13-MAVZU

L NAZARIYA UCHUN GYODELNING TO‘LIQLIK HAQIDAGI TEOREMASI.

Har qanday aksiomatik nazariyani asoslash uchun quyidagi to‘rtta:

1) yechilish;

2) zidsizlik;

3) to‘liqlilik;

4) erkinlik

muammolarini hal qilishga to‘g’ri keladi.

Mulohazalar hisobining yechilish muammosi. Mulohazalar hisobidagi ixtiyoriy berilgan formulani isbotlanuvchi yoki isbotlanuvchi emasligini aniqlab beruvchi algoritmning mavjudligini isbotlash muammosi mulohazalar hisobining yechilish muammosi deb ataladi.

1-teorema. *Mulohazalar hisobi uchun yechilish muammosi hal qilinuvchidir (yechiluvchidir).*

Isbot. Oldingi paragrafda aytilganday mulohazalar hisobining istalgan formulasini mulohazalar algebrasining formulasi sifatida qarash mumkin. Demak, bu formulaning mantiqiy qiymatini o‘zgaruvchilarning istalgan qiymatlar satrida aniqlash mumkin.

A-mulohazalar hisobining ixtiyoriy formulasi, $x_1, x_2, ..., x_n$ lar esa A formulaning ifodasiga kiruvchi o‘zgaruvchilar bo‘lsin.

$R\alpha_1..\alpha_n(A)$ qiymatini hamma 2^n ta $(\alpha_1, \alpha_2, .., \alpha_n)$ qiymatlar satrida hisoblab chiqamiz. Agar hamma qiymatlar satrida $R\alpha_1..\alpha_n(A) = 1$ bo‘lsa, u holda A formula aynan chin bo‘ladi. Demak, 8-§ dagi 3-teoremaga asosan A mulohazalar hisobining isbotlanuvchi formulasi bo‘ladi.

Agar shunday $(\alpha_1^0, \alpha_2^0, ..., \alpha_n^0)$ qiymatlar satri topilib, $R\alpha_1^0...\alpha_n^0(A) = 0$ bo‘lsa, u vaqtda A aynan chin formula bo‘lmaydi. Shunday qilib, mulohazalar hisobining istalgan formulasini isbotlanuvchi yoki isbotlanuvchi emasligini ko‘rsatuvchi yuqorida bayon etilgan algoritm mavjud ekan. Demak, mulohazalar hisobi algoritmik yechiluvchi nazariyadir.

Mulohazalar hisobining zidsizlik muammosi

1-ta’rif. *Agar mulohazalar hisobining ixtiyoriy A va $\overline{A}$ formulalari bir paytda isbotlanuvchi formulalar bo‘lolmasa, u holda bunday mulohazalar hisobi ziddiyatsiz aksiomatik nazariya, aks holda esa ziddiyatga ega bo‘lgan aksiomatik nazariya* deb ataladi.

Demak, ziddiyatsiz mulohazalar hisobida A va uning inkori bo‘lgan $\overline{A}$ birgalikda isbotlanuvchi formulalar bo‘laolmaydilar.

Mulohazalar hisobida zidsizlik muammosi quyidagicha qo‘yiladi: berilgan mulohazalar hisobi ziddiyatlilik yoki ziddiyatsizmi?

2-teorema. *Agar mulohazalar hisobida isbotlanuvchi* A *va* $\overline{A}$ *formulalar mavjudligi aniqlansa, u holda bu mulohazalar hisobida istalgan* B *formula ham isbotlanuvchi formula bo‘ladi.*

Isbot. Bundan keyin har qanday isbotlanuvchi formulani R va $\overline{R}=F$ bilan belgilaymiz.

1.Avval har qanday B uchun

$$\vdash B \to R \qquad (1)$$

formulaning isbotlanuvchi ekanligini ko‘rsatamiz.

Haqiqatan ham, I_1 - aksiomadan o‘rniga qo‘yish natijasida

$$\vdash R \to (B \to R) \qquad (2)$$

ni hosil qilamiz.

Ammo shartga ko‘ra R isbotlanuvchi formula, ya’ni

$$\vdash R \qquad (3)$$

U holda (2) va (3) formulalardan xulosa qoidasiga asosan (1) formulaning to‘g’riligi kelib chiqadi.

2.Endi har qanday B uchun

$$\vdash F \to B \qquad (4)$$

formulaning isbotlanuvchi ekanligini tasdiqlaymiz.

Haqiqatan ham, IV_1 - aksiomadan o‘rniga qo‘yish natijasida

$$\vdash (\overline{B} \to R) \to (\overline{R} \to \overline{\overline{B}}) \qquad (5)$$

formula kelib chiqadi.

Ammo isbotlaganimizga asosan

$$\vdash (\overline{B} \to R). \qquad (6)$$

O‘z navbatida (6) va (5) lardan xulosa qoidasiga binoan

$$\vdash \overline{R} \to \overline{\overline{B}} \qquad (7)$$

formulani hosil qilamiz.

Ikki karralik inkor amalini tushirish qoidasidan foydalanib, va $\overline{R}$ ni F bilan almashtirsa

$$\vdash F \to B$$

formulaga ega bo‘lamiz, ya’ni (4) isbotlanuvchi formuladir.

3.Har qanday A uchun

$$\vdash A \wedge \overline{A} \to F \qquad (8)$$

formula isbotlanuvchi ekanligini ko‘rsatamiz.

Haqiqatan ham, I_1 va IV_1 aksiomalarga asosan quyidagilar isbotlanuvchi formulalar bo‘ladi:

$$\vdash A \to (R \to A), \qquad (9)$$

$$\vdash (R \to A) \to (\overline{A} \to F) \qquad (10)$$

(9) va (10) lardan sillogizm qoidasiga binoan

$$\vdash A \to (\overline{A} \to F)$$

formulani keltirib chiqaramiz. Bu formuladan asoslarni birlashtirish qoidasini qo‘llash natijasida $\vdash A \wedge \overline{A} \to F$ formulaga kelamiz, ya’ni (8) ga ega bo‘lamiz.

(4) va (8) lardan sillogizm qoidasiga asosan

$$\vdash A \wedge \overline{A} \to B \qquad (11)$$

formulani hosil qilamiz.

Ammo teoremaning shartiga ko‘ra $\vdash A$ va $\vdash \overline{A}$, u holda $\vdash A \wedge \overline{A}$. Demak, B isbotlanuvchi formula bo‘ladi.

3-teorema. *Mulohazalar hisobi ziddiyatsiz nazariyadir.*

Isbot. Mulohazalar hisobida A va $\overline{A}$ lar bir vaqtning o‘zida isbotlanuvchi bo‘ladigan hech qanday A formula mavjud emasligini ko‘rsatamiz.

A-mulohazalar hisobining ixtiyoriy formulasi bo‘lsin. Agar A isbotlanuvchi formula bo‘lsa, u vaqtda 7-§ dagi 1-teoremaga asosan A aynan chin formuladir va, demak $\overline{A}$ - aynan yolg’on formula bo‘ladi. Shuning uchun ham $\overline{A}$ isbotlanuvchi formula bo‘lmaydi.

Demak, bir vaqtda A va $\overline{A}$ lar isbotlanuvchi formulalar bo‘laolmaydi. Shuning uchun ham mulohazalar hisobi ziddiyatga ega emas.

Mulohazalar hisobining to‘liqlilik muammosi

2-ta’rif. *Mulohazalar hisobining aksiomalar sistemasiga shu hisobning biror ixtiyoriy isbotlanmaydigan formulasini yangi aksioma sifatida qo‘shishdan hosil bo‘ladigan aksiomalar sistemasi ziddiyatga ega bo‘lgan mulohazalar hisobiga olib kelsa, bunday mulohazalar hisobiga tor ma’nodagi to‘liq aksiomatik nazariya deb aytiladi.*

3-ta’rif. *Har qanday aynan chin formulasi isbotlanuvchi formula bo‘ladigan mulohazalar hisobiga keng ma’nodagi to‘liq aksiomatik nazariya deb aytiladi.*

Demak, mulohazalar hisobining to‘liqlilik muammosi ikkita masalani hal qilishi kerak:

1) yangi aksioma sifatida qandaydir isbotlanmaydigan formulasini aksiomalar sistemasiga qo‘shish natijasida mulohazalar hisobini kengaytirish mumkinmi yoki yo‘qmi?

2) mulohazalar algebrasining har qanday aynan chin formulasi mulohazalar hisobida isbotlanuvchi bo‘ladimi yoki yo‘qmi?

Bu masalalarning yechimi quyidagi teoremalarning mazmunidan iborat.

4-teorema. *Mulohazalar hisobi tor ma’noda to‘liqdir.*

Isbot. A-mulohazalar hisobidagi ixtiyoriy isbotlanmaydigan (isbotlanuvchi emas) formula, $x_1, x_2, ..., x_n$ – A formula tarkibiga kiruvchi o‘zgaruvchilar bo‘lsin.

A isbotlanmaydigan formula ekanligidan u aynan chin formula emas. Demak, $x_1, x_2, ..., x_n$ o‘zgaruvchilarning shunday $\alpha_1, \alpha_2, .., \alpha_n$ qiymatlar satri mavjudki,

$$R\alpha_1, \alpha_2, .., \alpha_n (A(x_1, x_2, ..., x_n)) = 0 \qquad (12)$$

bo‘ladi.

$B_1, B_2, .., B_n$ lar $x_1, x_2, ..., x_n$ o‘zgaruvchilarga bog’liq ixtiyoriy aynan chin formulalar bo‘lsin.

$B_1^{\alpha_1}, B_2^{\alpha_2}, ..., B_n^{\alpha_n}$ majmuani (naborni) qaraymiz. Bu yerda

$$B_i^{\alpha_i} = \begin{cases} B_i, & агар \ \alpha_i = 1 \ булса, \\ \overline{B_i}, & агар \ \alpha_i = 0 \ булса. \end{cases}$$

A formulada $\int_{x_1, x_2, ..., x_n}^{B_1^{\alpha_1}, B_2^{\alpha_2}, ..., B_n^{\alpha_n}} (A)$ o‘rniga qo‘yishni bajarib, ushbu

$$A\left(B_1^{\alpha_1}, B_2^{\alpha_2}, ..., B_n^{\alpha_n}\right) \qquad (13)$$

formulaga ega bo‘lamiz.

(12) formulaning aynan yolg’on formula ekanligini ko‘rsatamiz. $x_1, x_2, ..., x_n$ o‘zgaruvchilarning ixtiyoriy $\sigma_1, \sigma_2, ..., \sigma_n$ qiymatlar satrini olamiz. $B_1, B_2, .., B_n$ formula-lar aynan chin formulalar ekanligidan $R\sigma_1, \sigma_2, ..., \sigma_n (B_i) = 1$ bo‘ladi. U vaqtda $R\sigma_1, \sigma_2, ..., \sigma_n \left(B_i^{\alpha_i}\right) = \alpha_i$ o‘rinli.

Demak,

$$R\sigma_1, \sigma_2, ..., \sigma_n \ A\left(B_1^{\alpha_1}, B_2^{\alpha_2}, ..., B_n^{\alpha_n}\right) = A(\alpha_1, \alpha_2, .., \alpha_n) = 0 .$$

Bu yerdan $A\left(B_1^{\alpha_1}, B_2^{\alpha_2}, ..., B_n^{\alpha_n}\right)$ning aynan chin formula ekanligi kelib chiqadi va isbotlanuvchi formula bo‘ladi.

Ikkinchi tarafdan, agar mulohazalar hisobining aksiomalari qatoriga $A(x_1, x_2, ..., x_n)$ formulani yangi aksioma sifatida qo‘shib qo‘ysak, u holda yangi hosil bo‘lgan mulohazalar hisobida bu formula aksioma bo‘lganligi uchun isbotlanuvchi formula bo‘ladi. Shu vaqtning o‘zida yangi mulohazalar hisobida $A\left(B_1^{\alpha_1}, B_2^{\alpha_2}, \dots, B_n^{\alpha_n}\right)$ formula ham isbotlanuvchi formula bo‘ladi, chunki u isbotlanuvchi formuladan o‘rniga qo‘yish qoidasi orqali hosil qilingan.

Shunday qilib, yangi mulohazalar hisobida ikkita $A\left(B_1^{\alpha_1}, B_2^{\alpha_2}, \dots, B_n^{\alpha_n}\right)$ va $A\left(B_1^{\alpha_1}, B_2^{\alpha_2}, \dots, B_n^{\alpha_n}\right)$ isbotlanuvchi formulalarga ega bo‘lamiz. Demak, yangi mulohazalar hisobi ziddiyatga ega bo‘lgan aksiomatik nazariya ekan. Bu yerdan uning tor ma’noda to‘liqligi kelib chiqadi.

5-teorema. *Mulohazalar hisobi keng ma’noda to‘liqdir.*

Isbot. Biz (3-teorema) mulohazalar algebrasining har bir aynan chin formulasi mulohazalar hisobida isbotlanuvchi formula ekanligini isbot qilgan edik. Demak, mulohazalar hisobi keng ma’noda to‘liqdir.

Mulohazalar hisobi aksiomalarining erkinlik muammosi

Har qanday aksiomatik hisobda aksiomalarning erkinlik masalasi, ya’ni birorta aksiomani sistemaning qolgan aksiomalaridan keltirib chiqarish qoidasi orqali hosil etish mumkinmi yoki yo‘qmi degan muammo mavjud bo‘ladi.

Agar birorta aksioma uchun bu masala ijobiy hal etilsa, u holda bu aksioma sistema aksiomalari ro‘yxatidan chiqarib tashlanadi va mantiqiy hisob bu bilan o‘zgarmaydi, ya’ni isbotlanuvchi formulalar sinfi o‘zgarmasdan qoladi.

4-ta’rif. *Agar A aksiomani mulohazalar hisobining qolgan aksiomalaridan keltirib chiqarish mumkin bo‘lmasa, u shu mulohazalar hisobining boshqa aksiomalaridan erkin aksioma deb ataladi.*

5-ta’rif. *Agar mulohazalar hisobi aksiomalar sistemasining har bir aksiomasi erkin bo‘lsa, u holda mulohazalar hisobining aksiomalar sistemasi erkin deb aytiladi.*

6-teorema. *Mulohazalar hisobining aksiomalar sistemasi erkindir.*

Isbot. A mulohazalar hisobining ixtiyoriy aksiomasi bo‘lsin.

Bu aksiomaning erkinligini isbotlash uchun mulohazalar hisobiga nisbatan quyidagi usulni qo‘llaymiz: mulohazalar hisobi o‘zgaruvchilarini α yoki β qiymat qabul qiluvchi o‘zgaruvchilar sifatida qaraymiz. Bu yerda α chin rolini va β yolg’on rolini o‘ynaydi.

$\wedge, \vee, \rightarrow, -$ amallarni shunday aniqlaymizki, quyidagi shartlar o‘rinli bo‘lsin:

1. A aksiomadan tashqari sistemaning hamma aksiomalari tarkibidagi o‘zgaruvchilarning barcha qiymatlarida faqat α qiymatni qabul qilsin.

2. A aksiomadan boshqa, aksiomalar majmuasidan keltirib chiqarilgan har qanday formula ham tarkibidagi o‘zgaruvchilarning barcha qiymatlarida faqat α qiymatni qabul qilsin.

3. A aksioma tarkibidagi o‘zgaruvchilarning ayrim qiymatlarida β qiymatni qabul qilsin.

Agar A aksiomaga nisbatan yuqorida keltirilgan interpretatsiya (izohlash) o‘rinli bo‘lsa, u holda A aksioma boshqa aksiomalardan erkin ekanligi kelib chiqadi. Haqiqatdan ham, agar A aksiomani mulohazalar hisobining boshqa aksiomalaridan keltirib chiqarish mumkin bo‘lganda edi, u shartlarning ikkinchisiga asosan tarkibidagi o‘zgaruvchilarning barcha qiymatlarida faqat α qiymatni qabul qilib, bu esa 3-shartga zid bo‘lardi. Demak, A aksiomani mulohazalar hisobining boshqa aksiomalaridan keltirib chiqarish mumkin emas va u sistemadagi erkin aksiomadir.

O‘zgaruvchilarining o‘rniga ularning ayrim qiymatlari qo‘yilganda ham formulalar ma’noga ega deb kelishamiz. Masalan, $\alpha \wedge \beta$, $\alpha \to A$, $\alpha \to (\beta \to \alpha)$ va boshqalar.

6-ta’rif. *Tarkibidagi o‘zgaruvchilarni* α *va* β *bilan almashtirganda bir xil qiymat qabul qiluvchi* A *va* B *formulalar teng kuchli formulalar deb ataladi hamda bu* $A = B$ *ko‘rinishda yoziladi.*

Tenglik belgisi $\wedge, \vee, \to$ mantiqiy bog’lovchilarga nisbatan sustroq bog’laydi deb hisoblaymiz.

Endi II_1 - aksiomaning erkinligini isbot qilaylik.

Buning uchun kon’yunksiyadan tashqari qolgan hamma mantiqiy amallarni xuddi mantiq algebrasidagiday va kon’yunksiya amalini $x \wedge y = y$ tenglik orqali aniqlaymiz:

x	$\bar{x}$
α	β
β	α

x	y	$x \vee y$	$x \to y$	$x \wedge y$
α	α	α	α	α
α	β	α	β	β
β	α	α	α	α
β	β	β	α	β

Ushbu interpretatsiya uchun yuqorida keltirilgan uchta shartlarning bajarilishini ko‘rsatamiz.

II_1 - aksiomadan tashqari mulohazalar hisobining qolgan hamma aksiomalari o‘zgaruvchilarning barcha qiymatlarida α qiymat qabul qiladi (bu holni chinlik jadvali orqali ko‘rsatish mumkin).

Haqiqatan ham I, III va IV guruh aksiomalarida kon’yunksiya amali qatnashmaydi. Qolgan mantiqiy amallar xuddi mulohazalar algebrasidagiday aniqlangan.

Mulohazalar algebrasida bu formulalar aynan chin formulalar bo‘lganligidan, ushbu interpretatsiyada o‘zgaruvchilarning barcha qiymatlarida ular α qiymat qabul qiladi.

II_1, II_2 va II_3 - aksiomalarni ko‘raylik.

II_2 va II_3 aksiomalar qabul qilingan interpretatsiyada $y \to y$ formulaga teng bo‘ladi va $x = \beta$, $y = \alpha$ qiymatlarda β qiymat qabul qiladi, ya’ni hech qachon α qiymat qabul qilmaydi.

Endi aynan α ga teng formulalardan keltirib chiqarish qoidasiga asosan hosil etilgan formulalar ham α ga tengligini ko‘rsatish qoldi, ya’ni 2-shartning bajarilishini ko‘rsatish kerak.

Oldingi paragraflarda aynan chin formulalarga o‘rniga qo‘yish va xulosa qoidalarini qo‘llash natijasida chiqarilgan formulalar aynan chin formulalar bo‘lishini ko‘rsatgan edik. Demak, 2-shart ham bajariladi.

Shunday qilib, mulohazalar hisobining II_1-aksiomasi erkin aksioma ekan.

Xuddi shunday sxemadan foydalanib, mulohazalar hisobining I, II, III va IV-guruhlaridagi har bir aksiomaning erkinligini ko‘rsatish mumkin. Demak, mulohazalar hisobining aksiomalar sistemasi erkindir.