

1 Matrices de Transfert Multi-Canaux dans un Ruban Quasi-2D avec Désordre

L'extension du modèle d'Anderson à des géométries quasi-bidimensionnelles, comme un ruban de largeur finie, introduit de nouveaux mécanismes de transport. Cette section généralise la méthode des matrices de transfert à plusieurs canaux, en tenant compte des couplages transverses et de l'impact du désordre sur chacun d'eux. Elle introduit également la notion de longueur de localisation pour chaque canal et discute de la théorie du Single Parameter Scaling, qui permet de prédire le comportement global du système à partir de paramètres dimensionnels. Le cas quasi-2D sert ici de pont entre les modèles 1D et 2D.

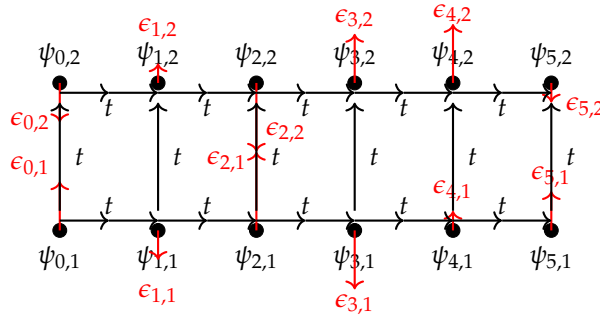


FIGURE 1 – Chaîne double (quasi-2D) avec désordre aléatoire sur chaque site $\epsilon_{i,j}$ et couplages t entre les voisins proches.

1.1 Hamiltonien et Définition du Modèle

Considérons un ruban quasi-2D formé d'un réseau rectangulaire avec N sites dans la direction longitudinale ($i = 1, \dots, N$) et M sites dans la direction transverse ($m = 1, \dots, M$). L'Hamiltonien sans désordre est :

$$H_0 = - \sum_{i=1}^{N-1} \sum_{m=1}^M (|i, m\rangle \langle i+1, m| + |i+1, m\rangle \langle i, m|) - \sum_{i=1}^N \sum_{m=1}^{M-1} (|i, m\rangle \langle i, m+1| + |i, m+1\rangle \langle i, m|)$$

où : - $t = 1$: amplitude de saut longitudinal entre sites voisins ((i, m) et $(i+1, m)$). - $t_{\perp} = 1$: amplitude de saut transverse entre sites voisins ((i, m) et $(i, m+1)$). - $|i, m\rangle$: état localisé au site (i, m) . Le terme de désordre est :

$$V = \sum_{i=1}^N \sum_{m=1}^M \epsilon_{i,m} |i, m\rangle \langle i, m|, \quad \epsilon_{i,m} \in \left[-\frac{W}{2}, \frac{W}{2}\right]$$

où $\epsilon_{i,m} \sim \mathcal{U}\left[-\frac{W}{2}, \frac{W}{2}\right]$ est un potentiel aléatoire uniformément distribué, et $W \geq 0$ est la force du désordre. Les conditions aux limites sont ouvertes dans la direction transverse ($\psi_{i,0} = \psi_{i,M+1} = 0$) et ouvertes ou périodiques dans la direction longitudinale, selon le contexte

1.2 Équation de Schrödinger

L'équation de Schrödinger discrète est :

$$\psi_{n+1,m} + \psi_{n-1,m} + \psi_{n,m+1} + \psi_{n,m-1} + \epsilon_{n,m} \psi_{n,m} = E \psi_{n,m}$$

avec des conditions aux limites ouvertes dans la direction transverse ($\psi_{n,0} = \psi_{n,M+1} = 0$) et ouvertes ou périodiques dans la direction longitudinale.

1.3 Vecteur et Matrice Transverses

Le vecteur transverse au plan n regroupe les amplitudes de la fonction d'onde sur les M sites transverses :

$$\boldsymbol{\psi}_n = \begin{pmatrix} \psi_{n,1} \\ \psi_{n,2} \\ \vdots \\ \psi_{n,M} \end{pmatrix}$$

La matrice transverse $H_T^{(n)}$, de taille $M \times M$, décrit les interactions transverses et les potentiels :

$$H_T^{(n)} = \begin{pmatrix} \epsilon_{n,1} & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & \epsilon_{n,2} & 1 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \epsilon_{n,3} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & \epsilon_{n,M} \end{pmatrix}$$

Cette matrice tridiagonale inclut les potentiels aléatoires $\epsilon_{n,m}$ et les sauts transverses.

1.4 Équation de Schrödinger Matricielle

Réécrivons l'équation (1.2) pour le plan n :

$$\boldsymbol{\psi}_{n+1} + \boldsymbol{\psi}_{n-1} + H_T^{(n)} \boldsymbol{\psi}_n = E \boldsymbol{\psi}_n$$

Isolons $\boldsymbol{\psi}_{n+1}$:

$$\boldsymbol{\psi}_{n+1} = (EI_M - H_T^{(n)}) \boldsymbol{\psi}_n - \boldsymbol{\psi}_{n-1}$$

où I_M est la matrice identité $M \times M$. Cette équation matricielle décrit la propagation longitudinale.

1.5 Matrice de Transfert Multi-Canaux

Pour obtenir la forme de transfert, introduisons le vecteur étage (ou vecteur double étage), qui combine les amplitudes aux plans n et $n-1$:

$$\boldsymbol{\Psi}_n = \begin{pmatrix} \boldsymbol{\psi}_n \\ \boldsymbol{\psi}_{n-1} \end{pmatrix}$$

un vecteur de dimension $2M$. L'équation matricielle devient :

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{\psi}_{n+1} \\ \boldsymbol{\psi}_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} EI_M - H_T^{(n)} & -I_M \\ I_M & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boldsymbol{\psi}_n \\ \boldsymbol{\psi}_{n-1} \end{pmatrix} = T_n \boldsymbol{\Psi}_n$$

La matrice de transfert multi-canaux T_n est :

$$T_n = \begin{pmatrix} EI_M - H_T^{(n)} & -I_M \\ I_M & 0 \end{pmatrix}$$

Application de T_n : La matrice T_n propage l'onde d'un plan à l'autre, transformant $\boldsymbol{\Psi}_n$ en $\boldsymbol{\Psi}_{n+1}$. Physiquement, T_n encode les interactions longitudinales et transverses, ainsi que l'effet du désordre via $\epsilon_{n,m}$. Le produit total des matrices de transfert donne :

$$\boldsymbol{\Psi}_{N+1} = M_N \boldsymbol{\Psi}_1, \quad M_N = \prod_{n=1}^N T_n$$

1.6 Exposants de Lyapunov et Méthode de Gram-Schmidt

Les exposants de Lyapunov $\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_{2M}$ décrivent le comportement asymptotique des solutions de l'équation de transfert. Selon le théorème d'Oseledets, les valeurs singulières de $M_N = \prod_{n=1}^N T_n$ croissent comme $\delta_{ij}(M_N) \approx e^{\lambda_j N}$, où $\delta_{ij}(M_N)$ sont les valeurs singulières de M_N . Les M premiers exposants positifs ($\lambda_1, \dots, \lambda_M$) correspondent aux taux de décroissance des M canaux de propagation, avec $\lambda_{M+i} = -\lambda_{M-i+1}$ pour $i = 1, \dots, M$. Le plus petit exposant positif λ_1 (ou le plus grand négatif λ_{2M}) détermine la longueur de localisation du canal le plus conducteur :

$$\xi_M = \frac{1}{\lambda_1}$$

Pour calculer les exposants, nous utilisons la méthode de Gram-Schmidt avec décomposition QR. Initialisons une base orthonormale de $2M$ vecteurs $\{\mathbf{v}_1^{(0)}, \dots, \mathbf{v}_{2M}^{(0)}\}$. À l'étape n , appliquons T_n :

$$\mathbf{w}_i^{(n)} = T_n \mathbf{v}_i^{(n-1)}, \quad i = 1, \dots, 2M$$

Effectuons l'orthonormalisation :

$$\mathbf{u}_1^{(n)} = \mathbf{w}_1^{(n)}, \quad \mathbf{v}_1^{(n)} = \frac{\mathbf{u}_1^{(n)}}{\|\mathbf{u}_1^{(n)}\|}, \quad r_{11}^{(n)} = \|\mathbf{u}_1^{(n)}\|$$

$$\mathbf{u}_i^{(n)} = \mathbf{w}_i^{(n)} - \sum_{j=1}^{i-1} \langle \mathbf{v}_j^{(n)}, \mathbf{w}_i^{(n)} \rangle \mathbf{v}_j^{(n)}, \quad \mathbf{v}_i^{(n)} = \frac{\mathbf{u}_i^{(n)}}{\|\mathbf{u}_i^{(n)}\|}, \quad r_{ii}^{(n)} = \|\mathbf{u}_i^{(n)}\|$$

La décomposition QR donne $T_n Q_{n-1} = Q_n R_n$, où R_n est triangulaire supérieure. Les exposants sont :

$$\lambda_i \approx \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N \ln r_{ii}^{(n)}.$$

Cette méthode garantit une estimation numérique stable des λ_i .

1.7 Interprétation Physique et Single Parameter Scaling

La théorie du Single Parameter Scaling (SPS), introduite par [?], postule que la conductance sans dimension g est le paramètre clé gouvernant la localisation. Dans un ruban quasi-2D, g est donnée par la formule de Landauer :

$$g \approx \sum_{i=1}^M e^{-2\lambda_i L}$$

où $L = N$ est la longueur longitudinale. Pour $L \gg \xi_1$, le canal le moins atténué (λ_1) domine :

$$g \approx e^{-2\lambda_1 L} = e^{-2L/\xi_M}$$

Le SPS prédit que $\ln g$ suit une loi d'échelle universelle dépendant de $\frac{L}{\xi_M}$. Dans le régime de faible désordre ($W \ll 1$), la longueur de localisation ξ_M croît linéairement avec M :

$$\xi_M \approx M \xi_{1D}, \quad \xi_{1D} \approx \frac{96 \left[1 - \left(\frac{E}{2} \right)^2 \right]}{W^2}$$

indiquant une décroissance exponentielle lente ($\lambda_1 \sim \frac{1}{M}$), caractéristique d'un régime presque délocalisé. Pour un fort désordre ($W \gg 1$), $\xi_M \approx \xi_{1D}$, et les canaux sont fortement localisés.

Définissons la grandeur sans dimension :

$$\Lambda_M = \frac{\xi_M}{M} = f\left(\frac{M}{\xi_\infty}\right)$$

où ξ_∞ est la longueur de localisation dans un système 2D pur ($M \rightarrow \infty$). En 2D, $\xi_\infty \sim e^{1/W^2}$ pour un faible désordre, selon la théorie du Single Parameter Scaling (SPS).

La fonction f dépend du régime de désordre :

— **Régime presque délocalisé** ($W \ll 1$, $M \gg 1$) :

— La longueur de localisation croît linéairement avec la largeur :

$$\xi_M \sim M\xi_{1D}, \quad \text{avec} \quad \xi_{1D} \sim \frac{96}{W^2}$$

— Si $\frac{M}{\xi_\infty} \ll 1$, alors :

$$f\left(\frac{M}{\xi_\infty}\right) \approx \text{constante}$$

— Le système est **quasi-délocalisé**, avec une conductance élevée.

— **Régime de localisation forte** ($W \gg 1$) :

— La longueur de localisation est approximativement constante :

$$\xi_M \approx \frac{1}{\ln\left(\frac{W}{2}\right) - 1 + \frac{2E^2}{W^2}}$$

— On obtient alors :

$$\Lambda_M \sim \frac{1}{M}, \quad f\left(\frac{M}{\xi_\infty}\right) \rightarrow 0$$

— Ce comportement indique une **localisation forte** sur tous les canaux.

Pour $M \gg 1$, le ruban approche un système 2D. Dans un système 2D pur, le SPS prédit une transition de localisation à délocalisation à un désordre critique W_c . Pour un ruban quasi-2D, tous les états restent localisés pour $W > 0$, mais ξ_M croît avec M dans le régime de faible désordre :

$$\xi_M \sim M \cdot \frac{96 \left[1 - \left(\frac{E}{2}\right)^2\right]}{W^2}$$

Pour un fort désordre, ξ_M reste proche de la valeur 1D, car les canaux deviennent indépendants.

Les longueurs de localisation $\xi_i = \frac{1}{\lambda_i}$ varient avec W et M . Pour un faible désordre :

$$\xi_i \approx \frac{96 \left[1 - \left(\frac{E}{2}\right)^2\right]}{W^2} \cdot f_i\left(\frac{i}{M}\right)$$

où f_i reflète le couplage inter-canaux, avec $\xi_1 \approx M\xi_{1D}$ pour le canal le plus conducteur. Pour un fort désordre :

$$\xi_i \approx \frac{1}{\ln\left(\frac{W}{2}\right) - 1 + \frac{2E^2}{W^2}}$$

indépendant de i , car les canaux sont découplés.