ЛИНЕЙНАЯ АЛГЕБРА И

АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ

2 СЕМЕСТР

Лектор: Горшунова Татьяна Алексеевна – доцент кафедры ВМ-2

e-mail: gorshunova@mirea.ru

Лекция 5

ЛИНЕЙНЫЕ ОПЕРАТОРЫ И ИХ МАТРИЦЫ

- Определение линейного оператора. Примеры
- Действия над линейными операторами
- Матрица линейного оператора
- Преобразование матрицы линейного оператора при замене базиса

11 марта 2021 г.

Определение линейного оператора

Пусть X и Y – произвольные множества

Определение. Отображением f из множества X в множество Y называется правило, по которому $\forall\, x \in X$ ставиться в соответствие единственный элемент $y \in Y$ и обозначается:

$$f\colon X \to Y \text{ или } y = f(x),$$

где y – образ элемента x, x – прообраз y

Пусть теперь L_1 и L_2 – линейные пространства

Определение. Оператором, действующим из L_1 в L_2 называется отображение $\hat{A}\colon L_1 \to L_2$, сопоставляющее каждому вектору $\vec{x} \in L_1$ единственный вектор $\vec{y} \in L_2$:

$$\vec{y} = \hat{A}\vec{x},$$

где $\vec{y}$ – образ вектора $\vec{x}$, $\vec{x}$ – прообраз вектора $\vec{y}$

Определение. Оператор $\hat{A}: L_1 \to L_2$ называется ***линейным оператором***, если:
1) $\hat{A}(\vec{x}+\vec{y}) = \hat{A}\vec{x} + \hat{A}\vec{y}$, $\forall\, \vec{x}, \vec{y} \in L_1$ (*свойство аддитивности оператора*)
2) $\hat{A}(\alpha\vec{x}) = \alpha\hat{A}\vec{x}$ $\forall \vec{x} \in L_1$ и $\forall \alpha \in R$ (*свойство однородности оператора*)

Определение. Если пространство L_1 совпадает с пространством L_2, то линейный оператор $\hat{A}$ называется ***линейным преобразованием*** пространства L_1.

В дальнейшем будем рассматривать только линейные операторы $\hat{A}: L \to L$, действующие из L в L.

Пусть $\hat{A}: L \to L$ – линейный оператор.

Свойства линейного оператора:

1) $\hat{A}(\vec{0}) = \vec{0}$

2) $\hat{A}(\alpha\vec{x} \pm \beta\vec{y}) = \alpha\hat{A}\vec{x} \pm \beta\hat{A}\vec{y}, \forall \alpha, \beta \in R$ и $\forall\, \vec{x}, \vec{y} \in L$

3) $\hat{A}(-\vec{x}) = -\hat{A}\vec{x}$

4) Линейный оператор $\hat{A}$ переводит линейно зависимые векторы пространства L в линейно зависимые.

Примеры линейных операторов:

1. ***Нулевой оператор*** $\hat{O}: L \to L$, отображающий любой вектор пространства L в нулевой вектор этого пространства:

$$\hat{O}\vec{x} = \vec{0} \quad \forall\, \vec{x} \in L$$

является линейным оператором (*доказать самостоятельно*).

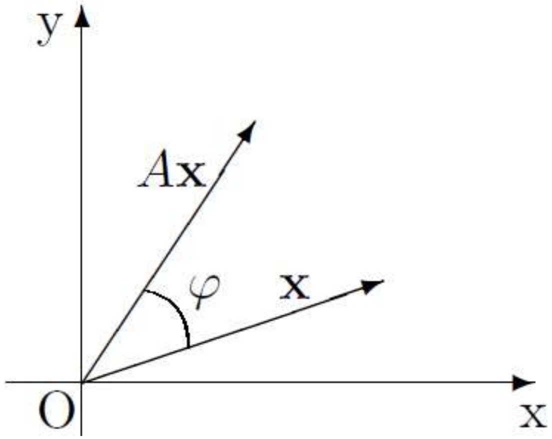
2. ***Тождественный оператор*** $\hat{I}: L \to L$, отображающий любой вектор пространства L в себя:

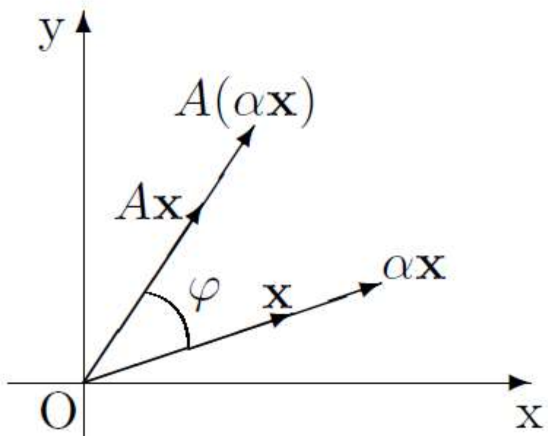
$$\hat{I}\vec{x} = \vec{x} \quad \forall\, \vec{x} \in L$$

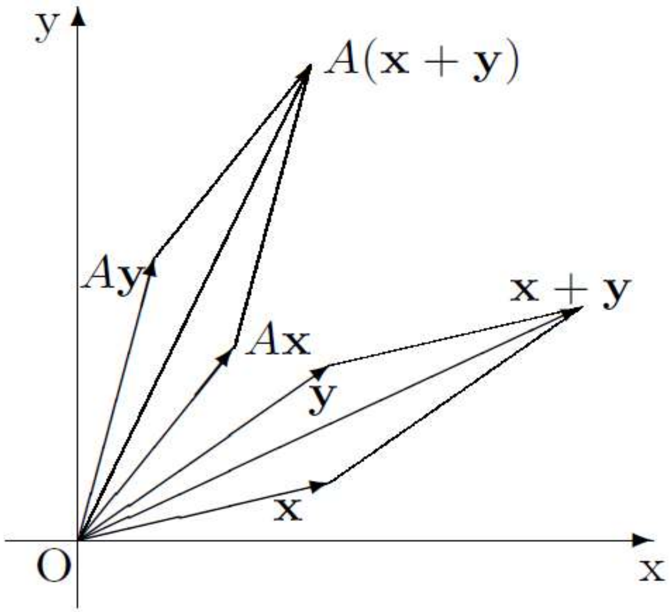
является линейным оператором (*доказать самостоятельно*).

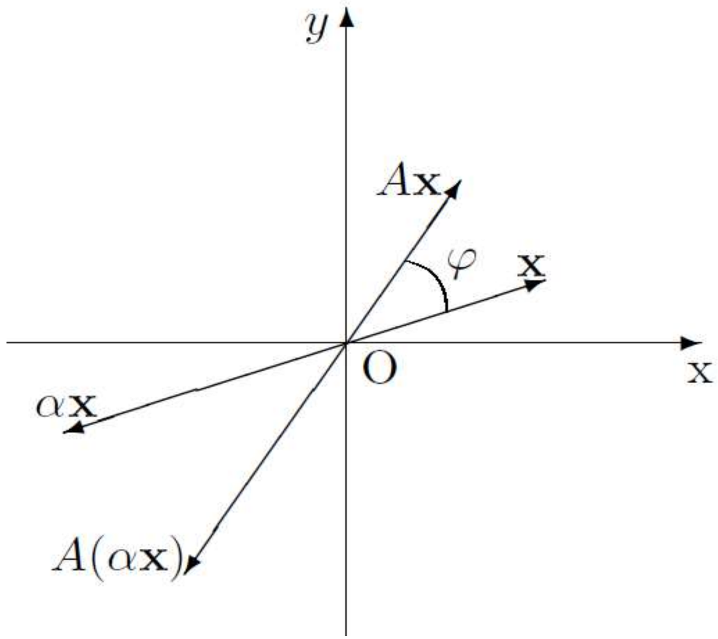
3. В пространстве геометрических векторов V_2 оператор $\hat{A}$ - поворот на угол φ против часовой стрелки является линейным оператором.

► $\hat{A}: V_2 \to V_2$ и при повороте плоскости не меняются длины отрезков и углы между ними:


y
$A\mathbf{x}$
φ
$\mathbf{x}$
O
x


y
$A(\alpha\mathbf{x})$
$A\mathbf{x}$
φ
$\mathbf{x}$
$\alpha\mathbf{x}$
O
x


y
$A(\mathbf{x}+\mathbf{y})$
$A\mathbf{y}$
$\mathbf{x}+\mathbf{y}$
$A\mathbf{x}$
$\mathbf{y}$
$\mathbf{x}$
O
x


y
$A\mathbf{x}$
φ
$\mathbf{x}$
O
x
$\alpha\mathbf{x}$
$A(\alpha\mathbf{x})$

4. В пространстве геометрических векторов V_3 оператор $\hat{A}$ – гомотетия с коэффициентом k (растяжение / сжатие) в k раз:

$$\hat{A}\vec{x} = k\vec{x}$$

является линейным оператором.

► $\hat{A}: V_3 \to V_3$ и $\hat{A}\vec{x} = k\vec{x} \Rightarrow$

$$\hat{A}(\vec{x}+\vec{y}) = k(\vec{x}+\vec{y}) = k\vec{x} + k\vec{y} = \hat{A}\vec{x} + \hat{A}\vec{y}\,, \qquad \forall\, \vec{x}, \vec{y} \in V_3$$

$$\hat{A}(\alpha\vec{x}) = k(\alpha\vec{x}) = \alpha k\vec{x} = \alpha\hat{A}\vec{x},\ \forall \vec{x} \in V_3 \text{ и } \forall \alpha \in R \blacktriangleleft$$

5. В линейном пространстве многочленов P_n степени не выше n

$\hat{A}$ – оператор дифференцирования:

$$\hat{A}p(t) = p'(t)$$

является линейным оператором.

►При дифференцировании многочлена степени не выше n получаем также многочлен степени не выше n:

$$\hat{A}: P_n \to P_n \quad \text{и} \quad \hat{A}p(t) = p'(t) \Rightarrow \forall\, p_1(t), p_2(t) \in P_n$$

$$\hat{A}\big(p_1(t)+p_2(t)\big)=\big(p_1(t)+p_2(t)\big)'=\big(p_1(t)\big)'+\big(p_2(t)\big)'=\hat{A}p_1(t)+\hat{A}p_2(t),$$

$\forall\, p(t)\in P_n$ и $\forall \alpha \in R:\quad \hat{A}(\alpha p(t))=(\alpha p(t))'=\alpha(p(t))'=\alpha\hat{A}(p(t))$ ◄

6. В линейном пространстве всех квадратных матриц второго порядка $M_{2\times 2}$ оператор $\hat{A}$ – умножение слева любой матрицы этого пространства на матрицу $\begin{pmatrix}4 & 2\\ 3 & -1\end{pmatrix}$:

$$\hat{A}X=\begin{pmatrix}4 & 2\\ 3 & -1\end{pmatrix}X$$

является линейным оператором.

► Произведение матриц второго порядка является матрицей второго порядка. Таким образом, $\hat{A}: M_{2\times 2} \to M_{2\times 2} \Rightarrow \forall\, X_1, X_2 \in M_{2\times 2}$

$$\hat{A}(X_1+X_2)=\begin{pmatrix}4 & 2\\ 3 & -1\end{pmatrix}(X_1+X_2)=\begin{pmatrix}4 & 2\\ 3 & -1\end{pmatrix}X_1+\begin{pmatrix}4 & 2\\ 3 & -1\end{pmatrix}X_2=$$
$$=\hat{A}X_1+\hat{A}X_2$$

$$\hat{A}(\alpha X) = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}(\alpha X) = \alpha \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} X = \alpha \hat{A} X,\ \forall\, X \in M_{2\times 2} \text{ и } \forall \alpha \in R \quad \blacktriangleleft$$

Действия над линейными операторами

Пусть L - линейное пространство

$\hat{A}: L \to L$ и $\hat{B}: L \to L$ – линейные операторы в L

Определение. ***Суммой*** операторов называется оператор $\hat{A} + \hat{B}$, действующий по правилу:

$$\left(\hat{A} + \hat{B}\right)\vec{x} = \hat{A}\vec{x} + \hat{B}\vec{x}$$

Определение. ***Произведением*** линейного оператора $\hat{A}$ ***на число*** α называется оператор $\widehat{\alpha A}$, действующий по правилу:

$$\widehat{\alpha A}\vec{x} = \alpha\left(\hat{A}\vec{x}\right)$$

Определение. Оператором ***противоположным*** оператору $\hat{A}$ называется оператор $\widehat{-A}$, действующий по правилу:

$$\widehat{-A}\vec{x} = -(\hat{A}\vec{x})$$

Определение. ***Произведением (композицией)*** операторов $\hat{A}$ и $\hat{B}$ называется оператор $\hat{A}\hat{B}$, действующий по правилу:

$$(\hat{A}\hat{B})\vec{x} = \hat{A}(\hat{B}\vec{x}).$$

Замечание. Свойство коммутативности в общем случае не выполняется:

$$\hat{A}\hat{B} \neq \hat{B}\hat{A}$$

Определение. ***n -ой степенью*** $\hat{A}^n$ оператора $\hat{A}$ называется произведение n операторов $\hat{A}$: $\hat{A}^n = \hat{A}\hat{A}\ldots\hat{A}$.

Свойства:

1) $\alpha(\hat{A}\hat{B}) = (\widehat{\alpha A})\hat{B}$

2) $(\hat{A} + \hat{B})\hat{C} = \hat{A}\hat{C} + \hat{B}\hat{C}$

3) $\hat{A}(\hat{B}+\hat{C}) = \hat{A}\hat{B} + \hat{A}\hat{C}$

4) $(\hat{A}\hat{B})\hat{C} = \hat{A}(\hat{B}\hat{C})$

✓ *Доказать самостоятельно*

Теорема 1. Если $\hat{A}: L \to L$ и $\hat{B}: L \to L$ – линейные операторы в L, то операторы $\hat{A}+\hat{B}$, $\widehat{\alpha A}$, $\hat{A}\hat{B}$ являются линейными операторами.

✓ *Доказать самостоятельно.*

Теорема 2. Множество всех линейных операторов, действующих в линейном пространстве L, с операциями сложения операторов и умножения оператора на число, нулевым оператором и противоположным оператором образуют линейное пространство.

✓ *Доказать самостоятельно*

Матрица линейного оператора

Пусть L - конечномерное линейное пространство с базисом

$S = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n\} \Rightarrow \dim L = n$

$\hat{A}: L \to L$ - линейный оператор в L

Найдем образ произвольного вектора $\vec{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in L$, заданного своими координатами в базисе $S = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n\}$:

$$\vec{x} = x_1\vec{e}_1 + x_2\vec{e}_2 + \dots + x_n\vec{e}_n \Rightarrow$$

$$\vec{y} = \hat{A}\vec{x} = \hat{A}(x_1\vec{e}_1 + x_2\vec{e}_2 + \dots + x_n\vec{e}_n) = x_1\hat{A}\vec{e}_1 + x_2\hat{A}\vec{e}_2 \dots + x_n\hat{A}\vec{e}_n$$

Таким образом, действие линейного оператора полностью определено, если известны образы векторов базиса.

Подействуем оператором $\hat{A}$ на векторы базиса $S = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n\}$:

$$\hat{A}\vec{e}_1 = a_{11}\vec{e}_1 + a_{21}\vec{e}_2 + \dots + a_{n1}\vec{e}_n$$

$$\hat{A}\vec{e}_2 = a_{12}\vec{e}_1 + a_{22}\vec{e}_2 + \dots + a_{n2}\vec{e}_n$$

…

$\hat{A}\vec{e}_n = a_{1n}\vec{e}_1 + a_{2n}\vec{e}_2 + \cdots + a_{nn}\vec{e}_n$

Получим матрицу $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$, столбцами которой являются координаты образов базисных векторов.

Матрицу А, полученную таким образом, называют *матрицей линейного оператора* $\hat{A}$ *в базисе* $S = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n\}$.

Определение. ***Матрицей линейного оператора*** $\hat{A}: L \to L$, действующего в n-мерном линейном пространстве L с базисом $S = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n\}$ называется матрица, составленная из координат образов базисных векторов, записанных по столбцам.

Замечание. Матрица линейного оператора $\hat{A}: L \to L$ является квадратной и ее порядок совпадает с размерностью линейного пространства L.

Примеры:

1. Нулевой оператор $\hat{O}: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n, \dim \mathbb{R}^n = n \Rightarrow$

$\hat{O}\vec{e}_1 = \vec{0} = (0; 0; \dots ; 0)$

$\hat{O}\vec{e}_2 = \vec{0} = (0; 0; \dots ; 0)$

…

$\hat{O}\vec{e}_n = \vec{0} = (0; 0; \dots ; 0) \qquad \Rightarrow$

$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$ - матрица нулевого оператора $\hat{O}$ в каноническом базисе пространства $\mathbb{R}^n$.

2. Тождественный оператор $\hat{I}: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n, \dim \mathbb{R}^n = n \Rightarrow$

$\hat{I}\vec{e}_1 = \vec{e}_1 = (1; 0; \dots ; 0)$

$\hat{I}\vec{e}_2 = \vec{e}_2 = (0; 1; \dots ; 0)$

…

$\hat{I}\vec{e}_n = \vec{e}_n = (0; 0; \dots; 1) \Rightarrow$

$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix} = E$ - матрица тождественного оператора $\hat{I}$ в каноническом базисе пространства $\mathbb{R}^n$.

3. Оператор $\hat{A}: V_3 \to V_3$ - гомотетия с коэффициентом λ, $\dim V_3 = 3 \Rightarrow$

$\hat{A}\vec{e}_1 = \lambda\vec{i} = (\lambda; 0; 0)$

$\hat{A}\vec{e}_2 = \lambda\vec{j} = (0; \lambda; 0)$

$\hat{A}\vec{e}_3 = \lambda\vec{k} = (0; 0; \lambda) \quad \Rightarrow$

$A = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}$ - матрица оператора в каноническом базисе пространства V_3.

4. Оператор $\hat{A}: P_2 \to P_2$ - оператор дифференцирования, $\dim P_2 = 3 \Rightarrow$

$\hat{A}\vec{e}_1 = \hat{A}(1) = (1)' = 0 = (0; 0; 0)$

$\hat{A}\vec{e}_2 = \hat{A}(t) = (t)' = 1 = (1; 0; 0)$

$\hat{A}\vec{e}_3 = \hat{A}(t^2) = (t^2)' = 2t = (0; 2; 0) \Rightarrow$

$\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ - матрица оператора в каноническом базисе $\{1, t, t^2\}$ пространства P_2.

5. Оператор $\hat{A}: M_{2\times2} \to M_{2\times2}$, $\dim M_{2\times2} = 4$, действующий по правилу:

$$\hat{A}X = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} X$$

$$\hat{A}\vec{e}_1 = \hat{A}E_1 = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\hat{A}\vec{e}_2 = \hat{A}E_2 = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 4 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\hat{A}\vec{e}_3 = \hat{A}E_3 = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\hat{A}\vec{e}_4 = \hat{A}E_4 = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 2 \\ 3 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ – матрица оператора в каноническом базисе пространства $M_{2\times 2}$.

Теорема 3. Пусть линейный оператор $\hat{A}: L \to L$, $\dim L = n$, имеет в базисе $S = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n\}$ матрицу $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$. Тогда координаты образа $\vec{y} = \hat{A}\vec{x}$ произвольного вектора $\vec{x} \in L$ находятся по формуле:

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \cdots \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

или

$$\boxed{Y = AX}$$

$Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \cdots \\ y_n \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdots \\ x_n \end{pmatrix}$ - координаты векторов $\vec{y}$ и $\vec{x}$ в базисе $S = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n\}$

Таким образом, действие линейного оператора $\hat{A}$ на вектор $\vec{x}$ сводиться к умножению матрицы $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$ на вектор-столбец $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}$ координат вектора $\vec{x}$.

► Так как $S = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n\}$ - базис в L, то любой вектор $\in L$ разложим по базису.

Пусть $\vec{x} = x_1\vec{e}_1 + x_2\vec{e}_2 + \cdots + x_n\vec{e}_n$ и $\vec{y} = y_1\vec{e}_1 + y_2\vec{e}_2 + \cdots + y_n\vec{e}_n \Rightarrow$

$$\vec{y} = \hat{A}\vec{x} = \hat{A}(x_1\vec{e}_1 + x_2\vec{e}_2 + \cdots + x_n\vec{e}_n) = x_1\hat{A}\vec{e}_1 + x_2\hat{A}\vec{e}_2 + \cdots + x_n\hat{A}\vec{e}_n =$$

$$= x_1(a_{11}\vec{e}_1 + a_{21}\vec{e}_2 + \cdots + a_{n1}\vec{e}_n) + x_2(a_{12}\vec{e}_1 + a_{22}\vec{e}_2 + \cdots + a_{n2}\vec{e}_n) +$$

$$+x_n(a_{1n}\vec{e}_1 + a_{2n}\vec{e}_2 + \cdots + a_{nn}\vec{e}_n) = (x_1a_{11} + x_2a_{12} + \cdots + x_na_{1n})\vec{e}_1 +$$

$$+(x_1a_{21} + x_2a_{22} + \cdots + x_na_{2n})\vec{e}_2 + \cdots + (x_1a_{n1} + x_2a_{n2} + \cdots + x_na_{nn})\vec{e}_n =$$

$$= y_1\vec{e}_1 + y_2\vec{e}_2 + \cdots + y_n\vec{e}_n \quad \Rightarrow$$

$$y_1 = x_1 a_{11} + x_2 a_{12} + \cdots + x_n a_{1n}$$
$$y_2 = x_1 a_{21} + x_2 a_{22} + \cdots + x_n a_{2n}$$
$$\ldots$$
$$y_n = x_1 a_{n1} + x_2 a_{n2} + \cdots + x_n a_{nn}$$

Следовательно,

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \ldots \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 a_{11} + x_2 a_{12} + \cdots + x_n a_{1n} \\ x_1 a_{21} + x_2 a_{22} + \cdots + x_n a_{2n} \\ \ldots \\ x_1 a_{n1} + x_2 a_{n2} + \cdots + x_n a_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \ldots \\ x_n \end{pmatrix} \Rightarrow Y = AX \blacktriangleleft$$

Замечание. Матрица линейного оператора полностью характеризует линейный оператор. Кроме того, любая квадратная матрица порядка n определяет линейный оператор n-мерного линейного пространства L. Таким образом, между линейными операторами, действующими в данном n-мерном линейном пространстве L и квадратными матрицами порядка n существует взаимно однозначное соответствие.

Теорема 4. Пусть линейные операторы $\hat{A}: L \to L$ и $\hat{B}: L \to L$ в конечномерном линейном пространстве L в базисе S имеют матрицы A и B соответственно. Тогда линейные операторы $\hat{A}+\hat{B}$, $\widehat{\alpha A}$, $\hat{A}\hat{B}$ имеют в этом базисе матрицы A + B, αA и AB соответственно.

► Докажем данное утверждение для оператора $\hat{A}\hat{B}$.

Пусть $\vec{z} = (\hat{A}\hat{B})\vec{x}$ и $\vec{y} = \hat{B}\vec{x}$

$\vec{z} = (\hat{A}\hat{B})\vec{x} = \hat{A}\left(\hat{B}\vec{x}\right) = \hat{A}\vec{y} \Rightarrow Z = AY$

$\vec{y} = \hat{B}\vec{x} \Rightarrow Y = BX \Rightarrow \ Z = A(BX) = (AB)X$

Следовательно, AB – матрица оператора $\hat{A}\hat{B}$ в базисе S ◄

Задача 1. Какое из следующих преобразований является линейным оператором в пространстве $\mathbb{R}^3$? Найти матрицу линейного оператора в каноническом базисе $\mathbb{R}^3$ и образ вектора $\vec{a} = (4; -1; 3)$.

а) $\hat{A}\vec{x} = (4x_1 - 2x_2 + 1; 2; 3x_1 - x_3)$

b) $\hat{B}\vec{x} = (x_1 + x_2 - x_3^2;\ 4x_2; 2x_2 - x_3^3)$

c) $\hat{C}\vec{x} = (2x_1 - x_2 - x_3;\ 4x_2;\ -x_1 + 3x_2 - x_3)$

Решение.

a) $\hat{A}\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, оператор $\hat{A}\vec{x} = (4x_1 - 2x_2 + 1; 2; 3x_1 - x_3)$ вектор из $\mathbb{R}^3$ переводит в вектор из $\mathbb{R}^3$.

Проверим линейность оператора $\hat{A}$:

$$\hat{A}(\vec{x} + \vec{y}) = (4(x_1 + y_1) - 2(x_2 + y_2) + 1; 2; 3(x_1 + y_1) - (x_3 + y_3))$$

С другой стороны:

$$\hat{A}\vec{x} + \hat{A}\vec{y} = (4x_1 - 2x_2 + 1; 2; 3x_1 - x_3) + (4y_1 - 2y_2 + 1; 2; 3y_1 - y_3)$$
$$= (4(x_1 + y_1) - 2(x_2 + y_2) + 2; 4;\ 3(x_1 + y_1) - (x_3 + y_3)) \Rightarrow$$
$$\hat{A}(\vec{x} + \vec{y}) \neq \hat{A}(\vec{x} + \vec{y})$$

Свойство аддитивности оператора не выполняется, следовательно, $\hat{A}$ не является линейным оператором.

Можно проверить линейность оператора другим способом.
Используем свойство линейного оператора – линейный оператор переводит нулевой вектор в нулевой: $\widehat{\mathrm{A}}\vec{0} = \vec{0}$, тогда

$$\hat{A}\vec{0} = (0 - 0 + 1; 2; 0 - 0) = (1; 2; 0) \neq (0; 0; 0)$$

Оператор $\widehat{\mathrm{A}}$ не переводит нулевой вектор в нулевой, следовательно, он не является линейным.

b) $\hat{B}: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, оператор $\hat{B}\vec{x} = (x_1 + x_2 - x_3^2;\ 4x_2; 2x_2 - x_3^3)$ вектор из $\mathbb{R}^3$ переводит в вектор из $\mathbb{R}^3$.

Проверим линейность оператора $\hat{B}$:

$$\hat{B}(\vec{x} + \vec{y}) = ((x_1 + y_1) + (x_2 + y_2) - (x_3 + y_3)^2; 4(x_2 + y_2); 2(x_2 + y_2) -$$
$$-(x_3 + y_3)^3) = (x_1 + y_1 + x_2 + y_2 - x_3^2 - 2x_3y_3 - y_3^2; 4x_2 + 4y_2;$$
$$2x_2 + 2y_2 - x_3^3 - 3x_3^2y_3 - 3x_3y_3^2 - y_3^3)$$

С другой стороны:

$$\hat{B}\vec{x} + \hat{B}\vec{y} = (x_1 + x_2 - x_3^2;\ 4x_2;\ \ 2x_2 - x_3^3) + (y_1 + y_2 - y_3^2;\ 4y_2;\ \ 2y_2 - y_3^3) =$$
$$= (x_1 + y_1 + x_2 + y_2 - x_3^2 - y_3^2; 4x_2 + 4y_2; 2x_2 + 2y_2 - x_3^3 - y_3^3) \Rightarrow$$

$$\hat{B}(\vec{x}+\vec{y}) \neq \hat{B}(\vec{x}+\vec{y})$$

Условие линейности оператора не выполняется, следовательно, $\hat{B}$ не является линейным оператором.

c) $\hat{C}: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $\hat{C}\vec{x} = (2x_1 - x_2 - x_3;\ 4x_2;\ -x_1 + 3x_2 - x_3)$ вектор из $\mathbb{R}^3$ переводит в вектор из $\mathbb{R}^3$.

Проверим линейность оператора

$$\hat{C}(\vec{x}+\vec{y}) = (2(x_1+y_1) - (x_2+y_2) - (x_3+y_3);\ 4(x_2+y_2); -(x_1+y_1) +$$
$$+3(x_2+y_2) + (x_3+y_3)) = (2x_1 - x_2 - x_3;\ 4x_2;\ -x_1 + 3x_2 + x_3) +$$
$$+(2y_1 - y_2 - y_3;\ 4y_2;\ -y_1 + 3y_2 + y_3) = \hat{C}\vec{x} + \hat{C}\vec{y}$$
$$\hat{C}(\alpha\vec{x}) = (2\alpha x_1 - \alpha x_2 - \alpha x_3;\ 4\alpha x_2;\ -\alpha x_1 + 3\alpha x_2 - \alpha x_3) =$$
$$= \alpha(2x_1 - x_2 - x_3;\ 4x_2;\ -x_1 + 3x_2 - x_3) = \alpha\hat{C}\vec{x}$$

Свойства аддитивности и однородности выполняются, следовательно оператор $\hat{C}$ является линейным.

Найдем матрицу линейного оператора в каноническом базисе:

$$S = \{\vec{e}_1 = (1;0;0), \vec{e}_2 = (0;1;0), \vec{e}_3 = (0;0;1)\}$$

Матрица линейного оператора составлена из столбцов образов базисных векторов.

Применим оператор $\hat{C}$ к базисным векторам:

$$\hat{C}\vec{e}_1 = (2;0;\ -1),\ \hat{C}\vec{e}_2 = (-1;4;3),\ \hat{C}\vec{e}_3 = (-1;0;\ -1)$$

Выпишем матрицу линейного оператора $\hat{C}$ в каноническом базисе пространства $\mathbb{R}^3$:

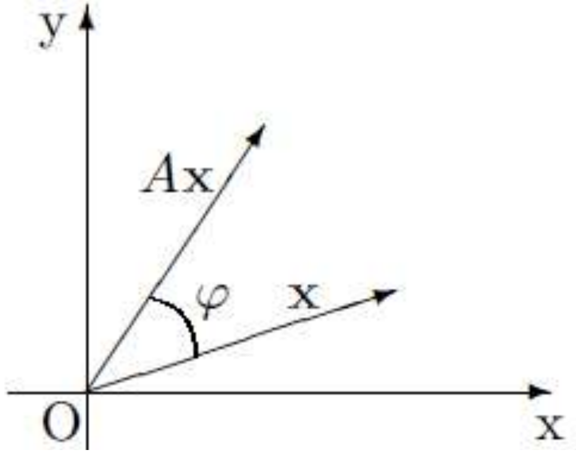
$$\mathrm{C} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 0 & 4 & 0 \\ -1 & 3 & -1 \end{pmatrix}$$

Найдем образ вектора $\vec{a} = (4\ ;\ -1;\ 3)$:

$$\hat{C}\vec{a} = \vec{y} \Rightarrow\ Y = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 0 & 4 & 0 \\ -1 & 3 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ -4 \\ -10 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$\vec{y} = (6\ ;\ -4;\ -10)$ – образ вектора $\vec{a} = (4\ ;\ -1;\ 3)$

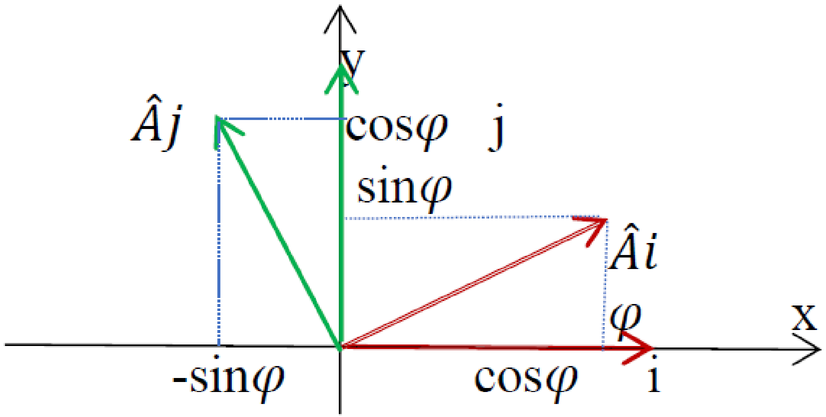
Задача 2. Найти матрицу оператора $\hat{A}: V_2 \to V_2$ – поворот на угол φ против часовой стрелки и образ вектора $\vec{x} = (0; -2)$ при повороте на угол $\varphi = \frac{\pi}{3}$.



Решение. Подействуем линейным оператором на базисные векторы $\{\vec{i}, \vec{j}\}$:

$$\hat{A}\vec{i} = \cos\varphi\,\vec{i} + \sin\varphi\,\vec{j}$$

$$\hat{A}\vec{j} = -\sin\varphi\,\vec{i} + \cos\varphi\,\vec{j}$$



Тогда $A = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}$ – матрица поворота на угол φ против часовой стрелки

При повороте на угол $\varphi = \frac{\pi}{3}$ вектор $\vec{x} = (0; -2)$ перейдёт в вектор $\vec{y} = \hat{A}\vec{x}$, координаты которого найдем по формуле: $Y = AX$

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\frac{\pi}{3} & -\sin\frac{\pi}{3} \\ \sin\frac{\pi}{3} & \cos\frac{\pi}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{3} \\ -1 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\vec{y} = \left(\sqrt{3}; -1\right)$$

Задачи для самостоятельного решения

1. В каноническом базисе пространства $\mathbb{R}^3$ операторы $\hat{A}$ и $\hat{B}$ действуют по правилу: $\hat{A}(x) = (2x_1 - x_2 + x_3,\ x_1 + 4x_2 - x_3,\ 3x_1 - x_2 + 2x_3)$, $\hat{B}(x) = (x_1 + 4x_2 + 3x_3,\ 2x_1 + x_3,\ 3x_2 - x_3)$. Показать линейность операторов $\hat{A}$ и $\hat{B}$. Описать действие оператора $\hat{C} = \hat{B}\hat{A} - 2\hat{A}^2$. Найти матрицы операторов $\hat{A}$, $\hat{B}$ и $\hat{C}$ в каноническом базисе пространства $\mathbb{R}^3$.
2. Оператор $\hat{A}$ действует на квадратные матрицы второго порядка по правилу: $\hat{A}(X) = BX^T + B^T X,$ где $B = \begin{pmatrix} -1 & 4 \\ 3 & -3 \end{pmatrix}$. Показать, что $\hat{A}$ – линейное оператор. Составить его матрицу в каноническом базисе.

Спасибо за внимание!