19-MAVZU	DARAXTLAR, ULARNI TADBIQLARI.TAYANCH DARAXTLAR

1. Daraxtlar

1.1-ta'rif. *Agar G grafning u qirrasi kamida bitta siklga tegishli bo'lsa, u siklik, aks holda asiklik qirra deyiladi.*

G graf uchun

$$\lambda(G) = m(G) - n(G) + k(G)$$

(bu yerda $m(G) - G$ ning qirralari soni, $n(G)$ - uchlari coni va $k(G)$ komponentalari soni) ifoda uning siklomatik soni deyiladi.

Osongina ko'rsatish mumkinki:

$$K(G \setminus u) = \begin{cases} K(G), \text{ агар } u \text{ циклик кирра булса;} \\ K(G)+1, \text{ агар } u \text{ ациклик кирра булса;} \end{cases}$$

$$\lambda(G|u) = \begin{cases} \lambda(G)-1, \text{ агар } u \text{ циклик кирра булса;} \\ \lambda(G), \text{ агар } u \text{ ациклик кирра булса.} \end{cases}$$

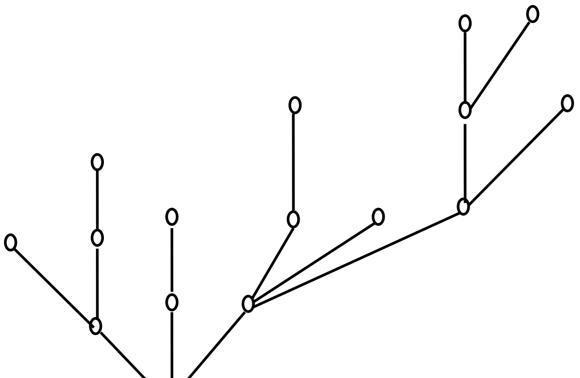
O'z-o'zidan ravshanki,

$$n(G \setminus u) = n(G), \quad m(G \setminus u) = m(G) - 1,$$

$\lambda(G) \geq 0$ va faqat sikllari bo'lmagan graf uchun $\lambda(G) = 0$.

1.2-ta'rif. *Barcha qirralari asiklik bo'lgan bog'liqli graf daraxt deyiladi.*

Daraxtning istalgan ikkita uchlari yagona zanjir bilan bog'langandir. Daraxtning istalgan x_0 uchini tanlab olib uning ildizi yoki nolinchi pog'onali uch deb ataymiz. x_0 ga qo'shni bo'lgan barcha uchlarni birinchi pog'ona uchlari deymiz va hokazo - $i-1$ pog'onadagi uchlarga qo'shni (boshqa pog'onalarga tegishli bo'lmagan) uchlarni i pog'ona uchlari deb ataymiz (1.1-shakl).



4-pog'ona,

3-pog'ona,

2-pog‘ona,

1-pog‘ona,

0-pog‘ona.

1.1-shakl

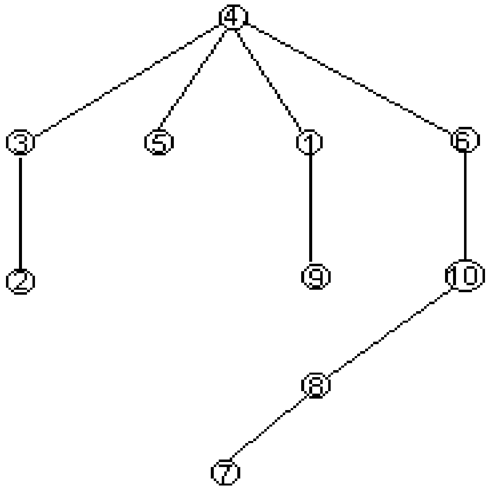
Daraxtning bunday tasvirlanishidan kelib chiqadiki, u chetki (faqat bitta qirraga insident bo‘lgan) uchlarga ega. Masalan, oxirgi pog‘onaning uchlari.

Bog‘likli G grafdan ketma-ket barcha siklik qirralarni olib tashlaymiz. Natijada, hamma qirralari asiklik bo‘lgan bog‘likli H grafni-daraxtni hosil qilamiz. Bu daraxt G grafning asosi deyiladi. Grafning asosi yagona tanlanmaydi, lekin barcha asiklik qirralar istalgan asosga kiradi. H asosga nisbatan $G \setminus H$ bo‘lakning barcha qirralari - vatarlar deb ataladi.

H daraxtdan chetki uchni (avtomatik tarzda bitta qirrani) olib tashlasak, yana daraxtni hosil qilamiz. Agar H chekli bo‘lsa, $n(H)-2$ qadamlardan keyin bitta qirra va ikkita uchga ega daraxtni hosil qilamiz. Daraxtdan olib tashlangan uchlar va qirralar soni bir xil bo‘lganligi sababli quyidagi xulosaga kelamiz: har qanday chekli daraxtda qirralar soni uchlar sonidan bitta kam. Aksinchasi ham o‘rinlidir, ya’ni

1.1-teorema. *Chekli bog‘likli G graf daraxt bo‘lishi uchun, uning qirralari soni uchlari sonidan bittaga kam bo‘lishi zarur va yetarli.*

Uchlari $1,2,3,...,n$ raqamlar bilan tartiblangan n uchli daraxt berilgan bo‘lsin. Daraxtning chetki uchlari orasidagi eng kichik nomerlisi i_1 va u bilan qo‘shni bo‘lgan yagona uch j_1 bo‘lsin. Daraxtdan i_1 uchni, demak $i_1 j_1$ qirrani olib tashlaymiz. Hosil bo‘lgan daraxtda eng kichik nomerli chetki i_2 uchni va $i_2 j_2$ qirrani olib tashlaymiz va hokazo. Bu protsessni $n-2$ marta takrorlab ikki uch va bitta qirrali daraxtni hosil qilamiz. Olib tashlangan uchlarni $I=\{i_1,i_2,......,i_{n-2}\}$va $J=(j_1,j_2,......,j_{n-2})$ lar bilan belgilaymiz. Bu ikkala I va J majmualar berilgan daraxt bo‘yicha yagona ravishda aniqlanadi, shu bilan birga I ning barcha sonlari har xil, J niki esa har xil bo‘lishi shart emas (1.2-shakl).



1.2-shakl.

Bu daraxt uchun $I=\{2,3,5,7,8,9,1,4\}$ va $J=(3,4,4,8,10,1,4,6)$.

$\mathrm{I}=\{i_1,i_2,...,i_{n-2}\}$ va $J=\{j_1,j_2,...,j_{n-2}\}$ uchlar majmualari berilgan daraxt bo‘yicha yagona aniqlanadi, shu bilan birga birinchi majmuaning barcha uchlari har xil, ikkinchisiniki esa har xil bo‘lishi shart emas. Shu bilan birga har qanday $J=\{j_1,j_2,...,j_{n-2}\}$ $(1\le j_k\le n)$ majmua bitta daraxtga mos keladi. Uni quyidagicha qurish mumkin.

$N=\{1,\,2,...,n\}$ to‘plamning J da qatnashmagan sonlarining eng kichigini i_1 bilan belgilaymiz (bunday son hamma vaqt mavjud, chunki J da $n-2$ sonlar bor). Qirra bilan i_1 va j_1 uchlarni tutashtiramiz, j_1 ni J dan, i_1 ni esa N dan o‘chiramiz va protsessni takrorlaymiz: $J_1=\{j_2,j_3,...,j_{n-2}\}$ majmuada qatnashmagan $N_1=N\setminus\{i_1\}$ ning eng kichik sonini i_2 bilan belgilaymiz; i_2, j_2 uchlarni qirra bilan tutashtiramiz va ularni mos ravishda N_1 va J_1 lardan o‘chiramiz va hokazo. Oxirida N_{n-2} da qolgan ikkita uchlarni qirra bilan tutashtiramiz.

Bundan ko‘rinadiki, har qanday $k=1,\,2,...,n-2$ uchun k qadamdan keyin yasalgan qirralar ichida i_k ga insident bo‘lganlari yo‘q, lekin j_k ga insident bo‘lgan kamida bitta qirra mavjud. Buni nazarda tutgan holda, protsessni teskari tartibda bajarib, k bo‘yicha induksiyani qo‘llab haqiqatan ham daraxt hosil bo‘lishini ko‘rsatamiz (chunki har gal bitta qirra yangi, chetki uch bilan qo‘shiladi).

Shunga o‘xshash induksiya bo‘yicha, lekin to‘g‘ri tartibda qurib isbotlash mumkinki ushbu daraxtga aynan J majmua mos keladi.

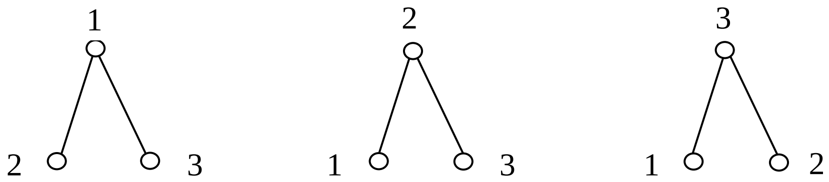
Yuqoridagi protsessdan ko‘rinadiki har xil daraxtlarga turli xil (I, J) juftliklar mos keladi. Agar $\mathrm{I}' \neq \mathrm{I}''$ bo‘lsa, u holda $J' \neq J''$. Haqiqatan ham, $i_k^{'} \neq i_k^{''}$ va $i_k^{'} < i_k^{''}$ bo‘lsa, u holda $i_k^{'}(j_k^{'},...,j_{n-2}^{'})$ ga kirmaydi, lekin u $(j_k^{''},...,j_{n-2}^{''})$ ga kiradi. Shuning uchun har xil daraxtlarga har xil J ko‘rinishdagi majmualar mos keladi.

Shunday qilib, quyidagi teorema isbot qilindi.

1.2-teorema (Keli). *Uchlar soni tartiblangan n ta bo‘lgan daraxtlar soni n^{n-2} ga teng.*
(n ta elementlardan $n-2$ tadan tuzilgan barcha takroriy o‘rinlashtirishlar soni).

Albatta bular ichida ko‘plari o‘zaro izomorfdir.

Masalan, $n=3$ bo‘lganda, uchala daraxtlar ham o‘zaro izomorfdir



,

1.3-shakl.

2. Eyler graflari

G grafning barcha uchlarini o‘z ichida saqlovchi qism graflarini qaraymiz. G ning barcha qirralari $u_1, u_2, ..., u_m$ kabi tartiblangan bo‘lsin. G grafning har qanday $\mathrm{H} \subseteq G$ qismiga 0 va 1 lardan iborat $(a_1, a_2, ..., a_m)$ m o‘lchovli vektorni mos qo‘yamiz:

$$a_i = \begin{cases} 1, \text{ агар } u_i \in H, \\ 0, \text{ агар } u_i \notin H. \end{cases}$$

(N ning xarakteristik vektori). Bu moslik o‘zaro bir qiymatlidir, shu bilan birga qism graflarning 2 modul bo‘yicha yig‘indisiga ularning xarakteristik vektorlarining yig‘indisi mos keladi. Barcha qism graflar to‘plami yig‘indi amaliga nisbatan abel gruppasini tashkil etadi. Bu gruppa $\{0,1\}$ koeffiitsentlar maydoni ustida chiziqli fazoni tashkil etadi (istalgan N qism grafning 1 ga ko‘paytmasi N ni beradi, 0 ga ko‘paytmasi esa bo‘sh grafdir).

Ko‘rinib turibdiki G graf qismlarining fazosi ularning xarakteristik vektorlarining fazosiga izomorf va m o‘lchovli.

Agar grafning barcha uchlarining darajalari (ya’ni ularga insident bo‘lgan qirralar soni) juft bo‘lsa, graf ham juft deyiladi.

Juft grafda istalgan sodda zanjirni (sikldan farqli) unga kirmagan qirra bilan davom ettirish mumkin. Haqiqatan ham, zanjirda oxirgi uchning darajasi 1 ga teng, lekin graf juft bo‘lganligi sababli bu uchga insident bo‘lgan kamida bitta qirra mavjud. Agar graf chekli bo‘lsa, zanjirni ketma-ket davom ettirib, avval bosib o‘tgan uchlarning biriga kelamiz, ya’ni sodda siklni hosil qilamiz. Bu siklning barcha qirralarini grafdan olib tashlaymiz. Uning qolgan qismi yana juft grafdir, chunki uchlarning darajalari 2 ga kamayadi (agar undan zanjir o‘tsa) yoki o‘zgarmaydi (agar zanjir o‘tmasa).

Bu grafda yana siklni ajratamiz va hokazo. Yuqoridagi protsessni yana davom etamiz, toki unda birorta ham sikl qolmasin (ya’ni bo‘sh graf hosil bo‘lguncha). Shunday qilib, chekli juft graf o‘zaro qirralar bo‘yicha kesishmaydigan sodda sikllar yig‘indisiga yoyiladi. Bundan uning barcha qirralari siklik ekanligi kelib chiqadi.

Agar chekli juft graf bog‘liqli bo‘lsa, u holda osongina ko‘rsatish (sodda sikllar soni bo‘yicha induksiyani qo‘llab) mumkinki unda barcha qirralarini o‘z ichiga olgan sodda sikl mavjud. Bunday sikl **Eyler sikli**, grafning o‘zi esa **Eyler grafi** deyiladi.

Yuqorida aytilganlardan quyidagi teorema kelib chiqadi.

2.1-teorema. *Chekli bog‘liqli graf Eyler grafi bo‘lishi uchun u juft bo‘lishi zarur va yetarli.*

Istalgan chekli juft grafning har bir bog‘liqli komponentasi Eyler grafidir.

Ixtiyoriy grafning har qanday ikkita N_1 va N_2 juft qism graflarining yig‘indisi yana juft qism grafdir. Haqiqatan ham, α uchning darajasi $s(\alpha)$ N_1+N_2 qism grafda $s_1+s_2-2s_{12}$ ga teng. Bu yerda s_1 va s_2 α uchning mos ravishda N_1 va N_2 lardagi darajalari, s_{12} esa α ning ularning $N_1 \cap N_2$

kesishmasidagi darajasi. Shunday qilib, juft qism graflar to‘plami barcha qism graflar fazosining qism fazosidir. Bu qism fazoning o‘lchovi ν ni aniqlaymiz.

G bog‘liqli, m qirrali, n uchli graf D uning xtiyoriy asosi bo‘lsin. Vatarlar soni $m-n+1$ ga teng. Har bir $\alpha\beta$ vatar yagona sodda $[\alpha,\beta]\subseteq D$ zanjir bilan sodda siklni hosil qiladi. Barcha sikllarning vektorlari bog‘liqmas Σ sistemani hosil qiladi. Chunki har bir sikl sistemaning boshqa sikllariga tegishli bo‘lmagan qirraga (o‘zining vatariga) ega. Demak $\nu \geq m-n+1$.

Ikkinchi tomondan har qanday juft qism graf, xususiy holda istalgan sodda sikl Σ sistemaning sikllari orqali ifodalanadi. Haqiqatan ham juft N qism grafga vatarlari unga tegishli Σ sistemaning sikllarini qo‘shamiz. Hosil bo‘lgan yig‘indi birorta ham vatarga ega emas. Demak, bu yig‘indi D daraxtning qism grafi, ya’ni u bo‘sh grafdir. Aks holda sodda sikllarga ega juft qism graf (N va sikllarning yig‘indisi) daraxtning qism grafi bo‘lar edi. Bundan $\nu \leq m-n+1$ kelib chiqadi va yuqoridagi tengsizlikni inobatga olgan holda $\nu = m-n+1$.

Bog‘liqli bo‘lmagan k komponentali grafning juft qism graflari fazosining bazisi uning barcha bog‘liqli komponentalari bazislarining yig‘indisidan iborat. Qirralar va uchlar soni ham komponentalar bo‘yicha qo‘shiladi. Agar i komponenta m_i qirralarga va n_i uchlarga ega bo‘lsa, u holda

$$\nu = m-n+k, \quad m=\sum_{i=1}^{k} m_i, \quad n=\sum_{i=1}^{k} n_i .$$

Demak, juft qism graflar qism fazosining o‘lchovi ν grafning siklomatik soni $\lambda(G)$ ga teng.

Istalgan graf uchun $\nu \geq 0$ bo‘lganligi sababli $k \geq n-m$.

Siklomatik soni nolga teng bo‘lgan bog‘liqli graflar – daraxtlardir.

3. Xromatik son va xromatik sinf

Sirtmoqsiz G grafning har bir uchiga (qirrasiga) berilgan ranglardan bittasini mos qo‘yamiz. Agar qo‘shni uchlarga (qo‘shni qirralarga) turli xil ranglar mos qo‘yilgan bo‘lsa, u holda G graf to‘g‘ri bo‘yalgan deyiladi.

G grafning uchlarini (qirralarini) to‘g‘ri bo‘yash uchun kerak bo‘lgan eng kam miqdordagi turli xil ranglar soni $\chi(G)$mos ravishda $\chi^{©}(G)$ uning xromatik soni (xromatik sinfi) deyiladi.

Har qanday oddiy G graf uchun $\chi(G) \le n \quad (\chi(En) = 1).$ Tenglik faqat *Fn* uchun bajariladi.

Agar grafda kamida bitta qirra bo‘lsa, $\chi(G) \ge 2.$ Demak, $2 \le \chi(G) \le n(G)$ tengsizlik o‘rinli.

3.1-ta’rif. *Agar* G *graf uchun* $\chi(G) = 2$ *bo‘lsa, u holda* G *bixromatik deyiladi.*

3.1-teorema. *Kamida bitta qirraga ega bo‘lgan graf bixromatik bo‘lishi uchun unda uzunliklari toq sodda sikllarning bo‘lmasligi zarur va yetarli.*

Agar G graf to‘liq χ uchli F_{χ} qismlarga ega bo‘lsa, uning xromatik soni $\chi(G) \ge \chi.$ Lekin teskarisi to‘g‘ri emas.

Shunday graflar mavjudki, ularda hattoki F_3 (uchburchak) bo‘lmasada istalgancha katta xromatik songa ega.

Xromatik son va graf uchlarining darajalari (uchga insident bo‘lgan qirralar soni) orasidagi bog‘lanishni o‘rganamiz. G graf uchlarining maksimal darajasi $S(G)$ bo‘lsin. Γ_s bilan $S(G) \le S$ bo‘lgan oddiy graflarning sinfini belgilaymiz.

Har qanday $G \in \Gamma_s$ graf uchun $\chi(G) \le S + 1$ ekanligini uchlar soni bo‘yicha induksiya usuli bilan isbotlash mumkin. Yagona F_s graf uchun $\chi(F_s) = S + 1$.

3.2-teorema. *Kamida bitta qirraga ega bo‘lgan graf bixromatik bo‘lishi uchun unda uzunliklari toq sonlarga teng sodda sikllarning bo‘lmasligi zarur va yetarlidir.*

Zaruriyligi. Grafni to‘g‘ri bo‘yalganda sikl uchlarining ranglari almashib keladi, demak uzunligi toq bo‘lgan sodda siklni to‘g‘ri bo‘yash uchun ikki rang yetarli emas. Bunday siklni o‘zida saqlagan graf ham bixromatik bo‘la olmaydi.

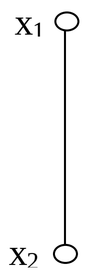
Yetarliligi. Avvalo shuni ta’kidlaymizki, har qanday daraxt bixromatik grafdir. Haqiqatan ham, daraxtning juft pog‘onalaridagi barcha uchlarini bitta rangga bo‘yaymiz, toq pog‘onalardagi uchlarni esa ikkinchi rangga bo‘yaymiz. Natijada u to‘g‘ri bo‘yalgan bo‘ladi, chunki daraxtning qirralari faqat qo‘shni pog‘onalardagi uchlarni tutashtiradi.

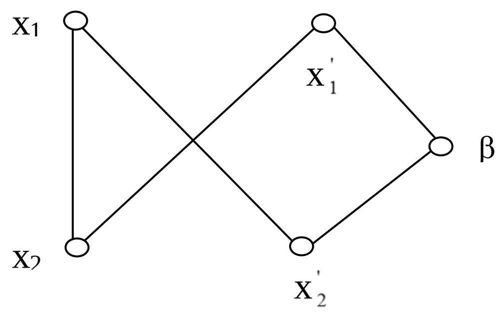
Daraxtda i va j pog‘onalar uchlarini tutashtiruvchi sodda zanjirning uzunligining juft-toqligi $i-j$ sonning juft toqligi bilan bir xil. Xususiy holda, bir xil juftlikdagi pog‘onalarning uchlari uzunligi juft sodda zanjir bilan bog‘langandir.

Uzunligi toq songa teng sodda zanjirga ega bo‘lmagan G grafda istalgan asosni tanlab olamiz. Bu asosga nisbatan barcha vatarlar turli xil juftliklarga ega bo‘lgan pog‘onalarning uchlarini tutashtiradi, aks holda unda uzunligi toq sodda zanjirlar bo‘lar edi. Demak, asosning ikki rang bilan to‘g‘ri bo‘yalgani butun grafning ham to‘g‘ri bo‘yalganidir.

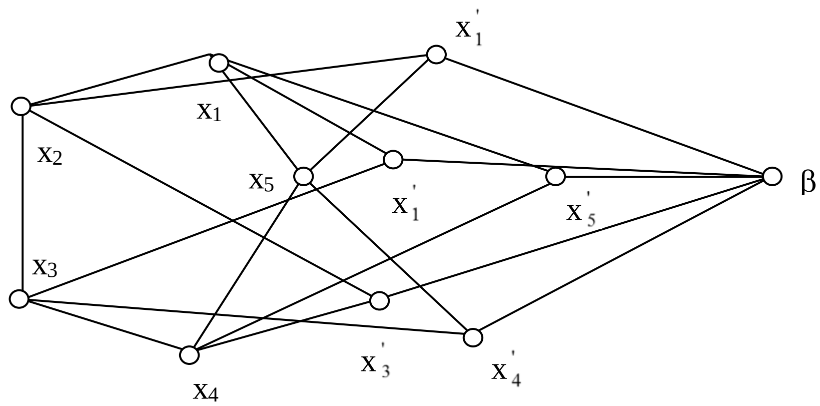
Agar G grafda χ uchli to‘liq F_χ qism graf mavjud bo‘lsa, u holda $\chi(G) \geq \chi$. Teskarisi esa to‘g‘ri emas, shunday graflar mavjudki, ularda hatto uch uchli to‘liq qism graflari (uchburchaklar) yo‘q, lekin xromatik soni istalgancha katta.

Bunda G_χ graf induktiv ravishda yasaladi. G_2 bitta qirradan iborat.

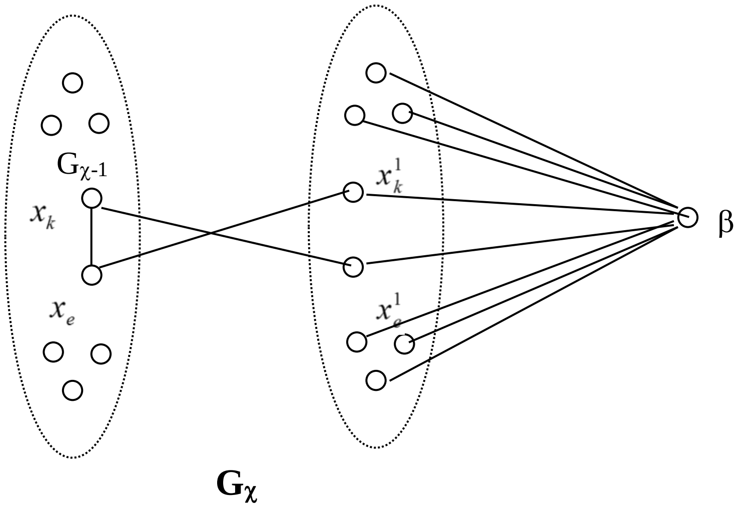




G2 **G3**



G4



3.1-shakl

Faraz qilaylik $X=\{x_1,x_2,...,x_n\}$ uchlar to‘plamida $G_{\chi\text{-}1}$ graf qurilgan bo‘lsin. $G_{\chi\text{-}1}$ grafga $X'=\{x_1',x_2',...,x_n'\}$ uchlar to‘plamini va β uchni qo‘shamiz. Har bir x_i' uchni β hamda $G_{\chi\text{-}1}$ grafda x_i bilan qo‘shni bo‘lgan uchlari bilan tutashtiramiz.

Hosil bo‘lgan G_χ grafda uchburchaklar yo‘qligini ko‘rsatamiz. Induksiya faraziga $G_{\chi\text{-}1}$ grafda uchburchaklar yo‘q. Agar uchburchak mavjud bo‘lsa, u holda X' to‘plamdagi uchlar bir-biri bilan tutashtirilmaganligi sababli, unga bu uchlarning ko‘pi bilan bittasi tegishli; β ham birorta uchburchakga tegishli emas, chunki u faqat X' dagi uchlar bilan tutashtirilgan.

Agar $[x_i,x_j,x_k']$ uchburchak bo‘lsa, u holda $[x_i,x_j,x_k]$ uchburchak ham mavjud bo‘lar edi (chunki x_k' va x_k uchlar X da bir xil qo‘shni uchlarga ega). Bu esa induksiya farazimizga zid.

Endi $\chi(G_\chi)=\chi$ ekanligini ko‘rsatamiz.

Ravshanki $\chi(G_2)=2$. Faraz qilaylik $\chi(G_{\chi-1})=\chi-1$. U holda G_χ grafni χ ranglar bilan to‘g‘ri bo‘yash mumkin: masalan, $G_{\chi\text{-}1}$ grafni χ-1 ranglar bilan to‘g‘ri bo‘yaganimizdan keyin har bir x_i' uchni x_i ning rangiga bo‘yaymiz va β uchga qolgan χ rangni beramiz.

G_χ grafni χ-1 ranglar bilan to‘g‘ri bo‘yash mumkin emasligini ko‘rsatamiz. Teskarisini faraz qilamiz, ya’ni G_χ graf χ-1 ranglar bilan to‘g‘ri bo‘yaladi va β uchga l rang to‘g‘ri keladi. Bunda X' to‘plamning uchlari l dan farqli ranglarga bo‘yalgan. $A \subseteq X$ l rangga bo‘yalgan uchlar qism to‘plami bo‘lsin. Har bir $x_i \in A$ uchni $x_i^{'}$ uchning rangiga qaytadan bo‘yaymiz. Bu holda $G_{\chi-1} \subseteq G_\chi$ grafning barcha uchlari χ-2 rang bilan to‘g‘ri bo‘yalgan bo‘ladi. Haqiqatan ham $\tilde{x}_i \tilde{x}_j$ $G_{\chi-1}$ grafning istalgan qirrasi bo‘lsin. G_χ grafda x_i va x_j turli ranglarga bo‘yalganligi sababli ularning ikkalasi birdaniga A ga tegishli emas. Agar $x_i \notin A,\ x_j \notin A$ bo‘lsa grafni qayta bo‘yaganimizda ularning ranglari o‘zgarmaydi va turli xil bo‘lganligicha qoladi. Shunday qilib $G_{\chi-1}$ graf induksiya farazimizga zid ravishda χ-2 ranglar bilan to‘g‘ri bo‘yaladi.

Xromatik son va graf uchlarining darajalari orasidagi bog‘lanishni aniqlaymiz. $s(G)$ bilan G graf uchlari darajalarining eng kattasini belgilaymiz, G_s esa parallel qirralarga ega bo‘lmagan va $s(G) \le s$ graflar sinfi.

Uchlar soni bo‘yicha induksiyani qo‘llab osongina ko‘rsatish mumkinki, har qanday $G \le \Gamma_s$ uchun $\chi(G) \le s+1$. Haqiqatan ham, agar grafda uchlar soni $s+1$ dan oshmasa $\chi(G) \le s+1$. Faraz qilaylik bu tengsizlik G dan kam uchlarga ega G_s ning barcha graflari uchun o‘rinli bo‘lsin.

G grafdan istalgan x uchni olib tashlaymiz (unga insident bo‘lgan barcha qirralar bilan birgalikda). Induktiv farazimizga asosan $G \setminus \{x\}$ grafni $s+1$ ranglar bilan to‘g‘ri bo‘yaymiz. G grafda x uchga ko‘pi bilan s ta qo‘shni uchlar mavjud, shuning uchsun kamida bitta rang topiladiki unga x ga qo‘shni bo‘lgan uchlarning hech biri bo‘yalmagan. Shu rangga x uchni bo‘yaymiz va graf G $s+1$ ranglar bilan to‘g‘ri bo‘yalgan bo‘ladi.

Quyidagi teoremadan kelib chiqadiki G_s sinf graflari ichida xromatik soni $S+1$ teng bo‘lgan yagona to‘liq $s+1$ uchli F_{s+1} grafdir.

Teorema (Bruks). *Agar* $s \ge 3,\ G \in \Gamma_s$ *va* $G \ne F_{s+1}$ *bo‘lsa, u holda* $\chi(G) \le s$.

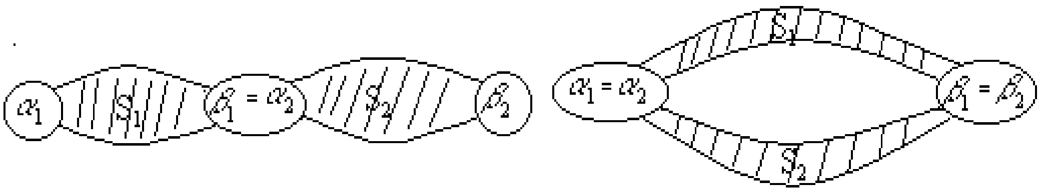
4. To‘rlar va to‘rdagi oqimlar

Ba’zi bir uchlari tanlab olingan graf to‘r deb ataladi. Tanlab olingan uchlar to‘rning qutblari deyiladi. Masalan, daraxtni bir qutbli to‘r deb qarash mumkin (uning ildizi qutbdir).

To‘rning qutblaridan farqli uchlari uning ichki uchlari deyiladi. Kamida bitta qutbga insident bo‘lgan qirra qutbli, boshqalari esa ichki qirralar deyiladi.

Ikkita sinflarga ajratilgan: k ta kirish va l ta chiqish qutblarga bo‘lingan to‘r (k,l)-qutblilik deyiladi.(1,1) - qutblilik to‘r ikki qutbli to‘r deyiladi.

Umumiy elementlarga ega bo‘lmagan S_1 va S_2 to‘rlarning qutblari mos ravishda α_1,β_1 va α_2,β_2 bo‘lsin. S_1 va S_2 to‘rlarning ketma-ket ulanishidan hosil qilingan α_1,β_2 qutblarga ega bo‘lgan to‘rni $S_1 S_2$ kabi belgilaymiz. S_1 va S_2 to‘rlarning parallel ulanishidan hosil bo‘lgan α_1, β_1 qutblarga ega to‘rni esa $S_1 \vee S_2$ kabi belgilaymiz (4.1-shakl).



4.1-shakl.

Yuqoridagiga o‘xshash $S_1 \cdot S_2 \cdot \dots \cdot S_n$ va $S_1 \vee S_2 \vee \dots \vee S_n$ to‘rlarni aniqlash mumkin.

Bir qirrali to‘rlardan parallel va ketma-ket ulash natijasida hosil bo‘lgan to‘r parallel-ketma-ket deyiladi. Bunday to‘rlarni π-to‘rlar deb ataymiz. π-to‘rlar induktiv ravishda aniqlanadi:

1. Bir qirrali to‘r π-to‘rdir;
2. Agar S_1 va S_2 π-to‘rlar bo‘lsa, u holda, $S_1 S_2$ va $S_1 \vee S_2$ lar ham π-to‘rlardir.

S-qisman orientirlashtirilgan to‘rning har bir u qirrasiga o‘tkazuvchanlik qobiliyati deb ataluvchi manfiy bo‘lmagan $C(u)$ son mos qo‘yilgan bo‘lsin.

4.1-ta’rif. *Quyidagi shartlarni qanoatlantiradigan* (f,ω) *juftlik* S *to‘rdagi oqim deyiladi:*

1. ω*-to‘rning barcha zvenolarini biror orientirlashti-rilishi;*

2. $f(u)$*-qirralar to‘plamida aniqlangan qiymat-lari manfiy emas va* u *ning o‘tkazuvchanlik qobiliyatidan katta bo‘lmagan funksiya. Shu bilan birga barcha ichki uchlarda Kirxgof qonuni bajariladi, ya’ni* α *uchga kiruvchi barcha qirralar bo‘yicha oqimlarning yig‘indisi, undan chiquvchi qirralar bo‘yicha oqimlarning yig‘indisiga teng.*

Boshqacha qilib aytganda:

1) $0 \le f(u) \le C(u)$ - to‘rning barcha qirralari uchun;

2) $R(\alpha)=0$ - barcha ichki uchlar uchun, bu erda

$$R(\alpha)=\sum f(u)-\sum f(u),\ \alpha \in \Gamma(\alpha) \quad \alpha \in \Gamma^{э}(\alpha),$$

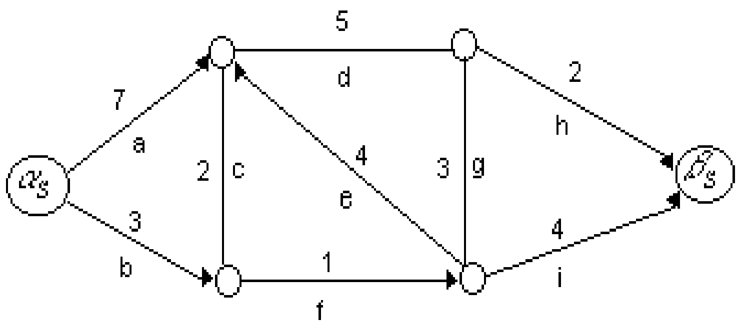
$\Gamma(\alpha)$ $(\Gamma'(\alpha))$ ω- orientirlashtirilishda α uchdan chiquvchi (mos ravishda α ga kiruvchi) qirralar to‘plami.

Ravshanki, to‘rning barcha uchlari bo‘yicha (qutblarni ham inobatga olgan taqdirda) $R(\alpha)$ larning yig‘indisi nolga teng (chunki har bir qirra biror uchdan chiqib boshqasiga kiradi). Shuning uchun $R(\alpha_s)=-R(\beta_s)$.

$R=R(\alpha_s)$ ning qiymati to‘rdagi oqimning miqdori deyiladi.

Qirralarning berilgan o‘tkazuvchanlik qobiliyatlarida S to‘rdan o‘tuvchi maksimal $R_{\max}$ oqimning miqdorini aniqlash masalasini ko‘ramiz. Bu masalaning yechimi to‘rdagi kesimlar bilan bog‘liqdir.

4.2-ta’rif. *Agar to‘rning ba’zi bir qirralarini olib tashlaganimizda, u bog‘likli bo‘lmay qutblari turli komponentlariga tushib qolsa, bu qirralar to‘plami to‘rning kesimi deyiladi.*



4.2-shakl.

Yuqoridagi rasmda berilgan to'r uchun $\{d,e,f\}$, $\{b,c,e,g,h\}$, $\{d,g,h,i\}$ *qirralar to'plamlari kesimlardir.*

Agar kesimdan istalgan qirrasini olib tashlaganda kesim bo‘lmay qolsa, u sodda deyiladi. Masalan, $\{d,e,f\}, \{b,c,e,g,h\}$ kesimlar sodda, $\{d,g,h,i\}$ esa sodda emas.

Bog‘likli to‘rning sodda kesimi uni ikkita: α_s qutbni o‘zida saqlovchi chap va β_s qutbni o‘zida saqlovchi o‘ng qismlarga ajratadi. Kesimning har bir qirrasi turli qismlarga tegishli bo‘lgan uchlarni tutashtiradi. Agar kesimning qirrasi zveno bo‘lsa, yoki chapdan o‘ngga qarab yo‘naltirilgan bo‘lsa, u to‘g‘ri, aks holda teskari deyiladi.

4.3-ta’rif. *Sodda* ω *kesimning o‘tkazuvchanlik qobiliyati* $C(\omega)$ *deb uning barcha to‘g‘ri qirralarining o‘tkazuvchanlik qobiliyatlarining yig‘indisiga aytiladi.*

Masalan, $\{d,e,f\}$ kesimning o‘tkazuvchanlik qobiliyati 5+1=6 teng, $\{b,c,e,g,h\}$- kesimniki esa 3+2+3+2=10. Agar to‘r bog‘liqli bo‘lmay qutblari turli komponentlariga tegishli bo‘lsa, u holda yagona sodda kesim bo‘sh to‘plam, uning o‘tkazuvchanlik qobiliyati esa nolga teng.

4.1-teorema (Ford-Falkerson). S *to‘rdan o‘tuvchi oqimning maksimal qiymati* $R_{\max}$ *uning sodda kesimlarining minimal o‘tkazuvchanlik qobiliyati* $C_{\min}$ *ga teng.*