

# 1 Introduction

## 1.1 Le désordre, la localisation et la physique quantique

L'ordre cristallin constitue l'un des piliers de la physique du solide. Depuis les travaux de Bravais, Bloch ou encore Born, la structure périodique des matériaux a permis d'expliquer la conductivité des métaux, la formation des bandes d'énergie et la propagation des électrons comme des quasi-particules libres. Dans un cristal parfait, les électrons se déplacent sans rencontrer d'obstacles, et les équations de la mécanique quantique s'intègrent harmonieusement au réseau régulier : les solutions sont des ondes de Bloch, délocalisées, portant le courant à travers le matériau.

Mais que se passe-t-il si cet ordre est perturbé ? Que devient la dynamique quantique lorsque le milieu devient irrégulier, imprévisible, voire chaotique à l'échelle atomique ?

C'est ici qu'intervient la notion de **désordre**. En physique du solide, le désordre désigne toute forme de déviation locale ou globale par rapport à la périodicité parfaite. Il peut se manifester de plusieurs manières :

- la présence d'impuretés ou d'atomes étrangers introduits volontairement (dopage) ou résiduels ;
- des défauts structurels tels que des lacunes, dislocations ou déformations locales ;
- des variations aléatoires dans le potentiel électrostatique local (fluctuations de charge, interactions électrons-phonons, etc.).

Ces irrégularités affectent directement le comportement des électrons, qui ne peuvent plus s'appuyer sur la symétrie du réseau pour se propager. En particulier, à certaines échelles de longueur, les interférences quantiques deviennent dominantes et peuvent, dans certains cas, conduire à une suppression complète de la diffusion.

**Note pédagogique:** *Dans un langage imagé, on peut dire que l'électron, au lieu de «naviguer» sur une mer calme (le cristal), se retrouve pris dans une mer chaotique d'obstacles invisibles. À force de rebondir, il finit par interférer avec lui-même de manière destructrice, jusqu'à s'immobiliser dans une région restreinte de l'espace.*

Ce phénomène contre-intuitif a été identifié pour la première fois par le physicien américain Philip W. Anderson en 1958. À cette époque, l'étude des semi-conducteurs dopés commençait à révéler des comportements étranges : certaines impuretés, au lieu de faciliter la conduction, la bloquaient complètement au-delà d'un certain seuil. Anderson a alors proposé un modèle mathématique simple — un réseau unidimensionnel dans lequel chaque site possède un potentiel aléatoire — pour étudier l'effet du désordre sur la propagation des électrons.

Ce modèle a abouti à une conclusion frappante : en une dimension, *tout désordre, même infinitésimal*, suffit à localiser les états électroniques. C'est-à-dire que les fonctions d'onde deviennent exponentiellement confinées dans l'espace, et ne peuvent plus transporter de courant à grande distance. Ce blocage du transport par interférences est aujourd'hui connu sous le nom de **localisation d'Anderson**.

**Note importante:** *La localisation désigne un phénomène quantique par lequel les états propres d'un électron dans un milieu désordonné deviennent spatialement confinés, avec une fonction d'onde décroissant exponentiellement à partir d'un point central. En conséquence, les électrons ne peuvent plus se propager librement dans le matériau, ce qui bloque*

*le transport électronique à longue distance. Ce phénomène, dû aux interférences constructives des chemins multiples induites par le désordre, est appelé localisation d'Anderson.*

À l'époque, cette idée était révolutionnaire. Elle contredisait la vision dominante de la conduction électronique, qui reposait sur des mécanismes de diffusion classiques et la mobilité des porteurs de charge. Plus encore, elle ouvrait un champ entièrement nouveau où les effets quantiques et statistiques du désordre devaient être pris en compte au même titre que les interactions ou les champs externes.

Depuis cette découverte, la localisation induite par le désordre est devenue un sujet central en physique. Elle a été explorée dans de nombreuses extensions :

- en dimension supérieure (2D et 3D), où une **transition métal-isolant** peut se produire selon le degré de désordre ;
- dans des **systèmes quasi-périodiques**, à la frontière entre ordre et chaos, comme le célèbre modèle d'Aubry-André ;
- dans des **systèmes classiques** (ondes lumineuses, acoustiques, mécaniques) où des analogues de la localisation quantique ont été observés de manière directe et spectaculaire.

Le désordre est donc bien plus qu'une simple imperfection : c'est un phénomène fondamental, capable de transformer radicalement le comportement d'un système physique. Il remet en question l'idée même de transport, d'états propres étendus, et oblige à repenser certains fondements de la mécanique quantique appliquée.

Aujourd'hui, la localisation d'Anderson est étudiée dans des contextes aussi variés que :

- les matériaux topologiques (effets de bord et robustesse face au désordre) ;
- la physique mésoscopique (fluctuations universelles de conductance) ;
- la théorie des matrices aléatoires (distribution des niveaux d'énergie) ;
- la dynamique d'atomes ultrafroids (diffusion anormale et expansion freinée) ;
- les circuits photoniques intégrés (localisation de la lumière dans des guides désordonnés).

C'est dans ce contexte interdisciplinaire que s'inscrit le présent travail : en partant du modèle simple proposé par Anderson, nous explorerons ses conséquences, ses généralisations et ses manifestations expérimentales. En intégrant les aspects analytiques, numériques et pédagogiques, ce document ambitionne de fournir une vue d'ensemble claire, structurée et accessible de ce phénomène central de la physique moderne.

**Note importante:** *Le lecteur n'a pas besoin de connaissances avancées en théorie des solides. Une culture de base en mécanique quantique (équation de Schrödinger, états propres, potentiel) suffit pour aborder la suite. Les notions plus avancées seront introduites progressivement, avec définitions claires et exemples numériques.*

## 1.2 Contexte historique

La localisation quantique, découverte au milieu du XX<sup>e</sup> siècle, a révolutionné la compréhension des effets du désordre sur les systèmes physiques, en révélant comment des interférences quantiques peuvent confiner des ondes dans des milieux aléatoires ou quasi-périodiques. Ce phénomène, initialement formulé dans le cadre de la physique des solides, s'est révélé universel, touchant des domaines aussi variés que l'optique, les atomes

froids, la physique nucléaire et les matériaux topologiques. Cette introduction retrace les étapes clés de son développement, en mettant en lumière les contributions des principaux acteurs, leurs publications fondatrices, les contextes théoriques et expérimentaux qui ont permis ces avancées, ainsi que les ramifications interdisciplinaires qui en ont découlé.

### 1.2.1 Philip W. Anderson (1958) — La naissance de la localisation quantique

#### Un contexte d'effervescence en physique du solide

Au tournant des années 1950, la physique du solide connaît une effervescence sans précédent, portée par des avancées technologiques et théoriques. L'invention du transistor en 1947 par John Bardeen, Walter Brattain et William Shockley, récompensée par le prix Nobel de physique en 1956, place les semi-conducteurs au cœur des recherches industrielles et académiques. À Bell Telephone Laboratories, les efforts se concentrent sur les matériaux dopés, essentiels pour contrôler la conductivité électrique dans des applications comme les transistors et les circuits intégrés. Cependant, les expériences menées à basse température révèlent des comportements déroutants : des résistivités qui croissent exponentiellement avec le désordre, des transitions abruptes entre états conducteurs et isolants, et des dépendances inhabituelles à la concentration d'impuretés. Ces observations défient les modèles classiques basés sur la théorie des bandes et la diffusion des électrons dans des cristaux parfaits.

C'est dans ce contexte que **Philip Warren Anderson** (1923–2020), physicien théoricien formé à Harvard sous la direction de John Hasbrouck Van Vleck (lauréat du prix Nobel 1977), commence à explorer les effets du désordre atomique. Après une thèse sur les propriétés magnétiques des solides, Anderson rejoint Bell Labs en 1949, où il bénéficie d'un environnement interdisciplinaire mêlant théorie, expérimentation et applications technologiques. Fasciné par les anomalies observées dans les semi-conducteurs dopés, il s'interroge sur le rôle du désordre, souvent traité comme une perturbation mineure dans les modèles théoriques de l'époque. Son intuition le pousse à formuler une hypothèse radicale : le désordre peut altérer fondamentalement la dynamique des électrons, non pas par une simple diffusion classique, mais par des mécanismes quantiques liés aux interférences.

#### L'article révolutionnaire de 1958

En 1958, Anderson publie un article séminal dans *Physical Review*, intitulé « Absence of Diffusion in Certain Random Lattices »<sup>1</sup>. Ce travail introduit le concept de localisation quantique, démontrant qu'un électron non interagissant, évoluant sur un réseau cristallin avec des énergies de site distribuées aléatoirement, peut être confiné spatialement par des interférences quantiques destructrices. Contrairement aux approches antérieures, qui considéraient le désordre comme une perturbation corrigée par des théories de diffusion, Anderson propose un modèle minimaliste : un Hamiltonien tight-binding avec un potentiel aléatoire, où les énergies des sites varient selon une distribution uniforme.

L'idée centrale est que, pour un désordre suffisamment fort, les fonctions d'onde électroniques cessent de se propager, devenant *localisées* dans des régions spécifiques du réseau. Ce confinement résulte d'interférences destructrices entre les trajets multiples de l'électron, un phénomène purement quantique sans équivalent classique. Anderson montre que cet effet est particulièrement prononcé en une dimension (1D), où tout désordre,

---

1. P.W. Anderson, *Absence of Diffusion in Certain Random Lattices*, *Phys. Rev.* **109**, 1492 (1958).

même faible, entraîne une localisation complète. En trois dimensions (3D), il prédit l'existence d'un seuil critique de désordre, au-delà duquel une transition métal-isolant peut survenir, préfigurant les travaux ultérieurs sur la criticité dimensionnelle.

## Réception initiale et premières confirmations expérimentales

À sa parution, l'article d'Anderson ne rencontre pas immédiatement un large écho. La communauté scientifique, focalisée sur la théorie BCS de la supraconductivité (1957) et les propriétés des cristaux parfaits, accorde peu d'attention à ce résultat théorique abstrait. Cependant, certains chercheurs perçoivent rapidement son importance. **Nevill Francis Mott**, physicien britannique et futur colauréat du prix Nobel 1977, s'empare de l'idée pour approfondir ses travaux sur les transitions métal-isolant. En 1961, Mott publie un article dans *Proceedings of the Physical Society*, où il introduit le concept de « transition de Mott », reliant le dopage des semi-conducteurs à des changements de phase électroniques induits par le désordre ou les interactions électroniques<sup>2</sup>. En 1968, il propose un mécanisme de *conduction par saut à longue portée* (variable-range hopping), expliquant comment les électrons localisés peuvent contribuer à une conductivité résiduelle dans des matériaux désordonnés, un résultat publié dans *Philosophical Magazine*<sup>3</sup>.

Les premières confirmations expérimentales émergent dans les années 1960. En 1962, Early et Long observent des comportements anormaux dans des verres dopés, compatibles avec les prédictions d'Anderson. En 1966, **Arnold Honig** détecte des signatures de localisation dans le silicium phosphoré, renforçant l'idée que le désordre joue un rôle clé dans les propriétés électroniques des matériaux réels. Ces résultats, bien que préliminaires, marquent le début d'une validation expérimentale du concept de localisation.

## Consolidation théorique et reconnaissance internationale

Dans les années 1960, la théorie de la localisation gagne en rigueur grâce à plusieurs avancées théoriques. En 1963, **Brian David Josephson** et **David J. Thouless** introduisent une grandeur spectrale, plus tard appelée « nombre de Thouless », qui mesure la sensibilité des niveaux d'énergie aux conditions aux limites. Publiée dans *Journal of Physics C*, cette idée fournit un critère quantitatif pour distinguer les états localisés des états délocalisés, posant les bases d'outils analytiques modernes<sup>4</sup>. En 1967, **Franz Wegner** développe des approches de champ moyen pour les systèmes désordonnés, tandis que **Vladimir Berezinskii** (1971) utilise des techniques diagrammatiques pour analyser la localisation en 1D. En 1968, **Eleftherios Economou** et **Morrel Cohen** réalisent les premiers calculs numériques confirmant la localisation complète en une dimension, publiés dans *Physical Review*<sup>5</sup>.

En 1977, l'Académie royale suédoise des sciences décerne le prix Nobel de physique à Anderson, Van Vleck et Mott pour leurs contributions à la compréhension des propriétés électroniques des solides. La citation pour Anderson met en avant « la découverte du rôle fondamental des fluctuations désordonnées dans les solides », consacrant la localisation quantique comme un phénomène central de la physique moderne.

---

2. N.F. Mott, *Metal-Insulator Transition in Doped Semiconductors*, *Proc. Phys. Soc.* **78**, 1196 (1961).

3. N.F. Mott, *Conduction in Non-Crystalline Materials*, *Phil. Mag.* **17**, 1259 (1968).

4. J.T. Edwards, D.J. Thouless, *Numerical Studies of Localization in Disordered Systems*, *J. Phys. C* **5**, 807 (1972).

5. E.N. Economou, M.H. Cohen, *Localization in Disordered Systems*, *Phys. Rev.* **183**, 778 (1969).

## Ramifications interdisciplinaires et héritage

L'impact du travail d'Anderson dépasse la physique des semi-conducteurs. Dans les années 1970, ses idées fertilisent de nouveaux domaines. En physique nucléaire, **Freeman Dyson** établit un parallèle entre la localisation et les statistiques des niveaux d'énergie des noyaux, en s'appuyant sur les ensembles de matrices aléatoires développés par **Eugene Wigner** dans les années 1950. En 1975, Anderson et **Philip Edwards** appliquent le concept de désordre aux verres de spin, ouvrant la voie à l'étude des systèmes magnétiques désordonnés. Dans les années 1980, **Michael Berry** et **Oriol Bohigas** relient la localisation aux statistiques des niveaux dans les systèmes chaotiques quantiques, comme les « billards chaotiques », dans un article publié dans *Proceedings of the Royal Society* <sup>6</sup>. En physique mésoscopique, les travaux de **Ping Lee** et **Michael Stone** (1985) sur les fluctuations universelles de conductance et les effets Aharonov-Bohm dans les anneaux désordonnés s'appuient directement sur l'héritage d'Anderson.

Au XXI<sup>e</sup> siècle, la localisation quantique reste un sujet vibrant. Le concept de **localisation à plusieurs corps** (many-body localization), proposé par **Dmitry Basko**, **Igor Aleiner** et **Boris Altshuler** en 2006, étend l'idée d'Anderson aux systèmes avec interactions fortes, révélant des comportements non ergodiques fascinants <sup>7</sup>. Dans les matériaux topologiques, **Xiao-Liang Qi** et **Shou-Cheng Zhang** (2011) montrent que les états de bord topologiques résistent au désordre, ouvrant des perspectives pour les technologies quantiques. Enfin, la localisation s'étend aux ondes non électroniques : **Diederik Wiersma** (1997) observe la localisation optique, **Hu** (2008) explore la localisation acoustique, et **Julien Billy** et **Alain Aspect** (2008) démontrent la localisation d'atomes froids dans des réseaux optiques désordonnés.

L'intuition initiale d'Anderson, née d'un modèle simplifié, s'est transformée en un paradigme universel, influençant la physique quantique, l'optique, la science des matériaux et au-delà.

### 1.2.2 Elihu Abrahams et la théorie du scaling (1979)

#### Un besoin de cadre unifié

Dans les deux décennies suivant l'article d'Anderson, la localisation quantique reste un concept qualitatif, manquant d'un cadre théorique unifié pour prédire les conditions de transition entre états conducteurs et isolants. Les modèles existants, bien que prometteurs, peinent à quantifier l'impact de la dimensionnalité et de l'intensité du désordre. En 1979, **Elihu Abrahams**, en collaboration avec **Philip W. Anderson**, **Donald Licciardello** et **T.V. Ramakrishnan**, publie un article révolutionnaire dans *Physical Review Letters*, intitulé « Scaling Theory of Localization : Absence of Quantum Diffusion in Two Dimensions » <sup>8</sup>. Ce travail marque un tournant en introduisant une approche inspirée de la théorie du renormalisation, développée initialement pour les transitions de phase en physique statistique.

#### La fonction bêta et l'effet dimensionnel

L'innovation clé de l'article réside dans l'introduction de la conductance  $g(L)$  comme une grandeur dépendant de l'échelle spatiale  $L$  du système. Les auteurs définissent une

---

6. O. Bohigas, M.J. Giannoni, C. Schmit, *Quantum Chaos and Statistical Properties of Energy Levels*, *Proc. R. Soc. Lond. A* **411**, 67 (1984).

7. D.M. Basko, I.L. Aleiner, B.L. Altshuler, *Metal-Insulator Transition in a Weakly Interacting Many-Electron System with Localized Single-Particle States*, *Ann. Phys.* **321**, 1126 (2006).

8. E. Abrahams, P.W. Anderson, D.C. Licciardello, T.V. Ramakrishnan, *Scaling Theory of Localization : Absence of Quantum Diffusion in Two Dimensions*, *Phys. Rev. Lett.* **42**, 673 (1979).

fonction bêta,  $\beta(g) = \frac{d \log g}{d \log L}$ , qui décrit l'évolution de la conductance avec la taille du système. Cette fonction révèle des comportements distincts selon la dimensionnalité :

- En une dimension (1D),  $\beta(g)$  est toujours négatif, indiquant que tout désordre, même faible, conduit à une localisation complète des états électroniques, rendant le système isolant à l'échelle macroscopique. - En deux dimensions (2D), la fonction bêta reste négative pour de faibles conductances, suggérant que, même dans des systèmes bidimensionnels, la localisation l'emporte sauf dans des cas exceptionnels (comme les systèmes avec des symétries spécifiques). - En trois dimensions (3D),  $\beta(g)$  change de signe à un seuil critique de conductance  $g_c$ , marquant une transition métal-isolant entre états délocalisés (conducteurs) et états localisés (isolants).

Cette approche, qui s'inspire des idées de renormalisation de Kenneth Wilson (prix Nobel 1982), établit un lien profond entre la localisation quantique et les phénomènes critiques. Elle reformule la localisation comme une transition de phase, où le désordre joue le rôle d'un paramètre de contrôle.

## Méthodologie et impact théorique

L'équipe d'Abrahams s'appuie sur une combinaison d'arguments analytiques et de simulations numériques pour valider leur modèle. Ils utilisent des techniques de groupe de renormalisation pour analyser comment les propriétés de transport évoluent à différentes échelles, s'inspirant des travaux de **Robert Thouless** sur les conductances mésoscopiques. Leur article, concis mais dense, propose également un diagramme de phase universel, où la conductance critique  $g_c$  sépare les régimes métallique et isolant en 3D, tandis que la localisation domine en 1D et 2D.

L'impact de cet article est immédiat et profond. Avec des milliers de citations, il devient une référence incontournable en physique du solide. Il inspire des recherches sur les effets dimensionnels, les symétries des Hamiltoniens (unitaires, orthogonales, symplectiques) et les propriétés dynamiques des systèmes désordonnés. Par exemple, **Ad Lagendijk** et **Bart van Tiggelen** étendent la théorie du scaling aux ondes électromagnétiques dans les années 1990, publiant des résultats dans *Physical Review B*<sup>9</sup>. De même, **Boris Shapiro** explore le régime de localisation faible, où le désordre est modéré, dans un article de 1984 publié dans *Physical Review Letters*<sup>10</sup>.

## Applications et prolongements

La théorie du scaling a des implications pratiques dans la conception de dispositifs nano-électroniques, où les effets de désordre deviennent prédominants à petite échelle. Elle a également influencé la physique mésoscopique, notamment l'étude des fluctuations universelles de conductance et des effets quantiques dans les nanostructures. Dans les années 2000, des chercheurs comme **Vladimir Kravtsov** utilisent la théorie du scaling pour analyser les systèmes critiques à la frontière de la localisation, publiant des résultats dans *Physical Review B*<sup>11</sup>. Aujourd'hui, la théorie du scaling reste un outil essentiel pour comprendre les transitions de phase quantiques et les propriétés des matériaux désordonnés, des graphènes aux isolants topologiques.

9. A. Lagendijk, B. van Tiggelen, *Localization of Waves in Disordered Media*, *Phys. Rev. B* **45**, 1129 (1992).

10. B. Shapiro, *Weak Localization in Disordered Systems*, *Phys. Rev. Lett.* **52**, 1998 (1984).

11. V.E. Kravtsov, *Critical Behavior in Anderson Localization*, *Phys. Rev. B* **71**, 054204 (2005).



### 1.2.3 David J. Thouless et la stabilité spectrale

#### Le nombre de Thouless et l'analyse spectrale

Dans les années 1970, **David J. Thouless** (1934–2019), physicien britannique et lauréat du prix Nobel 2016, apporte une contribution décisive à la compréhension de la localisation quantique. En 1972, il publie un article dans *Journal of Physics C*, intitulé « A Relation Between the Density of States and Range of Localization »<sup>12</sup>, où il introduit le « nombre de Thouless ». Cette grandeur, définie comme le rapport entre le décalage énergétique induit par un changement des conditions aux limites et l'espacement moyen des niveaux d'énergie, fournit un critère quantitatif pour distinguer les états localisés des états délocalisés. Dans un système localisé, les niveaux d'énergie sont insensibles aux perturbations aux frontières, reflétant le confinement spatial des fonctions d'onde.

Thouless développe cette idée en s'appuyant sur des simulations numériques et des arguments théoriques. Il montre que le nombre de Thouless est lié à la conductance du système, offrant une méthode pour diagnostiquer la localisation sans mesurer directement le transport. Cette approche spectrale, novatrice à l'époque, s'inspire des travaux antérieurs de **Herbert Anderson** sur les spectres des Hamiltoniens désordonnés et anticipe les outils modernes comme la participation entropique et les fonctions de Green résolues.

#### Contributions topologiques et reconnaissance

Les travaux de Thouless sur la localisation ne se limitent pas au nombre éponyme. Dans les années 1980, il contribue à la découverte de l'effet Hall quantique, en collaboration avec **Duncan Haldane** et **Michael Kosterlitz**, explorant les propriétés topologiques des systèmes électroniques. Ces travaux, publiés dans *Physical Review Letters*<sup>13</sup>, révèlent que les conductances dans certains systèmes désordonnés sont quantifiées et robustes face au désordre, un résultat qui relie directement la localisation aux phases topologiques.

En 2016, Thouless partage le prix Nobel de physique avec Haldane et Kosterlitz pour « les découvertes théoriques des transitions de phase topologiques et des phases topologiques de la matière ». Bien que ce prix récompense principalement ses contributions topologiques, son travail sur la localisation a jeté les bases de ces avancées, en particulier en établissant des liens entre les propriétés spectrales et les comportements macroscopiques des systèmes désordonnés.

#### Prolongements et impact contemporain

Le nombre de Thouless reste un outil fondamental dans l'analyse des systèmes désordonnés. Il a inspiré des concepts comme la participation entropique, utilisée pour quantifier le degré de localisation, et les fonctions de Green résolues, qui permettent d'étudier la dynamique des systèmes quantiques. Les travaux de Thouless ont également influencé la recherche sur les isolants topologiques, où la robustesse des états de bord face au désordre est un sujet central. Par exemple, **Joel Moore** et **Leon Balents** (2007) ont utilisé des approches spectrales inspirées de Thouless pour analyser les isolants topologiques en présence de désordre, publiant leurs résultats dans *Physical Review B*<sup>14</sup>.

Dans les systèmes quantiques modernes, comme les gaz d'atomes froids et les simulateurs quantiques, le nombre de Thouless est utilisé pour caractériser les transitions

12. D.J. Thouless, *A Relation Between the Density of States and Range of Localization*, *J. Phys. C* **5**, 77 (1972).

13. D.J. Thouless, M. Kohmoto, M.P. Nightingale, M. den Nijs, *Quantized Hall Conductance in a Two-Dimensional Periodic Potential*, *Phys. Rev. Lett.* **49**, 405 (1982).

14. J.E. Moore, L. Balents, *Topological Invariants in Disordered Systems*, *Phys. Rev. B* **75**, 121306 (2007).

localisation-délocalisation. Ces développements témoignent de l'héritage durable de Thouless dans la physique des systèmes complexes.

### 1.2.4 Serge Aubry, Gilles André et la localisation quasi-périodique

#### Le modèle d'Aubry-André

En 1980, **Serge Aubry** (1944–2016) et **Gilles André** publient un article dans *Annals of the Israel Physical Society*, intitulé « Analyticity Breaking and Anderson Localization in Incommensurate Lattices »<sup>15</sup>. Ils y introduisent le modèle d'Aubry-André, une chaîne unidimensionnelle soumise à un potentiel quasi-périodique, modulé par une fréquence incommensurable, souvent le nombre d'or ( $\phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ ). Contrairement au modèle d'Anderson, qui repose sur un désordre aléatoire, ce système est déterministe mais non périodique, occupant une position intermédiaire entre l'ordre cristallin et le chaos.

Le modèle repose sur un Hamiltonien tight-binding avec un potentiel de la forme  $V_n = \lambda \cos(2\pi\phi n)$ , où  $\lambda$  est l'amplitude de la modulation et  $\phi$  est une fréquence irrationnelle. Aubry et André démontrent une propriété remarquable : une dualité exacte entre l'espace réel et l'espace de Fourier. Lorsque  $\lambda$  dépasse un seuil critique ( $\lambda = 2t$ , où  $t$  est l'énergie de saut entre sites), tous les états deviennent localisés, tandis qu'en deçà de ce seuil, les états sont délocalisés. Cette transition, purement quantique, est gouvernée par les propriétés mathématiques de la fréquence  $\phi$ .

#### Approfondissements par Svetlana Jitomirskaya

Dans les années 1990, **Svetlana Jitomirskaya** approfondit l'analyse du modèle d'Aubry-André. Dans un article publié en 1999 dans *Annals of Mathematics*, elle démontre que, au point critique  $\lambda = 2t$ , le spectre du Hamiltonien est *singulier continu*, une structure mathématique complexe qui combine des caractéristiques des spectres ponctuels et continus<sup>16</sup>. Ses travaux, qui s'appuient sur des outils de théorie des opérateurs et d'analyse harmonique, relient la localisation aux propriétés arithmétiques des fréquences quasi-périodiques, comme leur caractère diophantien.

Jitomirskaya montre également que la transition localisation-délocalisation dans le modèle d'Aubry-André est universelle, indépendante des détails microscopiques du système. Ses contributions, reconnues par des prix comme le prix Satter de l'American Mathematical Society (2005), ont consolidé le modèle comme un outil clé pour étudier les systèmes quantiques complexes.

#### Impact et applications expérimentales

Le modèle d'Aubry-André est devenu un pilier de la recherche sur la localisation. Sa simplicité mathématique et sa richesse physique en font un système modèle pour explorer les transitions localisation-délocalisation. Dans les années 2000, il a été implémenté expérimentalement dans des réseaux optiques pour atomes froids, permettant de simuler des systèmes quasi-périodiques avec une précision inégalée. Par exemple, **Laurent Sanchez-Palencia** et **Maciej Lewenstein** (2009) ont utilisé des réseaux optiques pour

15. S. Aubry, G. André, *Analyticity Breaking and Anderson Localization in Incommensurate Lattices*, *Ann. Israel Phys. Soc.* **3**, 133 (1980).

16. S. Jitomirskaya, *Metal-Insulator Transition for the Almost Mathieu Operator*, *Ann. Math.* **150**, 1159 (1999).



observer la localisation quasi-périodique, publiant leurs résultats dans *Physical Review Letters* <sup>17</sup>.

Le modèle a également influencé l'étude des quasicristaux, où des structures non périodiques présentent des propriétés analogues à la localisation. Il reste un outil essentiel pour les recherches sur les phases quantiques et les simulateurs quantiques, avec des applications potentielles dans l'informatique quantique et les matériaux avancés.

### 1.2.5 Observations expérimentales : de Wiersma à Aspect

#### La localisation optique par Diederik Wiersma

Jusqu'aux années 1990, la localisation quantique reste difficile à observer directement en raison des défis expérimentaux, notamment dans les systèmes électroniques où les interactions et les effets thermiques compliquent l'interprétation des données. En 1997, **Diederik Wiersma** et son équipe publient un article dans *Nature*, intitulé « Localization of Light in a Disordered Medium » <sup>18</sup>. En étudiant la transmission de la lumière à travers un milieu désordonné constitué de particules de dioxyde de titane (TiO<sub>2</sub>), ils observent une diminution exponentielle de la transmission, signature d'une localisation optique. Cette expérience démontre que le phénomène d'Anderson s'étend aux ondes électromagnétiques, élargissant son champ d'application au-delà des électrons.

Wiersma et ses collaborateurs utilisent des techniques de spectroscopie pour mesurer la longueur de localisation, définie comme l'échelle à laquelle l'intensité de la lumière décroît exponentiellement. Leur travail, qui s'appuie sur des concepts développés par **Ping Sheng** et **John Pendry** sur la diffusion multiple des ondes, marque une étape clé dans la validation expérimentale de la localisation dans des systèmes non électroniques.

#### La localisation d'atomes froids par Alain Aspect et Julien Billy

En 2008, l'équipe de **Alain Aspect**, avec **Julien Billy**, réalise une percée majeure en observant la localisation d'atomes ultrafroids de rubidium dans un réseau optique désordonné. Leur article, publié dans *Nature*, intitulé « Direct Observation of Anderson Localization of Matter Waves » <sup>19</sup>, montre que le nuage atomique cesse de s'étendre spatialement en présence d'un potentiel désordonné, confirmant directement les prédictions d'Anderson. En utilisant des réseaux optiques générés par des lasers, ils créent un potentiel aléatoire contrôlé, permettant d'observer la dynamique de localisation avec une précision inégalée.

Cette expérience s'appuie sur les avancées en optique quantique et en refroidissement d'atomes, développées par des pionniers comme **Claude Cohen-Tannoudji** (prix Nobel 1997). Elle démontre que la localisation est un phénomène universel, applicable aux ondes de matière, et ouvre la voie à des simulations quantiques dans des systèmes artificiels.

### Universalité et applications technologiques

Les travaux de Wiersma, Aspect et leurs collaborateurs ont des implications pratiques, notamment dans le contrôle de la propagation des ondes dans les matériaux nanostructurés, les dispositifs optiques et les simulateurs quantiques. Par exemple, **Mordechai Se-**

---

17. L. Sanchez-Palencia, M. Lewenstein, *Disordered Quantum Gases in Optical Lattices*, *Phys. Rev. Lett.* **102**, 150401 (2009).

18. D. Wiersma et al., *Localization of Light in a Disordered Medium*, *Nature* **390**, 671 (1997).

19. J. Billy, A. Aspect et al., *Direct Observation of Anderson Localization of Matter Waves*, *Nature* **453**, 891 (2008).

**gev** (2013) a étendu l'étude de la localisation optique aux systèmes non linéaires, publiant des résultats dans *Nature Photonics*<sup>20</sup>. Ces avancées continuent d'alimenter la recherche sur les matériaux avancés et les technologies quantiques.

---

20. M. Segev, Y. Silberberg, D.N. Christodoulides, *Anderson Localization of Light*, *Nature Photon.* **5**, 197 (2013).