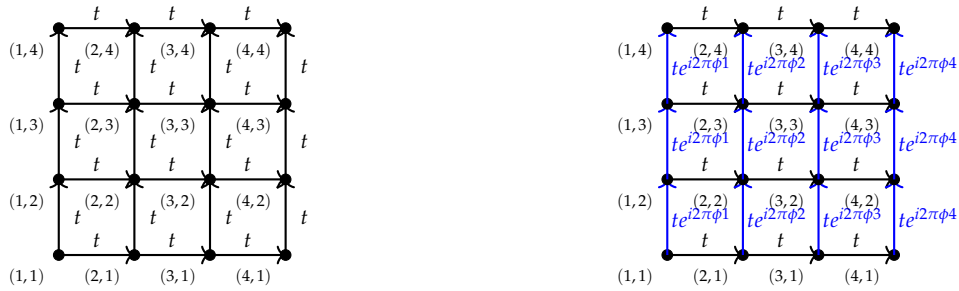


1 Modèle d'Anderson 2D avec Champ Magnétique

Le modèle bidimensionnel d'Anderson, sous l'influence d'un champ magnétique externe perpendiculaire, sert de base à l'étude de l'interaction entre le désordre et les champs externes sur le transport électronique dans les systèmes solides. L'introduction du champ magnétique via la substitution de Peierls modifie radicalement les propriétés dynamiques ; les amplitudes de transition entre les sites du réseau acquièrent des phases complexes associées, et l'Hamiltonien résultant est non hermitien et nécessairement complexe. Ce changement génère une architecture spectrale complexe étroitement liée à la topologie du système.

Dans ce contexte, l'Hamiltonien de Harper-Hofstadter apparaît dans un cadre naturel. Il intègre l'effet du champ dans un modèle discret, mettant en évidence des phénomènes marquants, tels que la quantification de la conductance transverse (effet Hall quantique) et le développement d'un spectre fractal, connu sous le nom de papillon de Hofstadter.



Modèle 2D sans champ magnétique

Modèle 2D avec champ magnétique

FIGURE 1 – Comparaison côte à côte des graphes du modèle d'Anderson 2D sans et avec champ magnétique

1.1 Hamiltonien 2D sans Champ Magnétique

Considérons un réseau carré 2D avec $N_x \times N_y$ sites, indexés par (n, m) , où $n = 1, \dots, N_x$ et $m = 1, \dots, N_y$. L'Hamiltonien sans champ magnétique et sans désordre est :

$$H_0 = -t \sum_{n,m} \left(c_{n,m}^\dagger c_{n+1,m} + c_{n+1,m}^\dagger c_{n,m} + c_{n,m}^\dagger c_{n,m+1} + c_{n,m+1}^\dagger c_{n,m} \right)$$

Le terme de désordre est :

$$V = \sum_{n,m} \epsilon_{n,m} c_{n,m}^\dagger c_{n,m}, \quad \epsilon_{n,m} \in \left[-\frac{W}{2}, \frac{W}{2} \right]$$

où $\epsilon_{n,m} \sim \mathcal{U} \left[-\frac{W}{2}, \frac{W}{2} \right]$ est le potentiel aléatoire, et $W \geq 0$ est la force du désordre.

Dispersion sans champ : Sans désordre ($W = 0$), diagonalisons H_0 via la transformée de Fourier :

$$c_{n,m} = \frac{1}{\sqrt{N_x N_y}} \sum_{k_x, k_y} e^{i(k_x n + k_y m)} c_{k_x, k_y}$$

où $k_x = \frac{2\pi j_x}{N_x}$, $k_y = \frac{2\pi j_y}{N_y}$, $j_x = 0, \dots, N_x - 1$, $j_y = 0, \dots, N_y - 1$. Les vecteurs d'onde k_x et k_y décrivent les impulsions dans les directions x et y . L'Hamiltonien devient :

$$H_0 = \sum_{k_x, k_y} E(k_x, k_y) c_{k_x, k_y}^\dagger c_{k_x, k_y}$$

avec la relation de dispersion :

$$E(k_x, k_y) = -2 \cos k_x - 2 \cos k_y$$

L'énergie varie dans $[-4, 4]$, formant une bande continue pour $N_x, N_y \rightarrow \infty$.

1.2 Introduction du Champ Magnétique et Substitution de Peierls

Un champ magnétique $\mathbf{B} = B\hat{z}$ perpendiculaire au plan du réseau est introduit via le potentiel vecteur \mathbf{A} , où $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$. La substitution de Peierls modifie les amplitudes de saut pour inclure une phase dépendant du champ :

$$t \rightarrow t e^{i \frac{2\pi}{\Phi_0} \int_{\mathbf{r}_i}^{\mathbf{r}_j} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l}}$$

où : - $\Phi_0 = \frac{h}{e}$: Flux quantique élémentaire (en unités où $\hbar = e = 1$). - $\int_{\mathbf{r}_i}^{\mathbf{r}_j} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l}$: Intégrale du potentiel vecteur le long du chemin reliant les sites $\mathbf{r}_i = (n, m)$ et $\mathbf{r}_j = (n', m')$. - $\phi = \frac{1}{\Phi_0} \int_{\mathbf{r}_i}^{\mathbf{r}_j} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l}$: Phase sans dimension.

La phase dépend du chemin, mais pour un réseau carré, nous intégrons le long des segments droits entre sites voisins.

1.3 Jauge de Landau

Choisissons la jauge de Landau avec le potentiel vecteur :

$$\mathbf{A} = (0, Bx, 0)$$

où $x = na$, et $a = 1$ est l'espacement du réseau. Vérifions : $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A} = (0, 0, \frac{\partial A_y}{\partial x}) = (0, 0, B)$. Cette jauge rend $A_x = 0$, simplifiant les phases dans la direction x , mais introduit une dépendance en x dans la direction y .

Phases : - Pour un saut de (n, m) à $(n+1, m)$, le chemin est $\mathbf{l} = (n, m) \rightarrow (n+1, m)$, avec $\mathbf{A} = (0, Bn, 0)$. L'intégrale est :

$$\int_{(n,m)}^{(n+1,m)} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l} = \int_n^{n+1} 0 dx = 0$$

La phase est nulle, donc le saut reste $-tc_{n,m}^\dagger c_{n+1,m}$. - Pour un saut de (n, m) à $(n, m+1)$, le chemin est $\mathbf{l} = (n, m) \rightarrow (n, m+1)$, avec $A_y = Bn$. L'intégrale est :

$$\int_{(n,m)}^{(n,m+1)} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l} = \int_m^{m+1} Bn dy = Bn$$

La phase est :

$$\frac{2\pi}{\Phi_0} Bn = 2\pi\alpha n, \quad \alpha = \frac{B}{\Phi_0}$$

Le saut devient $-te^{i2\pi\alpha n} c_{n,m}^\dagger c_{n,m+1}$.

Le flux magnétique à travers une maille $(n, m) \rightarrow (n+1, m) \rightarrow (n+1, m+1) \rightarrow (n, m+1) \rightarrow (n, m)$ est calculé par l'intégrale de la phase autour de la maille :

$$\sum_{\text{maille}} \frac{2\pi}{\Phi_0} \int \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l} = 2\pi\alpha$$

Ainsi, α est le flux par maille en unités de Φ_0 .

1.4 Hamiltonien Harper-Hofstadter

L'Hamiltonien avec champ magnétique, appelé Harper-Hofstadter, est :

$$H = -t \sum_{n,m} (c_{n,m}^\dagger c_{n+1,m} + c_{n+1,m}^\dagger c_{n,m} + e^{i2\pi\alpha n} c_{n,m}^\dagger c_{n,m+1} + e^{-i2\pi\alpha n} c_{n,m+1}^\dagger c_{n,m}) \\ + \sum_{n,m} \epsilon_{n,m} c_{n,m}^\dagger c_{n,m}$$

- Les termes de saut dans la direction x , de la forme $c_{n,m}^\dagger c_{n+1,m}$, restent inchangés.
- Les sauts dans la direction y acquièrent une phase complexe $e^{\pm i2\pi\alpha n}$, dépendant de la position n selon x .
- Le terme de désordre local $\epsilon_{n,m}$ est également inchangé.

Lorsque le flux par maille est rationnel, $\alpha = \frac{p}{q}$, avec p et q premiers entre eux, le champ magnétique introduit une périodicité magnétique sur q sites dans la direction x .

- Dans la direction y , le système conserve une périodicité de période 1.
- Dans la direction x , la périodicité dépend de la valeur de α . Pour $\alpha = \frac{p}{q}$, l'Hamiltonien est invariant sous une translation de q sites, définissant ainsi une *super-maille magnétique*.

Le spectre d'énergie du système, connu sous le nom de *papillon de Hofstadter*, présente une structure fractale remarquable en fonction du flux magnétique α .

1.5 Réduction au Cas 1D

Supposons une périodicité dans la direction y . Utilisons un ansatz de Bloch :

$$\psi_{n,m} = e^{ik_y m} \phi_n$$

où k_y est l'impulsion dans y , et ϕ_n dépend de n . Substituons dans l'équation de Schrödinger $H\psi = E\psi$. Sans désordre ($\epsilon_{n,m} = 0$) :

$$-\psi_{n+1,m} - \psi_{n-1,m} - e^{i2\pi\alpha n} \psi_{n,m+1} - e^{-i2\pi\alpha n} \psi_{n,m-1} = E\psi_{n,m}$$

Substituons $\psi_{n,m} = e^{ik_y m} \phi_n$:

$$-e^{ik_y m} \phi_{n+1} - e^{ik_y m} \phi_{n-1} - e^{i2\pi\alpha n} e^{ik_y(m+1)} \phi_n - e^{-i2\pi\alpha n} e^{ik_y(m-1)} \phi_n = E e^{ik_y m} \phi_n$$

Divisons par $e^{ik_y m}$:

$$-\phi_{n+1} - \phi_{n-1} - e^{i2\pi\alpha n} e^{ik_y} \phi_n - e^{-i2\pi\alpha n} e^{-ik_y} \phi_n = E\phi_n$$

Simplifions :

$$-\phi_{n+1} - \phi_{n-1} - \left(e^{i(2\pi\alpha n + k_y)} + e^{-i(2\pi\alpha n + k_y)} \right) \phi_n = E\phi_n$$

Puisque $e^{i\theta} + e^{-i\theta} = 2 \cos \theta$, nous obtenons :

$$\phi_{n+1} + \phi_{n-1} + 2 \cos(2\pi\alpha n + k_y) \phi_n = -E\phi_n$$

Ceci est une équation de type Harper, quasi-périodique avec potentiel $2 \cos(2\pi\alpha n + k_y)$.

1.6 Lien avec le Modèle d'Aubry-André

L'équation (1.5) est analogue à l'équation du modèle d'Aubry-André (section ??) :

$$\psi_{n+1} + \psi_{n-1} + \lambda \cos(2\pi\beta n + \phi)\psi_n = E'\psi_n$$

avec les correspondances :

$$\begin{cases} \lambda = 2t, & \text{amplitude du potentiel quasi-périodique} \\ \beta = \alpha, & \text{où } \alpha = \frac{B}{\Phi_0} \text{ est le flux normalisé par la constante de flux quantique} \\ \phi = k_y, & \text{phase liée à l'impulsion dans } y \\ E' = -E, & \text{redéfinition de l'énergie} \end{cases}$$

Pour $\lambda = 2$, le modèle d'Aubry-André est au point critique, avec des états ni localisés ni étendus, mais multifractaux. Ainsi, pour α irrationnel, le modèle Harper-Hofstadter dans la direction x présente des états critiques, similaires à ceux d'Aubry-André.