Resumen
Análisis Matemático II (R-122)
Licenciatura en Ciencias de la Computación

Iker M. Canut

2020

□ $a < b$, **partición** de $[a, b]$: colección finita de puntos $P = \{t_0, ..., t_n\}$ de $[a, b]/a = t_0 < ... < t_n = b$.
□ $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ acotada, $m_i = \text{ínf}\{f(x) : t_{i-1} \leq x \leq t_i\}$ y $M_i = \sup\{f(x) : t_{i-1} \leq x \leq t_i\}$:
Suma inferior de f para P, $L(f, P) = \sum_{i=1}^{n}(t_i - t_{i-1})m_i$, y **superior** a $U(f, P) = \sum_{i=1}^{n}(t_i - t_{i-1})M_i$.
■ f acotada en $[a, b]$, P, Q particiones / $P \subset Q \Rightarrow L(f, P) \leq L(f, Q) \wedge U(f, P) \geq U(f, Q)$.
■ f acotada no negativa en $[a, b]$, P_1, P_2 particiones $\Rightarrow L(f, P_1) \leq U(f, P_2)$.
□ f acotada en $[a, b]$ y sea $P_{[a,b]}$ el conjunto de todas las particiones, f es **integrable** en $[a, b]$ si:
$\sup\{L(f, P) : P \in P_{[a,b]}\} = \text{ínf}\{U(f, P) : P \in P_{[a,b]}\} = I$. Luego, I se denomina **integral** $\int_a^b f(x)dx$.
□ f integrable no negativa, $R(f) = \{(x, y) : a \leq x \leq b, 0 \leq y \leq f(x)\}$, entonces la integral es el **área**.
■ f acotada $\Rightarrow f$ integrable $\iff \forall \epsilon > 0\ \exists P_\epsilon / U(f, P_\epsilon) - L(f, P_\epsilon) < \epsilon$. Luego, $L(f, P_\epsilon) \leq I \leq U(f, P_\epsilon)$.
■ f continua en $[a, b] \Rightarrow f$ es integrable en $[a, b]$.
■ $a < c < b$, f integrable en $[a, b] \iff f$ integrable en $[a, c]$ y $[c, b]$. Además, $\int_a^b = \int_a^c + \int_c^b$.
■ $\int_a^a = 0 \wedge b < a, \int_a^b = -\int_b^a$.
■ f integrable en $[a, b] \Rightarrow cf$ integrable en $[a, b] \wedge \int_a^b cf(x)dx = c\int_a^b f(x)dx$.
■ f, g integrables en $[a, b] \Rightarrow f + g$ integrable en $[a, b] \wedge \int_a^b (f + g)(x)dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx$.
■ f integrable en $[a, b]$, g acotada en $[a, b]$ / $g(x) = f(x) \forall x \in [a, b]$ salvo para un número finito de puntos $\Rightarrow g$ integrable en $[a, b] \wedge \int_a^b g(x)dx = \int_a^b f(x)dx$.
■ f integrable en $[a, b]$, $m \leq f(x) \leq M$, $\forall x \in [a, b] \Rightarrow m(b - a) \leq \int_a^b f(x)dx \leq M(b - a)$.

. . . .

■ f integrable en $[a, b]$, F definida en $[a, b]$ como $F(x) = \int_a^x f(t)dt$, entonces F es continua sobre $[a, b]$.
■ f integrable en $[a, b]$, $F(x) = \int_a^x f(t)dt$, f es continua en $c \in [a, b] \Rightarrow F$ derivable en c y $F'(c) = f(c)$.
■ f continua en $[a, b]$ y $f = g' \Rightarrow \int_a^b f(t)dt = g(b) - g(a)$.
■ f integrable en $[a, b]$ y $f = g' \Rightarrow \int_a^b f(t)dt = g(b) - g(a)$.

. . . .

□ $x > 0$, **logaritmo natural** $\ln(x) = \int_1^x \frac{1}{t}dt$.
■ $\ln(xy) = \ln(x) + \ln(y)$, $\ln(x^n) = n\ln(x)$, $\ln(\frac{x}{y}) = \ln(x) - \ln(y)$.
□ **función exponencial** $\exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$, $\exp = \ln^{-1}$
■ $\exp'(x) = \exp(x)$, $\exp(x + y) = \exp(x) \cdot \exp(y)$.
□ $e = \exp(1)$, es decir, $\ln(e) = \int_1^e \frac{1}{t}dt = 1$
■ $\exp(rx) = \exp(x)^r$.
□ $e^x = \exp(x)$.
□ $a > 0$, $a^x = e^{x\ln(a)}$.
■ $a > 0$, $(a^x)^y = a^{xy}$, $a^1 = a$, $a^{x+y} = a^x \cdot a^y$.
□ $a > 0$, **logaritmo en base a** a la función inversa de la función a^x. Es decir, $\log_a(x) = y \iff a^y = x$.
■ $f'(x) = f(x) \Rightarrow \exists c / f(x) = ce^x$.
■ $\text{lím}_{x\to\infty} \frac{e^x}{x^n} = \infty$. Es decir, crece más rápido que cualquier potencia.

. . . .

■ **Integración por Partes**: Sean f, g funciones derivables tales que f' y g' son continuas en un entorno abierto que contenga a $[a, b]$, entonces $\int_a^b f(x)g'(x)dx = f(x)g(x)|_a^b - \int_a^b f'(x)g(x)dx$.
■ **Fórmula de Sustitución**: Sean f, g' funciones continuas, entonces $\int_{g(a)}^{g(b)} f(u)du = \int_a^b f(g(x))g'(x)dx$.
■ *Single Linear Factors*: $Q(x) = (a_1x + b_1)\cdots(a_k + b_k) \Rightarrow \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{A_1}{a_1x+b1} + \cdots + \frac{A_k}{a_kx+b_k}$.
■ *Repeated Linear Factors*: $Q(x) = (a_1x + b_1)^r \Rightarrow \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{A_1}{a_1x+b1} + \cdots + \frac{A_r}{a_1x+b_1}^r$.
■ *Single Irreducible Quadratics*: $Q(x) = (ax^x + bx + c) \Rightarrow \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{Ax+B}{ax^2+bx+c}$.
■ *Repeated Irreducible Quadratics*: $Q(x) = (ax^x + bx + c)^r \Rightarrow \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{A_1x+B_1}{ax^2+bx+c} + \cdots + \frac{A_rx+B_r}{(ax^2+bx+c)^r}$.

■ **L'Hôpital**: $\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} g(x) = 0 / \exists \lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ o es $\pm\infty \Rightarrow \lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$.
■ También vale para $\lim_{x\to a^{\pm}}$ o bien $\lim_{x\to\pm\infty}$.
■ $\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} g(x) = \infty$, $\lim_{x\to\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)} = l \Rightarrow \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = l$.
■ f derivable en $E(x_0, \delta)$ y alcanza un extremo local, entonces $f'(x_0) = 0$.
■ f derivable en (a, b) y $f'(x) > 0\ \forall x \in (a, b) \Rightarrow f$ es creciente en (a, b). Si $f'(x) < 0$, f es decreciente.
■ f dos veces derivable en $E(a, \delta)$, $f'(a) = 0$. Si $f''(a) > 0 \Rightarrow$ mínimo local. Si $f''(a) < 0 \Rightarrow$ máximo local.
■ f dos veces derivable en a. Si hay mínimo local en $a \Rightarrow f''(a) \geq 0$. Si hay máximo local en $a \Rightarrow f''(a) \leq 0$.
□ f es **convexa** en un intervalo I si $\forall a, x, b \in I, a < x < b$ se verifica $\frac{f(x)-f(a)}{x-a} < \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$.
□ f es **concava** en un intervalo I si $\forall a, x, b \in I, a < x < b$ se verifica $\frac{f(x)-f(a)}{x-a} > \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$.
■ f derivable en I. Luego, f es convexa $\iff \forall a \in I$ la grafica de f queda por encima de la recta tangente por $(a, f(a))$, excepto en $(a, f(a))$.
■ f derivable en I. Luego, f es concava $\iff \forall a \in I$ la grafica de f queda por debajo de la recta tangente por $(a, f(a))$, excepto en $(a, f(a))$.
■ f derivable en I. Entonces f convexa $\iff f'$ creciente, y f concava $\iff f'$ decreciente.
■ f derivable dos veces en I, si $f''(x) > 0 \Rightarrow$ convexa, y si $f''(x) < 0 \Rightarrow$ concava.
□ En un **punto de inflexión** hay un cambio de concavidad.

....

■ $r = \sqrt{x^2 + y^2}$, $\tan\theta = \frac{y}{x}$, $x = r \cdot \cos\theta$, $y = r \cdot \sin\theta$
■ Sea R la región definida por una curva cerrada dada en coordenadas polares: $\text{Area}(R) = \frac{1}{2}\int_a^b f^2(\theta)d\theta$.
■ Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}_0^+$ integrable y sea C el cuerpo que se obtiene de rotar la región bajo la gráfica de f alrededor del eje x, $Vol(C) = \pi \int_a^b f^2(x)dx$.
■ Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}_0^+$ integrable, con $0 \leq a < b$, y sea C el cuerpo de revolución que se obtiene de hacer girar la región bajo la gráfica de una función f alrededor del eje y, $Vol(C) = 2\pi \int_a^b x f(x)dx$.
■ Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ derivable con derivada continua y sea c la curva dada por la gráfica de f, $l(c) = \int_a^b \sqrt{f'(x)^2 + 1}dx$. Si está dada por ecuaciones paramétricas, $l(c) = \int_a^b \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}dt$.

....

□ f integrable en $[a, x]$ para cada $x > a$, si $\lim_{x\to\infty} \int_a^b f(t)dt = I$, lo denominamos **integral impropia** de f en $[a, +\infty)$. Luego, $\int_a^\infty f(t)dt = I$. Si I es $\pm\infty$ decimos que es **divergente**.
■ $\int_{-\infty}^\infty f(x)dx = \int_{-\infty}^0 f(x)dx + \int_0^\infty f(x)dx$.
■ Si $\exists \lim_{x\to\infty} f(x)$, una condición necesaria para que exista la integral impropia, es $\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$.
■ Sea f integrable en $[x, b]$ para $a < x < b$, tal que f tiene una asintota vertical en $x = a$, si $\lim_{x\to a^+} \int_x^a f(t)dt = I$, denominamos a este limite integral impropia de f en $(a, b]$.
■ Si $a < c < b$ y f tiene asintota vertical en $x = c$, si existen las integrales impropias de f en $[a, c)$ y $(c, b]$, denominamos integral impropia de f en (a, b) a $\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx = \int_c^b f(x)dx$

....

□ Sea f n-veces derivable en a, se denomina **Polinomio de Taylor** de grado n para f en a al polinomio $P_{n,a}(x) = a_0 + a_1(x - a) + \cdots + a_n(x - a)^n$, donde $a_k = \frac{f^{(k)}(a)}{k!}$, $0 \leq k \leq n$.
■ Es el único polinomio de grado n tal que $p^{(k)}(a) = f^{(k)}(a)$. $\lim_{x\to a} \frac{f(x)-P_{n,a}(x)}{(x-a)^n} = 0$
■ f n-veces derivable en a, $f'(a) = \cdots = f^{(n-1)}(a) = 0, f^{(n)}(a) \neq 0$, n par y $f^{(n)}(a) > 0$ tiene un mínimo local en a. Si n par y $f^{(n)}(a) < 0$, tiene un máximo local. Si n impar, no es un extremo local.
□ Dos funciones son iguales hasta el orden n en a si $\lim_{x\to a} \frac{f(x)-g(x)}{(x-a)^n} = 0$
■ Si f y g son iguales hasta el orden n, son iguales hasta $k \leq n$.
■ P, Q polinomios en $(x - a)$, grado $\leq n$, si P y Q son iguales hasta el orden n en a, entonces $P = Q$.
■ f n derivable en a, $p(x)$ polinomio en $(x-a)$ de grado $\leq n$, igual a f hasta n en a, entonces $p = P_{n,a}$.
□ $R_{n,a}(x) = \int_a^x \frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(x - t)^n dt = \frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(x - t)^t(x - a) = \frac{f^{(n+1)}(t)}{(n+1)!}(x - a)^{n+1}$. Para algún $t \in (a, x)$.

☐ **producto interno**: $< v, w >= x_1y_+ \cdots + x_ny_n = \sum_{k=1}^{n} x_ky_k$.
☐ **norma**: $||v|| = \sqrt{< v, v >} = \sqrt{\sum_{k=1}^{n} x_k^2}$
☐ **distancia**: $d(v, w) = ||v - w|| = \sqrt{\sum_{k=1}^{n}(x_k - y_k)^2}$
■ $\langle au, v\rangle = \langle u, av\rangle = a\langle u, v\rangle, \langle a + v, w\rangle = \langle a, w\rangle + \langle v, w\rangle, \langle u, v\rangle = \langle v, u\rangle, \langle v, v\rangle \geq 0$.
■ $||v|| \geq 0, ||av|| = |a|||v||, ||v + w|| \geq ||v|| + ||w||, |\langle v, w\rangle| \leq ||v||||w||$
■ $d(u, v) = d(v, u), d(u, v) \geq 0, d(u, w) \leq d(u, v) + d(v, w)$
☐ $u_0 \in \mathbb{R}^n, r > 0$, definimos **bola** como $B_r(u_0) = \{v \in \mathbb{R}^n : d(v, v_0 < r)\}$. Un subconjunto es **abierto** si para cada $u \in A$ existe $r > 0$ tal que $B_r(u) \subset A$. Es **cerrado** si su complemento es abierto. u es un **punto de acumulación** si $\forall\epsilon > 0, B_\epsilon(u) - \{u\}$ interseca a A. La **clausura** es el conjunto $\overline{A}$ formado por A y todos sus puntos de acumulación.
■ $\lim_{x\to a} f(u) = L \iff 0 < ||u - a|| < \delta \Rightarrow ||f(u) - L|| < \epsilon$.
■ f es continua en a si f está definida en a y $\lim_{u\to a} f(u) = f(a)$.
☐ Es **lineal** si $A(x + y) = A(x) + A(y)$ y $A(\lambda x) = \lambda A(x)$.
■ Sea $f : D \subset R^n \to \mathbb{R}^m$ y sean $f_i = p_i \circ f : D \to \mathbb{R}^m$ sus funciones componentes, entonces f es continua en $u_0 \iff$ todas sus funciones componentes f_i son continuas en u_0.
■ $\lim_{u\to a} f(u) = L$, $L > 0 \Rightarrow \exists\delta > 0/0 < ||u - a|| < \delta \Rightarrow f(u) > 0$.
☐ Sea $f : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, se denomina **conjunto de nivel** del valor k al conjunto de los puntos $x \in U$ / $f(x) = k$. Si $k = 2$ se denomina curva de nivel, si $k = 3$ se denmomina superficie de nivel.

. . . .

☐ Una curva α es derivable en t_0 si existe $\alpha'(t_0) = \lim_{h\to 0} \frac{\alpha(t_0+h)-t_0}{h}$.
■ La derivada existe $\iff$ existen las derivadas $\alpha_i'(t_0)$ $\forall i \in [\![1, n]\!]$.
■ Si α' es continua, decimos que es de clase C^1.
■ $(\alpha + \beta)'(t_0) = \alpha'(t_0) + \beta'(t_0), (c\alpha)'(t_0) = c'(t_0)\alpha(t_0) + c(t_0)\alpha'(t_0)$
■ $\langle\alpha, \beta\rangle = \langle\alpha'(t_0), \beta(t_0)\rangle + \langle\alpha(t_0), \beta'(t_0)\rangle$, $|\alpha|(t_0) = \frac{\langle\alpha(t_0),\alpha'(t_0)\rangle}{|\alpha(t_0)|}$.
■ $\gamma : I \to J$ derivable en $a \in I$, $\alpha : J \to \mathbb{R}^n$ curva derivable en $b = \gamma(a)$, entonces $\alpha \circ \gamma$ es derivable ne a y $(\alpha \circ \gamma)'(a) = \gamma'(a)\alpha'(b)$.
☐ **i-esima derivada parcial**: $\frac{df}{dx_i}(a) = \lim_{t\to 0} \frac{f(a_1,...a_i+te_i,...,a_n)-f(a)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{f(a+te_1)-f(a)}{t}$.
■ La existencia de las n derivadas parciales en un punto no asegura la continuidad de la función. Si todas las derivadas parciales son continuas, es C^1.
■ Es diferenciable si existen las derivadas parciales y para todo $v = (v_1, ..., v_n)$, $f(a + v) - f(a) = \sum_{i=1}^{n} \frac{df}{dx_i}(a) \cdot v_i + r(v)$, donde $\lim_{|v|\to 0} \frac{r(v)}{|v|} = 0$.
■ Toda función diferenciable en el punto a es continua en ese punto.
■ Toda función de clase C^1 es diferenciable. Toda clase C^1 es continua.
☐ El **gradiente** es un vector: $gradf(a) = (\frac{df}{dx_1}, ..., \frac{df}{dx_n})$.
☐ La **derivada direccional** en a por v es $\frac{df}{dv}(a) = \lim_{t\to 0} \frac{f(a+tv)-f(a)}{t}$
■ Sea $f : U \to \mathbb{R}$ diferenciable en U, con $a \in U$, dado v, si $\lambda : (-\delta, \delta) \to U$ curva diferenciable tal que $\lambda(0) = a, \lambda'(0) = v$, entonces $(f \circ \lambda)'(0) = \langle gradf(a), v\rangle = \frac{df}{dv}(a) = \sum_{i=1}^{n} \frac{df}{dx_i}(a)v_i$.
■ El gradiente apunta en la direccion en la cual la funcion es creciente, y es ortogonal al conjunto de nivel que pasa por a.
☐ Definimos **punto critico** de f en a si $gradf(a) = 0$.
■ Toda funcion diferenciable es continua.