Facultad de Ciencias Exactas, Ingeniería y Agrimensura

Departamento de Matemática - Escuela de Ciencias Exactas y Naturales

ANÁLISIS MATEMÁTICO II

Licenciatura y Profesorado en Física, Licenciatura en Ciencias de la Computación,

Licenciatura y Profesorado en Matemática - Año 2020

Unidad 8: Funciones de varias variables - Límite y continuidad

---

En esta unidad comenzaremos a extender a funciones de varias variables las nociones del cálculo de funciones de una variable. Por una función de varias variables entendemos aquella donde el dominio es un subconjunto del espacio $\mathbb{R}^n$, para algún $n \in \mathbb{N}$.

Por ejemplo, pensemos en la función que a cada rectángulo le asigna su área, expresada en función de su base y su altura. En este caso, podemos pensar a la función área como $A(b,h) = bh$ y tendremos una función que tiene sentido para todo $b, h > 0$. Es decir, si denotamos $D = \{(b,h) : b, h \in \mathbb{R},\ b > 0,\ h > 0\}$, tendremos una función bien definida $A : D \to \mathbb{R}$, tal que $A(b,h) = b.h$. Es claro que la restricción del dominio en el ejemplo del área no es más que para preservar el sentido geométrico del problema. La misma función, como tal, está bien definida para todos los pares $(b,h) \in \mathbb{R}^2$.

Pensemos ahora en la función f que a cada punto del espacio le asigna su distancia al origen de coordenadas. Si P es un punto de coordenadas (x,y,z), entonces su distancia al origen está dada por $\sqrt{x^2+y^2+z^2}$. Por lo tanto podemos pensar a la función f, como $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, dada por $f(x,y,z) = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$.

Estos son sólo algunos ejemplos de lo natural que es considerar funciones donde intervenga más de una variable. En esta unidad particular nos proponemos generalizar el concepto de continuidad a funciones de varias variables. Será para ello necesario introducir algunos conceptos nuevos.

1. Distancia. Conjuntos abiertos y cerrados.

El espacio $\mathbb{R}^n$ se define como el producto cartesiano de n copias de $\mathbb{R}$. Es decir,

$$\mathbb{R}^n = \{(x_1, x_2, \cdots, x_n) : x_i \in \mathbb{R}\}$$

es el conjunto de n-uplas ordenadas de números reales.

Cuando $n = 2$, obtenemos $\mathbb{R}^2$, el conjunto de pares ordenados de números reales. En este caso, es usual utilizar la notación (x,y) para un elemento genérico de $\mathbb{R}^2$ en vez de (x_1, x_2). Como ya se ha estudiado en el curso de Álgebra y Geometría Analítica I, los elementos de $\mathbb{R}^2$ pueden ponerse en correspondencia biunívoca con los puntos del plano y al mismo tiempo con los vectores del plano, considerados como vectores libres.

De manera similar, cuando $n = 3$ es usual denotar por (x, y, z) a un elemento genérico de $\mathbb{R}^3$. Los elementos de $\mathbb{R}^3$ pueden ponerse en correspondencia biunívoca con los puntos del espacio y con los vectores libres del espacio.

Podemos generalizar a $\mathbb{R}^n$, para $n \in \mathbb{N}$ arbitrario, las operaciones de suma y producto por un escalar propias de los vectores del plano y del espacio. Esto es, si $v = (x_1, \cdots, x_n)$ y $w = (x'_1, \cdots, x'_n)$ son elementos de $\mathbb{R}^n$ y $\lambda \in \mathbb{R}$, pueden definirse

- $v + w = (x_1 + x'_1, x_2 + x'_2, \cdots, x_n + x'_n)$, $v - w = (x_1 - x'_1, x_2 - x'_2, \cdots, x_n - x'_n)$
- $\lambda v = (\lambda x_1, \lambda x_2, \cdots, \lambda x_n)$.

Tanto en $\mathbb{R}^2$ como $\mathbb{R}^3$ la identificación de sus elementos con los puntos del plano permite definir de manera intuitiva una noción de *distancia*. Si $v = (x, y)$, $w = (x', y')$ son dos puntos de $\mathbb{R}^2$, la distancia entre v y w se define como

$$d(v, w) = \sqrt{(x' - x)^2 + (y' - y)^2}.$$

De manera análoga, si $v = (x, y, z)$, $w = (x', y', z')$ son elementos de $\mathbb{R}^3$, la distancia entre v y w se define como

$$d(v, w) = \sqrt{(x' - x)^2 + (y' - y)^2 + (z' - z)^2}$$

Recordemos que en $\mathbb{R}^2$ y en $\mathbb{R}^3$ hay definido además un *producto interno*. Con v y w como antes, éste viene dado por

$$\langle v, w\rangle = xx' + yy' \quad \langle v, w\rangle = xx' + yy' + zz'$$

dependiendo si $v, w \in \mathbb{R}^2$ o $v, w \in \mathbb{R}^3$ respectivamente.

Este producto interno tiene asociada una *norma* que se define como

$$\|v\| = \sqrt{\langle v, v\rangle}$$

para cada v en $\mathbb{R}^2$ o $\mathbb{R}^3$. En el primer caso, resulta $\|v\| = \sqrt{x^2 + y^2}$ y en el segundo $\|v\| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$.

En cualquier caso, es posible obtener la distancia entre dos puntos a partir de la norma de la siguiente manera:

$$d(v, w) = \|v - w\|.$$

Estos conceptos tienen sentido incluso cuando $n = 1$, es decir, cuando trabajamos en $\mathbb{R}$. En ese caso, tenemos que si $x, y \in \mathbb{R}$,

$$\|x\| = |x|, \quad d(x, y) = \|x - y\| = |x - y|$$

donde $|\cdot|$ indica el valor absoluto.

Resulta claro además que los conceptos de producto interno, norma y distancia pueden generalizarse a $\mathbb{R}^n$, para cualquier $n \in \mathbb{N}$ de la siguiente manera:

Definición 88: Sean $v = (x_1, x_2, \cdots, x_n)$ y $w = (x'_1, x'_2, \cdots, x'_n)$. Entonces:

- El **producto interno** o **producto escalar** entre v y w se define por

$$\langle v, w\rangle = x_1x'_1 + x_2x'_2 + \cdots + x_nx'_n = \sum_{k=1}^{n} x_kx'_k.$$

- La **norma** de un elemento $v \in \mathbb{R}^n$ se define por

$$\|v\| = \sqrt{\langle v, v\rangle} = \sqrt{\sum_{k=1}^{n} x_i^2}.$$

- La **distancia** entre v y w se define por

$$d(v, w) = \|v - w\| = \sqrt{\sum_{k=1}^{n} (x_i - x'_i)^2}.$$

Resumimos a continuación las propiedades del producto interno, la norma y la distancia. Dejamos su prueba como **ejercicio**:

• El producto interno en $\mathbb{R}^n$ verifica:

1. Es bilineal: para cada $a \in \mathbb{R}$, $u, v, w \in \mathbb{R}^n$ se verifican:

   a) $\langle a\,u, v\rangle = \langle u, a\,v\rangle = a\langle u, v\rangle$;

   b) $\langle u + v, w\rangle = \langle u, w\rangle + \langle v, w\rangle$;

   c) $\langle u, v + w\rangle = \langle u, v\rangle + \langle u, w\rangle$.

2. Es simétrica: para cada $v, w \in \mathbb{R}^n$, $\langle v, w\rangle = \langle w, v\rangle$.

3. Es definida positiva: para cada $v \in \mathbb{R}^n$, $\langle v, v\rangle \geq 0$, y $\langle v, v\rangle = 0 \Leftrightarrow v = 0$.

• La norma en $\mathbb{R}^n$ verifica: para cada $a \in \mathbb{R}$, $v, w \in \mathbb{R}^n$:

1. $\|v\| \geq 0$ y $\|v\| = 0$ si y sólo si $v = 0$.

2. $\|av\| = |a|\,\|v\|$.

3. Desigualdad triangular: $\|v + w\| \leq \|v\| + \|w\|$.

4. Desigualdad de Cauchy-Schwartz: $|\langle v, w\rangle| \leq \|v\|\,\|w\|$.

• De las propiedades de la norma es fácil comprobar que para cada u, v, $w \in \mathbb{R}^n$ la distancia verifica:

1. $d(u, v) = d(v, u)$;

2. $d(u, v) \geq 0$ y $d(u, v) = 0$ si y solo si $u = v$;

3. Desigualdad triangular: $d(u, w) \leq d(u, v) + d(v, w)$.

En el cálculo de una variable juegan un rol fundamental los intervalos abiertos. Tanto en la definición de continuidad como de diferenciabilidad se requiere que la función esté definida en un entorno del punto, pongamos x_0. Observemos que un intervalo abierto alrededor de x_0 puede definirse como

$$(x_0 - \delta, x_0 + \delta) = \{x \in \mathbb{R} : |x - x_0| < \delta\} = \{x \in \mathbb{R} : d(x, x_0) < \delta\}.$$

Esta última caracterización se generaliza inmediatamente a $\mathbb{R}^n$ para cualquier $n \in \mathbb{N}$:

Definición 89: Dado $u_0 \in \mathbb{R}^n$ y $r > 0$ definimos la *bola* alrededor de u_0 y radio r como

$$B_r(u_0) = \{v \in \mathbb{R}^n : d(v, u_0) < r\}.$$

Decimos que un subconjunto $A \subset \mathbb{R}^n$ es *abierto* si para cada $u \in A$, existe $r > 0$ tal que $B_r(u) \subset A$.

Sea $X \subseteq \mathbb{R}^n$ un subconjunto no vacío. Decimos que $a \in X$ es un *punto interior* de X si existe $\delta > 0$ tal que $B_\delta(a) \subseteq X$. El conjunto de puntos interiores se denota por X^0 o por $Int(X)$.

Ejemplos 90:

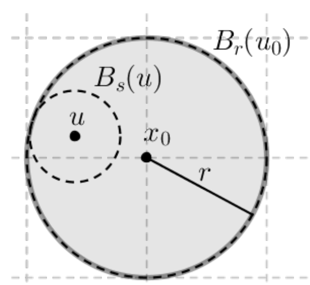
1. Cada bola $B = B_r(u_0)$ es abierto. En efecto, sea $u \in B$ cualquiera y pongamos

   $$s = \min\{r - d(u, u_0), d(u, u_0)\}.$$

   Veamos que $B_s(u) \subset B$. En efecto, si $v \in B_s(u)$, entonces

   $$d(v, u_0) \leq d(v, u) + d(u, u_0) < s + d(u, u_0) \leq r - d(u, u_0) + d(u, u_0) = r$$

   con lo cual $v \in B$ y por lo tanto $B_s(u) \subset B$.



2. Consideremos $S = \{v = (x_1, \cdots, x_n) \in \mathbb{R}^n : x_n > 0\}$. En $\mathbb{R}^2$, S es el semiplano superior, y en $\mathbb{R}^3$ es el semiespacio superior. Sea $v = (v_1, \cdots, v_n) \in S$ y sea $r < v_n$. Luego si $w = (w_1, \cdots, w_n) \in B_r(v)$, se tiene

   $$|w_n - v_n| \leq d(v, w) < r.$$

   En particular, $v_n - r < w_n < v_n + r$, con lo cual $w_n > 0$ y por lo tanto $w \in S$. Luego $B_r(v) \subset S$ y S es abierto.

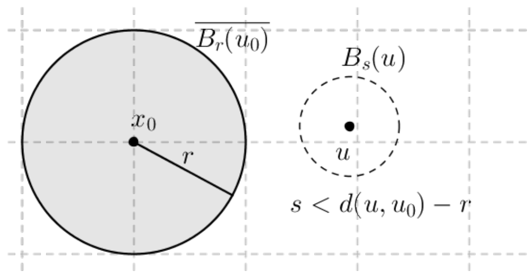
3. Sea $X \subseteq \mathbb{R}^n$ un conjunto no vacío. Entonces X^0 es abierto. **Ejercicio**

Definición 91: Decimos que $F \subset \mathbb{R}^n$ es *cerrado* si su complemento es abierto. Denotaremos por $\mathcal{C}F$ al complemento de un conjunto F.

Ejemplos 92:

1. La *bola cerrada* $\overline{B_r(u_0)} = \{u \in \mathbb{R}^n : d(u, u_0) \leq r\}$ es cerrado en $\mathbb{R}^n$. En efecto,

$$\mathcal{C}\overline{B_r(u_0)} = \{u \in \mathbb{R}^n : d(u, u_0) > r\}.$$



Tomemos $u \in \mathcal{C}\overline{B_r(u_0)}$ y $s < d(u, u_0) - r$. Veamos que $B_s(u) \subset \mathcal{C}\overline{B_r(u_0)}$. Sea $v \in B_s(u)$. Entonces a partir de la desigualdad triangular obtenemos que $d(u, u_0) \leq d(u, v) + d(v, u_0)$ y por lo tanto

$$d(v, u_0) \geq d(u, u_0) - d(u, v) > d(u, u_0) - s > r.$$

Luego $B_s(u) \subset \mathcal{C}\overline{B_r(u_0)}$ y como u es arbitrario, resulta $\mathcal{C}\overline{B_r(u_0)}$ abierto.

2. Consideremos la esfera

$$S^2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 1\}.$$

Entonces $\mathcal{C}S^2 = B_1(0) \cup \mathcal{C}\overline{B_1(0)}$. Es decir, $\mathcal{C}S^2$ es unión de dos abiertos. En fácil ver que entonces es abierto. Luego S^2 es cerrado.

Finalizamos esta sección introduciendo un concepto que será fundamental para poder definir la noción de límite.

Definición 93: Sea A un subconjunto de $\mathbb{R}^n$ y sea $u \in \mathbb{R}^n$. Decimos que u es un *punto de acumulación* de A, si para cada $\varepsilon > 0$, $B_\varepsilon(u) - \{u\}$ interseca a A.

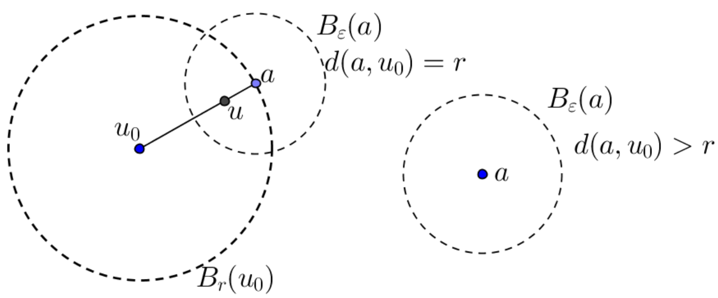
Se denomina *clausura* de A al conjunto $\overline{A}$ formado por A y todos sus puntos de acumulación.

Si A es un conjunto abierto, es claro que todos los puntos de A son puntos de acumulación de A.

Ejemplo 94: Consideremos por ejemplo una bola abierta $A = B_r(u_0)$ en $\mathbb{R}^2$. Entonces es fácil ver que si $d(a, u_0) = r$ entonces a es un punto de acumulación de A. En efecto, tomemos cualquier $\varepsilon > 0$, tomemos un punto u sobre el segmento que determinan a y u_0 que esté a distancia $r - \frac{\varepsilon}{2}$ de u_0. Entonces u estará a distancia $\frac{\varepsilon}{2}$ de a, y por lo tanto tendremos

$$u \in B_r(u_0) \cap (B_\varepsilon(a) - \{a\}).$$

Por otra parte, si $d(a, u_0) > r$, hemos probado en el Ejemplo 92 que existe $\varepsilon > 0$ tal que $B_\varepsilon(a) \cap B_r(u_0) = \emptyset$, y por lo tanto a no puede ser un punto de acumulación de A.



Conluimos que los puntos de acumulación de A son los puntos mismos de A y aquellos puntos que están a distancia r de u_0. Luego tendremos que la clausura de A es la bola cerrada de centro u_0 y radio r.

Ejercicio: Pruebe que si $X \subseteq \mathbb{R}^n$ es un conjunto no vacío, entonces $\bar{X}$ es cerrado.

2. Límite y continuidad.

Consideremos una función $f : A \to \mathbb{R}$ donde $A \subset \mathbb{R}$. Si $a \in A$, recordemos que $\lim_{x \to a} f(x) = L$ si "$f(x)$ se acerca tanto como queramos a L para x suficientemente cercano a a". En términos de la definición $\varepsilon - \delta$ de límite, esto se traduce en pedir que para cada $\varepsilon > 0$, exista un $\delta > 0$ tal que $|f(x) - L| < \varepsilon$ siempre que $0 < |x - a| < \delta$. En términos de la distancia, podemos reescribir la condición anterior de la siguiente manera:

$$\lim_{x \to a} f(x) = L \;\Leftrightarrow\; [d(f(x), L) < \varepsilon \; si \;\; 0 < d(x, a) < \delta.]$$

A partir de esta reformulación es fácil generalizar el concepto de límite a funciones de varias variables:

Definición 95: Sea $f : D \to \mathbb{R}^m$ una función con $D \subset \mathbb{R}^n$. Sea $a \in \mathbb{R}^n$ un punto de acumulación de D. Decimos que existe el *límite cuando u tiende a a de $f(u)$, y que ese límite es L*, y lo denotamos $\lim_{u \to a} f(u) = L$, si para cada $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que si $u \in D$ y $0 < d(u, a) < \delta$, entonces $d(f(u), L) < \varepsilon$. O sea, $\lim_{x \to a} f(u) = L$ sii

$$u \in (B_\delta(a) - \{a\}) \cap D \;\Rightarrow\; f(u) \in B_\varepsilon(L)$$

o equivalentemente

$$u \in D \text{ y } \; 0 < \|u - a\| < \delta \;\Rightarrow\; \|f(u) - L\| < \varepsilon.$$

Decimos que f es *continua en* a si f está definida en a y $\lim_{u\to a} f(u) = f(a)$.
Decimos que f es *continua en* D si f es continua en a para cada $a \in D$.

A los efectos de simplificar la notación, en las pruebas de los teoremas escribiremos directamente $0 < \|u-a\| < \delta$ o $u \in B_\delta(a) - \{a\}$, sobrentendiendo que tratamos con puntos u que, además de verificar esta condición, están en el dominio D de la función f.

Ejemplo 96: Consideremos la función $p_1 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dada por $p(x,y) = x$. Veamos que f es continua. Fijemos $u_0 = (x_0, y_0)$ y sea $\varepsilon > 0$ arbitrario. Observemos que si $u = (x,y)$ es un punto cualquiera de $\mathbb{R}^2$, resulta

$$\|u - u_0\| = \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2} \geq \sqrt{(x-x_0)^2} = |x - x_0|.$$

Con lo cual basta tomar $\delta = \varepsilon$ para ver que si

$$\|u - u_0\| < \delta \;\Rightarrow\; |p_1(u) - p_1(u_0)| = |x - x_0| < \varepsilon.$$

Como u_0 es cualquiera, concluimos que p_1 es continua en todos los puntos de $\mathbb{R}^2$ y por lo tanto es continua.

De manera análoga se prueba que $p_2(x,y) = y$ es continua y, más generalmente, que $p_j : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ dada por

$$p_j(x_1, x_2, \cdots, x_j, \cdots, x_n) = x_j$$

es continua.

Ejemplo 97: Consideremos la función $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dada por

$$f(x,y) = x^2 + y^2 = \|(x,y)\|^2.$$

Consideremos un punto $u_0 = (x_0, y_0)$ y veamos que f es continua en u_0, esto es,

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = f(x_0,y_0).$$

Observemos que

$$|f(x,y) - f(x_0,y_0)| = |(x^2 - x_0^2) + (y^2 - y_0)^2| \leq |x^2 - x_0^2| + |y^2 - y_0^2|$$

Fijemos $\varepsilon > 0$ y consideremos la función auxiliar $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $g(t) = t^2$. Sabemos que g es continua en $\mathbb{R}$. En particular, g es continua en x_0 y en y_0. Por lo tanto existirán $\delta_1 > 0$ y $\delta_2 > 0$ tales que

$$\begin{aligned} |x - x_0| < \delta_1 \;&\Rightarrow\; |x^2 - x_0^2| < \frac{\varepsilon}{2} \\ |y - y_0| < \delta_2 \;&\Rightarrow\; |y^2 - y_0^2| < \frac{\varepsilon}{2}. \end{aligned}$$

Sea $\delta < \min\{\delta_1, \delta_2\}$. Observemos que si $d((x,y),(x_0,y_0)) < \delta$ entonces

$$(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 < \delta^2 \;\Rightarrow\; (x-x_0)^2 < \delta^2 \text{ y } (y-y_0)^2 < \delta^2 \;\Rightarrow\; |x-x_0| < \delta,\; |y-y_0|^2 < \delta.$$

Como $\delta < \delta_1$ y $\delta < \delta_2$, tenemos que

$$\begin{aligned} d((x,y),(x_0,y_0)) < \delta \ &\Rightarrow \ |x - x_0| < \delta_1 \text{ y } \ |y - y_0| < \delta_2 \ \Rightarrow \ |x^2 - x_0^2| < \frac{\varepsilon}{2}, \ |y^2 - y_0^2| < \frac{\varepsilon}{2} \\ &\Rightarrow \ |f(x,y) - f(x_0,y_0)| < \varepsilon. \end{aligned}$$

Concluimos que $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = f(x_0,y_0)$ como queríamos ver.

Este razonamiento puede generalizarse para probar que $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, dada por $f(u) = \|u\|^2$ es continua.

Ejemplo 98: Sea $f(x,y) = \frac{\operatorname{sen}(x^2+y^2)}{x^2+y^2}$. Observemos que f está bien definida en $\mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$. Intentaremos calcular $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$. Recordemos que

$$\lim_{t\to 0} \frac{\operatorname{sen}(t)}{t} = 1, \tag{1}$$

y por lo tanto es de esperar que el límite que queremos calcular también sea 1, ya que como hemos visto en el ejemplo anterior $x^2 + y^2$ tiende a 0 cuando (x,y) tiende a $(0,0)$.

Fijemos $\varepsilon > 0$. Pongamos $g(t) = \frac{\operatorname{sen}(t)}{t}$. Observemos que $f(x,y) = g(x^2+y^2)$. De (1), existirá $\delta > 0$ tal que

$$0 < |t| < \delta \ \Rightarrow \ |g(t) - 1| < \varepsilon. \tag{2}$$

Por el ejemplo 97, tenemos que para el δ fijado, existe $\delta' > 0$ tal que

$$(x,y) \in B_{\delta'}((0,0)) \ \Rightarrow \ x^2 + y^2 = \|(x,y)\|^2 < \delta. \tag{3}$$

Combinando 2 y 3 obtenemos

$$(x,y) \in B_{\delta'}((0,0)) - \{0,0\} \ \Rightarrow \ 0 < x^2 + y^2 < \delta \ \Rightarrow \ |g(x^2+y^2) - 1| < \varepsilon \ \Rightarrow \ |f(x,y) - 1| < \varepsilon.$$

Concluimos que $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 1$.

Para poder agilizar el cálculo de límites deberemos demostrar algunas propiedades. Éstas son muy similares a los respectivos resultados para funciones de una variable, y su prueba es en general análoga reemplazando el valor absoluto por la norma, o reescribiéndolas en términos de distancia. Incluiremos aquí sólo algunas a modo ilustrativo y dejamos el resto como **ejercicio**.

Teorema 99: Unicidad del límite. Sea $f : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ una función. Si $\lim\limits_{u\to u_0} f(u) = L_1$ y $\lim\limits_{u\to u_0} f(u) = L_2$, entonces $L_1 = L_2$.

<u>Demostración:</u> Fijemos $\varepsilon > 0$ arbitrario y sean $\delta_1 > 0$ y $\delta_2 > 0$ tales que

$$\begin{aligned} 0 < \|u - u_0\| < \delta_1 \ &\Rightarrow \ \|f(u) - L_1\| < \frac{\varepsilon}{2} \\ 0 < \|u - u_0\| < \delta_2 \ &\Rightarrow \ \|f(u) - L_2\| < \frac{\varepsilon}{2} \end{aligned}$$

Pongamos $\delta < \min\{\delta_1, \delta_2\}$. Entonces si $\|u - u_0\| < \delta$ la norma de esta diferencia será a la vez menor que δ_1 y δ_2. Por lo tanto eligiendo un u cualquiera en $B_\delta(u_0)$, tendremos

$$\|L_1 - L_2\| = \|L_1 - f(u) + f(u) - L_2\| \leq \|f(u) - L_1\| + \|f(u) - L_2\| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

O sea que $\|L_1 - L_2\| < \varepsilon$ para cualquier $\varepsilon > 0$, con lo cual deberá ser $\|L_1 - L_2\| = 0$ y en consecuencia $L_1 = L_2$. □

Teorema 100: Álgebra de los límites. Sean $f, g : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ funciones tales que $\lim\limits_{u \to u_0} f(u) = L_1$ y $\lim\limits_{u \to u_0} g(u) = L_2$. Entonces:

1. $\lim\limits_{u \to u_0} (f(u) + g(u)) = L_1 + L_2$.
2. $\lim\limits_{u \to u_0} (\lambda f(u)) = \lambda L_1$, para cualquier $\lambda \in \mathbb{R}$.
3. si $m = 1$, $\lim\limits_{u \to u_0} (f(u)g(u)) = L_1 L_2$ e, inductivamente, para cada $k \in \mathbb{N}$, $\lim\limits_{u \to u_0} (f(u))^k = L_1^k$.
4. si $m = 1$, $L_1 \neq 0$ y $f(u) \neq 0$ para todo u en un abierto que contenga a u_0, excepto tal vez en u_0, entonces $\lim\limits_{u \to u_0} \dfrac{1}{f(u)} = \dfrac{1}{L_1}$.

Demostración: Dejamos la prueba de los items 2 y 4 como ejercicio.

Probemos el item 1. Fijemos $\varepsilon > 0$ y sean δ_1 y δ_2 tales que

$$\|u - u_0\| < \delta_1 \;\Rightarrow\; \|f(u) - f(u_0)\| < \frac{\varepsilon}{2}$$
$$\|u - u_0\| < \delta_2 \;\Rightarrow\; \|g(u) - g(u_0)\| < \frac{\varepsilon}{2}$$

Poniendo nuevamente $\delta < \min\{\delta_1, \delta_2\}$, tendremos que si $\|u - u_0\| < \delta$, entonces

$$\|(f+g)(u) - (f+g)(u_0)\| = \|(f(u) - f(u_0)) + (g(u) - g(u_0))\| \leq \|f(u) - f(u_0)\| + \|g(u) - g(u_0)\| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$$

lo que concluye la prueba.

Para probar 3, observemos que podemos escribir

$$f(u)g(u) - L_1 L_2 = [f(u) - L_1][g(u) - L_2] + L_1[g(u) - L_2] + L_2[f(u) - L_1]. \tag{4}$$

Fijemos $\varepsilon > 0$ y pongamos $\tilde{\varepsilon} = \min\left\{\sqrt{\frac{\varepsilon}{3}}, \frac{\varepsilon}{3|L_1|}, \frac{\varepsilon}{3|L_2|}\right\}$. Elijamos δ_1, δ_2 tales que

$$\|u - u_0\| < \delta_1 \;\Rightarrow\; \|f(u) - f(u_0)\| < \sqrt{\varepsilon}$$
$$\|u - u_0\| < \delta_2 \;\Rightarrow\; \|g(u) - g(u_0)\| < \sqrt{\varepsilon}$$

Luego si $\|u - u_0\| < \delta$, de (4) tenemos

$$\|f(u)g(u) - L_1 L_2\| < \sqrt{\frac{\varepsilon}{3}}\sqrt{\frac{\varepsilon}{3}} + |L_1|\frac{\varepsilon}{3|L_1|} + |L_2|\frac{\varepsilon}{3|L_2|} = \varepsilon$$

como queríamos ver. □

Ejemplo 101:

Consideremos la función $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ dada por

$$f(x, y, z) = 3x^2 + 2y^3 - z^6.$$

Observemos que podemos escribir a f como

$$f(x, y, z) = 3p_1(x, y, z)^2 + 2p_2(x, y, z)^3 - p_3(x, y, z)^6$$

donde las funciones p_j son las proyecciones introducidas en el Ejemplo 96. Dado que estas funciones son continuas, tendremos $\lim_{u \to u_0} p_j(x, y, z) = p_j(x_0, y_0, z_0)$, y por lo tanto tendremos del item 3 del Teorema 98 que

$$\lim_{x \to u_0} p_1(x, y, z)^2 = p_1(x_0, y_0, z_0)^2, \ \lim_{x \to u_0} p_2(x, y, z)^3 = p_2(x_0, y_0, z_0)^3, \ \lim_{x \to u_0} p_3(x, y, z)^6 = p_3(x_0, y_0, z_0)^6.$$

Es claro que podemos aplicar ahora primero el item 2 y luego el item 1 para concluir que

$$\lim_{(x,y,z) \to (x_0,y_0,z_0)} f(x, y, z) = f(x_0, y_0, z_0)$$

es decir, que f es continua en u_0.

Ejemplo 102: Podemos generalizar aún más el ejemplo anterior. Consideremos la función $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ dada por

$$f(x_1, x_2, \cdots, x_n) = Ax_1^{k_1} x_2^{k_2} \cdots x_n^{k_n}$$

donde $A \in \mathbb{R}$ y $k_1, \cdots, k_n \in \mathbb{N}_0$. f se denomina un *monomio* en n variables. Observemos que una forma más complicada de escribir f es la siguiente:

$$f(x_1, x_2, \cdots, x_n) = Ap_1(x_1, \cdots, x_n)^{k_1} p_2(x_1, x_2, \cdots, x_n)^{k_2} \cdots p_n(x_1, \cdots, x_n)^{k_n}.$$

Como cada p_j es una función continua en u_0, cualquiera sea $u_0 \in \mathbb{R}^n$, podemos aplicar inductivamente la propiedad 3 del Teorema 98, seguida de la propiedad 2 para concluir que f es continua en u_0.

Un *polinomio en n-variables* es una suma de monomios en las variables $(x_1, \cdots, x_n)$. Por lo tanto, por el item 1 del Teorema 98, concluimos que cualquier polinomio en n variables es una función continua.

Observemos que la función $f(x, y) = x^2 + y^2$ del Ejemplo 97 es un polinomio en (x, y) y por lo tanto es continua.

Un caso particular de estos polinomios es una función lineal $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ de la forma $f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n$, con $a_i \in \mathbb{R}$. En efecto f es lineal: es decir que satisface

$f(x + y) = f(x) + f(y), \quad f(\lambda x) = \lambda f(x),$ para todos $x, y \in \mathbb{R}^n$ y $\lambda \in \mathbb{R}$.

Ejercicio. Pruebe que una f lineal es continua.

Más generalmente, una aplicación $A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ se dice *lineal* si

- $A(x+y) = A(x) + A(y)$ para todos $x, y \in \mathbb{R}^m$
- $A(\lambda x) = \lambda A(x)$ para todos $\lambda \in \mathbb{R}$, $x \in \mathbb{R}^n$.

Se puede probar que una aplicación lineal $A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ es continua. Para obtener funciones continuas se tienen las matrices. Por ejemplo, para una aplicación lineal de $\mathbb{R}^2$ en $\mathbb{R}^2$ tomemos por ejemplo

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

y hacemos

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x_1 + x_2 \\ x_1 + x_2 \end{pmatrix},$$

lo cual se generaliza con matrices de diferentes tamaños.

Es inmediato que las propiedades enunciadas en el Teorema 98 tienen su versión análoga para funciones continuas. Las enunciamos en el siguiente:

Teorema 103: Álgebra de las funciones continuas. Sean $f, g : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ funciones continuas en $u_0 \in D$. Entonces:

1. $f + g$ es continua en u_0.
2. λf es continua en u_0, para cualquier $\lambda \in \mathbb{R}$.
3. si $m = 1$, $f \cdot g$ es continua en u_0, y para cada $n \in \mathbb{N}$, f^n es continua en u_0.
4. si $m = 1$ y $f(u) \neq 0$ para cada u en un abierto que contenga a u_0, entonces $\dfrac{1}{f(u)}$ es continua en u_0.

Muchas de las funciones más "complicadas" y que presentan dificultades a la hora del cálculo de límites pueden expresarse a partir de la composición de funciones más sencillas (ver el Ejemplo 98).

Teorema 104: Límite de la función compuesta. Sean $f : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ y $g : D' \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^k$ funciones tales que $f(D) \subset D'$. Si existen $\lim\limits_{u \to u_0} f(u) = L$ y g es continua en L, entonces

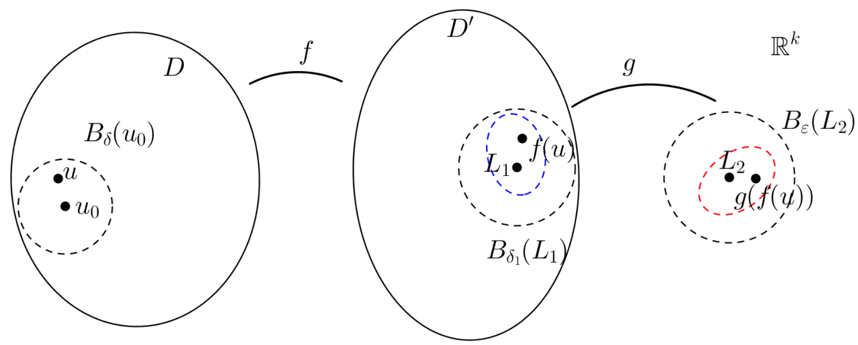
$$\lim_{u \to u_0} (g \circ f)(u) = g(L).$$

<u>**Demostración:**</u> Sea $\varepsilon > 0$. Como g es continua en L, $\lim\limits_{u \to L} g(u) = g(L)$ y existirá $\delta_1 > 0$ tal que

$$\|w - L\| < \delta_1 \;\Rightarrow\; \|g(w) - g(L)\| < \varepsilon.$$

Por otra parte, como $\lim\limits_{u \to u_0} f(u) = L$, fijado el δ_1 anterior, existirá $\delta > 0$ tal que

$$0 < \|u - u_0\| < \delta \;\Rightarrow\; \|f(u) - L\| < \delta_1 \;\Rightarrow \|g(f(u)) - g(L)\| < \varepsilon. \qquad \square$$



Corolario 105: Continuidad de la función compuesta. Sean $f : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ y $g : D' \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^k$ funciones tales que $f(D) \subset D'$. Si f es continua en u_0 y g es continua en $f(u_0)$, entonces $g \circ f$ es continua en u_0.

Estos teoremas pueden aplicarse para probar de manera muy simple la continuidad de algunas funciones de varias variables partiendo de la continuidad de funciones reales conocidas:

Ejemplo 106: Consideremos por ejemplo la función

$$f(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^2 + y^4 z^6}$$

Podemos pensar que $f = g \circ h$, con $h : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ dada por $h(x, y, z) = x^2 + y^2 + y^4 z^6$ y $g : \mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{R}$ dada por $g(t) = \sqrt{t}$. Observemos que $h(x) \geq 0$ para todo $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, o sea que $g(\mathbb{R}^3) \subset \mathrm{Dom}(g)$. Además h es continua por ser un polinomio en (x, y, z) y sabemos que g es continua. Conluimos que f es continua.

Es evidente notar a esta altura que todos los ejemplos que hemos presentado son funciones cuyo codominio es $\mathbb{R}$, más allá que los resultados presentados sean válidos para funciones cuyo codominio es $\mathbb{R}^m$ para un m cualquiera.

Veremos a continuación que no hemos perdido generalidad considerando estos casos.

Supongamos que tenemos una función $f : D \to \mathbb{R}^m$ con $D \subset \mathbb{R}^n$. Entonces f tiene "m-componentes", es decir, que podemos escribir

$$f(x_1, \cdots, x_n) = (f_1(x_1, \cdots, x_n), \cdots, f_m(x_1, \cdots, x_n)).$$

Por ejemplo, si consideramos la función $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ dada por $f(x, y) = (x+y, xy, \cos(x^2+y^2))$, tendremos

$$f_1(x, y) = x + y, \quad f_2(x, y) = xy, \quad f_3(x, y) = \cos(x^2 + y^2).$$

Las funciones componentes $f_i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ pueden definirse como

$$f_i = p_i \circ f, \quad i = 1, \cdots, m$$

donde $p_i : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ es la proyección sobre la i-ésima coordenada del codominio.

Como cada p_i es continua, es claro que si f es continua, entonces las funciones componentes $f_1, \cdots, f_m : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ son continuas. La recíproca de esta propiedad también es cierta:

Teorema 107: Sea $f : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ una función y sean $f_i = p_i \circ f : D \to \mathbb{R}^m$, $i = 1, \cdots, m$ sus funciones componentes. Entonces f es continua en u_0 si y sólo si todas las funciones componentes f_i son continuas en u_0, para $i = 1, \cdots, m$.

Demostración: Ya hemos probado que si f es continua en u_0, las componentes f_i son continuas u_0. Probemos ahora la recíproca. Supongamos que cada f_i, $i = 1, \cdots, n$ es continua en u_0. Fijemos $\varepsilon > 0$.

Como $f_1,\ f_2,\ \cdots,\ f_m$ son continuas en u_0, existirán $\delta_1,\ \delta_2, \cdots, \delta_m > 0$ tales que

$$\|u - u_0\| < \delta_i \ \Rightarrow\ |f_i(u) - f_i(u_0)| < \frac{\varepsilon}{\sqrt{m}}.$$

Ponamos $\delta < \min\{\delta_1, \cdots, \delta_m\}$. Entonces si $\|u - u_0\| < \delta$,

$$\|f(u) - f(u_0)\| = \sqrt{(f_1(u) - f_1(u_0))^2 + \cdots + (f_m(u) - f_m(u_0))^2} < \sqrt{\frac{\varepsilon^2}{m} + \cdots + \frac{\varepsilon^2}{m}} = \varepsilon.$$

Concluimos que f es continua en u_0. □

Ejemplo 108: Probaremos en este ejemplo que no existe el límite, cuando (x, y) tiende a $(0, 0)$, de la función $f(x, y) = \frac{x^2}{x^2+y^2}$.

Supongamos por el contrario que este límite existe y es igual a L. Observemos que para $(x, y) \neq (0, 0)$, f es un cociente de funciones continuas a valores reales, y por lo tanto es continua en (x, y). Luego si definimos $f(0, 0) = L$ resultará f continua en $\mathbb{R}^2$. Consideremos la función $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ dada por $g(t) = (0, t)$. Observemos que g es continua en todo $\mathbb{R}$ pues sus funciones componentes son las funciones $g_1(t) \equiv 0$ y $g_2(t) = t$ que son continuas.

En particular, $\lim\limits_{t\to 0} g(t) = g(0) = (0, 0)$. Como estamos suponiendo que $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x, y) = L$, tendremos que

$$\lim_{t\to 0} f \circ g(t) = L$$

Pero $f \circ g(t) \equiv 0$, y por lo tanto $L = 0$.

O sea que, de existir, deberíamos tener $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x, y) = 0$.

Pero si ahora consideramos la función $h(t) = (t, 0)$, con el mismo razonamiento h es continua y por lo tanto debería ser $\lim\limits_{t\to 0} f \circ h(t) = 0$. Sin embargo, en este caso $f \circ h(t) = 1$ y por lo tanto el límite anterior no puede ser 0.

Concluimos que no existe $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x, y)$.

En $\mathbb{R}^2$, y más generalmente en $\mathbb{R}^n$, existen múltiples "direcciones" a traves de las cuales podemos acercarnos a un punto u_0. Si una función tiene límite cuando u tiende a u_0, este límite deberá ser independiente de la dirección por la cual nos aproximamos.

En este último ejemplo vemos que si nos acercamos por la recta $x = 0$ o por la recta $y = 0$ a $(0, 0)$ en $\mathbb{R}^2$, la función se aproxima a valores distintos, y por lo tanto no existe el límite.

El siguiente resultado generaliza algo ya visto para funciones $f : U \to \mathbb{R}$.

Teorema 109: Sea $f : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ una función. Supongamos que existe $\lim\limits_{u \to a} f(u) = L$ con $L > 0$ (y $u \in D$). Entonces existe $\delta > 0$ tal que si $0 < \|u - a\| < \delta$ se tiene $f(u) > 0$.

Demostración: Como $L > 0$ elijamos $\varepsilon = L$ en la definición de lí mite. Luego existe $\delta > 0$ tal que si $0 < \|u - a\| < \delta$ entonces $|f(u) - L| < \varepsilon$, lo cual es equivalente a $-\varepsilon + L < f(u) < \varepsilon + L$, esto es $0 < f(u) < 2L$. $\square$

Corolario 110: Sean $f, g : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ funciones tales que $f(u) \leq g(u)$ para todo $u \in D$. Supongamos que existen los límites $\lim\limits_{u \to a} f(u)$ y $\lim\limits_{u \to a} g(u)$. Entonces $\lim\limits_{u \to a} f(u) \leq \lim\limits_{u \to a} g(u)$.

Demostración: Por el contrario supongamos que $\lim\limits_{u \to a} f(u) > \lim\limits_{u \to a} g(u)$. Aplicando el Teorema 109 a $f - g$, obtenemos que existe $\delta > 0$ tal que si $0 < \|u - a\| < \delta$ entonces $0 < f(u) - g(u)$ es decir $g(u) < f(u)$ en ese entorno de a, lo cual contradice la hipótesis dada. $\square$

Observación: Dada $f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$, decimos que $\lim_{x \to \infty} f(x) = \infty$ su para todo $B > 0$ existe $A > 0$ tal que si $|x| > A$ entonces $|f(x)| > B$.