DARAXTLAR, ULARNI TADBIQLARI. TAYANCH DARAXTLAR

1. Daraxtlar

1.1-ta'rif. *Agar G grafning u qirrasi kamida bitta siklga tegishli bo'lsa, u siklik, aks holda asiklik qirra deyiladi.*

G graf uchun

$$\lambda(G) = m(G) - n(G) + k(G)$$

(bu yerda $m(G) - G$ ning qirralari soni, $n(G)$ - uchlari coni va $k(G)$ komponentalari soni) ifoda uning siklomatik soni deyiladi.

Osongina ko'rsatish mumkinki:

$$K(G \setminus u) = \begin{cases} K(G), \text{ агар } u \text{ циклик кирра булса;} \\ K(G)+1, \text{ агар } u \text{ ациклик кирра булса;} \end{cases}$$

$$\lambda(G|u) = \begin{cases} \lambda(G)-1, \text{ агар } u \text{ циклик кирра булса;} \\ \lambda(G), \text{ агар } u \text{ ациклик кирра булса.} \end{cases}$$

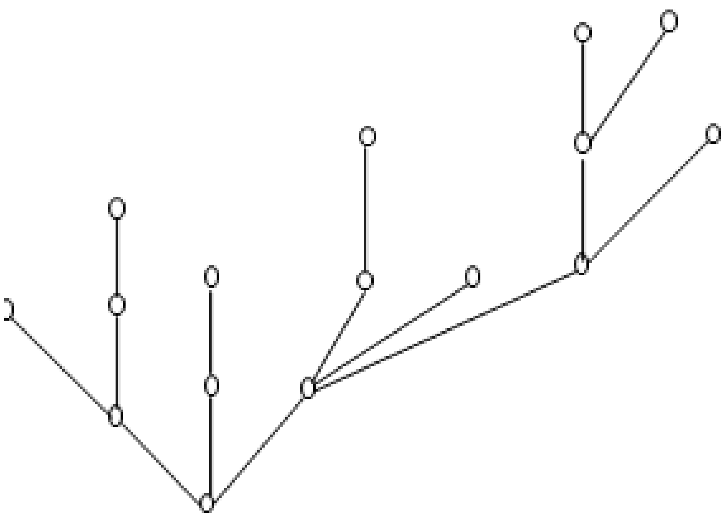
O'z-o'zidan ravshanki,

$$n(G \setminus u) = n(G), \quad m(G \setminus u) = m(G) - 1,$$

$\lambda(G) \geq 0$ va faqat sikllari bo'lmagan graf uchun $\lambda(G) = 0$.

1.2-ta'rif. Barcha qirralari asiklik bo'lgan bog'liqli graf daraxt deyiladi.

Daraxtning istalgan ikkita uchlari yagona zanjir bilan bog'langandir. Daraxtning istalgan x_0 uchini tanlab olib uning ildizi yoki nolinchi pog'onali uch deb ataymiz. x_0 ga qo'shni bo'lgan barcha uchlarni birinchi pog'ona uchlari deymiz va hokazo - $i-1$ pog'onadagi uchlarga qo'shni (boshqa pog'onalarga tegishli bo'lmagan) uchlarni i pog'ona uchlari deb ataymiz (1.1-shakl).



4-pog'ona,

3-pog'ona,

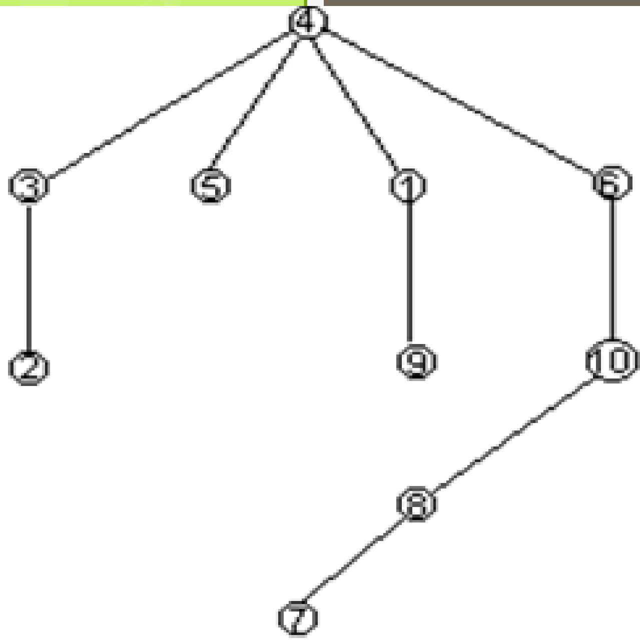
2-pog'ona,

1-pog'ona,

0-pog'ona.

1.1-teorema. *Chekli bog'likli G graf daraxt bo'lishi uchun, uning qirralari soni uchlari sonidan bittaga kam bo'lishi zarur va yetarli.*

Uchlari $1,2,3,...,n$ raqamlar bilan tartiblangan n uchli daraxt berilgan bo'lsin. Daraxtning chetki uchlari orasidagi eng kichik nomerlisi i_1 va u bilan qo'shni bo'lgan yagona uch j_1 bo'lsin. Daraxtdan i_1 uchni, demak $i_1 j_1$ qirrani olib tashlaymiz. Hosil bo'lgan daraxtda eng kichik nomerli chetki i_2 uchni va $i_2 j_2$ qirrani olib tashlaymiz va hokazo. Bu protsessni $n-2$ marta takrorlab ikki uch va bitta qirrali daraxtni hosil qilamiz. Olib tashlangan uchlarni $I=\{i_1,i_2,......i_{n-2}\}$va $J=(j_1,j_2,......,j_{n-2})$ lar bilan belgilaymiz. Bu ikkala I va J majmualar berilgan daraxt bo'yicha yagona ravishda aniqlanadi, shu bilan birga I ning barcha sonlari har xil, J niki esa har xil bo'lishi shart emas (1.2-shakl).



1.2-shakl.

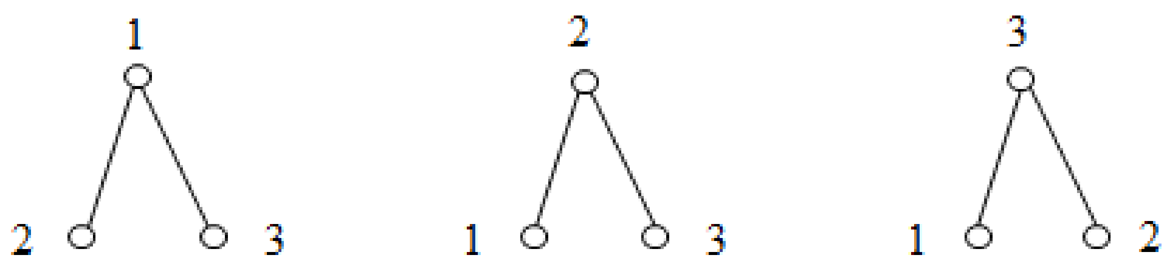
Bu daraxt uchun $I=\{2,3,5,7,8,9,1,4\}$ va $J=(3,4,4,8,10,1,4,6)$.

$I=\{i_1,i_2,\ldots,i_{n-2}\}$ va $J=\{j_1,j_2,\ldots,j_{n-2}\}$ uchlar majmualari berilgan daraxt bo‘yicha yagona aniqlanadi, shu bilan birga birinchi majmuaning barcha uchlari har xil, ikkinchisiniki esa har xil bo‘lishi shart emas. Shu bilan birga har qanday $J=\{j_1,j_2,\ldots,j_{n-2}\}$ $(1\le j_k\le n)$ majmua bitta daraxtga mos keladi. Uni quyidagicha qurish mumkin.

1.2-teorema (Keli). *Uchlar soni tartiblangan n ta bo'lgan daraxtlar soni n^{n-2} ga teng.*
(n ta elementlardan $n-2$ tadan tuzilgan barcha takroriy o'rinlashtirishlar soni).

Albatta bular ichida ko'plari o'zaro izomorfdir.

Masalan, $n=3$ bo'lganda, uchala daraxtlar ham o'zaro izomorfdir



,

1.3-shakl.

2. Eyler graflari

G grafning barcha uchlarini o‘z ichida saqlovchi qism graflarini qaraymiz. G ning barcha qirralari $u_1, u_2, ..., u_m$ kabi tartiblangan bo‘lsin. G grafning har qanday $H \subseteq G$ qismiga 0 va 1 lardan iborat $(a_1, a_2, ..., a_m)$ m o‘lchovli vektorni mos qo‘yamiz:

$$a_i = \begin{cases} 1, \text{ agar } u_i \in H, \\ 0, \text{ agar } u_i \notin H. \end{cases}$$

(N ning xarakteristik vektori). Bu moslik o‘zaro bir qiymatlidir, shu bilan birga qism graflarning 2 modul bo‘yicha yig‘indisiga ularning xarakteristik vektorlarining yig‘indisi mos keladi. Barcha qism graflar to‘plami yig‘indi amaliga nisbatan abel gruppasini tashkil etadi. Bu gruppa $\{0,1\}$ koeffiitsentlar maydoni ustida chiziqli fazoni tashkil etadi (istalgan N qism grafning 1 ga ko‘paytmasi N ni beradi, 0 ga ko‘paytmasi esa bo‘sh grafdir).

teorema. *Chekli bog'liqli graf Eyler grafi bo'lishi uchun u juft bo'lishi zarur va yetarli.*

Istalgan chekli juft grafning har bir bog'liqli komponentasi Eyler grafidir.

Ixtiyoriy grafning har qanday ikkita N_1 va N_2 juft qism graflarining yig'indisi yana juft qism grafdir. Haqiqatan ham, α uchning darajasi $S(\alpha)$ N_1+N_2 qism grafda $s_1+s_2-2s_{12}$ ga teng. Bu yerda s_1 va s_2 α uchning mos ravishda N_1 va N_2 lardagi darajalari, s_{12} esa α ning ularning $N_1 \cap N_2$ kesishmasidagi darajasi. Shunday qilib, juft qism graflar to'plami barcha qism graflar fazosining qism fazosidir. Bu qism fazoning o'lchovi ν ni aniqlaymiz.

G bog'liqli, m qirrali, n uchli graf D uning xtiyoriy asosi bo'lsin. Vatarlar soni $m-n+1$ ga teng. Har bir $\alpha\beta$ vatar yagona sodda $[\alpha,\beta] \subseteq D$ zanjir bilan sodda siklni hosil qiladi. Barcha sikllarning vektorlari bog'liqmas Σ sistemani hosil qiladi. Chunki har bir sikl sistemaning boshqa sikllariga tegishli bo'lmagan qirraga (o'zining vatariga) ega. Demak $\nu \geq m-n+1$.