5-MAVZU ASOSIY TENGKUCHLILIKLAR

Avvalo, oddiy algebrada ma'lum bo'lgan ayniyatlarga o'xshashlarini keltiramiz. Ma'lumki, qo'shish va ko'paytirish amali quyidagi qonuniyatlarga bo'ysunadi:

1) $x+y=y+x$ (qo'shishning kommutativlik qonuni);
2) $(x+y)+z=x+(y+z)$ (qo'shishning assotsiativlik qonuni);
3) $xy=yx$ (ko'paytirishning kommutativlik qonuni);
4) $(xy)z=x(yz)$ (ko'paytirishning assotsiativlik qonuni);
5) $x(y+z)=xy+xz$ (ko'paytirishning yig'indiga nisbatan distributivlik qonuni).

Shu ayniyatlarga o'xshash mantiq algebrasida quyidagi tengkuchliliklar o'rinlidir:

$$x\wedge y=y\wedge x \tag{3}$$

$$(x\wedge y)\wedge z=x\wedge(y\wedge z) \tag{4}$$

$$x\vee y=y\vee x \tag{5}$$

$$(x\vee y)\vee z=x\vee(y\vee z) \tag{6}$$

$$x\wedge(y\vee z)=(x\wedge y)\vee(x\wedge z) \tag{7}$$

$$x\vee(y\wedge z)=(x\vee y)\wedge(x\vee z) \tag{8}$$

Bu tengkuchliliklarni tekshirish uchun chinlik jadvalidan foydalansa bo'ladi. Bu yerda biz (8) ni tekshiradigan jadvalni keltirishimiz bilan kifoyalanamiz:

x	y	z	$y\wedge z$	$x\vee y$	$x\vee z$	$x\vee(y\wedge z)$	$(x\vee y)\wedge$ $\wedge(x\vee z)$	$x\vee(y\wedge z)\equiv$ $\equiv(x\vee y)\wedge(x\vee z)$
0	0	0	0	0	0	0	0	1
0	0	1	0	0	1	0	0	1
0	1	0	0	1	0	0	0	1
0	1	1	1	1	1	1	1	1

1	0	0	0	1	1	1	1	1
1	0	1	0	1	1	1	1	1
1	1	0	0	1	1	1	1	1
1	1	1	1	1	1	1	1	1

Diz’yunksiya $(\vee)$ amali kommutativlik va assotsiativlik xossasiga egadir. (7)-(8) tengkuchliliklar esa $\wedge$ va $\vee$ amallarning bir-biriga nisbatan distributiv xossasiga ega ekanligini ko‘rsatadi. Shuni ham ta’kidlash kerakki, (8) tengkuchlilikka o‘xshash oddiy algebrada ayniyat yo‘q (chunki $x+yz=(x+y)\ \ (x+z)$ ayniyat emas). Yuqoridagi o‘xshashlik asosida $x\vee y$ ni mantiqiy yig‘indi, $x\wedge y$ ni esa mantiqiy ko‘paytma deb olishimiz mumkin. Bu o‘xshashlikni kuchaytirish uchun, algebraik ko‘paytmada nuqta $(\cdot)$ yozilmaganidek (masalan, $x\cdot y=xy$), mantiqiy ko‘paytirish belgisi $(\wedge)$ ni yozmaymiz, ya’ni $x\wedge y$ ning o‘rniga xy ni yozamiz. Bundan keyin mantiqiy ifodalarni soddalashtirish, ularda qavslarni kamaytirish maqsadida quyidagicha shartlashamiz:

1) biror mantiqiy ifoda inkor ishorasi ostida bo‘lsa, uni qavssiz yozamiz, ya’ni $(\overline{x\vee y})\wedge z$ ning o‘rniga $\overline{x\vee y}\wedge z$ ni, yoki $\overline{x\vee y}\,z$ ni yozamiz.

2) kon’yunksiya belgisi diz’yunksiya, implikatsiya va ekvivalentlik belgilariga nisbatan mustahkamroq bog‘laydi deb hisoblaymiz, ya’ni $(xy)\vee z$ o‘rniga $xy\vee z$, $x\to(yz)$ o‘rniga $x\to yz$, $(xy)\leftrightarrow(zu)$ o‘rniga $xy\leftrightarrow zu$ yozamiz.

3) diz’yunksiya belgisi implikatsiya va ekvivalentlik belgilariga nisbatan mustahkamroq bog‘laydi deb hisoblaymiz, ya’ni $(x\vee y)\to z$ o‘rniga $x\vee y\to z$ va $(x\vee y)\leftrightarrow z$ o‘rniga $x\vee y\leftrightarrow z$ yozamiz.

4) implikatsiya belgisi ekvivalentlik belgisiga nisbatan mustahkamroq bog‘laydi deb hisoblaymiz, ya’ni $(x\to y)\leftrightarrow z$ o‘rniga $x\to y\leftrightarrow z$ bu kelishuvlar mantiqiy ifodalarni yozishni soddalashtiradi, masalan,

$$(((x\leftrightarrow y)\to(x\wedge z))\leftrightarrow(((\overline{x\wedge\bar{y}})\vee(\bar{x}\wedge y))\vee(x\to z)))\text{ o‘rniga}$$

$$(x\leftrightarrow y)\to\overline{xz}\leftrightarrow x\,\bar{y}\vee\bar{x}y\vee(x\to z)\text{ ni yozamiz.}$$

Yuqoridagi (1)-tengkuchlilik yordamida $\leftrightarrow$ belgisini $\to$ va $\wedge$ belgilari orqali ifodalashimiz mumkin. Endi $x\to y$ implikatsiyani ko‘raylik. Faqatgina x chin va y yolg‘on bo‘lgandagina $\bar{x} \vee y$ mulohaza yolg‘on, bundan esa faqatgina x chin (ya’ni $\bar{x}$ yolg‘on) va y yolg‘on bo‘lgandagina $\bar{x} \vee y$ mulohaza yolg‘on bo‘lishi kelib chiqadi. Shunday qilib, yana bir tengkuchlilikka ega bo‘lamiz:

$$x \to y \equiv \bar{x} \vee y. \qquad (9)$$

Demak, $\to$, $\leftrightarrow$, $\vee$, $\wedge$, $-$ belgilarni o‘z ichiga olgan ixtiyoriy murakkab mulohazani unga tengkuchli bo‘lgan shunday mulohaza bilan almashtirish mumkinki, natijada faqat $\vee$, $\wedge$, $-$ belgilar qatnashgan mulohazalarga ega bo‘lamiz. Bunday almashtirish mantiq algebrasining elektrotexnikadagi tadbiqi uchun katta ahamiyatga ega, chunki u yerda ishlatiladigan ifodalarda faqat uchta $\vee$, $\wedge$, $-$ belgilar qatnashadi. Endi, $\vee$ belgini $\wedge$ va $-$ belgilar orqali ifodalaymiz. Buni ikki karra inkorni o‘chirish qonuni deb ataluvchi $\bar{\bar{x}} = x$ tengkuchlilikdan va

$$\overline{x \vee y} \equiv \bar{x} \wedge \bar{y}, \qquad (10)$$

$$\overline{x \wedge y} \equiv \bar{x} \vee \bar{y}. \qquad (11)$$

de Morgan qonunlari deb ataluvchi hamda chinlik jadvali yordamida osongina tekshiriladigan tengkuchliliklar yordamida bajarish mumkin.

Haqiqatan ham,

$$x \vee y \equiv \overline{\overline{x \vee y}} \equiv \overline{\bar{x} \wedge \bar{y}} \qquad (12)$$

va shunga o‘xshash

$$x \wedge y \equiv \overline{\bar{x} \vee \bar{y}} \qquad (13)$$

ekanligi kelib chiqadi.

Shunday qilib, mantiq algebrasining ixtiyoriy ifodasini unga tengkuchli bo‘lgan shunday ifoda bilan almashtirish mumkinki, oxirgi ifodada faqat $\wedge$ va $-$ yoki $\vee$ va $-$ belgilar qatnashadi. Shunga o‘xshash barcha mantiq amallarni $\to$ va $-$ amallar bilan almashtirish mumkin.

Shuni ham aytish kerakki, barcha amallarni faqatgina Sheffer shtrixi bilan almashtirish ham mumkin:

$$\bar{x} \equiv x|x, \quad x \wedge y \equiv (x|y)|(x|y), \quad \overline{x \wedge y} \equiv x|y, \quad x \vee y \equiv \bar{x}|\bar{y}, \quad x \to y \equiv x|\bar{y}.$$

Bu tengkuchliliklarni, Sheffer amali ta’rifidan foydalanib, chinlik jadvali yordamida osongina ko‘rsatish mumkin.

Endi misol sifatida $(x \to y)\,(y \to x) \to (\bar{x} \leftrightarrow \overline{y})$ ifodani shunday almashtiramizki, natijada faqat $\wedge$, $\vee$ va – belgilar qatnashsin. Buning uchun avvalo (9), (2) va (3) tengkuchliliklardan foydalanamiz:

$$(x \to y)\,(y \to x) \to (\bar{x} \leftrightarrow \overline{y}) \equiv (x \to y)\cdot(y \to x) \to (\bar{x} \to \bar{y})\cdot(\bar{y} \to \bar{x}) \equiv$$

$$\equiv (\bar{x} \vee y)\,(\bar{y} \vee x) \to (\bar{\bar{x}} \vee \bar{y})\,(\bar{\bar{y}} \vee \bar{x}) \equiv \overline{(x \vee \bar{y})\,(y \vee \bar{x})} \vee (\bar{x} \vee y)\cdot(\bar{y} \vee x).$$

Kommutativlik va distributivlik qonunlaridan foydalanib, bu ifodani quyidagi ko‘rinishda yozishimiz mumkin:

$$(x \to y)\cdot(y \to x) \to (\bar{x} \leftrightarrow \bar{y}) \equiv (\bar{x}\cdot y \vee \bar{y}\cdot x \vee \bar{x}\cdot\bar{y} \vee x\cdot y \vee x\bar{y} \vee \bar{x}y).$$

Endi shunday savol tug‘iladi: agar hamma mantiqiy amallar ikkita (–, $\wedge$) yoki hatto bitta $\bar{\bar{x}} = x$ ga keltirishning hojati bormi? Sabab shundaki, faqat ikkita yoki bitta belgi orqali almashtirganda mantiqiy ifodalar juda cho‘zilib ketadi va uni ko‘zdan kechirish qiyinlashadi.

Ikkinchi tomondan, mantiqiy xulosalarning qonuniyatlarini bayon etayotganda, yuqorida kiritilgan $\wedge$, $\vee$, $\to$, $\leftrightarrow$ amallar katta ahamiyatga ega. Bu xususan $\to$ amaliga tegishlidir. Уana bir nechta muhim tengkuchliliklarni keltiramiz:

$x \cdot \bar{x} \equiv$ yo (qarama-qarshilik qonuni) (14)

$x \vee \bar{x} \equiv$ yo (uchinchisi istisno qonuni) (15)

$x \cdot x \equiv x, \quad x \vee x \equiv x$ (idempotentlik qonuni) (16)

$x \cdot (x \vee y) \equiv x, \quad x \vee x \cdot y \equiv x$ (yutish qonunlari) (17)

$x \vee 0 \equiv x, \quad x \vee 1 \equiv 1, \quad x \cdot 1 \equiv x, \quad x \cdot 0 \equiv 0$ (18)

Keltirilgan tengkuchliliklar ixtiyoriy mantiqiy ifodalarni kerakli ko‘rinishga keltirishga imkon beradi.

Ekvivalent transformatsiyalar. Formulalarni soddalashtirish.

Agar hamma joyda ekvivalent formulalarda biron bir o‘zgaruvchi o‘rniga bir xil formulani almashtirsak, yangi olingan formulalar ham almashtirish qoidasiga muvofiq ekvivalent bo‘lib chiqadi. Shunday qilib, har bir ekvivalentdan istalgan miqdordagi yangi ekvivalentlarni olish mumkin.

1-misol: Agar $\overline{X \wedge Y} \equiv \overline{X} \vee \overline{Y}$ De Morgan qonunida X o'rniga $\overline{X}$ bilan almashtirilsa va У o'rniga $\overline{X} \wedge Y$ bilan almashtirilsa, biz yangi

$\overline{\overline{\overline{X}}\wedge(\overline{X}\wedge Y)}\equiv\overline{\overline{X}}\vee\overline{\overline{X}\wedge Y}$ tenglikni olamiz. Olingan tenglikning to'g'riligini chinlik jadvali yordamida tekshirish oson.

Agar F formulasining bir qismi bo'lgan F_1 ni ba'zi formulalar ekvivalent formula bilan almashtirilsa, hosil bo'lgan F_2 formula F formulaga teng bo'ladi.

$\overline{\overline{X}}\vee\overline{\overline{X}\wedge Y}$ formula uchun quyidagi almashtirishlarni amalga oshirish mumkin:

$\overline{\overline{X}}\vee\overline{\overline{X}\wedge Y}\equiv X\vee\overline{\overline{X}\wedge Y}$ – ikki karra inkor qonuni;

$X\vee\overline{\overline{X}\wedge Y}\equiv X\vee\left(\overline{\overline{X}}\vee\overline{Y}\right)$ – de-Morgan qonuni;

$X\vee\left(\overline{\overline{X}}\vee\overline{Y}\right)\equiv X\vee\left(X\vee\overline{Y}\right)$ – ikki karra inkor qonuni;

$X\vee\left(X\vee\overline{Y}\right)\equiv(X\vee X)\vee\overline{Y}$ – assosiativlik qonuni;

$(X\vee X)\vee\overline{Y}\equiv X\vee\overline{Y}$ – idempotentlik qonuni.

Tranzitivlik munosabatiga ko‘ra quyidagi tenglik o‘rinli

$$\overline{\overline{X}}\vee\overline{\overline{X}\wedge Y}\equiv X\vee\overline{Y}.$$

Bir formulani boshqasiga almashtirish, unga teng keladigan, formulaning ekvivalent o'zgarishi deb ataladi.

Implikatsiya va ekvivalentlik belgilarini o'z ichiga olmaydigan formulani soddalashtirish deganda, element bo'lmagan formulalarni (xususan, ikki tomonlama inkorlarni) rad etishni o'z ichiga olmaydigan formulaga olib keladigan ekvivalent transformatsiya tushuniladi yoki umumiy sonda konyunksiya va disyunksiya belgilari mavjud.

2-misol: $\overline{X\to\overline{Y}}\wedge\overline{Y\to\overline{X}}$ formulani soddalashtiring.

$$\overline{X\to\overline{Y}}\wedge\overline{Y\to\overline{X}}\equiv\overline{\overline{X}\vee\overline{Y}}\wedge\overline{\overline{Y}\vee\overline{X}}\equiv\overline{\overline{X}\vee\overline{Y}}\wedge\overline{\overline{X}\vee\overline{Y}}\equiv\overline{\overline{X}\vee\overline{Y}}\equiv\overline{\overline{X}}\wedge\overline{\overline{Y}}\equiv X\wedge Y.$$

Tengkuchli formulalarga doir teoremalar.

1-teorema. *A va B formulalar tengkuchli bo‘lishi uchun $\overline{A}$ va $\overline{B}$ formulalar tengkuchli bo‘lishi zarur va yetarli.*

Isbot. $A=B$ bo‘lsin. U vaqtda hamma holatlarda formulalar bir xil qiymatga ega bo‘ladilar. U holda $\overline{A}$ va $\overline{B}$ formulalar ham chinlik jadvalining har bir satridagi qiymatlari bir xil bo‘ladi. Demak, $\overline{A}=\overline{B}$.

Xuddi shunga o‘xshash, $\overline{A}=\overline{B}$ dan $A=B$ kelib chiqadi.

2-teorema. *A va B formulalar tengkuchli bo‘lishi uchun $A\leftrightarrow B$ formula aynan chin (tavtologiya) bo‘lishi zarur va yetarli.*

Isbot. 1. $A = B$ bo‘lsin. Bu holda, ekvivalentlik ta’rifiga asosan, $A \leftrightarrow B$ ning hamma satrlaridagi qiymatlari “**ch**” dan iborat, demak, $A \leftrightarrow B$ tavtologiyani ifodalaydi.

2. $A \leftrightarrow B$ tavtologiya bo‘lsin. U holda $A \leftrightarrow B$ har bir satrda “**ch**” qiymatga ega bo‘ladi. Bundan esa A va B ning har bir satrdagi qiymatlari bir xil, ya’ni $A = B$ kelib chiqadi.

Misollar. 1. $\overline{x \vee y} \leftrightarrow \bar{x} \wedge \bar{y}$ - aynan chin.

2. $\overline{x \wedge y} \leftrightarrow \bar{x} \vee \bar{y}$ - aynan chin.

3-teorema. *$A \leftrightarrow B$ aynan chin bo‘lishi uchun $\overline{A} \leftrightarrow \overline{B}$ aynan chin bo‘lishi zarur va yetarli.*

Isbot. a) $A \leftrightarrow B$ formula aynan chin bo‘lsin. U vaqtda 2-teoremaga asosan $\overline{A} = \overline{B}$. Demak, 2-teoremaga asosan $\overline{A} \leftrightarrow \overline{B}$ formulaning aynan chinligi kelib chiqadi.

b) $\overline{A} \leftrightarrow \overline{B}$ aynan chin bo‘lsin. Bundan $\overline{A} = \overline{B}$ kelib chiqadi va o‘z navbatida $A = B$. Demak, $A \leftrightarrow B$ formula aynan chin bo‘ladi.

4-teorema. *P formulaning istalgan A qismi o‘rniga shu A bilan tengkuchli B formulani qo‘yishdan hosil bo‘lgan yangi Q formula P bilan tengkuchlidir.*

Misol. $P = \overline{x \vee y} \to z$ $\overline{x \vee y} = \bar{x} \wedge y$ bo‘lgani uchun

$$P = Q = \bar{x} \wedge \bar{y} \to z = \overline{\bar{x} \wedge \bar{y}} \vee z = x \vee y \vee z .$$