PREDIKATLAR HISOBI AKSIOMALARI.

Predikatlar mantiqi formulasining normal shakli.

1- ta'rif. *Agar predikatlar mantiqi formulasi ifodasida faqat inkor, kon'yunksiya, diz'yunksiya* $(\neg, \wedge, \vee)$ *amallari va kvantorli amallar* $(\forall, \exists)$ *qatnashib, inkor amali elementar formulalarga (predmet o'zgaruvchilar va o'zgaruvchi predikatlarga) tegishli bo'lsa, bunday formula* ***deyarli normal shaklda*** *deyiladi.*

Ravshanki, predikatlar mantiqi va mulohazalar algebrasidagi asosiy teng kuchliliklardan foydalanib, predikatlar mantiqining har bir formulasini **deyarli normal shaklga** keltirish mumkin.

1- misol. $(\exists xP(x) \to \forall yQ(y)) \to R(z)$ formulani deyarli normal shaklga keltiramiz.

$$(\exists xP(x) \to \forall yQ(y)) \to R(z) \equiv (\overline{\exists xP(x)} \vee \forall yQ(y)) \to R(z) \equiv$$

$$\equiv \overline{\overline{\exists xP(x)} \vee \forall yQ(y)} \vee R(z) \equiv \overline{\overline{\exists xP(x)}} \vee \overline{\forall yQ(y)} \vee R(z) \equiv$$

$$\equiv \exists xP(x) \wedge \exists y\overline{Q(y)} \vee R(z).$$

Predikatlar mantiqining deyarli normal shakldagi formulalari orasida **normal shakldagi formulalar** muhim rol o‘ynaydi. Bu formulalarda kvantorli amallar yo butunlay qatnashmaydi, yoki ular mulohazalar algebrasining hamma amallaridan keyin bajariladi, ya’ni normal shakldagi formula quyidagi ko‘rinishda bo‘ladi:

$$(\sigma x_1)(\sigma x_2).....(\sigma x_n)\ A\,(x_1, x_2, ..., x_m),\ \ n \le m,$$

bunda (σx_i) simvoli o‘rnida $\forall x_i$ yoki $\exists x_i$ kvantorlardan biri yoziladi deb tushuniladi va A formula ifodasida kvantorlar bo‘lmaydi.

1- teorema. *Predikatlar mantiqining har qanday formulasini normal shaklga keltirish mumkin.*

Isboti. Formula deyarli normal shaklga keltirilgan deb hisoblaymiz va uni normal shaklga keltirish mumkinligini ko‘rsatamiz.

Agar bu formula elementar formula bo‘lsa, u holda uning ifodasida kvantorlar bo‘lmaydi va, demak, u normal shakl ko‘rinishida bo‘ladi.

Bajariluvchi va umumqiymatli formulalar.

2- ta'rif. *Agar A formula ifodasiga kiruvchi va M sohaga oid o'zgaruvchilarning shunday qiymatlari mavjud bo'lib, bu qiymatlarda A formula chin qiymat qabul qilsa, u holda predikatlar mantiqining A formulasi M* ***sohada bajariluvchi formula*** *deb ataladi.*

3- ta'rif. *Agar shunday soha mavjud bo'lib, unda A formula bajariladigan bo'lsa, u holda A* ***bajariluvchi formula*** *deb ataladi.*

Demak, agar biror formula bajariluvchi bo'lsa, bu hali uning istalgan sohada bajariluvchanligini bildirmaydi.

4- ta'rif. *Agar Aning ifodasiga kiruvchi va M sohaga oid hamma o'zgaruvchilarning qiymatlarida A formula chin qiymat qabul qilsa, u holda A formula M sohada* ***aynan chin formula*** *deb ataladi.*

5- ta'rif. *Agar A formula har qanday sohada aynan chin bo'lsa, u holda A* ***umumqiymatli formula*** *deb ataladi.*

6- ta'rif. *Agar A formula ifodasiga kiruvchi va M sohaga oid hamma o'zgaruvchilarning qiymatlarida A formula yolg'on qiymat qabul qilsa, u holda A formula M sohada* ***aynan yolg'on formula*** *deb ataladi.*

Keltirilgan ta'riflardan ushbu tasdiqlar kelib chiqadi.

1. Agar A umumqiymatli formula bo'lsa, u holda u har qanday sohada ham bajariluvchi formula bo'ladi.

2. Agar A formula M sohada aynan chin formula bo'lsa, u holda u shu sohada bajariluvchi formula bo'ladi.

3. Agar M sohada A aynan yolg'on formula bo'lsa, u holda u bu sohada bajarilmaydigan formula bo'ladi.

4. Agar A bajarilmaydigan formula bo'lsa, u holda u har qanday sohada ham aynan yolg'on formula bo'ladi.

Demak, predikatlar mantiqi formulalarini ikki sinfga ajratish mumkin: **bajariluvchi** sinflar va **bajarilmas** (bajarilmaydigan) sinflar formulalari.

7- ta'rif. *Umumqiymatli formula* ***mantiq qonuni*** *deb ataladi.*

Endi predikatlar mantiqidagi formulalarning umumqiymatliligi va bajariluvchanligi orasidagi munosabatni ko‘rib o‘taylik.

2- teorema. *A umumqiymatli formula bo‘lishi uchun uning inkori $\overline{A}$ bajariluvchi formula bo‘lmasligi zarur va yetarlidir.*

Isboti. Zarurligi. A umumqiymatli formula bo‘lsin. U holda, ravshanki, $\overline{A}$ istalgan sohada aynan yolg‘on formula bo‘ladi va shuning uchun ham u bajarilmas formuladir.

Yetarliligi. $\overline{A}$ istalgan sohada bajariluvchi formula bo‘lmasin. U holda bajarilmas formulaning ta’rifiga asosan $\overline{A}$ istalgan sohada aynan yolg‘on formuladir. Demak, A istalgan sohada aynan chin formula bo‘ladi va u umumqiymatlidir. ■

3- teorema. *A bajariluvchi formula bo‘lishi uchun $\overline{A}$ning umumqiymatli formula bo‘lmasligi zarur va yetarlidir.*

Tarkibida bir turdagi kvantor amali qatnashuvchi normal shakldagi formulalar uchun yechilish muammosi.

1- ta'rif. *Agar predikatlar mantiqi formulasi tarkibida erkin predmet o'zgaruvchilar bo'lmasa, u holda bunday formula* ***yopiq formula*** *deb ataladi.*

2- ta'rif. *Agar predikatlar mantiqi formulasi c tarkibida* $x_1, x_2, \ldots, x_n$ *erkin o'zgaruvchilar mavjud bo'lsa, u holda* $A \equiv \forall x_1 \forall x_2 \ldots \forall x_n C(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ *formula c formulaning* ***umumiy yopilishi*** *va* $B = \exists x_1 \exists x_2 \ldots \exists x_n C(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ *formula c formulaning* ***mavjudligini yopish*** *deb ataladi.*

1- teorema. *Agar predikatlar mantiqining normal shakldagi yopiq formulasi, tarkibida (ifodasida) faqat* n *ta mavjudlik kvantori qatnashgan hamda bir elementli istalgan sohada aynan chin bo'lsa, u holda u umumqiymatli formuladir.*