

➤ **Función exponencial** Las funciones de la forma $f(x) = a^x$ donde la base a es una constante positiva y $a \neq 1$ se llaman funciones *exponenciales*. $\text{Dom}(f) = \mathbb{R}$ y $\text{Rec}(f) = \mathbb{R}^+$.

- $a^x \neq 0 \quad \forall x$
- $a^0 = 1 \quad \forall a$
- $a^1 = a$
- En particular si $a = e$, tenemos $f(x) = e^x$.

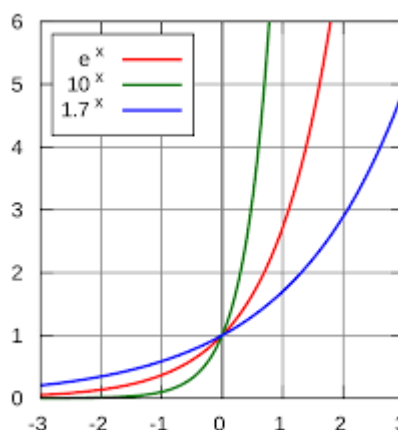
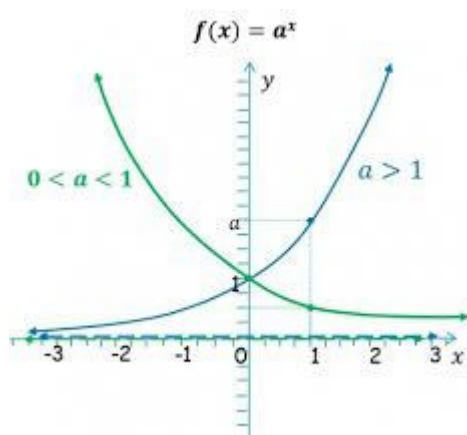
• El número e es irracional, no puede ser expresado con un número de cifras decimales o con decimales periódicos. Además, es un número trascendente, es decir, que no puede ser obtenido mediante la resolución de una ecuación algebraica con coeficientes racionales.

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} = e$$

2.718281828459045...

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n} \right)^n = 2,7182... = e$$

- Son funciones crecientes si $a > 1$ y decrecientes si $0 < a < 1$.



➤ **Función logarítmica** Son funciones de la forma $f(x) = \log_a x$ donde la base a es una constante positiva y $a \neq 1$. Se trata de las funciones *inversas* de las exponenciales (las estudiaremos en detalle más adelante). En cada caso $\text{Dom}(f) = \mathbb{R}^+$ y $\text{Rec}(f) = \mathbb{R}$

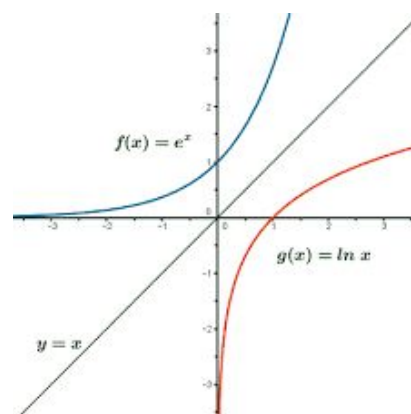
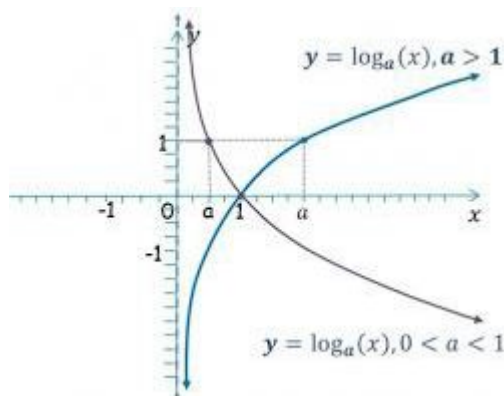
$$\log_a x = y \Leftrightarrow a^y = x$$

En particular, $f(a) = \log_a a = 1$ pues $a^1 = a$.

Además $f(1) = \log_a 1 = y \Leftrightarrow a^y = 1 \Leftrightarrow y = 0$ pues $a \neq 1$

Cuando $a = e$ notamos $\log_e x = \ln x$ y lo llamamos *logaritmo natural* de x .

Son funciones crecientes si $a > 1$ y decrecientes si $0 < a < 1$.



➤ **Función logaritmo y exponencial:** Si $a > 0$ y $a \neq 1$ la función exponencial $f(x) = a^x$ es creciente o decreciente, luego es inyectiva, entonces para cada $y \in R^+ = \text{Re } c(f)$ hay una función inversa $f^{-1}(y) = \log_a y = x \Leftrightarrow f(x) = a^x = y$ llamada función logaritmo en base a .

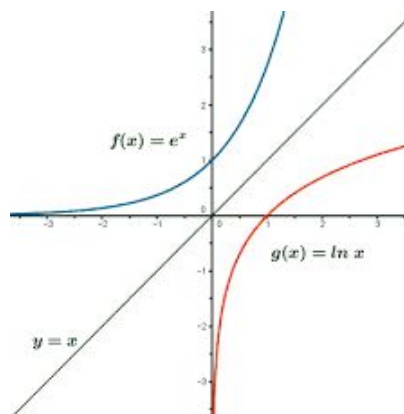
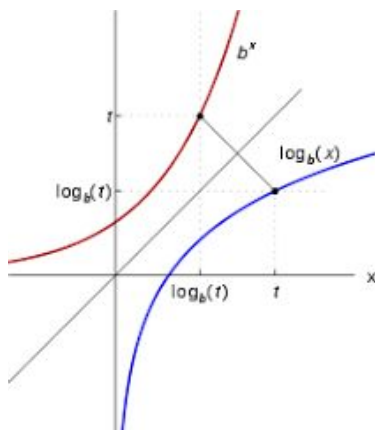
$$\text{Dom}(\log_a x) = \text{Rec}(a^x) = R^+ \text{ y } \text{Rec}(\log_a x) = \text{Dom}(a^x) = R$$

La composición de logaritmo y la exponencial nos da la identidad, tenemos:

$$\log_a a^x = x \quad \forall x \in R$$

$$a^{\log_a x} = x \quad \forall x \in R^+$$

$$\log_e x = \ln x \quad \forall x \in R$$



En particular cuando $a=e$

Propiedades: Si $a > 1$, las funciones $\log_a x$ y a^x son inyectivas y crecientes, entonces:

- i) $\log_a(xy) = \log_a x + \log_a y \quad \forall x \in R^+ \text{ y } a^x a^y = a^{x+y} \quad \forall x \in R$
- ii) $\log_a\left(\frac{x}{y}\right) = \log_a x - \log_a y \quad \forall x \in R^+ \text{ y } \frac{a^x}{a^y} = a^{x-y} \quad \forall x \in R$
- iii) $\log_a(x^y) = y \log_a x \quad \forall x \in R^+ \text{ y } (a^x)^y = a^{xy} \quad \forall x \in R$

Función potencia x^a , $a \in R$

A partir de $\ln(x^y) = y \ln x \quad \forall x \in R^+$, podemos definir $x^a = e^{\ln(x^a)} = e^{a \ln x} \quad \forall x \in R^+$

➤ Funciones trigonométricas inversas

Las funciones trigonométricas son periódicas por lo tanto no son inyectivas, pero si restringimos el dominio a un conjunto donde sean inyectivas podemos definir sus respectivas funciones inversas.

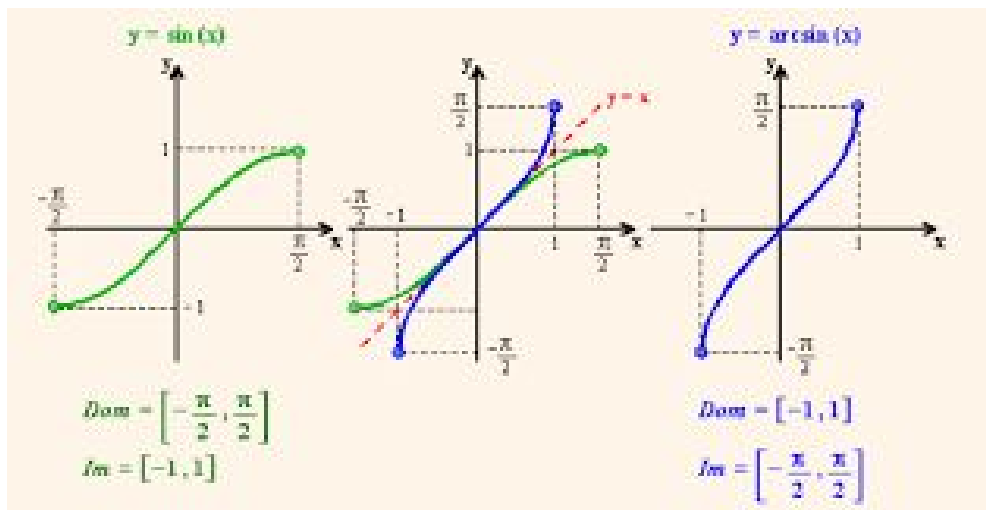
- **Inversa del seno:**

$$\arcsen x = \sin^{-1}(x) = y \Leftrightarrow \sin y = x \text{ para } -\frac{\pi}{2} \leq y \leq \frac{\pi}{2}$$

Así, si $x \in [-1, 1] = \text{Rec}(\sin x)$, $\arcsen x = \sin^{-1}(x)$ es el número y entre $-\frac{\pi}{2} \leq y \leq \frac{\pi}{2}$ cuyo seno es x .

A partir de esta restricción:

$$\text{Dom}(\sin x) = \text{Rec}(\arcsen x) = \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \text{ y } \text{Rec}(\sin x) = \text{Dom}(\arcsen x) = [-1, 1]$$



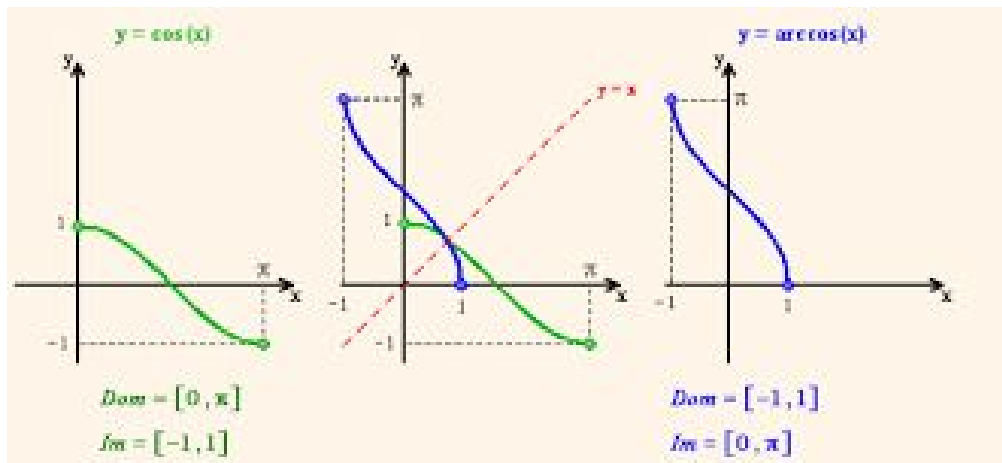
- Inversa del coseno:**

$$\arccos x = \cos^{-1}(x) = y \Leftrightarrow \cos y = x \text{ para } 0 \leq y \leq \pi$$

Así, si $x \in [-1, 1] = \text{Rec}(\cos)$, $\arccos x = \cos^{-1}(x)$ es el número y entre $0 \leq y \leq \pi$ cuyo coseno es x .

A partir de esta restricción:

$$\text{Dom}(\cos x) = \text{Rec}(\arccos x) = [0, \pi] \text{ y } \text{Rec}(\cos x) = \text{Dom}(\arccos x) = [-1, 1]$$



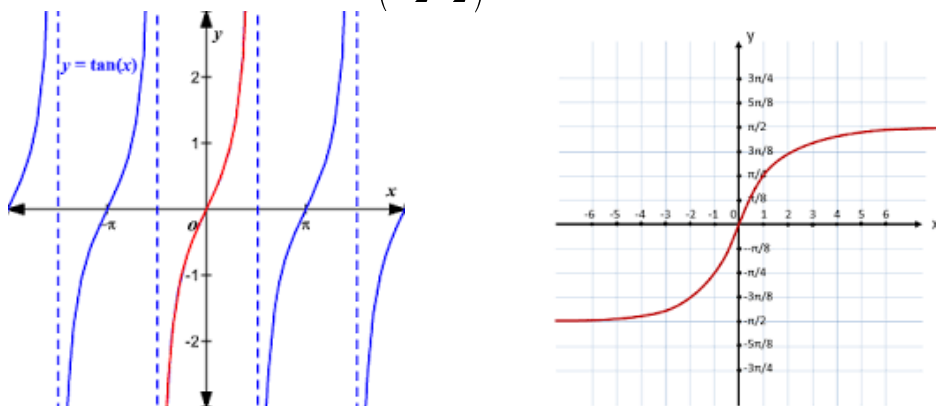
- Inversa de la tangente:**

$$\arctan x = \tan^{-1}(x) = y \Leftrightarrow \tan y = x \text{ para } -\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2}$$

Así, si $x \in \mathbb{R} = \text{Rec}(\tan x)$, $\arctan x = \tan^{-1}(x)$ es el número y entre $-\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2}$ cuya tangente es x .

A partir de esta restricción:

$$\text{Dom}(\tan x) = \text{Rec}(\arctan x) = \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \text{ y } \text{Rec}(\tan x) = \text{Dom}(\arctan x) = \mathbb{R}$$



➤ **Funciones hiperbólicas.**

Definiciones: Para $x \in \mathbb{R}$ definimos las funciones *seno hiperbólico*, *coseno hiperbólico* y *tangente hiperbólica* de x como

$$\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \quad \cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \quad \tanh x = \frac{\sinh x}{\cosh x}$$

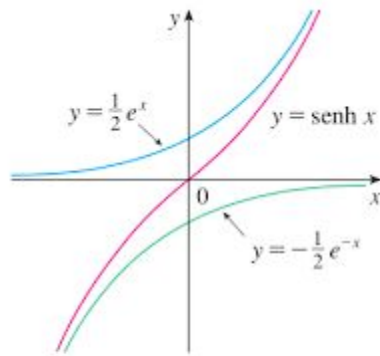


FIGURA 1

$$y = \sinh x = \frac{1}{2}e^x - \frac{1}{2}e^{-x}$$

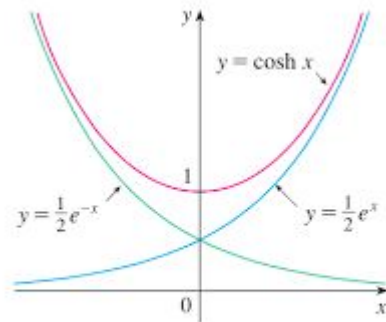


FIGURA 2

$$y = \cosh x = \frac{1}{2}e^x + \frac{1}{2}e^{-x}$$

