Unidad 3: Conjuntos

Iker M. Canut

29 de junio de 2020

1. Teoría de Conjuntos

Conjunto: Colección bien definida de elementos. Los conjuntos se escriben con letras mayúsculas, los elementos con minúsculas.

- $a \in A$: El elemento a **pertenece** al conjunto A.
- $a \notin A$: El elemento a **no pertenece** al conjunto A.

Definimos un conjunto por **extensión** si enumeramos todos los elementos que pertenecen. Definimos un conjunto por **comprensión** si damos una caracteristica, una ley que define si un elemento pertenece o no al conjunto.

El universo en el cual estan todos los elementos, se lo denomina **universal**, $\mathbb{U}$.

....

- C es un **subconjunto** de $D \iff C \subseteq D \iff \forall x[x \in C \Rightarrow x \in D]$
- $C \nsubseteq D \iff \exists x[x \in C \wedge x \notin D]$
- $C \subseteq D \Rightarrow |C| \leq |D|$

- C es un **subconjunto propio** de $D \iff C \subset D \iff C \subseteq D \wedge C \neq D$
- $C \not\subset D \iff C \nsubseteq D \vee C = D$
- $C \subset D \Rightarrow |C| < |D|$

- C es **igual** a $D \iff C = D \iff C \subseteq D \wedge D \subseteq C \iff \forall x[x \in C \iff x \in D]$
- C es **distinto** a $D \iff C \neq D \iff C \nsubseteq D \vee D \nsubseteq C$

....

Sean $A, B, C \subseteq U$

- Si $A \subseteq B \wedge B \subseteq C \Rightarrow A \subseteq C$
- Si $A \subset B \wedge B \subseteq C \Rightarrow A \subset C$
- Si $A \subseteq B \wedge B \subset C \Rightarrow A \subset C$
- Si $A \subset B \wedge B \subset C \Rightarrow A \subset C$

....

Se llama **conjunto vacio**, $\emptyset$ o $\{\}$ al conjunto que no tiene elementos. $|\emptyset| = 0$

Para cualquier $\mathbb{U}$, $A \subseteq U$ se tiene que $\emptyset \subseteq A$. Y si $a \neq \emptyset \Rightarrow \emptyset \subset A$

....

Dado un conjunto A, se llama **conjunto de partes** de A al conjunto cuyos elementos son todos los subconjuntos de A. $P(A) = \{F.F \subseteq A\}$

....

2. Operaciones de Conjuntos

- **Unión** de A y B: Es el conjunto cuyos elemento pertenecen a A o a B.
  $A \cup B = \{x \in \mathbb{U} . x \in A \vee x \in B\}$

  ....

- **Intersección** de A y B: Es el conjunto cuyos elementos pertenecen a A y a B.
  $A \cap B = \{x \in \mathbb{U} . x \in A \wedge x \in B\}$
  Dos conjuntos son **disjuntos** si la intersección es el conjunto vacio.
  A y B son disjuntos $\iff A \cup B = A \triangle B$

  ....

- **Diferencia** de A y B: Es el conjunto de elementos que pertenecen a A y no a B.
  $A - B = \{x \in \mathbb{U} . x \in A, x \notin B\} = A \cap \overline{B}$

  - $A - A = \emptyset$
  - $A - \emptyset = A$
  - $\emptyset - A = \emptyset$
  - $(A - B = B - A) \iff A = B$
  - $(A - B) - C = A - (B - C)$

  ....

- **Complemento** de B respecto de A: es la diferencia.
  $\complement_A B = A - B = \{x . x \in A, x \notin B\}$
  Si tomamos $A = \mathbb{U}$, notamos $\complement_U B = \complement B = \overline{B}$

  - $\complement \mathbb{U} = \emptyset$
  - $\complement(\complement A) = A$
  - $\complement(A \cap B) = \complement A \cup \complement B$
  - $\complement \emptyset = \mathbb{U}$
  - $\complement(A \cup B) = \complement A \cap \complement B$
  - $A \subseteq B \Rightarrow A \cup \complement_B A = B$

  ....

- **Diferencia Simetrica** de A y B: son los elementos que pertenecen a A o a B, pero no a ambos.

$$
\begin{aligned}
A \triangle B &= \{x \in \mathbb{U} . x \in A \veebar x \in B\} \\
&= (A \cup B) - (A \cap B) = (A \cap \overline{B}) \cup (\overline{A} \cap B) \\
&= (A \cup B) \cap \overline{(A \cap B)} = (A - B) \cup (B - A)
\end{aligned}
$$

  ....

- **Producto Cartesiano** de A y B: es el conjunto de pares ordenados (a, b) tal que la primer componente pertenece a A y la segunda pertenece a B.
  $A \times B = \{(a, b) . a \in A, b \in B\}$
  Si $A = B$ se escribe $A \times A = A^2$

  ....

3. Generalizaciones

Sean $E_1, E_2, ...E_n \subseteq U$ se llama:

- **unión** de $E_1, E_2, ...E_n$ al conjunto $E_1 \cup E_2 \cup ... \cup E_n = \bigcup_{i \in 1}^{n} E_i = \{x \in \mathbb{U}. x \in E_i, \text{para algun } i = 1..n\}$

- **intersección** de $E_1, E_2, ...E_n$ al conjunto $E_1 \cap E_2 \cap ... \cap E_n = \bigcap_{i \in 1}^{n} E_i = \{x \in \mathbb{U}. x \in E_i, \forall i = 1..n\}$

....

Sea I un conjunto no vacio, U el conjunto universal,
$\forall i \in I$ sea $A_i \subseteq \mathbb{U}$. Cada i es un indice, e I es el conjunto de indices.

- $\bigcup_{i \in I} A_i = \{x \in \mathbb{U}. x \in A_i, \text{ para algun } i \in I\}$
- $\bigcap_{i \in I} A_i = \{x \in \mathbb{U}. x \in A_i, \text{ para todo } i \in I\}$

Equivalentemente,

- $x \in \bigcup_{i \in I} A_i \iff \exists i \in I. (x \in A_i)$
- $x \in \bigcap_{i \in I} A_i \iff \forall i \in I. (x \in A_i)$

....

- $\overline{\bigcup_{i \in I} A_i} = \bigcap_{i \in I} \overline{A_i}$
- $\overline{\bigcap_{i \in I} A_i} = \bigcup_{i \in I} \overline{A_i}$

....

4. Leyes

1.	$\overline{\overline{A}} = A$		Doble negación
2.	$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$	$\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$	De Morgan
3.	$A \cup B = B \cup A$	$A \cap B = B \cap A$	Conmutativa
4.	$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$	$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$	Asociativa
5.	$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$	$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$	Distributiva
6.	$A \cup A = A$	$A \cap A = A$	Idempotente
7.	$A \cup \emptyset = A$	$A \cap \mathbb{U} = A$	Neutro
8.	$A \cup \overline{A} = \mathbb{U}$	$A \cap \overline{A} = \emptyset$	Inverso
9.	$A \cup \mathbb{U} = \mathbb{U}$	$A \cap \emptyset = \emptyset$	Dominación
10.	$A \cup (A \cap B) = A$	$A \cap (A \cup B) = A$	Absorción

. . . .

5. Cardinalidad

La cardinalidad de un conjunto finito es la cantidad de elementos que contiene.

- $|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$
- $|\overline{A} \cap \overline{B} \cap \overline{C}| = |\overline{A \cup B \cup C}| = |U| = |A \cup B \cup C|$
  $= |U| - |A| - |B| - |C| + |A \cap B| + |A \cap C| + |B \cap C| - |A \cap B \cap C|$

6. Dual

Para conseguir el dual de un conjunto, se reemplazan:

- $\emptyset$ por $\mathbb{U}$ y $\mathbb{U}$ por $\emptyset$.
- $\cup$ por $\cap$ y $\cap$ por $\cup$.