

1 Modèles d'Aubry-André 1D

Le modèle d'Aubry-André offre une alternative au modèle d'Anderson pour l'étude de la localisation, en remplaçant le désordre aléatoire par un potentiel quasi-périodique. Ce cadre permet d'observer une transition de phase bien définie entre états étendus, localisés, et critiques, selon un paramètre de couplage λ . Cette section explore l'Hamiltonien du modèle, son équation de Schrödinger, et la dualité mathématique (dualité d'Aubry) qui en permet l'analyse exacte.

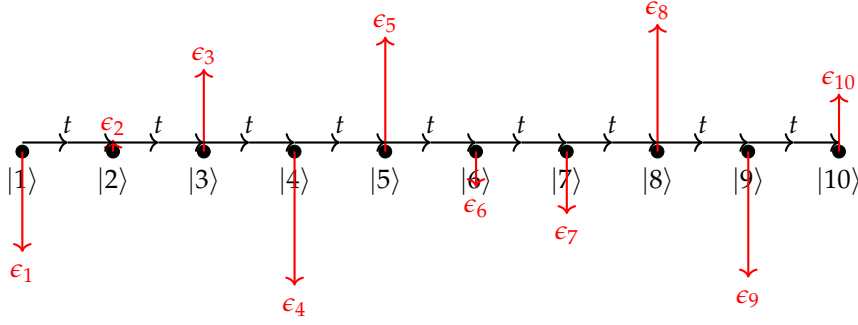


FIGURE 1 – Modèle d'Aubry-André 1D avec potentiel quasi-périodique $\epsilon_n = \lambda \cos(2\pi\beta n + \phi)$

1.1 Hamiltonien 1D d'Aubry-André

L'Hamiltonien d'Aubry-André sur une chaîne 1D de N sites est :

$$H = -t \sum_{n=1}^{N-1} (|n\rangle \langle n+1| + |n+1\rangle \langle n|) + \lambda \sum_{n=1}^N \cos(2\pi\beta n + \phi) |n\rangle \langle n|$$

où :

- $t > 0$: amplitude de saut entre sites voisins (on prend $t = 1$ pour simplifier les calculs);
- $\lambda \geq 0$: amplitude du potentiel quasi-périodique;
- $\beta \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$: nombre irrationnel, typiquement $\beta = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$ (nombre d'or conjugué);
- $\phi \in [0, 2\pi)$: phase du potentiel;
- $n = 1, \dots, N$: indice de site le long de la chaîne.

Le potentiel $\lambda \cos(2\pi\beta n + \phi)$ est dit *quasi-périodique*, car la présence du facteur irrationnel β empêche toute périodicité exacte, contrairement à un cristal parfait.

1.2 Transition Analytique et Tractabilité

Le modèle d'Aubry-André présente une transition de phase à $\lambda = 2t$, où les états passent d'étendus ($\lambda < 2t$) à localisés ($\lambda > 2t$), avec des états critiques au point $\lambda = 2t$. Cette transition est analytique, grâce à la dualité Aubry, qui permet une solution exacte via la transformée de Fourier. En 1D, le modèle est particulièrement tractable car : - Le potentiel quasi-périodique simplifie les calculs par rapport au désordre aléatoire. - La dualité relie le modèle à son espace réciproque, facilitant l'analyse des exposants de Lyapunov.

1.3 Équation de Schrödinger et Matrice de Transfert

L'équation de Schrödinger $H\psi = E\psi$ donne :

$$-\psi_{n+1} - \psi_{n-1} + \lambda \cos(2\pi\beta n + \phi)\psi_n = E\psi_n$$

avec $t = 1$. Cette équation de récurrence peut être écrite sous forme matricielle :

$$\begin{pmatrix} \psi_{n+1} \\ \psi_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E - \lambda \cos(2\pi\beta n + \phi) & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi_n \\ \psi_{n-1} \end{pmatrix} = T_n \begin{pmatrix} \psi_n \\ \psi_{n-1} \end{pmatrix}$$

La matrice de transfert T_n propage l'état d'un site à l'autre. Pour N sites :

$$\begin{pmatrix} \psi_{N+1} \\ \psi_N \end{pmatrix} = M_N \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_0 \end{pmatrix}, \quad M_N = \prod_{n=1}^N T_n$$

Pour lier les états aux extrémités (gauche et droite), on impose des conditions aux limites (par exemple, ouvertes : $\psi_0 = \psi_{N+1} = 0$) ou analyse la croissance exponentielle via l'exposant de Lyapunov :

$$\lambda = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \mathbb{E} \left[\ln \left\| M_N \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_0 \end{pmatrix} \right\| \right]$$

1.4 Dualité Aubry et Localisation à $\lambda = 2t$

La dualité Aubry relie le modèle dans l'espace réel à son équivalent dans l'espace réciproque. Effectuons une transformée de Fourier discrète :

$$\tilde{\psi}_k = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{n=1}^N e^{-i2\pi\beta kn} \psi_n$$

L'Hamiltonien dans l'espace dual devient :

$$\tilde{H} = -t \sum_k (|k\rangle \langle k+1| + |k+1\rangle \langle k|) + \frac{\lambda}{2} \sum_k \cos(2\pi n + \phi) |k\rangle \langle k|$$

L'équation de Schrödinger duale est :

$$-\tilde{\psi}_{k+1} - \tilde{\psi}_{k-1} + \frac{\lambda}{2} \cos(2\pi n + \phi) \tilde{\psi}_k = \frac{E}{t} \tilde{\psi}_k$$

Au point autodual $\lambda = 2t$, les Hamiltoniens réel et dual sont identiques (à une échelle près), indiquant un état critique. Pour $\lambda = 2t$, l'exposant de Lyapunov est :

$$\lambda = \max \left(0, \ln \left(\frac{\lambda}{2t} \right) \right) = 0$$

impliquant $\xi = \infty$, mais les états sont critiques, ni étendus ni localisés, avec une structure multifractale.

La formule de Jitomirskaya donne l'exposant de Lyapunov exact :

$$\lambda(E) = \ln \left| \frac{\lambda}{2t} \right|, \quad \text{pour } |E| < |\lambda - 2t|$$

Pour $\lambda > 2t$, $\lambda > 0$, confirmant la localisation.

1.5 Inverse Participation Ratio (IPR)

L'indice de participation inverse (IPR), défini par

$$\text{IPR} = \sum_n |\psi_n|^4$$

quantifie le degré de localisation des états propres (voir section ??). Son comportement dépend du paramètre λ , selon les régimes suivants :

— **Régime étendu** ($\lambda < 2t$) : les états sont délocalisés, avec $|\psi_n|^2 \sim \frac{1}{N}$. Par conséquent,

$$\text{IPR} \sim \frac{1}{N} \longrightarrow 0 \quad \text{lorsque } N \rightarrow \infty$$

— **Point critique** ($\lambda = 2t$) : les états présentent une structure multifractale. L'IPR suit alors une loi de puissance :

$$\text{IPR} \sim N^{-\alpha}, \quad \text{avec } 0 < \alpha < 1$$

où l'exposant α dépend du paramètre β .

— **Régime localisé** ($\lambda > 2t$) : les états sont fortement localisés, avec $|\psi_n|^2 \approx 1$ sur un seul site. Ainsi,

$$\text{IPR} \sim 1$$

1.6 Résumé des Résultats 1D

- $\lambda < 2t$: États étendus, $\lambda = 0$, $\zeta = \infty$, $\text{IPR} \sim \frac{1}{N}$.
- $\lambda = 2t$: États critiques, $\lambda = 0$, $\text{IPR} \sim N^{-\alpha}$, multifractalité.
- $\lambda > 2t$: États localisés, $\lambda = \ln\left(\frac{\lambda}{2t}\right)$, $\zeta = \frac{1}{\lambda}$, $\text{IPR} \sim 1$.

1.7 Statistique des Niveaux et Multifractalité

La statistique des niveaux d'énergie fournit une signature du caractère étendu, critique ou localisé des états propres (voir section ??). En particulier, la distribution des espacements normalisés $P(s)$ évolue selon le régime :

— **Régime étendu** ($\lambda < 2t$) : le spectre est quasi-régulier, les niveaux sont fortement corrélés, et la distribution est très piquée autour de $s = 1$:

$$P(s) \approx \delta(s - 1)$$

— **Point critique** ($\lambda = 2t$) : les états sont multifractals et la distribution présente un comportement intermédiaire entre Wigner-Dyson et Poisson, reflétant des corrélations non triviales entre les niveaux.

— **Régime localisé** ($\lambda > 2t$) : les niveaux sont statistiquement indépendants, ce qui donne une distribution de Poisson :

$$P(s) = e^{-s}$$

Pour $\lambda > 2t$, considérons une matrice généralisée H de taille $N \times N$:

$$H_{n,n} = \lambda \cos(2\pi\beta n + \phi), \quad H_{n,n+1} = H_{n+1,n} = -1$$

Les valeurs propres E_k sont localisées, avec des espacements aléatoires suivant $P(s) = e^{-s}$.

La multifractalité des états critiques ($\lambda = 2t$) est analysée via les moments généralisés :

$$Z_q = \sum_n |\psi_n|^{2q}$$

La dimension multifractale D_q est définie par :

$$Z_q \sim N^{-(q-1)D_q}$$

Pour $\lambda = 2t$, $D_q < 1$, reflétant une structure fractale. Par exemple, pour l'IPR ($q = 2$) :

$$\text{IPR} = Z_2 \sim N^{-D_2}, \quad D_2 \approx 0.5 \text{ pour } \beta \text{ typique}$$