede factorizarse como
$$P(x) = (x - a_1)^{k_1}(x - a_2)^{k_2} \cdots (x - a_r)^{k_r}$$
con $k_i \in \mathbb{N}$, $a_i \in \mathbb{C}$, para $1 \leq i \leq r$, verificando $k_1 + k_2 + \ldots k_r = \operatorname{gr} P$, y $a_i \neq a_j$ si $i \neq j$. En este caso las raíces de P son $a_1, a_2, \ldots, a_r$ y con a_j con multiplicidad k_j.
2. Todo polinomio a coeficientes reales puede, además, factorizarse como producto de polinomios lineales o cuadráticos, todos a coeficientes reales.

Teorema de Gauss. Sea $P(x) = a_0x^0 + a_1x^1 + \ldots + a_nx^n \in \mathbb{Z}[x]$ un polinomio con coeficientes enteros, con $a_0 \neq 0$. Si $\alpha = \frac{r}{s}$ es una raíz racional de P, con r y s coprimos, entonces $r|a_0$ y $s|a_n$.
Este teorema es útil para encontrar raíces racionales de polinomios con coefientes enteros o, incluso, racionales.

Raíces múltiples. Notar que si $P \in \mathbb{K}[x]$ es un polinomio de grado $n > 0$, entonces el *polinomio derivado* $P' \in \mathbb{K}[x]$ que se obtiene derivando formalmente a P, tiene grado $n - 1$. Esto es, si
$$P(x) = a_0x^0 + a_1x^1 + \ldots + a_nx^n, \qquad a_n \neq 0$$
entonces
$$P'(x) = a_1 + 2a_2x + 3a_3x^2 + \ldots + na_nx^{n-1}$$
tiene grado $n - 1$. Análogamente consideramos derivadas superiores, $P^{(s)}$, de P. Entonces tenemos el siguiente resultado.

Teorema. $a \in \mathbb{C}$ es raíz de $P \in \mathbb{K}[x]$ de multiplicidad k si y solo si $P(a) = P'(a) = \cdots = P^{(k-1)}(a) = 0$.

Facultad de Ciencias Exactas, Ingeniería y Agrimensura
Escuela de Ciencias Exactas y Naturales
Departamento de Matemática

LM - LCC - LF - PM - PF

Algebra y Geometría Analítica I - 2018

Trabajo Práctico: Números Complejos

1. Calcular:

   (a) $(6,2)-(3,\frac{2}{3})$
   (b) $(4,-1).(-2,3)$
   (c) $(1+i)^2$
   (d) $\frac{(3+i)^2+(1-i)^3-2.(2+i)}{4+2i}$
   (e) $1_{\frac{\pi}{2}} 1_{\frac{3\pi}{2}}$
   (f) $3_{\frac{\pi}{5}} : 4$

2. Representar gráficamente y escribir en froma polar y trigonométrica cada uno de los siguientes números complejos:

   (a) $\sqrt{3}-i$
   (b) $\frac{1+i}{1-i}$
   (c) -1
   (d) $-2+6i^{10}$

3. Representar gráficamente y escribir en forma binómica los siguientes números complejos:

   (a) 3
   (b) 1_{-45°
   (c) $\sqrt{2}_{420^\circ}$
   (d) $3(\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6})$

4. ¿Cuántos números complejos verifican $Re(z)=2\sqrt{3}$ y $|z|=9$? Cuáles son? Expresarlos en forma binómica, polar y trigonométrica.

5. Indicar si las siguientes proposiciones son verdaderas o falsas.Justificar las respuestas

   (a) Si $z=a+bi,\ a,b\in\mathbb{R}$ entonces $|a|\leq|z|$
   (b) $\arg(z)=\arg(\overline{z})\ \forall z\in\mathbb{C}$
   (c) $\exists z\in\mathbb{C}\ /\ \arg(z)=\arg(\overline{z})$
   (d) Si $z=-4(\cos\frac{7\pi}{3}+i\sin\frac{7\pi}{3}$ entonces $\arg(z)=\frac{7\pi}{3}$

6. Expresar en forma polar los resultados de las operaciones indicadas:

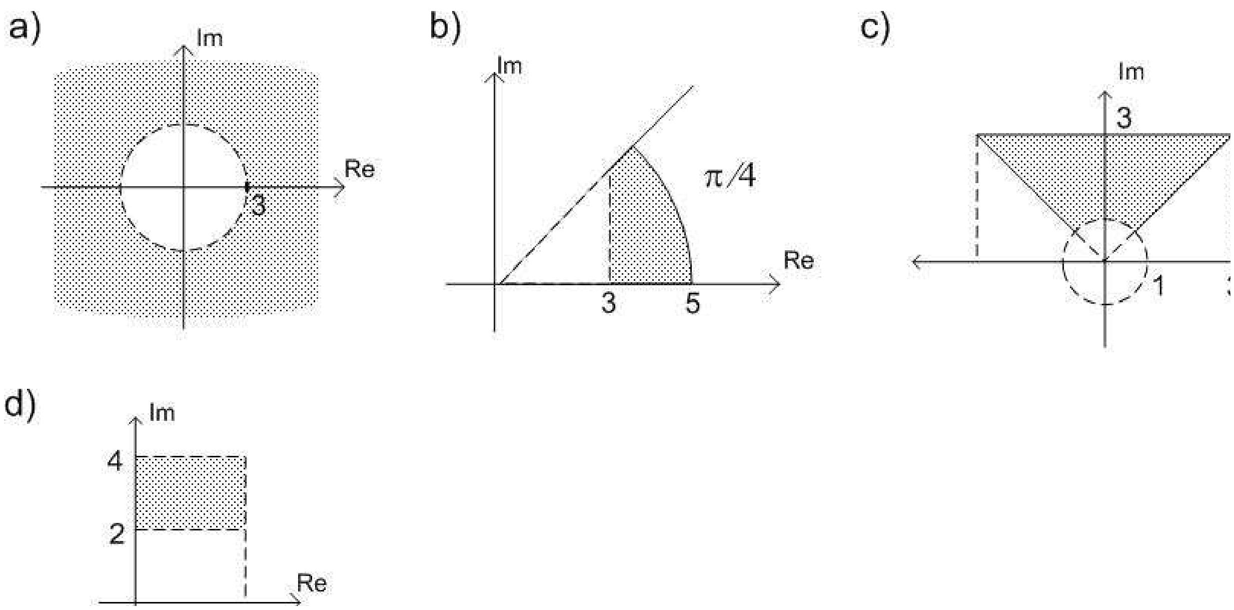
   (a) $2.(2\sqrt{3}-2i).(1+i)$
   (b) $(-1+\sqrt{3}i)^6$
   (c) $2_{30^\circ}+5_{315^\circ}$
   (d) $\frac{6_{60^\circ}\,\frac{1}{2}_{30^\circ}}{\frac{1}{4}_{\frac{\pi}{4}}}$

7. (a) Representar gráficamente los siguientes conjuntos:

      i. $A_1=\{z\in\mathbb{C}/|z|=1\}$
      ii. $A_2=\left\{z\in\mathbb{C}/\arg(z)=\frac{\pi}{6}\right\}$
      iii. $A_3=\left\{z\in\mathbb{C}/\ |z|\leq 2\ \frac{\pi}{4}\leq\arg(z)\leq\frac{\pi}{2}\right\}$
      iv. $A_4=\{z\in\mathbb{C}/\ \ 1<Re(z)\leq 3,\ \ 2\leq Im(z)\leq 4\}$
      v. $A_5=\{z\in\mathbb{C}/\ \ |z-i|=|z+i|\}$

   (b) Dar en cada uno de los casos anteriores dos números complejos que pertenezcan y dos que no pertenezcan al conunto indicado

8. Caracterizar las siguientes regiones graficadas mediante un subconjunto de $\mathbb{C}$.



9. Hallar las soluciones reales de cada una de las ecuaciones lineales con dos incógnitas a coeficientes en $\mathbb{C}$:

(a) $x + iy = 1$

(b) $ix + y = 1 + i$

(c) $(1+i)x + (2-i)y = 7$

(d) $(3+i)(x+iy) = 6 + 2i$

10. Hallar las soluciones complejas de cada una de las ecuaciones lineales con una incógnita a coeficientes en $\mathbb{C}$:

(a) $z = 1$

(b) $(3+i)z = 4i$

(c) $(3+i)z = 6 + 2i$

(d) $4iz = 7 + 2i - 6z$

11. Calcular:

(a) $\sqrt{2i}$

(b) $\sqrt[3]{-27}$

(c) $\sqrt[5]{-\sqrt{2} - \sqrt{2}i}$

(d) $\sqrt[4]{1}$

(e) $\sqrt[6]{-i}$

12. Resolver las siguientes ecuaciones:

(a) $z^5 - 32 = 0$

(b) $z + \overline{z} = 5 + 3i$

(c) $(i-1) - z^3 = 0$

(d) $1 + z^4 + i = 0$

13. Resolver las siguientes ecuaciones:

(a) $z^2 - (2+i)z - 7i = 0$

(b) $z^2 - (3-2i)z + 5 - 5i = 0$

(c) $z^4 + z^2 + i = 0$

Facultad de Ciencias Exactas, Ingeniería y Agrimensura
Escuela de Ciencias Exactas y Naturales
Departamento de Matemática

FACULTAD DE CIENCIAS EXACTAS, INGENIERIA Y AGRIMENSURA

LM - LCC - LF - PM - PF

Algebra y Geometría Analítica I - 2018
Trabajo Práctico: Polinomios

1. Sean $P(x) = x^5 + 4x^2 - 2i$, $Q(x) = x^2 + (2 - i)$, $R(x) = x^7 + 5x^3 - ix^2 + 2x + 1 - i$. Hallar los polinomios indicados en cada caso:

   (a) $P + Q$ (b) $P + Q - R$ (c) $P \cdot Q$ (d) $Q \cdot (P + 2R)$ (e) $2P \cdot (R - Q)$

2. En cada uno de los siguientes casos hallar el cociente y el resto de dividir el polinomio P por el polinomio Q. En los casos que sea posible aplicar la regla de Ruffini.

   (a) $P(x) = 4x^3 + x^2$, $Q(x) = x^2 + 1 + i$
   (b) $P(x) = 4x^3 + x^2$, $Q(x) = x + 1 + i$
   (c) $P(x) = 3x^4 - x^2 + ix - 2$, $Q(x) = 5x - 4$
   (d) $P(x) = 3x^6 - x^4 + ix^3 - 2x^2$, $Q(x) = 5x^3 - 4x^2$

3. Analizar por qué son iguales los resultados de los ejercicios 2c) y 2d)

4. Siendo $P(x) = x^4 - ix^3 - ix + 1 + i$, hallar $P(0)$, $P(1)$, $P(i)$, $P(i)$, $P(i + 1)$, $P(5)$, $P(6)$, $P(2 - i)$. Cuando resulte más conveniente, utilizar el teorema del resto.

5. Siendo $P(x) = kx^4 + kx^3 - 33x^2 + 17x - 10$, calcular $P(4)$ sabiendo que $P(5) = 0$.

6. Determinar si los números 1, 1, i y $-i$ son raíces del polinomio $P(x) = 3x^12 + x^9 - x^6 + 2x^5 + 2x^4 - 3x^2 + 2$

7. Dar en cada caso un polinomio P que cumpla con las condiciones pedidas, explicitando si es único o no.

   (a) P tiene a 2 como raíz simple y a i como raíz triple.
   (b) P tiene a 2 como raíz simple y a i como raíz triple y es de grado 4.
   (c) P tiene a 2 como raíz simple y a i como raíz triple y es de grado 4 y $P(1) = 3i$.
   (d) 1, 4, 2 y 0 son raíces de P y P es de grado 6.
   (e) 1, 4, 2 y 0 son raíces de P, P es de grado 5 y a coeficientes reales.

8. Encontrar la descomposición factorial de los siguientes polinomios. En los casos que existan raíces complejas, dar la descomposición en factores lineales exclusivamente y en factores lineales y cuadráticos a coeficientes reales.

   (a) $P(x) = 2x^4 + 5x^3 - 11x^2 - 20x + 12$
   (b) $P(x) = x^5 - 3x^4 + x^3 + x^2 + 4$

9. Sea $P(x) = 2x^4 - 6x^3 + 7x^2 + ax + a$. Determinar $a \in \mathbb{R}$ sabiendo que $(1 + i)$ es raíz de P. Luego hallar las restantes raíces de P.

10. Hallar un polinomio P de grado mínimo con coeficientes reales que verifique simultáneamente:

   (a) las soluciones de $z^2 = 5\bar{z}$ son raíces de P,

   (b) P tiene alguna raíz doble,

   (c) $P(1) = 31$.