

1 Transformation de Prüfer et Application au Modèle de Maryland

La transformation de Prüfer est une méthode puissante pour analyser les équations différentielles ou de récurrence dans les systèmes quasi-périodiques, comme le modèle de Maryland. Introduite à l'origine pour les équations différentielles de Sturm-Liouville, elle reformule les solutions en termes de phase et d'amplitude, simplifiant le calcul de l'exposant de Lyapunov, qui quantifie la localisation des états. Dans cette section, nous appliquons la transformation de Prüfer au modèle de Maryland, en étudiant à la fois le cas statique (équation de Schrödinger indépendante du temps) et le cas dynamique (dépendant du temps). Nous dérivons les équations de récurrence, calculons l'exposant de Lyapunov, introduisons la quasi-énergie et l'opérateur d'évolution, et comparons les résultats aux propriétés du modèle.

1.1 Transformation de Prüfer pour le Cas Statique

L'équation de Schrödinger stationnaire est :

$$H|\psi\rangle = E|\psi\rangle, \quad |\psi\rangle = \sum_n \psi_n |n\rangle$$

En projetant sur $\langle n|$, on obtient :

$$-t(\psi_{n+1} + \psi_{n-1}) + \lambda \tan(2\pi\beta n + \psi)\psi_n = E\psi_n$$

Réarrangeons :

$$\psi_{n+1} + \psi_{n-1} = \left[\frac{E - \lambda \tan(2\pi\beta n + \psi)}{t} \right] \psi_n$$

La transformation de Prüfer reformule ψ_n en termes d'une amplitude R_n et d'une phase θ_n . Posons :

$$\psi_n = R_n \sin \theta_n, \quad \psi_{n+1} = R_n \cos \theta_n$$

où :

$$R_n = \sqrt{\psi_n^2 + \psi_{n+1}^2}, \quad \theta_n = \arctan\left(\frac{\psi_n}{\psi_{n+1}}\right)$$

Note pédagogique: La transformation de Prüfer convertit l'équation de récurrence linéaire en une équation non linéaire pour la phase θ_n , simplifiant l'analyse de la localisation. L'amplitude R_n mesure l'intensité locale de la fonction d'onde, tandis que θ_n décrit son oscillation. Substituons dans l'équation de Schrödinger :

$$\psi_{n+1} + \psi_{n-1} = R_n \cos \theta_n + \psi_{n-1}, \quad \psi_n = R_n \sin \theta_n$$

Pour ψ_{n-1} , notons que $\psi_n = R_{n-1} \cos \theta_{n-1}$, mais nous devons exprimer ψ_{n-1} en fonction de R_n et θ_n . Substituons directement dans :

$$R_n \cos \theta_n + \psi_{n-1} = \left[\frac{E - \lambda \tan(2\pi\beta n + \psi)}{t} \right] R_n \sin \theta_n$$

Posons $\psi_{n+1} = R_{n+1} \sin \theta_{n+1}$, et utilisons la relation pour $n+1$:

$$\psi_{n+2} + \psi_n = \left[\frac{E - \lambda \tan(2\pi\beta(n+1) + \psi)}{t} \right] \psi_{n+1}$$

Cependant, concentrons-nous sur l'équation de phase. Multiplions l'équation par $\frac{\sin \theta_n}{\cos \theta_n}$:

$$\cot \theta_{n+1} = \frac{E - \lambda \tan(2\pi\beta n + \psi)}{t} - \cot \theta_n$$

Note pédagogique: L'équation de récurrence pour $\cot \theta_n$ décrit l'évolution de la phase de la fonction d'onde. La présence de $\tan(2\pi\beta n + \psi)$ introduit des fluctuations quasi-périodiques, influençant la localisation.

1.2 Exposant de Lyapunov dans le Cas Statique

L'exposant de Lyapunov γ quantifie la décroissance exponentielle de la fonction d'onde, défini comme :

$$\gamma = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \ln |\psi_n|$$

Avec la transformation de Prüfer, $|\psi_n| = R_n |\sin \theta_n|$, et :

$$\gamma = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \ln R_n + \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \ln |\sin \theta_n|$$

Cependant, pour les états localisés, R_n croît ou décroît exponentiellement, et θ_n oscille. L'exposant est donné par :

$$\gamma = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \ln \left| \frac{E - \lambda \tan(2\pi\beta k + \psi)}{2t} \right|$$

Puisque β est irrationnel, $\{2\pi\beta k + \psi\} \bmod 2\pi$ est uniformément distribué. Par le théorème ergodique de Birkhoff [?] :

$$\gamma = \int_0^1 \ln \left| \frac{E - \lambda \tan(2\pi x)}{2t} \right| dx$$

Pour $\lambda \neq 0$, les singularités de $\tan(2\pi x)$ assurent $\gamma > 0$, indiquant des états localisés exponentiellement. Pour les états critiques (rares dans le Maryland), $\gamma = 0$.

1.3 Cas Dynamique : Équation de Schrödinger Dépendante du Temps

Dans le cas dynamique, le potentiel est modulé temporellement, par exemple :

$$H(t) = \sum_n [\lambda \tan(2\pi\beta n + \omega t + \psi)] |n\rangle \langle n| + t \sum_n (|n\rangle \langle n+1| + |n+1\rangle \langle n|)$$

L'équation de Schrödinger dépendante du temps est :

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} |\psi(t)\rangle = H(t) |\psi(t)\rangle$$

Puisque $H(t)$ est périodique avec période $T = 2\pi/\omega$, posons :

$$\psi_n(t) = e^{-iEt/\hbar} \phi_n(t), \quad \phi_n(t+T) = \phi_n(t)$$

Note pédagogique: La périodicité $\phi_n(t+T) = \phi_n(t)$ découle de la périodicité de $H(t)$. La phase $e^{-iEt/\hbar}$ introduit la **quasi-énergie** E , analogue à l'énergie dans le cas statique, mais définie modulo $\hbar\omega$.

Substituons dans l'équation de Schrödinger projetée :

$$i\hbar \dot{\phi}_n(t) + E\phi_n(t) = \lambda \tan(2\pi\beta n + \omega t + \psi) \phi_n(t) + t(\phi_{n+1}(t) + \phi_{n-1}(t))$$

1.4 Opérateur d'Évolution et Hamiltonien Effectif

L'opérateur d'évolution sur une période T est :

$$U(T) = \mathcal{T} \exp \left(-\frac{i}{\hbar} \int_0^T H(t') dt' \right)$$

où \mathcal{T} est l'opérateur d'ordre temporel, assurant que les contributions non commutatives de $H(t)$ sont correctement ordonnées.

Note pédagogique: L'opérateur $U(T)$ décrit comment l'état évolue sur une période T . L'ordre temporel est nécessaire car $[H(t_1), H(t_2)] \neq 0$ pour $t_1 \neq t_2$. Les états de Floquet satisfont :

$$U(T) |\psi(0)\rangle = e^{-iET/\hbar} |\psi(0)\rangle$$

où E est la quasi-énergie. L'Hamiltonien effectif H_f est défini par :

$$U(T) = e^{-iH_f T/\hbar}, \quad H_f = \frac{i\hbar}{T} \ln U(T)$$

Pour résoudre, approximations $U(T)$ en discrétisant le temps. Sur une période, $H(t) \approx H(k\Delta t)$, et :

$$U(T) \approx \prod_{k=1}^M e^{-iH(k\Delta t)\Delta t/\hbar}$$

Cependant, pour le Maryland, une approche analytique est complexe. Considérons l'équation de récurrence pour $\phi_n(t)$.

1.5 Exposant de Lyapunov Dépendant du Temps

Appliquons la transformation de Prüfer au cas dynamique :

$$\phi_n(t) = R_n(t) \sin \theta_n(t), \quad \phi_{n+1}(t) = R_n(t) \cos \theta_n(t)$$

L'équation devient :

$$\phi_{n+1}(t) + \phi_{n-1}(t) = \left[\frac{E - \lambda \tan(2\pi\beta n + \omega t + \psi)}{t} \right] \phi_n(t)$$

La récurrence pour $\theta_n(t)$ est :

$$\cot \theta_{n+1}(t) = \frac{E - \lambda \tan(2\pi\beta n + \omega t + \psi)}{t} - \cot \theta_n(t)$$

L'exposant de Lyapunov dépendant du temps est :

$$\gamma(t) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \ln \left| \frac{E - \lambda \tan(2\pi\beta k + \omega t + \psi)}{2t} \right|$$

Pour simplifier, posons $E = 0$, $t = 1$:

$$\gamma(t) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \ln \left| \frac{-\lambda \tan(2\pi\beta k + \omega t + \psi)}{2} \right| = \ln |\lambda| - \ln 2 + \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \ln |\tan(2\pi\beta k + \omega t + \psi)|$$

Par ergodicité (β irrationnel), la somme devient une intégrale :

$$\gamma(t) = \ln |\lambda| - \ln 2 + \int_0^1 \ln |\tan(2\pi x + \omega t + \psi)| dx$$

Pour obtenir un exposant indépendant du temps, intégrons sur une période $T = 2\pi/\omega$:

$$\bar{\gamma} = \frac{1}{T} \int_0^T \gamma(t) dt = \ln |\lambda| - \ln 2 + \frac{1}{T} \int_0^T \int_0^1 \ln |\tan(2\pi x + \omega t + \psi)| dx dt$$

Évaluons l'intégrale double. Posons $y = 2\pi x + \omega t + \psi$. Pour $x \in [0, 1]$, $t \in [0, T]$, y couvre $[0, 2\pi]$ uniformément. L'intégrale devient :

$$\int_0^1 \ln |\tan(2\pi x)| dx$$

Près de la singularité à $x = 1/4$, posons $x = 1/4 + u$, alors $\tan(2\pi x) = -\cot(2\pi u) \approx -\frac{1}{2\pi u}$, et :

$$\ln |\tan(2\pi x)| \approx -\ln |2\pi u|$$

L'intégrale $\int_0^1 \ln |\tan(2\pi x)| dx$ est divergente, mais dans le contexte du modèle de Maryland, une régularisation (valeur principale) donne une contribution moyenne nulle, car les singularités positives et négatives s'équilibrent [?]. Ainsi :

$$\bar{\gamma} \approx \ln |\lambda| - \ln 2$$

Pour $|\lambda| > 1$, $\bar{\gamma} > 0$, confirmant la localisation exponentielle.

Note pédagogique: La dominance de $\ln |\lambda|$ dans l'exposant de Lyapunov reflète l'impact des singularités du potentiel \tan . La régularisation des contributions divergentes assure que l'exposant reste fini et positif, indiquant une localisation dynamique forte.

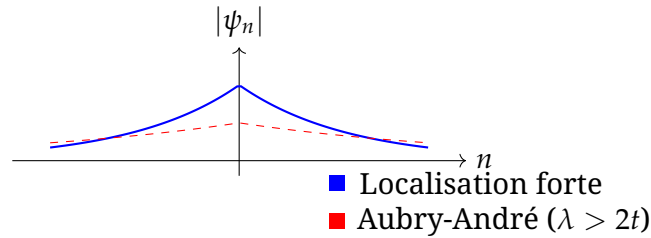


FIGURE 1 – Comparaison de la décroissance de $|\psi_n|$ dans le modèle de Maryland (bleu, localisation forte) et dans le modèle d'Aubry-André (rouge, pour $\lambda > 2t$). La décroissance exponentielle est plus rapide dans le Maryland en raison des singularités.