График дахь математикийн ойлголтууд

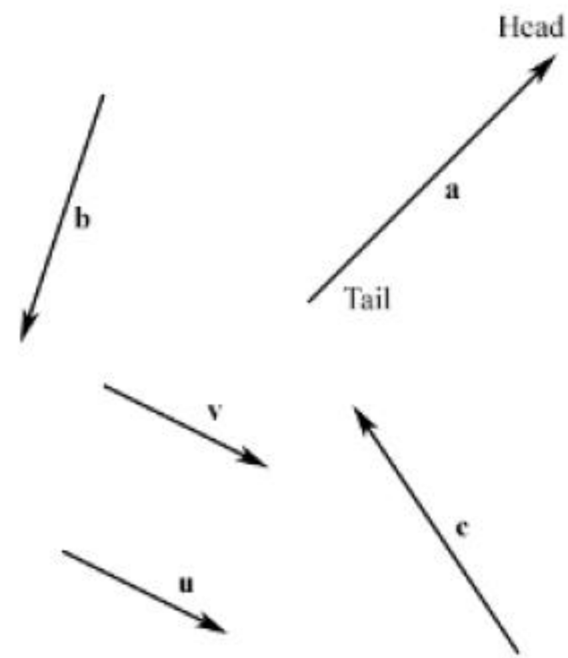
Лекц 6

Агуулга

- 3D график дахь векторын хэрэглээ, түүний геометр ба алгебр дүрслэл
- Матриц ба түүний график дахь хэрэглээ

3 хэмжээст огторгуй дахь вектор

- Геометр утгынхаа хувьд вектор нь чиглэлтэй хэрчимээр дүрслэгддэг.
- Вектор нь дараах 2 шинжээр тодорхойлогдоно:
  - Урт (length, magnitude, norm)
  - Хаашаа зааж буйг заах чиглэл.



Вектор

- Физикт чиглэл ба тоо хэмжээгээр хоёулангаар нь хэмжигддэг зүйлсийг тодорхойлохдоо векторыг ашигладаг.
- Компьютер графикт бид чиглэлийг тодорхойлохдоо векторыг ашигладаг.
  - Жишээ нь гэрэл хаанаас тусч байна, камерыг хааш нь чиглүүлсэн байна, полигоны нүүрэн тал хаашаа харсан байна гэх мэт

Вектор

- Векторууд өөр өөр байрлалд байгаа хэдий ч ижил урттай, ижил чиглэлтэй бол тэдгээрийг **тэнцүү векторууд** гэдэг.
- Жишээ нь **u** ба **v** векторууд тэнцүү векторууд.
- Векторыг тэмдэглэхдээ ихэвчлэн жижиг, заримдаа том үсгээр дараах байдлаар тэмдэглэнэ.

$$\mathbf{u}=(u_x, u_y)$$

$$\mathbf{N}=(N_x, N_y, N_z)$$

$$\mathbf{c}=(c_x, c_y, c_z, c_w)$$

Векторын тэнцүү чанар

- Геометр утгаараа хэрэв 2 вектор хоёул ижил урттай, нэг ижил чигт зааж байвал тэнцүү векторууд гэнэ.

- Алгебр утгаараа хэрэв векторуудын хэмжээс нь ижил байгаад харгалзах компонентууд нь ижил бол тэнцүү векторууд гэнэ.

  $(ux, uy, uz) = (vx, vy, vz)$

  if $ux = vx$, $uy = vy$, and $uz = vz$.

Векторын уртыг олох

- Геометр утгаараа чиглэлтэй хэрчмийн уртыг векторын урт гэнэ.
- Алгебр утгын хувьд векторын компонентууд мэдэгдэж байгаа бол векторын уртыг дараах томъёогоор олдог.

$$\|\mathbf{u}\| = \sqrt{u_x{}^2 + u_y{}^2 + u_z{}^2}$$

Векторын нормчлах

- Векторын уртыг нэгж урттай болгох үйлдлийг нормчлах гэх буюу үүссэн нэгж урттай векторыг unit vector гэнэ.

$$\hat{\mathbf{u}} = \frac{\mathbf{u}}{\|\mathbf{u}\|} = \left(\frac{u_x}{\|\mathbf{u}\|}, \quad \frac{u_y}{\|\mathbf{u}\|}, \quad \frac{u_z}{\|\mathbf{u}\|} \right)$$

Жишээ

- **u** = (1, 2, 3)

$$\|\mathbf{u}\| = \sqrt{u_x{}^2 + u_y{}^2 + u_z{}^2}$$

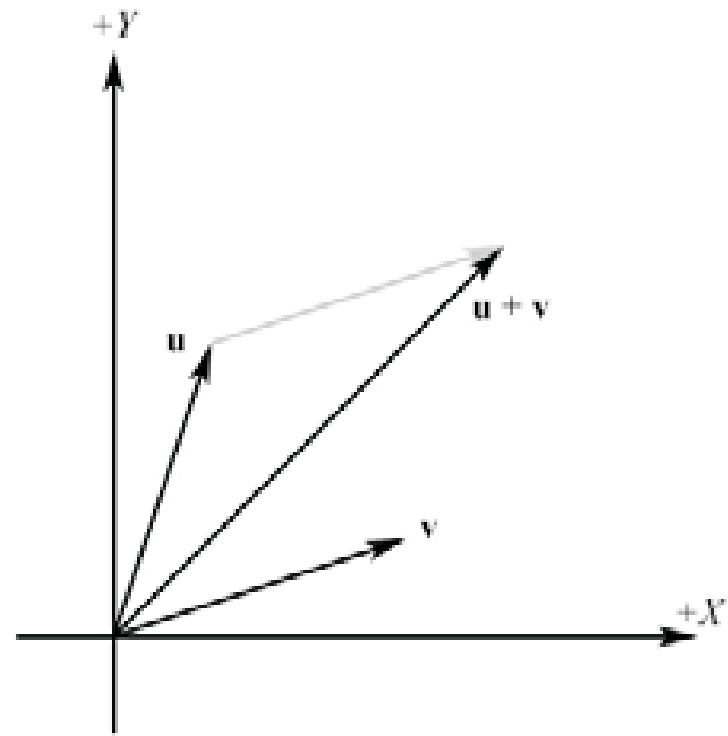
$$\|\mathbf{u}\| = \sqrt{1^2 + 2^2 + 3^2} = \sqrt{1 + 4 + 9} = \sqrt{14}$$

$$\hat{\mathbf{u}} = \frac{\mathbf{u}}{\|\mathbf{u}\|} = \left(\frac{u_x}{\|\mathbf{u}\|}, \quad \frac{u_y}{\|\mathbf{u}\|}, \quad \frac{u_z}{\|\mathbf{u}\|} \right)$$

$$\hat{\mathbf{u}} = \frac{\mathbf{u}}{\sqrt{14}} = \left(\frac{1}{\sqrt{14}}, \quad \frac{2}{\sqrt{14}}, \quad \frac{3}{\sqrt{14}} \right)$$

Вектор нийлбэр

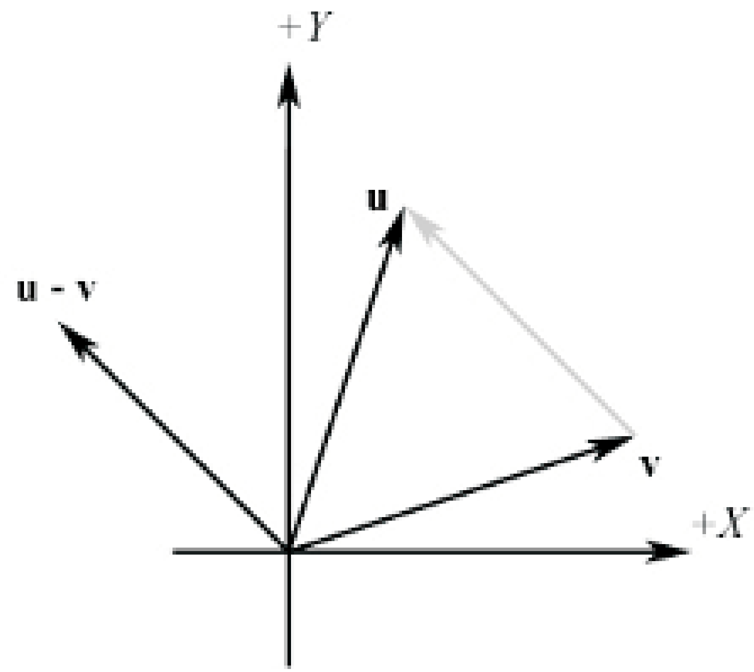
- Хоёр векторыг нэмэхдээ векторуудын компонентүүдийг харгалзуулан нэмнэ.
- Векторуудын хэмжээс ижил байх ёстой.



$$\mathbf{u}+\mathbf{v}=\left(u_x+v_x,\quad u_y+v_y,\quad u_z+v_z\right)$$

Вектор ялгавар

- Нэмэхтэй адил, векторуудын компонентүүдийг харгалзан хасна.
- Векторуудын хэмжээс мөн ижил байх ёстой.



$$\mathbf{u}-\mathbf{v}=\mathbf{u}+(-\mathbf{v})=(u_x-v_x,\quad u_y-v_y,\quad u_z-v_z)$$

Векторын скаляр үржвэр

- Векторын тоогоор үржүүлж болно.
- Хэрэв үржүүлэх утга сөрөг биш бол векторын чиглэл хэвээр үлдэнэ, эсрэг тохиолдолд чиглэл нь эсрэгээрээ өөрчлөгдөнө.

$$k\mathbf{u} = \left(ku_x, \quad ku_y, \quad ku_z \right)$$

Векторын скаляр үржвэр
Dot products

- Векторын скаляр үржвэрийг мөн дараах байдлаар олж болно

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = u_x v_x + u_y v_y + u_z v_z = s$$

- Үүнд ямар нэг геометр утга байхгүй

Векторын скаляр үржвэр
Dot products

- Косинусын хууль ёсоор векторын скаляр үржвэр нь

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \|\mathbf{u}\| \|\mathbf{v}\| \cos \vartheta$$

- Хэрэв **u** ба **v** векторууд нэгж урттай векторууд бол

u · v үржвэр нь эдгээр 2 векторын хоорондын өнцгийг илэрхийлнэ.

Векторын скаляр үржвэр

Some useful properties of the dot product:

- If $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = 0$, then $\mathbf{u} \perp \mathbf{v}$.
- If $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} > 0$, then the angle, ϑ, between the two vectors is less than 90 degrees.
- If $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} < 0$, then the angle, ϑ, between the two vectors is greater than 90 degrees.

Векторын вектор үржвэр
Cross products

- The second form of multiplication that vector math defines is the cross product.
- Unlike the dot product, which evaluates to a scalar, the cross product evaluates to another vector.
- Taking the cross product of two vectors, **u** and **v**, yields another vector, **p**, that is mutually orthogonal to **u** and **v**.

Векторын вектор үржвэр
Cross products

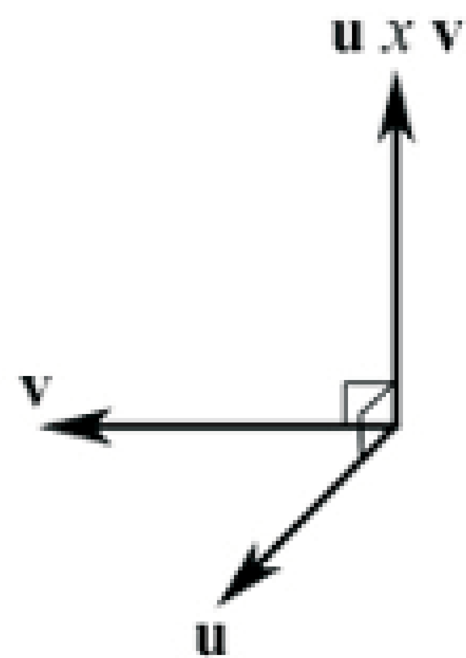
- Cross product computed like so:

$$\mathbf{p} = \mathbf{u} \times \mathbf{v} = [(u_y v_z - u_z v_y), \quad (u_z v_x - u_x v_z), \quad (u_x v_y - u_y v_x)]$$

$$p_x = (u_y v_z - u_z v_y)$$

$$p_y = (u_z v_x - u_x v_z)$$

$$p_z = (u_x v_y - u_y v_x)$$



Матриц/Matrices

- An ***m x n matrix*** is a rectangular array of numbers with ***m*** **rows** and ***n*** **columns**.
- The number of rows and columns give the dimension of the matrix.

Matrices

- Examples of a 3x3 matrix **M**, a 2x4 matrix **B**, and a 3x2 matrix **C** follow:

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} & m_{13} \\ m_{21} & m_{22} & m_{23} \\ m_{31} & m_{32} & m_{33} \end{bmatrix} \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} & b_{14} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} & b_{24} \end{bmatrix} \quad \mathbf{C} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \\ c_{31} & c_{32} \end{bmatrix}$$

Matrices

- Sometimes a matrix will contain a single row or column. We give the special names ***row vector*** and ***column vector*** to describe such matrices.
- Examples of a row and column vector follow:

$$\mathbf{v} = \begin{bmatrix} v_1, & v_2, & v_3, & v_4 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{u} = \begin{bmatrix} u_x \\ u_y \\ u_z \end{bmatrix}$$

Тэнцүү чанар/Equality

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ -2 & 3 \end{bmatrix} \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 6 & 2 \\ 5 & -8 \end{bmatrix} \quad \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ -2 & 3 \end{bmatrix} \quad \mathbf{D} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \\ -6 & 3 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

- Two matrices are equal if they are of the same dimension and their corresponding entries are equal.
- For example, A=C

  $A \neq B$ and $A \neq D$

Скаляр тоогоор үржүүлэх
Multiply by scalar

- We can multiply a matrix by a scalar by multiplying each entry of the matrix by the scalar. For example, multiplying **D** by the scalar *k* gives:

$$k\mathbf{D} = \begin{bmatrix} k(1) & k(2) & k(-1) & k(3) \\ k(-6) & k(3) & k(0) & k(0) \end{bmatrix}$$

Матрицуудийг нэмэх
Addition

- Two matrices can be added only if they are of the same dimension.
- The sum is found by adding the corresponding entries of the two matrices together. For example:

$$\mathbf{A}+\mathbf{B}=\begin{bmatrix}1 & 5\\ -2 & 3\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}6 & 2\\ 5 & -8\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1+6 & 5+2\\ -2+5 & 3+(-8)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}7 & 7\\ 3 & -5\end{bmatrix}$$

Матрицуудийг хасах
Subtraction

- As with addition, in order to be able to subtract two matrices, they must have the same dimensions. Matrix subtraction is illustrated by the following example:

$$\mathbf{A}-\mathbf{B}=\mathbf{A}+(-\mathbf{B})=\begin{bmatrix}1 & 5\\ -2 & 3\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}6 & 2\\ 5 & -8\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 5\\ -2 & 3\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}-6 & -2\\ -5 & 8\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1-6 & 5-2\\ -2-5 & 3+8\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-5 & 3\\ -7 & 11\end{bmatrix}$$

Матрицуудийг үржүүлэх Multiplication

- Matrix multiplication is the most important operation that we use with matrices in 3D computer graphics.
- Through matrix multiplication we can transform vectors and combine several transformations together.

Матрицуудийг үржүүлэх Multiplication

- In order to take the matrix product **AB**, the number of columns of **A** must equal the number of rows of **B**.
- If that condition is satisfied, the product is defined. Consider the following two matrices, **A** and **B**, of dimensions 2 x 3 and 3 x 3, respectively

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{bmatrix} \qquad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{bmatrix}$$

Матрицуудийг үржүүлэх Multiplication

- $c_{i\,j}=a_i\, b_j$

  where $\mathbf{a}_i$ denotes the i^{th} row vector in **A,** and $\mathbf{b}_j$ denotes the j^{th} column vector in **B**

$$\mathbf{AB}=\begin{bmatrix} 4 & 1 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \mathbf{a}_1\cdot\mathbf{b}_1 & \mathbf{a}_1\cdot\mathbf{b}_2 \\ \mathbf{a}_2\cdot\mathbf{b}_1 & \mathbf{a}_2\cdot\mathbf{b}_2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} (4 \quad 1)\cdot(1 \quad 2) & (4 \quad 1)\cdot(3 \quad 1) \\ (-2 \quad 1)\cdot(1 \quad 2) & (-2 \quad 1)\cdot(3 \quad 1) \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 6 & 13 \\ 0 & -5 \end{bmatrix}$$

Нэгж матриц
Identity Matrix

- There is a special matrix called the ***identity matrix***. The identity matrix is a square matrix that has zeros for all elements except along the main diagonal, and the elements along the main diagonal are all ones.
- For example, below are 2 x 2, 3 x 3, and 4 x 4 identity matrices:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Хөрвөсөн матриц
The Transpose of a Matrix

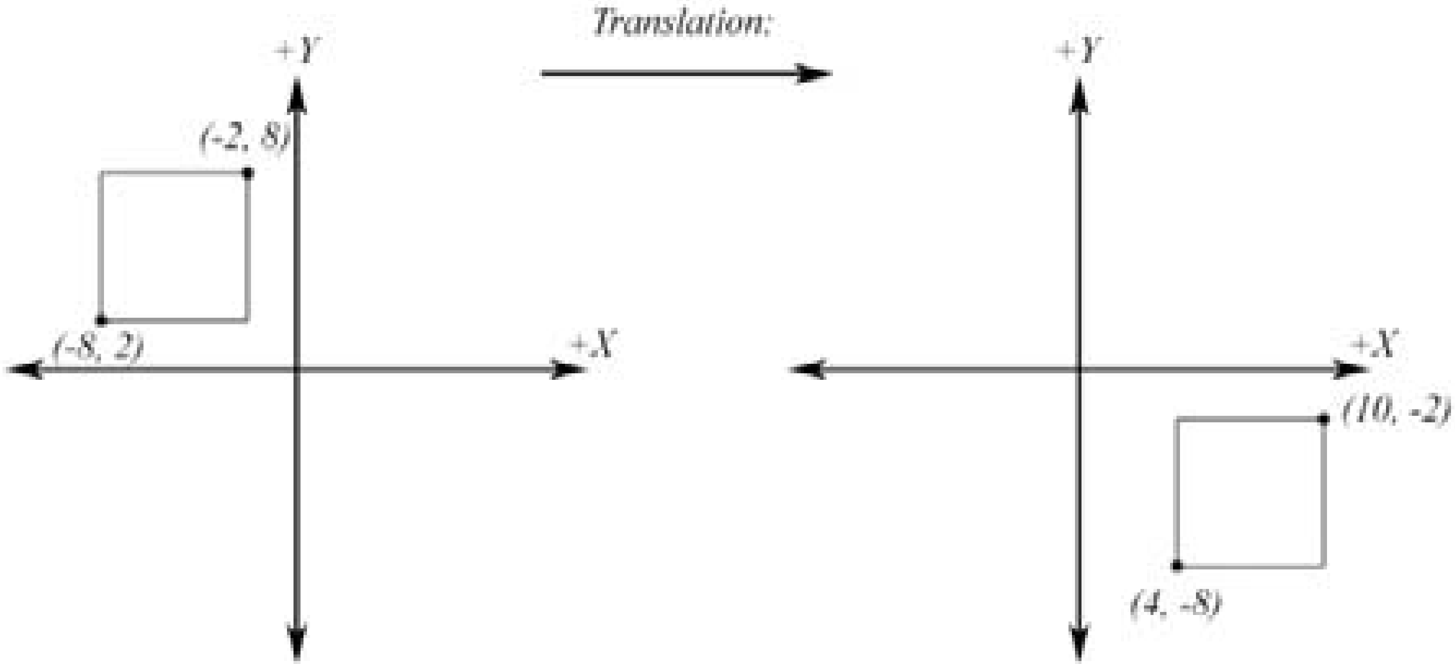
- The *transpose* of a matrix is found by interchanging the rows and columns of the matrix.
- Thus, the transpose of an *m* x *n* matrix is an *n x m* matrix. We denote the transpose of a matrix **M** as $\mathbf{M}^T$.

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 8 \\ 3 & 6 & -4 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{A}^T = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 6 \\ 8 & -4 \end{bmatrix}$$

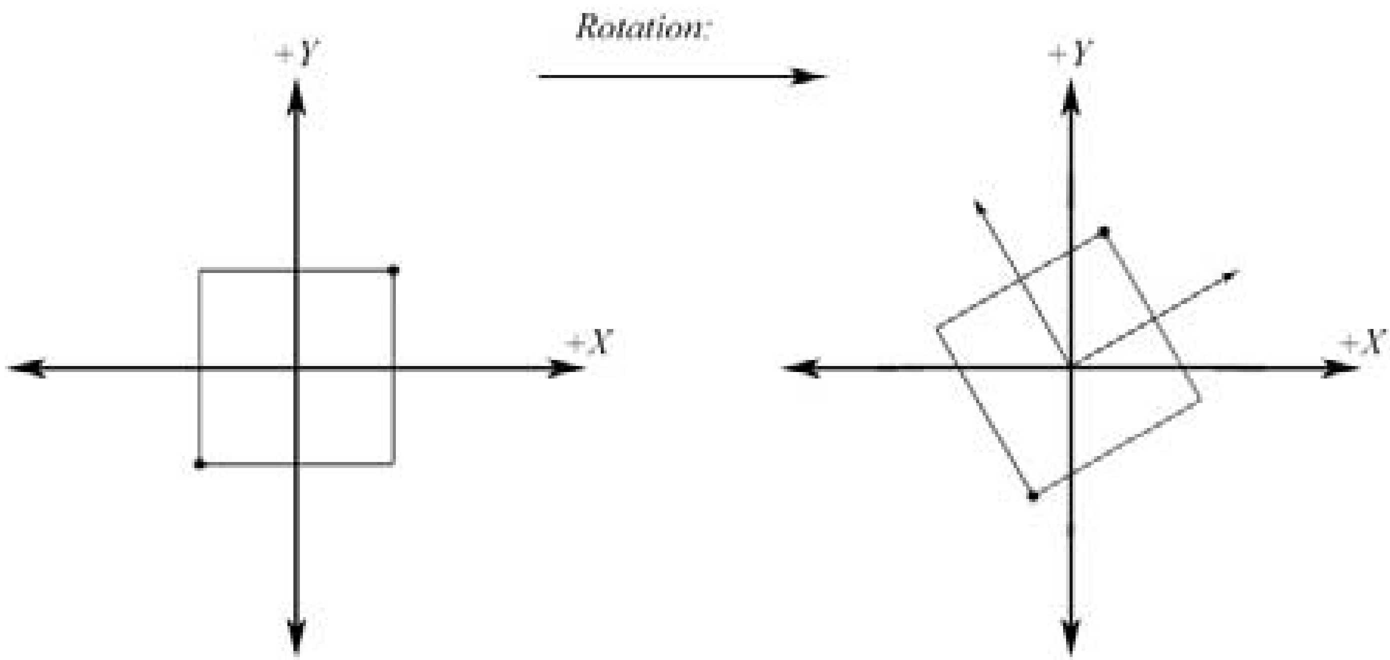
Үндсэн хувиргалтууд
Basic Transformations

- Зөөлт/ Translation
  Matrices



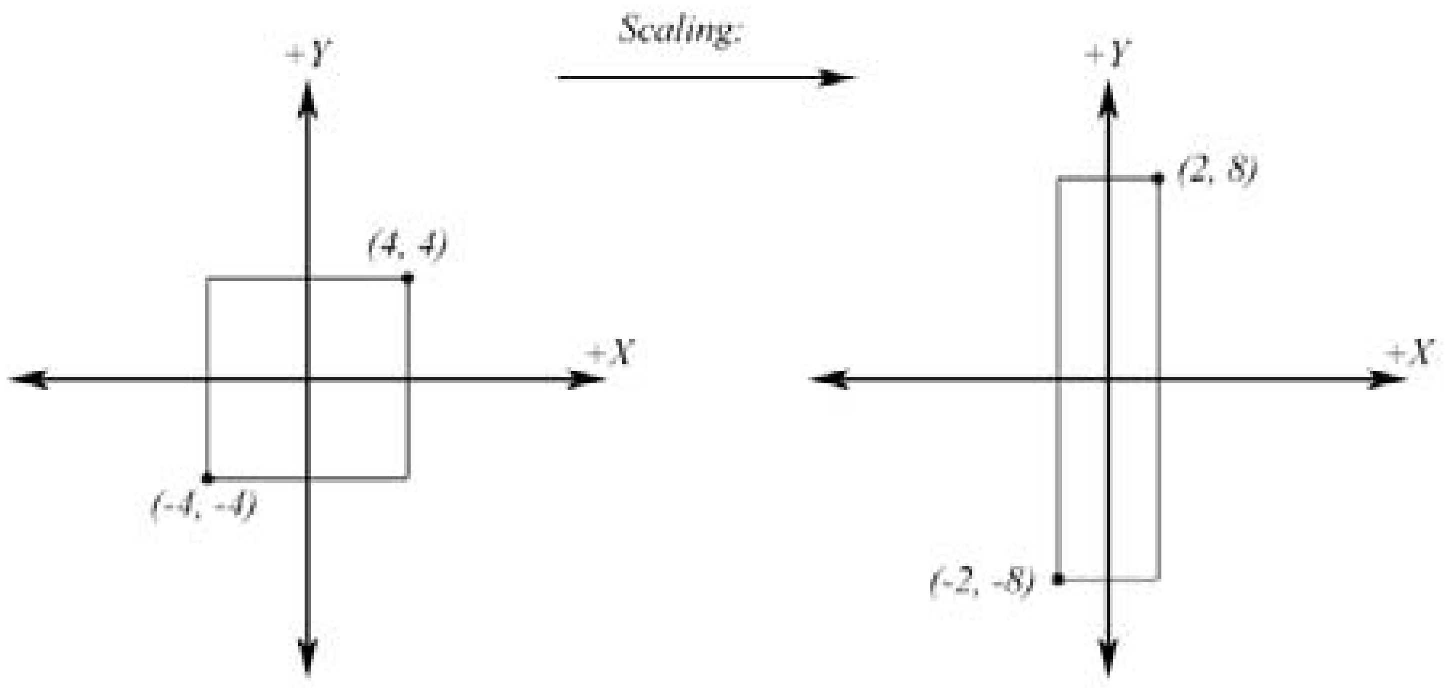
Basic Transformations

- Эргүүлэлт/ Rotation
  Matrices

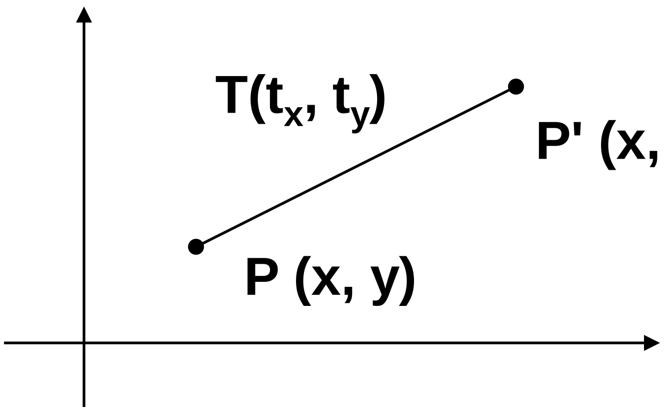


Basic Transformations

- Агшаах, сунгах Scaling Matrices



Translation Matrix

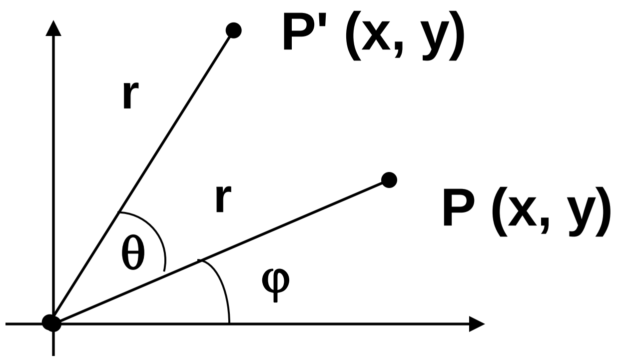


$$x' = x + t_x$$
$$y' = y + t_y$$

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & t_x \\ 0 & 1 & t_y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$P' = T(t_x, t_y)\, P$$

Rotation Matrix



$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix}$$

$x = r \cos \varphi$

$y = r \sin \varphi$

$$P' = R(\theta)\, P$$

$x' = r \cos(\varphi + \theta) = r \cos \varphi \cos \theta - r \sin \varphi \sin \theta$

$y' = r \sin(\varphi + \theta) = r \cos \varphi \sin \theta + r \sin \varphi \cos \theta$

$x' = x \cos \theta - y \sin \theta$

$y' = x \sin \theta + y \cos \theta$

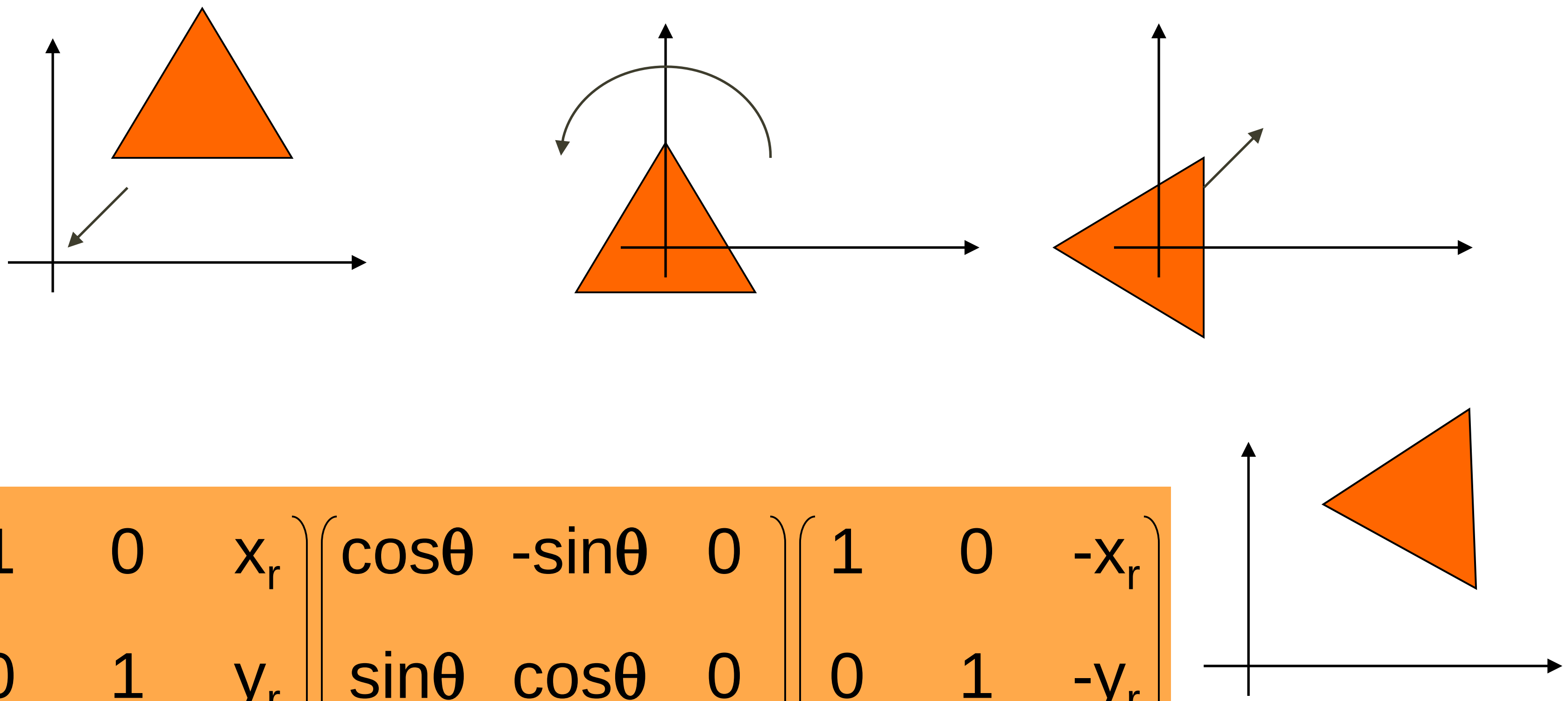
Scaling Matrix

$x' = x\, s_x$
$y' = y\, s_y$

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s_x & 0 & 0 \\ 0 & s_y & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix}$$

$P' = S\,(s_x, s_y)\, P$

Compound Transformation



$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & x_r \\ 0 & 1 & y_r \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & -x_r \\ 0 & 1 & -y_r \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$