Ejercicios de vectores

5. Vectores - 5.5 Propuesta (página 12)
1.a) La afirmación es falsa. Para mostrar que la afirmación es falsa es suficiente presentar un contraejemplo. Consideremos entonces $\vec{v}$ un vector de módulo 1. Es decir que $\vec{v}$ es un versor. Teniendo en cuenta la definición de versor asociado, podemos concluir que $\vec{v}$ es igual a su versor asociado,

$$\vec{v} = \vec{v_0}.$$

Entonces naturalmente, $|\vec{v}| = |\vec{v_0}| = 1$, contradiciendo la afirmación en cuestión.

1.b) La afirmación es falsa. En este caso particular, el error está planteado desde el inicio: para que dos vectores puedan tener sentido opuesto, tienen que tener necesariamente la misma dirección. Puesto que los vectores de la figura 9 no tienen la misma dirección, inmediatamente no pueden tener sentido opuesto. De esta forma queda claro que la afirmación es falsa.

1.c) La afirmacón es falsa. Si bien para mostrar que es falsa es suficiente presentar un contraejemplo, en este caso la afirmación siempre es falsa, sin importar quiénes son $\vec{v}$ y $\vec{u}$. Para ver esto, sean $\vec{u}$ y $\vec{v}$ dos vectores de modo que

$$|\vec{v}| > |\vec{u}|.$$

Sus respectivos versores asociados, $\vec{v_0}$ y $\vec{u_0}$, por cómo están definidos, cumplen con la propiedad que $|\vec{v_0}| = |\vec{u_0}| = 1$, con lo que queda claro que la afirmación es falsa.

1.d) La afirmación es verdadera. Para mostrar que la afirmación es verdadera realizaremos una prueba completa, independientemente de quiénes sean los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$.
Sean entonces $\vec{u}$ y $\vec{v}$ dos vectores arbitrarios de modo que cumplen con la hipótesis de que **son paralelos (H1)** y **de igual sentido (H2)**. Notemos que dos vectores son paralelos si y sólo si tienen la misma dirección.
Ahora, por la definición de versor, **$\vec{u}$ y $\vec{u_0}$ tienen misma dirección (1)** y **mismo sentido (2)**, pero $|\vec{u_0}| = 1$ **(3)**. De forma análoga, **$\vec{v}$ y $\vec{v_0}$ tienen misma dirección (4)** y **mismo sentido (5)**, pero $|\vec{v_0}| = 1$ **(6)**.
Teniendo en cuenta (1), (4) y la hipótesis (H1) podemos concluir que $\vec{u_0}$ y $\vec{v_0}$ **tienen la misma dirección (7)**.
Teniendo en cuenta (2), (5) y la hipótesis (H2) podemos concluir que $\vec{u_0}$ y $\vec{v_0}$ **tienen el mismo sentido (8)**.
Teniendo en cuenta (3) y (6), podemos concluir que $\vec{u_0}$ y $\vec{v_0}$ **tienen igual módulo (9)**. Finalmente, (7), (8) y (9) implican que

$$\vec{u_0} = \vec{v_0}.$$

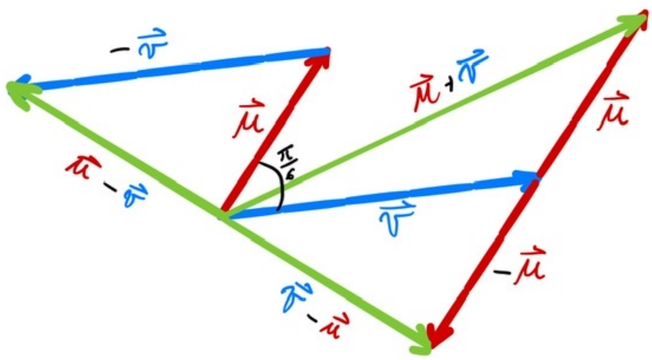
1.e) La afirmación es verdadera. Para mostrar que la afirmación es verdadera realizaremos una prueba completa, independientemente de quiénes sean los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$.
Sean entonces $\vec{u}$ y $\vec{v}$ dos vectores arbitrarios de modo que cumplen con la hipótesis,

$$\vec{u_0} = -\vec{v_0}.$$

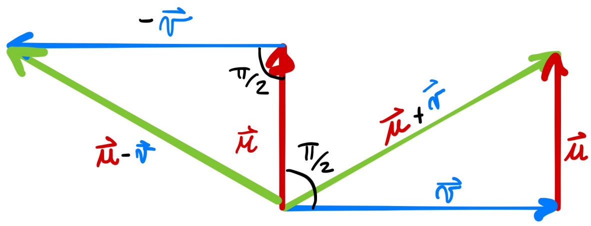
Es decir que los versores asociados a $\vec{u}$ y $\vec{v}$ son opuestos, lo que por la definición de vector opuesto significa que **$\vec{u_0}$ y $\vec{v_0}$ tienen misma dirección (1)** y mismo módulo, pero **$\vec{u_0}$ y $\vec{v_0}$ tienen sentido opuesto (2)**.
Ahora, por la definición de versor, **$\vec{u}$ y $\vec{u_0}$ tienen misma dirección (3)** y **mismo sentido**

(4). De forma análoga, $\vec{v}$ **y** $\vec{v_0}$ **tienen misma dirección (5)** y **mismo sentido (6)**.
Teniendo en cuenta (1), (3) y (5) podemos concluir que $\vec{u}$ y $\vec{v}$ tienen la misma dirección, es decir que **son paralelos (7).**
Teniendo en cuenta (2), (4) y (6) podemos concluir que $\vec{u}$ y $\vec{v}$ **tienen sentido opuesto (8)**.
Finalmente, resumiendo (7) y (8), hemos obtenido que $\vec{u}$ y $\vec{v}$ son vectores paralelos que tienen sentido opuesto, que es lo que queríamos probar.

6. Suma de vectores - 6.3 Propuesta (página 15)
1.



2. Sean $\vec{u}$ y $\vec{v}$ dos vectores de modo que $|\vec{u}| = 3$, $|\vec{v}| = 4$ y $(\vec{u}, \vec{v}) = \frac{\pi}{2}$. Al graficar los vectores $\vec{u}$, $\vec{v}$, $u \vec{+} v$ y $u \vec{-} v$, vemos que se forman dos triángulos rectángulos, pues $(\vec{u}, \vec{v}) = \frac{\pi}{2}$. En ambos triángulos $\vec{u}$ y $\vec{v}$ representan los catétos y $u \vec{+} v$ y $u \vec{-} v$ representan las dos hipotenusas, respectivamente.



Podemos aplicar entonces el teorema de Pitágoras para concluir que

$$|\vec{u}|^2 + |\vec{v}|^2 = 9 + 16 = 25 = |u \vec{+} v|^2 = |u \vec{-} v|^2.$$

Es decir que

$$|u \vec{+} v| = |u \vec{-} v| = 5.$$

3. $\overrightarrow{CB} = \vec{v} - \vec{u}$
$\overrightarrow{BC} = \vec{u} - \vec{v}$
$\overrightarrow{AC} = \vec{u} + \vec{v}$

$\overrightarrow{CD} = -\vec{u}$
$\overrightarrow{DA} = -\vec{v}$
$\overrightarrow{DB} = \vec{u} - \vec{v}$

5. Si consideramos el vector $\vec{x} = \vec{v} - \vec{u}$, entonces obtenemos que

$$\vec{x} + \vec{u} = \vec{v} - \vec{u} + \vec{u} = \vec{v} + (-\vec{u}) + \vec{u} = \vec{v} + (-\vec{u} + \vec{u}) = \vec{v} + \vec{0} = \vec{v}.$$

9. Proyección ortogonal de un vector sobre la dirección de otro vector - 9.1 Propuesta (página 21)

1. Si $\vec{u}$ y $\vec{v}$ son ortogonales, entonces

$$\text{proy}_{\vec{v}}\vec{u} = \vec{0}.$$

2.