17-MAVZU	KOMBINATORIKA ASOSLARI. O‘RIN ALMASHTIRISHLAR VA KOMBINATSIYALAR.

1. Kombinatorika va uning asosiy qoidalari. Bir qator amaliy masalalarni yechish uchun berilgan to‘plamdan uning qandaydir xossaga ega bo‘lgan elementlarini tanlab olish va ularni ma’lum bir tartibda joylashtirishga to‘g‘ri keladi.

1.1–ta’rif: Biror chekli to‘plam elementlari ichidan ma’lum bir xossaga ega bo‘lgan elementlardan iborat qism to‘plamlarni tanlab olish yoki to‘plam elementlarini ma’lum bir tartibda joylashtirish bilan bog‘liq masalalar ***kombinatorik masalalar*** deyiladi.

Masalan, o‘nta ishchidan to‘rt kishidan iborat brigadalarni necha xil usulda tuzish mumkinligi (ishlab chiqarishni tashkil etish), molekulada atomlar qanday usullarda birlashishi mumkinligi (ximiya), oqsil moddalarda aminokislotalarni qanday tartiblarda joylashtirish mumkinligi (biologiya), turli bloklardan iborat mexanizmda bu bloklarni turli tartiblarda birlashtirish (konstruktorlik), bir necha dala uchastkalarida turli xil ekinlarini almashtirib ekish (agronomiya), davlat budjetini ishlab chiqarish tarmoqlari bo‘yicha taqsimoti (iqtisodiyot) kabilar kombinatorik masalalarga keladi va kombinatorikani inson faoliyatining turli yo‘nalishlarida qo‘llanilishini ko‘rsatadi.

1.2–ta’rif: Kombinatorik masalalar bilan shug‘ullanadigan matematik fan ***kombinatorika*** deyiladi.

Kombinatorikani mustaqil fan sifatida birinchi bo‘lib olmon matematigi G.Leybnits o‘rgangan va 1666 yilda «Kombinatorika san’ati haqida» asarini chop etgan.

Kombinatorikada qo‘shish va ko‘paytirish qoidasi dab ataluvchi ikkita asosiy qoida mavjud.

Qo‘shish qoidasi : Agar biror α tanlovni $m(\alpha)$ usulda, β tanlovni esa $m(\beta)$ usulda amalga oshirish mumkin bo‘lsa va bu yerda α tanlovni ixtiyoriy tanlash usuli β tanlovni ixtiyoriy tanlash usulidan farq qilsa, u holda «α yoki β» tanlovni amalga oshirish usullari soni

$m(\alpha$ ёки $\beta) = m(\alpha) + m(\beta)$

formula bilan topiladi.

1.1-masala: Korxonada 10 erkak va 8 ayol xodim ishlaydi. Shu korxonadan bitta xodimni necha xil usulda tanlab olish mumkin?

Yechish: α - erkak xodimni tanlash, β - ayol xodimni tanlash bo‘lsin. Unda, shartga ko‘ra, $m(\alpha)=10$, $m(\beta)=8$ bo‘lgani uchun bitta xodimni

$m(\alpha$ yoki $\beta) = m(\alpha) + m(\beta) = 10+8 = 18$

usulda tanlash mumkin.

Ko‘paytirish qoidasi: Agarda biror α tanlovni $m(\alpha)$ usulda, β tanlovni $m(\beta)$ usulda amalga oshirish mumkin bo‘lsa, u holda «α va β» tanlovni (yoki (α,β) juftlikni) amalga oshirish usullari soni

$m(\alpha$ va $\beta) = m(\alpha) \cdot m(\beta)$

formula bilan topiladi.

Masalan, qurilishda 10 suvoqchi va 8 buyoqchi ishlasa, ulardan bir suvoqchi va bir buyoqchidan iborat juftlikni $m(\alpha$ va $\beta)=10\cdot 8=80$ usulda tanlash mumkin.

1.2-masala: 10 talabadan iborat guruhga ikkita yo‘llanma berildi. Bu yo‘llanmalarni necha xil usulda tarqatish mumkin?

Yechish: α I yo‘llanmani, β esa II yo‘llanmani tarqatishni ifodalasin. Unda $m(\alpha)=10$ va $m(\beta)=9$, chunki bitta talabaga I yo‘llanma berilganda II yo‘llanmaga 9 talaba da’vogar bo‘ladi. Demak, ikkita yo‘llanmani tarqatishlar soni $m(\alpha$ va $\beta) = =10\cdot 9=90$ bo‘ladi.

Umumiy holda $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ tanlovlarni mos ravishda $m(\alpha_1)$, $m(\alpha_2), \ldots, m(\alpha_n)$ usullarda amalga oshirish mumkin bo‘lsa,

$$m(\alpha_1 \text{ yoki } \alpha_2 \text{ yoki} \ldots \text{yoki } \alpha_n) = m(\alpha_1) + m(\alpha_2) + \ldots + m(\alpha_n), \quad (1.1)$$

$$m(\alpha_1 \text{ va } \alpha_2 \text{ va} \ldots \text{ va } \alpha_n) = m(\alpha_1) \cdot m(\alpha_2) \cdot \ldots \cdot m(\alpha_n) \quad (1.2)$$

formulalar o‘rinli bo‘ladi.

2. O‘rin almashtirishlar. Kombinatorik masalalarni yechishda keng qo‘llaniladigan tushunchalar bilan tanishishni boshlaymiz.

2.1–ta’rif: Chekli va n ta elementdan iborat to‘plamning barcha elementlarini faqat joylashish tartibini o‘zgartirib qism to‘plam hosil qilish ***n elementli o‘rin almashtirish*** deb ataladi.

Berilgan n ta elementdan tashkil topadigan o‘rin almashtirishlar soni P_n kabi belgilanadi.

2.1-teorema: n ta elementdan o‘rin almashtirishlar soni

$$P_n = n! \qquad (2.1)$$

formula bilan hisoblanadi.

Bu yerda $n!$ - “en faktorial” deb o‘qiladi va $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot\ldots\cdot n$ kabi aniqlanadi. Bunda $0! = 1$ deb olinadi. Masalan, $3!=1\cdot2\cdot3=6$, $4!= 1\cdot2\cdot3\cdot4=24$. Faktoriallarni hisoblashda $(n+1)!=n!\cdot(n+1)$ tenglikdan foydalanish qulay. Masalan, $5!=4!\cdot5=120$ bo‘ladi.

<u>Isbot:</u> Bu formulani isbotlash uchun quyidagi tanlovlarni kiritamiz:

α_k={o‘rin almashtirishning k-elementini tanlash}, $k=1,2,3,\ldots\ldots,n$.

O‘rin almashtirishning 1-elementi sifatida to‘plamdagi n ta elementdan ixtiyoriy bittasini olishimiz mumkin va shu sababli $m(\alpha_1)=n$ bo‘ladi. 2-element sifatida to‘plamdagi qolgan $n–1$ ta element orasidan ixtiyoriy bittasini tanlab olishimiz mumkin bo‘lgani uchun $m(\alpha_2)=n–1$. Xuddi shunday tarzda birin-ketin $m(\alpha_3)=n–2$, $m(\alpha_4)=n–3,\ldots$, $m(\alpha_{n-1})=n–(n–2)=2$, $m(\alpha_n)=n–(n–1)=1$ ekanligini topamiz. Unda, ko‘paytirish qoidasini ifodalovchi (1.2) formulaga asosan,

$P_n= m(\alpha_1$ va α_2 va…. va $\alpha_n) = m(\alpha_1)\cdot m(\alpha_2)\cdot\ldots\cdot m(\alpha_n)=n\cdot(n–1)\cdot\ldots\cdot2\cdot1=n!$.

Masalan, $n = 3$ elementli $\{a,b,c\}$ to‘plamdan hosil bo‘ladigan o‘rin almashtirishlar $\{a,b,c\}$, $\{b,a,c\}$, $\{a,c,b\}$ $\{b,c,a\}$, $\{c,b,a\}$, $\{c,a,b\}$ bo‘lib, ularning soni $P_3=6=3!$. ■

***2.1-masala*:** Nazoratchi korxonada ishlab chiqarilgan 5 ta mahsulot sifatini ketma-ket tekshirishi kerak. Nazoratchi buni nechta usulda amalga oshirishi mumkin?

Yechish: Bu 5 ta mahsulot sifatini ketma-ket tekshirishlar 5 tadan o‘rin almashtirishlardan iboratdir va shu sababli ularning soni P_5= 5!=120 bo‘ladi.

3. Kombinatsiyalar. Kombinatorik tushunchalardan yana biri kombinatsiya bo‘lib hisoblanadi.

3.1-ta’rif: Chekli n ta elementli to‘plamning k ($k \leq n$) ta elementli va kamida bitta elementi bilan farqlanadigan qism to‘plamini hosil qilish ***n ta elementdan k tadan olingan kombinatsiya*** deyiladi.

Masalan, $\{a, b,c\}$ ko‘rinishdagi n=3 elementli to‘plamdan ikkita elementli kombinatsiyalar $\{a;b\}$, $\{a;c\}$, $\{b;c\}$ bo‘lib, ularning soni 3 tadir. Bu yerda $\{b;a\}=\{a;b\}$, $\{c;a\}=\{a;c\}$, $\{b;c\}=\{c;b\}$ deb hisoblanadi.

Umumiy holda n ta elementdan k tadan olingan kombinatsiyalar soni C_n^k kabi belgilanadi va uning qiymati quyidagi formula orqali hisoblanishini isbotlash mumkin:

$$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!} \qquad (3.1)$$

Misol uchun beshta odamdan uch kishidan iborat komissiyani

$$C_5^3 = \frac{5!}{3!\cdot 2!} = \frac{120}{6 \cdot 2} = 10$$

usulda tuzish mumkin. ■

***3.1-masala*:** Xodimga haftaning ixtiyoriy ikki kunini dam olish uchun tanlash imkoni berildi. Xodim dam olish kunlarini necha usulda tanlashi mumkin?

Yechish: Hafta kunlarini n=7 elementli $\{1,2,3, \ldots ,7 \}$ to‘plam singari qarasak, dam olish kunlari $\{1,2\}$, $\{1,3\}$, $\{2,4\}$,… kabi juftliklardan iborat bo‘ladi. Bunda $\{i,j\}$ va $\{j,i\}$ bitta variantni ifodalaydi. Demak, dam olish kunlarini tanlash n=7 elementdan k=2 tadan kombinatsiyalarni tashkil etadi va shu sababli ularning soni

$$C_7^2 = \frac{7!}{2!\cdot(7-2)!} = \frac{7!}{2!\cdot 5!} = \frac{6 \cdot 7}{2} = 21`$$

bo‘ladi. ■

4. Nyuton binomi va binomial koeffitsiyentlar. Yuqorida (3.1) formula orqali kiritilgan C_n^k sonlari yordamida quyidagi tenglikni yozish mumkin:

$$(a+b)^n = a^n + C_n^1 a^{n-1}b + C_n^2 a^{n-2}b^2 + \cdots + C_n^{n-1} ab^{n-1} + b^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k a^{n-k} b^k \quad (4.1)$$

Bu tenglikda n ixtiyoriy natural son bo‘lib, u maktabda o‘rganiladigan $(a+b)^2$ va $(a+b)^3$ qisqa ko‘paytirish formulalarini umumlashtirmasini ifodalaydi va matematikada ***Nyuton binomi*** **(**binom ikkihad degan ma’noni bildiradi**),** unga kiruvchi C_n^k sonlari esa ***binomial koeffitsiyentlar*** deb ataladi. Shuni ta’kidlab o‘tish kerakki, keyinchalik (4.1) formula Nyuton tomonidan ixtiyoriy ratsional daraja uchun umumlashtirildi.

1. Agar (4.1) Nyuton binomida $a = b = 1$ yoki a=1, b=–1deb olsak, unda

$$\sum_{k=0}^{n} C_n^k = 2^n, \qquad \sum_{k=0}^{n} (-1)^k C_n^k = 0$$

tengliklar o‘rinlini ekanligiga ishonch hosil qilamiz.

2. Agar (3.1) formulada k o‘rniga n–k qo‘yilsa yoki k=0 yoki k=n deb olinsa, unda

$$C_n^k = C_n^{n-k}, \qquad C_n^0 = C_n^n = 1$$

tengliklar hosil bo‘ladi. Ular kombinatsiyalarni hisoblashni osonlashtiradi.

---

5. O‘rinlashtirishlar. Bir qator kombinatorik masalalar o‘rinlashtirish yordamida yechiladi.

5.1–ta’rif: Chekli va n ta elementdan iborat to‘plamdan bir-biridan yoki elementlari, yoki elementlarining joylashish tartibi bilan farq qiladigan va k ta elementdan iborat qism to‘plamlarni hosil qilish ***n ta elementdan k tadan o‘rinlashtirish*** deb ataladi.

Berilgan n ta elementdan k tadan o‘rinlashtirish soni A_n^k kabi belgilanadi va uning qiymati quyidagi formula bilan hisoblanishini isbotlash mumkin:

$$A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!} \qquad (5.1)$$

formula bilan hisoblanadi.

Masalan, $\{a,b,c\}$ to‘plamdan n=3 ta elementdan k=2 tadan o‘rinlashtirishlar $\{a;b\}$,$\{a;c\}$,$\{b;c\}$,$\{b;a\}$,$\{c;a\}$,$\{c;b\}$ bo‘lib, ularning soni

$$A_3^2 = \frac{3!}{(3-2)!} = \frac{6}{1} = 6 .\blacksquare$$

5.1-masala: Talaba 4 ta fan bo‘yicha qo‘shimcha tayyorlanish uchun ularning har biriga haftaning bir kunini ajratmoqchi bo‘ldi. Talaba hafta kunlarini fanlarga necha usulda taqsimlashi mumkin?

Yechish: Talabani I-IV fanlar uchun haftaning tanlagan kunlariini k=4 ta elementli $X=\{x_1, x_2, x_3, x_4\}$ to‘plam, hafta kunlarini esa n=7 elementdan iborat $H=\{1,2,3, \dots ,7\}$ to‘plam singari qaraymiz. Bu holda $X\subset H$ bo‘lib, uni hosil etish n=7 ta elementdan k=4 tadan o‘rinlashtirishlarga mos keladi, chunki bunda elementlarning joylashish tartibi ham ahamiyatga ega. Masalan, $\{2,4,6,7\}$ taqsimotda I fanga dushanba (2), II fanga chorshanba (4), III fanga juma (6) va IV fanga shanba(7) kunlari ajratilgan bo‘ladi. Unda $\{4,2,6,7\}$, $\{6,4,2,7\}$ kabilar turlicha taqsimotlarni ifodalaydi. Demak, talaba fanlarga hafta kunlarini

$$A_7^4 = \frac{7!}{(7-4)!} = \frac{7!}{3!} = 4\cdot 5\cdot 6\cdot 7 = 840`$$

usulda taqsimlashi mumkin.

Masalalardan namunalar:

1. Korxonada 10 erkak va 8 ayol xodim ishlaydi. Shu korxonadan bitta xodimni necha xil usulda tanlab olish mumkin?

Yechish: α - erkak xodimni tanlash, β - ayol xodimni tanlash bo‘lsin. U holda, shartga ko‘ra, $m(\alpha) = 10,\ m(\beta) = 8$ bo‘lgani uchun bitta xodimni $m(\alpha\ yoki\ \beta) = m(\alpha) + m(\beta) = 10 + 8 = 18$ usulda tanlash mumkin.

2. 10 ta talabadan iborat guruhga ikkita yo‘llanma ajratildi. Bu yo‘llanmalarni necha xil usul bilan tarqatish mumkin?

Yechish: α birinchi yo‘llanmani, β esa ikkinchi yo‘llanmani tarqatishni ifodalasin. U holda $m(\alpha) = 10$ va $m(\beta) = 9$, chunki bitta talabaga birinchi yo‘llanma berilganda, ikkinchi yo‘llanmaga to‘qqizta talaba davogar bo‘ladi. Demak, ikkinchi yo‘llanmani tarqatishlar soni $m(\alpha\; va\; \beta) = m(\alpha) \cdot m(\beta) = = 10 \cdot 9 = 90$ ga teng bo‘ladi.

3. Qurilishda 10 ta suvoqchi va 8 ta bo‘yoqchi ishlaydi. Ulardan bir suvoqchi va bir bo‘yoqchidan iborat juftlikni necha usulda tanlash mumkin?

Yechish: $m(\alpha) = 10$ va $m(\beta) = 8$ bo‘lgani uchun $m(\alpha\; va\; \beta) = = m(\alpha) \cdot m(\beta) = 10 \cdot 8 = 80$.

4. Nazoratchi korxonada ishlab chiqarilgan 5 ta maxsulot sifatini ketma-ket tekshirishi kerak. Nazoratchi buni nechta usulda amalga oshirishi mumkin?

Yechish: Bu 5 ta maxsulot sifatini ketma-ket tekshirishlar 5 tadan o‘rinlashtirishlardan iborat.

Ya’ni, $P_5 = 5! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 = 120$ bo‘ladi.

5. Ishlab chiqarish korxonasini tekshirish uchun besh kishidan iborat guruh ajratildi. Shu besh kishidan tarkibida uch kishi bo‘lgan guruhni necha xil usulda tuzish mumkin.

Yechish: $C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$ formuladan foydalanamiz. Bizda $n = 5$, $k = 3$ bo‘lgani uchun $C_5^3 = \frac{5!}{3!(5-3)!} = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 2!} = \frac{4 \cdot 5}{1 \cdot 2} = \frac{20}{2} = 10$.

6. Tikuvchilik fabrikasida ishlayotgan xodimga haftaning ixtiyoriy ikki kunini dam olish uchun tanlash imkoni berildi. Xodim dam olish kunlarini necha usulda tanlashi mumkin?

Yechish: Hafta kunlarini $n = 7$ elementli $\{1,2,3,4,5,6,7\}$ to‘plam sifatida qarasak, dam olish kunlari $\{1,2\}$, $\{1,3\}$, $\{1,4\}, \ldots$ kabi juftliklardan iborat bo‘ladi. Bunda $\{i, j\}$ va $\{j, i\}$ bitta variantni ifodalaydi. Demak, dam olish kunlarini tanlash $n = 7$ elementdan $k = 2$ tadan kombinatsiyalarni tashkil etadi va ularning soni $C_7^2 = \frac{7!}{2!(7-2)!} = \frac{7!}{2!5!} = \frac{6 \cdot 7}{1 \cdot 2} = \frac{42}{2} = 21$ bo‘ladi.

7. Talaba 4 ta fan bo‘yicha qo‘shimcha tayyorlanish uchun ularning har biriga haftaning bir kunini ajratmoqchi bo‘ldi. Talaba hafta kunlarini fanlarga necha usulda taqsimlashi mumkin?

Yechish: Talabani I-IV fanlari uchun haftaning tanlagan kunlarini $k = 4$ ta elementli $X = \{x_1, x_2, x_3, x_4\}$ to‘plam, hafta kunlarini esa $n =$

7 elementlidan iborat $H = \{1,2,3,4,5,6,7\}$ to‘plam sifatida qaraymiz. Bu holda $X \subset H$ bo‘lib, uni hosil etish $n = 7$ elementlidan $k = 4$ tadan o‘rinlashtirishlarga mos keladi, chunki bu holda elementlarning joylashishi tartibi ham ahamiyatga ega. Masalan, $\{2,4,6,7\}$ taqsimotda birinchi fanga dushanba (2), ikkinchi fanga chorshanba (4), uchinchi fanga juma (6) va to‘rtinchi fanga shanba (7) kunlari ajratilgan bo‘ladi. Unda $\{4,2,6,7\}$, $\{6,4,2,7\}$ kabilar turlicha taqsimotlarni ifodalaydi. Demak, talaba fanlarga hafta kunlarini

$A_7^4 = \frac{7!}{(7-4)!} = \frac{7!}{3!} = 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 = 840$ usulda tanlashi mumkin.

8. Xorijiy tillar fakulteti ingliz tili yo‘nalishining birinchi kursida 10 ta fan o‘qitiladi va har kuni 4 xil dars o‘tiladi. Kunlik dars necha usul bilan taqsimlab qo‘yilishi mumkin?

Yechish: Darslarning barcha mumkin bo‘lgan kunlik taqsimoti o‘n elementdan to‘rttadan olib tuzish mumkin bo‘lgan barcha o‘rinlashtirishlardan iborat. Uni $A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}$ formuladan foydalanib topamiz. Bizda $n = 10$, $k = 4$ bo‘lgani uchun

$$A_{10}^4 = \frac{10!}{(10-4)!} = \frac{10!}{6!} = \frac{1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5\cdot6\cdot7\cdot8\cdot9\cdot10}{1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5\cdot6} = 7 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 10 = 5040.$$

9. Butun sonlarning har biri uchta har xil qiymatli raqamlar bilan ifoda qilinadigan bo‘lsa, qancha butun son tuzish mumkin?

Yechish: Izlangan son 9 ta qiymatli raqamdan 3 tadan olib tuzilgan o‘rinlashtirishlardan iborat. Ya’ni,

$$A_9^3 = \frac{9!}{(9-3)!} = \frac{9!}{6!} = 7 \cdot 8 \cdot 9 = 504.$$

Buni $A_n^k = n(n-1)(n-2)\cdots[n-(k-1)]$ formuladan ham topish mumkin. Unga asosan $A_9^3 = 9 \cdot 8 \cdot 7 = 504$.

Matematikaning kombinatorik tahlil, kombinatorik matematika, birlashmalar nazariyasi, qisqacha, kombinatorika deb ataluvchi bo‘limida chekli yoki muayyan ma’noda cheklilik shartini qanoatlantiruvchi to‘plamni (bu to‘plamning elementlari qanday bo‘lishining ahamiyati yo‘q: harflar, sonlar, hodisalar, qandaydir predmetlar va boshqalar) qismlarga ajratish, ularni o‘rinlash va o‘zaro joylash ya’ni, kombinatsiyalar, kombinatorik tuzilmalar bilan bog‘liq masalalar o‘rganiladi. Hozirgi davrda kombinatorikaga oid ma’lumotlar inson faoliyatining turli sohalarida qo‘llanilmoqda. Jumladan, matematika, kimyo, fizika, biologiya, lingvistika, axborot texnologiyalari va boshqa sohalar bilan ish ko‘ruvchi mutaxassislar kombinatorikaning xilma-xil masalalariga duch keladilar.

To‘plamlar nazariyasi iboralari bilan aytganda, kombinatorikada kortejlar va to‘plamlar, ularning birlashmalari va kesishmalari hamda kortejlar va qism to‘plamlarni turli usullar bilan tartiblash masalalari qaraladi. To‘plam yoki kortej elementlarining berilgan xossaga ega konfiguratsiyasi bor yoki yo‘qligini tekshirish, bor bo‘lsa, ularni tuzish va sonini topish usullarini o‘rganish hamda bu usullarni biror parametr bo‘yicha takomillashtirish kombinatorikaning asosiy masalalari hisoblanadi.

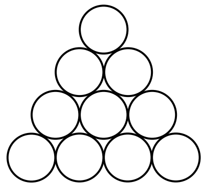
Kombinatorikaning ba’zi elementlari eramizdan oldingi II asrda hindistonliklarga ma’lum edi. Ular hozirgi vaqtda gruppalashlar deb ataluvchi kombinatorik tushunchadan foydalanishgan. Eramizning XII asrida Bxaskara Acharya o‘zining ilmiy tadqiqotlarida gruppalash va o‘rin almashtirishlarni qo‘llagan. Tarixiy ma’lumotlarga ko‘ra, hindistonlik olimlar kombinatorika elementlaridan, jumladan, birlashmalardan foydalanib, she’riy asarlar tarkibiy tuzilishining mukammalligini tahlil qilishga uringanlar. O‘rta Osiyo va G‘arbiy Yevropada yashab ijod qilgan olimlarning kombinatorikaga oid ishlari haqida ushbu bobning 3- paragrafida ma’lumot keltirilgan.

Umuman olganda, kombinatorikaning dastlabki rivoji qimor o‘yinlarini tahlil qilish bilan bog‘liq. Ba’zi atoqli matematiklar, masalan, B. Paskal, Yakob Bernolli, L. Eyler, P. L. Chebishev turli o‘yinlarda (tanga tashlash, soqqa tashlash, qarta o‘yinlari va shu kabilarda) ilmiy jihatdan asoslangan qaror qabul qilishda kombinatorikani qo‘llashgan.

XVII asrda kombinatorika matematikaning alohida bir ilmiy yo‘nalishi sifatida shakllana boshladi. B. Paskal o‘zining “Arifmetik uchburchak haqida traktat” va “Sonli tartiblar haqida traktat” (1665 y.) nomli asarlarida hozirgi vaqtda binomial koeffitsientlar deb ataluvchi sonlar haqidagi ma’lumotlarni keltirgan. P. Ferma esa figurali sonlar bilan birlashmalar nazariyasi orasida bog‘lanish borligini bilgan.

Figurali sonlar quyidagicha aniqlanadi. Birinchi tartibli figurali sonlar: 1, 2, 3, 4, 5, … (ya’ni, natural sonlar); ikkinchi tartibli figurali sonlar: 1-si 1ga teng, 2-si dastlabki ikkita natural sonlar yig‘indisi (3), 3-si dastlabki uchta natural sonlar yig‘indisi (6) va hokazo (1, 3, 6, 10, 15, …); uchinchi tartibli figurali sonlar: 1-si 1ga teng, 2-si birinchi ikkita ikkinchi tartibli figurali sonlarlar yig‘indisi (4), 3-si birinchi uchta ikkinchi tartibli figurali sonlarlar yig‘indisi (10) va hokazo (1, 4, 10, 20, 35, …); va hokazo.

1- misol. Tekislikda radiuslari o‘zaro teng bo‘lgan aylanalar bir-biriga uringan holda yuqoridan 1- qatorda bitta, 2- qatorda ikkita, 3- qatorda uchta va hokazo, joylashtirilgan bo‘lsin. Masalan, aylanalar bunday joylashuvining dastlabki to‘rt qatori 1- shaklda tasvirlangan. Bu yerda qatorlardagi aylanalar sonlari ketma-ketligi birinchi tartibli figurali sonlarni tashkil qiladi. Bu tuzilmadan foydalanib ikkinchi tartibli figurali sonlarni quyidagicha hosil qilish mumkin. Dastlab 1- qatordagi aylanalar soni (1), keyin dastlabki ikkita qatordagi aylanalar soni (3), undan keyin dastlabki uchta qatordagi aylanalar soni (6), va hokazo.


1- shakl

“Kombinatorika” iborasi G. Leybnisning “Kombinatorik san’at haqidagi mulohazalar” nomli asarida birinchi bor 1665 yilda keltirilgan. Bu asarda birlashmalar nazariyasi ilmiy jihatdan ilk bor asoslangan. O‘rinlashtirishlarni o‘rganish bilan birinchi bo‘lib Yakob Bernolli shug‘ullangan va bu haqdagi ma’lumotlarni 1713 yilda bosilib chiqqan “Ars conjectandi” (Bashorat qilish san’ati) nomli kitobining ikkinchi qismida bayon qilgan. Hozirgi vaqtda kombinatorikada qo‘llanilayotgan belgilashlar XIX asrga kelib shakllandi.

Kombinatsiya – bu kombinatorikaning asosiy tushunchasidir. Bu tushuncha yordamida ixtiyoriy to‘plamning qandaydir sondagi elementlaridan tashkil topgan tuzilmalar ifodalanadi. Kombinatorikada bunday tuzilmalarning o‘rin almashtirishlar, o‘rinlashtirishlar va gruppalashlar deb ataluvchi asosiy ko‘rinishlari o‘rganiladi.

Kombinatorikada ko‘p qo‘llaniladigan usul va qoidalar. Kombinatorika va graflar nazariyasida tasdiqlarni isbotlashning samarali usullaridan biri bo‘lgan matematik induksiya usuli ko‘p qo‘llaniladi. Bu usulning ketma-ket bajariladigan ikkita qismi bo‘lib, ular quyidagi umumiy g‘oyaga asoslanadi.

Faraz qilaylik, isbotlanishi kerak bo‘lgan tasdiq birorta xususiy $n = n_0$ qiymat (masalan, $n_0 = 1$) uchun to‘g‘ri bo‘lsin (usulning bu qismi baza yoki asos deb ataladi). Agar bu tasdiqning istalgan $n = k > n_0$ uchun to‘g‘riligidan uning $n = k+1$ uchun to‘g‘riligi kelib chiqsa, u holda tasdiq istalgan natural $n \geq n_0$ son uchun to‘g‘ri bo‘ladi (induksion o‘tish).

2- misol. Ixtiyoriy n natural son uchun

$$1^2 + 2^2 + ... + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

tenglikning o‘rinli bo‘lishini matematik induksiya usuli yordamida isbotlaymiz.

Baza: $n = 1$ bo‘lsin, u holda yuqoridagi tenglik to‘g‘ri ekanligi ravshan: $1^2 = \frac{1 \cdot (1+1) \cdot (2 \cdot 1 + 1)}{6}$.

Induksion o‘tish: isbotlanish kerak bo‘lgan tenglik $n = k > 1$ uchun to‘g‘ri, ya’ni

$$1^2 + 2^2 + ... + k^2 = \frac{k(k+1)(2k+1)}{6}$$

tenglik o‘rinli bo‘lsin. Bu tenglikning chap va o‘ng tomonlariga $(k+1)^2$ ifodani qo‘shib, uni

$$1^2 + 2^2 + ... + k^2 + (k+1)^2 = \frac{k(k+1)(2k+1)}{6} + (k+1)^2$$

ko‘rinishda yozamiz. Oxirgi tenglikning o‘ng tomonida quyidagicha o‘zgartirishlarni bajaramiz:

$$\frac{k(k+1)(2k+1)}{6} + (k+1)^2 = (k+1)\left[\frac{k(2k+1)}{6} + (k+1)\right] =$$

$$= \frac{(k+1)(2k^2 + 7k + 6)}{6} = \frac{(k+1)(2k^2 + 4k + 3k + 6)}{6} =$$

$$= \frac{(k+1)[2k(k+2) + 3(k+2)]}{6} = \frac{(k+1)[(k+1)+1][2(k+1)+1]}{6}.$$

Demak,

$$1^2 + 2^2 + ... + k^2 + (k+1)^2 = \frac{(k+1)[(k+1)+1][2(k+1)+1]}{6}. \blacksquare$$

Oxirgi munosabat isbotlanishi kerak bo‘lgan tenglikning $n=k+1$ bo‘lgan holidir.

Shuni ta’kidlash kerakki, biror tasdiqni isbotlash uchun matematik induksiya usuli qo‘llanilganda, bu usulning ikkala qismini ham tekshirib ko‘rish muhimdir, ya’ni baza va induksion o‘tish albatta tekshirilishi shart. Ulardan biri tekshirilmasa noto‘g‘ri natijalar hosil bo‘lishi ham mumkin. Bundan tashqari, baza birorta xususiy qiymatdan boshqa ko‘p, hattoki, juda ko‘p xususiy hollar uchun tekshirilib, ijobiy natija olinganda ham, bu hollarni umumlashtiruvchi natijaviy tasdiq noto‘g‘ri bo‘lib chiqishi mumkin. Bu mulohazalarning o‘rinli ekanligini quyida keltirilgan misollar ko‘rsatadi.

3- misol. “Ixtiyoriy n natural son uchun $2n-1$ son 2ga qoldiqsiz bo‘linadi” degan tasdiqni tekshirishda matematik induksiya usulining baza qismi talabini bajarmasdan faqat induksion o‘tishni tekshiramiz.

Bu tasdiq $n=k>1$ uchun to‘g‘ri bo‘lsin, ja’ni $2k-1$ son 2ga qoldiqsiz bo‘linsin deb faraz qilamiz. U holda $(2k-1)+2$ son ham, qo‘shiuvchilarining har biri 2ga qoldiqsiz bo‘linganligi sababli, 2ga qoldiqsiz bo‘linadi. Shuning uchun $(2k-1)+2=2(k+1)-1$ tenglik asosida $2(k+1)-1$ son 2ga qoldiqsiz bo‘linadi degan xulosa kelib chiqadi. Demak, yuqoridagi tasdiq $n=k+1$ uchun to‘g‘ri, ya’ni induksion o‘tish bajarildi deb hisoblash mumkin.

Shunday qilib, matematik induksiya usulining baza qismini tekshirmasdan “ixtiyoriy natural n son uchun $2n-1$ son 2ga qoldiqsiz bo‘linadi” degan xulosa qilish noto‘g‘ridir, chunki ixtiyoriy n natural son uchun $2n-1$ sonni 2ga bo‘lganda 1 qoldiq qoladi. ■

4- misol. “Ixtiyoriy n natural son uchun n^2+n+17 ifodaning qiymati tub sondir” degan tasdiqni tekshirish maqsadida matematik induksiya usulining faqat baza qismi talabini dastlabki 15ta natural sonlar uchun bajaramiz.

$n=1$ bo‘lganda $n^2+n+17=1^2+1+17=19$ tub son hosil bo‘ladi. $n=\overline{2, 15}$ bo‘lganda ham n^2+n+17 ifodaning qiymati sifatida 23, 29, 37, 47, 59, 73, 89, 107, 127, 149, 173, 199, 227 va 257 tub sonlarni hosil qilamiz.

Induksion o‘tishni tekshirmasdan “ixtiyoriy natural n son uchun n^2+n+17 ifodaning qiymati tub sondir” degan xulosa qilish noto‘g‘ridir, chunki, masalan, agar $n=16$ bo‘lsa, u holda bu ifodaning qiymati murakkab sondir: $n^2+n+17=16^2+16+17=289=17\cdot 17$. ■

5- misol. Biror n natural son uchun $991n^2+1$ son butun sonning kvadrati bo‘ladimi? Bu savolga javob berish uchun, $n$ning dastlabki o‘n, yuz, ming, million, milliard, hattoki, trillionta qiymatlari uchun $991n^2+1$ ifoda tekshirilganda, uning qiymatlaridan birortasi ham butun son kvadrati bo‘lmasligi qayd etilgan. Shunday bo‘lishiga qaramasdan bu tasdiq asosida, induksion o‘tishni bajarmasdan, “ixtiyoriy natural n son uchun $991n^2+1$ ifodaning qiymati butun sonning kvadrati bo‘lmaydi” degan xulosa qilish mumkin emas. $991n^2+1$ ifodaning qiymati butun sonning kvadrati bo‘ladigan n natural sonning borligi va bunday sonning eng kichigini o‘nli sanoq sistemasida yozganda 29ta (!) raqam bilan ifodala-nishi komp’yuter yordamida aniqlangan.

Matematik induksiya usulining tadbiqiga yana bir misol sifatida quyidagi teoremani isbotlaymiz.

1- teorema. Ixtiyoriy chekli A to‘plam uchun $\left|2^A\right|=2^{|A|}$ tenglik o‘rinlidir.

Isboti. Matematik induksiya usulini berilgan to‘plamning quvvati bo‘yicha qo‘llaymiz.

Baza. Dastlab A to‘plamning elementlari soni nolga teng, ya’ni $|A|=0$ bo‘lganda teoremaning tasdig‘i bajarilishini ko‘rsatamiz. $A_0=\varnothing$ bo‘lsin. U holda $A=A_0$ uchun $|A|=0$, $2^A=2^{\varnothing}=\{\varnothing\}$ va $\left|2^{\varnothing}\right|=\left|\{\varnothing\}\right|=1=2^0=2^{|\varnothing|}$ bo‘ladi. Demak, teoremaning tasdig‘i $|A|=0$ bo‘lgan hol uchun to‘g‘ridir.

Induksion o‘tish. Chekli k elementli ixtiyoriy A_k to‘plam uchun teoremaning tasdig‘i to‘g‘ri bo‘lsin, ya’ni $A=A_k$ bo‘lganda $\left|2^A\right|=2^{|A|}$ tenglik bajarilsin. $k+1$ elementli A_{k+1} to‘plamni qaraymiz. Ravshanki, $A=A_{k+1}$ uchun $|A|=k+1$ bo‘ladi. Qaralayotgan A to‘plamning ixtiyoriy a elementi uchun 2^A bulean to‘plamni o‘zaro kesishmaydigan ikkita $B_a^-=\{X \mid X\subset 2^A, a\notin X\}$ va $B_a^+=\{X \mid X\subset 2^A, a\in X\}$ to‘plamlar birlashmasi sifatida yozish mumkin. Demak, $\left|2^A\right|=\left|B_a^-\right|+\left|B_a^+\right|$.

Tuzilishiga ko‘ra, B_a^- to‘plam k elementli to‘plamning buleanidan iborat. Shuning uchun, induksion o‘tish faraziga ko‘ra $|B_a^-| = 2^k$ bo‘ladi. B_a^+ to‘plam esa B_a^- to‘plamning har bir element-to‘plamiga a elementni kiritish yordamida hosil qilingan. Bundan $|B_a^+| = |B_a^-| = 2^k$ kelib chiqadi. Demak, $|A| = k+1$ bo‘lgan hol uchun

$$|2^A| = |B_a^-| + |B_a^+| = 2^k + 2^k = 2 \cdot 2^k = 2^{k+1} = 2^{|A|}.$$

Berilgan chekli A to‘plamning buleani uning barcha qism to‘lamlaridan tuzilgan toplam bo‘lgani sababli 1- teoremada isbotlangan $|2^A| = 2^{|A|}$ tenglik A to‘plamning buleanini 2^A ko‘rinishda belgilashga asos bo‘la oladi.

Kombinatorikada sodda, o‘z-o‘zidan ravshan bo‘lgan, ammo muhim qoidalar bor. Bunday qoidalar sifatida qo‘shish, ko‘paytirish hamda kiritish va chiqarish qoidalari deb ataluvchi qoidalarni ko‘rsatish mumkin.

$m$ta elementli A to‘plam va $n$ta elementli B to‘plamlar berilgan bo‘lib, ular kesishmasin. Qo‘shish qoidasiga ko‘ra, A yoki B to‘plamga tegishli bo‘ladigan birorta elementni tanlash imkoniyatlari soni ($m+n$)ga tengdir. “Yoki” qoidasi deb ham ataluvchi bu qoida mazmunini quyidagi teorema orqali ham ifodalash mumkin.

2-teorema. Agar ixtiyoriy chekli A va B to‘plamlar uchun $A \cap B = \varnothing$ bo‘lsa, u holda $|A \cup B| = |A| + |B|$ bo‘ladi.

Isboti o‘quvchiga havola qilinadi.

Demak, qo‘shish qoidasiga ko‘ra, kesishmaydigan ikkita to‘plam birlashmasining quvvati shu to‘plamlar quvvatlarining yig‘indisiga tengdir.

Ko‘paytirish qoidasiga asosan, $m$ta elementli A va $n$ta elementli B to‘plamlarning elementlaridan tuzish mumkin bo‘lgan barcha $<a,b>$ ($a \in A$, $b \in B$) kortejlar (juftliklar) soni mnga teng. Bu qoida “va” qoidasi deb ham ataladi. Uni quyidagi teorema ko‘rinishda ifodalash ham mumkin.

3-teorema. Ixtiyoriy chekli A va B to‘plamlar uchun $|A \times B| = |A| \cdot |B|$ tenglik o‘rinlidir.

Isboti o‘quvchiga havola qilinadi.

Demak, ko‘paytirish qoidasiga ko‘ra, ixtiyoriy ikkita chekli to‘plam Dekart ko‘paytmasining quvvati shu to‘plamlar quvvatlarining ko‘paytmasiga tengdir.

Umumiy holda, agar chekli A va B to‘plamlar hech bo‘lmaganda bitta umumiy elementga ega bo‘lsa, u holda $|A|+|B|$ yigindining qiymatini aniqlashda $A\cup B$ to‘plamning ba’zi elementlarini, aniqrog‘i, $A\cap B$ to‘plamning elementlarini ikki marta hisobga olishga to‘g‘ri keladi. Bu mulohaza asosida quyidagi tasdiqqa kelamiz.

4-teorema. Ixtiyoriy chekli A va B to‘plamlar uchun $|A\cup B|=|A|+|B|-|A\cap B|$ tenglik o‘rinlidir.

Isboti. Osonlik bilan ko‘rish mumkinki:

a) $A\cup B=A\cup(B\setminus A)$ va $A\cap(B\setminus A)=\varnothing$;

b) $B=(A\cap B)\cup(B\setminus A)$ va $(A\cap B)\cap(B\setminus A)=\varnothing$.

Bu munosabatlarga 2-teoremani qo‘llasak, mos ravishda $|A\cup B|=|A|+|B\setminus A|$ va $|B|=|A\cap B|+|B\setminus A|$ tengliklarni hosil qilamiz. Bu tengliklardan isbotlanishi kerak bo‘lgan tenglikni hosil qilish qiyin emas.

4-teoremaning tasdig‘ini umumiy holda ikkita chekli to‘plamlar birlashmasining quvvatini hisoblash qoidasi deyish mumkin. Bu qoidaning ma’nosidan kelib chiqqan holda, uni kiritish va chiqarish qoidasi deb atash qabul qilingan. ■

Ravshanki, 4- teoremada keltirilgan tenglikdan foydalanib $|A|$, $|B|$, $|A\cup B|$ va $|A\cap B|$ miqdorlarning ixtiyoriy uchtasi ma’lum bo‘lganda to‘rtinchisini hisoblash formulasini hosil qilish mumkin.

Yuqorida bayon qilingan ikkita to‘plam uchun qo‘shish, ko‘paytirish hamda kiritish va chiqarish qoidalarini chekli sondagi istalgan chekli to‘plamlar uchun umumlashtirish mumkin.

Avvalo, kiritish va chiqarish qoidasining umumlasmasi sifatida quyidagi teoremani keltiramiz.

5-teorema (umumlashgan kiritish va chiqarish qoidasi). Ixtiyoriy chekli $A_1, A_2, A_3, \ldots, A_n$ to‘plamlar uchun

$$|A_1\cup A_2\cup A_3\cup\ldots\cup A_n|=|A_1|+|A_2|+|A_3|+\ldots+|A_n|-$$

$$-|A_1\cap A_2|-|A_1\cap A_3|-\ldots-|A_{n-1}\cap A_n|+$$
$$+|A_1\cap A_2\cap A_3|+|A_1\cap A_2\cap A_4|+\ldots+|A_{n-2}\cap A_{n-1}\cap A_n|-$$
$$-\ldots+(-1)^{n-1}|A_1\cap A_2\cap\ldots\cap A_n|.$$

munosabat o‘rinlidir.

Isboti. Teoremani isbotlash uchun matematik induksiya usulini qo‘llaymiz. $k=1$ bo‘lgan hol uchun teoremaning tasdig‘i trivialdir.

Induksiya usulining bazasi sifatida $k=2$ bo‘lgan holni qaraymiz. Bu holda teoremaning tasdig‘i 3- teoremaga asosan to‘g‘ri.

Induksion o‘tish: teoremaning tasdig‘i $n=k$ uchun to‘g‘ri, ya’ni

$$|A_1\cup A_2\cup A_3\cup\ldots\cup A_k|=|A_1|+|A_2|+\ldots+|A_k|-$$
$$-|A_1\cap A_2|-|A_1\cap A_3|-\ldots-|A_{k-1}\cap A_k|+$$
$$+|A_1\cap A_2\cap A_3|+|A_1\cap A_2\cap A_4|+\ldots+|A_{k-2}\cap A_{k-1}\cap A_k|-$$
$$-\ldots+(-1)^{k-1}|A_1\cap A_2\cap\ldots\cap A_k|$$

tenglik o‘rinli bo‘lsin. Tasdiqning $n=k+1$ bo‘lgan holda to‘g‘ri ekanligini ko‘rsatamiz. Avvalo, $A_1, A_2, A_3,\ldots, A_k, A_{k+1}$ to‘plamlarning $A_1\cup A_2\cup A_3\cup\ldots\cup A_k\cup A_{k+1}$ birlashmasini $(A_1\cup A_2\cup A_3\cup\ldots\cup A_k)\cup A_{k+1}$ ko‘rinishda ifodalaymiz. So‘ngra 3- teoremani va kesishmaga nisbatan umumlashgan distributivlik qonunini qo‘llab hamda teorema tasdig‘ining $n=k$ uchun to‘g‘riligini hisobga olib, quyidagilarga ega bo‘lamiz:

$$|(A_1\cup A_2\cup A_3\cup\ldots\cup A_k)\cup A_{k+1}|=|A_1\cup A_2\cup A_3\cup\ldots\cup A_k|+$$
$$+|A_{k+1}|-|(A_1\cup A_2\cup A_3\cup\ldots\cup A_k)\cap A_{k+1}|=$$
$$=|A_1|+|A_2|+\ldots+|A_k|-|A_1\cap A_2|-|A_1\cap A_3|-\ldots-|A_{k-1}\cap A_k|+$$
$$+|A_1\cap A_2\cap A_3|+|A_1\cap A_2\cap A_4|+\ldots+|A_{k-2}\cap A_{k-1}\cap A_k|-$$
$$-\ldots+(-1)^{k-1}|A_1\cap A_2\cap\ldots\cap A_k|+|A_{k+1}|-$$
$$-|(A_1\cap A_{k+1})\cup(A_2\cap A_{k+1})\cup(A_3\cap A_{k+1})\cup\ldots\cup(A_k\cap A_{k+1})|.$$

Bu ifodadagi oxirgi ayriluvchi $A_i\cap A_{k+1}$ ($i=1,2,3,\ldots,k$) ko‘rinishdagi k ta to‘plamlar birlashmasining quvvatini ifodalaydi. Shuning uchun, induksiya faraziga ko‘ra, bu ayriluvchini quyidagicha yozish mumkin:

$$|(A_1\cap A_{k+1})\cup(A_2\cap A_{k+1})\cup(A_3\cap A_{k+1})\cup\ldots\cup(A_k\cap A_{k+1})|=$$
$$|A_1\cap A_{k+1}|+|A_2\cap A_{k+1}|+|A_3\cap A_{k+1}|+\ldots+|A_k\cap A_{k+1}|-$$

$$-\left|(A_1\cap A_{k+1})\cap(A_2\cap A_{k+1})\right|-\left|(A_1\cap A_{k+1})\cap(A_3\cap A_{k+1})\right|-$$
$$-\ldots-\left|(A_{k-1}\cap A_{k+1})\cap(A_k\cap A_{k+1})\right|+$$
$$+\left|(A_1\cap A_{k+1})\cap(A_2\cap A_{k+1})\cap(A_3\cap A_{k+1})\right|+$$
$$+\left|(A_1\cap A_{k+1})\cap(A_2\cap A_{k+1})\cap(A_4\cap A_{k+1})\right|+\ldots+$$
$$+\left|(A_{k-2}\cap A_{k+1})\cap(A_{k-1}\cap A_{k+1})\cap(A_k\cap A_{k+1})\right|-$$
$$-\ldots+(-1)^{k-1}\left|(A_1\cap A_{k+1})\cap(A_2\cap A_{k+1})\cap\ldots\cap(A_k\cap A_{k+1})\right|=$$
$$=\left|A_1\cap A_{k+1}\right|+\left|A_2\cap A_{k+1}\right|+\left|A_3\cap A_{k+1}\right|+\ldots+\left|A_k\cap A_{k+1}\right|-$$
$$-\left|A_1\cap A_2\cap A_{k+1}\right|-\left|A_1\cap A_3\cap A_{k+1}\right|-\ldots-\left|A_1\cap A_k\cap A_{k+1}\right|+$$
$$+\left|A_1\cap A_2\cap A_3\cap A_{k+1}\right|+\left|A_1\cap A_2\cap A_4\cap A_{k+1}\right|+\ldots+$$
$$+\left|A_1\cap A_2\cap A_k\cap A_{k+1}\right|+\ldots+(-1)^{k-1}\left|A_1\cap A_2\cap\ldots\cap A_k\cap A_{k+1}\right|.$$

Bu ifodani o‘z o‘rniga qo‘yib

$$\left|A_1\cup A_2\cup A_3\cup\ldots\cup A_k\cup A_{k+1}\right|=\left|A_1\right|+\left|A_2\right|+\left|A_3\right|+\ldots+\left|A_k\right|+\left|A_{k+1}\right|-$$
$$-\left|A_1\cap A_2\right|-\left|A_1\cap A_3\right|-\ldots-\left|A_k\cap A_{k+1}\right|+$$
$$+\left|A_1\cap A_2\cap A_3\right|+\left|A_1\cap A_2\cap A_4\right|+\ldots+\left|A_{k-1}\cap A_k\cap A_{k+1}\right|-$$
$$-\ldots+(-1)^k\left|A_1\cap A_2\cap\ldots\cap A_k\cap A_{k+1}\right|$$

tenglikni hosil qilamiz. ■

6-teorema. (umumlashgan qo‘shish qoidasi). Juft-jufti bilan kesishmaydigan ixtiyoriy chekli $A_1, A_2, \ldots, A_n$ to‘plamlar uchun

$$\left|A_1\cup A_2\cup\ldots\cup A_n\right|=\left|A_1\right|+\left|A_2\right|+\ldots+\left|A_n\right|$$

tenglik o‘rinlidir.

Isboti. Teorema shartiga ko‘ra barcha $i, j=\overline{1,n}$, $i\neq j$, indekslar uchun $A_i\cap A_j=\varnothing$ bo‘lgani sababli 5- teorema asosida kerakli tenglikni hosil qilamiz. ■

7- teorema. Ixtiyoriy chekli $A_1, A_2, A_3, \ldots, A_n$ to‘plamlar uchun

$$\left|A_1\cap A_2\cap A_3\cap\ldots\cap A_n\right|=\left|A_1\right|+\left|A_2\right|+\left|A_3\right|+\ldots+\left|A_n\right|-$$
$$-\left|A_1\cup A_2\right|-\left|A_1\cup A_3\right|-\ldots-\left|A_{n-1}\cup A_n\right|+$$
$$+\left|A_1\cup A_2\cup A_3\right|+\left|A_1\cup A_2\cup A_4\right|+\ldots+\left|A_{n-2}\cup A_{n-1}\cup A_n\right|-$$
$$-\ldots+(-1)^{n-1}\left|A_1\cup A_2\cup\ldots\cup A_n\right|.$$

munosabat o‘rinlidir.

8-teorema (umumlashgan ko‘paytirish qoidasi). Elementlari soni mos ravishda $n_1, n_2, n_3, ..., n_k$ bo‘lgan $A_1, A_2, A_3, ..., A_k$ to‘plamlardan faqat bittadan element olib tuzilgan k uzunlikka ega kortejlar soni $n_1 n_2 n_3 ... n_k$ ga tengdir.

Isboti. Teoremani isbotlash uchun matematik induksiya usulini qo‘llaymiz. $k=1$ bo‘lgan hol uchun teoremaning tasdig‘i trivialdir.

Induksiya usulining bazasi sifatida $k=2$ bo‘lgan holni qaraymiz. Bu holda teoremaning tasdig‘i yuqorida keltirilgan ikkita to‘plam uchun ko‘paytirish qoidasidan kelib chiqadi.

Induksion o‘tish: teoremaning tasdig‘i $k=s$ ($s=\overline{1,k-1}$) uchun to‘g‘ri bo‘lsin, ya’ni, $A_1, A_2, ..., A_s$ to‘plamlardan faqat bittadan element olib tuzilgan s uzunlikdagi kortejlar soni $n_1 n_2 ... n_s$ bo‘lsin deb faraz qilamiz. Teorema tasdig‘ining $k=s+1$ uchun ham to‘g‘ri ekanligini ko‘rsatamiz.

$A_1, A_2, A_3, ..., A_{s+1}$ to‘plamlardan faqat bittadan element olib uzunligi ($s+1$)ga teng bo‘lgan kortejlar sonini aniqlash uchun turlicha usullardan foydalanish mumkin. Bu yerda quyidagi usul bilan kerakli natijani olsa bo‘ladi. Dastlab uzunligi birga teng bo‘lgan kortejlarni tuzamiz. Uzunligi birga teng bo‘lgan kortejlar berilgan to‘plamlarning ixtiyoriy biridan faqat bitta elementni tanlash yordamida tuzilishi ravshan. Tabiiyki, agar uzunligi birga teng kortejlar $A_1 = \{a_{11}, a_{12}, ..., a_{1n_1}\}$ to‘plamning elementlaridan tuzilsa, bunday kortejlar soni n_1 ga tengdir.

Uzunligi birga teng kortejlardan ixtiyoriy birini, masalan, a_{11} ni olib, uning o‘ng tomoniga A_1 to‘plamdan boshqa biror to‘plamning, masalan, $A_2 = \{a_{21}, a_{22}, ..., a_{2n_2}\}$ to‘plamning elementlaridan birini joylashtirib, birinchi koordinatasi a_{11} bo‘lgan uzunligi ikkiga teng n_2 ta kortejlar hosil qilamiz. Uzunligi birga teng kortej sifatida n_1 ta kortejlardan ixtiyoriy birini olish mumkinligini hisobga olib, hammasi bo‘lib uzunligi ikkiga teng $n_1 n_2$ ta kortejlarga ega bo‘lamiz.

Uzunligi ikkiga teng kortejlarning har biriga o‘ng tomondan A_1 va A_2 to‘plamlardan boshqa biror to‘plamning, masalan, $A_3 = \{a_{31}, a_{32}, ..., a_{3n_3}\}$ to‘plamning n_3 ta elementlaridan birini joylashtirib, uzunligi uchga teng

n_3 ta kortejlar hosil qilamiz. Bu yerda uzunligi ikkiga teng kortej sifatida n_1n_2 ta kortejlardan ixtiyoriy birini olish mumkinligini e'tiborga olib, uzunligi uchga teng $n_1n_2n_3$ ta kortejlarni hosil qilamiz.

Kortejlar hosil qilish jarayonini yuqoridagiga o'xshash mulohazalar bilan davom ettirib, bu kortejlarning har biriga o'ng tomondan $A_1, A_2, ..., A_s$ to'plamlardan boshqa $A_{s+1} = \{a_{(s+1)1}, a_{(s+1)2}, ..., a_{(s+1)n_s}\}$ to'plamning n_{s+1} ta elementlaridan birini joylashtirib, uzunligi $(s+1)$ ga teng bo'lgan n_{s+1} ta kortejlar hosil qilamiz. Bu yerda ham uzunligi s ga teng kortej sifatida $n_1n_2...n_s$ ta kortejlardan ixtiyoriy birini olish mumkinligini e'tiborga olamiz. Shunday qilib, $n_1n_2...n_s$ marta n_{s+1} ta kortej hosil bo'ldi. Demak, uzunligi $(s+1)$ ga teng bo'lgan kortejlar $n_1n_2...n_sn_{s+1}$ tadir. ■