Unidad 5: Funciones

Iker M. Canut

30 de junio de 2020

1. Funciones

Dados A y B conjuntos no vacios, una **función** de A en B es una relación de A en B que verifica que cada elemento de A es exactamente una vez primera componente de un par ordenado de la relación. Lo notamos $f : A \to B$. En otras palabras, se tiene que cumplir:

- Para cada $a \in A$ existe $b \in B : (a, b)$ está en la relación.
- No puede haber dos pares (a, b_1) y (a, b_2) con $b_1 \neq b_2$ en la relación.

Podemos escribir $f(a) = b$ para indicar que la **imagen** de $a \in A$ es $b \in B$

Si la relación que es función es un subconjunto $A \times B$, diremos que:
El **dominio** de la función es A y el **codominio** de la función es B.

Si $f : A \to B$ y $A_1 \subseteq A$, $f(A_1) = \{b \in B : f(a) = b, a \in A_1\}$ y decimos que es la imagen de A_1 por medio de f. Si $A_1 = A$, notamos $f(A) = Im(f)$ y ese es el **conjunto imagen** de f.

....

Decimos que $f : A \to B$ es **inyectiva** si cada elemento de B aparece a lo sumo una vez como segunda componente de los pares ordenados de la relación:

$$\forall a_1, a_2 \in A, f(a_1) = f(a_2) \Rightarrow a_1 = a_2$$

....

Sea $f : A \to B, A_1, A_2 \subseteq A$:

- $f(A_1 \cup A_2) = f(A_1) \cup f(A_2)$
- $f(A_1 \cap A_2) \subseteq f(A_1) \cap f(A_2)$

....

Sea $f : A \to B, A_1 \subseteq A$:

- $f|_{A_1} : A \to B : f|_{A_1}(a) = f(a)$ si $a \in A_1$, es la **restricción** de f a A_1.

Sea $f : A \to B, A \subseteq A_2$

- $g : A_2 \to B : g(a) = f(a)$ si $a \in A$ es una **extensión** de f a A_2.

....

Sea $f : A \to B, B_1 \subseteq B$, la **preimagen** de B_1 por medio de f, notada como $f^{-1}(B_1)$ es:

$$f^{-1}(B_1) = \{x \in A : f(x) \in B_1\}$$

Notar que la preimagen es otro conjunto.

- $f^{-1}(B_1 \cup B_2) = f^{-1}(B_1) \cup f^{-1}(B_2)$
- $f^{-1}(B_1 \cap B_2) = f^{-1}(B_1) \cap f^{-1}(B_2)$
- $f^{-1}(\overline{B_1}) = \overline{f^{-1}(B_1)}$

....

Diremos que $f : A \to B$ es **suryectiva** si cada elemento de B aparece una vez como segunda componente de los pares ordenados de la relación: $f(A) = Im(f) = B$. Es decir:

$$\text{Dado } y \in B, \exists x \in A : f(x) = y$$

....

Luego, una función es **biyectiva** si es inyectiva y suryectiva.

....

Sean f y g dos funciones, tales que $Im(f) \cap Dom(g) \neq \emptyset$, se define la **composición** de g con f, y se lo nota $g \circ f$, a la función con dominio: $Dom(g \circ f) = \{x \in Dom(f) : f(x) \in Dom(g)\}$ y tal que

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)), \forall x \in Dom(g \circ f)$$

Bajo la condición $Im(f) \cap Dom(g) \neq \emptyset$ decimos que la composición de g con f es posible ya que su dominio es no vacio. Además, hay funciones para las cuales $(g \circ f)$ esta bien definida, pero $(f \circ g)$ no lo está. También pueden existir y ser distintas. Por lo tanto, no es conmutativa.

Pero la composición de funciones si es asociativa, es decir, $(h \circ g) \circ f = h \circ (g \circ f)$

Sea $f : A \to A$, la composición $(f \circ f)$ es posible y se nota f^2. Recursivamente, $f^n = (f \circ f^{n-1})$

Si $f : A \to B$ y $g : B \to C$ son inyectivas (resp. suryectivas), entonces $(g \circ f) : A \to C$ es inyectiva (resp. suryectiva.)

....

Una función $f : A \to B$ es **inversible** si existe $g : B \to A$:

$$(g \circ f) = id_A \text{ y } (f \circ g) = id_B$$

Luego, si f es inversible, entonces g también lo es.
También, si $f : A \to B$ es inversible y $g : B \to A$ es una inversa de f, entonces es unica.

- f es inversible $\iff$ f es biyectiva.
- $f : A \to B, g : B \to C$ son inversibles, entonces $(g \circ f)$ es inversible y $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$.

La preimagen SIEMPRE existe y es un conjunto. La función inversa (si existe) es una función.

Sea $f : A \to B$, A y B finitos, $|A| = |B|$, son equivalentes:

- f es inyectiva
- f es suryectiva
- f es inversible

....

2. Operaciones

Dados A y B no vacios, una función $f : A \times A \to B$ es una **operación binaria** en A. Si además, $Im(f) \subseteq A$, la operación es **cerrada** en A.

Una función $g : A \to A$ es una **operación monaria** (unaria) en A.

....

Dada $f : A \times A \to B$, operación binaria en A,

- f es **conmutativa** si $f(a_1, a_2) = f(a_2, a_1), \forall (a_1, a_2) \in A \times A$.
- Si f es cerrada, entonces f es **asociativa** si $f(f(a, b), c) = f(a, f(b, c)), \forall a, b, c \in A$.

Podemos notar $f(a, b) = a \otimes b$, y estas propiedadades son mas amigables: Por ejemplo la asociatividad sería: $(a \otimes b) \otimes c = a \otimes (b \otimes c)$.

....

Luego, dado $f : A \times A \to A$, decimos que tiene **neutro** si existe $a_0 \in A$ tal que

$$f(a, a_0) = f(a_0, a) = a, \forall a \in A$$

Es decir,

$$a \otimes a_0 = a_0 \otimes a = a$$

Además, si $f : A \times A \to A$ tiene neutro, éste es único.

....

Dada $f : A \times A \to A$, si f posee neutro $x \in A$, decimos que la operación posee inversos si

$$\forall a \in A \exists a' : f(a, a') = f(a', a) = x$$

Luego, si $f : A \times A \to A$ es una operación asociativa, con elemento neutro $x \in A$ que posee **inversos**, entonces cada elemento posee un único inverso: Supongamos que tiene 2 inversos a_1 y a_2,

$$a_1 = a_1 \otimes x = a_1 \otimes (a \otimes a_2) = (a_1 \otimes a) \otimes a_2 = x \otimes \; a_2 = a_2$$

....