ЛИНЕЙНАЯ АЛГЕБРА И

АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ

2 СЕМЕСТР

Лектор: Горшунова Татьяна Алексеевна – доцент кафедры ВМ-2

e-mail: gorshunova@mirea.ru

Лекция 7

СОБСТВЕННЫЕ ВЕКТОРЫ И СОБСТВЕННЫЕ ЗНАЧЕНИЯ ЛИНЕЙНОГО ОПЕРАТОРА

- Операторы в геометрических пространствах
- Собственные значения и собственные векторы линейного оператора
- Характеристический многочлен линейного оператора

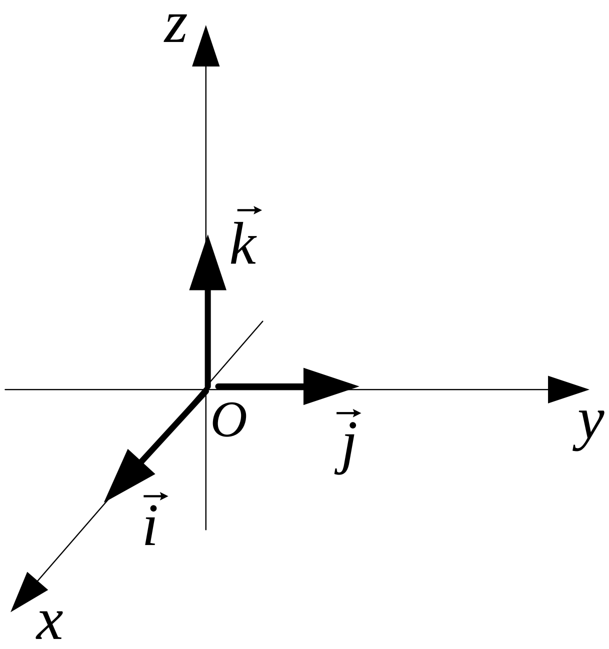
25 марта 2021 г.

Операторы в геометрических пространствах

Пример 1. Оператор в пространстве V_3: $\widehat{\mathrm{A}}$ - **поворот** вокруг координатной оси на угол α **против** часовой стрелки.

а) Поворот **вокруг оси** $\boldsymbol{Ox}$

Подействуем линейным оператором на базисные векторы $\{\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\}$:



$$\hat{A}\vec{\imath} = \vec{\imath} = 1 \cdot \vec{\imath} + 0 \cdot \vec{\jmath} + 0 \cdot \vec{k} = (1; 0; 0)$$

$$\hat{A}\vec{\jmath} = 0 \cdot \vec{\imath} + \cos\alpha\, \vec{\jmath} + \sin\alpha\, \vec{k} = (0; \cos\alpha\,; \sin\alpha)$$

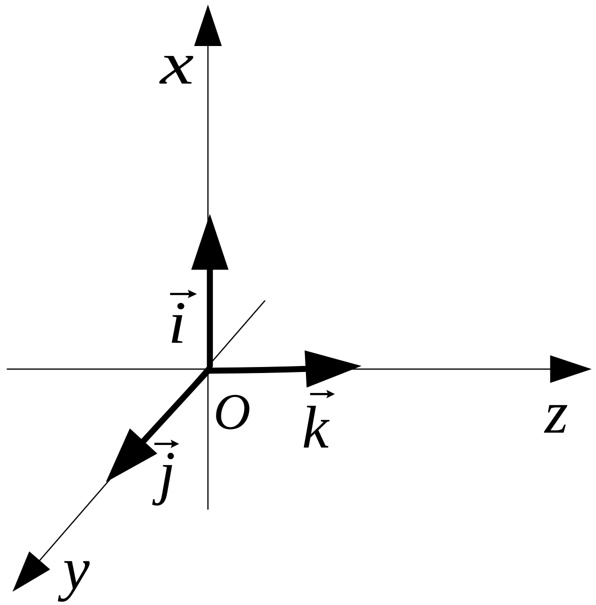
$$\hat{A}\vec{k} = 0 \cdot \vec{\imath} - \sin\alpha\, \vec{\jmath} + \cos\alpha\, \vec{k} = (0; -\sin\alpha\,; \cos\alpha)$$

Тогда матрица оператора будет иметь вид (координаты образов базисных векторов записываем <u>в столбцы</u>):

$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\alpha & -\sin\alpha \\ 0 & \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$ – матрица поворота вокруг оси Ox на угол α против часовой стрелки.

b) Поворот **вокруг оси** $\boldsymbol{Oy}$

Подействуем линейным оператором на базисные векторы $\{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$:



$$\hat{A}\vec{i} = \cos\alpha\,\vec{i} + 0\cdot\vec{j} - \sin\alpha\,\vec{k} = (\cos\alpha\,; 0; -\sin\alpha)$$

$$\hat{A}\vec{j} = \vec{j} = 0\cdot\vec{i} + 1\cdot\vec{j} + 0\cdot\vec{k} = (0; 1; 0)$$

$$\hat{A}\vec{k} = \sin\alpha\cdot\vec{i} + 0\cdot\vec{j} + \cos\alpha\cdot\vec{k} = (\sin\alpha\,; 0; \cos\alpha)$$

Координаты образов базисных векторов надо записать в столбцы матрицы:

$A = \begin{pmatrix} \cos\alpha & 0 & \sin\alpha \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\alpha & 0 & \cos\alpha \end{pmatrix}$ – матрица поворота вокруг оси Oy на угол α против часовой стрелки.

$c)$ Поворот **вокруг оси $\boldsymbol{Oz}$**

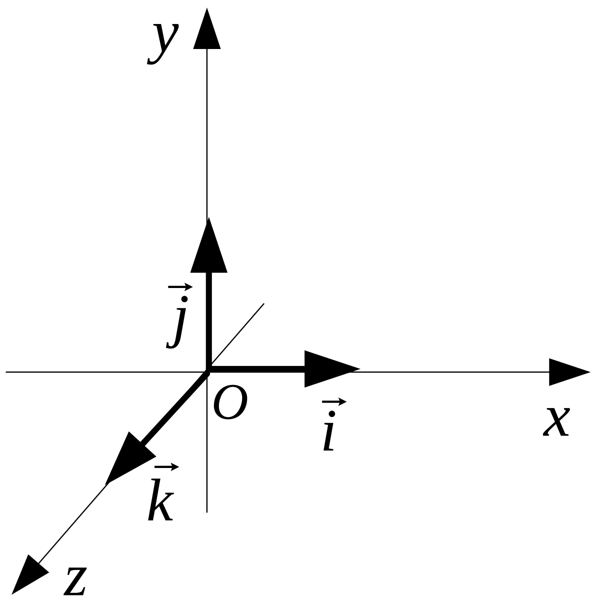
Подействуем линейным оператором на базисные векторы $\{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$:

$\hat{A}\vec{i} = \cos\alpha\,\vec{i} + \sin\alpha \cdot \vec{j} + 0 \cdot \vec{k} = (\cos\alpha\,; \sin\alpha\,; 0)$

$\hat{A}\vec{j} = -\sin\alpha\,\vec{i} + \cos\alpha\,\vec{j} + 0 \cdot \vec{k} = (-\sin\alpha\,; \cos\alpha\,; 0)$

$\hat{A}\vec{k} = \vec{k} = 0 \cdot \vec{i} + 0 \cdot \vec{j} + 1 \cdot \vec{k} = (0; 0; 1)$

Координаты образов базисных векторов надо записать в столбцы матрицы:



$A = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha & 0 \\ \sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ – матрица поворота вокруг оси Oz на угол α против часовой стрелки

Замечание. Из геометрических соображений видно, что под действием линейного оператора $\widehat{\mathrm{A}}$ - поворот вокруг координатной оси на угол α , в нулевой элемент переходит только $\vec{0}$, следовательно, ядро оператора состоит только из нулевого вектра:

$$\operatorname{Ker} \hat{A} = \{\vec{0}\}$$

Образом оператора $\hat{A}$ является все пространство V_3:

$$\operatorname{Im} \hat{A} = V_3$$

Данные выводы подтверждаются тем фактом, что $\operatorname{rang} A = 3$
Следовательно, линейный оператор $\widehat{\mathrm{A}}$ – поворот вокруг координатной оси на угол α обратим:

$$1)\ \det A \neq 0;\quad 2)\ \operatorname{Im}\hat{A} = V_3;\quad 3)\ \operatorname{Ker}\hat{A} = \{\vec{0}\}$$

$\hat{A}^{-1}$– поворот вокруг координатной оси на угол α **по** часовой стрелке.

Пусть оператор $\hat{B}$ – поворот вокруг оси Oz на угол $\frac{\pi}{6}$ против часовой стрелки.

$\alpha = \frac{\pi}{6} \Rightarrow$ матрица оператора имеет вид: $B = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Найдем образ вектора $\vec{a} = (-1; 1; 2)$ при данном преобразовании:

$$\hat{B}\vec{a} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} \\ 2 \end{pmatrix}$$

Замечание. Действие оператора поворота на угол 2π совпадает с действием тождественного оператора $\hat{I}$: $\hat{I}\overline{x} = \overline{x}$.

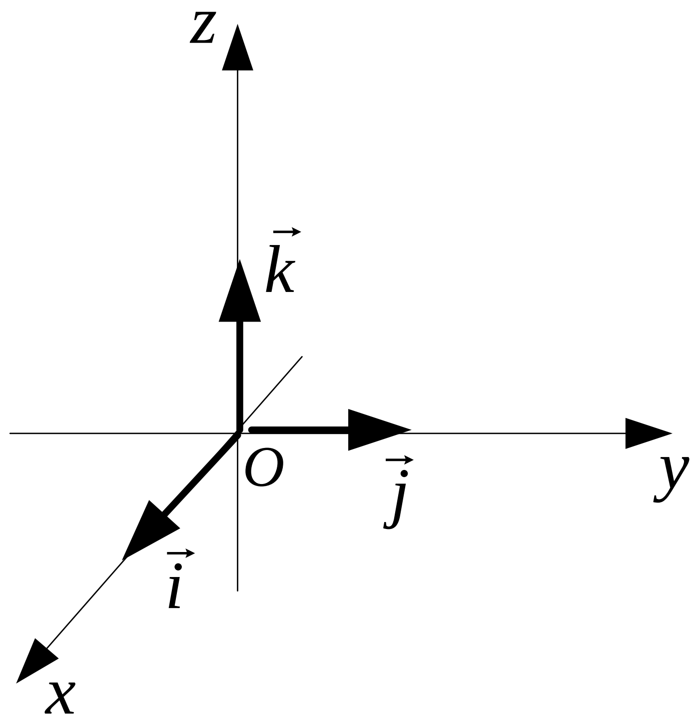
Пример 2. Оператор в пространстве V_3: $\widehat{\mathrm{A}}$ – проектирование на координатную ось Oy.

Подействуем линейным оператором на базисные векторы $\{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$:

$\hat{A}\vec{i} = \vec{0} = (0; 0; 0)$,

$\hat{A}\vec{j} = \vec{j} = (0; 1; 0)$,

$\hat{A}\vec{k} = \vec{0} = (0; 0; 0)$.



Запишем матрицу оператора $\hat{A}$:

$$\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Найдем образ вектора $\vec{a} = (-1{,}5{,}2)$:

$$\hat{A}\vec{x} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Из геометрических соображений видно, что под действием линейного оператора $\widehat{\mathrm{A}}$ - проектирование на координатную ось Oy в $\vec{0}$ переходят все векторы, параллельные плоскости Oxz, следовательно, ядро оператора имеет вид:

$$\operatorname{Ker} \hat{A} = \{\alpha\vec{\imath} + \beta\vec{k}\}$$

Образом оператора $\hat{A}$ является ось Oy:

$$\operatorname{Im} \hat{A} = \{\gamma\vec{\jmath}\}$$

$$\operatorname{Defect} \hat{A} = 2, \operatorname{Rang} \hat{A} = 1$$

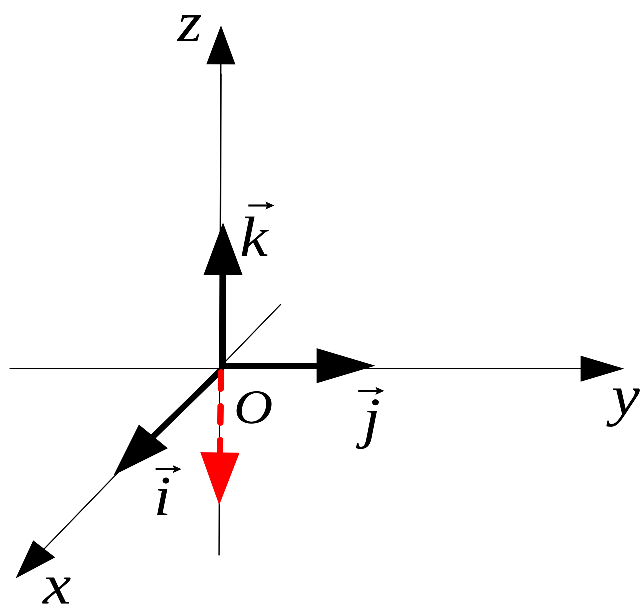
По всем трем критериям линейный оператор необратим:

$$1) \det A = 0; \quad 2) \operatorname{Im} \hat{A} \neq V_3; \quad 3) \operatorname{Ker} \hat{A} \neq \{\vec{0}\}$$

✓ Составить матрицы в каноническом базисе операторов - проектирование на координатные оси Ox, Oz и координатные плоскости Oxy, Oyz и Oxz.

Пример 3. Оператор в пространстве V_3:
$\widehat{\mathrm{A}}$ – зеркальное отражение относительно плоскости Oxy.
Подействуем линейным оператором на базисные векторы $\{\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\}$:

$\hat{A}\vec{\imath} = \vec{\imath} = (1; 0; 0),$
$\hat{A}\vec{\jmath} = \vec{\jmath} = (0; 1; 0),$
$\hat{A}\vec{k} = -\vec{k} = (0; 0; -1).$



Запишем матрицу оператора $\hat{A}$:

$$\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Найдем образ вектора $\vec{a} = (2; -4; -3)$:

$$\hat{A}\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Из геометрических соображений видно, что под действием данного линейного оператора в нулевой элемент переходит только $\vec{0} \Rightarrow$

$$\operatorname{Ker} \hat{A} = \{\vec{0}\}$$

Образом оператора $\hat{A}$ является все пространство V_3:

$$\operatorname{Im} \hat{A} = V_3$$

Данные выводы подтверждаются тем факторм, что $\operatorname{rang} A = 3$.

Данный линейный оператор обратим:

$$1)\ \det A \neq 0; \quad 2)\ \operatorname{Im} \hat{A} = V_3; \quad 3)\ \operatorname{Ker} \hat{A} = \{\vec{0}\}$$

✔ Составить матрицы в каноническом базисе операторов - зеркальное отражение относительно координатных осей Ox, Oy, Oz и координатных плоскостей Oyz и Oxz.

Собственные значения и собственные векторы линейного оператора

Пусть L - n-мерное линейное пространство.

$\hat{A}: L \to L$ – линейный оператор, действующий в L.

Определение. Число $\lambda \in \mathbb{R}$ называется ***собственным значением*** или ***собственным числом*** линейного оператора $\hat{A}$, если существует такой ненулевой вектор $\vec{x} \in L$ $(\vec{x} \neq \vec{0})$, что $\hat{A}\vec{x} = \lambda\vec{x}$. Этот вектор $\vec{x}$ называется ***собственным вектором*** линейного оператора $\hat{A}$.

Таким образом, собственные векторы, это ненулевые векторы, которые под действием линейного оператора переходят в себе пропорциональные.

Множество всех собственных значений оператора $\hat{A}$ называется его ***спектром*** и обозначается $\operatorname{Spec} \hat{A}$.

Замечание 1**.** Каждому собственному числу соответствуют свои собственные векторы, причем их бесконечно много.

Замечание 2. Каждому собственному вектору соответствует единственное собственное число.

Замечание 3. В пространстве геометрических векторов собственные векторы линейного оператора, это векторы, которые под его действием переходят в себе коллинеарные.

Примеры:

1) $\hat{I}: L \to L$ – тождественный оператор: $\hat{I}\vec{x} = \vec{x}$ $\Rightarrow$ $\forall$ ненулевой вектор $\vec{x} \in L$ является собственным с собственным значением $\lambda = 1$.

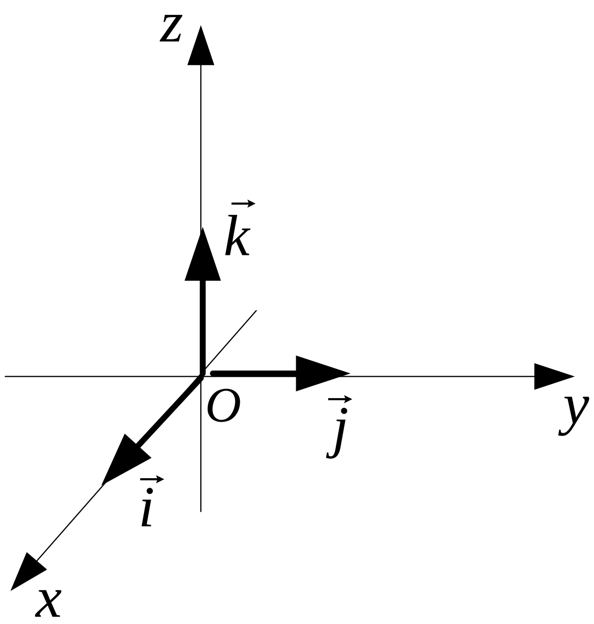
2) $\hat{A}: V_3 \to V_3$ - оператор проектирования на плоскость Oxz:

$\hat{A}\vec{i} = \vec{i} = 1 \cdot \vec{i}$

$\hat{A}\vec{j} = \vec{0} = 0 \cdot \vec{j}$

$\hat{A}\vec{k} = \vec{k} = 1 \cdot \vec{k}$

Векторы базиса являются собственными с собственными значениями 1; 0; 1.



3) $\hat{A}: V_3 \to V_3$ - оператор гомотетия с коэффициентом k: $\hat{A}\vec{x} = k\vec{x}, \forall\vec{x} \in V_3$

Таким образом, $\forall$ ненулевой вектор $\vec{x} \in V_3$ является собственным вектором с собственным значением $\lambda = k$.

Пусть $S = \{\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n\}$ – базис в линейном пространстве L и матрица линейного оператора $\hat{A}: L \to L$ в этом базисе имеет вид:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Если $\vec{x}$ – собственный вектор оператора $\hat{A}$, соответствующий собственному значению λ, то $\vec{x} \neq \vec{0}$ и выполняется равенство: $\hat{A}\vec{x} = \lambda\vec{x}$

Тогда $\hat{A}\vec{x} - \lambda\hat{I}\vec{x} = \vec{0} \Rightarrow (\hat{A} - \lambda\hat{I})\vec{x} = \vec{0}$ или в матричном виде:

$$(A - \lambda E)X = O,$$

где E – единичная матрица порядка n.

Таким образом, имеем матричное уравнение вида:

$$\begin{pmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}-\lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

или однородную систему уравнений:

$$\begin{cases} (a_{11}-\lambda)x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = 0, \\ a_{21}x_1 + (a_{22}-\lambda)x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = 0, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + (a_{nn}-\lambda)x_n = 0. \end{cases}$$

Согласно определению, собственный вектор $\vec{x}$ должен быть ненулевым. Полученная однородная система уравнений имеет ненулевые решения тогда и только тогда, когда определитель матрицы коэффициентов равен нулю. Таким образом, справедлива следующая теорема.

Теорема 1. Для того, чтобы действительное число λ являлось собственным значением линейного оператора, необходимо и достаточно, чтобы оно было корнем уравнения:

$$\boxed{\det(A-\lambda E)=0}$$

где A – матрица оператора $\hat{A}$ в базисе $S=\{\vec{e}_1,\dots,\vec{e}_n\}$.

► Необходимость. Выше показано что, если λ – собственное значение линейного оператора $\hat{A}$ и $\vec{x}$ – соответствующий собственный вектор, то из равенства $\hat{A}\vec{x}=\ \lambda\vec{x}$, имеем $\hat{A}\,\vec{x}=\ \lambda\hat{I}\vec{x}\ \Rightarrow(\hat{A}-\ \lambda\hat{I})\vec{x}=\vec{0}$.

В матричном виде получаем однородную систему линейных уравнений:

$$(A-\ \lambda E)X=O,$$

которая имеет ненулевое решение $\vec{x}\neq\vec{0}$ при условии: $\det(A-\lambda E)=0$, следовательно, λ – корень уравнения $\det(A-\lambda E)=0$.

Достаточность. Пусть λ – корень уравнения: $\det(A-\lambda E)=0\Rightarrow$

однородная система уравнений $(A - \lambda E)X = O$ имеет ненулевое решение $\vec{x}$ и для $\vec{x}$ выполняется $(\hat{A} - \lambda\hat{I})\,\vec{x} = \vec{0} \;\Rightarrow \hat{A}\vec{x} = \lambda\vec{x} \;\Rightarrow \vec{x}$ – собственный вектор, соответствующий собственному значению λ. ◄

Характеристический многочлен линейного оператора

Если λ – собственное значение оператора $\hat{A}$ (т.е. $\hat{A}\vec{x} = \lambda\vec{x}$) ⇒ ядро оператора $(\hat{A} - \lambda\hat{I})$ состоит из всех собственных векторов, соответствующих собственному числу λ, и нулевого вектора.

$\mathrm{Ker}(\hat{A} - \lambda\hat{I})$ является подпространством в пространстве L и называется *собственным подпространством* оператора $\hat{A}$.

Определитель

$$\det(A - \lambda E) = |A - \lambda E| = \begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} - \lambda \end{vmatrix}$$

Представляет собой многочлен степени n от переменной λ.

Определение. Многочлен вида:

$$\chi(\lambda) = \det(A - \lambda E)$$

называется *характеристическим многочленом матрицы* A.

Определение. Уравнение вида:

$$\det(A - \lambda E) = 0$$

называется *характеристическим уравнением* матрицы A, а его корни - *характеристическими числами* матрицы A.

Определение. *Характеристическим многочленом* и *характеристическим уравнением* линейного оператора называются характеристический многочлен и характеристическое уравнение его матрицы в каком-либо базисе.

Определение. Кратность числа λ как корня характеристического уравнения оператора $\hat{A}$ называется *алгебраической кратностью* собственного значения λ. *Геометрической кратностью* собственного значения λ называется размерность собственного подпространства оператора $\hat{A}$, отвечающего собственному числу λ этого оператора:

$\dim \operatorname{Ker}(\hat{A} - \lambda\hat{I})$ - геометрическая кратность собственного значения λ

Теорема 2. Для любого оператора $\hat{A}$, действующего в конечномерном пространстве L, геометрическая кратность любого собственного числа не превосходит его алгебраической кратности.

Замечание. Геометрическая кратность собственного значения λ равна $n - r$, где $n = \dim L$, $r = rang(A - \lambda E)$.

Теорема 3. Характеристический многочлен линейного оператора и, следовательно, спектр не зависят от выбора базиса, в котором найдена матрица линейного оператора.

► Пусть $S = \{\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n\}$ и $S' = \{\vec{f}_1, \dots, \vec{f}_n\}$ – базисы в пространстве L и A, A' – матрицы линейного оператора $\hat{A}$ в базисах S и S' соответственно.

Если $P = P_{S \to S'}$ - матрица перехода от базиса S к базису $S' \Rightarrow \mathrm{A}' = P^{-1}AP$.

Рассмотрим характеристический многочлен оператора $\hat{A}$ в базисе S':

$$\det(\mathrm{A}' - \lambda E) = \det(P^{-1}AP - \lambda E) = \det(P^{-1}AP - \lambda P^{-1}EP) =$$

$$= \det(P^{-1}(A - \lambda E)P) = \det P^{-1} \det(A - \lambda E) \det P = \det(A - \lambda E)$$ ◄

Алгоритм нахождения собственных значений и собственных векторов линейного оператора:

1) Выбрать базис в пространстве L и составить в нем матрицу А линейного оператора $\hat{A}$.

2) Составить характеристическое уравнение:

$$\det(\mathrm{A} - \lambda E) = 0$$

и найти все его действительные корни λ_k, которые и будут собственными значениями линейного оператора.

3) Для каждого корня λ_k найти фундаментальную систему решений (ФСР) однородной системы линейных алгебраических уравнений:

$$(\mathrm{A} - \lambda_k E)X = O$$

Столбцы фундаментальной системы решений, являются координатами собственных векторов оператора $\hat{A}$, соответствующих собственному значению λ_k (и любой собственный вектор, соответствующий собственному значению λ_k можно представить как их линейную комбинацию).

***Задача 1*.** Найти собственные значения и собственные векторы линейного оператора $\hat{A}$, заданного в некотором базисе трехмерного пространства матрицей:

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 2 & -2 \\ -5 & 7 & -3 \\ -1 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

Решение. Найдем собственные значения. Для этого составим характеристическое уравнение $\det(A - \lambda E) = 0$:

$$\begin{vmatrix} -2-\lambda & 2 & -2 \\ -5 & 7-\lambda & -3 \\ -1 & 3 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

Разложим определитель по первой строке:

$$(-2-\lambda)\begin{vmatrix} 7-\lambda & -3 \\ 3 & 1-\lambda \end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix} -5 & -3 \\ -1 & 1-\lambda \end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix} -5 & 7-\lambda \\ -1 & 3 \end{vmatrix} = 0$$

$$(-2-\lambda)\big((7-\lambda)(1-\lambda) + 9\big) - 2(-5(1-\lambda) - 3) - 2(-15 + 7 - \lambda) = 0$$

$$-\lambda^3 + 6\lambda^2 - 8\lambda = 0 \;\Rightarrow$$

$$-\lambda(\lambda^2-6\lambda+8)=0 \Rightarrow -\lambda(\lambda-4)(\lambda-2)=0$$

$\lambda_1=0, \lambda_2=4,\ \lambda_3=2$ - собственные значения.

Найдем собственные векторы, соответствующие собственным значениям.

1) $\lambda_1=0$

Решим систему $(A-\ 0\cdot E)X=O$

$$\begin{pmatrix} -2-0 & 2 & -2 \\ -5 & 7-0 & -3 \\ -1 & 3 & 1-0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\begin{pmatrix} -2 & 2 & -2 \\ -5 & 7 & -3 \\ -1 & 3 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Решим систему методом Гаусса.

$$\begin{pmatrix} -2 & 2 & -2 \\ -5 & 7 & -3 \\ -1 & 3 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -1 & 3 & 1 \\ -2 & 2 & -2 \\ -5 & 7 & -3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -3 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 5 & -7 & 3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -3 & -1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 8 & 8 \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim\begin{pmatrix}1 & -3 & -1\\ 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\Rightarrow \operatorname{rang} A = 2$$

Пусть x_3 – свободная переменная, тогда x_1, x_2 – базисные.
Если $x_3 = \mathrm{C}$, то $x_2 = -\mathrm{C}$, $x_1 = -2\mathrm{C} \Rightarrow$ общее решение системы имеет вид:

$$X^1 = \begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-2\mathrm{C}\\ -\mathrm{C}\\ \mathrm{C}\end{pmatrix} = \mathrm{C}\begin{pmatrix}-2\\ -1\\ 1\end{pmatrix}, C \in \mathbb{R} \Rightarrow$$

Фундаментальная система решений состоит из одного вектора $\vec{f}_1 = \begin{pmatrix}-2\\ -1\\ 1\end{pmatrix}$

$\vec{x}_1 = \mathrm{C}\vec{f}_1 = (-2\mathrm{C}; -\mathrm{C}; \mathrm{C}),\ C \neq 0$ - собственные векторы, соответствующие собственному значению $\lambda_1 = 0$.

2) $\lambda_2 = 4$

Решим систему $(A - 4E)X = O$

$$\begin{pmatrix} -2-4 & 2 & -2 \\ -5 & 7-4 & -3 \\ -1 & 3 & 1-4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\begin{pmatrix} -6 & 2 & -2 \\ -5 & 3 & -3 \\ -1 & 3 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Решим систему методом Гаусса.

$$\begin{pmatrix} -6 & 2 & -2 \\ -5 & 3 & -3 \\ -1 & 3 & -3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -1 & 3 & -3 \\ -5 & 3 & -3 \\ -6 & 2 & -2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -3 & 3 \\ -5 & 3 & -3 \\ 3 & -1 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -3 & 3 \\ 0 & -8 & 8 \\ 0 & 8 & -8 \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & -3 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \operatorname{rang} A = 2$$

Пусть x_3 – свободная переменная, тогда x_1, x_2 – базисные переменные.
Если $x_3 = \mathrm{C}$, то $x_2 = \mathrm{C}$, $x_1 = 0 \Rightarrow$ общее решение системы имеет вид:

$$X^2=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\\mathrm{C}\\\mathrm{C}\end{pmatrix}=\mathrm{C}\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix},\ C\in\mathbb{R}\Rightarrow$$

Фундаментальная система решений состоит из одного вектора $\vec{f}_2=\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$

$\vec{x}_2=\mathrm{C}\vec{f}_2=(0;\mathrm{C};\mathrm{C}),\ C\neq 0$ - собственные векторы, соответствующие собственному значению $\lambda_2=4$.

3) $\lambda_3=2$

Решим систему $(A-\ 2E)X=O$

$$\begin{pmatrix}-2-2 & 2 & -2\\-5 & 7-2 & -3\\-1 & 3 & 1-2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}\Rightarrow$$

$$\begin{pmatrix}-4 & 2 & -2\\-5 & 5 & -3\\-1 & 3 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$$

Решим систему методом Гаусса.

$$\begin{pmatrix} -4 & 2 & -2 \\ -5 & 5 & -3 \\ -1 & 3 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -1 & 3 & -1 \\ -5 & 5 & -3 \\ -4 & 2 & -2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -3 & 1 \\ -5 & 5 & -3 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -3 & 1 \\ 0 & -10 & 2 \\ 0 & 5 & -1 \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & -3 & 1 \\ 0 & 5 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \operatorname{rang} A = 2$$

Пусть x_2 – свободная переменная, тогда x_1, x_3 – базисные переменные.
Если $x_2 = \mathrm{C}$, то $x_3 = 5\mathrm{C}$, $x_1 = -2\mathrm{C} \Rightarrow$ общее решение системы имеет вид:

$$X^3 = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2\mathrm{C} \\ \mathrm{C} \\ 5\mathrm{C} \end{pmatrix} = \mathrm{C} \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}, C \in \mathbb{R} \Rightarrow$$

Фундаментальная система решений состоит из одного вектора $\vec{f}_3 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}$

$\vec{x}_3 = \mathrm{C}\vec{f}_3 = (-2\mathrm{C}; \mathrm{C}; 5\mathrm{C}),\ C \neq 0$ - собственные векторы, соответствующие собственному значению $\lambda_3 = 2$.

Задачи для самостоятельного решения

1. Линейный оператор $\hat{C} = \hat{A}\hat{B}$ и действует в пространстве V_3, оператор $\hat{A}$ – поворот вокруг оси Ox по часовой стрелке на 45°, оператор $\hat{B}$ – отражение относительно оси Oy. Найти матрицы операторов $\hat{A}$, $\hat{B}$ и $\hat{C}$ в каноническом базисе пространства V_3. Обратим ли оператор $\hat{C}$? Если да, то описать действие оператора $\hat{C}^{-1}$.

2. Оператор $\hat{A}$ действует в пространстве P_3 многочленов степени не выше трех:

$$\hat{A}p(t) = p(t) - p(t+2)$$

1) Показать линейность оператора.
2) Найти его матрицу в каноническом базисе пространства P_3.
3) Найти ядро линейного оператора $\hat{A}$.
4) Существует ли обратный оператор? Если да, то найти его матрицу в том же базисе.
5) Найти собственные значения и собственные векторы линейного оператора $\hat{A}$.

Спасибо за внимание!