

Una aplicación de mixturas de procesos de Poisson no homogéneos en fiabilidad de sistemas.

Comparación de los mantenimientos por la edad y por número de fallos.



Iker Villegas Labairu

**Trabajo de fin de grado en Matemáticas
Universidad de Zaragoza**

Directores del trabajo:

María Dolores Berrade Ursúa

Francisco Germán Badía Blasco

10 de septiembre de 2021

Abstract

Systems are not perfect and can fail due to use and wear out. These failures could lead to serious consequences which would affect to our security or, in terms of economy, to the production chains costs. This project aims at defining a new maintenance model to prevent random failures along with the corresponding cost function. In addition, we obtain the optimum policies minimizing this function under different values of the parameters in the model.

In Chapter 1 we introduce the problem under study, as well as, the corrective and preventive maintenance to be applied. We also present the idea of poor quality repairs that leave the system in a worse condition than it was before failing.

Chapter 2 introduces all those theoretical tools from fields of probability and stochastic processes, necessary to understand the model, as well as, concepts of reliability and maintenance of systems. In addition, we delve into the renewal-reward stochastic processes from which we obtain the cost function:

$$Q = \frac{E[C(\tau)]}{E[\tau]}$$

with τ the length of a renewal cycle and C the cost derivated during this period. Last but not least, nonhomogeneous Poisson processes and the concept of process mixtures are defined.

In Chapter 3 all the parameters are introduced. Moreover we propose two types of maintenance models. The cost of corrective maintenance is assumed to be constant in the first model, whereas it varies. Next, we state the objective cost function for each model, based on two decision variables: the number M of failures and the system age T . Then, we obtain the optimum policy, (M^*, T^*) , minimizing the cost function, $Q(M, T)$.

In Chapter 4, we present two univariate policies, respectively based on M or T . The corresponding optimum cost $Q(M^*)$ and $Q(T^*)$ are compared with $Q(M^*, T^*)$.

In Chapter 5 a sensitivity analysis is accomplished, in which we measure the cost function dependency $Q(M, T)$ respect to system parameters. In addition, a comparison is established between the univariate and bivariate policies in order to conclude the advantage of the latter in terms of cost.

Finally, Chapter 6 contains a summary and the conclusions derived from our study.

Índice general

Abstract	III
1. Introducción	1
2. Resultados teóricos	3
2.1. Fiabilidad de sistemas	3
2.2. Mantenimiento	4
2.3. Procesos estocásticos	4
2.3.1. Procesos de renovación	4
2.3.2. Procesos de renovación con recompensa	5
2.3.3. Procesos de Poisson no homogéneos	7
2.3.4. Mixturas de procesos de Poisson	7
3. Descripción del modelo.	9
3.1. Planteamiento del modelo.	9
3.2. Caso 1: c_1 constante	10
3.3. Caso 2: c_1 dependiente de t	11
4. Políticas sub-óptimas.	13
4.1. Caso $M = \infty$. El sistema se reemplaza transcurrido un periodo T	13
4.2. Caso $T = \infty$. El sistema se reemplaza al alcanzar un número de fallos M	13
5. Análisis de sensibilidad.	15
6. Conclusiones finales	23
Bibliografía	25

Capítulo 1

Introducción

A lo largo de los últimos años, el ser humano ha desarrollado una elevada dependencia de las máquinas. Estas desempeñan una gran cantidad de funciones que ayudan a mejorar la calidad de vida, al igual que representan el avance tecnológico, el cual vemos reflejado en nuestra sociedad.

Al igual que ocurre en el caso humano, las máquinas no son perfectas, y conforme pase el tiempo y se desgasten tras su uso, podrán sufrir la aparición de fallos. Estos pueden desembocar en consecuencias que afecten a la salud y a la seguridad de las personas. Además, en el caso industrial, los errores pueden perjudicar a las cadenas de producción, ocasionando grandes costes y pérdidas debido a las interrupciones en la fabricación. Para evitarlo, se aplican distintos tipos de mantenimiento con el objetivo de alargar la esperanza de vida del sistema. Aquel se puede basar en la reparación y el arreglo de estos fallos tras su aparición, denominado mantenimiento correctivo; o en aplicar una serie de procedimientos que retrasen la aparición de fallos, lo cual se conoce como mantenimiento preventivo. La renovación del sistema puede considerarse como mantenimiento preventivo, pues evita que el sistema incurra en más fallos debido a su deterioro. Dadas estas opciones, cuando el sistema deja de funcionar, el operario se enfrenta a la toma de una decisión: elegir el tipo de mantenimiento que le va a aplicar al sistema, es decir, si lo repara o lo renueva. Es importante tener en cuenta que estas reparaciones pueden dejar el sistema en unas condiciones peores a las que tenía en momentos previos al fallo, por múltiples motivos: la inexperiencia del operario o persona que se ha encargado de su reparación, la elección y uso de materiales inadecuados o de peor calidad, etc.

Para decidir en qué punto resulta más rentable sustituir el sistema, en la práctica, se suelen considerar dos opciones: el número de fallos M que acumula el sistema, así como, el tiempo total T que este lleva en funcionamiento. El primero de ellos implica que se reparan los $M - 1$ primeros fallos, pero tras alcanzar el M -ésimo fallo el sistema es reemplazado. La segunda alternativa consiste en llevar a cabo dicho reemplazamiento transcurrido un tiempo de uso T (técnicamente se denomina "con la edad T "). Ambas políticas son habituales en la práctica, por ejemplo, cuando se decide cambiar de coche. Esta decisión suele coincidir con el momento en el que el coche empieza a fallar con frecuencia, con el inconveniente que suponen las visitas al taller y los consiguientes costes. Alternativamente, el cambio de coche puede tener lugar, transcurrido un periodo de tiempo tras el cual el usuario considera finalizada su vida útil. Este periodo de tiempo puede venir marcado por las mejoras tecnológicas o por razones ambientales (cambio a un coche híbrido o eléctrico) que se observa en los nuevos modelos de coche.

De este modo, la decisión de aplicar mantenimiento preventivo al sistema tendrá lugar cuando ocurra un número máximo de fallos o transcurra un tiempo de funcionamiento predeterminado. La cuestión relevante es que ambos valores sean los óptimos desde el punto de vista económico. No hacerlo así puede implicar un aumento innecesario de costes ya de por sí elevados.

Hay que destacar que la aparición de un fallo es totalmente aleatoria, por lo cual, habrá un desconocimiento del periodo de funcionamiento de la máquina, cuando alcance el fallo M . Todo lo contrario, a lo que ocurre si la renovación la ejecutamos en T , el cual será conocido previamente. En el primer caso, el número de reparaciones está acotado, mientras que en el segundo, es aleatorio y puede rebasar el valor M . En la Memoria se analizarán las consecuencias de ambas características en la política óptima.

De este modo, en este trabajo propondremos los siguientes objetivos:

- Construir un modelo estocástico que describa una política de mantenimiento bivalente con dos posibles estrategias de mantenimiento, por número de fallos o por la edad.
- Incluir en el modelo la posibilidad de realizar un mantenimiento de baja calidad.
- Construir una función de coste objetivo que recoja los costes de mantenimiento correctivo y preventivo, así como, el efecto del mantenimiento deficiente.
- Realizar un análisis de sensibilidad para medir la dependencia de la política óptima respecto a los parámetros del modelo.
- Analizar en qué condiciones los parámetros llevan a decidir que tipo de mantenimiento preventivo es preferible frente al otro.
- Establecer una línea de actuación y recomendaciones, basadas en el estudio anterior, que resulten aplicables en la práctica.

Capítulo 2

Resultados teóricos

En este capítulo nos vamos a centrar en introducir todos aquellos conceptos y resultados que intervendrán a la hora de tratar el problema objeto de estudio.

2.1. Fiabilidad de sistemas

La fiabilidad se define como la probabilidad de que un sistema funcione correctamente bajo una serie de condiciones específicas y durante un periodo de tiempo determinado. Denotando Y como la variable aleatoria correspondiente al tiempo que transcurre antes de un fallo, formalmente se tiene la siguiente definición.

Definición 1. Llamamos *función de fiabilidad*, $R(t)$, a la probabilidad de que un sistema no tenga fallos en un periodo de tiempo determinado $t > 0$, es decir,

$$R(t) = P\{Y > t\} = \overline{F_Y}(t)$$

siendo $F_Y(t)$ la función de distribución de Y .

Es claro que cuanto más grande sea el valor de dicha probabilidad más fiable será el sistema, es decir, habrá menos probabilidades de que este falle.

A continuación denotamos $f(t)$ como la función de densidad de Y y Δt como un intervalo infinitesimal real de tiempo cualquiera.

Definición 2. Denominamos *tasa de fallo* o *función de riesgo*, $\lambda(t)$, como la probabilidad de ocurrencia de un fallo en un instante t . En particular $\lambda(t)\Delta t$ hará referencia a la probabilidad de que aparezca un fallo en el intervalo infinitesimal $(t, t + \Delta t)$ para todo $t > 0$, cuando en t el fallo no ha ocurrido todavía. Dicho de otro modo,

$$\lambda(t)\Delta t = P\{Y \leq t + \Delta t \mid Y > t\}.$$

Proposición 2.1. Para todo $t > 0$ se tiene que:

$$\lambda(t) = \frac{f(t)}{R(t)}.$$

Demostración. Para $t > 0$ se tiene que

$$P\{Y \leq t + \Delta t \mid Y > t\} = \frac{P\{(Y \leq t + \Delta t) \cap (Y > t)\}}{P\{Y > t\}} = \frac{P\{(Y \leq t + \Delta t) \cap (Y > t)\}}{R(t)}$$

Además,

$$P\{(Y \leq t + \Delta t) \cap (Y > t)\} = P\{t < Y \leq t + \Delta t\} = f(t)\Delta t.$$

Sustituyendo esto en la anterior ecuación, se tiene el resultado. □

2.2. Mantenimiento

La aparición de fallos en un sistema es aleatoria y, en muchos casos, se recurre a aplicar algún tipo de mantenimiento con el fin de repararlos, o bien, de disminuir la probabilidad de su ocurrencia. Este puede ser de dos tipos:

- **Mantenimiento preventivo**, cuya función consiste en realizar tareas que prevengan la aparición del fallo. En el caso que expondremos a continuación consistirá en la sustitución del sistema por uno nuevo cuando las reparaciones del mismo no compensen el tiempo de vida adicional que se consigue con ellas y no incurrir, de este modo, en más gastos que incrementen el coste final.
- **Mantenimiento correctivo**, asociado al instante en el que se realiza la reparación del fallo. Para que dicho mantenimiento tenga lugar, primero se tiene que dar el fallo y, tras la reparación, se devuelve la funcionalidad al sistema.

En este trabajo nos vamos a centrar en analizar la calidad del mantenimiento, en particular, cuando este se presente de un modo deficiente. De esta manera, asumiremos que, tras la reparación, la fiabilidad del sistema será inferior a la que presentaba en el momento anterior a aquella.

2.3. Procesos estocásticos

Sea \mathcal{T} un conjunto discreto o continuo, establecemos la siguiente definición:

Definición 3. Llamaremos *proceso estocástico* a la colección de variables aleatorias $X = \{X(t) : t \in \mathcal{T}\}$, donde $\mathcal{T} \subseteq \mathbb{R}$.

En nuestro contexto la t hará referencia al tiempo.

Los procesos estocásticos representan la herramienta básica del trabajo y requeriremos el conocimiento de los siguientes tipos:

2.3.1. Procesos de renovación

Definición 4. Sea $(X_n)_n$ una colección de variables aleatorias no negativas, independientes e idénticamente distribuidas. Interpretaremos X_n como el tiempo entre la llegada $n - 1$ y n , y N_t la variable aleatoria que describe el número de llegadas en el intervalo $[0, t]$. De este modo la sucesión $(N_t)_{t \geq 0}$ constituye un *proceso de renovación*.

Sea F la función de distribución de X_n . Cada X_n lo tomamos como el tiempo transcurrido entre la $n - 1$ y n -ésima renovación del sistema. La media del tiempo entre estos dos sucesos vendrá dada por:

$$\mu := E[X_n] = \int_0^\infty x dF(x) = \int_0^\infty \bar{F}(x) dx$$

la cual será estrictamente mayor que cero.

Por otro lado denotaremos por S_n al tiempo que transcurre desde 0, que representa el inicio de funcionamiento del sistema, hasta la n -ésima renovación para $n = 1, 2, \dots$. Es claro que

$$S_n = \sum_{k=1}^n X_k.$$

El siguiente concepto resultará clave en este tipo de procesos.

Definición 5. Llamaremos *ciclo de renovación*, τ , al tiempo transcurrido entre dos renovaciones consecutivas.

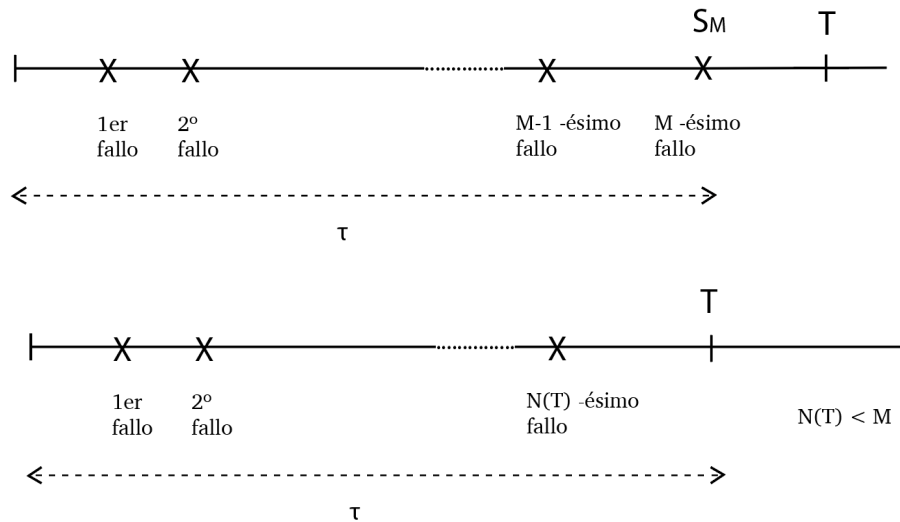


Figura 2.1: Longitud de dos ciclos basados en el mantenimiento

Además, se requerirá establecer una variable que lleve la cuenta del número de renovaciones que han tenido lugar desde el instante inicial hasta un momento t , es decir, el número de eventos durante un intervalo $[0, t]$. Para ello establecemos el proceso $\{N(t) : t \in \mathcal{T}\}$, que cumple la siguiente igualdad.

$$N(t) = \sum_{n=1}^{\infty} 1_{[0,t]}(S_n)$$

donde

$$1_{[0,t]}(x) = \begin{cases} 1 & x \in [0, t] \\ 0 & x \notin [0, t] \end{cases}$$

Suponiendo un contexto donde el número de renovaciones que tienen lugar en un intervalo es finito, $N(t)$ podrá considerarse como:

$$N(t) = \max\{n : S_n \leq t\}.$$

En referencia a esta igualdad, es posible establecer una relación entre S_n y $N(t)$. De este modo, si el tiempo en el que ocurre la n -ésima renovación se encuentra en el intervalo $[0, t]$, el número de fallos ocurridos en t es mayor o igual que n , es decir,

$$P(S_n \leq t) = P(N(t) \geq n).$$

En la Figura 2.1 se describen los dos posibles modos de un ciclo de renovación. En el gráfico superior, el M -ésimo fallo ocurre antes de que el sistema alcance la edad T . En el inferior, el número de fallos que tienen lugar hasta el instante T , $N(T)$, es inferior a M y, por consiguiente, la sustitución del sistema por otro nuevo ocurre en T .

2.3.2. Procesos de renovación con recompensa

Ahora nos situamos en el caso en el que en el proceso $\{N(t) : t \geq 0\}$, cada vez que se produce una renovación, se recibe una retribución. Son los llamados procesos de renovación con recompensa. Conviene destacar que las recompensas asociadas a dichos procesos también pueden ser negativas, las cuales aluden a los costes que ocasiona la renovación. Esta será la interpretación que tomaremos a partir de ahora en adelante.

A medida que se completan ciclos de renovación, se van sumando los costes de cada uno de ellos, de modo que el coste alcanzado en el instante t se puede escribir como:

$$C(t) = \sum_{k=0}^{N(t)} C_k + W(t)$$

donde C_k representa el coste aleatorio producido tras la k -ésima renovación del sistema y $W(t)$ el coste acumulado por las reparaciones desde la última renovación. C_k con $k = 1, 2, \dots$ son variables aleatorias, independientes e idénticamente distribuidas, donde además, podemos notar que

$$E[C_k] = E[C].$$

Todo lo anterior nos lleva a la siguiente definición:

Definición 6. Llamaremos *coste del modelo* a la función $Q(t)$ que representa el coste por unidad de tiempo en un intervalo infinito, es decir,

$$Q = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{C(t)}{t}.$$

Teorema 2.1. Si $E[C] < \infty$ y $E[\tau] < \infty$, entonces se cumple con probabilidad 1 que

$$\frac{\sum_{k=1}^{N(t)} C_k}{t} \longrightarrow \frac{E[C]}{E[\tau]} \quad (2.1)$$

cuando $t \rightarrow \infty$,

Demostración. Se puede consultar en [4] (Pag. 133). □

Proposición 2.2. Con probabilidad 1, se tiene que

$$Q \longrightarrow \frac{E[C]}{E[\tau]} \quad \text{cuando } t \rightarrow \infty. \quad (2.2)$$

Demostración. La demostración equivale a probar que $\frac{C(t)}{t}$ está acotada superior e inferiormente por dos funciones que convergen a $\frac{E[C]}{E[\tau]}$, cuando t crece hasta el infinito. En primer lugar observamos que la función de coste, $C(t)$, se puede acotar de la siguiente manera:

$$\frac{\sum_{k=1}^{N(t)} C_k}{t} \leq \frac{C(t)}{t} \leq \frac{\sum_{k=1}^{N(t)+1} C_k}{t} \quad (2.3)$$

siendo $N(t) + 1$ el número de renovaciones llevadas a cabo antes del instante t más su siguiente renovación. Además vemos que

$$\sum_{k=1}^{N(t)+1} C_k = \sum_{k=1}^{N(t)} C_k + C_{N(t)+1}.$$

De este modo al ser $C_{N(t)+1}$ una variable aleatoria finita:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{C_{N(t)+1}}{t} = 0.$$

Por lo tanto, en virtud de (2.3), los dos extremos de la igualdad convergen a lo mismo cuando t tiende a infinito, y por ello también $\frac{C(t)}{t}$ convergerá al mismo valor, quedando así el resultado demostrado. □

De este modo, partiendo de los dos resultados anteriores, podremos relacionar el coste de la función con la media del coste y la media del ciclo entre dos renovaciones consecutivas de modo que la función de coste objetivo en el modelo resulta ser:

$$Q = \frac{E[C]}{E[\tau]}. \quad (2.4)$$

2.3.3. Procesos de Poisson no homogéneos

A continuación introduciremos el concepto de proceso de Poisson no homogéneo, el cual tendrá una gran importancia en el modelo,

Definición 7. Sea $h > 0$. Decimos que f es de $o(h)$ si cumple que

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(h)}{h} = 0.$$

Con esto establecemos la siguiente definición:

Definición 8. Decimos que el proceso $\{N(t) : t \geq 0\}$ es de Poisson no homogéneo con parámetro la función $\lambda(t)$ si para $h > 0$ cumple las siguientes propiedades:

1. $N(0) = 0$
2. $\{N(t) : t \geq 0\}$ tiene incrementos independientes
3. $P\{N(t+h) - N(t) \geq 2\} = o(h)$
4. $P\{N(t+h) - N(t) = 1\} = \lambda(t)h + o(h)$

Como consecuencia se tiene que

$$P(N(t) = k) = e^{-\Lambda(t)} \frac{\Lambda(t)^k}{k!}$$

donde

$$\Lambda(t) = \int_0^t \lambda(x) dx.$$

Nota. En el caso donde el parámetro sea un valor real, $\lambda(t) = \lambda$, los sucesos ocurren con tasa constante a lo largo del tiempo. Esto significa que la cantidad de eventos que tengan lugar en un intervalo, no dependerá de los instantes inicial y final, sino de la amplitud del mismo. Estos procesos son los llamados de *Poisson homogéneos*, los cuales describen los sucesos que tienen lugar con tasa constante. En el contexto de la fiabilidad, un proceso de Poisson homogéneo describe un sistema que no envejece con el tiempo como consecuencia de la propiedad de ausencia de memoria de la exponencial. Este hecho no se adecúa al contexto del problema que trataremos con posteridad. Sin embargo, en un proceso de Poisson no homogéneo, la tasa de ocurrencia $\lambda(t)$ sí que es dependiente del tiempo, lo cual nos permitirá tener en cuenta el envejecimiento y desgaste que experimenta cualquier sistema debido a su uso con la edad. Más concretamente, un proceso de Poisson no homogéneo describe los fallos de un sistema con tiempo hasta el primer fallo con tasa $\lambda(t)$ y cuyas sucesivas reparaciones dejan al sistema justo como estaba antes de fallar (*reparación mínima*).

2.3.4. Mixturas de procesos de Poisson

Sea $\{N(t) : t \geq 0\}$ un proceso de Poisson no homogéneo que representa los fallos de un sistema. Vamos a considerar que las reparaciones de los fallos pueden ser de diferente calidad y están dadas por una variable aleatoria Z con función de densidad $\pi(z)$. De este modo la tasa de fallo del sistema tras una reparación de valor $Z = z$, es un proceso de Poisson no homogéneo de tasa $\lambda(t|z) = z\lambda(t)$. Así considerando $z > 1$, la reparación es deficiente y deja el sistema con una tasa de fallo superior a la que tenía antes de aquella.

Definición 9. Llamaremos mixtura o mezcla a la fiabilidad no condicional

$$\bar{F}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \bar{F}(t|z) \pi(z) dz$$

donde $\bar{F}(t|z)$ representa la fiabilidad condicionada del sistema cuando se tiene que $Z = z$, es decir cuando la calidad del mantenimiento es de valor z .

Particularizando en el caso de los procesos de Poisson, la mixtura vendrá dada para $n > 0$ y $t \in \mathbb{R}$, del siguiente modo:

$$P(N(t) = n) = \int_0^\infty \frac{(z\Lambda(t))^n}{n!} e^{-z\Lambda(t)} \pi(z) dz \quad (2.5)$$

Por otro lado, para la variable aleatoria S_n , que representa el tiempo hasta el n -ésimo fallo desde que el sistema empieza a funcionar, su función de densidad se expresa del siguiente modo:

$$f_{S_n}(x) = \int_0^\infty \frac{z^n \Lambda(x)^{n-1}}{(n-1)!} \lambda(x) e^{-z\Lambda(x)} \pi(z) dz. \quad (2.6)$$

Capítulo 3

Descripción del modelo.

A continuación, vamos a proponer un modelo donde se considera tanto el mantenimiento correctivo como el preventivo de un sistema.

3.1. Planteamiento del modelo.

En nuestro modelo, tendremos en cuenta los siguientes términos:

- $\lambda(t)$, correspondiente al tiempo de vida hasta que ocurre el primer fallo en el sistema. Es decir, representa la tasa de fallo base en un sistema sobre el cual no se ha aplicado ningún tipo de mantenimiento. Vendrá dada en función del instante $t \in \mathbb{R}$ en el que sea evaluada. Un sistema que se deteriora con el tiempo vendrá descrito por una función $\lambda(t)$ creciente.
- Z , será la variable mezcladora asociada al mantenimiento deficiente del sistema. Hará alusión a las condiciones en las que se lleva a cabo la reparación de los fallos y como estas afectan a la fiabilidad con la que se queda el sistema.
- $N(t)$, hace referencia a el número de fallos que ha tenido el sistema hasta el instante t . Asumiremos que se trata de una mixtura de procesos de Poisson no homogéneos, con tasa base de fallos $\lambda(t)$. Su utilidad se basa en que, con una adecuada elección de $\lambda(t)$, se puede modelar que a medida que pasa el tiempo la aparición de fallos en el sistema se hace más habitual y los ciclos de renovación entre fallos disminuyen, lo cual nos ofrece una interpretación más acorde con la realidad. Para modelar los casos en los que las reparaciones devuelven la funcionabilidad del sistema pero a su vez, bajan su fiabilidad, se hará uso de las mixturas de procesos de Poisson no homogéneos. Además en la aparición de los fallos también intervendrán las condiciones en las que queda el sistema tras la reparación, es decir, la variable Z . De este modo, la probabilidad de que ocurran n fallos ($n > 0$) hasta cierto instante t vendrá dada por la expresión (2.5). Es importante recordar que si $Z > 1$ se tiene una reparación deficiente al quedar el sistema peor de lo que estaba antes del fallo.
- S_n , corresponderá al tiempo transcurrido hasta que el sistema tiene el n -ésimo fallo. Su función de densidad viene dada por (2.6).
- τ , representa el periodo comprendido entre dos renovaciones seguidas, al cual hemos denominado, ciclo de renovación. Su valor, aleatorio, vendrá dado por el valor mínimo entre el periodo T y el instante temporal en el que se alcanzan los M fallos.

Además su esperanza se corresponderá con la siguiente fórmula:

$$E[\tau] = \int_0^T \bar{F}_{S_M}(t) dt = \sum_{k=0}^{M-1} \int_0^T P(N(t) = k) dt. \quad (3.1)$$

- $Q(M, T)$, hace referencia al coste del modelo del sistema cuando se realiza la renovación tras alcanzar un número máximo de fallos M o el instante T , lo que ocurra en primer lugar, debido a que tanto M y T son variables de decisión. Recordamos que como consecuencia de la fórmula (2.4) su valor vendrá dado por la siguiente fórmula:

$$Q(M, T) = \frac{E[C(\tau)]}{E[\tau]} \quad (3.2)$$

- c_1 , parámetro que denota el coste del mantenimiento correctivo del sistema.
- c_{2M}, c_{2T} parámetros correspondientes al coste del mantenimiento preventivo realizado al alcanzar un máximo número de fallos M o transcurrido un cierto periodo de tiempo T respectivamente.
- I_M, I_T las variables indicadoras que señalan si la renovación se realiza tras M fallos o en T , es decir,

$$I_M = \begin{cases} 1 & \text{si el reemplazamiento se produce tras alcanzar el fallo } M \\ 0 & \text{en caso contrario} \end{cases}$$

$$I_T = \begin{cases} 1 & \text{si el reemplazamiento se produce transcurrido un periodo } T \\ 0 & \text{en caso contrario} \end{cases}$$

A partir de ahora vamos a proponer dos modelos propios correspondientes a dos tipos de casos: uno donde el coste asociado al mantenimiento correctivo es constante, al que llamaremos caso 1; y un segundo caso en el que dicho coste es dependiente del instante de tiempo en el que toma lugar.

3.2. Caso 1: c_1 constante

Tomaremos c_1 como un coste unitario fijo que no depende de ninguna variable. De este modo el coste de un ciclo de renovación vendrá dado de la siguiente manera:

$$C(\tau) = c_1 \min(M-1, N(T)) + c_{2M} I_M + c_{2T} I_T. \quad (3.3)$$

En dicha ecuación el primer sumando recoge el coste total de las reparaciones que tendrán lugar a lo largo del ciclo. Este llegará a su fin en dos casos: cuando se alcance el M -ésimo fallo, y por ende, se realicen $M-1$ reparaciones; o, transcurrido un tiempo T , instante en el cual se habrán producido $N(T)$ fallos. De este modo, el número de reparaciones que se llevarán a cabo, vendrá dado por el mínimo entre estos dos valores: $M-1$ y $N(T)$. El segundo y tercer sumando de (3.3) nos permiten tener en cuenta el coste del mantenimiento preventivo en el caso de que este se llevara a cabo en base a M fallos o a la edad T . Cabe destacar que, el mantenimiento tras M fallos ocurrirá en un instante totalmente aleatorio, mientras que el asociado a T siempre será conocido de antemano. Además los costes c_{2M} y c_{2T} se suponen constantes.

Con esto nos disponemos a enunciar un resultado para hallar la media del coste de un ciclo:

Teorema 3.1. *Se tiene lo siguiente*

$$E[C(\tau)] = c_1 \left(M-1 - \sum_{k=0}^{M-1} (M-1-k) P(N(T)=k) \right) + c_{2M} + (c_{2T} - c_{2M}) \sum_{k=0}^{M-1} P(N(T)=k) \quad (3.4)$$

Demostración. A partir de la ecuación (3.3) tenemos que

$$E[C(\tau)] = c_1 E[\min(M-1, N(T))] + c_{2M} P(I_M = 1) + c_{2T} P(I_T = 1)$$

al tratarse I_M y I_T de dos variables indicadoras. Que $I_M = 1$ significa que la renovación se lleva a cabo al ocurrir el M -ésimo fallo, esto quiere decir que el tiempo hasta dicho fallo S_M es menor que T , luego

$$P(I_M = 1) = P(S_M \leq T).$$

Por un razonamiento similar, se llega a que

$$P(I_T = 1) = P(S_M > T).$$

Tomando esto en cuenta y desarrollando la esperanza del mínimo llegamos a que

$$\begin{aligned} E[C(\tau)] &= c_1 \left(\sum_{k=0}^{M-2} kP(N(T) = k) + (M-1)P(N(T) \geq M-1) \right) + c_{2M}P(S_M \leq T) + c_{2T}P(S_M > T) = \\ &= c_1 \left(M-1 - \sum_{k=0}^{M-1} (M-1-k)P(N(T) = k) \right) + c_{2M}P(N(T) \geq M) + c_{2T}P(N(T) \leq M-1) = \\ &= c_1 \left(M-1 - \sum_{k=0}^{M-1} (M-1-k)P(N(T) = k) \right) + c_{2M} + (c_{2T} - c_{2M}) \sum_{k=0}^{M-1} P(N(T) = k) \end{aligned}$$

y se tiene el resultado buscado. \square

Ahora, en virtud del teorema anterior y la fórmula de la esperanza de un ciclo de renovación dada en (3.1), podremos obtener la siguiente fórmula para la función del coste:

$$Q_1(M, T) = \frac{E[C(\tau)]}{E[\tau]}. \quad (3.5)$$

3.3. Caso 2: c_1 dependiente de t

Ahora consideramos el coste $c_1(t)$, dependiente del instante $t \in \mathbb{R}$.

Sea (X_1, X_2, \dots, X_n) una muestra de tamaño n de variables aleatorias, y denotamos por $X_{i:n}$ como el estadístico ordenado resultante de reordenar la muestra de menor a mayor, de modo que $X_{1:n} \leq X_{2:n} \leq \dots \leq X_{n:n}$.

Proposición 3.1. *La función de distribución de un estadístico ordenado de orden n viene dado por la siguiente fórmula*

$$f_{i:n} = \frac{n!}{(i-1)!(n-i)!} F_X(x)^{i-1} \bar{F}_X(x)^{n-i} f(x). \quad (3.6)$$

Demostración. Ver [4] (Pag. 92). \square

Teorema 3.2.

$$\begin{aligned} E[C(\tau)] &= \sum_{k=1}^{M-1} kP(N(T) = k) \int_0^T c_1(x) \frac{\lambda(x)}{\Lambda(T)} dx + \\ &+ \sum_{k=M}^{\infty} P(N(T) = k) \int_0^T c_1(x) k \sum_{j=0}^{M-2} \binom{k-1}{j} \left(\frac{\Lambda(x)}{\Lambda(T)} \right)^j \left(1 - \frac{\Lambda(x)}{\Lambda(T)} \right)^{k-1-j} \frac{\lambda(x)}{\Lambda(T)} dx + \\ &+ c_{2M} + (c_{2T} - c_{2M}) \sum_{k=0}^{M-1} P(N(T) = k). \end{aligned} \quad (3.7)$$

Demostración. Tomamos los estadísticos $S_1, S_2, \dots, S_k | N(T) = k$ correspondientes al tiempo hasta el 1º, 2º, ..., k-ésimo fallo, sabiendo que el número de fallos durante dicho ciclo de renovación es k .

Comenzamos tomando el caso donde la renovación tiene lugar tras alcanzar el instante de tiempo T . El número de fallos durante este ciclo será menor o igual que $M-1$, es decir, $N(T) \leq M-1$. Sea Y_k el tiempo entre dos fallos consecutivos, de este modo, tomaremos sus estadísticos ordenados, los cuales cumplen $Y_{1:k} \leq Y_{2:k} \leq \dots \leq Y_{k:k}$. Así el coste medio derivado de este caso viene dado del siguiente modo:

$$E_1 = E \left[\sum_{j=1}^k c_1(S_j) | N(T) = k \right] = \sum_{j=1}^k E [c_1(Y_{j:k})] = \sum_{j=1}^k E [c_1(Y_j)] =$$

$$= k \int_0^T c_1(x) \frac{\lambda(x)}{\Lambda(T)} dx. \quad (3.8)$$

al ser $\frac{\lambda(x)}{\Lambda(T)}$ la función de densidad de Y_j (Ver [4], páginas 66-67).

Sea ahora el caso donde la sustitución del sistema se lleva a cabo tras alcanzar el M -ésimo fallo. A partir de la Proposición 3.1, se tiene:

$$E_2 = E \left[\sum_{j=1}^{M-1} c_1(S_j) | N(T) = k \right] = \sum_{j=1}^{M-1} E [c_1(Y_{j:k})].$$

Aplicando la Proposición 3.1 el sumatorio anterior resulta ser igual a:

$$\begin{aligned} & \int_0^T c_1(x) \sum_{j=1}^{M-1} \frac{k!}{(j-1)!(k-j)!} F_Y(x)^{j-1} \bar{F}_Y(x)^{k-j} f(x) dx = \\ &= \int_0^T c_1(x) k \sum_{j=1}^{M-1} \binom{k-1}{j-1} F_Y(x)^{j-1} \bar{F}_Y(x)^{k-j} f(x) dx = \\ &= \int_0^T c_1(x) k \sum_{j=0}^{M-2} \binom{k-1}{j} F_Y(x)^j \bar{F}_Y(x)^{k-j-1} f(x) dx = \\ &= \int_0^T c_1(x) k \sum_{j=0}^{M-2} \binom{k-1}{j} \left(\frac{\Lambda(x)}{\Lambda(T)} \right)^j \left(1 - \frac{\Lambda(x)}{\Lambda(T)} \right)^{k-1-j} \frac{\lambda(x)}{\Lambda(T)} dx \end{aligned} \quad (3.9)$$

De forma similar a la demostración del Teorema 3.1 obtenemos que:

$$\begin{aligned} E[C(\tau)] &= \sum_{k=1}^{M-1} k P(N(T) = k) E_1 + E_2 P(N(T) \geq M) + c_{2M} P(S_M \leq T) + c_{2T} P(S_M > T) = \\ &= \sum_{k=1}^{M-1} k P(N(T) = k) \int_0^T c_1(x) \frac{\lambda(x)}{\Lambda(T)} dx + \\ &+ \sum_{k=M}^{\infty} P(N(T) = k) \int_0^T c_1(x) k \sum_{j=0}^{M-2} \binom{k-1}{j} \left(\frac{\Lambda(x)}{\Lambda(T)} \right)^j \left(1 - \frac{\Lambda(x)}{\Lambda(T)} \right)^{k-1-j} \frac{\lambda(x)}{\Lambda(T)} dx + \\ &+ c_{2M} + (c_{2T} - c_{2M}) \sum_{k=0}^{M-1} P(N(T) = k) \end{aligned}$$

quedando, así, el resultado demostrado. \square

De este modo, la fórmula asociado a la función de coste, para este segundo caso vendrá dada, de la siguiente forma:

$$Q_2(M, T) = \frac{E[C(\tau)]}{E[\tau]} \quad (3.10)$$

con $E[C(\tau)]$ dada según (3.7) y $E[\tau]$ correspondiente con (3.1).

Capítulo 4

Políticas sub-óptimas.

En algunos casos, las funciones de coste no tienen óptimo finito. Esto se debe a que el valor de determinados parámetros evita que la función de coste alcance algún mínimo a lo largo del tiempo. Ahora nos centraremos en introducir dos alternativas a la política bivalente, para estudiar este tipo de casos, las cuales estarán basadas, particularmente, en cada uno de las dos condiciones de reemplazamiento: considerando que se realiza en el instante T o tras un máximo de fallos M . Estas nuevas políticas univariantes nos permitirán comparar las ventajas del modelo de mantenimiento bivalente introducido en el capítulo anterior.

4.1. Caso $M = \infty$. El sistema se reemplaza transcurrido un periodo T .

Suponemos que la renovación del sistema ocurre en el instante T . De esta forma, la duración del ciclo, siempre será T y podremos establecer que

$$E[\tau] = T.$$

Por otra parte, el coste que se generará tras el ciclo vendrá dado por el importe del mantenimiento preventivo basado en una renovación en T , c_{2T} , y en el número de fallos que tengan lugar en este periodo, el cual será un valor aleatorio correspondiente con $N(T)$. El valor medio de $N(T)$ se corresponde con el de un proceso de Poisson no homogéneo mezclado. Así la media del coste de un ciclo será:

$$E[C(\tau)] = c_1 \Lambda(T) E[Z] + c_{2T}$$

Con todo esto, sustituyendo en la fórmula 2.4 obtenemos el valor de la función de coste

$$Q_{S_1}(T) = \frac{c_1 E[z] \Lambda(T) + c_{2T}}{T}. \quad (4.1)$$

4.2. Caso $T = \infty$. El sistema se reemplaza al alcanzar un número de fallos M .

En este caso el tiempo de duración del ciclo será el correspondiente al periodo comprendido desde 0, hasta la obtención del M -ésimo fallo; es decir, S_M . Esta cantidad será aleatoria, y la media de duración vendrá dada del siguiente modo:

$$E[\tau] = E[S_M] = \int_0^\infty x f_{S_M}(x) dx = \sum_{k=0}^{M-1} \int_0^\infty P(N(T) = k) dt$$

siendo f_{S_M} la función de densidad de S_M dada en (2.6).

Por otro lado el coste del ciclo vendrá dado por el importe del mantenimiento preventivo por la renovación tras el fallo M , c_{2M} ; y los costes de las reparaciones de los $M - 1$ fallos que se darán a lo largo del ciclo. Al tratarse de valores constantes, el valor de $C(\tau)$ será siempre el mismo, y por tanto,

$$E[C(\tau)] = c_1(M - 1) + c_{2M}$$

Con todo esto podemos sustituir estos valores medios en la fórmula de la función de coste, quedando del siguiente modo:

$$Q_{S_2}(M) = \frac{c_1(M-1) + c_{2M}}{E[S_M]}. \quad (4.2)$$

Capítulo 5

Análisis de sensibilidad.

En este capítulo vamos a realizar un estudio numérico en referencia al grado de dependencia de la política óptima del sistema, respecto de los parámetros que presenta el modelo. Como se ha expuesto antes, hemos implantado una política de mantenimiento basada en la selección de dos variables de decisión M y T , que representan, respectivamente, un número de fallos y un periodo de tiempo (edad) determinado. En este caso denotaremos por M^* y T^* , los óptimos que generan el mínimo coste por unidad de tiempo del sistema.

A partir de ahora tomaremos como tasa de ocurrencia de un fallo, la siguiente función:

$$\lambda_s(t) = 0.1s(t+1)e^{\int_0^t 0.1(u+1)du}$$

siendo s un número real positivo cualquiera. De este modo la tasa de fallo crece con s . De la expresión anterior se advierte que si $s < s'$, entonces $\lambda_s(t) < \lambda_{s'}(t)$.

Por otro lado supondremos que $c_{2T} < c_{2M}$, es decir, que el mantenimiento preventivo en el caso en el que se renueve el sistema por número de fallos es más caro. Este hecho es perfectamente asumible y puede deberse a varias razones. Una de ellas podría ser que en el instante en el cual tiene lugar el M -ésimo fallo, el cual es aleatorio, no haya disponibles en el mercado variedad de ofertas para sustituir el sistema en uso, y por ello, se tenga que optar entre unas pocas disponibles, generalmente más caras. Sin embargo, el reemplazamiento en T puede planificarse con antelación, debido a su naturaleza determinista. Otro motivo de este supuesto, es que tras realizarse el cambio en un instante T , anterior a alcanzar M fallos, el sistema pueda generar un valor residual en el mercado de segunda mano.

Además, consideraremos que la variable aleatoria Z se corresponderá con una distribución Gamma cuya función de densidad, $\pi(z)$ con $z \in \mathbb{R}$, vendrá dada por la siguiente expresión,

$$\pi(z) = \frac{a^b z^{b-1} e^{-az}}{\Gamma(b)}, \quad z > 0$$

donde $\frac{1}{a}$ representa el parámetro de escala y b , el de forma. Se tiene que

$$E[Z] = \frac{b}{a}$$

y, por consiguiente, $\frac{b}{a} > 1$ representa un mantenimiento, en promedio, deficiente. Se advierte que $E[Z]$ es creciente con b y, por tanto, el mantenimiento es de calidad tanto más baja cuanto mayor es b .

El proceso de obtención de las políticas óptimas (M^*, T^*) se ha llevado a cabo mediante Matlab con ayuda del manual [2]. Además se ha hecho uso de los siguientes complementos: *Optimization Toolbox* y *Symbolic Math Toolbox*.

Para simplificar el análisis y, sin pérdida de generalidad, asumiremos $c_{2T} = 1$ y $a = 1$.

Tabla 1

Los óptimos (M_1^*, T_1^*) , $Q(M_1^*, T_1^*)$ correspondientes al caso 1 para los diferentes valores de c_1 , c_{2M} , b y s , con $a = 1$ y $c_{2T} = 1$.

	c_1	c_{2M}	b	s	M_1^*	T_1^*	$P(S_{M_1^*} \leq T_1^*)$	$E[\tau^*]$	$Q(M_1^*, T_1^*)$
1	0.5	1.25	1.5	1	2	6.4585	0.9601	3.4294	0.5050
2				5	2	10.7790	1.0000	1.7238	1.0152
3			3.0	1	2	5.4520	0.9919	2.3778	0.7347
4				5	3	7.6022	1.0000	1.2899	1.7443
5		1.5	1.5	1	2	4.5935	0.7762	3.2202	0.5703
6				5	3	7.3402	0.9976	2.1640	1.1543
7			3.0	1	3	2.9766	0.5434	2.5171	0.8256
8				5	4	5.7581	0.9998	1.5498	1.9357
9		2.0	1.5	1	33	2.9438	0.0000	2.9438	0.6124
10				5	4	2.9095	0.6855	2.1507	1.3785
11			3.0	1	35	2.3753	0.0000	2.3753	0.8513
12				5	16	1.3095	0.0024	1.3093	2.1494
13		3.0	1.5	1	44	2.9438	0.0000	2.9438	0.6124
14				5	47	1.7187	0.0000	1.7187	1.4034
15			3.0	1	36	2.3753	0.0000	2.3753	0.8513
16				5	54	1.3082	0.0000	1.3082	2.1494
17	0.7	1.25	1.5	1	1	10.7709	1.0000	2.4365	0.5130
18				5	2	10.7211	1.0000	1.7238	1.1312
19			3.0	1	1	7.9245	1.0000	1.5523	0.8053
20				5	2	7.5558	1.0000	0.9745	2.0010
21		1.5	1.5	1	1	7.2069	0.9931	2.4314	0.6155
22				5	2	9.7231	1.0000	1.7238	1.2762
23			3.0	1	2	3.5097	0.8428	2.2697	0.9177
24				5	3	7.1115	1.0000	1.2899	2.2483
25		2.0	1.5	1	4	2.7928	0.1087	2.7366	0.7123
26				5	2	6.8569	0.9975	1.7220	1.5661
27			3.0	1	10	2.1209	0.0009	2.1207	1.0141
28				5	4	1.8440	0.7068	1.3600	2.6332
29		3.0	1.5	1	37	2.6613	0.0000	2.6613	0.7148
30				5	53	1.5097	0.0000	1.5097	1.7173
31			3.0	1	34	2.1202	0.0000	2.1202	1.0142
32				5	49	1.1373	0.0000	1.1373	2.6824
33	1.0	1.25	1.5	1	1	10.7709	1.0000	2.4365	0.5130
34				5	1	11.4899	1.0000	1.0958	1.1407
35			3.0	1	1	7.9245	1.0000	1.5523	0.8053
36				5	1	7.4934	1.0000	0.5707	2.1905
37		1.5	1.5	1	1	7.2069	0.9931	2.4314	0.6155
38				5	1	10.9257	1.0000	1.0958	1.3689
39			3.0	1	1	5.4400	0.9977	1.5512	0.9663
40				5	2	7.4315	1.0000	0.9745	2.5654
41		2.0	1.5	1	2	3.1253	0.4506	2.6689	0.8055
42				5	2	7.0106	0.9979	1.7223	1.7402
43			3.0	1	2	2.3845	0.5370	1.9382	1.2014
44				5	2	6.5867	1.0000	0.9745	3.0785
45		3.0	1.5	1	31	2.3753	0.0000	2.3753	0.8513
46				5	13	1.3094	0.0012	1.3092	2.1494
47			3.0	1	31	1.8672	0.0000	1.8672	1.2342
48				5	47	0.9758	0.0000	0.9758	3.4268

Comenzaremos teniendo en cuenta el primero de los dos casos, es decir, cuando el coste de mantenimiento correctivo se mantiene constante a lo largo del tiempo.

En la tabla 1 se muestra la política óptima en el caso bivalente (M_1^*, T_1^*) , para el caso 1, cuando se modifican los siguientes parámetros: el coste por reparación, c_1 ; el mantenimiento preventivo asociado a una renovación por número de fallos, c_{2M} ; la calidad de las reparaciones, b ; y el escalar que multiplica a la tasa de fallo del sistema, s . En la tabla aparecen asimismo, las probabilidades de que el mantenimiento tras M fallos ocurra en primer lugar, la longitud media óptima de un ciclo ($E[\tau^*]$) y el correspondiente coste óptimo $Q(M^*, T^*)$.

A medida que aumenta el valor de c_1 , el número óptimo de reparaciones correctivas deficientes decrece. Esto conlleva un aumento de la probabilidad de realizar la renovación tras alcanzar M_1^* fallos, ya que el límite M_1^* disminuye, y con ello también, la longitud media del ciclo. Dicho de otro modo, cuanto más elevado sea el coste de las reparaciones, más beneficioso resulta la sustitución de un sistema por uno nuevo. Por lo tanto, la función coste objetivo experimentará un incremento, asociado a la disminución de la media de duración de los ciclos de renovación.

Por el contrario, un aumento del coste c_{2M} , provocará que también lo haga M_1^* : ahora resulta más caro renovar alcanzado un número M_1^* de fallos, luego deberemos dilatar ese momento, aumentando el número de reparaciones y disminuyendo el valor del instante T_1^* . En estos casos un aumento de M_1^* conlleva un espacio de tiempo mayor para alcanzar el M_1^* -ésimo fallo, ya que la renovación en T_1^* cobra mayor interés y, asimismo, un incremento asociado al coste óptimo $Q(M_1^*, T_1^*)$. De este modo, resulta conveniente tomar valores de T_1^* más pequeños para así producir la renovación antes e incurrir en menos gastos.

Por otra parte, un incremento del valor de b (se recuerda que b representa la calidad de la reparación: si $b > 1$ el sistema queda peor de lo que estaba, y a medida que b aumenta, la calidad de la reparación disminuye) también trae consigo una reducción de T^* y de la longitud media de un ciclo de renovación. Por último, al tomar tasas de fallo más grandes, M_1^* y T_1^* son no monótonas si bien la longitud media del ciclo disminuye, por lo cual, el reemplazamiento preventivo se adelanta.

Fijándonos en los valores de la tabla, podemos llegar a varias conclusiones respecto a cómo las variables de decisión del problema se ven afectadas por interacciones entre los parámetros del modelo. El caso 3 resulta más caro que los correspondientes a las filas 5 o 9, los cuales presentan un coste de mantenimiento preventivo superior. Esto se debe a que en el caso 3, $b = 3$: las reparaciones son más baratas, pero de peor calidad, lo cual, conforme pase el tiempo, provocará un aumento del gasto total del sistema. Comparando este mismo caso, con la fila 33 y la 17, se aprecia una situación similar: a pesar del aumento en los costes por reparación, la elección de unas reparaciones más deficientes acarrea, a la larga, un valor de $Q(M_1^*, T_1^*)$ mayor. De este modo se podría decir, que en este caso, lo barato sale caro.

La probabilidad de renovación tras M fallos es no decreciente con s (y por tanto con la tasa de fallo). Este hecho se produce porque seguir haciendo reparaciones resulta improductivo frente a disponer de un sistema nuevo. Sin embargo, al hacer c_{2M} más grande ocurre lo contrario. Esto es debido a que $c_{2M} > c_{2T}$, y un incremento de dicho parámetro hace que al ser aún más caro un reemplazamiento en $S_{M_1^*}$, resulte más rentable la sustitución en T_1^* . Además si la tasa de fallo λ es lo suficientemente pequeña, la renovación del sistema se producirá en T_1^* . Esto se aprecia, por ejemplo, al comparar los casos 9 y 10. En 9, con una tasa de fallo menor, la probabilidad de reemplazar en T_1^* es casi 1, mientras que en el caso 10, esa probabilidad decrece hasta aproximadamente 0.31. Se advierte el mismo comportamiento en la comparación de los casos 25 y 26, o 41 con 42. En este punto es interesante analizar si este comportamiento persiste cuando se toman valores más elevados de la tasa de fallo. Así, planteamos una segunda tabla que recoja dichos casos, evaluados con tasas de fallo más grandes.

Tabla 2

Los óptimos (M_1^*, T_1^*) , $Q(M_1^*, T_1^*)$ en los casos donde se consideran valores de s lo suficientemente grandes.

	c_1	c_{2M}	b	s	M_1^*	T_1^*	$P(S_{M_1^*} \leq T_1^*)$	$E[\tau^*]$	$Q(M_1^*, T_1^*)$
13	0.5	3.0	1.5	20	7	5.4959	0.9912	1.7018	3.5090
15			3.0	40	12	7.1432	1.0000	0.8576	9.9109
29	0.7		1.5	15	5	5.8601	0.9944	1.6444	3.5165
31			3.0	25	8	7.0183	1.0000	0.8906	8.8708
47	1.0			15	5	6.8628	1.0000	0.9047	7.7373

En la Tabla 2 se proporcionan los valores óptimos (M_1^*, T_1^*) , así como la probabilidad de renovar tras M_1^* fallos, $P(S_{M_1^*} \leq T_1^*)$, la longitud media del ciclo y el coste óptimo en algunos casos de la Tabla 1, considerando, en esta ocasión, tasas de fallo más elevadas. Se advierte, ahora, una caída drástica de M_1^* y un importante aumento en T_1^* . Ambos conducen a un considerable incremento de la probabilidad de renovar en $S_{M_1^*}$, ya que no resulta óptimo hacer demasiadas reparaciones. Cuando la aparición de fallos resulta más frecuente, llega el punto en el cual, económicamente, resulta caro llevar a cabo más reparaciones y la mejor solución es renovar el sistema. El valor de c_{2M} también influye en este comportamiento, de modo que cuanto más elevado sea su valor, más margen habrá para hacer un mayor número de reparaciones. En definitiva, los resultados sugieren que tasas de fallo bajas se asocian con un reemplazamiento por edad, mientras que la sustitución por M_1^* fallos es el procedimiento óptimo cuando estos ocurren frecuentemente.

La Tabla 3, muestra las políticas óptimas $(\infty, T_{s_1}^*)$ y $(M_{s_2}^*, \infty)$ correspondientes al caso 1, para los distintos valores de los parámetros. Conviene recordar que $(\infty, T_{s_1}^*)$ significa que únicamente se realiza un mantenimiento preventivo por la edad, mientras que $(M_{s_2}^*, \infty)$ implica que la sustitución se realiza solamente tras alcanzar $M_{s_2}^*$ fallos. En primer lugar, tal como era esperable, $T_{s_1}^*$ y $Q_{s_1}(T_{s_1}^*)$ no experimentan cambio alguno al modificar el valor de c_{2M} , pues este parámetro no interviene en la fórmula asociada a su cálculo.

Cuando c_1 aumenta, las políticas óptimas univariantes, $T_{s_1}^*$ y $M_{s_2}^*$, disminuyen. Esto es debido a que, al ser el precio de las reparaciones más elevado, el sistema resulta más costoso de mantener. El óptimo $T_{s_1}^*$ crece con s y b , puesto que, al volverse el sistema cada vez más deficiente, los ciclos de renovación tienden a acortarse. Por otro lado, $M_{s_2}^*$ no decrece frente a dichos parámetros, ya que la aparición de fallos se vuelve más frecuente, acelerando, así, el momento de la renovación. Además, presenta el mismo comportamiento al incrementarse c_{2M} : un aumento del precio de la renovación, implica alargar la vida del sistema al bajar la rentabilidad del mismo. En términos generales, un aumento de cualquiera de los parámetros trae consigo una subida del coste óptimo de las políticas univariantes.

La última columna de la tabla indica la probabilidad de que se alcance el instante del $M_{s_2}^*$ -ésimo fallo antes del óptimo $T_{s_1}^*$ asociados cada uno a su política univariante respectiva. La probabilidad de que un reemplazamiento por número de fallos nos lleve a una renovación más temprana respecto de uno por la edad, tiene un comportamiento no monótono con b y s . Se observa que contra más grande sea el límite óptimo de reparaciones del sistema $M_{s_2}^*$ y a medida que disminuye el valor de T_{s_2} , dicha probabilidad alcanza valores más bajos (análogamente caso contrario). Además se hace notar que dicha probabilidad es inversamente proporcional a c_{2M} ; cuanto más cara sea la renovación por número de fallos, la probabilidad de que esta política nos lleve a un reemplazamiento más temprano que por la edad, disminuye.

Tabla 3

Los costes óptimos $Q_{s_1}(T_{s_1}^*)$ y $Q_{s_2}(M_{s_2}^*)$ de las políticas univariantes, siendo S_1 es el caso donde $M = \infty$ y S_2 el correspondiente al caso $T = \infty$.

	c_1	c_{2M}	b	s	$T_{s_1}^*$	$Q_{s_1}(T_{s_1}^*)$	$M_{s_2}^*$	$Q_{s_2}(M_{s_2}^*)$	$P(S_{M_{s_2}^*} \leq T_{s_1}^*)$
1	0.5	1.25	1.5	1	2.9438	0.6124	2	0.5054	0.4040
2				5	1.7187	1.4034	2	1.0152	0.5955
3			3.0	1	2.3753	0.8513	2	0.7347	0.5339
4				5	1.3082	2.1494	3	1.7443	0.5878
5		1.5	1.5	1	2.9438	0.6124	2	0.5777	0.4040
6				5	1.7187	1.4034	3	1.1544	0.4321
7			3.0	1	2.3753	0.8513	2	0.8397	0.5339
8				5	1.3082	2.1494	4	1.9357	0.4357
9		2.0	1.5	1	2.9438	0.6124	2	0.7221	0.4040
11			3.0	1	2.3753	0.8513	3	1.0225	0.3266
13		3.0	1.5	1	2.9438	0.6124	3	0.9804	0.2358
14				5	1.7187	1.4034	4	1.7951	0.3076
15			3.0	1	2.3753	0.8513	4	1.3461	0.1866
16				5	1.3082	2.1494	6	2.7989	0.2152
17	0.7	1.25	1.5	1	2.6613	0.7148	1	0.5130	0.6056
18				5	1.5097	1.7173	2	1.1312	0.5231
19			3.0	1	2.1202	1.0142	1	0.8053	0.7303
20				5	1.1373	2.6824	2	2.0010	0.6785
21		1.5	1.5	1	2.6613	0.7148	1	0.6156	0.6036
22				5	1.5097	1.7173	2	1.2762	0.5231
27		2.0	3	1	2.1202	1.0142	2	1.1336	0.4439
29		3.0	1.5	1	2.6613	0.7148	2	1.0687	0.3322
30				5	1.5097	1.7173	3	2.0317	0.3525
31			3.0	1	2.1202	1.0142	3	1.4997	0.2412
32				5	1.1377	2.6824	5	3.2739	0.2169
33	1.0	1.25	1.5	1	2.3753	0.8513	1	0.5130	0.5414
34				5	1.3082	2.1494	1	1.1407	0.6952
35			3.0	1	1.8672	1.2342	1	0.8053	0.6615
36				5	0.9758	3.4268	1	2.1905	0.8231
37		1.5	1.5	1	2.3753	0.8513	1	0.6156	0.5414
38				5	1.3082	2.1494	1	1.3689	0.6952
39			3.0	1	1.8072	1.2342	1	0.9663	0.6615
40				5	0.9758	3.4268	2	2.5654	0.5903
45		3.0	1.5	1	2.3753	0.8513	2	1.1553	0.2625
47			3.0	1	1.8672	1.2342	2	1.6794	0.3537
48				5	0.9758	3.4268	4	3.8713	0.2368

Al comparar $Q_{s_1}(T_{s_1}^*)$ y $Q_{s_2}(M_{s_2}^*)$, se aprecia que, aunque $c_{2M} > c_{2T}$, el primero es más grande que el segundo hasta que el valor del coste c_{2M} es 2. A partir de este punto la relación se invierte siendo $Q_{s_2}(M_{s_2}^*)$ más alto. Es decir, cuando el coste del mantenimiento en M fallos se hace muy elevado resulta más rentable un reemplazamiento por la edad de valor $T_{s_1}^*$. Este hecho se puede apreciar mejor en la Figura 4.1, donde aparecen representadas las tres funciones de coste frente a los valores de c_{2M} . Se advierte el valor de c_{2M} a partir del cual s_1 es mejor que s_2 o al contrario. También se ve que el coste de la más económica de las dos, converge al de la política bivalente. Cuando dicho mantenimiento preventivo es bajo, $Q(M_1^*, T_1^*)$ se aproxima a $Q_{s_2}(M_{s_2}^*)$, y por tanto se asegura el hecho de que la renovación se sucederá tras el $M_{s_2}^*$ -ésimo fallo. Sin embargo, si c_{2M} adquiere valores más grandes, ocurre lo contrario, la sustitución del sistema tendrá lugar en el instante $T_{s_1}^*$ al ser $Q(M_1^*, T_1^*) = Q_{s_1}(T_{s_1}^*)$. Por otro lado,

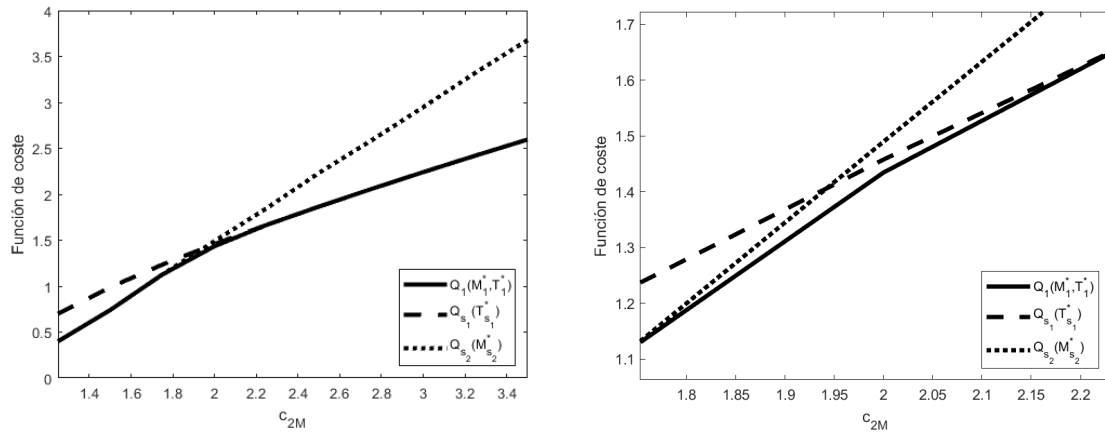


Figura 5.1: La función de coste correspondiente a los tres tipos de políticas, frente al coste c_{2M}

vemos que cuando c_{2M} toma valores entre 1.75 y 2.25, aproximadamente, el coste asociado a la política bivariante alcanza unos valores óptimos respecto las univariantes. De este modo, (M_1^*, T_1^*) nos ofrecerá la óptimalidad buscada, respecto de las políticas univariantes, a la hora de calcular el mínimo coste.

Hasta ahora hemos supuesto que $c_{2M} > c_{2T}$, pero ¿qué pasaría si el coste de ambos mantenimientos preventivos fuese el mismo?.

Tabla 4

Los óptimos (M_1^*, T_1^*) , $Q(M_1^*, T_1^*)$ correspondientes al caso 1 para los diferentes valores de c_1 , c_{2M} , b y s , con $a = 1$ y $c_{2T} = c_{2M}$.

c_1	c_{2M}	b	s	M_1^*	T_1^*	$P(S_{M_1^*} \leq T_1^*)$	$E[\tau^*]$	$Q(M_1^*, T_1^*)$
0.5	2.0	1.5	1	2	12.2224	1.0000	3.4623	0.7221
			5	3	11.6546	1.0000	2.1657	1.3852
		3.0	1	3	8.7698	1.0000	2.9339	1.0225
			5	5	8.1605	1.0000	1.7716	2.2579
		3.0	1.5	1	3	11.8790	1.0000	4.0800
			5	4	11.7474	1.0000	2.5068	1.7951
	3.0	3.0	1	4	8.9506	1.0000	3.3430	1.3461
			5	6	8.2085	1.0000	1.9651	2.7989
		1.5	1	2	12.0571	1.0000	3.4623	0.7798
			5	2	11.6040	1.0000	1.7239	1.5663
		3.0	1	2	8.7958	1.0000	2.3818	1.1336
			5	3	8.0515	1.0000	1.2899	2.6359
0.7	2.0	1.5	1	2	12.5390	1.0000	3.4623	1.0687
			5	3	11.7404	1.0000	2.1657	2.0317
		3.0	1	3	8.9993	1.0000	2.9339	1.4997
			5	5	8.1890	1.0000	1.7716	3.2739
		3.0	1.5	1	1	12.3871	1.0000	2.4365
			5	2	11.5748	1.0000	1.7239	1.7403
	3.0	3.0	1	2	8.7469	1.0000	2.3818	1.2596
			5	2	7.9900	1.0000	0.9745	3.0785
		1.5	1	2	11.9847	1.0000	3.4623	1.1553
			5	3	11.6380	1.0000	2.1657	2.3087
		3.0	1	2	9.0235	1.0000	2.3818	1.6794
			5	4	8.1406	1.0000	1.5499	3.8713

Tabla 5

Los óptimos (M_2^*, T_2^*) , $Q(M_2^*, T_2^*)$ con costes de mantenimiento correctivo dependientes del tiempo.

	c_1	c_{2M}	b	s	M_2^*	T_2^*	$P(S_{M_2^*} \leq T_2^*)$	$E[\tau^*]$	$Q(M_2^*, T_2^*)$
1	1.5x	1.25	1.5	1	1	10.7707	1.0000	2.4365	0.5130
2				5	1	11.4874	1.0000	1.0958	1.1407
3			3.0	1	1	7.9233	1.0000	1.5523	0.8053
4				5	1	7.4835	1.0000	0.5707	2.1905
5		1.5	1.5	1	1	7.2069	0.9931	2.4314	0.6155
6				5	1	10.9264	1.0000	1.0958	1.3689
7			3.0	1	1	5.4401	0.9977	1.5512	0.9663
8				5	1	7.4369	1.0000	0.5707	2.6286
9		2	1.5	1	1	4.4245	0.8814	2.3122	0.8137
10				5	1	10.3040	1.0000	1.0958	1.8252
11			3.0	1	1	3.2745	0.9250	1.5012	1.2823
12				5	37	0.6528	0.0000	0.6528	2.6473
13		3	1.5	1	27	1.4787	0.0000	1.4787	1.0666
14				5	43	0.8474	0.0000	0.8474	1.9871
15			3.0	1	25	1.1738	0.0000	1.1738	1.3833
16				5	37	0.6528	0.0000	0.6528	2.6473

La Tabla 4 responde a esa pregunta. En ella se recogen las políticas óptimas asociadas a las situaciones en la renovación del sistema cuesta lo mismo en ambos casos, $c_{2T} = c_{2M}$. De este modo, al tener el mismo coste de renovación, podremos estudiar cual de las dos opciones es la mejor a la hora de sustituir el sistema.

Si nos fijamos en la columna $P(S_{M_1^*} \leq T_1^*)$, vemos que para todos los casos adquiere el valor 1. Esto nos indica que independientemente de la variabilidad de los parámetros, el sistema siempre se renovará tras alcanzar M_1^* fallos. Es importante señalar que una renovación en $S_{M_1^*}$ conlleva los costes derivados de $M_1^* - 1$ fallos con sus correspondientes reparaciones, mientras que en T_1^* el número de errores es aleatorio. Así el coste, c_1 , resulta ser de gran importancia. Al reemplazar el sistema tras M fallos, el coste asociado vendrá dado por $(M_1^* - 1)c_1$, mientras que en el caso de renovar en T_1^* dicho coste no está acotado. De este modo, la sustitución del sistema tras un número M_1^* de errores, resulta siempre ser la mejor opción a la hora de obtener el mínimo coste.

Ahora vamos a considerar el caso donde el mantenimiento correctivo es dependiente del tiempo. Particularmente el caso creciente $c_1(t) = 1.5x$. En la Tabla 5 aparecen los óptimos (M_2^*, T_2^*) , $Q(M_2^*, T_2^*)$ correspondientes al caso 2 (donde el coste asociado al mantenimiento correctivo varía a lo largo del tiempo), así como las probabilidades de que las renovaciones ocurran tras el fallo M_2^* y las longitudes medias de los ciclos óptimos.

Estableciendo una comparativa con la Tabla 1, se aprecia que la longitud media del ciclo disminuye, mientras que el coste óptimo $Q(M_2^*, T_2^*)$ aumenta. Dicho de otro modo, al ser el coste por reparación creciente a lo largo del tiempo, la esperanza de vida del sistema se reduce y su mantenimiento resulta más elevado, respecto de un coste c_1 fijo.

Por otra parte, tenemos que T_2^* es no monótona frente a s , mientras que M_2^* es no decreciente. El aumento de la aparición de fallos en el sistema, provoca una aceleración en el momento de su sustitución, como se ve reflejado en la disminución de $E[\tau^*]$. Un aumento de b , trae consigo una disminución del óptimo T_2^* , ya que una mayor deficiencia del sistema, hace que su mantenimiento resulte poco rentable. Además, al incrementarse ambos parámetros, el coste óptimo experimenta una subida, asociado a la deficiencia del sistema.

Por otro lado T_2^* disminuye y M_2^* es no decreciente cuando el c_{2M} alcanza valores altos. Al ser el coste por reparación más caro a lo largo del tiempo, un crecimiento del mantenimiento preventivo c_{2M} implica una reducción del ciclo de renovación, ya que el sistema resulta menos rentable a lo largo del

tiempo.

Además, cuando el coste del mantenimiento preventivo tras M fallos no alcance valores grandes respecto al mantenimiento en T , y las reparaciones no sean de muy mala calidad, la renovación tras alcanzar el M_2^* -ésimo fallo prevalece frente a un reemplazamiento en T_2^* . Sin embargo cuando tengamos un valor grande de c_{2M} o las reparaciones resulten muy deficientes, será preferible una renovación en T_2^* y más aún, si la tasa de fallos aumenta.

Tabla 6

Los óptimos (M_2^*, T_2^*) , $Q(M_2^*, T_2^*)$ correspondientes al caso 2 para los diferentes valores de c_1 , c_{2M} , b y s , con $a = 1$ y $c_{2T} = c_{2M}$.

$c_1(x)$	c_{2M}	b	s	M_2^*	T_2^*	$P(S_{M_2^*} \leq T_2^*)$	$E[\tau^*]$	$Q(M_2^*, T_2^*)$
1.5x	2.0	1.5	1	1	12.3871	1.0000	2.4365	0.8208
			5	1	11.6884	1.0000	1.0958	1.8252
		3.0	1	1	8.7492	1.0000	1.5523	1.2884
			5	1	7.8360	1.0000	0.5707	3.5047
		3.0	1	1	12.2833	1.0000	2.4365	1.2313
			5	1	12.4539	1.0000	1.0958	2.7378
	3.0	3.0	1	1	8.9409	1.0000	1.5523	1.9326
			5	1	7.9252	1.0000	0.5707	5.2571

En la Tabla 6 aparecen los óptimos asociados a los casos donde el mantenimiento preventivo por número de fallos es el mismo que el correspondiente a la edad. Tal y como ocurría en la Tabla 4, para el caso donde el mantenimiento correctivo es creciente a lo largo del tiempo, también resultará siempre preferible optar por sustituir el sistema en $S_{M_2^*}$. En este caso, al reemplazar el sistema por número de fallos, el coste asociado vendrá dado por $\sum_{k=1}^{M_2^*-1} c_1(S_k)$, mientras que el resultante tras alcanzar el instante T será $\sum_{k=1}^{N(T)} c_1(S_k)$. En el segundo caso el número de reparaciones no está acotado lo que, unida a un coste creciente de estas, conduce a que el mantenimiento preventivo ocurre cuando se alcanza M_2^* .

Capítulo 6

Conclusiones finales

En el presente trabajo se ha desarrollado una política de mantenimiento de un sistema en la que se ha considerado tanto un mantenimiento correctivo, de reparación de fallos, como preventivo, de sustitución. Esta última, se llevará a cabo tras alcanzarse un número de fallos M o un instante T , lo que tenga lugar primero. Los valores de ambas variables de decisión son los óptimos de una función de coste definida con el modelo de mantenimiento. Además hemos tenido en cuenta que las reparaciones del sistema son de baja calidad, de modo que a medida que se arregla un fallo, la fiabilidad del sistema disminuye. Con todo esto se han planteado dos tipos de modelos: uno donde el coste por reparación es fijo a lo largo de la vida del sistema, y otro donde este varía conforme pasa el tiempo.

Tras definir la función de coste objetivo Q , nuestra tarea ha sido obtener la política óptima (M^*, T^*) que minimiza dicho valor. Por ello se ha realizado un estudio numérico con el fin de ver el comportamiento de Q al variar los parámetros del modelo.

De dicho estudio, se han obtenido ciertas conclusiones de interés a la hora de implementar una política de mantenimiento al sistema. Comenzando con el caso, donde c_1 es constante, hemos visto que un aumento del coste asociado al mantenimiento correctivo, acorta la duración de los ciclos de renovación e impulsa una sustitución basada en el número de fallos. Además resultará conveniente reemplazar el sistema a una edad más temprana cuando la tasa de fallos sea alta, así como, cuando las reparaciones resulten ser de muy mala calidad.

Por otro lado, la probabilidad de renovar tras alcanzar M fallos, resultará más ventajosa cuando la aparición de fallos sea más frecuente. Sin embargo, cuando dicha frecuencia decrezca, una sustitución por edad será más conveniente.

En el trabajo se han comparado tres tipos de políticas de mantenimiento, una bivalente donde se consideran M y T , y dos univariantes respecto de las variables de decisión M o T . Así se ha podido concluir que la política óptima bivalente supera a cualquiera de las dos óptimas univariantes. Asimismo, hemos estudiado en qué condiciones cada una de las políticas univariantes resultará ser preferible respecto de la otra. Cuando c_{2M} tome valores elevados resultará más rentable un reemplazamiento en T , mientras, de forma análoga, una renovación tras M fallos será preferible cuando dicho coste sea bajo.

Por último, cuando el coste por reparación sea creciente a lo largo del tiempo, un mantenimiento basado en la edad del sistema resultará lo más conveniente en situaciones en las que el coste por renovación tras M fallos sea significativamente más elevado que en T y al mismo tiempo las reparaciones sean de baja calidad; especialmente en aquellos casos donde haya una elevada frecuencia de fallos.

Además, el estudio numérico indica que si el coste del mantenimiento preventivo es el mismo tanto en la renovación por número de fallos como por edad, la política óptima suele venir dada por la sustitución del sistema tras alcanzar el M -ésimo fallo tanto en el caso de que c_1 sea fijo como creciente con el tiempo.

Bibliografía

- [1] BEICHELT F., *Stochastic Processes in Science Engineering and Finance*, Chapman & Hall/CRC, 2006.
- [2] GARCÍA DE JALÓN J., RODRÍGUEZ, J. I. AND VIDAL, J., *Aprenda Matlab 7.0 como si estuviera en primero*, Universidad Politécnica de Madrid, Escuela Técnica Superior de Ingenieros. 2005.
- [3] LEWIS E.E., *Introduction to Reliability Engineering*, Wiley, Second edition, 1995.
- [4] ROSS SHELDON M., *Stochastic Processes*, Wiley, Second edition, 2008.