Práctica de Vectores -Ejercicios seleccionados secciones 10.2 y 14.1

Recomiendo fuertemente que realicen primero los ejercicios solos, y utilicen esta guía solo para corregirse o si no les sale despues de haberlo intentado varias veces.

Propuesta 10.2

1. Sean $\vec{u}$ y $\vec{v}$ no nulos. Decimos que $\vec{u}$ es *perpendicular* a $\vec{v}$ (notamos $\vec{u}\perp\vec{v}$) si y sólo si $(\vec{u}\,\hat{;}\,\vec{v}) = 90°$. Pruebe que
$$\vec{u}\perp\vec{v} \Leftrightarrow \vec{u}\times\vec{v} = 0.$$
$\Rightarrow)$ Sabemos que $\vec{u}$ es perpendicular a $\vec{v} \Rightarrow (\vec{u}\,\hat{;}\,\vec{v}) = 90° = \frac{\pi}{2}$.
Luego,
$$\begin{aligned}\vec{u}\times\vec{v} &= |\vec{u}|.|\vec{v}|.cos((\vec{u}\,\hat{;}\,\vec{v})) = \\ &= |\vec{u}|.|\vec{v}|.\underbrace{cos(\tfrac{\pi}{2})}_{=0} = 0\end{aligned}$$
$\Leftarrow)$ Sabemos que $\vec{u}\times\vec{v} = 0$.
$$\begin{aligned}&\vec{u}\times\vec{v} = 0 \Rightarrow \\ &\underbrace{|\vec{u}|}_{\neq 0}.\underbrace{|\vec{v}|}_{\neq 0}.cos((\vec{u}\,\hat{;}\,\vec{v})) = 0 \Rightarrow cos((\vec{u}\,\hat{;}\,\vec{v})) = 0\end{aligned}$$
Como por definición los ángulos entre vectores verifican $0 \leq (\vec{u}\,\hat{;}\,\vec{v}) \leq \pi$ entonces $(\vec{u}\,\hat{;}\,\vec{v}) = \frac{\pi}{2}$. Entonces podemos concluir que $\vec{u}\perp\vec{v}$.

3. En base a los datos $|\vec{u}| = \sqrt{3}$, $|\vec{v}| = 2$, $(\vec{u}\,\hat{;}\,\vec{v}) = \frac{\pi}{6}$, le proponemos que calcule:
   (a) $\vec{u}\times\vec{u} = |\vec{u}|^2 = (\sqrt{3})^2 = 3$
   (b) $\vec{u}\times\vec{v} = |\vec{u}|.|\vec{v}|.cos(\frac{\pi}{6}) = \sqrt{3}.2.\frac{\sqrt{3}}{2} = 3$
   (c) $\vec{u}\times(-\vec{v}) = \vec{u}\times(-1)\vec{v} \underbrace{=}_{E3} (-1)(\vec{u}\times\vec{v}) \underbrace{=}_{(b)} -3$
   (f) $(\vec{u}+\vec{v})\times(\vec{u}+\vec{v}) \underbrace{=}_{E2} \vec{u}\times\vec{u}+\vec{v}\times\vec{u}+\vec{u}\times\vec{v}+\vec{v}\times\vec{v} \underbrace{=}_{E1} |\vec{u}|^2+2(\vec{u}\times\vec{v})+|\vec{v}|^2 \underbrace{=}_{(a)(b)} 3+2.3+2^2 = 13.$

4. (a) Demuestre el teorema de coseno
$$\left|\vec{BC}\right|^2 = \left|\vec{AC}\right|^2 + \left|\vec{AB}\right|^2 - 2\left|\vec{AC}\right|\left|\vec{AB}\right|cos(\alpha)$$
Recuerde que $\left|\vec{BC}\right|^2 = \vec{BC}\times\vec{BC}$ y $\vec{BC} = \vec{AC} - \vec{AB}\,*$.
$$\begin{aligned}\left|\vec{BC}\right| &= \vec{BC}\times\vec{BC} = \\ &\underbrace{=}_{*} (\vec{AC}-\vec{AB})\times(\vec{AC}-\vec{AB}) = \\ &\underbrace{=}_{E2\,E3} \vec{AC}\times\vec{AC} - \vec{AC}\times\vec{AB} - \vec{AB}\times\vec{AC} + \vec{AB}\times\vec{AB} = \\ &\underbrace{=}_{E1} \left|\vec{AC}\right|^2 - 2(\vec{AC}\times\vec{AB}) + \left|\vec{AB}\right|^2 = \\ &= \left|\vec{AC}\right|^2 + \left|\vec{AB}\right|^2 - 2\left|\vec{AC}\right|\left|\vec{AB}\right|cos(\alpha).\end{aligned}$$

ESCUELA DE CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
Av. Pellegrini 250. Rosario
+54 0341 - 480 2649 internos 216 - 119

(b) Como caso particular del resultado anterior deduzca el Teorema de Pitágoras.
Resulta del ítem (a) tomando $\alpha = \frac{\pi}{2}$

6. Determine $|\vec{u} + \vec{v}|$, sabiendo que $|\vec{u}| = 11$, $|\vec{v}| = 23$ y $|\vec{u} - \vec{v}| = 30$.
Vamos a utilizar una técnica que es muy útil en varios ejercicios.

$$|\vec{u} + \vec{v}|^2 = |\vec{u}|^2 + 2\vec{u} \times \vec{v} + |\vec{v}|^2 = 11^2 + 2\underbrace{\vec{u} \times \vec{v}}_{?} + 23^2 (*)$$

Es decir que debemos ver cuanto vale $\vec{u} \times \vec{v}$. Para ello, vamos a usar la otra hipótesis.

$$\begin{aligned} & |\vec{u} - \vec{v}|^2 = 30^2 \Rightarrow \\ \Rightarrow \quad & \underbrace{|\vec{u}|^2}_{11^2} - 2(\vec{u} \times \vec{v}) + \underbrace{|\vec{v}|^2}_{23^2} = 900 \Rightarrow \\ \Rightarrow \quad & -2\vec{u} \times \vec{v} = 900 - 11^2 - 23^2 \Rightarrow \\ \Rightarrow \quad & \vec{u} \times \vec{v} = \tfrac{250}{-2} = -125 \end{aligned}$$

Volviendo a (*), $|\vec{u} + \vec{v}|^2 = 11^2 + 2.(-125) + 23^2 = 400$ entonces $|\vec{u} + \vec{v}| = \sqrt{400} = 20$.

Propuesta 14.1

1. Determine los cosenos directores del vector $\vec{v} = (2, -1, 0)$.
Por definición tenemos:
$cos((\vec{v} \hat{,} \vec{i})) = \frac{v_1}{|\vec{v}|} = \frac{2}{\sqrt{2^2 + (-1)^2}} = \frac{2}{\sqrt{5}} = 2\frac{\sqrt{5}}{5}$.

$cos((\vec{v} \hat{,} \vec{j})) = \frac{v_2}{|\vec{v}|} = \frac{-1}{\sqrt{2^2 + (-1)^2}} = \frac{-1}{\sqrt{5}} = -\frac{\sqrt{5}}{5}$.

$cos((\vec{v} \hat{,} \vec{k})) = \frac{v_3}{|\vec{v}|} = \frac{0}{\sqrt{2^2 + (-1)^2}} = \frac{0}{\sqrt{5}} = 0$.

4. Analice si $\vec{v}$ puede formar con los vectores fundamentales los siguientes ángulos:

(a) $(\vec{v} \hat{,} \vec{i}) = 45°$, $(\vec{v} \hat{,} \vec{j}) = 130°$ y $(\vec{v} \hat{,} \vec{k}) = 60°$.
Recordemos que
$$\vec{v}_0 = (cos((\vec{v} \hat{,} \vec{i})), cos((\vec{v} \hat{,} \vec{j})), cos((\vec{v} \hat{,} \vec{k})))$$
Es decir que se tiene que verificar
$$1 = |\vec{v}_0| = \sqrt{cos^2((\vec{v} \hat{,} \vec{i})) + cos^2((\vec{v} \hat{,} \vec{j})) + cos^2((\vec{v} \hat{,} \vec{k}))}$$
Luego, deberá ser
$$cos^2((\vec{v} \hat{,} \vec{i})) + cos^2((\vec{v} \hat{,} \vec{j})) + cos^2((\vec{v} \hat{,} \vec{k})) = 1.$$
Veamos si se verifica esto para los ángulos planteados.
$$cos^2((\vec{v} \hat{,} \vec{i})) + cos^2((\vec{v} \hat{,} \vec{j})) + cos^2((\vec{v} \hat{,} \vec{k})) = cos^2(45°) + cos^2(130°) + cos^2(60°) = \frac{23}{20} \neq 1$$
Por lo tanto, no es posible que exista tal vector $\vec{v}$.