GRAFLAR NAZARIYASI

1736 yilda L.Eyler tomonidan o'sha davrda qiziqarli amaliy masalalardan biri hisoblangan Kyonigsberg ko'priklari haqidagi masalaning qo'yilishi va yechilishi graflar nazariyasining paydo bo'lishiga asos bo'ldi.

1.1.1- shakl

Kyonigsberg shahridagi Pregel daryosi ustida qurilgan yettita ko'priklar joylashuvi

1.1.1- shakldagi qadimiy xaritada tasvirlangan va qurilishi tartibida 1, 2, 3, 4, 5, 6 va 7 raqamlar bilan belgilangan. Pregel daryosi Kyonigsberg shahrini o'sha davrda to'rtta A, B, C va D qismlarga bo'lgan. Shaharning ixtiyoriy qismida joylashgan uydan chiqib yettita ko'priklardan faqat bir martadan o'tib, yana o'sha uyga qaytib kelish mumkinmi? Kyonigsberg ko'priklari haqidagi bu masalani hal qilish jarayonida graflarda maxsus marshrut mavjudligi shartlari ham topildi. L. Eylerning bu maqolasi yuz yildan ko'p vaqt mobaynida graflar nazariyasi bo'yicha yagona ilmiy ish bo'lib keldi. XIX asrning o'rtalarida graflar nazariyasi bilan bog'liq tadqiqotlar G.Kirxgof va A.Keli ishlarida paydo bo'ldi.

Graflar nazariyasi bo'yicha tadqiqotlar natijalari inson faoliyatining turli sohalarida qo'llaniladi. Ulardan ba'zilari quyidagilardir: boshqotirmalarni hal qilish; qiziqarli o'yinlar, yo'llar, elektr zanjirlari, integral sxemalari va boshqarish sistemalarini loyihalashtirish; avtomatlar, blok-sxemalar va komp'yuter uchun programmalarni tadqiq qilish va hokazo.

Avvalo, grafning abstrakt matematik tushuncha sifatidagi ta'rifini va boshqa ba'zi sodda tushunchalarni keltiramiz. V qandaydir bo'shmas to'plam bo'lsin. Uning $v_1 \in V$ va $v_2 \in V$ elementlaridan tuzilgan $< v_1, v_2 >$ ko'rinishdagi barcha juftliklar (kortejlar) to'plamini (V to'plamning o'z-o'ziga Dekart ko'paytmasini) $V \times V$ bilan belgilaymiz.

Graf deb shunday $< V, U >$ juftlikka aytiladiki, bu yerda $V \neq \varnothing$ va $U - < v_1, v_2 >$ ($v_1 \in V$, $v_2 \in V$) ko'rinishdagi juftliklar korteji bo'lib, $V \times V$ to'plamning elementlaridan tuzilgandir. Bundan buyon grafni belgilashda $< V, U >$ yozuv o'rniga (V, U) yozuvdan foydalanamiz. Grafning tashkil etuvchilarini ko'rsatish muhim bo'lmasa, u holda uni lotin alifbosining bitta harfi, masalan, G bilan belgilaymiz. $G = (V, U)$ graf berilgan bo'lsin. V to'plamning elementlariga G grafning uchlari, V to'plamning o'ziga esa, graf uchlari to'plami deyiladi.

Graflar nazariyasida “uch” iborasi o’rniga, ba’zan, tugun yoki nuqta iborasi ham qo’llaniladi. Umuman olganda, hanuzgacha graflar nazariyasining ba’zi iboralari bo’yicha umumiy kelishuv qaror topmagan. $G=(V,U)$ grafning ta’rifiga ko’ra, U bo’sh kortej bo’lishi ham mumkin. Agar U bo’sh bo’lmasa, u holda bu kortej (a,b) ($a\in V$, $b\in V$) ko’rinishdagi juftliklardan tashkil topadi, bunda $a=b$ bo’lishi hamda ixtiyoriy (a,b) juftlik U kortejda istalgancha marta qatnashishi mumkin. $(a,b)\in U$ juftlikni tashkil etuvchi a va b uchlarning joylashish tartibidan bog’liq holda, ya’ni yo’nalishning borligi yoki yo’qligiga qarab, uni turlicha atash mumkin. Agar (a,b) juftlik uchun uni tashkil etuvchilarning joylashish tartibi ahamiyatsiz, ya’ni $(a,b)=(b,a)$ bo’lsa, (a,b) juftlikka yo’naltirilmagan (oriyentirlanmagan) qirra (yoki, qisqacha, qirra) deyiladi. Agar bu tartib muhim, ya’ni $(a,b)\neq(b,a)$ bo’lsa, u holda (a,b) juftlikka yoy yoki yo’naltirilgan (oriyentirlangan) qirra deyiladi.

U kortejning tarkibiga qarab, uni yo grafning qirralari korteji, yo yoylari korteji, yoki qirralari va yoylari korteji deb ataymiz.

Grafning uchlari va qirralari (yoylari) uning elementlari deb ataladi. $G=(V,U)$ graf elementlarining soni ($|V|+|U|$)ga tengdir, bu yerda G grafning uchlari soni $|V|\neq 0$ va $|U|$ bilan uning qirralari (yoylari) soni belgilangan.

Grafning qirrasi (yoyi), odatda, uni tashkil etuvchi uchlar yordamida (a,b), yoki ab, yoki $(a;b)$ ko'rinishda belgilanadi. Boshqa belgilashlar ham ishlatiladi: masalan, yoy uchun $(\overrightarrow{a,b})$ yoki $(\overline{a,b})$, qirra uchun $(\overleftrightarrow{a,b})$, yoy yoki qirra uchun u (ya'ni uchlari ko'rsatilmasdan bitta harf vositasida) ko'rinishda.

Graf yoyi uchun uning chetki uchlarini ko'rsatish tartibi muhim ekanligini ta'kidlaymiz, ya'ni (a,b) va (b,a) yozuvlar bir-biridan farq qiluvchi yoylarni ifodalaydi. Agar yoy (a,b) ko'rinishda ifodalangan bo'lsa, u holda a uning boshlang'ich uchi, b esa oxirgi uchi deb ataladi. Bundan tashqari, yoy (a,b) ko'rinishda yozilsa, u haqida a uchdan chiquvchi (boshlanuvchi) va b uchga kiruvchi (uchda tugovchi) yoy deb aytish ham odat tusiga kirgan.

Qirra uchun uning (a,b) yozuvidagi harflar joylashish tartibi muhim rol o'ynamaydi va a va b elementlar qirraning uchlari yoki chetlari deb ataladi.

Agar grafda yo (a,b) qirra, yo (a,b) yoy, yoki (b,a) yoy topilsa, u holda a va b uchlar **tutashtirilgan** deyiladi. Agar grafning ikkita uchini tutashtiruvchi qirra yoki yoy bor bo'lsa, u holda ular **qo'shni uchlar** deb, aks holda esa, **qo'shni bo'lmagan uchlar** deb aytiladi.

Grafning ikkita uchi qo'shni bo'lsa, ular shu uchlarni tutashtiruvchi qirraga (yoyga) **insident**, o'z navbatida, qirra yoki yoy bu uchlarga **insident** deyiladi.
Grafda ikkita qirra (yoy) umumiy chetga ega bo'lsa, ular **qo'shni qirralar** (yoylar) deyiladi.

Shuni ta'kidlash kerakki, qo'shnilik tushunchasi grafning bir jinsli, insidentlik tushunchasi esa uning turli jinsli elementlari orasidagi munosabatni ifodalaydi.

Ba'zan graf undagi elementlar soniga qarab, ya'ni uchlar soni m va qirralar (yoylar) soni n ga qarab belgilanadi va bu holda grafni (m,n)-graf deb ataydilar.
Agar $G=(V,U)$ grafda U kortej faqat qirralardan iborat bo'lsa, u holda yo'naltirilmagan (oriyentirlanmagan) va faqat yo'naltirilgan (oriyentirlangan) qirralardan (ya'ni, yoylardan) tashkil topgan bo'lsa, u holda u yo'naltirilgan (oriyentirlangan) graf deb ataladi. Oriyentirlangan graf, qisqacha, **orgraf** deb ham ataladi.

Qator hollarda oriyentirlanmagan qirralari ham, oriyentirlangan qirralari ham bo'lgan graflar bilan ish ko'rishga to'g'ri keladi. Bunday graflar **aralash graflar** deb ataladi.

Agar $G=(V,U)$ grafning (orgrafning) U korteji tarkibida $V\times V$ to'plamdan olingan takrorlanuvchi elementlar bo'lsa, u holda ular karrali yoki parallel qirralar (yoylar) deb ataladi. Karrali qirralari yoki yoylari bo'lgan graf **multigraf** deyiladi.

Ikkala chetki (boshlang'ich va oxirgi) uchlari ustma-ust tushgan qirra (yoy), ya'ni grafning $(a,a)\in U$ **sirtmoq** elementi deb ataladi. Sirtmoq, odatda, yo'naltirilmagan deb hisoblanadi. Qirralari (yoylari) orasida sirtmoqlari bo'lgan graf **psevdograf** deyiladi.

Umumiy holda uchlar to'plami V va (yoki) qirralar (yoylar, qirra va yoylar) korteji U cheksiz ko'p elementli bo'lishi mumkin. Bundan keyin V to'plam va U kortej faqat chekli bo'lgan $G=(V,U)$ graflarni qaraymiz. Bunday graflar **chekli graflar** deb ataladi.

Hech qanaqa qirra (yoy) bilan bog'lanmagan uch **yakkalangan uch** deb ataladi. Faqat yakkalangan uchlardan tashkil topgan graf (ya'ni, grafda qirralar va yoylar bo'lmasa) **nolgraf** yoki bo'sh graf deb ataladi. Uchlari soni $m$ga teng bo'lgan bo'sh grafni O_m kabi belgilash qabul qilingan.

Istalgan ikkita uchlari qo'shni bo'lgan **sirtmoqsiz va karrali qirralarsiz oriyentirlanmagan graf to'la graf** deb ataladi. Uchlari soni m ga teng bo'lgan to'la graf K_m bilan belgilanadi. Ravshanki, K_m grafning qirralar soni $C_m^2 = \dfrac{m(m-1)}{2}$ bo'ladi.

Agar orgrafning istalgan ikkita uchini har bir yo'nalishda tutashtiruvchi faqat bittadan yoy mavjud bo'lsa, u holda unga **to'la orgraf** deb ataladi. Ravshanki, to'la grafdagi qirralarning har birini ikkita (yo'nalishlari bir-biriga qarama-qarshi bo'lgan) yoylarga almashtirilsa, natijada to'la orgraf hosil bo'ladi. Shuning uchun, to'la orgrafdagi yoylar soni oriyentirlanmagan to'la grafdagi qirralar sonidan ikki baravar ko'pdir, ya'ni uchlari m ta bo'lgan **to'la orgrafdagi yoylar soni** $2C_m^2 = m(m-1)$ **bo'ladi.**

Agar grafning uchlariga qandaydir belgilar, masalan, $1,2,...,m$ sonlari mos qo'yilgan bo'lsa, u **belgilangan graf** deb ataladi.

Agar $G=(V,U)$ va $G'=(V',U')$ graflarning uchlari to'plamlari, ya'ni V va V' to'plamlar orasida uchlarning qo'shnilik munosabatini saqlaydigan o'zaro bir qiymatli moslik o'rnatish mumkin bo'lsa, u holda G va G' graflar **izomorf graflar** deb ataladi. Bu ta'rifni quyidagicha ham ifodalash mumkin: agar $\forall\, x,y \in V$ va ularga mos bo'lgan $x', y' \in V'$ ($x \leftrightarrow y$, $x' \leftrightarrow y'$) uchun $xy \leftrightarrow x'y'$ ($xy \in U$, $x'y' \in U'$) bo'lsa, u holda G va G' graflar izomorfdir. Agar izomorf graflardan biri oriyentirlangan bo'lsa, u holda ikkinchisi ham, albatta, oriyentirlangan bo'lishi va ulardagi mos yoylarning yo'nalishlari ham bir-birlariga mos bo'lishlari shart.

Graf uchiga insident qirralar soni shu uchning **lokal darajasi**, yoki, qisqacha, **darajasi**, yoki valentligi deb ataladi. Grafdagi a uchning darajasini $\rho(a)$ bilan belgilaymiz.

Sirtmoqqa insident bo'lgan uchning darajasini aniqlashda shuni e'tiborga olish kerakki, qaralayotgan masalaga bog'liq holda sirtmoqni bitta qirra deb ham, ikkita qirra deb ham hisoblash mumkin. Ravshanki, ajralgan uchning darajasi nolga teng. Darajasi birga teng uch chetki uch deb ataladi. Chetki uchga insident qirra ham chetki qirra deb ataladi.

Agar grafning barcha uchlari bir xil r darajaga ega bo'lsa, u holda bunday graf r **darajali regulyar graf** deb ataladi. Uch darajali regulyar graf kubik graf deb ataladi. O_m graf nol darajali regulyar graf ekanligini, K_m esa $(m-1)$ darajali regulyar graf ekanligini ta'kidlaymiz.

Ko'rinib turibdiki, oriyentirlanmagan grafda barcha uchlar darajalarining yig'indisi qirralar sonining ikki baravariga teng juft son bo'ladi, chunki qirralarni sanaganda har bir qirra hisobda ikki marta qatnashadi. Shunday qilib, XVIII asrdayoq L.Eyler tomonidan isbotlangan quyidagi tasdiq o'rinli.

1.1.1-Lemma. ("ko'rishishlar" haqida). Ixtiyoriy oriyentirlanmagan grafda barcha uchlar darajalari yig'indisi qirralar sonining ikki baravariga teng.

Agar grafning uchlar to'plamini o'zaro kesishmaydigan shunday ikkita qism to'plamlarga (bo'laklarga) ajratish mumkin bo'lsaki, grafning ixtiyoriy qirrasi bu to'plamlarning biridan olingan qandaydir uchni ikkinchi to'plamdan olingan biror uch bilan tutashtiradigan bo'lsa, u holda bunday graf ikki bo'lakli graf (bixromatik yoki Kyonig grafi) deb ataladi. Ta'rifdan ko'rinib turibdiki, ikki bo'lakli grafning har bir bo'lagidagi ixtiyoriy ikkita uchlar qo'shni bo'la olmaydi. Biror bo'lagida faqat bitta uch bo'lgan to'la ikki bo'lakli graf yulduz deb ataladi.

Agar ikki bo'lakli grafning turli bo'laklariga tegishli istalgan ikkita uchi qo'shni bo'lsa, u holda bu graf to'la ikki bo'lakli graf deb ataladi. To'la ikki bo'lakli grafni $K_{m,n}$ bilan belgilaymiz, bu yerda m va n bilan grafning bo'laklaridagi uchlar sonlari belgilangan. $K_{m,n}=(V,U)$ graf uchun $|V|=m+n$ va $|U|=mn$ bo'lishi ravshan, bu yerda $|V|$ – $K_{m,n}$ grafning uchlari soni, $|U|$ – uning qirralari soni. Ikkidan katta ixtiyoriy natural k son uchun k bo'lakli graf tushunchasini ham kiritish mumkin.

1.1.1-Misol. O'zbekiston Respublikasi hududidagi aeroportlar to'plamini V bilan, bu shaharlar orasida belgilangan vaqt mobaynida amalga oshirilayotgan samolyotlarning uchib qo'nish hodisalari kortejini U bilan belgilaymiz. U holda (V,U) juftlikni graf deb qarash mumkin. Bu yerda grafning uchlariga aeroportlar, yoylariga esa samolyotlarning uchib qo'nish hodisalari mos keladi. Tabiiyki, (V,U) grafda karrali yoylar bo'lishi mumkin, agar, qandaydir sababga ko'ra, samolyot uchgan aeroportga qaytib qo'nsa, u holda bu hodisaga qaralayotgan grafdagi sirtmoq mos keladi.

1.1.2-Misol. Qadimgi boshqotirma masalalar qatoriga kiruvchi quyidagi masalani qaraymiz. Biror idishdagi hajmi 8 birlik suyuqlikni faqat o'sha idish hamda 5 va 3 birlik hajmli idishlar vositasida teng ikki qismga bo'ling. 8, 5 va 3 birlik hajmli idishlardagi suyuqlik hajmini mos ravishda a, b va c bilan belgilab, muayyan bir vaqt uchun idishlardagi suyqlikning hajmlari asosida qaralayotgan sistemaning holatini ifodalovchi $<a,b,c>$ uchliklarni tuzamiz. Masalaning shartiga ko'ra a, b va c o'zgaruvchilar butun qiymatlar qabul qilgan holda $0 \le a \le 8$, $0 \le b \le 5$ va $0 \le c \le 3$ shartlarni qanoatlantirishlari kerak. Bu shartlarni qanoatlantiruvchi holatlar quyidagilardir:

$$<8,0,0>,\ <7,1,0>,\ <7,0,1>,\ <6,2,0>,\ <6,1,1>,\ <6,0,2>,\ <5,3,0>,\ <5,2,1>,\ <5,1,2>,$$
$$<5,0,3>,\ <4,4,0>,\ <4,3,1>,\ <4,2,2>,\ <4,1,3>,\ <3,5,0>,\ <3,4,1>,\ <3,3,2>,\ <3,2,3>,$$
$$<2,5,1>,\ <2,4,2>,\ <2,3,3>,\ <1,5,2>,\ <1,4,3>,\ <0,5,3>.$$

Holatlar to'plamini V bilan belgilaymiz. Suyuqlikni (yoki uning bir qismini) idishlarning biridan boshqa birortasiga quyish natijasida sistema bir holatdan boshqa holatga o'tishi mumkin. Ta'kidlash kerakki, yuqoridagi holatlarning ixtiyoriysidan boshqa birortasiga bevosita yoki bilvosita o'tish imkoniyati mavjud bo'lmasligi ham mumkin. Sistemaning bir holatdan boshqa holatga bevosita o'tishlari to'plamini U

bilan belgilaymiz. Natijada hosil bo'lgan (V,U) juftlikni graf deb qarash mumkin. Bu grafning uchlari sistema holatlariga, yoylari (qirralari) esa, bevosita o'tishlarga mos keladi.

Berilgan masalani hal qilish uchun (V,U) grafning yoylaridan tashkil topgan shunday ketma-ketlik tuzish kerakki, bu ketma-ketlikning birinchi hadi $<8,0,0>$, oxirgi hadi esa $<4,4,0>$ bo'lsin. Bunday ketma-ketliklardan biri quyida keltirilgan:

$$<8,0,0>,\ <5,0,3>,\ <5,3,0>,\ <2,3,3>,\ <2,5,1>,$$

$$<7,0,1>,\ <7,1,0>,\ <4,1,3>,\ <4,4,0>.$$

1.2 Grafning geometrik ifodalanishi va maxsus turdagi ko'phad yordamida berilishi

Grafning geometrik ifodalanishi: Graflarning turlicha berilish usullari mavjud. Grafning abstrakt matematik ta'rifi uning berilish usullaridan biridir. Grafning abstrakt matematik ta'rifi uni tasavvur qilish, anglash, uning xossalarini o'rganish va bu xossalarni amalda qo'llash jarayonida ba'zi qiyinchiliklar tug'dirishi tabiiydir. Shuning uchun grafning boshqa berilish usullaridan ham foydalaniladi. Masalan, grafning elementlarini, ya'ni uchlari va qirralarini (yoylarini) yozish yoki aytish grafning berilish usuli sifatida qaralishi munkin. Albatta, grafning yana boshqa berilish usullari ham mavjud. Quyida bu usullarning bir nechasi bilan tanishamiz.

Grafning uchlarini tekislikda yoki fazoda nuqtalar bilan, qirralarini (yoylarini) esa mos uchlarni tutashtiruvchi uzluksiz chiziqlar bilan ifodalab, qandaydir diagrammaga – grafning ko'rgazmali tasviriga ega bo'lamiz. Agar uchlar to'plami va bu uchlarning tutashishlarini ko'rgazmali qilib taqdim qilish kerak bo'lsa, grafning geometrik tasvirlanishiga mos shaklni qog'ozda chizib grafni tasvirlash mumkin.Shuni

Shuni ta'kidlaymizki, ba'zi hollarda diagrammada graf uchlari doirachalar yordamida yoki qandaydir boshqa usulda ifodalanadi. Grafning qirralariga (yoylariga) mos chiziqlarning to'g'ri yoki egri bo'lishi va ularning uzunligi ahamiyatga ega emas. Muhimi, bu chiziqlar uzluksiz bo'lib, grafning qandaydir ikkita uchlarini tutashtirishi lozim. Agar qirra yo'nalishga ega bo'lsa (ya'ni u yoy bo'lsa), u holda bunday qirrani ifodalovchi chiziqda yo'nalish biror usul bilan, masalan, strelka bilan ko'rsatiladi. Ixtiyoriy graf uchun bunday diagrammalarni istalgancha tuzish mukinligi ravshan. Agar biror diagrammada grafning uchlariga mos keluvchi nuqtalar ustma-ust tushmasa, qirralarga mos keluvchi chiziqlar, chetki nuqtalarni hisobga olmaganda, umumiy nuqtalarga ega bo'lmasa, bunday diagramma grafning geometrik ifodalanishi deyiladi. Shuni ta'kidlash kerakki, bitta graf turlicha geometrik ifodalanishi mumkin.

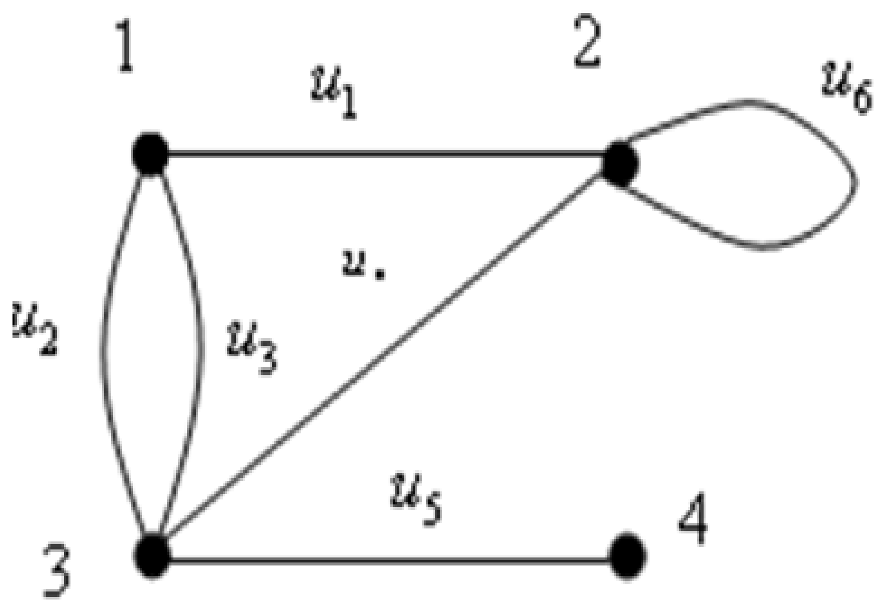
Graflar izomorfligining ta'rifi va grafni geometrik ifodalashning mohiyatidan kelib chiqadiki, abstrakt ta'rif yordamida ifodalangan graf va uning geometrik ifodalanishi o'zaro izomorf bo'ladi. Tabiiyki, izomorf graflar turlicha geometrik ifodalanishlari mumkin.

1.2.1- Teorema. Har qanday chekli grafni 3 o'lchovli Yevklid fazosida geometrik ifodalash mumkin.

Isboti. Teoremaning quyidagi konstruktiv isbotini keltiramiz. Grafning abstrakt ta'rifiga binoan uning hech bo'lmasa bitta uchi mavjud. Agar grafda faqat bitta uch bo'lsa, u holda uni 3 o'lchovli Evklid fazosining biror nuqtasi sifatida ifodalaymiz. Agar grafda uchlar bittadan ko'p bo'lsa, u holda ularni uch o'lchovli Yevklid fazosidagi biror to'g'ri chiziqning (hech qaysi ikkitasi ustma-ust tushmaydigan) nuqtalariga mos keladi deb hisoblaymiz. Shu to'g'ri chiziqdan qirralarning (yoylarning) har biriga mos keluvchi turli yarim tekisliklarni o'tkazamiz (graf chekli bo'lgani uchun buning imkoniyati bor). Har bir qirrani (yoyni) unga mos yarim tekislikda, chetlari mos uchlarni ifodalovchi nuqtalarda bo'lgan hamda bu to'g'ri chiziq bilan boshqa umumiy nuqtasi bo'lmagan qandaydir chiziq vositasida ifodalaymiz. Yarim tekisliklarning tuzilishiga ko'ra bu chiziqlar, chetki nuqtalarni hisobga olmaganda, umumiy nuqtalarga ega emas.

Graflarning geometrik ifodalanishiga doir misollar keltiramiz.

1.2.1- Misol.

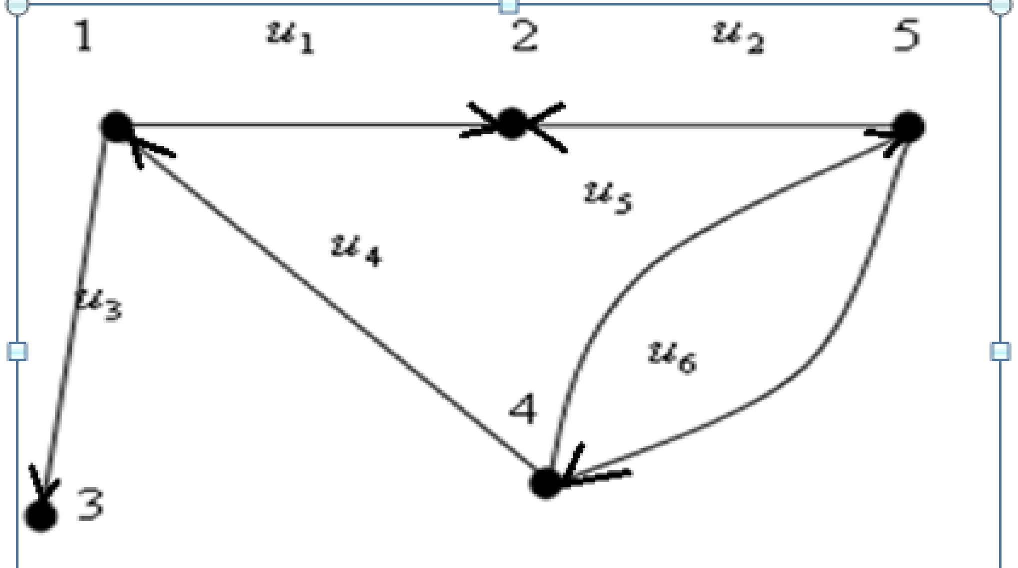


1.2.1- shakl

1.2.1- shaklda tasvirlangan grafni $G=(V,U)$ deb belgilaymiz. Berilgan G graf belgilangan graf bo'lib, 4ta uch va 6ta qirraga ega. Demak, u (4,6)-grafdir. Bu graf uchun: $V=\{1,2,3,4\}$, $U=<u_1,u_2,u_3,u_4,u_5,u_6>$, $u_1=(1,2)$, $u_2=u_3=(1,3)$, $u_4=(2,3)$, $u_5=(3,4)$, $u_6=(2,2)$. G grafning barcha u_i $(i=\overline{1,6})$ qirralari oriyentirlanmagan bo'lgani uchun G

oriyentirlanmagan grafdir. Grafning qirralaridan biri, aniqrog'i, u_6 sirtmoqdir, u_2 va u_3 esa karrali qirralardir. Bu grafda, masalan, 1 va 2 uchlar qo'shni, 1 va 4 uchlar esa qo'shni emas. Undagi 2 va 3 uchlar u_4 qirraga insident va, aksincha, u_4 qirra 2 va 3 uchlarga insidentdir. Bu yerda u_4 va u_5 qirralar qo'shni qirralardir, chunki ular umumiy uchga (3 uch) ega, u_1 va u_5 qirralar esa qo'shni emas.

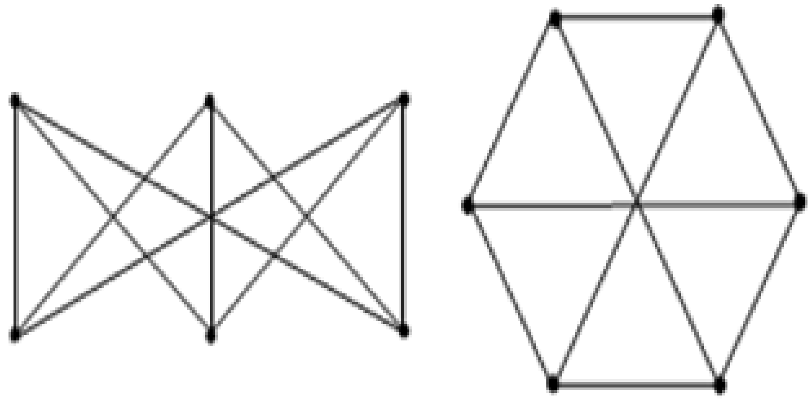
1.2.2- Misol. Geometrik ifodalanishi 1.2.2-shakldagi ko'rinishda bo'lgan oriyentirlangan grafni qaraymiz.



1.2.2-shakl

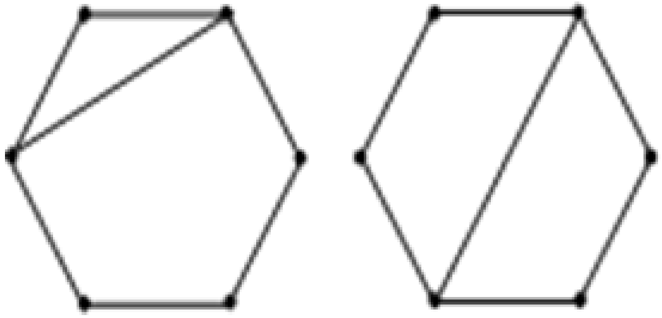
Bu grafda o'n bitta element bor: 5ta uch va 6ta yoy, ya'ni shaklda (5,6)-orgraf berilgan. Bu grafni $G=(V,U)$ bilan belgilaymiz, bu yerda $V=\{1,2,3,4,5\}$, $U=<(1,2),(1,3),(5,2),(4,1),(4,5),(5,4)>$ yoki $U=<u_1,u_2,u_3,u_4,u_5,u_6>$. Berilgan G orgrafda sirtmoq ham, karrali yoylar ham yo'q. Bu grafning $(1,3)$ yoyi uchun 1 boshlang'ich, 3 uch esa oxirgi uchdir.

1.2.3- Misol. 1.2.3- shaklda tasvirlangan graflar bir-biriga izomorfdir.



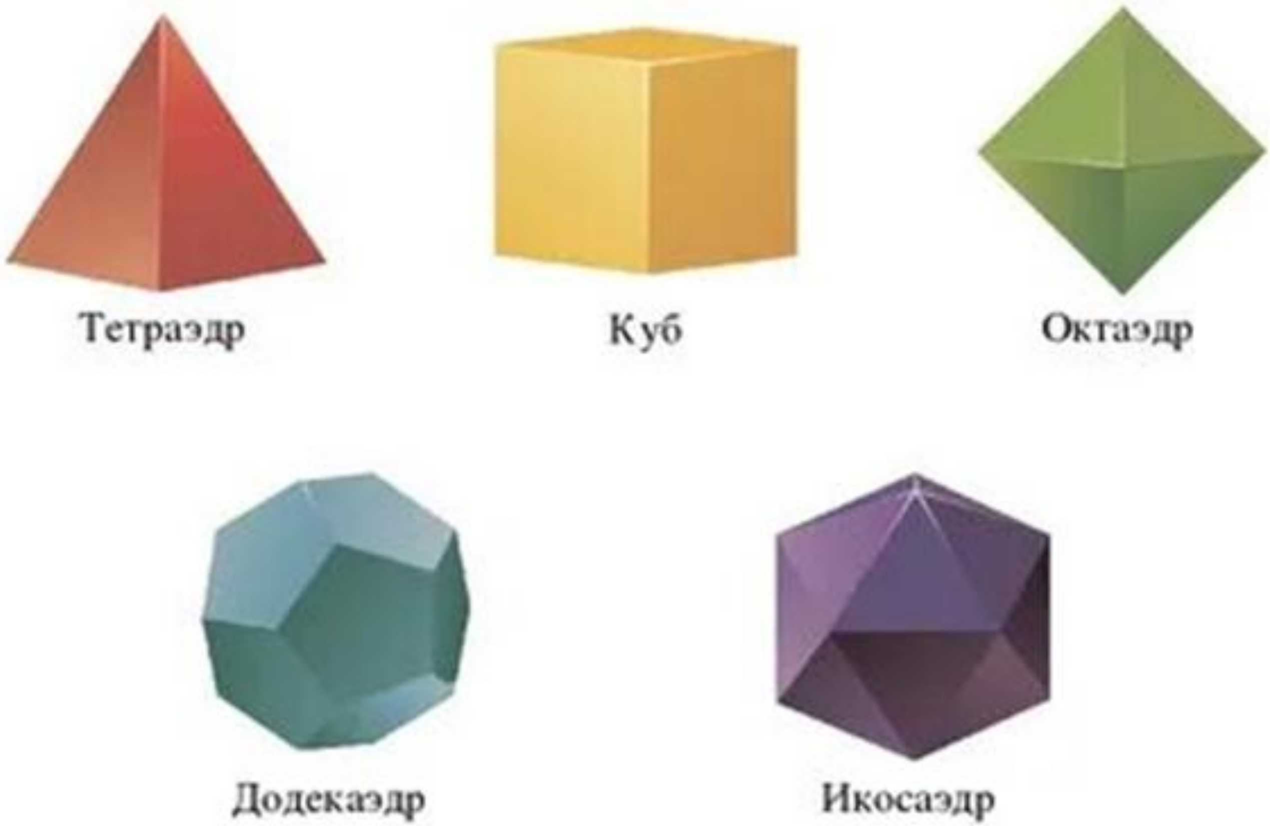
1.2.3- shakl

1.2.4- Misol. 1.2.4-shaklda tasvirlangan graflarning har biri oltita uch va yettita qirralarga ega bo'lib, ular izomorf emas.



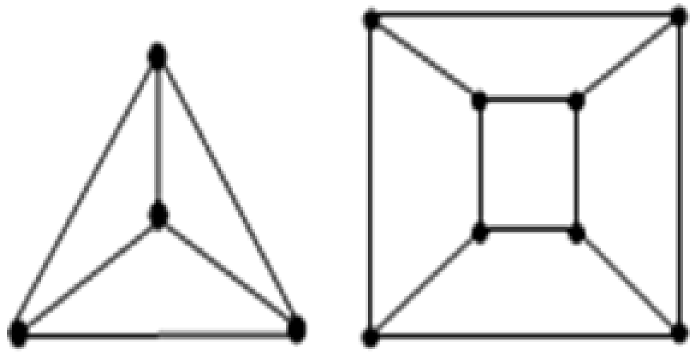
1.2.4-shakl

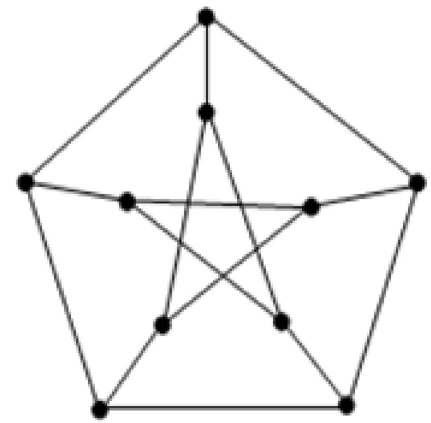
Hammasi bo’lib beshta qavariq muntazam ko’pyoqli mavjudligi qadimdan ma’lum (Evklid isbotlagan): tetraedr, kub, oktaedr, dodekaedr va ikosaedr.



Bu ko’pyoqlilarning umumiy nomi ham bor Platon jismlari. Shunisi qiziqki, barcha Platon jismlariga mos graflar tekislikda geometrik ifodalanadi. Masalan, tetraedr va

Masalan, tetraedr va kubga mos graflarning geometrik ifodalanishi 1.2.5-shaklda tasvirlangan.



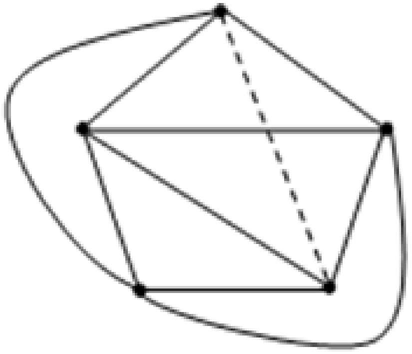


1.2.5-shakl 1.2.6- shaklda

Petersin grafi deb ataluvchi 1.2.6- shaklda tasvirlangan graf ham kubik grafdir. Agar graf tekislikda geometrik ifodalanishga ega bo’lsa, u holda bunday graf tekis (yassi) graf deb ataladi. Bunday graf tekislikda yotuvchi graf deb ham atalishi mumkin.

Boshqacha so'zlar bilan aytganda, tekis grafning barcha uchlari bir tekislikda yotadi hamda barcha qirralari (yoylari) o'sha tekislikda yotuvchi o'zaro kesishmaydigan uzluksiz chiziqlar bo'lib, ular faqat o'zlari insident bo'lgan uchlardagina umumiy nuqtalarga ega. Platon jismlariga mos barcha graflar tekis graflardir. Tekis grafga izomorf graf **planar graf** deb ataladi.

Tekis bo'lmagan grafga yana bir misol beshta uchga ega bo'lgan to'la graf – K_5 grafdir. Bu grafning o'nta qirralari borligi ravshan. Bu yerda ham K_5 grafni hech qaysi ikkita qirralari kesishmaydigan qilib tekislikda chizish muvaffaqiyatsiz tugaydi.



1.2.7-shaklda

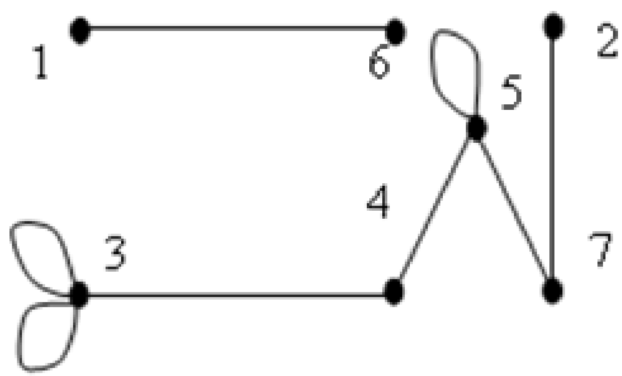
1.2.7-shaklda K_5 grafning to'qqizta qirrasi kesishmaydigan uzluksiz chiziqlar

Grafning maxsus turdagi ko'phad yordamida berilishi: Grafni maxsus turdagi ko'phad yordamida ham berish mumkinligini ta'kidlaymiz. Uchlari to'plami $V=\{v_1,v_2,\ldots,v_m\}$ bo'lgan G graf berilgan bo'lsin. G grafning yakkalangan uchlari yo'q deb faraz qilamiz. Bu grafni m ta $x_1,x_2,\ldots,x_m$ o'zgaruvchilarga bog'liq

$$f(G)=x_1^{\sigma_1}x_2^{\sigma_2}\ldots x_m^{\sigma_m}\prod_{i<j}(x_j-x_i)^{\alpha_{ij}}$$

ko'rinishdagi ko'phad yordamida tasvirlash mumkin, bu yerda ko'paytma $i<j$ shartni qanoatlantiruvchi barcha (i,j) juftlar bo'yicha amalga oshiriladi, x_i o'zgaruvchi $v_i \in V$ uchga mos keladi, α_{ij} – v_i va v_j uchlarni tutashtiruvchi qirralar soni, σ_i – v_i uchdagi sirtmoqlar soni. $f(G)$ ko'phad G grafga izomorflik aniqligida mos kelishini isbotlash mumkin.

1.2.5-Misol. 1.2.8-shaklda tasvirlangan G grafga mos ko'phadni aniqlaymiz. Berilgan oriyentirlanmagan grafda yettita uch va sakkizta qirra bor. Uning har bir uchiga bitta x_i ($i=1,2,...,7$) o'zgaruvchini mos qilib qo'yamiz. G grafda karrali qirralari yo'q, uning uchta qirrasi sirtmoq-lardan iborat bo'lib, ulardan ikkitasi 3 uchga, biri esa 5 uchga insidentdir. Shuning uchun $\sigma_1=\sigma_2=\sigma_4=\sigma_6=\sigma_7=0$, $\sigma_3=2$, $\sigma_5=1$; $\alpha_{16}=\alpha_{27}=\alpha_{34}=\alpha_{45}=\alpha_{57}=1$, qolgan barcha $\alpha_{ij}=0$ bo'ladi. Berilgan G grafga mos ko'phad



$$f(G)=x_3^2x_5(x_6-x_1)(x_7-x_2)(x_4-x_3)(x_5-x_4)(x_7-x_5)$$

1.3. Qo'shnilik va insidentlik matritsalari.

Endi grafning boshqa bir berilish usuli negizida yotuvchi graf uchlari qo'shniligi matritsasi tushunchasini qarab chiqamiz.

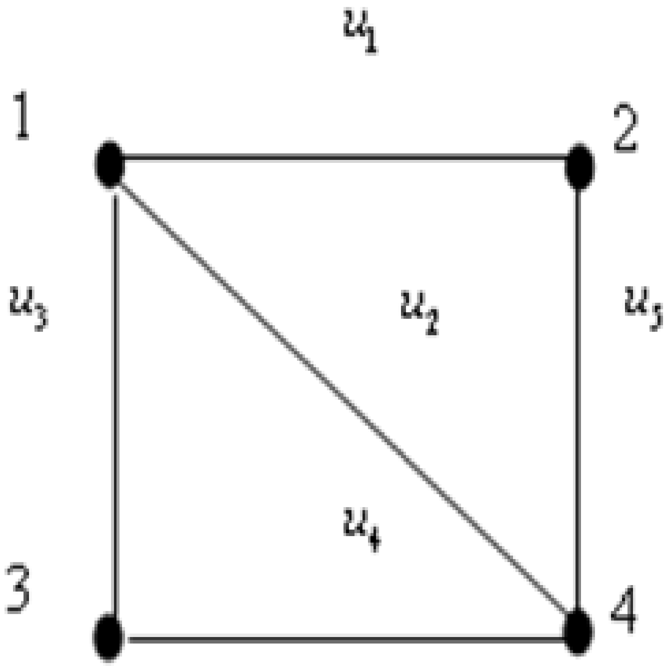
$G=(V,U)$ – uchlari soni $m$ga teng bo'lgan belgilangan, sirtmoqsiz va karrali qirralarsiz graf bo'lsin.

Elementlari $a_{ij}=\begin{cases}1, & \text{agar } i \text{ va } j \text{ uchlar qo'shni bo'lsa,}\\ 0, & \text{aks holda.}\end{cases}$ ko'rinishda aniqlangan $A=(a_{ij})$ $(i=1,2,...,m;\ j=1,2,...,m)$ matritsani grafning uchlari qo'shniligi matritsasi deb ataymiz.

Bu ta'rifdan sirtmoqsiz va karrali qirralari bo'lmagan graf uchlari qo'shniligi matritsasining bosh diagonalida faqat nollar bo'lishi, satrlaridagi birlar soni esa mos uchlarning darajalariga tengligi kelib chiqadi.

1.3.1-Misol. 1.3.1-shaklda tasvirlangan grafgning uchlari qo'shniligi matritsasi

1.3.1-Misol. 1.3.1-shaklda tasvirlangan grafgning uchlari qo'shniligi matritsasi

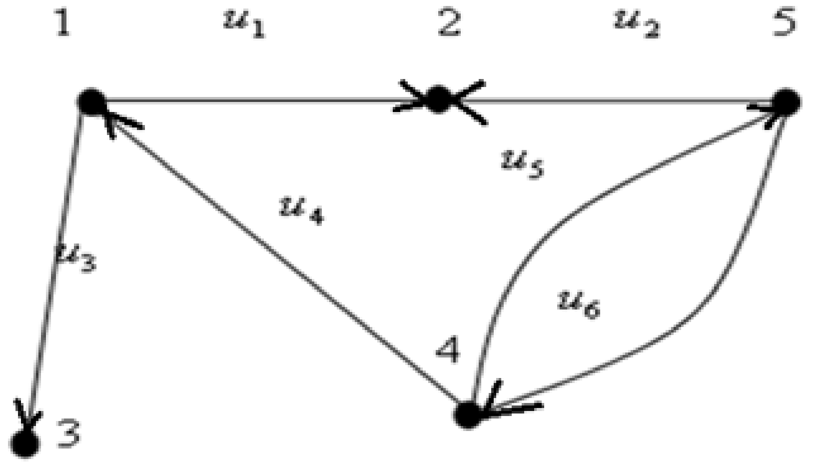


$$A=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$ ko'rinishda bo'ladi.

1.3.1- shakl

Uchlari soni $m$ga teng bo'lgan belgilangan oriyentirlangan $G=(V,U)$ grafning uchlari qo'shniligi $m\times m$-matritsasi deb elementlari $a_{ij}=\begin{cases}1, & \text{agar } (i,j)\in U \text{ bo'lsa,}\\ 0, & \text{aks holda}\end{cases}$ ko'rinishda aniqlangan $A=(a_{ij})$ $(i=1,2,...,m,\ j=1,2,...,m)$ matritsaga aytiladi.

1.3.2-Misol. 1.2.2-shaklda tasvirlangan orgrafning uchlari qo'shniligi matritsasi quyidagicha bo'ladi:

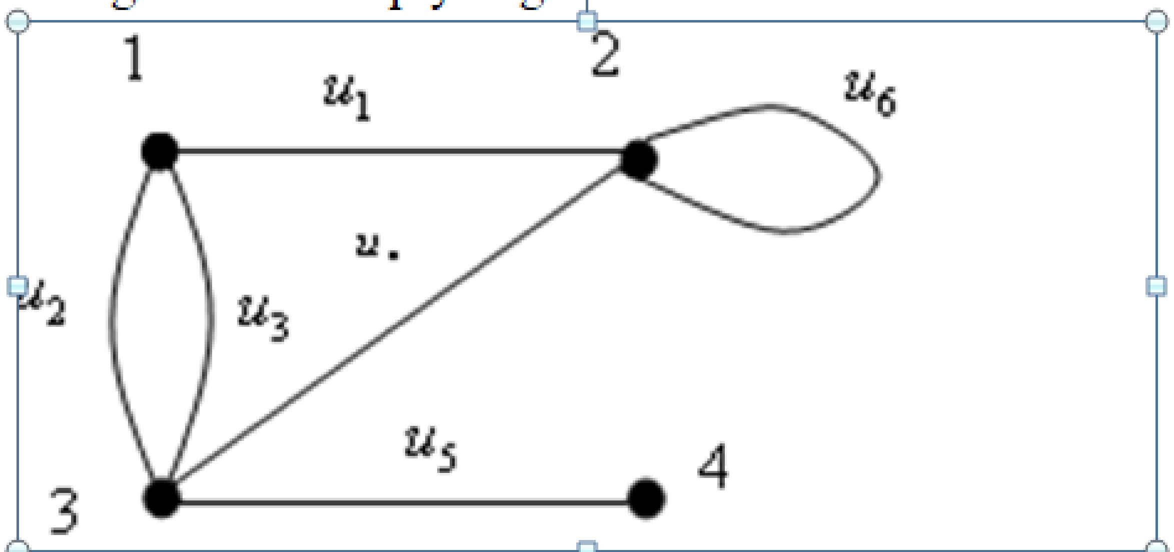


1.2.2-shakl

$$A=\begin{pmatrix}0&1&1&0&0\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\\1&0&0&0&1\\0&1&0&1&0\end{pmatrix}.$$

Endi G uchlari $1,2,...,m$ bo'lgan belgilangan oriyentirlanmagan multigraf bo'lsin. a_{ij} elementlari G grafning i va j uchlarini tutashtiruvchi qirralar soniga teng bo'lgan $A=(a_{ij})$ $(i,j=1,2,...,m)$ matritsa oriyentirlanmagan multigrafning uchlari qo'shniligi matritsasi deb ataladi.

1.3.3-Misol. 1.2.1- shaklda tasvirlangan oriyentirlanmagan multigraf uchlari qo'shniligi matritsasi quyidagicha bo'ladi:



1.2.1- shakl

$$A=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Karrali yoylari bo'lgan sirtmoqsiz orgraf uchlari qo'shniligi matritsasi tushunchasini ham yuqoridagiga o'xshash ta'riflash mumkin.

1.3.1-Teorema. Graflar faqat va faqat uchlari qo'shniligi matritsalari bir-birlaridan satrlarining o'rinlarini va ustunlarining o'rinlarini mos almashtirishlar yordamida hosil bo'lsagina izomorf bo'lishadi.

Isboti. Abstrakt grafga, uning uchlarini belgilashga (raqamlashga) bog'liq ravishda, turlicha qo'shnilik matritsalari mos kelishi tabiiydir. Bu matritsalarni solishtirish maqsadida har birining $m$ta uchlari bo'lgan ixtiyoriy ikkita belgilangan, o'zaro izomorf G va H graflarni qaraymiz. G va H graflar uchlariga mos qo'yilgan belgilar turlicha va ulardan biri boshqasidan uchlarning qo'shniligini saqlovchi qandaydir f qoidani qo'llab hosil qilingan bo'lsin, ya'ni H grafdagi $f(u_i)$ va $f(u_j)$ uchlar faqat va faqat G grafning u_i va u_j uchlari qo'shni bo'lsagina qo'shni bo'lsin. G grafning uchlari qo'shniligi matritsasini $A=(a_{ij})$ $(i,j=1,2,...,m)$ bilan H grafning uchlari qo'shniligi matritsasini esa $B=(b_{ij})$ $(i,j=1,2,...,m)$ bilan belgilasak, $b_{f(i)f(j)}=a_{ij}$ o'rinli bo'ladi.

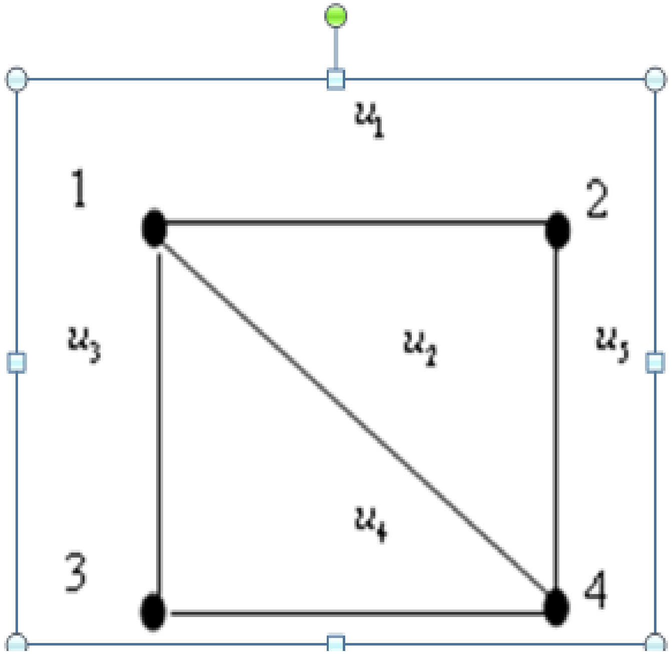
Shunday qilib, manfiymas butun sonlardan tashkil topgan va graf uchun uchlari qo'shniligi matritsasi bo'lgan kvadrat matritsa bilan graf orasida bir qiymatli moslik (izomorflik aniqligida) bor degan xulosa va, bundan, graflar nazariyasi bo'yicha izlanishlar maxsus shartlarni qanoatlantiruvchi mat-ritsalarni tadqiq qilishga keltirilishi mumkinligi kelib chiqadi.

$u_1, u_2, \ldots, u_n$ $(n \geq 1)$ qirralarga ega yakkalangan uchlari, sirtmoq va karrali qirralari bo'lmagan graf uchun elementlari

$$c_{ij} = \begin{cases} 1, \text{ agar } u_i \text{ va } u_j \text{ qirralar umumiyuchga ega bo'lsa,} \\ 0, \text{ agar } u_i = u_j \text{ bo'lsa yokiularning umumiyuchi bo'lmasa,} \end{cases}$$

quyidagicha aniqlangan $C = (c_{ij})$ $(i = 1,2,\ldots,n, \quad j = 1,2,\ldots,n)$ $n \times n$-matritsa grafning qirralari qo'shniligi matritsasi deb ataladi.

1.3.4- Misol. 1.3.1- shaklda tasvirlangan grafda 5ta qirra bo'lib, uning qirralari qo'shniligi matritsasi



$$C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$ ko'rinishga egadir.

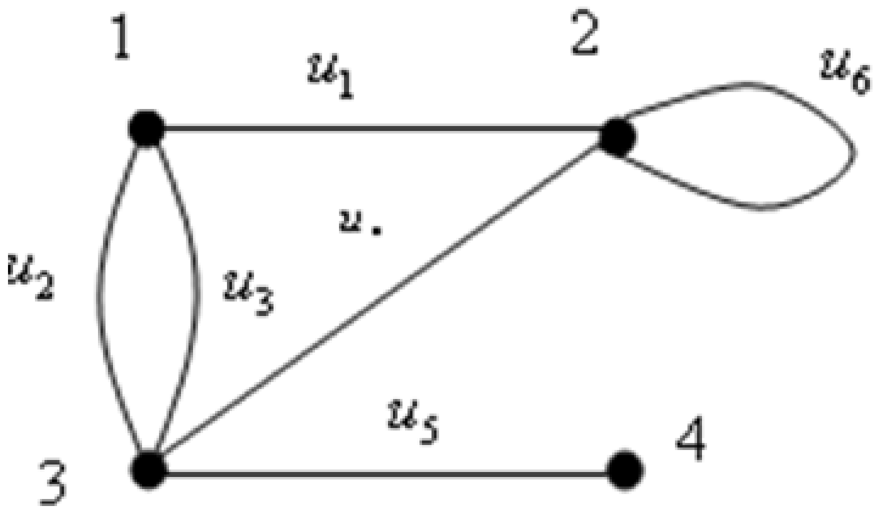
Ravshanki, sirtmoqsiz va karrali qirralarsiz graf qirralari qo'shniligi matritsasi bosh diagonalga nisbatan simmetrik kvadrat matritsadir va uning bosh diagonali nollardan iborat.

Insidentlik matritsalari: Uchlari $1,2,...,m$ va qirralari $u_1,u_2,...,u_n$ $(n \geq 1)$ bo'lgan belgilangan graf berilgan bo'lsin. Bu grafning uchlariga satrlari, qirralariga esa ustunlari mos keluvchi va elementlari

$$b_{ij} = \begin{cases} 1, \text{ agar } i \text{ uch } u_j \text{ qirraga insident bo'lsa,} \\ 0, \text{ agar } i \text{ uch } u_j \text{ qirraga intsident bo'lmasa,} \end{cases}$$

ko'rinishda aniqlangan $B = (b_{ij})$ $(i = 1,2,...,m$, $j = 1,2,...,n)$ matritsa grafning insidentlik matritsasi deb ataladi.

1.3.4- Misol. 1.2.1- shaklda tasvirlangan grafning insidentlik matritsasi quyidagicha bo'ladi:



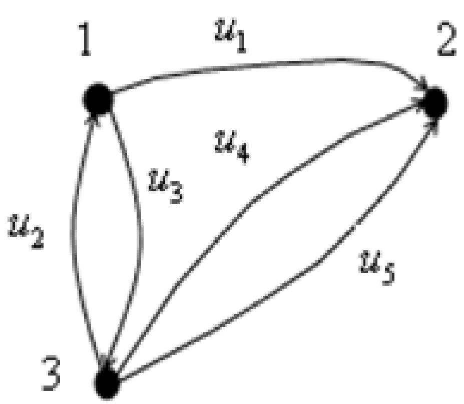
$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Endi uchlari $1,2,...,m$ va qirralari $u_1,u_2,...,u_n$ $(n\geq 1)$ bo'lgan belgilangan sirtmoqsiz orgrafni qaraymiz. Elementlari

$$b_{ij}=\begin{cases} 1, \text{ agar } i \text{ uch } u_j \text{ yoyning boshlang'ich uchi bo'lsa,} \\ -1, \text{ agar } i \text{ uch } u_j \text{ yoyning oxirgi uchi bo'lsa,} \\ 0, \text{ agar } i \text{ uch va } u_j \text{ yoy intsident bo'lmasa.} \end{cases}$$

ko'rinishda aniqlangan $B=(b_{ij})$ ($i=1,2,...,m$, $j=1,2,...,n$) matritsaga grafning insidentlik matritsasi deb ataladi.

1.3.5- Misol. 1.3.2-shaklda tasvirlangan grafning insidentlik matritsasi quyidagicha bo'ladi:



1.3.2-shakl

$$B=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

1.3.2-Teorema. Graflar (orgraflar) faqat va faqat insidentlik matritsalari bir-birlaridan satrlarining o'rinlarini va ustunlarining o'rinlarini mos almashtirishlar yordamida hosil bo'lsagina izomorf bo'lishadi.