Kombinatorika asoslari. O'rin almashtirishlar va kombinatsiyalar.

O'ZBEKISTON RESPUBLIKASI OLIY VA O'RTA MAXSUS TA'LIM VAZIRLIGI

H. TO'RAYEV, I. AZIZOV, S. OTAQULOV

KOMBINATORIKA VA GRAFLAR NAZARIYASI

Oliy o'quv yurtlari uchun o'quv qo'llanma

Nyuton binomi. Polinomial formula. Kiritish va Chiqarish usuli. Rekurent munosabatlar (arxiv.uz)

- Bir qator amaliy masalalarni yechish uchun berilgan to’plamdan uning qandaydir xossaga ega bo’lgan elementlarini tanlab olish va ularni ma’lum bir tartibda joylashtirishga to’g’ri keladi.
- Ta’rif. Biror chekli to’plam elementlari ichida ma’lum bir xossaga ega bo’lgan elementlaridan iborat qism to’plamlarni tanlab olish yoki to’plam elementlarini ma’lum bir tartibda joylashtirish bilan bog’liq masalalar kombinatorik masalalar deyiladi.

Masalan, o’nta ishchidan to’rt kishidan iborat brigadalarni necha xil usulda tuzish mumkinligini (ishlab chiqarishni tashkil etish), molekulada atomlar qanday usullarda birlashishi mumkinligi (kimyo), oqsil moddalarda aminokislotalarni qanday tartiblarda joylashtirish mumkinligi (biologiya), turli bloklardan iborat mexanizmda bu bloklarni turli tartiblarda birlashtirish (konstruktorlik), bir necha dala uchastkalarida turli xil ekinlarni almashtirib ekish (agronomiya), davlat budjetini ishlab chiqarish tarmoqlari bo’yicha taqsimoti (iqtisodiyot) kabilar kombinatorik masalalarga keladi va kombinatorikani inson faoliyatining turli yo’nalishlarida qo’llanishini ko’rsatadi.

Ta’rif. Kombinatorik masalalar bilan shug’ullanadigan matematik fan <u>kombinatorika</u> deyiladi.

Kombinatorikani mustaqil fan sifatida birinchi bo’lib olmon matematigi G.Leybnits o’rgangan va 1666 yilda “Kombinatorika san’ati haqida” asarini chop etgan.

Kombinatorikada qo’shish va ko’paytirish qoidasi deb ataluvchi ikkita asosiy qoida mavjud.

Kombinatsiya — bu kombinatorikaning asosiy tushunchasi. Bu tushuncha yordamida ixtiyoriy to'plamning qandaydir sondagi elementlaridan tashkil topgan tuzilmalar ifodalanadi. Kombinatorikada bunday tuzilmalarning *o'rin almashtirishlar*, *o'rinlashtirishlar va guruhlashlar*, deb ataluvchi asosiy ko'rinishlari o'rganiladi.

1.2. Kombinatorikada ko'p qo'llaniladigan usul va qoidalar. Kombinatorika va graflar nazariyasida tasdiqlarni isbotlashning samarali usullaridan biri bo'lgan *matematik induksiya usuli* ko'p qo'llaniladi. Bu usulning ketma-ket bajariladigan ikkita qismi bo'lib, ular quyidagi umumiy g'oyaga asoslanadi.

Faraz qilaylik, isbotlanishi kerak bo‘lgan tasdiq birorta xususiy $n=n_0$qiymat (masalan, $n_0=1$) uchun to‘g‘ri bo‘lsin (usulning bu qismi *baza* yoki asos, deb ataladi). Agar bu tasdiqning istalgan $n=k>n_0$ uchun to‘g‘riligidan uning $n=k+1$ uchun to‘g‘riligi kelib chiqsa, u holda tasdiq istalgan natural $n\geq n_0$ son uchun to‘g‘ri bo‘ladi (*induksion o‘tish*).

2-misol. Ixtiyoriy n natural son uchun

$$1^2+2^2+...+n^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

tenglikning o‘rinli bo‘lishini matematik induksiya usuli yordamida isbotlaymiz.

$$1^{2}+2^{2}+\ldots+k^{2}+(k+1)^{2}=\frac{k(k+1)(2k+1)}{6}+(k+1)^{2}$$

ko‘rinishda yozamiz. Oxirgi tenglikning o‘ng tomonida quyidagicha o‘zgartirishlarni bajaramiz:

$$\frac{k(k+1)(2k+1)}{6}+(k+1)^{2}=(k+1)\left[\frac{k(2k+1)}{6}+(k+1)\right]=$$

$$=\frac{(k+1)(2k^{2}+7k+6)}{6}=\frac{(k+1)(2k^{2}+4k+3k+6)}{6}=$$

$$=\frac{(k+1)[2k(k+2)+3(k+2)]}{6}=\frac{(k+1)[(k+1)+1][2(k+1)+1]}{6}.$$

Demak,

$$1^2 + 2^2 + ... + k^2 + (k+1)^2 = \frac{(k+1)[(k+1)+1][2(k+1)+1]}{6}.$$

Oxirgi munosabat isbotlanishi kerak bo‘lgan tenglikning bo‘lgan holidir. ■

4-misol. «Ixtiyoriy n natural son uchun n^2+n+17 ifodaning qiymati tub sondir», degan tasdiqni tekshirish maqsadida matematik induksiya usulining faqat baza qismi talabini dastlabki 15 ta natural sonlar uchun bajaramiz.

$n=1$ bo'lganda $n^2+n+17=1^2+1+17=19$ tub son hosil bo'ladi.

$n=\overline{2,15}$ bo'lganda ham n^2+n+17 ifodaning qiymati sifatida 23, 29, 37, 47, 59, 73, 89, 107, 127, 149, 173, 199, 227 va 257 tub sonlarni hosil qilamiz.

Induksion o‘tishni tekshirmasdan «ixtiyoriy natural n son uchun n^2+n+17 ifodaning qiymati tub sondir», degan xulosa qilish noto‘g‘ridir, chunki, masalan, agar $n=16$ bo‘lsa, u holda bu ifodaning qiymati murakkab sondir: $n^2+n+17=16^2+16+17=289+17\cdot 17$. ■

1-teorema. Ixtiyoriy chekli A to'plam uchun $|2^A|=2^{|A|}$ tenglik o'rinlidir.

Isboti. Matematik induksiya usulini berilgan to'plamning quvvati bo'yicha qo'llaymiz.

Baza. Dastlab A to'plamning elementlari soni nolga teng, ya'ni $|A|=0$ bo'lganda teoremaning tasdig'i bajarilishini ko'rsatamiz. $A_0=\varnothing$ bo'lsin. U holda $A=A_0$ uchun $|A|=0$, $2^A=2^\varnothing=\{\varnothing\}$ va $|2^\varnothing|=|\{\varnothing\}|=1=2^0=2^{|\varnothing|}$ bo'ladi. Demak, teoremaning tasdig'i $|A|=0$ bo'lgan hol uchun to'g'ridir.

Induksion o'tish. Chekli k elementli ixtiyoriy A_k to'plam uchun teoremaning tasdig'i to'g'ri bo'lsin, ya'ni $A=A_k$ bo'lganda $|2^A|=2^{|A|}$ tenglik bajarilsin. $k+1$ elementli A_{k+1} to'plamni qaraymiz. Ravshanki, $A=A_{k+1}$ uchun $|A|=k+1$ bo'ladi. Qaralayotgan A to'plamning ixtiyoriy a elementi uchun 2^A bulean to'plamni o'zaro kesishmaydigan ikkita $B_a^- = \{X \mid X \subset 2^A, a \notin X\}$ va $B_a^+ = \{X \mid X \subset 2^A, a \in X\}$ to'plamlar birlashmasi sifatida yozish mumkin. Demak, $|2^A| = |B_a^-| + |B_a^+|$.

Tuzilishiga ko'ra, B_a^- to'plam k elementli to'plamning bulea-nidan iborat. Shuning uchun, induksion o'tish faraziga ko'ra, $|B_a^-|=2^k$ bo'ladi. B_a^+ to'plam esa B_a^- to'plamning har bir element-to'plamiga a elementni kiritish yordamida hosil qilingan. Bundan $|B_a^+|=|B_a^-|=2^k$ kelib chiqadi. Demak, $|A|=k+1$ bo'lgan hol uchun

$$|2^A|=|B_a^-|+|B_a^+|=2^k+2^k=2\cdot 2^k=2^{k+1}=2^{|A|}. \blacksquare$$

Qo'shish qoidasi. Agar biror α tanlovni $m(\alpha)$ usulda, β tanlovni $m(\beta)$ usulda amalga oshirish mumkin bo'lsa va bu yerda α tanlovni ixtiyoriy tanlash usuli β tanlovni ixtiyoriy tanlash usulidan farq qilsa, u holda "α yoki β" tanlovni amalga oshirish usullari soni $m(\alpha \text{ yoki } \beta) = m(\alpha) + m(\beta)$ formuladan topiladi.

Ko'paytirish qoidasi. Agar biror α tanlovni $m(\alpha)$ usulda, β tanlovni $m(\beta)$ usulda amalga oshirish mumkin bo'lsa, u holda "α va β" tanlovni (yoki (α, β) juftlikni) amalga oshirish usullari soni $m(\alpha \text{ va } \beta) =$

$$= m(\alpha) \cdot m(\beta)$$ formuladan topiladi.