8-MAVZU — MULOHAZALAR ALGEBRASI FUNKSIYALARI (BUL FUNKSIYASI)

Ma’lumki, mantiqiy amallar mulohazalar algebrasi nuqtai nazaridan chinlik jadvallari bilan to‘liq xarakterlanadi. Agarda funksiyaning jadval shaklida berilishini esga olsak, u vaqtda mulohazalar algebrasida ham funksiya tushunchasi mavjudligini bilamiz.

1-ta’rif. *Mulohazalar algebrasining* $x_1,...,x_n$ *argumentli* $f(x_1,...,x_n)$ *funksiyasi deb, 0 va 1 qiymat qabul qiluvchi funksiyaga aytiladi va uning* $x_1,...,x_n$ *argumentlari ham 0 va 1 qiymat qabul qiladi. Funksiya* $f(x_1,...,x_n)$ *o‘zining chinlik jadvali bilan beriladi.*

x_1	x_2	x_3	…	x_{n-1}	x_n	$f(x_1,...,x_n)$
0	0	0	...	0	0	f(0,0,...,0,0)
1	0	0	...	0	0	f(1,0,...,0,0)
...	...	...	...	...	...	....
1	1	1	...	1	0	f(1,1,...,1,0)
1	1	1	...	1	0	f(1,1,...,1,1)

Bu jadvalning har bir satrida avval o‘zgaruvchilarning $(\alpha_1,...,\alpha_n)$ qiymatlari va shu qiymatlar satrida f funksiyaning $f(\alpha_1,...,\alpha_n)$ qiymati beriladi. Oldingi paragraflarda isbot qilgan edikki, n ta o‘zgaruvchi uchun qiymatlar satrlarining soni 2^n va funksiyalarning soni 2^{2^n} ga teng bo‘ladi.

Mulohazalar algebrasida asosiy elementar funksiyalar quyidagilardan iborat:

$$f_1(x) = x, \quad f_2(x) = \bar{x}, \quad f_3(x,y) = xy, \quad f_4(x,y) = x \vee y,$$

$$f_5(x,y) = x \to y, \quad f_6(x,y) = x \leftrightarrow y,$$

$$f_7(x_1,.....,x_n)=1, \quad f_8(x_1,......,x_n)=0.$$

Agar f(0,0,.....,0)=0 bo‘lsa, u holda f(x_1,x_2,.....,x_n) funksiyaga 0 saqlovchi funksiya deb aytiladi. Agar $f(1,1,...,1)=1$ bo‘lsa, u vaqtda $f(x_1,x_2,...,x_n)$ funksiyaga 1 saqlovchi funksiya deb aytamiz.

n argumentli 0 saqlovchi funksiyalarning soni 2^{2^n-1} ga va 1 saqlovchi funksiyalarning soni ham 2^{2^n-1} ga teng bo‘ladi (isbot qilishni o‘quvchiga havola etamiz).

Mulohazalar algebrasidagi n argumentli 0 saqlovchi funksiyalar to‘plamini P_0 va 1 saqlovchi funksiyalar to‘plamini P_1 bilan belgilaymiz.

2-ta’rif. *f va g mulohazalar algebrasining funksiyasi va $x_1,...,x_n$ lar hech bo‘lmaganda ularning bittasining argumentlari bo‘lsin. Agar $x_1,...,x_n$ argumentlarning hamma qiymatlari satri uchun f va g funksiyalarning mos qiymatlari bir xil bo‘lsa, u holda f va g funksiyalar tengkuchli funksiyalar deb aytiladi va $f=g$ shaklida yoziladi.*

3-ta’rif. *Agarda quyidagi munosabat*

$$f(x_1,x_2,....,x_{i-1},1,x_{i+1},....,x_n)=f(x_1,x_2,....,x_{i-1},0,x_{i+1},....,x_n),$$

bajarilsa, u vaqtda x_i argumentga $f(x_1,x_2,...,x_n)$ funksiyaning soxta argumenti deb aytiladi.

Agarda $f(x_1,x_2,....,x_{i-1},1,x_{i+1},....,x_n)\neq f(x_1,x_2,....,x_{i-1},0,x_{i+1},....,x_n)$ bo‘lsa, u holda x_i argumentga $f(x_1,x_2,...,x_n)$ funksiyaning soxta emas (muhim) argumenti deb aytiladi.

Misol. $f(x,y)=x\vee(xy)$ funksiya uchun u argumenti soxta argument bo‘ladi, chunki $f(1,0)=f(0,1)$.

Funksiyaning argumentlari qatoriga istalgancha soxta argumentlarni yozish mumkin va u qatordan hamma soxta argumentlarni olib tashlash mumkin.

Endi mulohazalar algebrasi funksiyalarining superpozitsiyasi tushunchasini ko‘raylik.

4-ta’rif. $\Phi=\left\{\varphi_1\left(x_{11},....,x_{1k_1}\right),....,\varphi_m\left(x_{m1},....,x_{mk_m}\right)\right\}$ *mulohazalar algebrasi funksiyalarining chekli sistemasi bo‘lsin.*

Quyidagi ikki usulning bittasi bilan hosil etiladigan ψ funksiyaga Φ sistemadagi $\varphi_1,...,\varphi_m$ funksiyalarning elementar superpozitsiyasi yoki bir rangli superpozitsiyasi deb aytiladi:

a) qandaydir $\varphi_j \in \Phi$ funksiyaning x_{ji} argumentini qayta nomlash usuli, ya'ni

$$\varphi_j(x_{j1}, x_{j2},....., x_{ji-1}, y, x_{ji+1},....., x_{jk_j}),$$

bu yerda u, x_{jk_j} o'zgaruvchilarning birortasi bilan mos tushishi mumkin.

b) Qandaydir $\varphi_j \in \Phi$ funksiyaning biror x_{ji} argu-menti o'rniga ikkinchi bir $\varphi_e(x_{e1},..., x_{ek}) \in \Phi$ funksiyani qo'yish usuli, ya'ni

$$\varphi_j(x_{j1},....,x_{ji-1}),\ \varphi_e(x_{e1},....,x_{ek}),\ (x_{ji+1},....,x_{jk_j}).$$

Agar Φ sistema funksiyalarning k rangli superpozitsiyalari sinfi $\Phi^{(k)}$ berilgan bo'lsa, u vaqtda $\Phi^{(k+1)} = (\Phi^{(k)})^{(1)}$ bo'ladi.

1-izoh. 4-ta'rifning a) qismiga asosan bir xil chinlik jadvaliga ega bo'lib, lekin o'zgaruvchilarning belgilanishi bilan farq qiladigan funksiyalar bir-birining superpozitsiyasi bo'ladi.

2-izoh. 4-ta'rifning a) qismiga asosan biror x_{ji} o'zgaruvchini x_{jk} $(i \neq k)$ bilan qayta nomlasak, natijada kam o'zgaruvchili funksiyaga ega bo'lamiz. Bu holda x_{ji} va x_{jk} o'zgaruvchilar aynan tenglashtirildi deb aytamiz. Masalan, $x \vee y$ va $x \wedge \bar{y}$ funksiyalardagi y ni x bilan qayta nomlasak, u vaqtda $x \vee x = x$ va $x \wedge \bar{x} = 0$ funksiyalarni hosil qilamiz.

3-izoh. 4-ta'rifning a) qismiga asosan agar $\Phi \subset \Phi^{(1)}$ bo'lsa, u holda $\Phi^{(r)} \subset \Phi^{(r+1)}$ va umuman $r \leq s$ bo'lganda $\Phi^{(r)} \subseteq \Phi^{(s)}$.

5-ta'rif. $\bar{x}$, xy, $x \vee y$, $x \rightarrow y$, $x \leftrightarrow y$ *asosiy elementar funksiyalarning superpozitsiyasiga formula deb aytamiz.*

Endi ikkitaraflama (qo'shma) funksiya tushunchasini kiritamiz. $f(x_1, x_2,..., x_n)$ funksiyaga ikkitaraflama bo'lgan funksiyani topish uchun f funksiyaning chinlik jadvalida hamma o'zgaruvchilarni ularning inkoriga almashtirish kerak, ya'ni hamma joyda 1 ni 0 ga va 0 ni 1 ga almashtirish kerak.

1-ta'rif. *Quyidagicha aniqlangan*

$$f^*(x_1, x_2,....., x_n) = \overline{f}(\bar{x}_1, \bar{x}_2,....., \bar{x}_n)$$

funksiyaga $f(x_1, x_2, ..., x_n)$ *funksiyaning ikkitaraflama funksiyasi deb aytiladi.*

2-ta'rif. *Agar*

$$f\ (x_1, x_2, ..., x_n) = f^*(x_1, x_2, ..., x_n) = \overline{f}(\bar{x}_1, \bar{x}_2, ..., \bar{x}_n)$$

munosabat bajarilsa, u holda $f(x_1, x_2, ..., x_n)$*ga o'z-o'ziga ikkitaraflama funksiya deb aytiladi.*

Ta'rifga asosan, $f(x_1, x_2, ..., x_n)$ ikkitaraflama funksiya $(\alpha_1, ..., \alpha_n)$ va ($(\overline{\alpha_1}, ..., \overline{\alpha_n})$ qiymatlar satrida qarama-qarshi qiymatlar qabul qiladi.

Misollar. 1. Mulohazalar algebrasining asosiy elementar funksiyalariga ikkitaraflama bo'lgan funksiyalarni toping.

1. $f_1(x) = x$ ga ikkitaraflama funksiya $f_1^*(x) = x$ bo'ladi.
2. $f_2(x) = \bar{x}$ ga ikkitaraflama funksiya $f_2^*(x) = \bar{x}$ bo'ladi.
3. $f_3(x, y) = xy$ ga ikkitaraflama funksiya $f_3^* = x \vee y$ bo'ladi.
4. $f_4(x, y) = x \vee y$ ga ikkitaraflama funksiya $f_4^* = x\,y$ bo'ladi.
5. $f_5(x, y) = x \to y$ ga ikkitaraflama funksiya $f_5^* = \overline{y \to x}$ bo'ladi.
6. $f_6(x, y) = x \leftrightarrow y$ ga ikkitaraflama funksiya $f_6^* = \overline{x \leftrightarrow y}$ bo'ladi.
7. f_7=1 ga f_7^*=0 va f_8=0 ga f_8^*=1 bo'ladi.

Keltirilgan misolning yechimidan ko'rinib turibdiki, $f_1(x)$ va $f_2(x)$ funksiyalar, ta'rifga asosan, o'z-o'ziga ikkitaraflama funksiya bo'ladi.

2. $f(x, y, z) = xy \vee yz \vee xz$ funksiyaning o'z-o'ziga ikkitaraflama funksiya ekanligini isbot qiling.

$$f^*(x, y, z) = \overline{\bar{x}\,\bar{y} \vee \bar{y}\,\bar{z} \vee \bar{x}\,\bar{z}} = \bar{\bar{x}}\,\bar{\bar{y}} \wedge \bar{\bar{y}}\,\bar{\bar{z}} \wedge \bar{\bar{x}}\,\bar{\bar{z}} = (x \vee y)\,(y \vee z)\,(x \vee z) =$$
$$= [(x \vee y)\,y \vee (x \vee y)\,z]\,(x \vee z) = [y \vee yz \vee xz]\,(x \vee z) = (y \vee xz)\,(x \vee z) =$$
$$= x\,y \vee yz \vee x\,(x \vee z)\,z = x\,y \vee yz \vee xz\ .$$

Demak, $f(x, y, z) = f*(x, y, z)$ ekanligi uchun f o'z-o'ziga ikkitaraflama funksiyadir.

Teorema. *Agar* $\Phi(x_1, ..., x_n) = f(f_1\ (x_{11}, ..., x_{1p_1}), ..., f_m\ (x_{m1}, ..., x_{mp_m}))$ *bo'lsa, u holda*

$\Phi^*(x_1, ..., x_n) = f^*(f_1^*(x_{11}, ..., x_{1p_1}), ..., f_m^*(x_{m1}, ..., x_{mp_m}))$ *bo'ladi.*

Isbot.

$$\Phi^*(x_1, ..., x_n) = \overline{\Phi}(\overline{x_1}, ..., \bar{x}_n) = \overline{f}(f_1(\bar{x}_{11}, ..., \bar{x}_{1p_1}), ..., f_m\ (\bar{x}_{m1}, ..., \bar{x}_{mp_m})) =$$
$$= \overline{f}(\overline{\overline{f}}_1(\bar{x}_{11}, ..., \bar{x}_{1p_1}), ..., \overline{\overline{f}}_m\ (\bar{x}_{m1}, ..., \bar{x}_{mp_m})) = \overline{f}(\overline{f}_1^*(x_{11}, ..., x_{1p_1}), ...,$$

$\overline{f}^{*}_{m}(x_{m1},......,x_{mp_m})) = f^{*}(f_1^{*}(x_{11},......,x_{1p_1}),......,f_m^{*}(x_{m1},......,x_{mp_m}))$. Teoremaning isbotidan ikkitaraflama qonun kelib chiqadi.

Ikkitaraflama qonun. $\varphi_1, \varphi_2, ..., \varphi_m$ *funksiyalarning superpozitsiyasiga ikkitaraflama bo'lgan funksiya mos ravishda* $\varphi_1^{*}, \varphi_2^{*}, ..., \varphi_m^{*}$ *ikkitaraflama funksiyalar superpo-zitsiyasiga tengkuchlidir, ya'ni agar* $A = C[\varphi_1, \varphi_2, ..., \varphi_m]$ *formula* $f(x_1,...,x_n)$ *funksiyani realizatsiya etsa, u vaqtda* $C[\varphi_1^{*}, \varphi_2^{*}, ..., \varphi_m^{*}]$ *formula* $f^{*}(x_1,...,x_n)$ *funksiyani realizatsiya etadi.*

Bu formula A formulaga ikkitaraflama bo'lgan formula deb aytiladi va uni A^{*} deb belgilaymiz. Demak,

$$A^{*} = C[\varphi_1^{*}, \varphi_2^{*}, ..., \varphi_m^{*}].$$

Ushbu qonundan o'z-o'ziga ikkitaraflama bo'lgan funksiyalarning superpozitsiyasi yana o'z-o'ziga ikkitaraflama funksiya bo'lishligi kelib chiqadi, ya'ni agar $\varphi_1, \varphi_2, ..., \varphi_m$ o'z-o'ziga ikkitaraflama funksiya bo'lsa, u holda $\Phi^{*} = \varphi^{*}(\varphi_1^{*},...,\varphi_m^{*})$ funksiya ham o'z-o'ziga ikkitaraflama bo'ladi. Haqiqatan ham,

$$\Phi^{*} = \varphi^{*}(\varphi_1^{*},...,\varphi_m^{*}) = \varphi(\varphi_1, ..., \varphi_m) = \Phi.$$

Agar funksiya formula orqali ifodalangan va bu formula o'z navbatida $\wedge$, $\vee$, $-$ mantiq amallari orqali ifodalangan bo'lsa, u holda bu funksiyaga (formulaga) ikkitaraflama bo'lgan funksiyani (formulani) topish uchun $\vee$ ni $\wedge$ ga, $\wedge$ ni $\vee$ ga, 1 ni 0 ga va 0 ni 1 ga almashtirish kifoya. Bu prinsipni tengkuchli formulalarga ishlatganda, yana tengkuchli formulalar hosil qilamiz, ya'ni $A(x_1,...,x_n) = B(x_1,...,x_n)$ bo'lsa, u holda $A^{*}(x_1,...,x_n) = B^{*}(x_1,...,x_n)$.

Ushbu prinsip orqali mantiq algebrasining bir formulasidan ikkinchi formulasiga, bir teoremasidan ikkinchi teoremasiga, bir ta'rifidan ikkinchi ta'rifiga kelamiz.

Masalan, yuqorida keltirilgan (2), (3), (6), (8), (10), (12) tengkuchli formulalarga ushbu prinsipni ishlatsak, (4), (5), (7), (9), (11), (13) - tengkuchli formulalar kelib chiqadi.

Mantiq algebrasida elementlari n argumentli o'z-o'ziga ikkitaraflama funksiyalardan iborat bo'lgan to'plamni S bilan belgilaymiz, uning elementlarining soni $2^{2^{n}-1}$ ga tengdir.

Endi o‘z-o‘ziga ikkitaraflama bo‘lmagan funksiyalar haqidagi lemmani ko‘rib chiqaylik.

Lemma. *Agar* $\varphi(x_1,...,x_n) \notin S$ *bo‘lsa, u holda undan argumentlarining o‘rniga* x *va* $\bar{x}$ *funksiyalarni qo‘yish usuli bilan bir argumentli o‘z-o‘ziga ikkitaraflama bo‘lmagan funksiya, ya’ni konstantani hosil qilish mumkin.*

Isbot. $\varphi(x_1,...,x_n) \notin S$ bo‘lganligi uchun, shunday $(\alpha_1,...,\alpha_n)$ qiymatlar satri topiladiki, $\varphi(\bar{\alpha}_1,....,\bar{\alpha}_n) = \varphi(\alpha_1,...,\alpha_n)$ bo‘ladi.

$\varphi_i(x) = x^{\alpha_i}$ $(i = 1,...n)$ funksiyani kiritamiz va $\varphi_i(x) = \varphi(\varphi_1(x),...,\varphi_n(x))$ deb belgilab olamiz.

U vaqtda quyidagi natijaga ega bo‘lamiz:

$$\varphi(0) = \varphi(\varphi_1(0),...,\varphi_n(0)) = \varphi(0^{\alpha_1},...,0^{\alpha_n}) = \varphi(\bar{\alpha}_1,...,\bar{\alpha}_n) =$$

$$= \varphi(\alpha_1,...,\alpha_n) = \varphi(I^{\alpha_1},...,I^{\alpha_n}) = \varphi(\varphi_1(I),...,\varphi_n(I)) = \varphi(I).$$

Lemma isbot bo‘ldi.