4-MAVZU	FORMULALAR. TENGKUCHLI FORMULALAR

Oldingi paragrafda asosan mantiqiy amallarni o‘rganib chiqdik. Endi bu amallar orasida bog‘lanishlar mavjudligini ko‘rsatamiz. Buning uchun tengkuchli mulohazalar tushunchasini kiritamiz.

$$x_1, x_2, x_3, \dots, x_n \qquad (1)$$

n ta mulohaza berilgan bo‘lsin.

1-ta’rif. (1) *mulohazalarni inkor, diz’yunksiya, kon’yunksiya, implikatsiya va ekvivalensiya mantiqiy amallar vositasi bilan ma’lum tartibda birlashtirib hosil etilgan murakkab mulohazaga formula deb aytamiz.*

Masalan: $[x_1 \vee (x_2 \wedge x_3)] \to x_4$; $[x_1 \wedge (x_2 \to x_3)] \vee (x_4 \leftrightarrow x_5)$; $(x \leftrightarrow y) \wedge (x \vee y)$; $(x \to y) \wedge (y \to z) \to (z \to x)$ murakkab mulohazalar formulalar bo‘ladilar. Qavslar mulohazalar ustida mantiqiy amallarning qay tartibda bajarilishini ko‘rsatadi.

Endi formula tushunchasiga matematik ta’rif beraylik. Bu tushuncha quyidagicha aniqlanadi.

2-ta’rif. *1) har qanday $x_1, x_2, \dots, x_n$ mulohazalarning istalgan biri formuladir;*

2) agar A va B larning har biri formula bo‘lsa, u holda ($A \wedge B$), ($A \vee B$), ($A \to B$), ($A \leftrightarrow B$) va $\overline{A}$ lar ham formulalardir.

3) 1 va 2-bandlarda ko‘rsatilgan ifodalardan tashqari boshqa hech qanday ifoda formula bo‘la olmaydi.

$x_1, x_2, \dots, x_n$ o‘zgaruvchilarni elementar formulalar deb ataymiz.

Keyinchalik formulani lozim bo‘lgandagina $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ funksiya shaklida belgilashdan foydalanamiz.

Har qanday formula uchun chinlik jadvali tuzish mumkin. Buning uchun asosiy chinlik jadvallaridan ketma-ket foydalanish kerak.

Masalan, $(x \wedge y) \to (\overline{x \vee y})$ formulaning chinlik jadvali quyidagicha bo‘ladi:

x	y	$\bar{x}$	$x \wedge y$	$\bar{x} \vee y$	$\overline{\bar{x} \vee y}$	$(x \wedge y) \to (\overline{\bar{x} \vee y})$
1	1	0	1	1	0	0
1	0	0	0	0	1	1
0	1	1	0	1	0	1
0	0	1	0	1	0	1

Shunday qilib, har qanday formulaga {1, 0} to‘plamining bir elementi mos qilib qo‘yiladi.

3-ta’rif. *A va B formulalar berilgan bo‘lsin.* (1) *elementar mulohazalarning har bir qiymatlari satri uchun A va B formulalarning mos qiymatlari bir xil bo‘lsa, A va B formulalarga tengkuchli formulalar deb aytiladi va bu $A = B$ tarzda belgilanadi.* (1) *qatorning kamida bitta qiyatlari satri uchun A va B formulalarning mos qiymatlari bir xil bo‘lmasa, u holda A va B formulalarga tengkuchlimas formulalar deb aytiladi va $A \neq B$ ko‘rinishda belgilanadi.*

A va B formulalarning tengkuchli bo‘lish-bo‘lmasligi ular uchun tuzilgan chinlik jadvallari yordamida aniqlanadi.

Misollar. 1. $\bar{x} \vee y = A$ va $B = x \to y$ formulalar berilgan bo‘lsin.

x	y	$\bar{x}$	$\bar{x} \vee y$	$x \to y$
1	1	0	1	1
1	0	0	0	0
0	1	1	1	1
0	0	1	1	1

Jadvaldan ko‘rinib turibdiki, to‘rtala qiymatlar satri uchun A va B formulalarning mos qiymatlari bir xil. Demak, ta’rifga asosan $A = B$.

2. $x \vee x = x$ tengligi isbot etilsin. $A = x \vee x$, $B = x$.

x	$x \vee x$
1	1

0	0

Demak, jadvalga asosan $A = B$.

3. $A = (x \vee \bar{x}) \wedge y$, $\quad B = y$.

x	y	$\bar{x}$	$x \vee \bar{x}$	$(x \vee \bar{x}) \wedge y$
1	1	0	1	1
1	0	0	1	0
0	1	1	1	1
0	0	1	1	0

Demak, $(x \vee \bar{x}) \wedge y = y$.

Xuddi shunday quyidagi tengkuchliliklarni isbotlash mumkin:

4. $x \vee \bar{x} = y \vee \bar{y}$, $\qquad$ 5. $x \vee (x \wedge y) = x$,

6. $(x \vee \bar{x}) \to y = (x \wedge \bar{x}) \vee y$, $\quad$ 7. $x \vee (y \wedge z) = (x \vee y) \wedge (x \vee z)$.

Ekvivalentlik bilan tengkuchlilik orasidagi farqni tushunish uchun ularni algebraik tenglama va ayniyat bilan solishtiramiz. Tenglama (masalan, $2x + y = 10$) deb shunday harflarning ayrim qiymatlari (masalan, $x = 4$, $y = 2$) uchun bajarib, boshqa qiymatlar (masalan, $x = 1$, $y = 2$) uchun bajarilmaydi. Shunga o‘xshash ekvivalentlik $A \leftrightarrow B$ deb, shunday (masalan, $x_1 \leftrightarrow (x_2 \wedge x_3)$) mulohazaga aytiladiki, unga $x_1, x_2, \ldots, x_n$ harflarning o‘rinlariga bir xil konkret mulohazalar qo‘yganda u chin qiymat qabul qilib, boshqa konkret qiymatlar qo‘yganda yolg‘on qiymatni qabul qiladi. Ayniyat deb, shunday tenglikka (masalan, $a^2 - b^2 = (a - b)\,(a + b)$) aytiladiki, unda qatnashadigan barcha harflar uchun bajariladi. Shunga o‘xshash, $A \equiv B$ mulohazada qatnashadigan barcha $x_1, x_2, \ldots, x_n$ harflarning o‘rniga ixtiyoriy konkret mulohazalarni qo‘yganda u chin qiymat qabul qilsa, bunday mulohaza tengkuchlilik deyiladi.

Algebrada ayniy ifodalarni bir-biri bilan almashtirish mumkin bo‘lganidek, mantiq algebrasida tengkuchli mulohazalarni (formulalarni) ham bir-biri bilan almashtirish mumkin. Bu esa murakkab formulalarni (mulohazalarni) soddalashtirish imkonini beradi.

Biz tenglama va ayniyat bilan ekvivalentlik va tengkuchlilik orasidagi o‘xshashlikni keltirdik. Endi esa ular orasidagi farqni ko‘rsatamiz. Ma’lumki, algebrada hech qanday almashtirish yordamida tenglikni amallar (qo‘shish, ayirish, darajaga ko‘tarish, bo‘lish va hokazo) bilan almashtirib bo‘lmaydi. Mantiq algebrasida esa ekvivalentlikni implikatsiya $(\rightarrow)$ yoki kon’yunksiya $(\wedge)$, diz’yunksiya $(\vee)$ va inkor $(-)$ amallari orqali ifodalash mumkinligini biz yuqorida ko‘rsatgan edik (1-§ dagi (1) formulaga qarang). (1) formulaning to‘g‘riligini chinlik jadvali orqali ko‘rsatamiz.

x	y	$x \rightarrow y$	$y \rightarrow x$	$x \leftrightarrow y$	$(x \rightarrow y) \wedge (y \rightarrow x)$
1	1	1	1	1	1
0	1	1	0	0	0
1	0	0	1	0	0
0	0	1	1	1	1

Jadvaldan ko‘rinadiki, oxirgi ikki ustunning chinlik qiymati ustma-ust tushadi. Shu bilan (1) formula isbotlanadi.

Oddiy algebrada tenglik belgisi «=» quyidagi aksiomalarni qanoatlantiradi: 1) ixtiyoriy a son uchun $a = a$ (refleksivlik); 2) agar $a = b$ bo‘lsa, u holda $b = a$ (simmetriklik); 3) agar $a = b$, $b = c$ bo‘lsa, u holda $a = c$ (tranzitivlik) bo‘ladi.

Shunga o‘xshash, mulohazalar algebrasida, ekvivalentlik ta’rifidan osonlik bilan ko‘rish mumkinki, u refleksiv, simmetrik va tranzitiv, ya’ni

1) ixtiyoriy x mulohaza uchun $x \equiv x$;

2) ixtiyoriy ikki x va y mulohazalar uchun, agar $x \equiv y$ bo‘lsa, u holda $y \equiv x$;

3) ixtiyoriy x, y, z uchta mulohazalar uchun $x \equiv y$ va $y \equiv z$ bo‘lsa, u holda $x \equiv z$.

Aynan chin, aynan yolg‘on va bajariluvchi formulalar.

4-ta'rif. *Elementar mulohazalarning hamma qiymatlar satrlarida faqat chin qiymatni qabul qiluvchi formula aynan chin formula yoki tavtologiya deb ataladi va* J *bilan belgilanadi.*

A formulaning tavtologiya ekanligi yoki emasligi qiymatlar jadvalini tuzish orqali bilinadi.

Misollar:

1. $J = x \wedge (x \to y) \to y$ formula tavtologiyadir. Haqiqatan:

x	y	$x \to y$	$x \wedge (x \to y)$	$x \wedge (x \to y) \to y$
1	1	1	1	1
1	0	0	0	1
0	1	1	0	1
0	0	1	0	1

2. $J = (\bar{x} \vee y) \to (x \to y)$ formula ham tavtalogiyadir:

x	y	$\bar{x}$	$\bar{x} \vee y$	$x \to y$	$(\bar{x} \vee y) \to (x \to y)$
1	1	0	1	1	1
1	0	0	0	0	1
0	1	1	1	1	1
0	0	1	1	1	1

Tavtologiyani topish mulohazalar mantiqining asosiy vazifasidir, chunki ular mantiqiy fikrlash qonuni bilan ifodalanadi.

Ixtiyoriy formulaning tavtalogiya bo'lish-bo'lmasligini tekshirish murakkab emas. Buning uchun chinlik jadvalini tuzish yoki mantiqiy fikr yuritish usullaridan foydalanishimiz mumkin. Masalan, $\overline{p_1 \wedge p_2} \vee (p_1 \to p_3)$ formuladan ko'rinib turibdiki, diz'yunksiyasi yolg'on bo'lishi uchun $\overline{p_1 \wedge p_2}$ va $p_1 \to p_3$ ikkalasi ham yolg'on qiymat qabul qilishi kerak. Agar $p_1 = p_2 = 1$bo'lsa, formulaning birinchi qismi $\overline{p_1 \wedge p_2}$ yolg'on qiymat qabul qiladi. Agar, $p_1 = 1,\ p_3 = 0$ bo'lsa, formulaning ikkinchi qismi $p_1 \to p_3$ yolg'on qiymat qabul qiladi. Shunday qilib, $F(1, 1, 0)$ da berilgan formula tavtalogiya bo'lmaydi.

1-teorema: Quyidagi mulohazalar algebrasi formulalari tavtologiya bo‘ladi:

1) $p \vee \overline{p}$ - *uchinchisi istisno;*

2) $\overline{p \wedge \overline{p}}$ - *qarama-qarshilikni inkor qilish qonuni;*

3) $\overline{\overline{p}} \leftrightarrow p$ - *ikki karrali inkor qonuni;*

4) $(p \wedge p) \leftrightarrow p$,

5) $(p \vee p) \leftrightarrow p$,

6) $p_1 \to (p_1 \vee p_2)$,

7) $(p_1 \wedge p_2) \to p_1$ - *soddalashtirish qonunlari;*

8) $(p_1 \wedge p_2) \leftrightarrow (p_2 \wedge p_1)$,

9) $(p_1 \vee p_2) \leftrightarrow (p_2 \vee p_1)$ - *konyunksiya va diszyunksiyaning kommutativlik qonunlari;*

10) $((p_1 \wedge p_2) \wedge p_3) \leftrightarrow (p_1 \wedge (p_2 \wedge p_3))$,

11) $((p_1 \vee p_2) \vee p_3) \leftrightarrow (p_1 \vee (p_2 \vee p_3))$ - $\wedge$ *va* $\vee$ *amallarining assotsiativlik qonuni;*

12) $((p_1 \vee p_2) \wedge p_3) \leftrightarrow ((p_1 \wedge p_3) \vee (p_2 \wedge p_3))$,

13) $((p_1 \wedge p_2) \vee p_3) \leftrightarrow ((p_1 \vee p_3) \wedge (p_2 \vee p_3))$ - *distributivlik qonuni;*

14) $\overline{p_1 \wedge p_2} \leftrightarrow \overline{p_1} \vee \overline{p_2}$,

15) $\overline{p_1 \vee p_2} \leftrightarrow \overline{p_1} \wedge \overline{p_2}$ - *de Morgan qonuni;*

16) $p \to p$ - *ayniylik qonuni;*

17) $(p_1 \to p_2) \leftrightarrow (\overline{p_2} \to \overline{p_1})$ - *kontrapozitsiya qonuni;*

18) $((p_1 \to p_2) \wedge (p_2 \to p_3)) \to (p_1 \to p_3)$ - *zanjir qoidasi;*

19) $p \leftrightarrow p$,

20) $(p_1 \leftrightarrow p_2) \leftrightarrow (p_2 \leftrightarrow p_1)$,

21) $((p_1 \leftrightarrow p_2) \wedge (p_2 \leftrightarrow p_3)) \leftrightarrow (p_1 \leftrightarrow p_3)$ - $\leftrightarrow$ *amaliga mos ravishda simmetriklik va tranzitivlikning* refleksiya xossalari*;*

22) $(p_1 \leftrightarrow p_2) \leftrightarrow (\overline{p_1} \leftrightarrow \overline{p_2})$ - *qarama-qarshilik qonuni.*

5-ta’rif. *Elementar mulohazalarning hamma qiymatlar satrlarida faqat yolg‘on qiymatni qabul qiluvchi formulalar aynan yolg‘on (doimo* *yolg‘on) yoki bajarilmaydigan formulalar deyiladi va* $\overline{J}$ *bilan belgilanadi.*

Masalan, $\overline{J} = (\overline{x} \vee y) \wedge (\overline{x \to y})$ aynan yolg‘on formuladir:

x	y	$\overline{x}$	$\overline{x} \vee y$	$x \to y$	$\overline{x \to y}$	$(\overline{x} \vee y) \wedge (\overline{x \to y})$
1	1	0	1	1	0	0
1	0	0	0	0	1	0
0	1	1	1	1	0	0
0	0	1	1	1	0	0

Ma’lumki, aynan chin formulaning inkori aynan yolg‘on formula bo‘ladi va aksincha. Aynan chin va aynan yolg‘on formulalar unga kiradigan o‘zgaruvchilarga bog‘liq bo‘lmay, faqat bitta qiymat qabul qiladi.

6-ta’rif. *Agar* $(A \leftrightarrow B)$ *tavtologiya bo‘lsa, u holda* A *va* B *lar mantiqiy ekvivalent deb aytiladi. Agar* $(A \to B)$ *tavtologiya bo‘lsa, u holda* B A *ning mantiqiy xulosasi deb aytiladi.*

2-teorema. *Agar* A *va* $A \to B$ *aynan chin formulalar (tavtologiyalar) bo‘lsa, u holda* B *formula ham tavtologiya bo‘ladi.*

Isbot. A va $A \to B$ tavtalogiyalar bo‘lsin. A va B formulalarning tarkibiga kiruvchi o‘zgaruvchilarning biror qiymatlar satrida B formula yolg‘on qiymat qabul qilsin. A formula tavtologiya bo‘lganligi uchun o‘zgaruvchilarning o‘sha qiymatlar satrida A chin qiymat qabul qiladi. U vaqtda ($A \to B$) formula yolg‘on qiymat qabul qiladi. Bu natija ($A \to B$) ning tavtologiya degan farazimizga qarama-qarshidir. Demak, B tavtologiyadir.

3-teorema. *Agar* $x_1, x_2, ..., x_n$ *o‘zgaruvchilarga bog‘liq bo‘lgan* A *formula tavtologiya va* B *formula* A *formuladan* $x_1, x_2, ..., x_n$ *o‘zgaruvchilar o‘rniga mos ravishda* $A_1, A_2, ..., A_n$ *formulalarni qo‘yish natijasida hosil etilgan bo‘lsa, u holda* B *formula tavtologiya bo‘ladi, ya’ni tavtologiyada o‘rniga qo‘yish yana tavtologiyani keltiradi.*

Isbot. A tavtologiya bo‘lsin va B formula tarkibiga kiruvchi o‘zgaruvchi mulohazalarning ixtiyoriy qiymatlar satri berilgan bo‘lsin. U vaqtda $A_1, A_2, ..., A_n$ formulalar $y_1, y_2, ..., y_n$ (har bir x_i **1** yoki **0** qiymat qabul qiladi) qiymatlar qabul qiladilar. Agar $x_1, x_2, ..., x_n$ larga mos ravishda $y_1, y_2, ..., y_n$ qiymatlarni bersak, u holda A ning natijaviy qiymati B ning chinlik qiymatiga mos keladi. A tavtologiya bo‘lganligi uchun B formula tarkibiga kirgan o‘zgaruvchilarning berilgan ixtiyoriy qiymatlar satrida **1** qiymat qabul qiladi. Shunday qilib, B doimo **1** qiymat qabul qiladi va u tavtologiya bo‘ladi.

4-teorema. *Agar A_1 formula tarkibiga bir yoki ko‘p marta kirgan A formula o‘rniga B formulani qo‘yish natijasida B_1 formula hosil etilsa, u holda $((A \leftrightarrow B) \to (A_1 \leftrightarrow B_1))$ tavtologiya bo‘ladi. Demak, A va B lar mantiqiy ekvivalent bo‘lsa, u holda A_1 va B_1 ham mantiqiy ekvivalent bo‘ladi.*

Isbot. Agar A va B formulalar o‘zgaruvchilarning ixtiyoriy qiymatlar satrida qarama-qarshi chinlik qiymatlariga ega bo‘lsa, u holda $(A \leftrightarrow B)$ ning chinlik qiymati **yo** bo‘ladi va natijada $((A \leftrightarrow B) \to (A_1 \leftrightarrow B_1))$ formula **ch** qiymat qabul qiladi. Agar A va B lar o‘zgaruvchilarning ixtiyoriy qiymatlar satrida bir xil chinlik qiymati qabul qilsalar, u holda A_1 *va* B_1 formulalar ham bir xil chinlik qiymati qabul qiladilar, chunki teoremaning shartiga asosan B_1 formula A_1 formuladan A ning o‘rniga B ni qo‘yish natijasida hosil etilgan. Demak, bu holda $(A \leftrightarrow B)$ ham, $(A_1 \leftrightarrow B_1)$ ham **ch** qiymat qabul qiladi. Shuning uchun $((A \leftrightarrow B) \to (A_1 \leftrightarrow B_1))$ formula ham **ch** qiymat qabul qiladi.

Demak, $((A \leftrightarrow B) \to (A_1 \leftrightarrow B_1))$ formula tavtologiya bo‘ladi.

7-ta'rif. *Elementar mulohazalarning kamida bitta qiymatlar satrida chin qiymat qabul qiluvchi va aynan chin bo‘lmagan formulaga bajariluvchi formula deb aytiladi.*

Masalan. 1. $\overline{(x \wedge \overline{y})} \leftrightarrow (\overline{x} \wedge y)$; 2. $[(x \leftrightarrow y) \wedge (x \vee y)] \to \overline{z}$; 3. $x \vee y$; 4. $x \to y \leftrightarrow z$

formulalar bajariluvchi formulalar hisoblanadi.

Aynan chin formulalar katta ahamiyatga ega bo‘lib, ular mantiq qonunlarini ifodalaydi. Shu munosabat bilan quyidagi masala tug‘iladi: shunday metodni topish kerakki, u chekli miqdordagi amal yordamida mantiq algebrasining ixtiyoriy muayan formulasini aynan chin yoki aynan chin emasligini aniqlasin. Bunday metod yechiluvchi metod yoki algoritm, yoki yechiluvchi protsedura deyiladi. Qo‘yilgan masalaning o‘zi esa **“yechilish muammosi”** deyiladi. Bu muammo faqatgina mulohazalar algebrasi uchungina emas, balki boshqa mantiqiy sistemalar uchun ham qo‘yiladi. U mulohazalar algebrasi uchun ijobiy ravishda yechiladi. Bu yerda yechiluvchi protsedura sifatida chinlik jadvalini olishimiz mumkin, chunki bunday jadval har bir muayan formula uchun qo‘yilgan savolga javob beradi. Agar berilgan formulaga mos keladigan jadvalning oxirgi ustunida faqat “chin” bo‘lsa, u holda bu formula aynan “chin”, agar oxirgi ustunda hech bo‘lmaganda bitta “yolg‘on” bo‘lsa, u holda formula aynan chin emas bo‘ladi. Tabiiyki, amalda bu usulni har doim bajarib bo‘lmaydi (chunki formulada n ta o‘zgaruvchi qatnashsa, bunday jadval 2^n ta satrga ega bo‘ladi). Lekin har doim chekli miqdordagi amal bajarib, prinsip jihatdan qo‘yilgan savolga javob berish mumkin. Keyingi paragraflarda boshqa bir yechiluvchi protsedurani keltiramiz, u berilgan formulani normal shaklga keltirishga asoslangan. Normal shakllar matematik mantiqning boshqa masalalarida ham ishlatiladi.