16-MAVZU	YECHILISH MUAMMOSI. CHEKLI SOHALARDA YECHILISH MUAMMOSI. YOPIQ FORMULA.

1. **Yechilish muammosi.** Predikatlar mantiqida yechilish muammosi mulohazalar algebrasida qanday qo'yilgan bo'lsa, xuddi shunday qo'yiladi: predikatlar mantiqining istalgan formulasi yoki umumqiymatli, yoki bajariluvchi, yoki aynan yolg'on (bajarilmas) formula ekanligini aniqlab beruvchi algoritm mavjudmi yoki yo'qmi? Bu masala **yechilish muammosi** deb ataladi. Agar bunday algoritm mavjud bo'lsa edi, u (xuddi mulohazalar algebrasidagiday) predikatlar mantiqidagi istalgan formulani aynan chinligini aniqlab beruvchi kriteriyaga keltirilgan bo'lardi.

Agar ushbu muammo mulohazalar algebrasi uchun oson yechilgan bo'lsa, predikatlar mantiqi uchun bu muammoni yechish katta qiyinchiliklarga duch keldi. XX asrning 30-yillarida algoritm tushunchasiga aniq ta'rif berilgandan so'ng mazkur muammo umumiy holda ijobiy hal etilishi mumkin emasligi, ya'ni izlangan algoritm mavjud emasligi ma'lum bo'lib qoldi.

1936 yilda amerikalik olim A.Chyorch predikatlar mantiqining **yechilish muammosi** umumiy holda algoritmik yechilmasligini isbotladi, ya'ni predikatlar mantiqining istalgan formulasi qaysi (umumqiymatli, bajariluvchi va bajarilmas) sinfga kirishini aniqlab beradigan algoritm mavjud emasligini ko'rsatdi.

Yechilish muammosi predikatlar mantiqi uchun ijobiy yechilmasada, predikatlar mantiqi formulalarining ba'zi sinflari uchun bu muammo ijobiy hal etilishini ko'rsataylik.

2. **Chekli sohalarda yechilish muammosi.**

Yechilish muammosi chekli sohalarda yechiluvchidir, ya'ni ijobiy hal bo'ladi. Haqiqatan ham, bu holda kvantorli amallarni kon'yunksiya va diz'yunksiya amallari bilan almashtirish mumkin. Natijada predikatlar mantiqi formulasi mulohazalar algebrasi formulasiga keltiriladi. Ma'lumki, mulohazalar algebrasi uchun yechilish muammosi yechiladigandir.

Masalan, $\forall x \exists y [P(x,y) \vee \overline{P(x,x)}]$ formula $M = \{a,b\}$ ikki elementli chekli sohada aniqlangan bo'lsin. U holda uni ushbu ko'rinishga keltirish mumkin:

$$\forall x \exists y [P(x,y) \vee \overline{P(x,x)}] \equiv \forall x [P(x,a) \vee \overline{P(x,x)} \vee P(x,b)] \equiv$$
$$\equiv [P(a,a) \vee \overline{P(a,a)} \vee P(a,b)] \wedge [P(b,a) \vee \overline{P(b,b)} \vee P(b,b)].$$

Hosil etilgan kon'yunktiv normal shakldagi formulaning har bir elementar diz'yunksiyasi ifodasida bitta mulohaza o'zining inkori bilan birgalikda qatnashmoqda. Demak, mulohazalar algebrasining bu formulasi doimo chin qiymat qabul qiladi, ya'ni **aynan chin** bo'ladi.

3. Tarkibida bir turdagi kvantor amali qatnashuvchi normal shakldagi formulalar uchun yechilish muammosi.

1-ta'rif. *Agar predikatlar mantiqi formulasi tarkibida erkin predmet o'zgaruvchilar bo'lmasa, u holda bunday formula **yopiq** formula deb aytiladi.*

2-ta'rif. *Agar predikatlar mantiqi formulasi C tarkibida $x_1, x_2, ..., x_n$ erkin o'zgaruvchilar mavjud bo'lsa, u holda*

$$A \equiv \forall x_1 \forall x_2 ... \forall x_n C(x_1, x_2, ..., x_n)$$

*formula C formulaning **umumiy yopilishi** va*

$$B = \exists x_1 \exists x_2 ... \exists x_n C(x_1, x_2, ..., x_n)$$

*formula C formulaning **mavjudligini yopish** deb aytiladi.*

1-teorema. *Agar predikatlar mantiqining normal shakldagi yopiq formulasi, tarkibida (ifodasida) faqat n ta mavjudlik kvantori qatnashgan hamda bir elementli istalgan sohada aynan chin bo'lsa, u holda u umumqiymatli formuladir.*

Isbot. Predikatlar mantiqining normal shakldagi formulasi

$$B \equiv \exists x_1 \exists x_2 ... \exists x_n C(q_1, q_2, ..., P_1, P_2, ..., Q_1, Q_2, ...) \qquad (1)$$

ko'rinishda bo'lsin, bunda C formula ifodasida kvantorlar qatnashmaydi, q_i - mantiqiy o'zgaruvchi, P_i - bir joyli predikatlar, Q_i - ikki joyli predikatlar.

Bu formulaning chinlik qiymati uning tarkibida qatnashayotgan $q_1, q_2, ...$ mantiqiy o'zgaruvchilar va $P_1, P_2, ..., Q_1, Q_2, ...$ predikatlarga bog'liq.

Teoremaning shartiga asosan bir a elementli istalgan $M = \{a\}$ sohada bu formula aynan chin, ya'ni

$$C(q_1, q_2, ..., P_1(a), P_2(a), ..., Q_1(a, a), Q_2(a, a), ...) \qquad (2)$$

fomula aynan chin bo'ladi.

Aniqki, (2) formula mulohazalar algebrasining formulasi bo'ladi.

(1) formula umumqiymatli emas deb faraz qilamiz. U vaqtda shunday M_1 soha va o'zgaruvchilarning shunday qiymatlar majmuasi $q_1^0, q_2^0, ..., P_1^0, P_2^0, ..., Q_1^0, Q_2^0, ...$ mavjudki, unda (1) formula yolg'on qiymat qabul qiladi, ya'ni

$$\exists x_1 \exists x_2 ... \exists x_n C\ (q_1^0, q_2^0, ..., P_1^0, P_2^0, ..., Q_1^0, Q_2^0, ...) = 0. \quad (3)$$

(3) formulaning inkorini olamiz:

$$\overline{\exists x_1 \exists x_2 ... \exists x_n (q_1^0, q_2^0, ..., P_1^0, P_2^0, ..., Q_1^0, Q_2^0, ...)} \equiv$$

$$\equiv \forall x_1 \forall x_2 ... \forall x_n\ \overline{C(q_1^0, q_2^0, ..., P_1^0, P_2^0, ..., Q_1^0, Q_2^0, ...)} = 1.$$

Bu yerdan

$$C(q_1^0, q_2^0, ..., P_1^0, P_2^0, ..., Q_1^0, Q_2^0, ...) \qquad (4)$$

formulaning M_1 sohaga oid predmet o'zgaruvchilarning qanday olinishidan qat'iy nazar aynan chinligi kelib chiqadi.

M_1 sohadan ixtiyoriy x_0 elementni olib, uni (4) formuladagi predmet o'zgaruvchilar o'rniga qo'yib chiqamiz. U holda

$$\overline{C(q_1^0, q_2^0, ..., P_1^0(x_0), P_2^0(x_0), ..., Q_1^0(x_0, x_0), Q_2^0(x_0, x_0), ...)} = 1.$$

Demak,

$$C(q_1^0, q_2^0, ..., P_1^0(x_0), P_2^0(x_0), ..., Q_1^0(x_0, x_0), Q_2^0(x_0, x_0), ...) = 0.$$

Bu natija (2) formulaning aynan chin ekanligiga ziddir va (1) formula umumqiymatli emas degan farazimizning noto'g'riligini ko'rsatadi.

Shunday qilib, (1) formula umumqiymatlidir.

2-teorema. *Agar predikatlar mantiqining normal shakldagi yopiq formulasi ifodasida n ta umumiylik kvantori qatnashsa va bu formula ko'pi bilan n ta elementli har qanday to'plamda (sohada)* ***aynan chin*** *bo'lsa, u holda u umumqiymatli bo'ladi.*

Isbot. Predikatlar mantiqining normal shakldagi formulasi quyidagi ko'rinishda bo'lsin:

$$A \equiv \forall x_1 \forall x_2 ... \forall x_n C(q_1, q_2, ..., P_1, P_2, ..., Q_1, Q_2, ...), \quad (5)$$

bunda $q_1, q_2, ...$ - mantiqiy o'zgaruvchilar, $P_1, P_2, ...,$ - bir joyli predikatlar, $Q_1, Q_2, ...,$ - ikki joyli predikatlar.

(1) formula umumqiymatli emas deb faraz qilamiz. U vaqtda n tadan ortiq elementga ega bo'lgan M_1 soha mavjudki, bunda (1) formula aynan chin bo'lmaydi.

Boshqacha qilib aytganda, shunday o'zgaruvchilarning

$$q_1^0, q_2^0, ..., P_1^0, P_2^0, ..., Q_1^0, Q_2^0, ...$$

qiymatlar majmuasi mavjudki,

$$\forall x_1 \forall x_2 ... \forall x_n C(q_1^0, q_2^0, ..., P_1^0, P_2^0, ..., Q_1^0, Q_2^0, ...) \equiv 0. \quad (6)$$

Bu yerdan

$$\overline{\forall x_1 \forall x_2 ... \forall x_n C(q_1^0, q_2^0, ..., P_1^0, P_2^0, ..., Q_1^0, Q_2^0, ...)} \equiv$$

$$\equiv \exists x_1 \exists x_2 ... \exists x_n \overline{C(q_1^0, q_2^0, ..., P_1^0, P_2^0, ..., Q_1^0, Q_2^0, ...)} \equiv 1.$$

Shunday qilib, shunday predmet o'zaruvchilarning $x_1^0, x_2^0, ..., x_n^0 \in M_1$ qiymatlari mavjudki,

$$\overline{C(q_1^0, q_2^0, ..., P_1^0, P_2^0, ..., Q_1^0, Q_2^0, ...)} \equiv 1$$

va

$$C(q_1^0, q_2^0, ..., P_1^0, P_2^0, ..., Q_1^0, Q_2^0, ...) \equiv 0$$

bo'ladilar.

Demak, M_1 sohadan ko'pi bilan n ta elementi bo'lgan shunday M sohani ajratish mumkinki, qaerda bu formula aynan chin bo'lmaydi. Bu natija teoremaning shartiga ziddir va u (1) formula umumqiymatli emas degan noto'g'ri farazimizdan kelib chiqdi.

Demak, (1) formula umumqiymatli formuladir.

Tarkibida faqat bir joyli (bitta predmet o'zgaruvchiga bog'liq bo'lgan) predikatlar qatnashgan formulalar uchun yechilish muammosi ijobiy hal etilishi quyidagi teoremadan ko'rinadi.

3-teorema. *Predikatlar mantiqining tarkibiga n ta bir joyli predikat kirgan* A *formulasi biror* M *to'plamda bajariluvchi bo'lsa, u holda bu formula elementlari soni* 2^n *dan katta bo'lmagan* M_1 *to'plamda ham bajariluvchi bo'ladi.*

Ushbu teoremadan quyidagi natija kelib chiqadi.

Natija. Predikatlar mantiqining tarkibiga faqat n ta bir joyli predikat kirgan A formulasi elementlari soni 2^n dan ko'p bo'lmagan ixtiyoriy to'plamda aynan chin bo'lsa, u holda bu formula ixtiyoriy to'plamda ham aynan chin bo'ladi.

Quyidagi teorema ham predikat mantiqining katta sinfini tashkil qiluvchi formulalari uchun yechilish muammosini hal qiladi.

4-teorema. *Agar predikatlar mantiqining* A *formulasi biror cheksiz sohada bajariluvchi bo'lsa, u holda u chekli sohada ham bajariluvchi bo'ladi.*