Unidad 2: Lógica Proposicional
Álgebra y Geometría Analítica

Iker M. Canut

4 de agosto de 2020

1. Definiciones

Las **proposiciones** son oraciones declarativas que tienen un valor de verdad (V o F). Los **conectores lógicos** son operadores que sirven para formar proposiciones nuevas, a partir de proposiciones dadas:

1. NEGACIÓN:

p	$\neg p$
0	1
1	0

2. CONJUNCIÓN:

p	q	$p \wedge q$
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

3. DISYUNCIÓN:

p	q	$p \vee q$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

DISY. EXCLUSIVA:

p	q	$p \underline{\vee} q$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0

4. IMPLICACIÓN:

p	q	$p \to q$
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	1

5. BICONDICIONAL:

p	q	$p \leftrightarrow q$
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	1

Las **proposiciones primitivas** son proposiciones que no se pueden formar a partir de otras proposiciones (utilizando conectores lógicos).

Una proposición compuesta es una **tautología** (T_0) si es verdadera para todas las asignaciones de verdad de las proposiciones que la componen. Análogamente, se define la **contradicción** (F_0), si es falsa para todas las asignaciones posibles.

Dos proposiciones S_1 y S_2 son **lógicamente equivalentes**, y notamos $S_1 \Leftrightarrow S_2$ si tienen las mismas tablas de verdad. Si $S_1 \Leftrightarrow S_2$, entonces $S_1 \leftrightarrow S_2$ es una tautología.

p	q	$p \to q$	$\neg p \vee q$
0	0	1	1
0	1	1	1
1	0	0	0
1	1	1	1

p	q	$p \to q$	$q \to p$	$(p \to q) \wedge (q \to p)$	$p \leftrightarrow q$
0	0	1	1	1	1
0	1	1	0	0	0
1	0	0	1	0	0
1	1	1	1	1	1

2. Leyes de la Lógica

Doble negación:	$\neg(\neg p) \Leftrightarrow p$	
De Morgan:	$\neg(p \vee q) \Leftrightarrow \neg p \wedge \neg q$	$\neg(p \wedge q) \Leftrightarrow \neg p \vee \neg q$
Conmutativa:	$p \vee q \Leftrightarrow q \vee p$	$p \wedge q \Leftrightarrow q \wedge p$
Asociativa:	$p \vee (q \vee r) \Leftrightarrow (p \vee q) \vee r$	$p \wedge (q \wedge r) \Leftrightarrow (p \wedge q) \wedge r$
Distributiva:	$p \vee (q \wedge r) \Leftrightarrow (p \vee q) \wedge (p \vee r)$	$p \wedge (q \vee r) \Leftrightarrow (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$
Idempotente:	$p \vee p \Leftrightarrow p$	$p \wedge p \Leftrightarrow p$
Inversa:	$p \vee \neg p \Leftrightarrow T_0$	$p \wedge \neg p \Leftrightarrow F_0$
Neutro:	$p \vee F_0 \Leftrightarrow p$	$p \wedge T_0 \Leftrightarrow p$
Dominación:	$p \vee T_0 \Leftrightarrow T_0$	$p \wedge F_0 \Leftrightarrow F_0$
Absorción:	$p \vee (p \wedge q) \Leftrightarrow p$	$p \wedge (p \vee q) \Leftrightarrow p$
	$p \vee (\neg p \wedge q) \Leftrightarrow p \vee q$	$p \wedge (\neg p \vee q) \Leftrightarrow p \wedge q$

- $S_1 \Leftrightarrow S_1$
- $S_1 \Leftrightarrow S_2$ si y solo si $S_2 \Leftrightarrow S_1$
- $S_1 \Leftrightarrow S_2$ y también $S_2 \Leftrightarrow S_3$, entonces $S_1 \Leftrightarrow S_3$

2.1. Reglas de Sustitución

Supongamos que una proposición compuesta P es una tautología y que p es una proposición primitiva que aparece en P. Si reempazamos cada ocurrencia de p por la proposición q, entonces la proposición resultante también es una tautología.
Sea P una proposición compuesta y p una proposición arbitraria que aparece en P. Sea q una proposición tal que $p \Leftrightarrow q$, supongamos que reemplazamos en P una o más ocurrencias de p por q, y llamamos P' a la proposición obtenida. Luego, $P \Leftrightarrow P'$.

2.2. Proposiciones Relacionadas con $p \rightarrow q$

- **Recíproca**: $q \rightarrow p$
- **Inversa**: $\neg p \rightarrow \neg q$
- **Contrarrecíproca**: $\neg q \rightarrow \neg p$

$$p \rightarrow q \Leftrightarrow \neg q \rightarrow \neg p$$

$$q \rightarrow p \Leftrightarrow \neg p \rightarrow \neg q$$

Sea S una proposición que no contiene conectivas lógicas distintas de $\wedge$ y $\vee$, entonces el **dual** de S, notado S^d, es la proposición que se obtiene al reemplazar cada $\wedge$ por $\vee$, cada T_0 por F_0, y viceversa.

$$\text{Si } (S \Leftrightarrow T) \rightarrow (S^d \Leftrightarrow T^d)$$

3. Cuantificadores

Una **proposición abierta** es una expresión que contiene variables, que al ser sustituidas por valores determinados, hace que la expresión se convierta en una proposición.

Cuantificador Existencial: $\exists x \; p(x)$, existe x tal que $p(x)$ es V.
Cuantificador Universal: $\forall x \; p(x)$, para todo x, $p(x)$ es V.

Para demostrar un cuantificador:

- Existencial, basta con encontrar un ejemplo.
- Universal, hay que demostrarlo.
- $\neg$ Existencial, hay que demostrarlo.
- $\neg$ Universal, basta con encontrar un contraejemplo.

Si $p(x, y)$ es una proposición abierta en dos variables, $\forall x \forall y \; p(x, y) \Leftrightarrow \forall y \forall x \; p(x, y)$, con lo que se simplifica a $\forall x, y \; p(x, y)$.

3.1. Implicación Lógica

p implica lógicamente q, y se nota $p \Rightarrow q$, si $p \rightarrow q$ es una T_0.
e.g $\forall x \; p(x) \Rightarrow \exists x \; p(x)$ (considerando un universo no vacio)

3.2. Cuantificadores Implicitos

Sean $p(x)$ y $q(x)$ proposiciones abiertas,

- $p(x)$ es **logicamente equivalente** a $q(x)$ cuando el bicondicional $p(a) \leftrightarrow q(a)$ es verdadero para cada a en el universo dado: $\forall x[p(x) \Leftrightarrow q(x)]$.
- $p(x)$ **implica logicamente** $q(x)$ si $p(a) \rightarrow q(a)$ es verdadera para cada a en el universo dado: $\forall x[p(x) \Rightarrow q(x)]$.
- Dada la proposición $\forall x[p(x) \rightarrow q(x)]$ podemos definir la **contrapositiva** $\forall x[\neg q(x) \rightarrow \neg p(x)]$, la **recíproca** $\forall x[q(x) \rightarrow p(x)]$ y la **inversa** $\forall x[\neg p(x) \rightarrow \neg q(x)]$.

3.3. Equivalencias e Implicaciones Lógicas para Proposiciones Cuantificadas

$$\exists x[p(x) \wedge q(x)] \Rightarrow [\exists x\ p(x) \wedge \exists x\ q(x)]$$

$$\exists x[p(x) \vee q(x)] \Leftrightarrow [\exists x\ p(x) \vee \exists x\ q(x)]$$

$$\forall x[p(x) \wedge q(x)] \Leftrightarrow [\forall x\ p(x) \wedge \forall x\ q(x)]$$

$$\forall x[p(x) \vee q(x)] \Leftarrow [\forall x\ p(x) \vee \forall x\ q(x)]$$

3.4. Negación de Cuantificadores

$$\neg[\exists x\ p(x)] \Leftrightarrow \forall x\ \neg p(x)$$

$$\neg[\forall x\ p(x)] \Leftrightarrow \exists x\ \neg p(x)$$