12-MAVZU	MULOHAZALAR HISOBI UCHUN AKSIOMALAR SISTEMASI.

Mulohazalar hisobi aksiomatik mantiqiy sistema bo‘lib, mulohazalar algebrasi esa uning talqinidir.

Berilgan aksiomalar sistemasi negizida (bazasida) qurilgan aksiomatik nazariya deb shu aksiomalar sistemasiga tayanib isbotlanuvchi hamma teoremalar majmuasiga aytiladi.

Aksiomatik nazariya formal va formalmas nazariyalarga bo‘linadi.

Formalmas aksiomatik nazariya nazariy-to‘plamiy mazmun bilan to‘ldirilgan bo‘lib, keltirib chiqarish tushunchasi aniq berilmagan va bu nazariya asosan fikr mazmuniga suyanadi.

Qaralayotgan aksiomatik nazariya uchun quyidagi shartlar bajarilgan bo‘lsa, ya’ni:

1)nazariyaning tili berilgan;

2)formula tushunchasi aniqlangan;

3)aksiomalar deb ataladigan formulalar to‘plami berilgan;

4)bu nazariyada keltirib chiqarish qoidasi aniqlangan bo‘lsa, formal aksiomatik nazariya aniqlangan deb hisoblanadi.

Quyida mulohazalar hisobining simvollari, formulasi, aksiomalar sistemasi, keltirib chiqarish qoidalari, formulalar majmuasidan formulani keltirib chiqarish qoidasi, deduksiya va umumlashgan deduksiya teoremalari, ayrim mantiq qonunlarining isboti, mulohazalar algebrasi va mulohazalar hisobi o‘rtasidagi munosabatlar, mulohazalar hisobida yechilish, zidsizlik, to‘liqlilik va erkinlik muammolari kabi masalalar bayon etiladi.

Mulohazalar hisobi formulasi tushunchasi. Har qanday hisobning tafsili bu hisobning simvollari tafsilidan, formulalar va keltirib chiqarish formulalari ta’rifidan iborat.

Mulohazalar hisobida uch kategoriyali simvollardan iborat alfavit qabul qilinadi:

Birinchi kategoriya simvollari: $x, y, z, \ldots, x_1, x_2, \ldots$. Bu simvollarni o‘zgaruvchilar deb ataymiz.

Ikkinchi kategoriya simvollari: $\vee$, $\wedge$, $\rightarrow$, $-$. Bular mantiqiy bog‘lovchilardir. Birinchisi – diz’yunksiya yoki mantiqiy qo‘shish belgisi, ikkinchisi – kon’yunksiya yoki mantiqiy ko‘paytma belgisi, uchinchisi – implikatsiya belgisi va to‘rtinchisi – inkor belgisi deb ataladi.

Uchinchi kategoriyaga qavs deb ataladigan (,) simvol kiritiladi.

Mulohazalar hisobida boshqa simvollar yo‘q.

Mulohazalar hisobining formulasi deb mulohazalar hisobi alfaviti simvollarining ma’lum bir ketma-ketligiga aytiladi.

Formulalarni belgilash uchun lotin alfavitining katta harflaridan foydalanamiz. Bu harflar mulohazalar hisobining simvollari qatoriga kirmaydi. Ular faqatgina formulalarning shartli belgilari bo‘lib xizmat qiladi.

Endi formula tushunchasi ta’rifini beraylik. Bu tushuncha quyidagicha aniqlanadi:

1) har qanday $x, y, z, \ldots$ *o‘zgaruvchilarning istalgan biri formuladir;*

2) agar A *va* B *larning har biri formula bo‘lsa, u holda* $(A \wedge B)$, $(A \vee B)$, $(A \rightarrow B)$ *va* $\overline{A}$ *lar ham formulalardir.*

3) boshqa hech qanday simvollar satri formula bo‘la olmaydi.

O‘zgaruvchilarni elementar formulalar deb ataymiz.

Misol. Formula ta’rifining 1-bandiga ko‘ra $x, y, z, \ldots$ o‘zgaruvchilar formulalar bo‘ladi. U vaqtda ta’rifning 2-bandiga muvofiq $(x \wedge y)$, $(x \vee y)$, $(x \rightarrow y)$, $\overline{x}$ lar ham formulalardir. Xuddi shu tariqada $(\overline{x \vee y})$, $((x \wedge y) \rightarrow z))$, $((x \wedge y) \rightarrow (y \rightarrow z))$ lar ham formulalar bo‘ladi.

Quyidagilar formula bo‘laolmasligini tushuntiring:

$$x\overline{y}, \quad \wedge z, \quad (x \vee y, \ x \rightarrow y, \ (x \wedge y) \rightarrow \overline{x}.$$

Qismiy formula tushunchasini kiritamiz:

1.Elementar formula uchun faqat uning o‘zi qismiy formuladir.

2.Agar $\overline{A}$ formula bo‘lsa, u vaqtda shu formulaning o‘zi, A formula va A formulaning hamma qismiy formulalari uning qismiy formulalari bo‘ladi.

3.Agar formula $A * B$ ko‘rinishda bo‘lsa (bu yerda va bundan keyin $*$ o‘rniga $\vee$, $\wedge$, $\rightarrow$ cimvollarning istalganini tushunamiz), u vaqtda shu formulaning o‘zi, A va B formulalar hamda A va B formulalarning barcha qismiy formulalari $A*B$ formulaning qismiy formulalari bo‘ladi.

Masalan, $\left(\left(x\vee\overline{y}\right)\to\left(\overline{\overline{z}\to y}\right)\right)$ formula uchun:

$\left(\left(x\vee\overline{y}\right)\to\left(\overline{\overline{z}\to y}\right)\right)$ - nolinchi chuqurlikdagi qismiy formula,

$\left(x\vee\overline{y}\right)$, $\left(\overline{\overline{z}\to y}\right)$ - birinchi chuqurlikdagi qismiy formulalar,

$x,\ \ \overline{y},\ \ \left(\overline{z}\to y\right)$ - ikkinchi chuqurlikdagi qismiy formulalar,

$y,\ \ \overline{z}$ - uchinchi chuqurlikdagi qismiy formulalar,

z – to‘rtinchi chuqurlikdagi qismiy formula deb ataladi.

Formulalarni yozishda ayrim soddalashtirishlarni qabul qilamiz. Xuddi mulohazalar algebrasidagi kabi formulalar yozuvidagi qavslarni tushirib qoldirishga kelishamiz. Bu kelishuvga binoan $((x\vee y)\wedge z)$, $\left(\overline{x\wedge y}\right)$, $((x\wedge y)\to(z\wedge t))$ formulalarni mos ravishda $x\vee y\wedge z$, $\overline{x\wedge y}$, $x\wedge y\to z\wedge t$ ko‘rinishda yozamiz.

Endi mulohazalar hisobida **isbotlanuvchi formulalar** sinfini ajratamiz. Isbotlanuvchi formulalar formulalar ta’rifiga o‘xshash xarakterda ta’riflanadi.

Avval dastlabki isbotlanuvchi formulalar (aksiomalar), undan keyin esa keltirib chiqarish qoidasi aniqlanadi. Keltirib chiqarish qoidasi orqali bor isbotlanuvchi formulalardan yangi isbotlanuvchi formulalar hosil qilinadi.

Dastlabki isbotlanuvchi formulalardan keltirib chiqarish qoidasini qo‘llash yo‘li bilan yangi isbotlanuvchi formulalarni hosil etishga shu formulalarni aksiomalardan keltirib chiqarish deb aytiladi.

Mulohazalar hisobining aksiomalar sistemasi.

Mulohazalar hisobining aksiomalar tizimi XI aksiomadan iborat bo‘lib, bular to‘rt guruhga bo‘linadi.

Birinchi guruh aksiomalari:

I_1 $\quad x\to(y\to x)$.

I_2 $\quad (x\to(y\to z))\to((x\to y)\to(x\to z))$.

Ikkinchi guruh aksiomalari:

II_1 $\quad x\wedge y\to x.$

II_2 $\quad x\wedge y\to y.$

II3 $(z \to x) \to ((z \to y) \to (z \to x \wedge y))$.

Uchinchi guruh aksiomalari:

III1 $x \to x \vee y$.

III2 $y \to x \vee y$.

III3 $(x \to z) \to ((y \to z) \to (x \vee y \to z))$.

To‘rtinchi guruh aksiomalari:

IV1 $(x \to y) \to (\overline{y} \to \overline{x})$.

IV2 $x \to \overline{\overline{x}}$.

IV3 $\overline{\overline{x}} \to x$.

Keltirib chiqarish qoidasi

1.O‘rniga qo‘yish qoidasi. Agar A mulohazalar hisobining isbotlanuvchi formulasi, x-o‘zgaruvchi, B mulohazalar hisobining ixtiyoriy formulasi bo‘lsa, u vaqtda A formula ifodasidagi hamma x lar o‘rniga B formulani qo‘yish natijasida hosil etilgan formula ham isbotlanuvchi formula bo‘ladi.

A formuladagi x o‘zgaruvchilar o‘rniga B formulani qo‘yish operatsiyasi (jarayoni)ni o‘rniga qo‘yish qoidasi deb aytamiz va uni quyidagi simvol bilan belgilaymiz:

$$\int_x^B (A).$$

Zikr etilgan qoidaga quyidagi aniqliklarni kiritamiz:

a) Agar A faqat x o‘zgaruvchidan iborat bo‘lsa, u vaqtda $\int_x^B (A)$ o‘rniga qo‘yish B formulani beradi;

b) Agar A formula x dan farqli y o‘zgaruvchidan iborat bo‘lsa, u vaqtda $\int_x^B (A)$ o‘rniga qo‘yish A ni beradi;

v) Agar A o‘rniga qo‘yish aniqlangan formula bo‘lsa, u vaqtda $\overline{A}$ formuladagi x o‘rniga B formulani qo‘yish natijasida o‘rniga qo‘yishning inkori kelib chiqadi, ya’ni $\int_x^B (\overline{A})$ o‘rniga qo‘yish $\overline{\int_x^B A}$ ni beradi.

g) Agar A_1 va A_2 formulalarda o‘rniga qo‘yish aniqlangan bo‘lsa, u vaqtda $\int_x^B (A_1 * A_2)$ o‘rniga qo‘yish $\int_x^B (A_1) * \int_x^B (A_2)$ ni beradi.

Agar A isbotlanuvchi formula bo‘lsa, uni $\vdash A$ shaklda yozishga kelishamiz.

U holda o‘rniga qo‘yish qoidasini quyidagicha sxematik ravishda ifodalash mumkin:

$$\frac{\vdash A}{\vdash \int_x^B (A)}$$

va uni «agar A isbotlanuvchi formula bo‘lsa, u vaqtda $\int_x^B (A)$ ham isbotlanuvchi formula bo‘ladi» deb o‘qiladi.

2. Xulosa qoidasi. Agar A va A→V lar mulohazalar hisobining isbotlanuvchi formulalari bo‘lsa, u holda V ham isbotlanuvchi formula bo‘ladi. Bu qoida quyidagicha sxematik ravishda yoziladi:

$$\frac{\vdash A;\ \vdash A \to B}{\vdash B}.$$

3. Isbotlanuvchi formulaning ta’rifi.

a) Har qanday aksioma isbotlanuvchi formuladir;

b) Isbotlanuvchi formuladagi x oʻzgaruvchi oʻrniga ixtiyoriy B formulani qoʻyish natijasida hosil boʻlgan formula isbotlanuvchi formula boʻladi.

v) A va $A \to B$ isbotlanuvchi formulalardan xulosa qoidasini qo‘llash natijasida olingan V formula isbotlanuvchi formuladir;

g) Mulohazalar hisobining boshqa hech qanday formulasi isbotlanuvchi deb sanalmaydi.

Ta’rif. *Isbotlanuvchi formulalarni hosil etish protsessi (jarayoni)ga isbot qilish (isbotlash) deb aytiladi.*

1-Misol. $\vdash A \to A$ ekanligi (implikatsiyaning refleksivligi) isbotlansin.

Implikatsiyaning refleksivligini isbotlash uchun ushbu

$$\vdash (x \to (y \to z)) \to ((x \to y) \to (x \to z)) \text{ - } I_2$$

aksiomadan foydalanamiz. Bu yerda $\int_z^x (I_2)$ o‘rniga qo‘yishni bajarish natijasida

$$\vdash (x \to (y \to x)) \to ((x \to y) \to (x \to x)) \qquad (1)$$

kelib chiqadi. $\vdash (x \to (y \to z)) \to ((x \to y) \to (x \to z))$ - I_2 aksioma va (1) formulaga xulosa qoidasini qo‘llab

$$\vdash (x \to y) \to (x \to x) \qquad (2)$$

formulani hosil qilamiz.

(2) formulaga nisbatan quyidagi o‘rniga qo‘yishni

$$\int_{y}^{\overline{\overline{x}}} (2)$$

bajarish natijasida

$$\vdash (x \to \overline{\overline{x}}) \to (x \to x) \qquad (3)$$

isbotlanuvchi formulaga ega bo‘lamiz.

$x \to \overline{\overline{x}}$ - IV_2 aksioma va (3) formulaga nisbatan xulosa qoidasini qo‘llash natijasida

$$\vdash x \to x \qquad (4)$$

isbotlanuvchi formulaga kelamiz. Nihoyat (4) formuladagi x o‘zgaruvchi o‘rniga A formulani qo‘ysak

$$\vdash A \to A$$

isbotlanishi kerak bo‘lgan formula hosil bo‘ladi.

2-misol. $\vdash \overline{x \vee y} \to \overline{x} \wedge \overline{y}$ ekanligini isbotlang.

$(z \to x) \to ((z \to y) \to (z \to x \wedge y))$- II_3 aksiomaga nis-batan ketma-ket ikki marta o‘rniga qo‘yish usulini qo‘llaymiz: avval x ni $\overline{x}$ ga va keyin y ni $\overline{y}$ ga almashtiramiz. Natijada quyidagi isbotlanuvchi formulaga ega bo‘lamiz

$$\vdash (z \to \overline{x}) \to ((z \to \overline{y}) \to (z \to \overline{x} \wedge \overline{y})). \qquad (5)$$

(5) formulaga nisbatan $\int_{z}^{\overline{x \vee y}}$ (5) o‘rniga qo‘yishni bajarib, quyidagini hosil qilamiz

$$\vdash ((\overline{x \vee y}) \to \overline{x}) \to ((\overline{x \vee y} \to \overline{y}) \to (\overline{x \vee y} \to \overline{x} \wedge \overline{y})). \qquad (5a)$$

Endi

$$\overline{x \vee y} \to \overline{x} \qquad (6)$$

$$\overline{x \vee y} \to \overline{y} \qquad (7)$$

formulalarning isbotlanuvchi ekanligini ko‘rsatamiz.

Buning uchun $(x \to y) \to (\overline{y} \to \overline{x})$ - IV_1 aksiomaga nisbatan

$$\int_{y}^{x\vee y}(IV)_1$$

o‘rniga qo‘yishni bajaramiz. Natijada

$$\vdash (x \to x\vee y) \to (\overline{x\vee y} \to \overline{x}) \qquad (8)$$

formulaga ega bo‘lamiz. (8) formula va $x \to x\vee y$ - III$_1$ aksiomaga nisbatan xulosa qoidasini ishlatib, (6) ning isbotlanuvchi formula ekanligiga ishonch hosil qilamiz. Xuddi shunday (7) ning ham isbotlanuvchi formula ekanligini ko‘rsatish mumkin.

(6) va (5) formulalarga xulosa qoidasini qo‘llasak,

$$\vdash (\overline{x\vee y} \to \overline{y}) \to (\overline{x\vee y} \to \overline{x}\wedge\overline{y}) \qquad (9)$$

isbotlanuvchi formula kelib chiqadi.

(7) va (9) formulalarga xulosa qoidasini qo‘llab,

$$\vdash \overline{x\vee y} \to \overline{x}\wedge\overline{y}$$

dastlabki formulaning isbotlanuvchi ekanligini hosil qilamiz.

Keltirib chiqarish qoidasining hosilalari. Xulosa va o‘rniga qo‘yish qoidalari singari keltirib chiqarish qoidasining hosilalari ham yangi isbotlanuvchi formulalar hosil qilishga imkon yaratadi.

1. Bir vaqtda o‘rniga qo‘yish qoidasi.

Ta’rif. *Agar* $A(x_1, x_2, ..., x_n)$ – *isbotlanuvchi formula va* $B_1, B_2, ..., B_n$ *mulohazalar hisobining ixtiyoriy formulalari bo‘lsa, u vaqtda* A *formulaning* $x_1, x_2, ..., x_n$ *o‘zgaruvchi-lari o‘rniga bir vaqtda mos ravishda* $B_1, B_2, ..., B_n$ *formulalarni qo‘yish natijasida* C *isbotlanuvchi formulani hosil qilish, bir vaqtda o‘rniga qo‘yish qoidasi deb ataladi.*

$z_1, z_2, ..., z_n$ lar A, $B_1, B_2, ..., B_n$ formulalardagi boshqa o‘zgaruvchilardan farq qiluvchi o‘zgaruvchilar va $z_i \neq z_j \, (i, j = \overline{1,n})$ bo‘lsin. U holda A formulaga n ta ketma-ket o‘rniga qo‘yishni bajaramiz: avval x_1 o‘rniga z_1 ni, keyin x_2 o‘rniga z_2 ni va hokazo x_n o‘rniga z_n ni qo‘yamiz. Natijada quyidagi isbotlanuvchi formulalarga ega bo‘lamiz: $\vdash \int_{x_1}^{z_1}(A)$

o‘rniga qo‘yish $\vdash A_1$ ni, $\vdash \int_{x_2}^{z_2}(A_1)$ o‘rniga qo‘yish $\vdash A_2$ ni, ..., $\vdash \int_{x_n}^{z_n}(A_{n-1})$ o‘rniga qo‘yish $\vdash A_n$ ni beradi.

Bundan keyin A_n formulaga nisbatan yana n ta ketma-ket o‘rniga qo‘yishni bajaramiz: avval z_1 o‘rniga B_1 ni, keyin z_2 o‘rniga B_2 ni va hokazo z_n o‘rniga B_n ni qo‘yib chiqamiz. Buning natijasida $\vdash \int_{z_1}^{B_1}(A_n)$ o‘rniga qo‘yishdan $\vdash C_1$ ni, $\vdash \int_{z_2}^{B_x}(C_1)$ o‘rniga qo‘yishdan $\vdash C_2$ ni,....., $\vdash \int_{z_n}^{B_n}(C_{n-1})$ o‘rniga qo‘yishdan $\vdash C_n$ ni hosil qilamiz.

Demak, C_n isbotlanuvchi formula A formuladagi $x_1, x_2, ..., x_n$ o‘zgaruvchilar o‘rniga bir vaqtda mos ravishda $B_1, B_2, ..., B_n$ formulalarni qo‘yish natijasida hosil bo‘ladi.

Bir vaqtda o‘rniga qo‘yish operatsiya (qoida)sini quyidagicha ifodalaymiz

$$\frac{\vdash A}{\vdash \int_{x_1, x_2, ..., x_n}^{B_1, B_2, ..., B_n}(A)} \qquad (1)$$

2. Murakkab xulosa qoidasi. Bu qoidada

$$\vdash A_1 \to (A_2 \to (A_3 \to (...(A_n \to L)...)))$$

ko‘rinishdagi formulalarga nisbatan ikkinchi hosilaviy qoida ishlatiladi va uni quyidagi tasdiq orqali izohlash mumkin.

1-teorema. *Agar* $A_1, A_2, ..., A_n$ *lar va*

$$A_1 \to (A_2 \to (A_3 \to (...(A_n \to L)...))) \qquad (2)$$

isbotlanuvchi formulalar bo‘lsa, u vaqtda L ham isbotlanuvchi formula bo‘ladi.

Isbot. Teoremani xulosa qoidasini ketma-ket qo‘llash orqali isbotlash mumkin.

Haqiqatan ham, agar A_1 va (2) isbotlanuvchi formulalar bo‘lsa, u vaqtda xulosa qoidasiga asosan

$$A_2 \to (A_3 \to (...(A_n \to L)...)) \qquad (3)$$

ham isbotlanuvchi formula bo‘ladi.

A_2 va (3) isbotlanuvchi formula bo‘lganligi uchun

$$A_3 \to (...(A_n \to L)...) \qquad (4)$$

formula ham isbotlanuvchi bo‘ladi.

Xuddi shunday muhokamani davom ettirib, oxiri L ning isbotlanuvchi formula ekanligiga ishonch hosil qilamiz.

Murakkab xulosa qoidasini sxematik ravishda quyidagicha yozish mumkin:

$$\frac{\vdash A_1, \vdash A_2, ..., \vdash A_n, \vdash A_1 \to (A_2 \to (A_3 \to (...(A_n \to L)...)))}{\vdash L} \quad (5)$$

3. Sillogizm qoidasi.

2-teorema. *Agar $A \to B$ va $B \to C$ isbotlanuvchi formulalar bo‘lsa, u vaqtda $A \to C$ formula ham isbotlanuvchi bo‘ladi.*

Isbot. Teoremani sxematik ravishda quyidagicha yozamiz

$$\frac{\vdash A \to B, \ \vdash B \to C}{\vdash A \to C}. \qquad (6)$$

$x \to (y \to x)$ - I_1 va $x \to (y \to z)) \to ((x \to y) \to (x \to z))$ -I_2 aksiomalarga nisbatan quyidagi bir vaqtda o‘rniga qo‘yish qoidasini

$$\int_{x_1 y_1 z}^{A_1 B_1 C} (J_2) \ \text{ va } \int_{x_1 y}^{B \to C, A} (l_1)$$

qo‘llash natijasida ushbu isbotlanuvchi formulalarni hosil qilamiz:

$$\vdash A \to (B \to C)) \to ((A \to B) \to (A \to C)), \qquad (7)$$

$$\vdash (B \to C) \to (A \to (B \to C)). \qquad (8)$$

Teoremaning shartiga asosan

$$\vdash A \to B \qquad (9)$$

$$\vdash B \to C \qquad (10)$$

formulalar isbotlanuvchidir.

(10) va (8) lardan xulosa qoidasiga asosan

$\vdash A \to (B \to C)$ (11) formulani hosil qilamiz. U vaqtda (11), (9) va (7) lardan murakkab xulosa qoidasiga asosan $\vdash A \to C$ ekanligi kelib chiqadi.

Agar $A \to B$ va $B \to C$ isbotlanuvchi formulalar bo‘lsa, u vaqtda $A \to C$ ham isbotlanuvchi formula bo‘lishiga sillogizm qoidasi deb aytamiz.

4.Kontrpozitsiya qoidasi.

3-teorema. *Agar* $A \to B$ *isbotlanuvchi formula bo‘lsa, u vaqtda* $\overline{B} \to \overline{A}$ *ham isbotlanuvchi formula, ya’ni*

$$\frac{\vdash A \to B}{\vdash \overline{B} \to \overline{A}}. \qquad (12)$$

bo‘ladi.

Isbot. $(x \to y) \to (\overline{y} \to \overline{x})$ - IV$_1$ aksiomaga nisbatan bir vaqtda o‘rniga qo‘yish qoidasi

$$\int_{x,y}^{A,B} (IV_1)$$

ni qo‘llab,

$$\vdash (A \to B) \to (\overline{B} \to \overline{A}) \qquad (13)$$

isbotlanuvchi formulani hosil qilamiz.

Teoremaning shartiga asosan

$$\vdash A \to B \qquad (14)$$

isbotlanuvchi formuladir. Shuning uchun (14) va (13) lardan xulosa qoidasiga asosan $\vdash (\overline{B} \to \overline{A})$ isbotlanuvchi formula ekanligi kelib chiqadi.

Agar $A \to B$ isbotlanuvchi formula bo‘lsa, u vaqtda $\overline{B} \to \overline{A}$ ham isbotlanuvchi formula bo‘lishiga kontrpozitsiya qoidasi deb aytamiz.

5. Ikki karralik inkorni tushirish qoidasi.

4-teorema. 1) *Agar* $A \to \overline{\overline{B}}$ *isbotlanuvchi formula bo‘lsa, u vaqtda* $A \to B$ *ham isbotlanuvchi bo‘ladi.*

2) *Agar* $\overline{\overline{A}} \to B$ *isbotlanuvchi formula bo‘lsa, u vaqtda* $A \to B$ *formula ham isbotlanuvchi, ya’ni*

$$\frac{\vdash A \to \overline{\overline{B}}}{\vdash A \to B} \quad \text{va} \quad \frac{\vdash \overline{\overline{A}} \to B}{\vdash A \to B} \qquad (15)$$

bo‘ladi.

Isbot. $x \to \overline{\overline{x}}$ - IV$_2$ va $\overline{\overline{x}} \to x$ - IV$_3$ aksiomalarga nisbatan o‘rniga qo‘yish

$$\int\limits_{x}^{A}(IV_2) \quad \text{va} \quad \int\limits_{x}^{B}(IV_3)$$

qoidalarini qo‘llab,

$$\vdash A \to \overline{\overline{A}}, \qquad (16)$$

$$\vdash \overline{\overline{B}} \to B \qquad (17)$$

isbotlanuvchi formulalarni hosil qilamiz.

Teoremaning 1) va 2) shartiga asosan

$$\vdash A \to \overline{\overline{B}}, \qquad (18)$$

$$\vdash \overline{\overline{A}} \to B \qquad (19)$$

formulalar isbotlanuvchidir.

Agar teoremaning 1)-sharti bajarilsa, u vaqtda (17) va (18) formulalardan sillogizm qoidasiga asosan $\vdash A \to B$ kelib chiqadi.

Agar 2)-sharti bajarilsa, u vaqtda (16) va (19) formulalardan $\vdash A \to B$ ni keltirib chiqaramiz.

Agar $A \to \overline{\overline{B}}$ $(\overline{\overline{A}} \to B)$ isbotlanuvchi formula bo‘lsa, u holda $A \to B$ ham isbotlanuvchi formula bo‘lishiga ikki martalik inkorni tushirish qoidasi deb aytamiz.