Algebra y Geometría II 2018

UNIDAD 5: Geometría analítica del plano.

Apunte del Prof. Francisco Vittone para la materia
GEOMETRÍA I - Licenciatura y Profesorado en Matemática - Año 2016

Estudio de la Ecuación General de Segundo Grado

1. Ecuación general de segundo grado en dos variables

En la primer sección vimos que una ecuación general de primer grado en las variables x e y, es decir una ecuación de la forma $ax + by + c = 0$, es siempre la ecuación de una recta en el plano si $(a, b) \neq \overline{0}$.

Nuestro objetivo es determinar qué lugar geométrico del plano determina la ecuación general de segundo grado, es decir, una ecuación de la forma

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0. \tag{1}$$

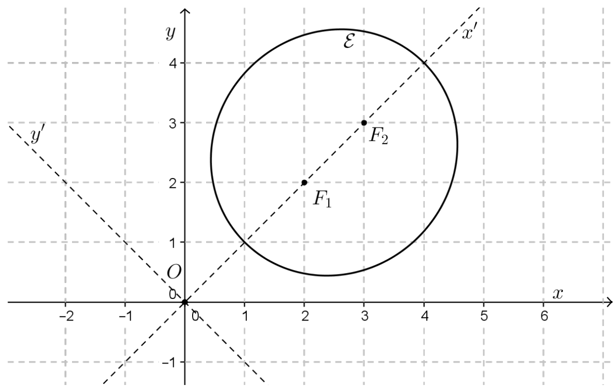
Cómo hemos visto en la sección anterior, siempre que $B = 0$ (1) es la ecuación de una cónica o alguno de sus casos degenerados. El término Bxy se denomina **término rectangular** de la ecuación.

Veremos ahora que siempre es posible transformar la ecuación (1) en una ecuación sin término rectangular, y por lo tanto cualquier ecuación completa de segundo grado en dos variables representará siempre una cónica.

Para ello necesitamos estudiar cómo cambian las coordenadas de un punto cuando cambiamos el sistema de coordenadas que las determina.

Comenzamos analizando un ejemplo interesante. En la sección anterior hemos obtenido las ecuaciones de las distintas secciones cónicas en un sistema de coordenadas dado, siempre que sus ejes focales o su directriz fuesen paralelos a alguno de los ejes.

Consideremos ahora una elipse $\mathcal{E}$ cuyos focos son los puntos F_1 y F_2 de coordenadas $(2, 2)$ y $(3, 3)$ en un sistema Oxy dado y $a = \frac{3}{2}\sqrt{2}$ como en la figura.



Queremos encontrar sus ecuaciones en este sistema de coordenadas. Si planteamos las condiciones que deben verificar las coordenadas (x, y) de un punto del plano para pertenecer a $\mathcal{E}$ en términos de distancia, las ecuaciones que obtengamos pueden llegar a ser bastante complicadas. Sin embargo, si consideramos un nuevo sistema de coordenadas centrado en el mismo punto O y tal que el eje x' sea el eje focal de la elipse $\mathcal{E}$ y el eje y' sea una recta perpendicular a éste, la ecuación resulta relativamente sencilla.

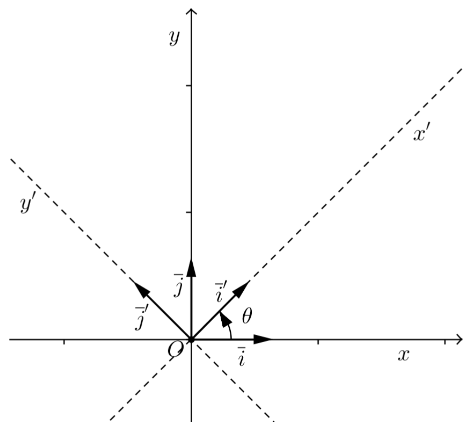
En efecto, en el sistema $Ox'y'$, los focos tienen coordenadas $F_1(2\sqrt{2}, 0)$ y $F_2(3\sqrt{2}, 0)$. Por lo tanto el centro tiene coordenadas $C(\frac{5}{2}\sqrt{2}, 0)$, y entonces $c = \sqrt{2}/2$ y $b = \sqrt{a^2 - c^2} = \sqrt{4} = 2$. La ecuación de $\mathcal{E}$ en el sistema $Ox'y'$ es entonces

$$\frac{2(x' - \frac{5}{2}\sqrt{2})^2}{9} + \frac{y'^2}{4} = 1.$$

Obviamente, estamos interesados en encontrar la ecuación de $\mathcal{E}$ en el sistema Oxy. Pero ahora el problema se limita a determinar de qué manera se relacionan las coordenadas de un punto en el sistema Oxy y en el sistema $Ox'y'$. Analizaremos esto en general y volveremos más adelante a este ejemplo.

Consideremos entonces dos sistemas de coordenadas en el plano Oxy y $Ox'y'$ con el mismo origen O y con la misma escala. Supondremos siempre que el semieje positivo en x' está contenido en el primer cuadrante del sistema Oxy y que el semeje positivo de y' está contenido en el segundo cuadrante del sistema Oxy. Obviamente supondremos además que los ejes x e y son distintos de los ejes x' e y'. De esta manera, el semieje positivo de las x forma con el semieje positivo en x' un ángulo agudo θ. Es decir, θ es el ángulo que debemos girar el semieje positivo de las x alrededor de O en sentido antihorario para hacerlo coincidir con el semieje positivo de las x'.

Sean P_1 y P_2, y P_1' y P_2' los puntos que definen la escala en el eje x, el eje y, el eje x' y el eje y' respectivamente. Entonces los versores canónicos para el sistema Oxy son $\overline{i} = \overrightarrow{OP_1}$ y $\overline{j} = \overrightarrow{OP_2}$ y los versores canónicos para el sistema $Ox'y'$, son $\overline{i'} = \overrightarrow{OP_1'}$ y $\overline{j'} = \overrightarrow{OP_2'}$.



Observemos que independientemente de los sistemas coordenados que elegimos, $\{\overline{i}, \overline{j}\}$ y $\{\overline{i'}, \overline{j'}\}$ son bases ortonormales de los vectores del plano.

Luego tendremos por ejemplo $\overline{i'} = a\overline{i} + b\overline{j}$.

Si hacemos el producto escalar de ambos miembros de la igualdad anterior con el versor $\overline{i}$ obtenemos

$$\overline{i'} \times \overline{i} = a \ \Rightarrow\ a = \cos(\widehat{\overline{i'}, \overline{i}}) = \cos\theta$$

De manera análoga, haciendo el producto escalar con $\overline{j}$ resulta

$$b = \overline{i'} \times \overline{j} = \cos(\widehat{\overline{i'}, \overline{j}}) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \operatorname{sen}\theta.$$

Concluimos por lo tanto que

$$\overline{i'} = \cos\theta\,\overline{i} + \operatorname{sen}\theta\,\overline{j} \tag{2}$$

De manera análoga, como $(\widehat{\overline{j'}, \overline{i}}) = \frac{\pi}{2} + \theta$ y $(\widehat{\overline{j'}, \overline{j}}) = \theta$ resulta $\overline{j'} = \cos\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right)\,\overline{i} + \cos(\theta)\,\overline{j}$, o sea

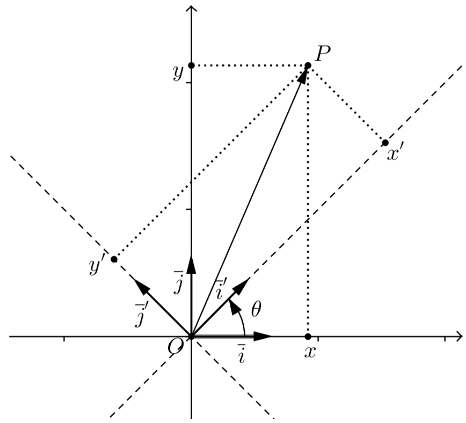
$$\overline{j'} = -\operatorname{sen}\theta\,\overline{i} + \cos\theta\,\overline{j} \tag{3}$$

Podemos ahora expresar los vectores $\overline{i}$ y $\overline{j}$ en la base $\{\overline{i'}, \overline{j'}\}$ y obtener:

$$\overline{i} = \cos\theta\,\overline{i'} + \cos\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right)\,\overline{j'} = \cos\theta\,\overline{i'} - \operatorname{sen}\theta\,\overline{j'} \tag{4}$$

$$\overline{j} = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)\,\overline{i'} + \cos\theta\overline{j'} = \operatorname{sen}\theta\,\overline{i'} + \cos\theta\,\overline{j'} \tag{5}$$

Consideremos ahora un punto P del plano. Supongamos que P tiene coordenadas (x, y) en el sistema Oxy y tiene coordenadas (x', y') en el sistema $Ox'y'$.



Entonces las componentes del vector $\overrightarrow{OP}$ en las bases $\{\bar{i}, \bar{j}\}$ y $\{\bar{i}', \bar{j}'\}$ serán las coordenadas de P en los sistemas Oxy y $Ox'y'$ respectivamente. Es decir,

$$\overrightarrow{OP} = x\,\bar{i} + y\,\bar{j} = x'\,\bar{i}' + y'\,\bar{j}'. \tag{6}$$

Reemplazando con (2) y (3) en (6), tenemos:

$$x\,\bar{i} + y\,\bar{j} = x'\,(\cos\theta\,\bar{i} + \operatorname{sen}\theta\,\bar{j}) + y'\,(-\operatorname{sen}\theta\,\bar{i} + \cos\theta\,\bar{j}) = (x'\cos\theta - y'\operatorname{sen}\theta)\,\bar{i} + (x'\operatorname{sen}\theta + y'\cos\theta)\,\bar{j}$$

Luego debe ser

$$\boxed{\begin{cases} x = x'\cos\theta - y'\operatorname{sen}\theta \\ y = x'\operatorname{sen}\theta + y'\cos\theta \end{cases}} \tag{7}$$

Si ahora reemplazamos (4) y (5) en (6) tenemos

$$x'\,\bar{i}' + y'\,\bar{j}' = x\,(\cos\theta\,\bar{i}' - \operatorname{sen}\theta\,\bar{j}') + y\,(\operatorname{sen}\theta\,\bar{i}' + \cos\theta\,\bar{j}') = (x\cos\theta + y\operatorname{sen}\theta)\,\bar{i}' + (-x\operatorname{sen}\theta + y\cos\theta)\,\bar{j}'.$$

y por lo tanto

$$\boxed{\begin{cases} x' = x\cos\theta + y\operatorname{sen}\theta \\ y' = -x\operatorname{sen}\theta + y\cos\theta \end{cases}} \tag{8}$$

Las ecuaciones (7) y (8) se denominan ecuaciones del **cambio de coordenadas por rotación de ejes**. A partir de (7) obtenemos las coordenadas de P en el sistema Oxy si conocemos sus coordenadas en el sistema $Ox'y'$ y con (8) obtenemos las coordenadas en $Ox'y'$ si conocemos las coordenadas en Oxy.

Analicemos nuevamente nuestro ejemplo. Vimos que en el sistema $Ox'y'$ la elipse $\mathcal{E}$ tiene ecuación

$$\frac{2(x' - \frac{5}{2}\sqrt{2})^2}{9} + \frac{y'^2}{4} = 1.$$

Queremos escribir esta ecuación en las coordenadas del sistema Oxy. Para ello necesitamos expresar (x', y') en función de (x, y) y reemplazarlo en la ecuación de $\mathcal{E}$. Necesitaremos utilizar las ecuaciones (8). Para ello observemos que el ángulo que debemos rotar el semieje positivo de las x para hacerlo coincidir con el semieje positivo de las x' es $\theta = 45°$. Reemplazando en (8) obtenemos

$$\begin{cases} x' = x\dfrac{\sqrt{2}}{2} + y\dfrac{\sqrt{2}}{2} \\ \\ y' = -x\dfrac{\sqrt{2}}{2} + y\dfrac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}$$

Luego

$$\begin{aligned} \left(x' - \frac{5}{2}\sqrt{2}\right)^2 &= x'^2 - 5\sqrt{2}x' + \frac{25}{2} = \left(x\frac{\sqrt{2}}{2} + y\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 - 5\sqrt{2}\left(x\frac{\sqrt{2}}{2} + y\frac{\sqrt{2}}{2}\right) + \frac{25}{2} \\ &= \frac{1}{2}x^2 + xy + \frac{1}{2}y^2 - 5x - 5y + \frac{25}{2} \\ y'^2 &= \left(-x\frac{\sqrt{2}}{2} + y\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 = \frac{1}{2}x^2 - xy + \frac{1}{2}y^2, \end{aligned}$$

con lo cual la ecuación de $\mathcal{E}$ en el sistema original Oxy es

$$\frac{17}{72}x^2 - \frac{1}{36}xy + \frac{17}{72}y^2 - \frac{10}{9}x - \frac{10}{9}y + \frac{25}{9} = 1 \iff \boxed{17x^2 - 2xy + 17y^2 - 80x - 80y + 128 = 0}$$

De cualquier manera, en general tenemos la situación inversa. Sabemos que un lugar geométrico está descrito por la ecuación (1)

$$\boxed{Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0} \tag{9}$$

y queremos saber de qué lugar geométrico se trata.

Ya hemos señalado que elegiremos un sistema de coordenadas adecuado de modo que el término Bxy desaparezca de la ecuación.

Consideremos entonces el lugar geométrico $\mathcal{L}$ cuya ecuación es la ecuación (1), dada en un sistema de coordenadas fijo Oxy. Supongamos que decidimos trabajar en un sistema de coordenadas $Ox'y'$ de modo que el semieje positivo de las x' se obtiene de rotar el semieje positivo de las x un ángulo θ. Entonces las coordenadas (x', y') de un punto en este nuevo sistema se relacionan con las coordenadas (x, y) del mismo punto en el sistema original según las ecuaciones (7) y (8). En este caso usaremos la primera, que recordamos a continuación:

$$\begin{cases} x = x'\cos\theta - y'\operatorname{sen}\theta \\ y = x'\operatorname{sen}\theta + y'\cos\theta \end{cases}$$

Entonces la ecuación de $\mathcal{L}$ en el sistema $Ox'y'$ es

$$\begin{aligned} A(x'\cos\theta - y'\operatorname{sen}\theta)^2 &+ B(x'\cos\theta - y'\operatorname{sen}\theta)(x'\operatorname{sen}\theta + y'\cos\theta) + \\ &+ C(x'\cos\theta + y'\operatorname{sen}\theta)^2 + D(x'\cos\theta - y'\operatorname{sen}\theta) + E(x'\operatorname{sen}\theta + y'\cos\theta) + F = 0 \end{aligned}$$

Queremos elegir el ángulo agudo θ de modo que el término rectangular en esta ecuación se anule. Si aplicamos la propiedad distributiva en la ecuación anterior, vemos que el coeficiente que acompaña al término rectangular es

$$B' = B(\cos^2\theta - \operatorname{sen}^2\theta) + 2(C-A)\cos\theta \operatorname{sen}\theta = B\cos(2\theta) + (C-A)\operatorname{sen}(2\theta)$$

Tenemos entonces:

- Si $C - A = 0$, entonces $\left[\ B' = 0 \ \Leftrightarrow\ 2\theta = \frac{\pi}{2} \ \Leftrightarrow\ \theta = \frac{\pi}{4}\ \right]$.
- Si $C - A \neq 0$, elegimos el único ángulo $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ tal que

  $$\boxed{\tan(2\theta) = \frac{B}{A-C}} \tag{10}$$

  y entonces $B' = 0$.

Observación muy importante! La elección del ángulo θ debe ser exacta. Cualquier pequeño error por redondeo haría que al hacer un cambio de coordenadas el término rectangular no desaparezca. Por lo tanto, en general, no despejamos θ de la ecuación (10), sino que encontramos $\operatorname{sen}(\theta)$ y $\cos(\theta)$ en función de $\tan(2\theta)$ para poder encontrar el cambio de coordenadas que debemos realizar. Será importante recordar las siguientes fórmulas:

$$\boxed{\begin{array}{c} \cos^2 2\theta = \dfrac{1}{1+\tan^2 2\theta} \quad \text{y} \quad sg(\cos(2\theta)) = sg(\tan(2\theta)) \\[2em] \operatorname{sen}^2\theta = \frac{1}{2}(1-\cos 2\theta) \\ \cos^2\theta = \frac{1}{2}(1+\cos 2\theta) \end{array}} \tag{11}$$

Analicemos algunos ejemplos:

Ejemplo 1. Determinaremos qué lugar geométrico $\mathcal{L}$ representa la ecuación

$$x^2 - 2xy + y^2 + 2y - 1 = 0$$

En este caso $A = C = 1$ y $B = -2$. Luego debemos elegir $\theta = \pi/4$ y por lo tanto $\cos\theta = \operatorname{sen}\theta = \sqrt{2}/2$. Aplicaremos entonces el cambio de coordenadas

$$\begin{cases} x = x'\dfrac{\sqrt{2}}{2} - y'\dfrac{\sqrt{2}}{2} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}(x'-y') \\[2em] y = x'\dfrac{\sqrt{2}}{2} + y'\dfrac{\sqrt{2}}{2} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}(x'+y') \end{cases}$$

Tenemos entonces que la ecuación de $\mathcal{L}$ en el nuevo sistema de coordenadas será

$$\frac{1}{2}(x'-y')^2 - 2\frac{1}{2}(x'^2 - y'^2) + \frac{1}{2}(x'+y')^2 + 2\frac{\sqrt{2}}{2}(x'+y') - 1 = 0$$

Distribuyendo, obtenemos que la ecuación de $\mathcal{L}$ es

$$2y'^2 + \sqrt{2}x' + \sqrt{2}y' - 1 = 0$$

y completando cuadrados, resulta

$$\left(y' + \frac{\sqrt{2}}{4}\right)^2 = -\frac{\sqrt{2}}{2}\left(x' - \frac{5}{8}\sqrt{2}\right)$$

Luego $\mathcal{L}$ es una parábola tal que en el sistema $Ox'y'$ tiene vértice $V\left(\frac{5}{8}\sqrt{2}, -\frac{\sqrt{2}}{4}\right)$, parámetro $p = \frac{1}{4}\sqrt{2}$, directriz paralela al eje y' y las ramas apuntan hacia el semieje negativo de x'.

La ecuación de la directriz es $x' = \dfrac{5}{8}\sqrt{2} + \dfrac{\sqrt{2}}{4} = \dfrac{7}{8}\sqrt{2}$ y el foco tiene coordenadas

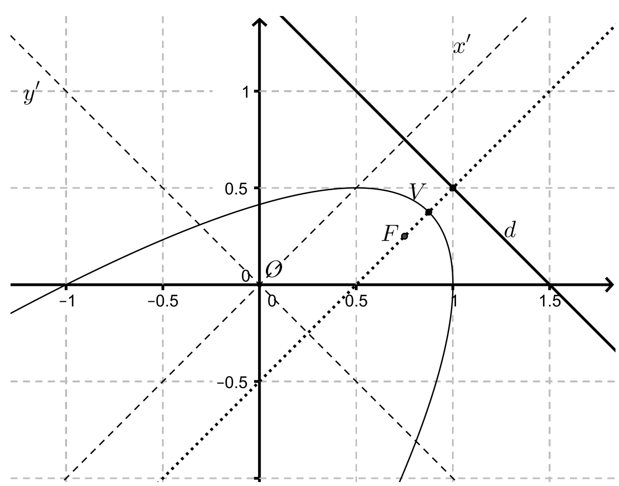
$$F\left(\frac{3}{8}\sqrt{2}, -\frac{\sqrt{2}}{4}\right)$$

en el sistema $O'x'y'$.

Para realizar la gráfica, primero graficamos los nuevos ejes x' e y' y procedemos en este sistema como hicimos en las secciones anteriores.

En este caso, para localizar el vértice V puede ser conveniente encontrar sus coordenadas en el sistema original Oxy. Para ello usamos las ecuaciones (8) para $\theta = \pi/4$ y obtenemos que las coordenadas de V en este sistema son $(\frac{7}{8}, \frac{3}{8})$.

Mostramos la gráfica de $\mathcal{L}$ en el siguiente dibujo:



Ejemplo 2. Consideremos el lugar geométrico cuya ecuación en un sistema de coordenadas Oxy dado es

$$4xy + 3y^2 + 2\sqrt{5}x + 4\sqrt{5}y = 0 \tag{12}$$

En este caso $A = 0$, $B = 4$ y $C = 3$. Por lo tanto $C - A = 3 \neq 0$. En este caso elegimos θ tal que

$$\tan(2\theta) = \frac{B}{A - C} = -\frac{4}{3}$$

Observemos que si utilizamos la calculadora, obtenemos el resultado $\theta \simeq -26,56°$. Por empezar, el ángulo que buscamos es un ángulo entre 0 y $90°$, por lo tanto deberíamos sumarle $90°$ al ángulo obtenido. Pero lo más importante es que NO nos sirve un valor aproximado. Utlizamos las ecuaciones (11) para obtener:

$$\cos^2(2\theta) = \frac{9}{25},\ \cos(2\theta) < 0 \ \Rightarrow\ \cos(2\theta) = -\frac{3}{5}$$

y por lo tanto

$$\cos\theta = \frac{1}{\sqrt{5}},\quad \operatorname{sen}\theta = \frac{2}{\sqrt{5}}$$

En este caso, el cambio de coordenadas que debemos utilizar es

$$\begin{cases} x = x'\dfrac{1}{\sqrt{5}} - y'\dfrac{2}{\sqrt{5}} = \dfrac{1}{\sqrt{5}}(x' - 2y') \\ \\ y = x'\dfrac{2}{\sqrt{5}} + y'\dfrac{1}{\sqrt{5}} = \dfrac{1}{\sqrt{5}}(2x' + y') \end{cases}$$

Reemplazando en (12), distribuyendo y completando cuadrados, observamos que la ecuación de $\mathcal{L}$ en el sistema $Ox'y'$ es

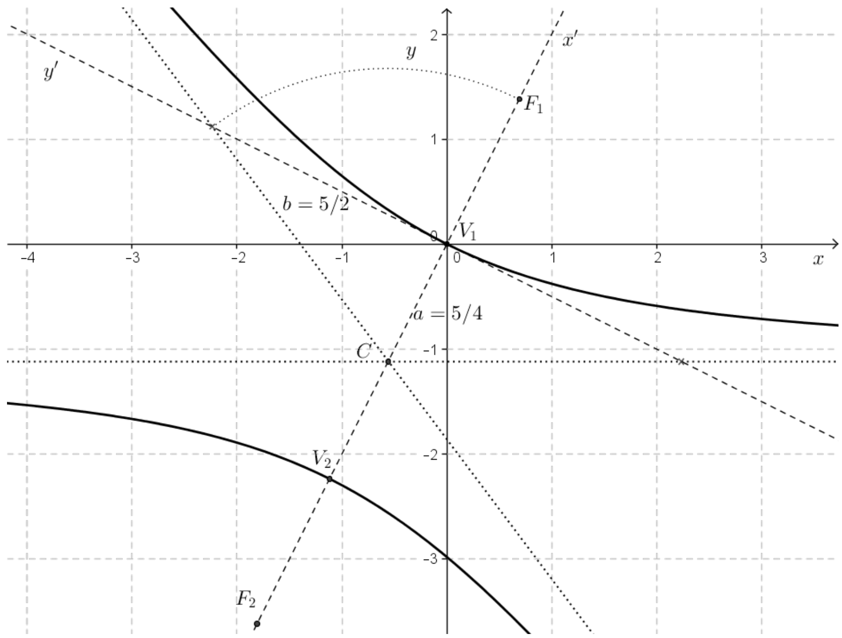
$$\frac{\left(x' + \frac{5}{4}\right)^2}{\left(\frac{5}{4}\right)^2} - \frac{y'^2}{\left(\frac{5}{2}\right)^2} = 1$$

que representa una hipérbola con centro $C\left(-\frac{5}{4}, 0\right)$, eje focal el eje x', $a = \frac{5}{4}$, $b = \frac{5}{2}$ y $c = \frac{5}{4}\sqrt{5}$.

Observemos que los vértices tienen en $Ox'y'$ coordenadas $V_1(0,0)$, $V_2(-\frac{5}{2}, 0)$.

Para realizar su gráfica, primero graficamos los nuevos ejes. De nuevo, no intentamos calcular θ explicitamente, nos basta conocer su seno y su coseno. En fecto, observemos que el versor $\overline{i'} = \cos(\theta)\overline{i} + \operatorname{sen}(\theta)\overline{j}$, o sea que tiene componentes $(1/\sqrt{5}, 2/\sqrt{5})$ en la base canónica $\{\overline{i}, \overline{j}\}$. En este caso es aún más simple, pues tanto el centro como los vértices de la hipérbola tienen coordenadas fáciles de graficar, y como el eje focal es el eje x', éste debe coincidir con la recta que pasa por estos puntos.

La gráfica de la hipérbola se esboza en la siguiente figura.



Finalizaremos esta unidad clasificando qué lugares geométricos pueden ser descritos por una ecuación general de segundo grado.

Ya hemos visto que todas las secciones cónicas admiten una ecuación del tipo (**??**). Pero no necesariamente una ecuación del tipo (**??**) representa una cónica. Por ejemplo $x^2 + y^2 + 2x + 2 = 0$ es equivalente a $(x+1)^2 + y^2 = -1$ y por lo tanto representa el conjunto vacío. O la ecuación $xy = 0$ la satisfacen las coordenadas de todos los puntos de la forma $P(x, 0)$ o $P(0, y)$ y por lo tanto representa la unión de las rectas $x = 0$ e $y = 0$ concurrentes en el origen (o sea, es la unión de los ejes coordenados).

Analizaremos primero cuáles son los posibles lugares geométricos $\mathcal{L}$ descritos por la ecuación sin término rectangular, o sea, ecuaciones de la forma

$$Ax^2 + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0. \tag{13}$$

Si $A \neq 0$ y $C \neq 0$, completando cuadrados la ecuación es equivalente a

$$A(x - x_0)^2 + C(y - y_0)^2 = k$$

poniendo

$$x_0 = -\frac{D}{2A}, \quad y_0 = -\frac{E}{2A}, \quad k = \frac{D^2}{4A} + \frac{E^2}{4C} - F.$$

Debemos analizar qué ocurre con los signos de A, C y k.

Si A y C tienen el mismo signo, o sea $AC > 0$, podemos suponer que son ambos positivos (si no multiplicamos la ecuación original por -1 y renombramos los coeficientes). Entonces tenemos las siguientes opciones:

- Si $A = C$ y $k > 0$, $\mathcal{L}$ es una circunferencia de centro (x_0, y_0) y radio $\sqrt{k/A}$. Si $A \neq C$ y $k > 0$, es una elipse.
- Si $k = 0$, $\mathcal{L}$ es un punto, que tiene coordenadas (x_0, y_0).
- Si $k < 0$, $\mathcal{L} = \emptyset$.

Si A y C tienen signos opuestos, o sea $AC < 0$, entonces

- Si $k \neq 0$, $\mathcal{L}$ es una hipérbola.
- Si $k = 0$, $\mathcal{L}$ son dos rectas que se intersecan en el punto (x_0, y_0).

Analicemos finalmente el caso $AC = 0$, o sea, $A = 0$ o $C = 0$. Supongamos que $A = 0$, el caso $C = 0$ es análogo.

Entonces la ecuación (13) puede escribirse como

$$C(y - y_0)^2 = -Dx + r$$

(quiénes son r e y_0 en este caso?). Luego tenemos

- Si $D \neq 0$, $\mathcal{L}$ representa una parábola de directriz paralela al eje y.
- Si $D = 0$, entonces, si $r > 0$, $\mathcal{L}$ son dos rectas paralelas. Si $r = 0$ $\mathcal{L}$ es una recta, y si $r < 0$,$\mathcal{L} = \emptyset$.

Consideremos ahora la ecuación general completa

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0 \tag{14}$$

y sea $\mathcal{L}$ el lugar geométrico que representa.

Consideremos un nuevo sistema de coordenadas $Ox'y'$ obtenido por rotación de los ejes coordenados de modo que la ecución de $\mathcal{L}$ en este sistema no tiene término rectangular, o sea, es de la forma

$$A'x'^2 + C'y'^2 + D'x' + E'y' + F' = 0 \tag{15}$$

Recordando que las coordenadas (x', y') de un punto se relacionan con sus coordenadas (x, y) por las ecuaciones (7) y (8), si reemplazamos en (15) y comparamos con (14), obtendremos que:

$$A = A' \cos^2 \theta + C' \operatorname{sen}^2 \theta;$$

$$B = 2(A' - C') \cos \theta \operatorname{sen} \theta;$$

$$C = A' \operatorname{sen}^2 \theta + C' \cos^2 \theta.$$

Podemos ahora calcular $AC - \frac{B^2}{4}$ y obtenemos

$$
\begin{aligned}
AC - \frac{B^2}{4} &= (A' \cos^2\theta + C' \operatorname{sen}^2\theta)(A' \operatorname{sen}^2\theta + C' \cos^2\theta) - \frac{1}{4}(2(A' - C')\cos\theta \operatorname{sen}\theta)^2 \\
&= A'^2 \operatorname{sen}^2\theta \cos^2\theta + A'C' \cos^4\theta + C'A' \operatorname{sen}^4\theta + C'^2 \cos^2\theta \operatorname{sen}^2\theta - (A'^2 - 2A'C' + C'^2)\cos^2\theta \operatorname{sen}^2\theta \\
&= A'C' \cos^4\theta + 2A'C' \cos^2\theta \operatorname{sen}^2\theta + AC \operatorname{sen}^4\theta = A'C'(\cos^2\theta + \operatorname{sen}^2\theta)^2 \\
&= A'C'
\end{aligned}
$$

El número $AC - \frac{B^2}{4}$ se denomina **discriminante** de la ecuación (14) y se denota por Δ. En función del análisis anterior hacemos las siguientes definiciones:

Definiciones:

Una ecuación general de segundo grado se denomina:

- de tipo elíptico, si $\Delta > 0$;
- de tipo parabólico, si $\Delta = 0$;
- de tipo hiperbólico, si $\Delta < 0$.

En función del análisis que hemos hecho, y dado que el lugar geométrico $\mathcal{L}$ que describen (14) y (15) es el mismo, concluimos:

1. Si (14) es de tipo elíptico, entonces $\mathcal{L}$ es una elipse, una circunferencia, o el conjunto vacío.
2. Si (14) es de tipo parabólico, entonces $\mathcal{L}$ es una parábola, una recta, un par de rectas paralelas o el conjunto vacío.
3. Si (14) es de tipo hiperbólico, entonces $\mathcal{L}$ es una hipérbola o un par de rectas secantes no paralelas.

1.1. Ejercicios propuestos

1. Consideremos un sistema de coordenadas fijo Oxy en el plano y sea $O'(-1, 2)$. Supongamos que $O'x'y'$ es un nuevo sistema de coordenadas en el plano cuyos ejer coordenados son paralelos a los ejes x e y, su origen es O' y la escala en ambos es la misma. Los puntos que se indican a continuación están dados en el sistema Oxy. Determinar sus coordenadas en el sistema $O'x'y'$.

   a) $P_1(2, -1)$;   *b)* $P_2(-3, 1)$;   *c)* $P_3(2, 1)$;   *d)* $P_4(-1, -2)$.

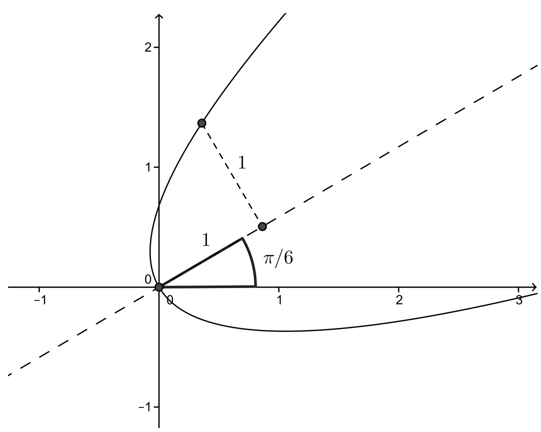
2. Hallar las coordenadas de los puntos del ejercicio 1 respecto al sistema de coordenadas $Ox'y'$ que se obtiene de rotar los ejes del sistema Oxy original un ángulo $\theta = \pi/4$.

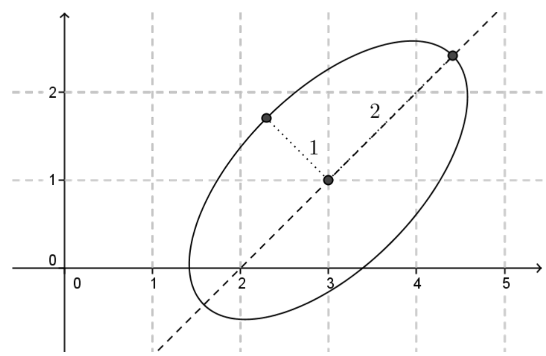
3. Las siguientes son ecuaciones de lugares geométricos en el plano dadas respecto a un sistema de coordenadas Oxy. Sea $Ox'y'$ el sistema de coordenadas que se obtiene por una rotación de ejes del sistema Oxy en el ángulo θ indicado. Determinar las ecuaciones de los lugares geométricos en el sistema $O'x'y'$ y representarlos gráficamente.

   a) $2x + 3y = 4$, $\theta = -\pi/2$;

   b) $7x^2 - 6\sqrt{3}xy + 13y^2 - 16 = 0$, $\theta = \pi/3$.

4. Obtener en el sistema de coordenadas Oxy dado las ecuaciones de las cónicas graficadas a continuación:





5. Determinar el lugar geométrico que describen las siguientes ecuaciones y en caso que sea no vacío representarlo gráficamente. En todos los casos que sea posible, encontrarlo sin cambiar el sistema de referencia.

   a) $x^2 + 4xy + 4y^2 - 9 = 0$;

   b) $2x^2 + 3xy - 2y^2 - 25 = 0$;

   c) $8x^2 + 12xy + 13y^2 - 884 = 0$;

   d) $xy = 4$

   e) $3x^2 + 12xy + 8y^2 + 6x + 16y + 38 = 0$;

   f) $9x^2 + 24xy + 16y^2 - 80x - 60y = 0$;

   g) $9x^2 - 12xy + 7y^2 + 4 = 0$;

   h) $16x^2 + 24xy + 9y^2 - 30x + 40y = 0$;

   i) $4y^2 - 4xy + y^2 - 6x + 3y + 13 = 0$;

   j) $-2x^2 + 3xy + 2y^2 - x - 3y + 1 = 0$;

   k) $x^2 - 10xy + y^2 + x + y + 1 = 0$;

   l) $3x^2 + 4y^2 - 12x + 4y + 13 = 0$;

   m) $9x^2 - 6xy + y^2 + 6x - 2y + 1 = 0$;

   n) $x^2 + y^2 - 2x + 10y + 20 = 0$.

6. Considerar el lugar geométrico $\mathcal{L}_\lambda$ descrito por la ecuación

$$x^2 + \lambda y^2 + (1+\lambda)x - \lambda y + 5 = 0$$

   Describir qué lugar geométrico del plano es $\mathcal{L}_\lambda$ en función de los valores que toma λ.