Unidad 7: Vectores
Álgebra y Geometría Analítica

Iker M. Canut

2 de agosto de 2020

$\mathbb{R}^2 = \{(x, y) : x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}\}$: es el conjunto de todos los pares ordenados de números reales.
$\mathbb{R}^n = \{(x_1, ..., x_n) : x_i \in \mathbb{R}, i = 1..n\}$: es el conjunto de todas las n-uplas ordenadas de números reales.

1. Sistema de Coordenaas

1.1. En la Recta

Dada una recta y un punto O llamado **origen** (al cual le corresponde el 0), quedan determinadas **dos semirectas**. Eligiendo arbitrariamente otro punto $P \neq 0$, se le hace corresponder el 1. El segmento $\overline{OP}$ se lo llama **segmento unitario**. El mismo determina la escala, y crea una correspondencia biunívoca entre los puntos de la recta y los números reales. El punto Q ubicado sobre la recta, simétricamente a P respecto del origen, le corresponde el número -1. P está en el **semieje positivo**, Q en el **negativo**.

1.2. En el Plano

Considerando un par de **rectas perpendiculares** (vertical y horizontal), se intersecan en el **origen**. Sobre cada recta se eligen unos puntos P_1 y P_2, los cuales determinan la unidad de medida, la escala. Si ambas son iguales, se llama **sistema de ejes cartesianos ortogonales**. Luego, se establece una correspondencia biunívoca entre los puntos de un plano y el conjunto de los pares ordenados de $\mathbb{R}^2$. Sea $P(a, b)$ un punto, a es la abscisa y b la ordenada de P.

1.3. En el Espacio

Consideramos 3 rectas que no están en el mismo plano, perpendiculares dos a dos entre si, que se cortan en el origen. Nuevamente tenemos P_1, P_2 y P_3. Los 3 planos (XY, YZ y XZ), forman 8 octantes. Luego, se establece una correspondencia biunivoca entre los puntos del espacio y las ternas de números reales: Si trazamos por P el plano paralelo a YZ, corta al eje x en un solo punto. Análogamente, trazando el plano paralelo a XZ corta en un solo punto al eje y, y el plano paralelo a XY corta en un solo punto al eje z. Obteniendo asi las coordenadas a, b y c de P. Se escribe $P(a, b, c)$.

2. Vectores

Se llama **vector** a todo segmento orientado, es decir, a todo segmento determinado por un par ordenado (O, U) de puntos. El punto O se lo llama origen, y el punto U extremo del vector.
En todo vector se distinguen:

- **Dirección**: dada por la recta que lo contiene (llamada recta sostén), o por una paralela a ella.
- **Sentido**: Dado por la orientación de la flecha. Cada flecha tiene dos sentidos.
- **Módulo**: Es igual a la longitud del segmento orientado. Si el módulo es 0, el vector es un punto, y aunque carece de dirección y sentido, se lo denomina vector nulo.

2.1. Igualdad de Vectores

Dos vectores son iguales cuando ambos tienen módulo 0 o cuando ambos tienen la misma dirección, sentido e iguales modulos. Dado un vector $\overrightarrow{OU}$ y un punto A, se puede asegurar que existe un vector igual a $\overrightarrow{OU}$ con origen en A, es decir, existe un B tal que $\overrightarrow{OU} = \overrightarrow{AB}$. Si dos vectores iguales tienen el mismo origen, se llaman **fijos**. Si están en la misma recta sostén, **deslizantes**, y sinó se llaman **libres**.

2.2. Definiciones

- Se llama **versor** a todo vector de módulo 1.
- Se llama **versor asociado** a $\overrightarrow{u}$ y se simboliza con $\overrightarrow{u_0}$ al versor de igual sentido que $\overrightarrow{u}$.

- Dos vectores son **paralelos** cuando tienen igual dirección (aún con sentidos opuestos).
- Dado el vector $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{AB}$, el vector $\overrightarrow{BA}$ se lo llama **vector opuesto**. Se simboliza $-\overrightarrow{u}$. Si $\overrightarrow{u}$ y $\overrightarrow{v}$ son no nulos, tienen mismo módulo y dirección. El vector nulo es igual a su opuesto.
- Dados dos vectores no nulos $\overrightarrow{u}$ y $\overrightarrow{v}$, se define el **ángulo** entre vecotres, representandolo como $(\overrightarrow{u} \hat{,} \overrightarrow{v})$ al ángulo convexo determinado por dichos vectores cuando sus origenes aplican en un punto comun. Si son paralelos el ángulo es 0° o 180°, dependiendo del sentido.
- $(\overrightarrow{u} \hat{,} \overrightarrow{v}) + (\overrightarrow{-u} \hat{,} \overrightarrow{v}) = 180°$

3. Suma de Vectores

Sean $\overrightarrow{u}$ y $\overrightarrow{v}$, fijando un A, queda determinado un B tal que $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{u}$, que a su vez determina un C tal que $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{v}$. Se llama **suma** de $\overrightarrow{u}$ y $\overrightarrow{v}$ al vector obtenido $\overrightarrow{AC}$, y simbolizamos $\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}$.
Propiedades: Sean $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ y $\overrightarrow{w}$, se verifica que:

- $\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v} = \overrightarrow{v} + \overrightarrow{u}$ (Conmutativa)
- $(\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}) + \overrightarrow{w} = \overrightarrow{u} + (\overrightarrow{v} + \overrightarrow{w})$ (Asociativa)
- $\overrightarrow{u} + \overrightarrow{0} = \overrightarrow{0} + \overrightarrow{u}$ (Existencia de elemento neutro)
- $\overrightarrow{v} + \overrightarrow{-v} = \overrightarrow{-v} + \overrightarrow{v} = \overrightarrow{0}$ (Existencia del elemento opuesto)

Dados $\overrightarrow{u}$ y $\overrightarrow{v}$, se llama **vector diferencia** entre $\overrightarrow{u}$ y $\overrightarrow{v}$, simbolizando $\overrightarrow{u} - \overrightarrow{v}$ a $\overrightarrow{u} + \overrightarrow{-v}$.

4. Producto de un Vector por un Escalar

Sea $\overrightarrow{v}$ un vector y a un escalar cualquiera, se llama **producto del escalar** a **por el vector** $\overrightarrow{v}$ y se simboliza $a \cdot \overrightarrow{v}$ al vector que verifica:

- $|a \cdot \overrightarrow{v}| = |a| \cdot |\overrightarrow{v}|$
- Si $a \neq 0$ y $\overrightarrow{v} \neq \overrightarrow{0}$, entonces $a \cdot \overrightarrow{v}$ tiene la misma dirección que v (son paralelos).
- Si $a > 0$ entonces $a \cdot \overrightarrow{v}$ tiene el mismo sentido que $\overrightarrow{v}$. Si $a < 0$, sentido opuesto.

Propiedades: Cualesquiera sean los escalares a y b, los vectores $\overrightarrow{u}$ y $\overrightarrow{v}$ verifican que:

- $a \cdot (\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}) = a \cdot \overrightarrow{u} + a \cdot \overrightarrow{v}$ (Distributiva respecto a la suma de vectores)
- $(a + b) \cdot \overrightarrow{u} = a \cdot \overrightarrow{u} + b \cdot \overrightarrow{u}$ (Distributiva respecto de la suma deescalares)
- $a \cdot (b \cdot \overrightarrow{u}) = (a \cdot b) \cdot \overrightarrow{u}$ (Homogeneidad o asociativa de los escalares)
- $1 \cdot \overrightarrow{u} = \overrightarrow{u}$ (El escalar 1 es la unidad para el producto)
- $(-1) \cdot \overrightarrow{u} = \overrightarrow{-u}$
- $(-a) \cdot \overrightarrow{u} = -(a \cdot \overrightarrow{u})$
- $a \cdot \overrightarrow{u} = \overrightarrow{0} \Rightarrow a = 0 \vee \overrightarrow{u} = \overrightarrow{0}$
- $\overrightarrow{u_0} = \dfrac{1}{|\overrightarrow{u}|} \cdot \overrightarrow{u}$

5. Condición de Paralelismo entre Vectores

Dos vectores $\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}$ no nulos son paralelos $\iff$ existe un real $a \neq 0$ tal que $\overrightarrow{v} = a \cdot \overrightarrow{u}$
$\Rightarrow$) Supongamos que $\overrightarrow{u} \parallel \overrightarrow{v}$. Pueden tener igual ($a > 0$) o distinto sentido ($a < 0$). Si tienen el mismo sentido, $a = \dfrac{|\overrightarrow{v}|}{|\overrightarrow{u}|}$, si no, $a = -\dfrac{|\overrightarrow{v}|}{|\overrightarrow{u}|}$
$\Leftarrow$) Si existe $a \neq 0 : \overrightarrow{v} = a \cdot \overrightarrow{u}$, por definición de vector por escalar, son paralelos. ■

6. Proyección Ortogonal de un Vector Sobre la Dirección de Otro

Dados los vectores $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{OU}$ y $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{OV}$ no nulos, se llama **vector proyección ortogonal** de $\overrightarrow{u}$ sobre $\overrightarrow{v}$ y se nota $proy_{\overrightarrow{v}}\overrightarrow{u}$ al vector $\overrightarrow{OP}$, donde P es el punto de intersección entre la recta sostén de $\overrightarrow{v}$ y la perpendicular a ella que contiene a U. Si $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{0}$, definimos $proy_{\overrightarrow{v}}\overrightarrow{u} = \overrightarrow{0}$. Al número $p = |\overrightarrow{u}| \cdot \cos(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$ se lo llama **proyección escalar** de $\overrightarrow{u}$ sobre $\overrightarrow{v}$.

7. Producto Escalar

Sean $\overrightarrow{u}$ y $\overrightarrow{v}$ dos vectores cualesquiera, se llama **producto escalar** de $\overrightarrow{u}$ por $\overrightarrow{v}$, simbolizando $\overrightarrow{u} \times \overrightarrow{v}$ al numero real definido por:

$$\overrightarrow{u} \times \overrightarrow{v} \begin{cases} |\overrightarrow{u}| \cdot |\overrightarrow{v}| & \text{cuando } \overrightarrow{u} \neq \overrightarrow{0} \wedge \overrightarrow{v} \neq 0 \\ 0 & \text{cuando } \overrightarrow{u} = \overrightarrow{0} \vee \overrightarrow{v} = \overrightarrow{0} \end{cases}$$

Luego, $\overrightarrow{u} \times \overrightarrow{u} = |\overrightarrow{u}|^2$, es decir "El producto escalar entre $\overrightarrow{u}$ y $\overrightarrow{u}$ es igual al módulo de $\overrightarrow{u}$ al cuadrado".
Propiedades: Sean los vectores $\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}$ y el escalar a, se verifica que:

- $\overrightarrow{u} \times \overrightarrow{v} = \overrightarrow{v} \times \overrightarrow{u}$ (Conmutativa)
- $\overrightarrow{u} \times (\overrightarrow{v} + \overrightarrow{w}) = \overrightarrow{u} \times \overrightarrow{v} + \overrightarrow{u} \times \overrightarrow{w}$ (Distributiva)
- $a \cdot (\overrightarrow{u} \times \overrightarrow{v}) = (a \cdot \overrightarrow{u}) \times \overrightarrow{v} = \overrightarrow{u} \times (a \cdot \overrightarrow{v})$
- $\overrightarrow{u} \times \overrightarrow{u} \geq 0$, valiendo la igualdad si y solo si $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{0}$

Sean $\overrightarrow{u}$ y $\overrightarrow{v}$ no nulos, decimos que $\overrightarrow{u}$ es **perpendicular** a $\overrightarrow{v}$, $\overrightarrow{u} \perp \overrightarrow{v}$, si y solo si $(\overrightarrow{u} \widehat{,} \overrightarrow{v}) = 90°$. Luego $\overrightarrow{u} \perp \overrightarrow{v} \iff \overrightarrow{u} \times \overrightarrow{v} = 0$

Además, $proy_{\overrightarrow{v}}\overrightarrow{u} = (\overrightarrow{u} \times \overrightarrow{v_0}) \cdot \overrightarrow{v_0} = p \cdot \overrightarrow{v_0}$

8. Descomposición de un Vector

Notamos con $\mathbb{V}_1, \mathbb{V}_2$ y $\mathbb{V}_3$ al conjunto de los vectores de una recta, un plano y del espacio.

8.1. En una Recta

Dado $\overrightarrow{u}$ no nulo, cualquier otro vector $\overrightarrow{v}$ de $\mathbb{V}_1$ se puede expresar de manera única como $\overrightarrow{v} = \alpha \cdot \overrightarrow{u}$. A esto se lo llama **descomposición** de $\overrightarrow{v}$ *en la base formada por* $\overrightarrow{u}$. Y a es la **componente escalar** de $\overrightarrow{v}$ *en la base formada por* $\overrightarrow{u}$. Luego, se establece una relación biunívoca entre vectores de $\mathbb{V}_1$ y $\mathbb{R}$.

8.2. En el Plano

Sean dos vectores $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{OU}$ y $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{OV}$, no nulos ni paralelos, cualquier otro vector $\overrightarrow{w} = \overrightarrow{OW}$ puede escribirse como $\overrightarrow{w} = a \cdot \overrightarrow{u} + b \cdot \overrightarrow{v}$ (trazando rectas paralelas a los vectores se determinan respectivamente los puntos A y B que son respectivamente paralelos a $\overrightarrow{u}$ y $\overrightarrow{v}$, i.e existen unicos a y b tales que $\overrightarrow{OA} = a \cdot \overrightarrow{u}$ y $\overrightarrow{OB} = b \cdot \overrightarrow{v}$). Luego, $\overrightarrow{u}$ y $\overrightarrow{v}$ constituyen una base para los vectores de un plano, estableciendo asi una correspondencia biunívoca entre $\mathbb{V}_2$ y $\mathbb{R}^2$. Por ejemplo, a $\overrightarrow{w}$ le corresponde el par ordenado (a, b), que son los únicos escalares que permiten expresar a $\overrightarrow{w}$ como combinación lineal de los vectores en la base dada. Obviamente si se cambia la base, los escalares también cambian.

En general el vector $a_1 \cdot \overrightarrow{v}_1 + a_2 \cdot \overrightarrow{v}_2 + ... + a_n \cdot \overrightarrow{v}_n$ se llama **combinación lineal** de los vectores $\overrightarrow{v}_1, \overrightarrow{v}_2, ..., \overrightarrow{v}_n$ con los escalares $a_1, a_2, ..., a_n$.

8.3. En el Espacio

Dados 3 vectores $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{OU}$, $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{OV}$, $\overrightarrow{w} = \overrightarrow{OW}$, no nulos ni paralelos a un mismo plano. Sea un vector $\overrightarrow{x} = \overrightarrow{OX}$, si por dicho punto trazamos una recta paralela a $\overrightarrow{w}$, esta corta al plano determinado por $\overrightarrow{u}$ y $\overrightarrow{v}$ en un punto llamado M. Luego $\overrightarrow{OM} = a \cdot \overrightarrow{u} + b \cdot \overrightarrow{v}$. Por otra parte, $\overrightarrow{x} = \overrightarrow{OM} + \overrightarrow{MX}$, y $\overrightarrow{MX} = \gamma \cdot \overrightarrow{w}$, entonces $\overrightarrow{x} = a \cdot \overrightarrow{u} + b \cdot \overrightarrow{v} + \gamma \cdot \overrightarrow{w}$. Luego, de fijada la base, queda establecida una relación biunívoca entre los vectores de $\mathbb{V}_3$ y las ternas ordenadas de $\mathbb{R}^3$.

9. Versores Fundamentales. Descomposición Canónica

Dado un sistema de ejes cartesianos ortogonales en el plano (O, x, y), llamamos **versores fundamentales** y simbolizamos $\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}$ a los versores cuyas direcciones y sentidos son los de los semiejes coordenados positivos x e y respectivamente. Dado un punto $V(v_1, v_2)$, queda determinado un $\overrightarrow{OV}$. Si trazamos paralelas a los ejes sobre V, se obtienen los puntos $A(v_1, 0)$ y $B(0, v_2)$. Luego $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} = v_1 \cdot \overrightarrow{i} + v_2 \cdot \overrightarrow{j}$. Esto se llama **descomposición canónica** de $\overrightarrow{v}$ en la base $\{\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\}$. Luego escribimos $\overrightarrow{v} = v_1 \cdot \overrightarrow{i} + v_2 \cdot \overrightarrow{j} = (v_1, v_2)$. Análogamente para el espacio.

- Las componentes de $\overrightarrow{i}$ son $(1, 0, 0)$, ya que $\overrightarrow{i} = 1 \cdot \overrightarrow{i} + 0 \cdot \overrightarrow{j} + 0 \cdot \overrightarrow{k}$
- Sea $\overrightarrow{u} = (u_1, u_2, u_3)$ y $\overrightarrow{v} = (v_1, v_2, v_3)$, entonces $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{v} \iff u_i = v_i,\ \forall i$
- $\overrightarrow{v} = (\overrightarrow{v} \times \overrightarrow{i}) \cdot \overrightarrow{i} + (\overrightarrow{v} \times \overrightarrow{j}) \cdot \overrightarrow{j} + (\overrightarrow{v} \times \overrightarrow{k}) \cdot \overrightarrow{k}$. Recordar que $v_1 = \overrightarrow{v} \cdot \overrightarrow{i}$

10. Operaciones por Componentes

- $\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v} = u_1 \cdot \overrightarrow{i} + u_2 \cdot \overrightarrow{k} + u_3 \cdot \overrightarrow{k} + v_1 \cdot \overrightarrow{i} + v_2 \cdot \overrightarrow{j} + v_3 \cdot \overrightarrow{k} = (u_1 + v_1) \cdot \overrightarrow{i} + (u_2 + v_2) \cdot \overrightarrow{j} + (u_3 + v_3) \cdot \overrightarrow{k}$
  $\therefore\ \overrightarrow{u} + \overrightarrow{v} = (u_1 + v_1, u_2 + v_2, u_3 + v_3)$
- $a \cdot \overrightarrow{u} = a \cdot (u_1 \cdot \overrightarrow{i} + u_2 \cdot \overrightarrow{k} + u_3 \cdot \overrightarrow{k}) = a \cdot u_1 \cdot \overrightarrow{i} + a \cdot u_2 \cdot \overrightarrow{k} + a \cdot u_3 \cdot \overrightarrow{k}$
  $\therefore\ a \cdot \overrightarrow{u} = (a \cdot u_1, a \cdot u_2, a \cdot u_3)$
- $\overrightarrow{u} \times \overrightarrow{v} = (u_1 \cdot \overrightarrow{i} + u_2 \cdot \overrightarrow{j}) \times (v_1 \cdot \overrightarrow{i} + v_2 \cdot \overrightarrow{j})$
  $= (u_1 \cdot \overrightarrow{i}) \times (v_1 \cdot \overrightarrow{i}) + (u_1 \cdot \overrightarrow{i}) \times (v_2 \cdot \overrightarrow{j}) + (u_2 \cdot \overrightarrow{j}) \times (v_1 \cdot \overrightarrow{i}) + (u_2 \cdot \overrightarrow{j}) \times (v_2 \cdot \overrightarrow{j})$
  $= u_1 \cdot v_1 \cdot (\overrightarrow{i} \times \overrightarrow{i}) + u_1 \cdot v_2 \cdot (\overrightarrow{i} \times \overrightarrow{j}) + u_2 \cdot v_1 \cdot (\overrightarrow{j} \times \overrightarrow{i}) + u_2 \cdot v_2 \cdot (\overrightarrow{j} \times \overrightarrow{j})$
  $= u_1 \cdot v_1 \cdot 1 + u_1 \cdot v_2 \cdot 0 + u_2 \cdot v_1 \cdot 0 + u_2 \cdot v_2 \cdot 1 = u_1 \cdot v_1 + u_2 \cdot v_2$
  $\therefore \overrightarrow{u} \times \overrightarrow{v} = u_1 \cdot v_1 + u_2 \cdot v_2 + u_3 \cdot v_3$

10.1. Consecuencias inmediatas

- Del paralelismo de vectores, surge que si dos vectores (sin componentes nulas) son paralelos, entonces $\dfrac{v_1}{u_1} = \dfrac{v_2}{u2} = \dfrac{v_3}{u3} = a$. Si $a > 0$ entonces tienen el mismo sentido. Si $a < 0$, opuesto.
- Si $\overrightarrow{u} = (u_1, u_2, u_3)$, sabiendo que $\overrightarrow{u} \times \overrightarrow{u} = |u|^2$, entonces $|u| = \sqrt{u_1^2 + u_2^2 + u_3^2}$.
- $\overrightarrow{-u} = (-u_1, -u_2, -u_3)$ y $\overrightarrow{u_0} = \dfrac{1}{|\overrightarrow{u}|} \cdot \overrightarrow{u} = \left(\dfrac{u_1}{\sqrt{u_1^2 + u_2^2 + u_3^2}}, \dfrac{u_2}{\sqrt{u_1^2 + u_2^2 + u_3^2}}, \dfrac{u_3}{\sqrt{u_1^2 + u_2^2 + u_3^2}} \right)$.
- $\cos(\overrightarrow{u} \hat{,} \overrightarrow{v}) = \dfrac{\overrightarrow{u} \times \overrightarrow{v}}{|\overrightarrow{u}| \cdot |\overrightarrow{v}|} = \dfrac{u_1 \cdot v_1 + u_2 \cdot v_2 + u_3 \cdot v_3}{\sqrt{u_1^2 + u_2^2 + u_3^2} \cdot \sqrt{v_1^2 + v_2^2 + v_3^2}}$.
- Dos vectores no nulos son perpendiculares si $\overrightarrow{u} \times \overrightarrow{v} = 0$, es decir, si $u_1 \cdot v_1 + u_2 \cdot v_2 + u_3 \cdot v_3 = 0$.
- Sea A el conjunto de todos los vectores paralelos a $\overrightarrow{u}$, y B todos los perpendiculares a $\overrightarrow{u}$, considerando el vector nulo paralelo y perpendicular a cualquier vector, se puede expresar como $A = \{a \cdot \overrightarrow{u},\ \text{con } a \in \mathbb{R}\}$ y $B = \{(a, b) : \overrightarrow{u} \times (a, b) = 0,\ \text{con } a, b \in \mathbb{R}\} = \{(a, b) : u_1 \cdot a + u_2 \cdot b = 0\}$.

11. Ángulos y Cosenos Directores de un Vector

Sea $\vec{v} = \overrightarrow{OV} = (v_1, v_2)$ no nulo, determina los ángulos $\alpha = (\vec{v} \wedge \vec{i})$ y $\beta = (\vec{v} \wedge \vec{i})$, que llamamos **ángulos directores**. A los cosenos de dichos ángulos, los llamamos **cosenos directores**. Luego,

$$\cos\alpha = \cos(\vec{v} \wedge \vec{i}) = \frac{v_1}{|\vec{v}|}, \qquad \cos\beta = \cos(\vec{v} \wedge \vec{j}) = \frac{v_2}{|\vec{v}|}$$

Y se llega a que

$$(\cos\alpha, \cos\beta) = \left(\frac{v_1}{|\vec{v}|}, \frac{v_2}{|\vec{v}|}\right) = \vec{v_0}$$

Es decir, los cosenos directores son las componentes del versor asociado. Además, $\cos^2\alpha + \cos^2\beta = 1$.

Análogamente, $(\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma) = \left(\frac{v_1}{|\vec{v}|}, \frac{v_2}{|\vec{v}|}, \frac{v_3}{|\vec{v}|}\right) = \vec{v_0}$ y también $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos\gamma = 1$.

12. Problemas

12.1. Componentes de un Vector a partir de dos puntos

Dados $P_0(x_0, y_0, z_0)$ y $P_1(x_1, y_1, z_1)$, si queremos encontrar las componentes de $\overrightarrow{P_0P_1}$, observamos que es equivalente a $\overrightarrow{OP_1} - \overrightarrow{OP_0} = (x_1 - x_0, y_1 - y_0, z_1 - z_0)$

12.2. Coordenadas del Punto Medio entre dos puntos

Comenzando con que $2 \cdot \overrightarrow{P_0M} = \overrightarrow{P_0P_1}$ y operando por componentes, llegamos a que:

$$x = \frac{x_0 + x_1}{2}, \qquad y = \frac{y_0 + y_1}{2}, \qquad z = \frac{z_0 + z_1}{2}$$

13. Orientabilidad

Curve los dedos de la **mano derecha** de tal forma que señalen el sentido de rotación del vector $\vec{i}$ hacia el vector $\vec{j}$, por el camino más corto, entonces el dedo pulgar extendido marcará la dirección del vector producto vectorial $\vec{i} \times \vec{j}$. Luego se dice que es una terna orientada en sentido directo.

14. Producto Vectorial

Fijada una terna $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ y dados $\vec{u}, \vec{v} \in \mathbb{V}_3$, se llama **producto vectorial**: $\vec{u} \wedge \vec{v}$ al vector que:

- Si $\vec{u} \vee \vec{v}$ son nulos, entonces $\vec{u} \wedge \vec{v} = \vec{0}$
- Si no son nulos, entonces
  - $|\vec{u} \wedge \vec{v}| = |\vec{u}| \cdot |\vec{v}| \cdot \sin(\vec{u} \wedge \vec{v})$
  - La dirección es perpendicular a la dirección de $\vec{u}$ y $\vec{v}$.
  - El sentido es tal que la terna $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{u} \wedge \vec{v})$ tenga la misma orientación que $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

14.1. Consecuencias Inmediatas de la Definición

Sean $\vec{u}$ y $\vec{v}$ no nulos, $\vec{u} \wedge \vec{v} = \vec{0} \iff |\vec{u}||\vec{v}| \cdot \sin(\vec{u} \wedge \vec{v}) \iff (\vec{u} \wedge \vec{v}) = 0° \vee 180° \iff \vec{u} \parallel \vec{v}$

$\vec{i} \wedge \vec{i} = \vec{j} \wedge \vec{j} = \vec{k} \wedge \vec{k} = \vec{0}$

$\overrightarrow{i} \wedge \overrightarrow{j} = \overrightarrow{k} \qquad \overrightarrow{j} \wedge \overrightarrow{k} = \overrightarrow{i} \qquad \overrightarrow{k} \wedge \overrightarrow{i} = \overrightarrow{j} \qquad \overrightarrow{i} \wedge \overrightarrow{k} = \overrightarrow{-j} \qquad \overrightarrow{j} \wedge \overrightarrow{i} = \overrightarrow{-k} \qquad \overrightarrow{k} \wedge \overrightarrow{j} = \overrightarrow{-i}$

14.2. Algunas Propiedades del Producto Vectorial

- $\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v} = -(\overrightarrow{v} \wedge \overrightarrow{u})$
- $a \cdot (\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v}) = (a \cdot \overrightarrow{u}) \wedge \overrightarrow{v} = \overrightarrow{u} \wedge (a \cdot \overrightarrow{v})$
- $\overrightarrow{u} \wedge (\overrightarrow{v} + \overrightarrow{w}) = \overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v} + \overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{w}$

14.3. Proucto Vectorial por Componentes

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v} &= (u_1 \cdot \overrightarrow{i} + u_2 \cdot \overrightarrow{j} + u_3 \cdot \overrightarrow{k}) \wedge (v_1 \cdot \overrightarrow{i} + v_2 \cdot \overrightarrow{j} + v_3 \cdot \overrightarrow{k}) \\
&= u_1v_1(\overrightarrow{i} \wedge \overrightarrow{i}) + u_1v_2(\overrightarrow{i} \wedge \overrightarrow{j}) + u_1v_3(\overrightarrow{i} \wedge \overrightarrow{k}) + u_2v_1(\overrightarrow{j} \wedge \overrightarrow{i}) + u_2v_2(\overrightarrow{j} \wedge \overrightarrow{j}) + \\
&\quad u_2v_3(\overrightarrow{j} \wedge \overrightarrow{k}) + u_3v_1(\overrightarrow{k} \wedge \overrightarrow{i}) + u_3v_2(\overrightarrow{k} \wedge \overrightarrow{j}) + u_3v_3(\overrightarrow{k} \wedge \overrightarrow{k}) \\
&= (u_2v_3 - u_3v_2) \cdot \overrightarrow{i} + (u_3v_1 - u_1v_3) \cdot \overrightarrow{j} + (u_1v_2 - u_2v_1) \cdot \overrightarrow{k}
\end{aligned}$$

Para simplificar se puede resolver un determinante. $\begin{vmatrix} \overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k} \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix}$

14.4. Interpretación geométrica del módulo del producto vectorial

El módulo del producto vectorial de dos vectores no nulos ni paralelos es igual al **área del paralelogramo** determinado por ambos vectores:

$$|\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v}| = |\overrightarrow{u}||\overrightarrow{v}| \sin(\overrightarrow{u} \hat{;} \overrightarrow{v}) = |\overrightarrow{u}| \cdot h = \mathcal{A}(ABCD)$$

15. Producto Mixto

Dados $\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w} \in \mathbb{V}_3$, se llama **producto mixto** a $(\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v}) \times \overrightarrow{w}$. El mismo es un número real.

15.1. Interpretación geométrica del módulo del producto mixto

Equivale al volumen del paralelepípedo determinado por los vectores (no coplanares).

$$\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v} \times \overrightarrow{w} = |\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v}||\overrightarrow{w}| \cos(\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v} \hat{;} \overrightarrow{w}) = \mathcal{A}(ABCD) \cdot h = \mathcal{V}$$