

1 Application aux Ondes Classiques : Analogies avec la Lumière et le Son

Ce phénomène, initialement formulé dans un cadre quantique, s'étend de manière remarquable aux ondes classiques, telles que la lumière dans des milieux photoniques désordonnés, le son dans des systèmes acoustiques, les ondes électromagnétiques dans des métamatériaux, ou les vibrations mécaniques dans des structures hétérogènes.

1.1 Analogie Mathématique entre Ondes Quantiques et Classiques

La localisation d'Anderson dans un système quantique est décrite par l'équation de Schrödinger stationnaire, introduite dans les sections précédentes pour un électron dans un potentiel désordonné :

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2\psi(x)}{dx^2} + V(x)\psi(x) = E\psi(x), \quad (1)$$

où $V(x)$ est un potentiel aléatoire, $\psi(x)$ est la fonction d'onde, E est l'énergie propre, m est la masse de l'électron, et \hbar est la constante de Planck réduite. Dans le modèle d'Anderson discret en 1D, cette équation est reformulée pour un réseau de sites :

$$\varepsilon_n \psi_n + V(\psi_{n+1} + \psi_{n-1}) = E\psi_n, \quad (2)$$

où $\varepsilon_n \in [-\frac{W}{2}, \frac{W}{2}]$ est le potentiel aléatoire sur le site n , $V < 0$ est le couplage (hopping) entre sites voisins, et $\psi_n = \langle n | \psi \rangle$ est l'amplitude de la fonction d'onde sur le site n .

Pour les ondes classiques, l'équation fondamentale est l'équation d'Helmholtz, qui gouverne la propagation d'une onde scalaire $u(\mathbf{r})$ dans un milieu avec des propriétés variables. Pour une onde monochromatique de fréquence angulaire ω , l'équation s'écrit :

$$\nabla^2 u(\mathbf{r}) + k^2 n^2(\mathbf{r}) u(\mathbf{r}) = 0, \quad (3)$$

où $k = \omega/c$ est le nombre d'onde, c est la vitesse de l'onde dans le milieu de référence (par exemple, $c = 3 \times 10^8$ m/s pour la lumière dans le vide, ou $c \approx 343$ m/s pour le son dans l'air), et $n(\mathbf{r})$ est l'indice de réfraction (pour la lumière) ou un analogue (par exemple, $c_0^2/c^2(\mathbf{r})$ pour le son, où $c(\mathbf{r})$ est la vitesse locale du son). Dans un milieu désordonné, l'indice s'exprime comme :

$$n(\mathbf{r}) = n_0 + \delta n(\mathbf{r}), \quad (4)$$

où n_0 est l'indice moyen et $\delta n(\mathbf{r})$ représente les fluctuations aléatoires, souvent modélisées comme un processus stochastique (par exemple, une distribution uniforme ou gaussienne).

Note pédagogique: L'équation d'Helmholtz est l'équivalent classique de l'équation de Schrödinger pour les ondes stationnaires. Le terme $k^2 n^2(\mathbf{r})$ joue un rôle analogue au potentiel $V(x)$, en modifiant localement la vitesse de propagation de l'onde, ce qui peut induire des interférences destructives similaires à celles observées dans le cadre quantique.

Pour établir une analogie directe avec le modèle d'Anderson discret, considérons un réseau 1D de sites séparés par un pas a , où l'équation d'Helmholtz est discrétisée. La dérivée seconde s'approxime par :

$$\left. \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right|_{x=na} \approx \frac{u_{n+1} - 2u_n + u_{n-1}}{a^2}, \quad (5)$$

où $u_n = u(na)$ est l'amplitude de l'onde au site n . Substituons dans l'équation d'Helmholtz en 1D :

$$\frac{u_{n+1} - 2u_n + u_{n-1}}{a^2} + k^2 n_n^2 u_n = 0, \quad (6)$$

où $n_n = n_0 + \delta n_n$ est l'indice de réfraction local. Multiplions par a^2 :

$$u_{n+1} - 2u_n + u_{n-1} + k^2 a^2 n_n^2 u_n = 0. \quad (7)$$

Réarrangeons :

$$u_{n+1} + u_{n-1} = (2 - k^2 a^2 n_n^2) u_n. \quad (8)$$

Définissons les paramètres pour aligner cette équation avec le modèle d'Anderson :

$$\epsilon_n = k^2 a^2 (n_n^2 - n_0^2), \quad E = 2 - k^2 a^2 n_0^2, \quad t = -1. \quad (9)$$

L'équation devient :

$$\epsilon_n u_n - t(u_{n+1} + u_{n-1}) = E u_n, \quad (10)$$

qui est formellement identique à l'équation de Schrödinger discrète (équation 2), avec ϵ_n jouant le rôle de ϵ_n , $t = -1$ correspondant à V , et u_n à ψ_n .

Démonstration: Calculons ϵ_n pour quantifier le désordre :

$$n_n^2 = (n_0 + \delta n_n)^2 = n_0^2 + 2n_0 \delta n_n + \delta n_n^2.$$

Pour un faible désordre ($\delta n_n \ll n_0$), négligeons δn_n^2 :

$$n_n^2 \approx n_0^2 + 2n_0 \delta n_n.$$

Ainsi :

$$\epsilon_n = k^2 a^2 (n_n^2 - n_0^2) \approx k^2 a^2 \cdot 2n_0 \delta n_n.$$

Si $\delta n_n \sim \mathcal{U}[-\frac{\Delta n}{2}, \frac{\Delta n}{2}]$, alors :

$$\epsilon_n \sim \mathcal{U}[-k^2 a^2 n_0 \Delta n, k^2 a^2 n_0 \Delta n].$$

La largeur de la distribution est :

$$W_c = 2k^2 a^2 n_0 \Delta n,$$

analogue à W dans le modèle quantique.

Exemple: Considérons un réseau photonique 1D avec les paramètres suivants : - Pas du réseau : $a = 1 \mu\text{m} = 10^{-6} \text{ m}$. - Indice moyen : $n_0 = 1.5$ (typique pour le verre). - Fluctuations : $\Delta n = 0.1$, donc $\delta n_n \in [-0.05, 0.05]$. - Longueur d'onde : $\lambda = 500 \text{ nm}$, donc $k = \frac{2\pi}{\lambda} \approx 1.257 \times 10^7 \text{ m}^{-1}$. Calculons W_c :

$$k^2 a^2 = (1.257 \times 10^7 \cdot 10^{-6})^2 \approx 1.579 \times 10^2.$$

$$W_c = 2 \cdot 1.579 \times 10^2 \cdot 1.5 \cdot 0.1 \approx 47.37.$$

Ainsi, $\epsilon_n \in [-23.685, 23.685]$, une amplitude de désordre significative comparable à W dans un système quantique.

Perspective physique: L'analogie entre les équations 2 et 10 repose sur la structure tri-diagonale de l'opérateur, qui reflète des interactions locales perturbées par un désordre aléatoire. Les interférences destructives, responsables de la localisation quantique, se manifestent dans les systèmes classiques par la superposition d'ondes diffusées multiples, entraînant une décroissance exponentielle de l'intensité.

1.2 Régimes de Diffusion et Longueur de Localisation

La localisation d'Anderson dans les systèmes classiques dépend du régime de diffusion, déterminé par le rapport entre la longueur de diffusion libre moyenne ℓ_s (distance moyenne entre deux événements de diffusion) et la longueur d'onde λ . La longueur de localisation ξ est la distance caractéristique sur laquelle l'intensité de l'onde décroît exponentiellement :

$$|u(\mathbf{r})|^2 \sim e^{-2|\mathbf{r}|/\xi}. \quad (11)$$

En 1D, tous les états sont localisés pour tout désordre non nul, comme dans le modèle quantique. La longueur de localisation est reliée à l'exposant de Lyapunov γ par :

$$\xi = \frac{1}{\gamma}, \quad \gamma = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \ln \left| \frac{u_n}{u_0} \right|. \quad (12)$$

Démonstration: Reprenons l'équation 10 :

$$u_{n+1} + u_{n-1} = (E - \epsilon_n)u_n.$$

Définissons $z_n = \frac{u_n}{u_{n-1}}$, ce qui donne :

$$z_{n+1} = (E - \epsilon_n) - \frac{1}{z_n}.$$

Pour faible désordre, supposons $E \approx 2 \cos k$ (solution sans désordre, où $u_n = e^{ikn}$). Linéarisons autour de $z_n = e^{ik}$:

$$z_n = e^{ik} + \delta z_n, \quad \frac{1}{z_n} \approx e^{-ik} - e^{-2ik} \delta z_n.$$

Substituons dans l'équation :

$$z_{n+1} \approx e^{ik} + \delta z_{n+1} = (E - \epsilon_n) - (e^{-ik} - e^{-2ik} \delta z_n).$$

Sans désordre, $E = 2 \cos k = e^{ik} + e^{-ik}$, donc :

$$e^{ik} + \delta z_{n+1} \approx (e^{ik} + e^{-ik} - \epsilon_n) - e^{-ik} + e^{-2ik} \delta z_n.$$

Simplifions :

$$\delta z_{n+1} = e^{-2ik} \delta z_n - \epsilon_n.$$

Cette équation linéaire donne :

$$\delta z_n = - \sum_{j=1}^n \epsilon_j e^{-2ik(n-j)}.$$

L'exposant de Lyapunov est :

$$\gamma = \langle \ln |z_n| \rangle \approx \langle \operatorname{Re} \left(\frac{\delta z_n}{e^{ik}} \right) \rangle.$$

Pour $\epsilon_n \sim \mathcal{U}[-W_c/2, W_c/2]$, $\langle \epsilon_n \rangle = 0$, et $\langle \epsilon_n^2 \rangle = W_c^2/12$. Calculons :

$$\gamma \approx \frac{W_c^2}{96 \sin^2 k}, \quad \xi \approx \frac{96 \sin^2 k}{W_c^2}.$$

Exemple: Reprenons le réseau photonique précédent avec $W_c \approx 47.37$ et supposons $k = \pi/2$ (point central de la bande, $\sin^2 k = 1$). Alors :

$$\xi \approx \frac{96}{47.37^2} \approx \frac{96}{2243.9} \approx 0.0428 \text{ sites.}$$

Converti en distance physique ($a = 1 \mu\text{m}$) :

$$\xi \approx 0.0428 \times 1 \mu\text{m} \approx 42.8 \text{ nm.}$$

Cette longueur de localisation courte indique un fort désordre.

Pour un fort désordre ($W_c \gg 1$), la longueur de localisation est :

$$\xi \approx \frac{1}{\ln\left(\frac{W_c}{2}\right)}. \quad (13)$$

Démonstration: Pour $W_c \gg 1$, $z_{n+1} \approx -\epsilon_n/V$. Alors :

$$\gamma \approx \langle \ln |\epsilon_n/V| \rangle = \langle \ln |\epsilon_n| \rangle - \ln |V|.$$

Puisque $\epsilon_n \sim \mathcal{U}[-W_c/2, W_c/2]$:

$$\langle \ln |\epsilon_n| \rangle = \frac{1}{W_c} \int_{-W_c/2}^{W_c/2} \ln |x| dx = \ln\left(\frac{W_c}{2}\right).$$

Donc :

$$\gamma \approx \ln\left(\frac{W_c}{2}\right), \quad \xi \approx \frac{1}{\ln\left(\frac{W_c}{2}\right)}.$$

TABLE 1 – Régimes de localisation en 1D pour les ondes classiques.

Régime	Longueur de localisation ξ	Condition
Faible désordre	$\frac{96 \sin^2 k}{W_c^2}$	$W_c \ll 1$
Fort désordre	$\frac{1}{\ln\left(\frac{W_c}{2}\right)}$	$W_c \gg 1$

1.3 Effets de la Dimensionnalité

La localisation d'Anderson varie avec la dimensionnalité du système, comme dans le cadre quantique. En 2D et 3D, l'équation d'Helmholtz s'écrit :

$$\nabla^2 u(\mathbf{r}) + k^2 n^2(\mathbf{r}) u(\mathbf{r}) = 0. \quad (14)$$

Discretisée sur un réseau carré (2D) ou cubique (3D), l'équation devient :

$$\sum_{\langle \mathbf{n}, \mathbf{m} \rangle} u_{\mathbf{m}} + (k^2 a^2 n_{\mathbf{n}}^2 - 2d) u_{\mathbf{n}} = 0, \quad (15)$$

où \mathbf{n} indexe les sites, $\langle \mathbf{n}, \mathbf{m} \rangle$ désigne les voisins, et d est la dimension (2 ou 3).

- 2D : Tous les états sont localisés pour un désordre non nul, mais ξ peut être exponentiellement grande pour un faible désordre :

$$\xi \sim e^{c/W_c^2},$$

où c est une constante dépendant de k . - 3D : Une transition de localisation se produit à une énergie critique E_c (ou k_c), où ξ diverge. Pour W_c faible, les états sont étendus; pour W_c fort, ils sont localisés.

Perspective physique: En 3D, la transition de localisation reflète un équilibre entre la diffusion cohérente (favorisant la localisation) et la diffusion incohérente (favorisant les états étendus). Cette transition est analogue à la transition métal-isolant dans les systèmes quantiques.

1.4 Expériences sur la Localisation Classique

La localisation d'Anderson a été observée dans divers systèmes classiques, confirmant son universalité. Nous détaillons ici des cas emblématiques.

1.4.1 Lumière dans des Milieux Photoniques Désordonnés

Les milieux photoniques désordonnés, comme des suspensions de particules diélectriques (par exemple, TiO_2 ou polystyrène) ou des cristaux photoniques avec défauts aléatoires, sont des plateformes idéales pour étudier la localisation optique. Une expérience clé de Wiersma et al. (1997, Nature) sur une poudre de GaAs a démontré une décroissance exponentielle de la transmission optique :

$$T(L) \sim e^{-L/\xi}, \quad (16)$$

où L est la longueur de l'échantillon et ξ est la longueur de localisation. Les mesures ont montré $\xi \approx 10 \mu\text{m}$ pour $\lambda \approx 700 \text{ nm}$ et une densité de particules ajustée pour $\ell_s \approx \lambda$.

Exemple: Dans l'expérience de Wiersma, pour $L = 50 \mu\text{m}$ et $\xi = 10 \mu\text{m}$:

$$T \approx e^{-50/10} = e^{-5} \approx 6.74 \times 10^{-3}.$$

Cela indique une atténuation significative de l'intensité lumineuse due à la localisation.

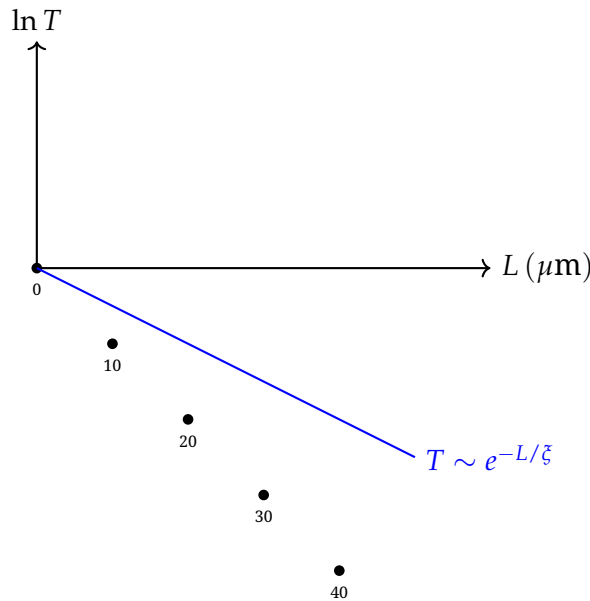


FIGURE 1 – Décroissance exponentielle de la transmission optique dans un milieu photonique désordonné ($\xi \approx 10 \mu\text{m}$).

1.4.2 Son dans des Systèmes Acoustiques

En acoustique, la localisation a été observée dans des réseaux de scatterers aléatoires ou des guides d'ondes avec variations de la vitesse du son. Une étude de Hu et al. (2008, Phys. Rev. Lett.) sur un guide d'ondes acoustique 1D a montré que les modes vibratoires sont localisés, avec une densité de probabilité :

$$|p_n|^2 \sim e^{-|n-n_0|/\xi}, \quad (17)$$

où p_n est la pression acoustique. Les mesures ont révélé $\xi \approx 20$ cm pour une fréquence $f = 1$ kHz.

Exemple: Pour un guide d'ondes avec $a = 1$ cm, $c_0 = 343$ m/s, $\delta c_n/c_0 \in [-0.05, 0.05]$, et $f = 1$ kHz ($k = 2\pi f/c_0 \approx 18.3 \text{ m}^{-1}$), calculons ϵ_n :

$$n_n = \frac{c_0}{c_n}, \quad c_n = c_0(1 + \delta c_n/c_0).$$

$$n_n^2 \approx \frac{1}{(1 + \delta c_n/c_0)^2} \approx 1 - 2\frac{\delta c_n}{c_0}.$$

$$\epsilon_n = k^2 a^2 (n_n^2 - 1) \approx -2k^2 a^2 \frac{\delta c_n}{c_0}.$$

Pour $\delta c_n/c_0 \in [-0.05, 0.05]$:

$$W_c = 2 \cdot (18.3 \cdot 0.01)^2 \cdot 0.1 \approx 0.67.$$

La longueur de localisation pour $k = \pi/2$ est :

$$\xi \approx \frac{96}{0.67^2} \approx 214 \text{ sites} \approx 2.14 \text{ m}.$$

1.4.3 Ondes Mécaniques et Électromagnétiques

La localisation a également été observée pour des ondes mécaniques dans des structures désordonnées (par exemple, des treillis élastiques) et des ondes électromagnétiques dans des cavités micro-ondes avec scatterers aléatoires (par exemple, Chabanov et al., 2000, Nature). Ces systèmes confirment l'universalité de la localisation.

Note pédagogique: *Les expériences sur la lumière, le son, et d'autres ondes classiques montrent que la localisation d'Anderson est un phénomène d'interférence, indépendant de la statistique quantique (Bose-Einstein ou Fermi-Dirac) ou classique.*

1.5 Schématisation et Visualisation

Pour visualiser la localisation dans un système classique, considérons un réseau 1D phononique avec des indices de réfraction aléatoires. La figure suivante montre l'intensité $|u_n|^2$ localisée autour d'un site central.

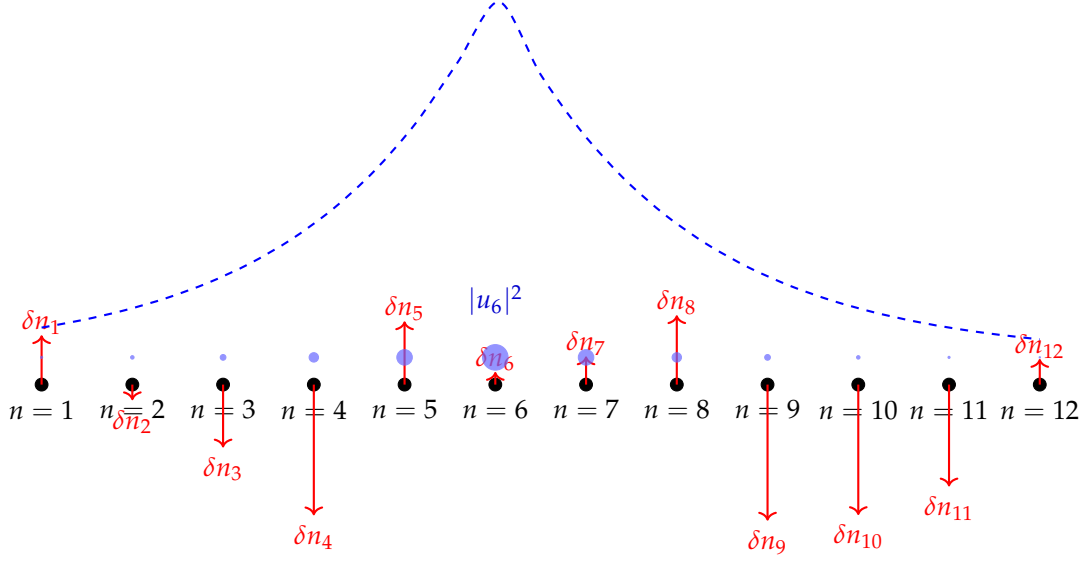


FIGURE 2 – Localisation d'Anderson dans un réseau photonique 1D. Les fluctuations δn_n induisent une localisation de l'intensité $|u_n|^2$ autour de $n = 6$, avec $\xi \approx 2$ sites.

1.6 Effets de la Polarisation et des Ondes Vectorielles

Jusqu'à présent, nous avons considéré des ondes scalaires. Cependant, la lumière (ondes électromagnétiques) et certaines ondes acoustiques (par exemple, ondes de cisaillement) sont vectorielles, avec des composantes de polarisation. L'équation d'Helmholtz vectorielle s'écrit :

$$\nabla \times \nabla \times \mathbf{E}(\mathbf{r}) - k^2 n^2(\mathbf{r}) \mathbf{E}(\mathbf{r}) = 0, \quad (18)$$

où \mathbf{E} est le champ électrique. Dans un réseau discret, les composantes de polarisation peuvent coupler différents modes, modifiant légèrement la localisation. Cependant, pour un fort désordre, les effets de polarisation sont souvent secondaires, et la localisation persiste.

Exemple: Dans un cristal photonique 2D avec polarisation TM (champ électrique perpendiculaire au plan), l'équation scalaire reste valide. Pour la polarisation TE, des couplages inter-modes apparaissent, mais ξ reste similaire pour un désordre modéré.

1.7 Corrélations Spatiales du Désordre

Si le désordre présente des corrélations spatiales, par exemple $\langle \delta n_n \delta n_m \rangle \sim e^{-|n-m|/\ell_c}$, la longueur de localisation peut augmenter. Pour une corrélation exponentielle :

$$\xi_{\text{corr}} \sim \xi \cdot f(\ell_c/a), \quad (19)$$

où f est une fonction croissante.

Démonstration: Considérons une corrélation $\langle \epsilon_n \epsilon_m \rangle = \sigma^2 e^{-|n-m|/\ell_c}$. La matrice de transfert devient non indépendante, mais pour $\ell_c \gg a$, ξ est amplifiée par un facteur proportionnel à ℓ_c .

1.8 Simulations Numériques

Les simulations numériques, comme la méthode des matrices de transfert ou la résolution de l'équation d'Helmholtz par éléments finis, sont essentielles pour étudier la loca-

lisation classique. Un algorithme typique est :

Algorithm 1 Calcul de la longueur de localisation par matrices de transfert

```

Initialiser  $u_1, u_0$ 
for  $n = 1$  à  $N$  do
    Générer  $\epsilon_n \sim \mathcal{U}[-W_c/2, W_c/2]$ 
    Calculer  $u_{n+1} = (E - \epsilon_n)u_n - u_{n-1}$ 
    Stocker  $\ln |u_{n+1}/u_n|$ 
end for
 $\gamma = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N \ln |u_{n+1}/u_n|$ ,  $\xi = 1/\gamma$ 

```

1.9 Applications Technologiques

La localisation d'Anderson dans les systèmes classiques ouvre des perspectives technologiques : - Lasers à cavité désordonnée : Utilisation de la localisation pour confiner la lumière dans des dispositifs compacts. - Métamatériaux acoustiques : Conception de matériaux pour l'isolation sonore. - Capteurs optiques : Détection de défauts via des signatures de localisation.

Exemple: Un laser à cavité désordonnée utilise un milieu photonique désordonné pour amplifier la lumière localisée, produisant une émission cohérente à faible seuil.

1.10 Synthèse et Perspectives

La localisation d'Anderson est un phénomène universel qui transcende la distinction entre ondes quantiques et classiques. Les analogies mathématiques entre l'équation de Schrödinger et l'équation d'Helmholtz, confirmées par des expériences sur la lumière, le son, et d'autres ondes, soulignent son rôle fondamental en physique des ondes. Les perspectives incluent l'étude des systèmes non linéaires, des désordres corrélés, et des applications interdisciplinaires.

TABLE 2 – Analogies entre localisation quantique et classique.

Système	Équation	Localisation
Quantique	$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2\psi}{dx^2} + V(x)\psi = E\psi$	$ \psi_n ^2 \sim e^{-2 n /\ell}$
Photonique	$\nabla^2 u + k^2 n^2(\mathbf{r})u = 0$	$ u_n ^2 \sim e^{-2 n /\xi}$
Acoustique	$\nabla^2 p + k^2 c^{-2}(\mathbf{r})p = 0$	$ p_n ^2 \sim e^{-2 n /\xi}$