Facultad de Ciencias Exactas, Ingeniería y Agrimensura

Departamento de Matemática - Escuela de Ciencias Exactas y Naturales

ANÁLISIS MATEMÁTICO II

Licenciatura y Profesorado en Física, Licenciatura en Ciencias de la Computación,

Licenciatura y Profesorado en Matemática - Año 2020

Unidad 10: Nociones de diferenciabilidad en varias variables

En esta unidad extenderemos la noción de diferenciabilidad a funciones de varias variables, la cual es más compleja. Empezaremos por ver funciones que dependen sólo de una variable, y donde la diferenciabilidad se extiende por definición de una manera natural a lo conocido en los reales.

1. Curvas diferenciables

Definición 111: Una *curva* en $\mathbb{R}^n$ es una función $\alpha : I \to \mathbb{R}^n$, donde I es un intervalo abierto en $\mathbb{R}$. Decimos que la curva es continua si α es una aplicación continua.

Y decimos que α es derivable en el punto $t_0 \in I$ si existe el límite

$$\alpha'(t_0) = \lim_{h \to 0} \frac{\alpha(t_0 + h) - \alpha(t_0)}{h},$$

llamado la derivada de α.

Observemos que $\alpha(t)$ es un elemento de $\mathbb{R}^n$ para cada t, y por lo tanto tiene coordenadas

$$\alpha(t) = (\alpha_1(t), \alpha_2(t), \ldots, \alpha_n(t)).$$

La derivada $\alpha'(t_0)$ existe si y sólo si existen las derivadas $\alpha_i'(t_0)$ esto es,

$$\alpha_i'(t_0) = \lim_{h \to 0} \frac{\alpha_i(t_0 + h) - \alpha_i(t_0)}{h}, \qquad i = 1, \ldots, n$$

donde $\alpha_i = p_i \circ \alpha : I \to \mathbb{R}$ es una función de variable real y a valores reales, y su derivada se obtiene como ya conocemos. Esto resulta de un enunciado similar al del Teorema 107 pero para límites:

Lema: *Sea $D \subseteq \mathbb{R}^m$ y sea $f : D \to \mathbb{R}^n$ una función con coordenadas $f_1, f_2, \ldots, f_n : D \to \mathbb{R}$. Supongamos que a es un punto de acumulación de D. Entonces*

$$\lim_{x \to a} f(x) = b = (b_1, b_2, \ldots, b_n) \quad \text{si y solamente si} \quad \lim_{x \to a} f_i(x) = b_i, \forall i = 1, 2, \ldots, n.$$

Demostración. Si $\lim_{x \to a} f(x) = b$, entonces para cada $i = 1, 2, \ldots, n$ se tiene $\lim_{x \to a} f_i(x) = b_i$ pues $|f_i(x) - b_i| \leq \|f(x) - b\|$ y esta observación permite completar la prueba con ε y δ.

Recíprocamente, si $\lim_{x\to a} f_i(x) = b_i$ para cada $i = 1, 2, \ldots, n$, entonces $\lim_{x\to a} f(x) = b$ pues $|f(x)-b| \leq \sum_{i=1}^{n} |f_i(x) - b_i|$, lo cual permite elegir convenientemente δ dado un ε cualquiera.

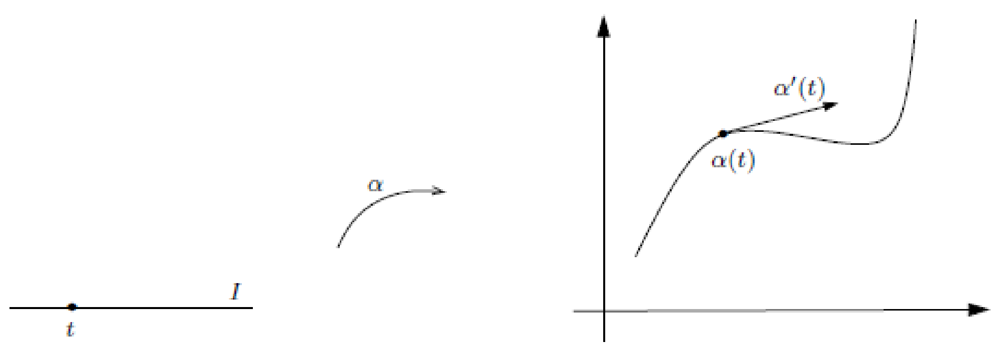
Al aplicar este resultado al cociente incremental obtenemos lo que deseamos. $\square$

Cuando la curva $\alpha : I \to \mathbb{R}^n$ es derivable en cada punto de I, decimos directamente que α es una curva derivable en I. En tal caso $t \to \alpha'(t)$ define una aplicación $\alpha' : I \to \mathbb{R}^n$. Si α' es continua decimos que la curva es de *clase* C^1. Más generalmente para una curva $\alpha : I \to \mathbb{R}^n$ decimos que es de clase C^k si es derivable y α' es de clase C^{k-1}. Y para ser α de clase C^k es necesario y suficiente que cada coordenada α_i sea de clase C^k.

Para $\alpha : I \to \mathbb{R}^n$ derivable y tal que $\alpha'(t_0) \neq 0$, tenemos definida la *recta tangente a la curva en* $\alpha(t_0)$: que es el conjunto

$$r(s) = \alpha(t_0) + s\alpha'(t_0), \qquad s \in \mathbb{R}.$$

Como podemos ver esa recta pasa por $\alpha(t_0)$ y tiene dirección el vector $\alpha'(t_0)$. El vector $\alpha'(t_0)$ se denomina *vector tangente a* α *en* t_0.



Ejemplo 112: Dados $a \neq b$ en $\mathbb{R}^n$, sea $\alpha : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ el segmento de recta que pasa por a y b: $f(t) = (1-t)a+tb$. Claramente para todo $t \in \mathbb{R}$, la curva f resulta derivable y $f'(t) = b - a$.

Ejercicio: Compute la recta tangente a f en $t = 0$ y compare con f.

De la misma manera que existe para funciones a valores reales, podemos definir las derivadas a derecha o izquierda: si t_0 no es el extremo derecho del intervalo I entonces la *derivada a derecha* de una curva $\alpha : I \to \mathbb{R}^n$ en el punto t_0 está dada por

$$\alpha'_+(t_0) = \lim_{h\to 0^+} \frac{\alpha(t_0 + h) - \alpha(t_0)}{h},$$

y de modo análogo, tenemos la *derivada a izquierda* $\alpha'_-(t_0)$ siempre que en este caso t_0 no sea el extremo izquierdo del intervalo.

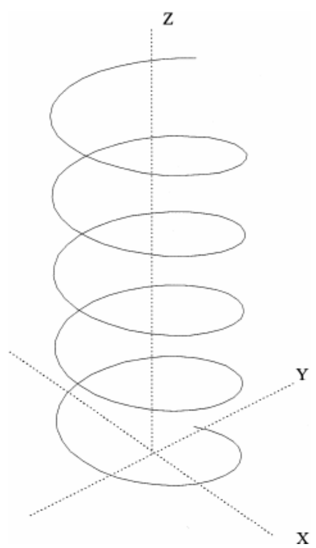
Ejercicio: Pruebe que cuando t_0 es un punto interior del intervalo I, entonces la curva $\alpha : I \to \mathbb{R}^n$ es derivable en I si y solamente si existen las derivadas a derecha y a izquierda de α en t_0, y son iguales.

Ejemplo 113: Sea $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}^2$ dada por $f(t)=(t,|t|)$. Entonces para $t>0$ se tiene $f(t)=(t,t)$ y para $t<0$ tendremos $f(t)=(t,-t)$. Luego para todo $t\neq 0$ existe la derivada $f'(t)$ que resulta

$f'(t)=(1,1)$ para $t>0$ y $f'(t)=(1,-1)$ para $t<0$.

En $t=0$ existen las derivadas laterales $f'_+(0)=(1,1)$ y $f'_-(0)=(1,-1)$, que son diferentes y por lo tanto f no es derivable en $t=0$.

Por otro lado $g(t)=(t|t|,t^2)$ tiene la misma imagen que f pero es derivable en todos los puntos. La prueba queda como ejercicio.



Ejemplo 114: Circunferencia y hélice. Sea $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}^2$ dada por

$$f(t)=(\cos(t),\operatorname{sen}(t))$$

y sea $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}^3$ dada por

$$g(t)=(\cos(t),\operatorname{sen}(t),t).$$

La imagen de f es una circunferencia de radio 1 centrada en el origen, denotada S^1, y la imagen de g es una hélice (ver la figura a la izquierda), cuya proyección sobre el plano $z=0$ es S^1. Como ambas funciones f y g son de clase C^k para todo $k\in\mathbb{N}$, se dice que f y g son de clase C^∞.

Ejercicio: Calcule las funciones derivadas $f'(t)$ y $g'(t)$.

Sean $\alpha,\beta:I\to\mathbb{R}^n$ curvas y $c:I\to\mathbb{R}$ una función real. Si α y β son derivables en el punto $t_0\in I$ entonces también son derivables en t_0 las curvas $\alpha+\beta$, $c\alpha$, y también $<\alpha,\beta>$, y $|\alpha|=\sqrt{<\alpha,\alpha>}$, donde en este último caso debe valer $\alpha(t_0)\neq 0$.

Se cumplen además las siguientes propiedades:

1. $(\alpha+\beta)'(t_0)=\alpha'(t_0)+\beta'(t_0)$,
2. $(c\alpha)'(t_0)=c'(t_0)\alpha(t_0)+c(t_0)\alpha'(t_0)$,
3. $<\alpha,\beta>'(t_0)=<\alpha'(t_0),\beta(t_0)>+<\alpha(t_0),\beta'(t_0)>$,
4. $|\alpha|'(t_0)=\frac{<\alpha(t_0),\alpha'(t_0)>}{|\alpha(t_0)|}$.

Ejercicio: Pruebe estas propiedades, las cuales salen usando las expresiones en coordenadas de α y β.

Observación. En el ejemplo 114, se verifica que $f'(t)=(-\operatorname{sen}(t),\cos(t))$, vector que para cada t es perpendicular a $f(t)$. Más generalmente se puede probar que si $f:I\to\mathbb{R}^n$ es una curva tal que $|f|$ es constante, entonces $f'(t)$ es perpendicular a $f(t)$ para cada t.

En efecto, si $|f| = r$ es constante, (geométricamente esto significa que $f(t)$ está en la esfera de radio r para cada t), se tiene $< f(t), f(t) >= r^2$ de donde al derivar respecto de t se obtiene $< f(t), f'(t) >= 0$ (por las propiedades de arriba). Y esto prueba lo aseverado arriba.

Ejercicio Si $f : I \to \mathbb{R}^n$ es derivable y $f'(t) = 0$ (el vector 0) entonces f es constante.

Teorema 115: Regla de la cadena. Supongamos que $\varphi : I \to J$ es derivable en el punto $a \in I$ y $\alpha : J \to \mathbb{R}^n$ es una curva derivable en $b = \varphi(a)$. Entonces la curva $\alpha \circ \varphi : I \to \mathbb{R}^n$ es derivable en a y $(\alpha \circ \varphi)'(a) = \varphi'(a)\alpha'(b)$.

Demostración: Ejercicio. (Aplicamos la regla de la cadena a las funciones coordenadas $\alpha_i \circ \varphi : I \to \mathbb{R}$). $\square$

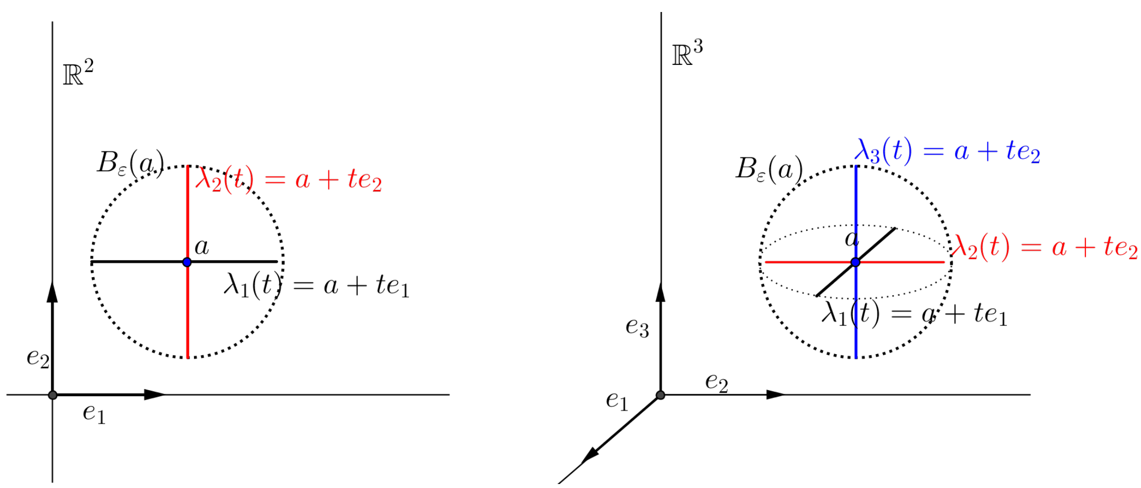
De un modo general la regla de la cadena dice que la curva $\alpha \circ \varphi$ cuya imagen está contenida en la imagen de α tiene vector velocidad un múltiplo del vector velocidad de α en $\varphi(t)$.

2. Funciones reales de n variables

En esta sección vamos a aplicar las ideas de la derivada de curvas para calcular otras derivadas y veremos algunos usos de estas nociones.

2.1. Derivadas parciales

En lo que sigue vamos a introducir las derivadas parciales. Para ello, empecemos considerando un abierto $U \subseteq \mathbb{R}^n$. Observemos que como U es abierto, dado un $a \in U$, existe una bola abierta centrada en a y completamente contenida en U. Luego existe un $\delta > 0$ tal que $a + te_i \in U$ para $t \in (-\delta, \delta)$ y donde e_i denota el vector i-ésimo de la base canónica, es decir, e_i es el vector donde todas las componentes son 0, salvo la i-ésima que es 1 (observemos que en el caso de $\mathbb{R}^3$, muchas veces suele usarse la notación $e_1 = \mathbf{i}$, $e_2 = \mathbf{j}$, $e_3 = \mathbf{k}$). Por lo tanto el segmento de curva $\lambda_i(t) = a + te_i$ está bien definido para $t \in (-\delta, \delta)$.



Si ahora $f : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ es una función cualquiera, están bien definidas la funciones $f \circ \lambda_i : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ en un entorno de 0, para $i = 1, \ldots, n$, y por lo tanto tiene sentido analizar su derivabilidad en el sentido usual:

Definición 116: La i-ésima derivada parcial de $f : U \to \mathbb{R}$ en el punto $a \in U$ es la derivada en $t = 0$ de $f \circ \lambda_i$ y se denota por $\frac{\partial f}{\partial x_i}(a)$:

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(a) = \lim_{t\to 0} \frac{f(a + te_i) - f(a)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{f(a_1, a_2, \ldots, a_i + te_i, \ldots, a_n) - f(a)}{t},$$

si esta derivada existe.

Ejemplo 117: Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dada por $f(x, y) = xy/(x^2 + y^2)$, si $(x, y) \neq (0, 0)$, y $f(0, 0) = 0$. Como $f(0, y) = 0$ para todo y y $f(x, 0) = 0$ para todo x resulta que las derivadas parciales existen en $(0, 0)$ y valen $\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = 0 = \frac{\partial f}{\partial y}(0, 0)$

$PERO$ f No es CONTINUA en $(0, 0)$. En efecto, fijemos un ángulo θ cualquiera y tomemos $x = t\cos(\theta)$, $y = t\operatorname{sen}(\theta)$. Si calculamos $f(x, y)$ a lo largo de la curva $(t\cos(\theta), t\operatorname{sen}(\theta))$, obtenemos $f(x, y) = \cos(\theta)\operatorname{sen}(\theta)$. Por lo tanto si nos acercamos a $(0, 0)$ por estas diferentes curvas, haciendo tender t a 0, vemos que el límite depende del valor que hayamos fijado para θ. Es decir, que por distintas direcciones nos acercamos a límites diferentes.

El ejemplo arriba muestra que la existencias de las n derivadas parciales en un punto, no asegura la continuidad de la función en ese punto. Claramente la derivada parcial $\frac{\partial f}{\partial x_i}(a) = (f \circ \lambda_i)(0)$ da información sobre la f a lo largo del segmento que une $a - \delta e_i$ con $a + \delta e_i$.

Claramente la noción de derivada parcial tiene sentido para funciones $f : U \to \mathbb{R}^n$ donde $U \subseteq \mathbb{R}^m$ es un abierto. Si $a \in U$, entonces para cada $i = 1, \ldots, m$ tenemos la i-ésima derivada parcial:

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(a) = \lim_{t\to 0} \frac{f(a + te_i) - f(a)}{t}.$$

Evidentemente $\frac{\partial f}{\partial x_i}(a)$ es un vector en $\mathbb{R}^n$. Si $f = (f_1, f_2, \ldots, f_n)$ entonces

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(a) = (\frac{\partial f_1}{\partial x_i}(a), \ldots, \frac{\partial f_n}{\partial x_i}(a)).$$

Sea $f : U \to \mathbb{R}$ una función que posee las n derivadas parciales en todos los puntos del abierto $U \subseteq \mathbb{R}^n$. Quedan definidas entonces las funciones

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_n} : U \to \mathbb{R}, \qquad \text{donde } \frac{\partial f}{\partial x_i} : x \to \frac{\partial f}{\partial x_i}(x).$$

Si estas funciones fueran continuas en U, diremos que f es una función de *clase* C^1 y escribiremos $f \in C^1$.

Una aplicación $f : U \to \mathbb{R}^n$ definida en el abierto $U \subseteq \mathbb{R}^m$ se dice de clase C^1 cuando cada una de las funciones coordenadas $f_1, \ldots, f_n : U \to \mathbb{R}$ es de clase C^1.

Muchas propiedades importantes de las funciones de clase C^1 resultan de ser diferenciables en el siguiente sentido.

Una función $f : U \to \mathbb{R}$ definida en el abierto $U \subseteq \mathbb{R}^n$ se dice *diferenciable* en el punto $a \in U$ cuando cumple las siguientes condiciones

1. Existen las derivadas parciales $\frac{\partial f}{\partial x_1}(a), \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(a)$.

2. Para todo $v = (v_1, \ldots, v_n)$ tal que $a + v \in U$, se tiene

$$f(a+v) - f(a) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(a).v_i + r(v), \qquad \text{donde} \quad \lim_{|v| \to 0} \frac{r(v)}{|v|} = 0.$$

Observación.

(I) Arriba, siempre que fijemos consideraciones en torno al punto a, por simplicidad escribiremos $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ en vez de $\frac{\partial f}{\partial x_i}(a)$.

(II) La esencia de la definición de diferenciabilidad está en la condición $\lim_{|v|\to 0} \frac{r(v)}{|v|} = 0$, pues la igualdad que define el "resto" $r(v)$ puede ser escrita para cualquier función que posea n derivadas parciales.

De $\lim_{|v|\to 0} \frac{r(v)}{|v|} = 0$ resulta que

$$\lim_{|v|\to 0} r(v) = 0$$

pues $r(v) = \frac{r(v)}{|v|}|v|$. Se sigue entonces que

$$\lim_{v \to 0} f(a+v) = f(a)$$

y por lo tanto *toda función diferenciable en el punto a es continua en ese punto.*

Diremos que $f : U \to \mathbb{R}$ es *diferenciable* cuando f es diferenciable en todos los puntos de U.

Cuando $n = 1$, la función $f : U \to \mathbb{R}$ es diferenciable en el punto a si y solamente si posee derivada en este punto. Y se tiene

$$f(a+v) - f(a) = f'(a)v + r(v)$$

y por lo tanto

$\lim_{v\to 0} \frac{r(v)}{|v|} = 0$ si y solamente si $\lim_{v\to 0} \frac{f(a+v)-f(a)}{v} = f'(a)$.

De forma análoga puede verse que $f : I \to \mathbb{R}^n$ es derivable en t_0 si y sólo si es diferenciable en t_0 según la definición anterior.

Teorema 118. Toda función $f : U \to \mathbb{R}$ de clase C^1 es diferenciable.

Demostración: Por simplicidad vamos a suponer $U \subseteq \mathbb{R}^2$. El caso general se trata análogamente, apenas una notación más elaborada.

Fijemos $c = (a, b) \in U$ y tomemos $v = (h, k)$ tal que $c + v \in B \subseteq U$, donde B es una bola de centro c. Sea

$$r(v) = r(h, k) = f(a+h, b+k) - f(a, b) - \frac{\partial f}{\partial x}.h - \frac{\partial f}{\partial y}.k,$$

donde las derivadas son calculadas en el punto $c=(a,b)$. Podemos escribir

$$r(v)=r(h,k)=f(a+h,b+k)-f(a,b)+f(a,b+k)-f(a,b+k)-\frac{\partial f}{\partial x}.h-\frac{\partial f}{\partial y}.k.$$

Por el teorema del Valor Medio para funciones de una variable real, existen $\theta_1,\theta_2\in(0,1)$ tales que

$$r(v)=\frac{\partial f}{\partial x}(a+\theta_1 h,b+k).h+\frac{\partial f}{\partial y}(a,b+\theta_2 k).k-\frac{\partial f}{\partial x}.h-\frac{\partial f}{\partial y}.k,$$

y luego

$$\frac{r(v)}{|v|}=\left[\frac{\partial f}{\partial x}(a+\theta_1 h,b+k)-\frac{\partial f}{\partial x}(a,b)\right]\frac{h}{\sqrt{h^2+k^2}}+\left[\frac{\partial f}{\partial y}(a,b+\theta_2 k).k-\frac{\partial f}{\partial y}(a,b)\right]\frac{k}{\sqrt{h^2+k^2}}.$$

Cuando hacemos $v\to 0$, los términos dentro de los corchetes tienden a 0, por la continuidad de las derivadas $\frac{\partial f}{\partial x},\frac{\partial f}{\partial y}$. Además de eso, los términos fuera de los corchetes tienen valor absoluto menor o igual que 1 y por lo tanto $\lim_{v\to 0}\frac{r(v)}{|v|}=0$ y entonces f es diferenciable. $\square$

Corolario 119. Toda función $f:U\to\mathbb{R}$ de clase C^1 es continua.

Teorema 120. Sean $U\subseteq\mathbb{R}^m$, $V\subseteq\mathbb{R}^n$ abiertos y sea $f:U\to V$ una aplicación cuyas funciones coordenadas $f_1,\dots,f_n$ poseen derivadas parciales en el punto $a\in U$ y sea $g:V\to\mathbb{R}$ una función diferenciable en el punto $b=f(a)$. Entonces $g\circ f:U\to\mathbb{R}$ posee derivadas parciales en el punto a y vale

$$\frac{\partial(g\circ f)}{\partial x_i}=\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial g}{\partial y_k}\frac{\partial f_k}{\partial x_i},\qquad i=1,\dots,m,$$

donde las derivadas parciales relativas a los $x_i's$ son calculadas en el punto a y las relativas a $y_k's$ son calculadas en el punto $b=f(a)$.

Además de eso, si f y g son de clase C^1 entonces $g\circ f\in C^1$.

<u>**Demostración:**</u> Podemos escribir

$$g(f(a+te_i))-g(f(a))=\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial g}{\partial y_k}[f_k(a+te_i-f_k(a))+\rho(t)|f(a+te_i)-f(a)|$$

donde escribimos $\rho(t)=r(v)/|v|$ con $v=f(a+te_i)-f(a)$. La diferenciabilidad de g nos da $\lim_{t\to 0}\rho(t)=0$. Entonces

$$\frac{g(f(a+te_i))-g(f(a))}{t}=\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial g}{\partial y_k}\frac{f_k(a+te_i)-f_k(a)}{t}\pm\rho(t)\left|\frac{f(a+te_i)-f(a)}{t}\right|.$$

Luego

$$\frac{\partial)g\circ f)}{\partial x_i}=\lim_{t\to 0}\frac{g(f(a+te_i))-g(f(a))}{t}=\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial g}{\partial y_k}\frac{\partial f_k}{\partial x_i}$$

pues

$$\lim_{t\to 0}\rho(t)\quad \text{y}\quad \lim_{t\to 0}\left|\frac{f(a+te_i)-f(a)}{t}\right|=\left|\frac{\partial f}{\partial x_i}(a)\right|.$$

□

Definición 121. El *gradiente* de una función diferenciable $f : U \to \mathbb{R}$ en el punto a y donde $U \subseteq \mathbb{R}_n$ es un abierto, es el vector

$$\mathrm{grad} f(a) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_n}\right).$$

Si v es cualquier vector en $\mathbb{R}^n$, la *derivada direccional* de f en el punto a en la dirección de v es por definición

$$\frac{\partial f}{\partial v}(a) = \lim_{t \to 0} \frac{f(a + tv) - f(a)}{t}. \tag{1}$$

Estas definiciones permiten enunciar los siguientes corolarios de la regla de la cadena. Si f es diferenciable en el punto a, la derivada direccional $\frac{\partial f}{\partial v}(a)$ existe para cualquier dirección v. Más aún $\frac{\partial f}{\partial v}(a)$ da una expresión en términos de las derivadas parciales de f y las coordenadas del vector v.

Corolario 122. Sea $f : U \to \mathbb{R}$ diferenciable en el abierto $U \subseteq \mathbb{R}^n$ con $a \in U$. Dado el vector $v = (v_1, \ldots, v_n)$, si $\lambda : (-\delta, \delta) \to U$ es cualquier curva diferenciable tal que $\lambda(0) = a$ y $\lambda'(0) = v$, se tiene

$$(f \circ \lambda)'(0) = \langle\, \mathrm{grad} f(a), v\,\rangle = \frac{\partial f}{\partial v}(a) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(a) v_i. \tag{2}$$

Demostración: Basta aplicar directamente la fórmula

$$(f \circ \lambda)' = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i} \frac{d\lambda_i}{dt},$$

observando que $\lambda(t) = (\lambda_1(t), \ldots, \lambda_n(t))$ y se tiene $v_i = \frac{d\lambda_i}{dt}(0)$. □

Observación: Notemos que $\frac{\partial f}{\partial v}(a) = (f \circ \lambda)'(0)$ con $\lambda(t) = a + tv$, pues $\lambda'(0) = v$.

Corolario 123. Teorema del Valor Medio. Dada $f : U \to \mathbb{R}$ diferenciable en el abierto $U \subseteq \mathbb{R}^n$, si el segmento de recta que une a y $a + v$ está contenido en U, entonces existe $\theta \in (0, 1)$ tal que

$$f(a + v) - f(a) = \frac{\partial f}{\partial v}(a + \theta v) = \langle\, \mathrm{grad} f(a + \theta v), v\,\rangle = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(a + \theta v) v_i,$$

donde $v = (v_1, \ldots, v_n)$.

Demostración:

En efecto considerando el segmento de curva $\lambda : [0, 1] \to U$, dado por $\lambda(t) = a + tv$, vemos que $f(a + v) - f(a) = (f \circ \lambda)(1) - (f \circ \lambda)(0)$. Por el Teorema del Valor Medio para funciones de una variable real, existe $\theta \in (0, 1)$ tal que $(f \circ \lambda)(1) - (f \circ \lambda)(0) = (f \circ \lambda)'(\theta)$. Por la regla de la cadena

$$(f \circ \lambda)'(\theta) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(a + \theta v) v_i = \frac{\partial f}{\partial v}(a + \theta v) = \langle\, \mathrm{grad} f(a + \theta v), v\,\rangle. \quad \square$$

Recordemos que dada $f : U \to \mathbb{R}$, para cada $c \in \mathbb{R}$ el conjunto $f^{-1}(c) = \{x \in U \ \ f(x) = c\}$ es llamado el conjunto de nivel de c de la función f. Cuando $n = 2$ ese conjunto puede ser llamado línea de nivel y cuando $n = 3$, se denomina superficie de nivel.

Volvamos al gradiente de una función f.

Proposición 124. Sea $f : U \to \mathbb{R}$ una función diferenciable de clase C^1. Fijemos $a \in U$ y supongamos $\mathrm{grad} f(a) \neq 0$. Entonces

(I) El gradiente apunta en la dirección en la cual la función es creciente.

(II) De entre todas las direcciones a lo largo de las cuales f crece, la dirección del gradiente es la de crecimiento más rápido.

(III) El gradiente de f en el punto a es ortogonal al conjunto de nivel que pasa por a.

Demostración:

(I) Recordemos que la derivada direccional en la dirección de cualquier vector v satisface

$$\frac{\partial f}{\partial v}(a) = \langle \mathrm{grad} f(a), v \rangle, \tag{3}$$

y por lo tanto tomando $v = \mathrm{grad} f(a)$ tendremos $\langle \mathrm{grad} f(a), \mathrm{grad} f(a) \rangle > 0$. Esto quiere decir que la derivada direccional en la dirección de $v = \mathrm{grad} f(a)$ es positiva, y por lo tanto si $\lambda : (-\varepsilon, \varepsilon) \to U$ es una curva C^1 tal que $\lambda(0) = a$ y $\lambda'(0) = \mathrm{grad} f(a)$, entonces la función $t \to f \circ \lambda(t)$ tiene derivada positiva en el punto $t = 0$. Luego $(f \circ \lambda)'$ es continua, y por lo tanto $(f \circ \lambda)'(t)$ será positiva en un entorno de 0. Achicando ε si fuese necesario, vemos que $f \circ \lambda : (-\varepsilon, \varepsilon) \to \mathbb{R}$ será una función creciente.

(II) Volvamos a (3). Observemos que los vectores v para los cuales $\frac{\partial f}{\partial v}(a) > 0$ son direcciones a lo largo de las cuales f crece (con el mismo razonamiento que hicimos para el gradiente). Claramente se tiene $\langle \mathrm{grad} f(a), v \rangle > 0$ con lo cual, v forma un ángulo agudo con $\mathrm{grad} f(a)$. Recordemos para esto que el ángulo entre dos vectores no nulos, v y w viene dado por la fórmula

$$\cos(\theta) = \frac{\langle v, w \rangle}{\|v\| \, \|w\|}.$$

Y además sabemos que la igualdad se da si y sólo si w está en la misma dirección que v, $w = cv$ con $c \in \mathbb{R}$.

Aplicado la desigualdad de Cauchy-Schwartz a (3) al gradiente y a cualquier otra dirección v en la cual f crece, tenemos

$$\frac{\partial f}{\partial v}(a) = \langle \mathrm{grad} f(a), v \rangle \leq \|\mathrm{grad} f(a)\| \, \|v\| \leq \|\mathrm{grad} f(a)\|^2 = \frac{\partial f}{\partial (\mathrm{grad} f(a))}(a).$$

(III) Supongamos que $f(a) = c$. La ortogonalidad de $w \in \mathbb{R}^n$ con el conjunto de nivel $f^{-1}(c)$ quiere decir que dada cualquier curva diferenciable $\lambda : (-\varepsilon, \varepsilon) \to f^{-1}(c)$ en $t = 0$ con $\lambda(0) = a$, se tiene $\langle w, \lambda'(0) \rangle = 0$.

Ahora si $\lambda(t) \subset f^{-1}(c)$ para todo $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$, entonces $f(\lambda(t)) = c$. Derivando esta expresión en $t = 0$ obtenemos

$$0 = (f \circ \lambda)'(0) = \langle \mathrm{grad} f(a), \lambda'(0) \rangle.$$

Así el vector $\mathrm{grad} f(a)$ es ortogonal al vector velocidad en el punto $a = \lambda(0)$ de cualquier curva diferenciable λ contenida en el conjunto de nivel $f^{-1}(c)$. $\square$

Generalizando lo hecho en funciones reales, definimos un *punto crítico* de $f : U \to \mathbb{R}$ a un $a \in u$ tal que $\mathrm{grad} f(a) = 0$. La aplicación de este concepto se verá más adelante.

Una aplicación $f : U \to \mathbb{R}^n$ definida en un abierto $U \subseteq \mathbb{R}^m$ se dice *diferenciable* en el punto $a \in U$ cuando cada una de sus funciones coordenadas $f_1, \ldots, f_n : U \to \mathbb{R}$ son diferenciables en ese punto a.

Si este es el caso entonces para todo $v = (v_1, v_2, \ldots, v_n)$ tal que $a + v \in U$ y para cada $i = 1, \ldots, n$ se tiene

$$f_i(a+v) - f_i(a) = \sum_{j=1}^{m} \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(a) v_j + r_i(v) \quad \text{con } \lim_{v \to 0} \frac{r_i(v)}{||v||} = 0.$$

La matrix $n \times m$ cuya fila i es el vector gradiente de f_i y que se denota $Jf(a) = \left[\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(a)\right]$ se denomina *matriz jacobiana* de f en el punto a.

La transformación lineal $f'(a) : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ cuya matriz en las bases canónicas de $\mathbb{R}^m$ y $\mathbb{R}^n$ es $Jf(a)$, se llama *la diferencial de* f en el punto a. A veces $f'(a)$ también se escribe df_a

De acuerdo con la definición de matriz de una transformación real, para todo $v = (v_1, \ldots, v_m) \in \mathbb{R}^m$, tenemos

$$f'(a)v = (w_1, \ldots, w_n) \quad \text{donde} \quad w_i = \sum_{j=1}^{m} \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(a) v_j = \frac{\partial f_i}{\partial v}(a).$$

Esto significa que el resultado $f'(a)v$ es un vector en $\mathbb{R}^m$, cuya componente i resulta de hacer el producto interno entre la fila i de la matriz y el vector columna v. Con la otra notación $f'(a)v = df_a(v)$

Como es natural, definimos la *derivada direccional* de f en el punto a y en la dirección del vector v como

$$\frac{\partial f}{\partial v}(a) = \lim_{t \to 0} \frac{f(a+tv) - f(a)}{t},$$

de donde obtenemos inmediatamente que

$$\frac{\partial f_i}{\partial v}(a) = \left(\frac{\partial f_1}{\partial v}(a), \ldots, \frac{\partial f_n}{\partial v}(a) \right) = f'(a)v.$$

De la regla de la cadena y de la definición de arriba, surge que

$$\frac{\partial f}{\partial v}(a) = (f \circ \lambda)'(0)$$

donde $\lambda(t) = a + tv$ o donde λ puede ser cualquier curva diferenciable que pasa por a y tiene vector velocidad v en $t = 0$: $\lambda(0) = a, \lambda'(0) = v$.

Puesto que cada función coordenada $f_i : U \to \mathbb{R}$ es diferenciable, cada vez que $a+v \in U$ tendremos

$$f_i(a+v) - f(a) = \langle \mathrm{grad} f_i(a), v \rangle + r_i(v), \quad \text{donde } \lim_{v\to 0} \frac{r_i(v)}{\|v\|} = 0.$$

Si reunimos estas expresiones para $i = 1, \ldots, n$, obtenemos en coordenadas la expresión siguiente

$$f(a+v) - f(a) = f'(a)v + r(v), \quad \text{donde } \lim_{v\to 0} \frac{r(v)}{\|v\|} = 0.$$

Claramente $r(v) = (r_1(v), \ldots, r_n(v))$.

El siguiente teorema muestra una caracterización equivalente de diferenciabilidad que algunos textos toman como definición. Esta noción aunque más abstracta ahora, sirve para comprender el papel de la diferencial o derivada de f en a.

Teorema 125. Sea $U \subseteq \mathbb{R}^m$ un abierto y sea $f : U \to \mathbb{R}^n$ una función. Son equivalentes:

(I) f es diferenciable.

(II) Existe una transformación lineal $T_a : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ tal que cada vez que $a+v \in U$, el siguiente límite existe y vale

$$\lim_{v\to 0} \frac{||f(a+v) - f(a) - T_a(v)||}{||v||} = 0. \tag{4}$$

<u>Demostración:</u> $(\Rightarrow)$ Tomamos $T_a = f'(a)$ y el resultado resulta pues $\frac{||f(a+v)-f(a)-T_a(v)||}{||v||} = \frac{||r(v)||}{||v||}$.

Veamos la vuelta. Supongamos que tenemos T_a lineal como en (ii) y sea $r(v) = f(a+v) - f(a) - T_a(v)$.

Reemplacemos v arriba por tv, donde ahora suponemos que $||v|| = 1$. Entonces tendremos

$$\frac{f(a+tv) - f(a)}{t} = T_a(v) \pm \frac{r(tv)}{||tv||}.$$

Tomemos límite cuando $t \to 0$ y apliquemos lo que ya sabemos:

$$\begin{aligned} \lim_{t\to 0} \tfrac{f(a+tv)-f(a)}{t} &= T_a(v) \\ &= \tfrac{\partial f}{\partial v}(a) = f'(a)v \end{aligned}$$

Observemos que probamos que si se satisface (4) entonces la transformación lineal que da el límite debe satisfacer $T_a = f'(a)$. $\square$

Definición 126. Una función $f : U \to \mathbb{R}^n$ con $U \subseteq \mathbb{R}^m$ es *diferenciable* en $a \in U$ si satisface cualquiera de las condiciones equivalentes del Teorema 125.

Diremos que f es diferenciable en U cuando es diferenciable en cualquiera de los puntos de U.

Corolario 127. Toda función $f : U \to \mathbb{R}^n$ con $U \subseteq \mathbb{R}^m$ diferenciable es continua.

En efecto, tomemos $v \in \mathbb{R}^m$ con $||v|| = 1$ y escribamos

$$||f(a+tv)-f(a)|| = \frac{||f(a+tv) - f(a) - f'(a)(tv) + f'(a)(tv)}{||tv||}||tv|| \leq \frac{||f(a+tv) - f(a) - f'(a)(tv)||}{||tv||} + ||tf'(a)(v)||$$

de donde tomando límite cuando $t \to 0$ a la derecha, vemos que

$$\lim_{t\to 0} ||f(a+tv) - f(a)|| = 0,$$

para cualquier $v \in \mathbb{R}^m$.

Ejemplos.

1. Sea $f : I \to \mathbb{R}^n$ una curva diferenciable. Entonces f es una aplicación diferenciable. En efecto, su derivada en el punto $a \in I$ es el vector velocidad

$$f'(a) = (\frac{df_1}{dt}(a), \ldots, \frac{df_n}{dt}(a)).$$

2. Si $f : U \to \mathbb{R}$ es una función definida en el abierto $U \subseteq \mathbb{R}^m$, diferenciable en el punto $a \in U$, su derivada en a es el vector gradiente en a

$$f'(a) = \mathrm{grad} f(a),$$

de modo que $f'(a)v =< \mathrm{grad} f(a), v >$.

3. Sea $f : U \to \mathbb{R}^m$ una función constante, entonces $f'(x) = 0$ para todo $x \in U$. Recíprocamente si $f'(x) = 0$ en una bola $B_r(a)$ entonces f es constante en esa bola.

4. Si consideramos una transformación lineal $T : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$, entonces la derivada de T es $T'(a) = T$, para todo $a \in \mathbb{R}^m$.

La verificación de estas afirmaciones queda como ejercicio.

Sea $f : U \to \mathbb{R}$, con $U \subset \mathbb{R}^3$ una función diferenciable. Supongamos que $S = f^{-1}(c)$ es el conjunto de nivel de $c \in \mathbb{R}$ de modo que para todo $x \in S$ el gradiente $\mathrm{grad} f(x) \neq 0$. Entonces el subespacio de $\mathbb{R}^3$ que es ortogonal a $\mathrm{grad} f(x)$ se llama el *espacio tangente* a S en x y se denota T_xS:

$$T_xS = \{u \in \mathbb{R}^3 \ :< u, \mathrm{grad} f(a) >= 0\},$$

el cual es un subespacio de dimensión dos.

Ejemplo. Tomemos la función $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ dada por $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$. Entonces la esfera unitaria en $\mathbb{R}^3$ es el conjunto de nivel $f^{-1}(1)$;

$$S^2 = \{x \in \mathbb{R}^3 \ : \ x^2 + y^2 + z^2 = 1\}.$$

El gradiente de f en un punto p de coordenadas $p = (x_0, y_0, z_0)$ está dado por el vector

$$\mathrm{grad} f(x_0, y_0, z_0) = (2x_0, 2y_0, 2z_0),$$

el cual es no nulo si $p \neq (0,0,0)$ y esto ocurre siempre en S^2. Luego el plano tangente a S^2 en p es el conjunto ortogonal a $\mathrm{grad} f(p)$:

$$T_pS^2 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,:\, xx_0 + yy_0 + zz_0 = 0\},$$

esto es, el espacio tangente en p consiste de todos los vectores de $\mathbb{R}^3$ que son ortogonales a p. Esto tiene una interpretación geométrica, que se puede ver con ayuda de un programa para graficar.