Klassische Experimentalphysik B
Aufgaben und Lösungen

Aufschrieb von Levin K.

Basierend auf den Übungsblättern
von Prof. Dr. Bernd Pilawa und Florian Wertz
Gehört im Sommersemester 2017

Tutoriumsmitschrieb des Moduls Klassische Experimentalphysik B.
Vollständigkeit und Korrektheit kann nicht gewährleistet werden, ich habe jedoch nach bestem Wissen und Gewissen gearbeitet.

Grafiken wurden von mir nach Vorlage meines Mitschriebs mit Tikz und Inkscape erstellt.

Die Energie wird hier mit W bezeichnet, um sie vom elektrischen Feld E zu unterscheiden.

Levin K., im November 2025

Inhaltsverzeichnis

Übungen zur Experimentalphysik B SS 2017

Prof. Dr. B. Pilawa
F. Wertz

1. Übungsblatt

Es empfiehlt sich, zuerst allgemein zu rechnen und erst in die Endformeln Zahlenwerte einzusetzen.

Elektrostatische Felder, Potentiale und elektr. Spannung

1. Vergleichen Sie die Gravitationskraft zwischen Elektron und Proton eines Wasserstoffatoms (mittlerer Abstand $r = a_{Bohr}$) mit der elektrostatischen Kraft zwischen den beiden geladenen Teilchen.

   Zahlenbeispiel: $a_{Bohr} = 5{,}3 \cdot 10^{-11}$ m; $m_e = 9{,}11 \cdot 10^{-31}$ kg; $m_p = 1{,}67 \cdot 10^{-27}$ kg; $q_e = -e$; $q_p = e$.

   Ergebnis: $F_{grav}/F_{coul} = 4{,}41 \cdot 10^{-40}$.

2. Ein homogenes elektrisches Feld der Feldstärke E zeige in x-Richtung. Eine im Ursprung ruhende Punktladung Q werde losgelassen.
   a) Mit welcher Kraft wird die Ladung beschleunigt?
   b) Wie groß ist ihre kinetische Energie bei $x = 4$ m?
   c) Wie groß ist die Änderung ihrer potentiellen Energie zwischen $x = 0$ m und $x = 4$ m?
   d) Wie groß ist der Potentialunterschied $\varphi(4\text{ m}) - \varphi(0\text{ m})$?
   e) Bestimmen Sie das Potential $\varphi(x)$, wenn $\varphi(1\text{ m}) = 0$ gewählt wird.

   Zahlenbeispiel: $E = 2$ kN/C; $Q = 3\ \mu$C.

   Ergebnis: a) $F = 6$ mN; b) $E_{kin} = 24$ mJ; c) $\Delta E_{pot} = -24$ mJ; d) $\Delta\varphi = -8$ kV.

3. Zwei gleiche, positive Ladungen Q_1 befinden sich in der (xy)-Ebene an den Punkten (0,a) und (a,0). In dem Punkt (0,0) ist eine negative Ladung $-Q_2$ angebracht.
   a) Skizzieren Sie die Anordnung. Wie groß muss Q_2 in Einheiten von Q_1 sein, damit eine Ladung im Punkt (a,a) keine Kraft erfährt.
   b) Berechnen Sie für diesen Fall das elektrische Potential φ im Punkt (a,a). Wie üblich sei dabei das Potential im Unendlichen gleich Null.

   (Original-Klausuraufgabe)

   Ergebnis: b) $\varphi = 0$.

4. Elektrischer Quadrupol

   a) An den Ecken eines Quadrates der Kantenlänge d befinden sich alternierend Punktladungen q und –q. Man berechne die potentielle Energie des so aufgebauten elektrischen Quadrupols.

   b) Wie groß ist die potentielle Energie, wenn alle vier Ladungen gleiches Vorzeichen besitzen?

   c) Skizzieren Sie grob qualitativ für die Fälle a) und b) den Verlauf der elektrischen Feldlinien sowie der Äquipotentiallinien (ohne Rechnung). Welche Überlegungen kommen Ihnen dabei zu Hilfe?

   Zahlenbeispiel: $q = e$; $d = 0{,}5$ nm.

   Ergebnis: a) $W = -1{,}2 \cdot 10^{-18}$ J; b) $W = 2{,}5 \cdot 10^{-18}$ J.

5. Eine Ladung Q sitzt im Mittelpunkt eines Würfels mit Kantenlänge a.

   a) Welche Spannung liegt zwischen den Ecken des Würfels?

   b) Welche Spannung liegt zwischen den Mittelpunkten der Seitenflächen?

   c) Welche Spannung liegt zwischen einer Ecke und einem Seitenmittelpunkt?

6. An einer Braunschen Röhre liegt zwischen Kathode und Anode eine Spannung $U_0 = 2000$ V.

   a) Welche Geschwindigkeit haben Elektronen, die aus der Glühkathode (mit der Geschwindigkeit $v = 0$) emittiert wurden beim Erreichen der Anode?

   b) Nach dem Durchtritt durch das Loch in der Anode gelangt der Elektronenstrahl zwischen ein Ablenkplattenpaar der Länge $\ell = 20$ mm mit dem Abstand $d = 4$ mm. Durch Anlegen einer Ablenkspannung $U_\perp$ wird zwischen den Ablenkplatten ein homogenes elektrisches Feld der Feldstärke $E = U_\perp/d$ erzeugt, welches senkrecht zur Strahlrichtung steht. Welche Ablenkspannung wird gebraucht, um den Strahl auf dem Schirm im Abstand $s = 20$ cm vom Plattenpaar um $b = 30$ mm auszulenken?

   c) Was ändert sich in b), wenn man sowohl die Anodenspannung U_0 als auch die Ablenkspannung $U_\perp$ verdoppelt?

   Ergebnis: a) $2{,}65 \cdot 10^7$ m/s; b) $U_\perp = 114$ V.

A1: Anziehung zwischen Proton und Elektron

Gravitationskraft: $F_G = -\gamma \frac{m_1 \cdot m_2}{r^2} = -\gamma \frac{m_e \cdot m_p}{a_0^2} = -3{,}61 \cdot 10^{-47}\,\mathrm{N}$

Elektr. Anziehungskraft: $F_C = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 \cdot q_2}{r^2} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{(-e) \cdot e}{a_0^2} = -8{,}2 \cdot 10^{-8}\,\mathrm{N}$

Verwendete Konstanten: $\epsilon_0 = 8{,}854 \cdot 10^{-12} \frac{\mathrm{C}^2}{\mathrm{Nm}^2}$

$e = 1{,}602 \cdot 10^{-19}\,\mathrm{C}$

$\gamma = 6{,}674 \cdot 10^{-11} \frac{\mathrm{m}^3}{\mathrm{kg} \cdot \mathrm{s}^2}$

Verhältnis: $\frac{F_G}{F_C} = 4{,}4 \cdot 10^{-40}$

A2: Teilchen im E-Feld

a) $F = q \cdot E = 3 \cdot 10^{-6}\,\mathrm{C} \cdot 2 \cdot 10^3 \frac{\mathrm{N}}{\mathrm{C}} = 6\,\mathrm{mN}$

b) $W_{\text{kin}} = \int\limits_{r_1}^{r_2} \vec{F}\,\mathrm{d}\vec{s} = Q \cdot \int\limits_{r_1}^{r_2} \vec{E}\,\mathrm{d}\vec{s} = Q \cdot E \cdot (r_2 - r_1)$

$= 3 \cdot 10^{-6}\,\mathrm{C} \cdot 2 \cdot 10^3\,\mathrm{N} \cdot 4\,\mathrm{m} = 24\,\mathrm{mJ}$

c) Energieerhaltung: $W_{\text{pot}} \rightarrow W_{\text{kin}}$ (bzw. umgekehrt)

Also: $\Delta W_{pot} = -W_{kin} = -24\,\mathrm{mJ}$

d) $U = \Delta\varphi = \varphi(r_2) - \varphi(r_1)$

mit $\varphi(\vec{r}) = \frac{W_{\text{pot}}}{Q}$

also $\Delta\varphi = \frac{\Delta W_{\text{pot}}}{Q} = \frac{-24\,\mathrm{mJ}}{3\,\mu\mathrm{C}} = -8\,\mathrm{kV}$

e) $\Delta\varphi = -E\Delta x$ (siehe d))

Also: $\varphi(x) = \varphi_0 - E \cdot x$

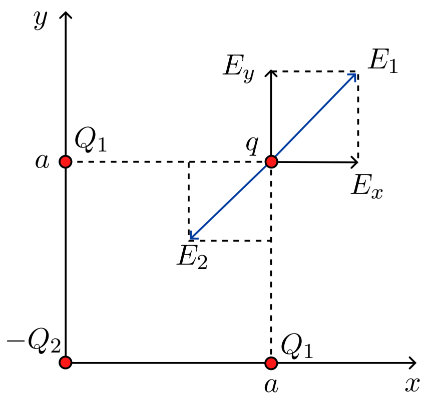
Hier: $\varphi(1) = \varphi_0 - E \cdot 1\,\mathrm{m} = 0$

$\Rightarrow \varphi_0 = 2\,\frac{\mathrm{kN}}{\mathrm{C}} \cdot 1\,\mathrm{m} = 2\,\frac{\mathrm{kV}}{\mathrm{m}} \cdot 1\,\mathrm{m} = 2\,\mathrm{kV}$

Potential: $\varphi = \underbrace{2\,\mathrm{kV}}_{\varphi_0} - \underbrace{2\,\frac{\mathrm{kV}}{\mathrm{m}}}_{E} \cdot x$

A3: Kräftegleichgewicht beim Ladungsviereck

a)



Damit Ladung q im Punkt (a, a) keine Kraft erfährt, muss gelten:

|Anziehung| = |Abstoßung|

Also: $E_1 + E_2 = 0$

Gesamtladung: $Q = Q_1 + Q_1 + Q_2$

Kraft auf q: $F_c(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q \cdot Q}{r^2}$

Feldstärke: $E = \frac{F}{q} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Q}{r^2}$

Nun soll auf q keine Kraft wirken:

$F_c(a, a) = 0 \quad \Rightarrow \quad E(a, a) = 0$

$$E_x = E_1 \cdot \underbrace{\cos(45°)}_{1/\sqrt{2}} = E_1 \cdot \underbrace{\sin(45°)}_{1/\sqrt{2}} = E_y = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Q_1}{a^2}$$

$\Rightarrow E_1 = \sqrt{2} \cdot E_x$

Abstand zwischen Nullpunkt und (a, a): $\sqrt{2}a$ (durch Satz des Pythagoras)

$$\Rightarrow E_2 = \frac{-1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Q_2}{2a^2}$$

$$\text{Gesamt:} \quad E_1 + E_2 = \frac{\sqrt{2}}{4\pi\epsilon_0}\frac{Q_1}{a^2} - \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Q_2}{2a^2}$$

$$\frac{1}{4\pi\epsilon_0 a^2}\left(\sqrt{2}Q_1 - \frac{Q_2}{2}\right) = 0$$

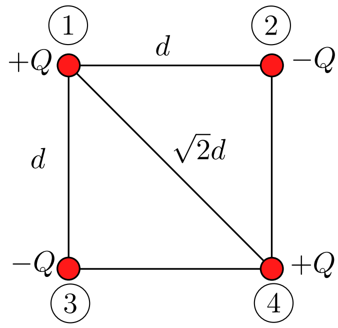
$$\sqrt{2}Q_1 = \frac{Q_2}{2}$$

$$Q_2 = 2\sqrt{2}Q_1$$

b) $$\varphi(r) = -\int_\infty^r E(r)\,\mathrm{d}r = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Q}{r}$$

$$\varphi(a, a) = \underbrace{2}_{\substack{\text{für x}\\ \text{und y}}} \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Q_1}{a} - \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Q_2}{\sqrt{2}a} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\underbrace{\left(2 - \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{2}}\right)}_{0}\frac{Q_1}{a} = 0$$

A4: Elektrischer Quadrupol



Potential einer Ladung q im Abstand r:

$\varphi_i(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q_i}{r}$

Nun wirkt das Potential von q_i auf eine Ladung q_j:

$W_{ji} = q_j \cdot \varphi_i\left(r_{ij}\right) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q_i q_j}{r_{ij}}$

Nun fügt man eine Ladung nach der anderen hinzu:

$$W = \sum_{j=2}^{N}\left(\frac{q_j}{4\pi\epsilon_0}\sum_{i=1}^{j-1}\frac{q_i}{r_{ij}}\right) \qquad \text{Hier: } N = 4$$

Sieht komplizierter aus, als es ist. Wir fügen eine Ladung nach der anderen hinzu, und schauen jeweils, wie sie sich auf die bereits vorhandenen Ladungen auswirkt.

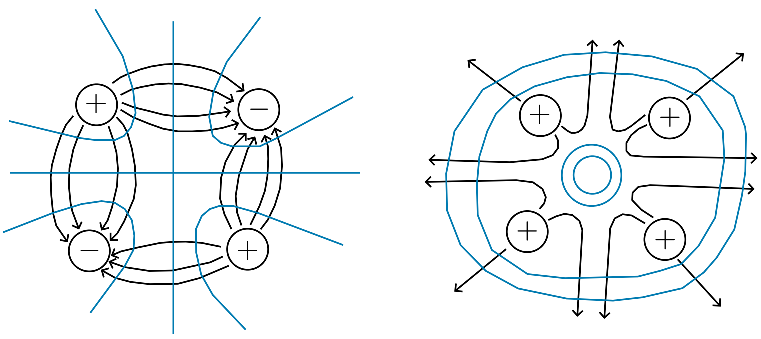
a) $$W = \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0 d}\left(\underbrace{-1}_{1+2} + \underbrace{\left(-1+\frac{1}{\sqrt{2}}\right)}_{1+2+3} + \underbrace{\left(-1+1+\frac{1}{\sqrt{2}}\right)}_{1+2+3+4}\right)$$

$$= -\frac{q^2}{4\pi\epsilon_0 d}\left(4-\sqrt{2}\right) = -1{,}19\cdot 10^{-18}\,\mathrm{J}$$

b) Alle Vorzeichen gleich:

$$W = \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0 d}\left(4+\sqrt{2}\right) = 2{,}49\cdot 10^{-18}\,\mathrm{J}$$

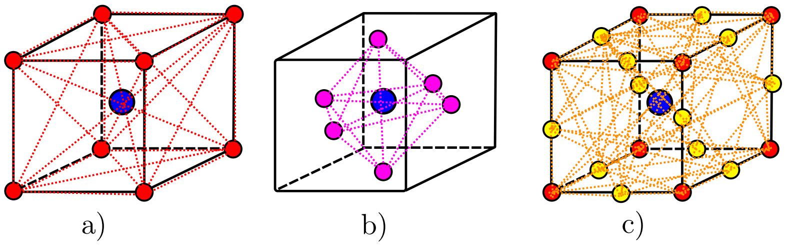
c) Feldlinien (schwarz) und Äquipotentiallinien (blau) in Fall a) (unterschiedliche Ladungen) und Fall b) (gleiche Ladungen)



Überlegungen:

- Symmetrie
- Feldlinien zeigen von + zu -
- Feldlinien schneiden sich nicht
- Äquipotentiallinien $\perp$ Feldlinien

A5: Ladung im Würfel



Potential der Punktladung q im Abstand r:

$$\varphi_i(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 \underbrace{\epsilon_r}_{\text{optional}}} \frac{q}{r}$$

Spannung: Potentialdifferenz, also $\varphi(r_1) - \varphi(r_2)$

a) Würfel: Alle Ecken gleich weit vom Mittelpunkt entfernt, also $|r_1| = |r_2|$.
$\Rightarrow U = \varphi(r_1) - \varphi(r_2) = 0\,\text{V}$.

b) Analog für die Seitenflächen:
Gleiche Entfernung zum Mittelpunkt, und somit $U = 0\,\text{V}$.

c) Kantenlänge: a
$\rightarrow \quad r(\text{Seite}) = \frac{a}{2} \quad$ und $\quad r(\text{Ecke}) = \frac{a}{2}\sqrt{3}$ (Pythagoras)
$\Lsh \; U = \varphi(\text{Seite}) - \varphi(\text{Ecke}) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0\epsilon_r}\left(\frac{2}{a} - \frac{2}{a\sqrt{3}}\right) = \frac{q}{2\pi\epsilon_0\epsilon_r a}\left(1 - \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$

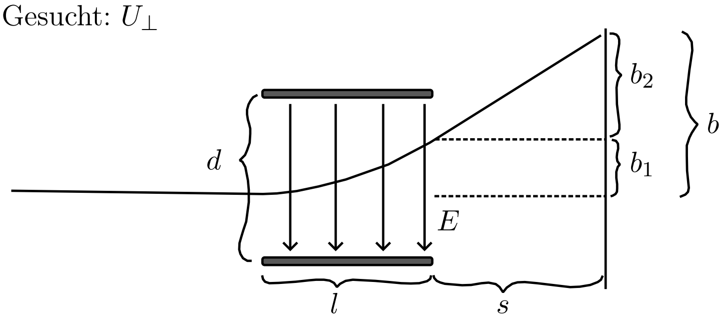
A6: Braunsche Röhre

a) $W_{\text{kin}} = \frac{1}{2} m_e v_0^2 = eU_0$

$v_0 = \sqrt{\frac{2eU_0}{m_e}} = 2{,}65 \cdot 10^7\,\frac{\text{m}}{\text{s}}$

b) $v_\parallel = \text{const.} = v_0 \quad , \quad t_a = \frac{l}{v_\parallel} \quad , \quad E = \frac{U_\perp}{d}$

Gesucht: $U_\perp$



- Ablenkungsbeschleunigung: $F = eE = m_e a_\perp \quad \Rightarrow \quad a_\perp = \frac{eE}{m_e} = \frac{eU_\perp}{m_e d}$
- Weg durch geladene Platten: Parabel (vgl. schiefer Wurf)

  Austrittshöhe: $b_1 = \frac{1}{2} a_\perp t_a^2 = \frac{1}{2} a_\perp \frac{l^2}{v_\perp^2}$
- Weg zwischen Platten und Schirm: unbeschleunigt

  $b_2 = v_\perp t_s = s \cdot \frac{v_\perp}{v_\parallel} = s \cdot \frac{a_\perp \cdot t_a}{v_\parallel} = s a_\perp \frac{l}{v_\parallel^2}$
- $b = b_1 + b_2 = \frac{a_\perp l}{v_\parallel^2} \left(\frac{1}{2} l + s\right) = \frac{eU_\perp}{m_e \cdot d} \cdot \underbrace{\frac{m_e}{2eU_0}}_{\text{siehe a)}} l \left(\frac{1}{2} l + s\right) = \frac{1}{2} \frac{l}{d} \frac{U_\perp}{U_0} \left(\frac{1}{2} l + s\right)$
- Aufgelöst: $U_\perp = \dfrac{2bd}{l\left(\dfrac{1}{2} l + s\right)}$

c) Es ändert sich nichts, da sich die Platten- und Anodenspannung gegenseitig ausgleichen.

$b \sim \frac{a_\perp}{v_\parallel^2} \sim \frac{U_\perp}{U_0}$

Übungen zur Experimentalphysik B **SS 2017**

Prof. Dr. B. Pilawa
F. Wertz

2. Übungsblatt

Elektrostatische Felder, Potentiale und Satz von Gauß

1. Berechnen Sie das elektrische Feld eines unendlich langen, unendlich dünnen geraden Leiters, der homogen mit einer Längenladungsdichte $\lambda = 2 \cdot 10^{-8}$ C/m geladen ist. Berechnen Sie die Spannung zwischen einem im Abstand von 1 cm und einem im Abstand von 5 cm vom Draht befindlichen Punkt.

   Ergebnis: U = 579 V

2. Eine Ladung Q sei homogen im gesamten Volumen einer nicht leitenden Kugel mit der konstanten Ladungsdichte ρ verteilt. Der Radius der Isolatorkugel sei R. Wie groß ist das elektrische Feld sowie das elektrische Potential als Funktion des Abstandes vom Kugelmittelpunkt
   a) außerhalb
   b) innerhalb der Kugel?

3. Eine dickwandige metallische Hohlkugel mit dem Innenradius r_i und dem Außenradius r_a trägt die Ladung $Q_K = 2q$. Im Zentrum der Kugel befindet sich eine Punktladung $Q_P = -q$.
   a) Skizzieren Sie ein Feldlinienbild.
   b) Welchen Verlauf hat die elektrische Feldstärke E als Funktion der Entfernung r vom Mittelpunkt der Kugel für $0 < r < \infty$? Skizzieren Sie die Funktion E(r).
   c) Wie groß ist die Feldstärke E an den beiden Oberflächen der Kugel?

4. Zwei kleine Metallkugeln vom Radius r befinden sich im Abstand d voneinander, wobei $d \gg r$ ist. Auf den Kugeln befinden sich die Ladungen +Q bzw. -Q.
   a) Skizzieren Sie den Verlauf des Potentials längs der Verbindungslinie der Mittelpunkte der beiden Kugeln.
   b) Welche Spannung U kann man zwischen den Kugeln messen?
   c) Mit welcher Kraft ziehen sich die Kugeln an? Welche Arbeit muss man aufwenden, um die Kugeln vom Abstand d aus vollständig auseinander zu ziehen?

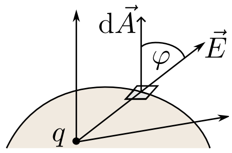
Was ist eigentlich der Satz von Gauß?

Elektr. Fluss Φ gibt an, wie viel Elektrizität durch eine Fläche strömt.

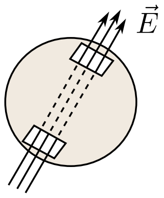
Mit anderen Worten: „Wie viele Feldlinien gehen durch ein Flächenelement?“

E-Feld muss nicht konstant über ganze Fläche sein, daher differentielle Betrachtung:

$$\mathrm{d}\Phi = \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{A} = E \cdot \cos(\varphi)\,\mathrm{d}A$$

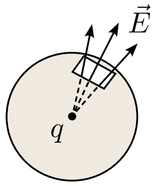


Bedeutung des Flusses:



$\Phi = 0$

„So viel, wie reingeht, geht wieder raus“



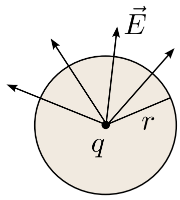
$\Phi \neq 0$

„Es geht mehr bzw. weniger raus“
↳ Es muss eine elektr. Quelle / Senke geben

Wir integrieren ($\vec{E}$ sei das Feld einer Punktladung):

$$\begin{aligned}
\Phi &= \oint \vec{E}\,\mathrm{d}\vec{A} = \oint E \cdot \cos(\varphi)\,\mathrm{d}A \\
&= \oint \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q}{r^2}\,\mathrm{d}A = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q}{r^2}\oint \mathrm{d}A \\
&= \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q}{r^2} \cdot 4\pi r^2 \\
&= \frac{q}{\epsilon_0}
\end{aligned}$$

hier: $\cos(\varphi) = 1$, da $\vec{E}$ und $\vec{A}$ die gleiche Richtung haben



A1: Spannung am Draht

$r_1 = 0{,}01\,\mathrm{m}$ $\qquad \epsilon_0 = 8{,}854 \cdot 10^{-12} \dfrac{\mathrm{C}^2}{\mathrm{Nm}^2}$

$r_2 = 0{,}05\,\mathrm{m}$ $\qquad \lambda = 2 \cdot 10^{-8} \dfrac{\mathrm{C}}{\mathrm{m}}$

Draht $\widehat{=}$ Zylinder (bzw. Zylindermantel: keine Feldlinien durch Seitenflächen)

Satz von Gauß: $\oint \vec{E}\,\mathrm{d}\vec{A} = \dfrac{q}{\epsilon_0}$

Fläche eines Zylindermantels: $A_{\text{Mantel}} = 2\pi r \cdot l$

$$\Rightarrow \oint \vec{E}\,\mathrm{d}\vec{A} = \oint E(r)\,\mathrm{d}\vec{A} = E(r) 2\pi r l \overset{\text{Gauß}}{=} \frac{q}{\epsilon_0} = \frac{\lambda l}{\epsilon_0}$$

Aufgelöst nach dem E-Feld: $E(r) = \dfrac{\lambda l}{2\pi r l \epsilon_0} = \dfrac{\lambda}{2\pi\epsilon_0}\dfrac{1}{r}$

Für die Spannung benötigen wir zunächst das Potential:

$$\varphi(r) = -\int_{r_0}^{r} E(r')\,\mathrm{d}r' = -\frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0}\int_{r_0}^{r} \frac{1}{r'}\,\mathrm{d}r' = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \ln\left(\frac{r_0}{r}\right)$$

Somit können wir den Potentialunterschied bestimmen:

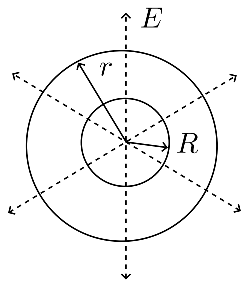
$$\begin{aligned} U &= \varphi(r_1) - \varphi(r_2) = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0}\left(\ln\left(\frac{r_0}{r_1}\right) - \ln\left(\frac{r_0}{r_2}\right)\right) \\ &= \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \ln\left(\frac{r_0/r_1}{r_0/r_2}\right) = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \ln\left(\frac{r_2}{r_1}\right) = 578{,}6\,\mathrm{V} \end{aligned}$$

A2: Feld der Isolatorkugel

Warum muss die Kugel nichtleitend sein?

↳ Ladungen auch im Innern und nicht nur auf der Oberfläche.

$$\begin{aligned} \text{Satz von Gauß: } \oint \vec{E}\,\mathrm{d}\vec{A} &= \oint_{\text{Kugel}} E(r)\,\mathrm{d}A \\ &= E(r) 4\pi r^2 = \frac{q}{\epsilon_0} \end{aligned}$$



Kugelsymmetrie: $\vec{E} = E(r)\vec{e}_r$

$$\Rightarrow E(r) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{r^2}\int \rho\,\mathrm{d}V$$

a) $\quad E_{\mathrm{a}}(r) = \dfrac{1}{4\pi\epsilon_0}\dfrac{1}{r^2}\,\rho \displaystyle\int_0^R 4\pi r'^2\,\mathrm{d}r'$

$$= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r^2}\, \rho \cdot \frac{4}{3}\pi R^3$$

$$= \frac{\rho}{3\epsilon_0} \frac{R^3}{r}$$

$$\varphi_a(r) = -\int\limits_{\infty}^{r} E_\mathrm{a}(r')\,\mathrm{d}r' \qquad \text{(Potential soll im Unendlichen 0 sein)}$$

$$= \frac{\rho R^3}{3\epsilon_0} \int\limits_{\infty}^{r} \frac{1}{r'^2}\,\mathrm{d}r' = \frac{\rho R^3}{3\epsilon_0} \left[-\frac{1}{r'}\right]_{\infty}^{r}$$

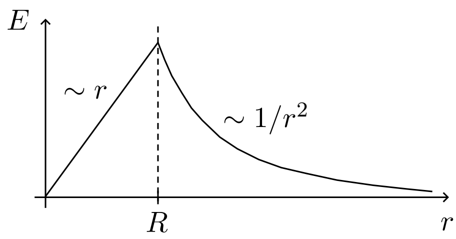
$$= \frac{\rho}{3\epsilon} \frac{R^3}{r}$$

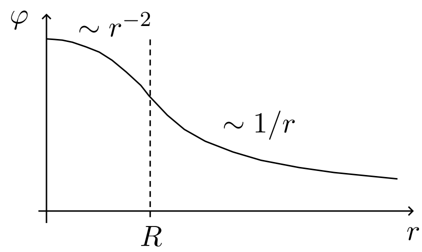
Kugel wird wie Punktladung in „großer“ Kugel betrachtet.

b) $$E_\mathrm{i}(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 r^2}\, \rho \int\limits_0^r 4\pi r'^2\,\mathrm{d}r' = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 r^2} \cdot \rho \frac{4}{3}\pi r^3 = \frac{\rho}{3 \cdot \epsilon_0} r$$

$$\varphi_\mathrm{i}(r) = \varphi_\mathrm{a}(R) - \int\limits_R^r E(r')\,\mathrm{d}r' = \frac{\rho}{3\epsilon_0} \cdot \frac{R^3}{R} - \left[\frac{\rho}{6\epsilon_0}\, r'^2\right]_R^r$$

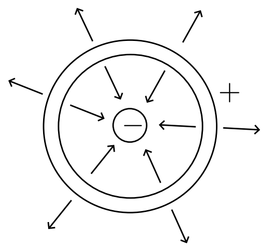
$$= \frac{\rho}{6\epsilon_0}(2R^2 - r^2 + R^2) = \frac{\rho}{6\epsilon_0}(3R^2 - r^2)$$





A3: Hohlkugel

a) Kugelsymmetrie: $\vec{E} = E(r) \cdot \vec{e}_{\mathrm{r}}$

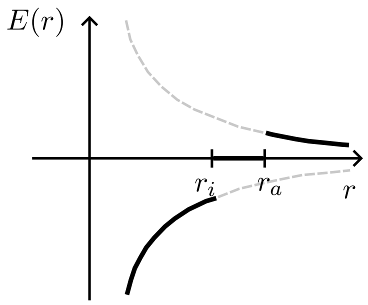


b) $E(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{Q}{r^2}$

Innen: $Q = -q$ $\rightarrow E(r) = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{q}{r^2}$

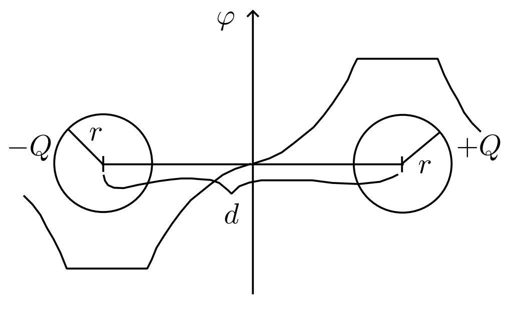
Metall: $E = 0$ (Influenzladungen schirmen Felder ab)

Außen: $Q = 2q - q = q$ $\rightarrow E(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{q}{r^2}$



A4: Zwei geladene Kugeln

a)



Außenfeld $\widehat{=}$ Punktladung in Kugelmitte

b) Superpositionsprinzip:

$$\varphi_{\text{ges}}(x) = \varphi_{Q-} + \varphi_{Q+} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{Q}{\left|x - \frac{d}{2}\right|} - \frac{Q}{\left|x + \frac{d}{2}\right|}\right) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{1}{\frac{d}{2} - x} - \frac{1}{\frac{d}{2} + x}\right)$$

$$= \frac{Q}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{x + \frac{d}{2} - \left(\frac{d}{2} - x\right)}{\frac{d^2}{4} - x^2}\right) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{2x}{\frac{d^2}{4} - x^2}\right)$$

Spannung zwischen den Oberflächen:

$$U = \varphi_{\text{ges}}\left(\frac{d}{2} - r\right) - \varphi_{\text{ges}}\left(-\frac{d}{2} + r\right) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0}\frac{2(d-2r)}{dr - r^2}$$

$$\approx \frac{Q}{4\pi\epsilon_0}\frac{2}{r} \quad (d \gg r)$$

c) $F_C = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Q^2}{d^2}$

$$W = -\int F\,\mathrm{d}s = -\int_d^\infty \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{-Q^2}{r'^2}\mathrm{d}'r$$

$$= \frac{Q^2}{4\pi\epsilon_0}\left[-\frac{1}{r'}\right]_d^\infty = +\frac{Q^2}{4\pi\epsilon_0}$$

Übungen zur Experimentalphysik B SS 2017

Prof. Dr. B. Pilawa
F. Wertz

3. Übungsblatt

Kondensatoren und Dielektrika

Es empfiehlt sich, zuerst allgemein zu rechnen und erst in die Endformeln Zahlenwerte einzusetzen.

1. Ein Kugelkondensator besteht aus zwei konzentrischen Hohlkugeln mit den Radien R_i (innere Kugel) und R_a (äußere Kugel), auf denen sich die Ladungen Q bzw. -Q befinden.
   a) Wie groß ist die Spannung U zwischen den beiden Kugeln?
   b) Wie groß ist die Kapazität $C = Q/U$ dieser Kondensatoranordnung?
   c) Man führe die analogen Berechnungen a) und b) für einen Zylinderkondensator durch, dessen Längenausdehnung groß gegenüber dem Radius R_a des äußeren Zylinders ist.

2. Ein luftgefüllter Plattenkondensator mit der Plattenfläche A und dem Plattenabstand d_0 werde auf eine Spannung U_0 aufgeladen. Der Kondensator wird anschließend von der Spannungsquelle getrennt.

   a) Berechnen Sie die Kapazität C_0 des Kondensators. Wie groß ist die Ladung Q_0 auf den Platten und die in dem Kondensator gespeicherte elektrische Energie W_0?
   b) Der Plattenabstand werde nun auf $2 \cdot d_0$ vergrößert. Wie ändert sich die Ladung Q auf den Platten sowie das elektrische Feld E, die Verschiebungsdichte D und die Spannung U zwischen den Platten? Wie ändert sich Kapazität und gespeicherte elektrische Energie?
   c) Berechnen Sie die mechanische Arbeit, die erforderlich ist, um die Platten auseinanderzuziehen.
   Eine Metallplatte der Dicke d_0 werde zwischen die Platten des Kondensators geschoben. Wie groß ist nun die Spannung über dem Kondensator?
   d) Anschließend werde ein Kondensator der Kapazität $2C_0$ parallel geschaltet. Welche Spannung kann dann über dem Kondensator gemessen werden?
   e) Wie ändern sich die Ergebnisse in Aufgabe b) und c) wenn die Spannungsquelle nicht abgeklemmt wird?

   Zahlenbeispiel: $A = 300\ \mathrm{cm}^2$; $d = 10$ mm; $U_0 = 12$ V.

3. Ein Kondensator der Kapazität C_1 und ein Kondensator der Kapazität C_2 seien parallel geschaltet. Ein Kondensator der Kapazität C_3 liege dazu in Reihe. Die gesamte Anordnung werde auf die Spannung U geladen.

   a) Skizzieren Sie die Anordnung.

   b) Bestimmen Sie die Ladung auf jedem Kondensator.

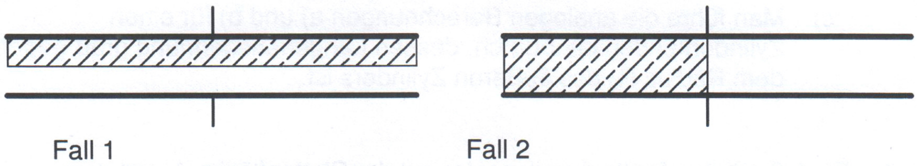
   Zahlenbeispiel: $C_1 = 1\ \mu F$; $C_2 = 0{,}25\ \mu F$; $C_3 = 0{,}3\ \mu F$; $U = 10\ V$.

   Ergebnisse: b) $Q_1 = 1{,}94\ \mu C$; $Q_2 = 0{,}48\ \mu C$; $Q_3 = 2{,}42\ \mu C$.

4. Ein luftgefüllter Plattenkondensator besitze die Kapazität C_0 und die Ladung Q.

   a) Wie ändern sich jeweils die Kapazität C, die elektrische Feldstärke E, die Spannung U, die elektrische Verschiebungsdichte D, die Flächenladungsdichte auf den Kondensatorplatten sowie die im elektrischen Feld gespeicherte Energie, wenn das Volumen zwischen den Platten wie skizziert zur Hälfte mit einem Dielektrikum mit der Dielektrizitätskonstanten ε_r gefüllt wird?

   b) Wie ändert sich das Ergebnis, wenn nicht die Ladung Q, sondern die am Kondensator angelegte Spannung U konstant gehalten wird?

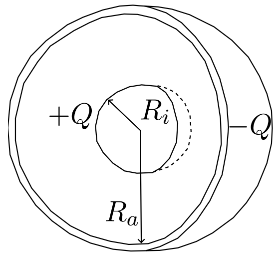


A1: Kugelkondensator

a) $$U = \int_{r_i}^{r_a} E \,\mathrm{d}r = \int_{r_i}^{r_a} \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r^2} \,\mathrm{d}r$$

$$= \left[-\frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r}\right]_{r_i}^{r_a} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{r_i} - \frac{1}{r_a}\right)$$

$$= \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{r_a - r_i}{r_a \cdot r_i}$$



b) $$C = \frac{Q}{U} = \frac{Q \cdot 4\pi\epsilon_0}{Q \cdot \left(\frac{1}{r_i} - \frac{1}{r_a}\right)} = \frac{4\pi\epsilon_0}{\frac{1}{r_i} - \frac{1}{r_a}}$$

$$= \frac{4\pi\epsilon_0 \, r_a \, r_i}{r_a - r_i}$$

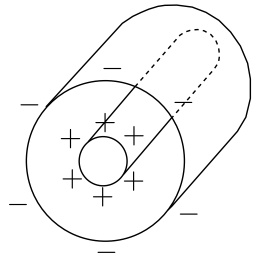
c) Wir betrachten nun einen Zylinder.

Oberfläche: $A = 2\pi \, r \, l$

Gauß: $E \cdot 2\pi \, r \, l = \frac{Q}{\epsilon_0}$

$\Rightarrow E = \frac{Q}{2\pi\epsilon_0 l} \frac{1}{r}$

$$U = \int_{r_i}^{r_a} E \,\mathrm{d}r = \int_{r_i}^{r_a} \frac{Q}{2\pi\epsilon_0 l} \frac{1}{r} \,\mathrm{d}r = \frac{Q \cdot \ln\left(\frac{r_a}{r_i}\right)}{2\pi\epsilon_0 l}$$



$$C = \frac{Q}{U} = \frac{2\pi\epsilon_0 l}{\ln\left(\frac{r_a}{r_i}\right)}$$

A2: Plattenkondensator

a) Gauß: $Q = \epsilon_0 E A = \epsilon_0 \dfrac{U}{d} A$

$\Rightarrow$ $C_0 = \dfrac{Q}{U} = \dfrac{\epsilon_0 A}{d} = 26{,}6\,\mathrm{pF}$

$Q_0 = C_0 \cdot U_0 = \dfrac{\epsilon_0\, A\, U_0}{d} = 3{,}19 \cdot 10^{-10}\,\mathrm{C}$

$W_0 = \frac{1}{2}\, C_0\, U_0^2 = 1{,}91 \cdot 10^{-9}\,\mathrm{J}$

b) Spannungsquelle getrennt: Q kann nicht abfließen $\rightarrow Q = Q_0$

Spannung: $U = \dfrac{Q\, d}{\epsilon_0\, A} \xrightarrow{d=2d_0} U = 2\, U_0$

E-Feld: $E = \dfrac{U}{d} = \dfrac{2\, U_0}{2\, d_0} = E_0$

Verschiebungsdichte: $D = \dfrac{Q}{A} = \epsilon_0\, E_0 = D_0$

Kapazität: $C = \dfrac{\epsilon_0\, A}{d} = \dfrac{\epsilon_0\, A}{2\, d_0} = \dfrac{1}{2}\, C_0$

Energie: $W = \frac{1}{2}\, C\, U^2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}\, C_0 \cdot (2 U_0)^2 = C_0\, U_0^2$

c) W(vorher)$= \frac{1}{2}\, C_0\, U_0^2$

W(nachher)$= C_0\, U_0^2$

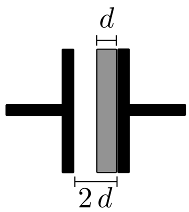
Energieerhaltungssatz:

$\Delta W = C_0\, U_0^2 \, - \, \frac{1}{2}\, C_0\, U_0^2 = \frac{1}{2}\, C_0\, U_0^2 = 1{,}91 \cdot 10^{-9}\,\mathrm{J}$

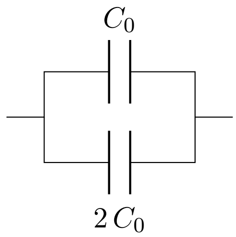
Metallplatte: feldfrei (kein Dielektrikum)

$\Rightarrow$ „halbiert“ den Kondensator:

$U = E_0 \cdot (2\, d_0 \, - \, d_0) = U_0 = 12\,\mathrm{V}$



d) Parallelschaltung:



$C_{\mathrm{ges}} = C_0 \, + \, 2\, C_0 = 3\, C_0$

$U = \dfrac{Q}{C} = \dfrac{Q}{3\, C_0} = \dfrac{1}{3}\, U_0 = 4\,\mathrm{V}$

e) Spannung wird nicht abgeklemmt $\rightarrow$ U bleibt gleich

$C = \frac{1}{2}\, C_0$ (nicht von Spannung abhängig)

$Q = C \cdot U = \frac{1}{2}\, C_0 \cdot U_0 = \frac{1}{2}\, Q_0$

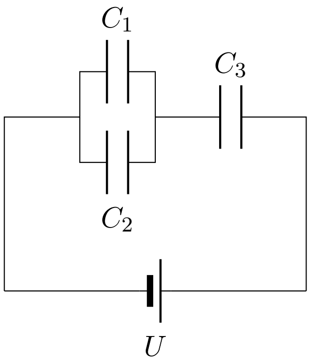
$E = \dfrac{U}{d} = \dfrac{U_0}{2\, d_0} = \dfrac{1}{2}\, E_0$

$$W = \frac{1}{2}\,CU^2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}\,C_0 \cdot U_0^2 = \frac{1}{4}\,C_0U_0^2$$

$$\Delta W = \frac{1}{2}\,C_0U_0^2 \;-\; \frac{1}{4}\,C_0U_0^2 = \frac{1}{4}\,C_0U_0^2$$

A3: Parallel- und Reihenschaltung von Kondensatoren

a) Schaltbild:



b) Parallel: $C_{\text{ers}} = C_1 + C_2 + ...$

Reihe: $\dfrac{1}{C_{\text{ers}}} = \dfrac{1}{C_1} + \dfrac{1}{C_2} + ...$

Hier also: $\dfrac{1}{C_{\text{ers}}} = \dfrac{1}{C_1 + C_2} + \dfrac{1}{C_3}$

↳ $C_{\text{ers}} = 2{,}42 \cdot 10^{-7}\,\text{F}$

Welche Ladung hat C_{ers}?

$Q = C_{\text{ers}} \cdot U = 2{,}42\,\mu\text{F}$

Ladung fließt komplett durch C_3, also:

$Q_3 = 2{,}42\,\mu\text{C}$

Wie verteilt sich die Ladung auf die beiden parallelen Widerstände?

$C_{12} = C_1 + C_2 = 1{,}25\,\mu\text{F} \quad \rightarrow \quad U = \dfrac{Q_3}{C_{12}} = \dfrac{2{,}42\,\mu\text{C}}{1{,}25\,\mu\text{F}} = 1{,}94\,\text{V}$

$Q_1 = C_1 \cdot U = 1{,}94\,\mu\text{C} \quad , \quad Q_2 = 0{,}48\,\mu\text{C}$

A4: Halbes Dielektrikum

a) **Fall 1:**

Serienschaltung zweier „Teilkondensatoren“ (einmal mit und einmal ohne Dielektrikum; Abstand je $d/2$)

$$C_1 = \epsilon_0 \epsilon_r \frac{A}{d/2} = \frac{2\epsilon_0 \epsilon_r A}{d} = 2\epsilon_r C_0$$
$$C_2 = \epsilon_0 \frac{A}{d/2} = 2C_0$$
$$C_{\text{ges}} = \frac{C_1 \cdot C_2}{C_1 + C_2} = \frac{4\epsilon_r C_0^2}{2\,(\epsilon_r + 1) C_0} = \frac{2\,\epsilon_r\, C_0}{\epsilon_r + 1}$$

Spannung: $U = \frac{Q}{C} = \frac{Q}{C_0} \frac{\epsilon_r + 1}{2\,\epsilon_r} = U_0 \frac{\epsilon_r + 1}{2\,\epsilon_r}$

E-Feld: $E = \frac{Q}{\epsilon_0\, \epsilon_r\, A} \quad \rightarrow \quad E_1 = \frac{E_0}{\epsilon_r} \quad , \quad E_2 = E_0$

$D = \frac{Q}{A} = D_1 = D_2$ (unabh. von ϵ_r; Q konstant)

ebenso $\sigma = \frac{Q}{A} = D$

Energie: $W = \frac{1}{2}\, CU^2 = \frac{1}{2}\, \frac{Q^2}{C} = \frac{1}{2}\, \frac{Q^2}{C_0} \frac{\epsilon_r + 1}{2\,\epsilon_r} = \frac{\epsilon_r + 1}{2\,\epsilon_r}\, W_0$

Fall 2:

Parallelschaltung (einmal mit und einmal ohne Dielektrikum, Fläche je $A/2$)

$$\left.\begin{array}{l} C_1 = \frac{\epsilon_0 \epsilon_r}{d}\, \frac{A}{2} = \frac{\epsilon_r}{2}\, C_0 \\ C_2 = \frac{\epsilon_0}{d}\, \frac{A}{2} = \frac{1}{2}\, C_0 \end{array}\right\} C_{\text{ges}} = \frac{1}{2}\, C_0\, (1 + \epsilon_r)$$

$$U = \frac{Q}{C} = \frac{2\, Q}{C_0\, (1 + \epsilon_r)} = \frac{2}{1 + \epsilon_r} U_0$$

E-Feld: $E = \frac{U}{d} = \frac{2}{1 + \epsilon_r}\, E_0$

$D = \epsilon \cdot E \quad , \quad D_1 = \frac{2\,\epsilon_r}{1 + \epsilon_r}\, D_0 \quad , \quad D_2 = \frac{2}{1 + \epsilon_r}\, D_0$

$\sigma = \frac{Q}{A} = \sigma_0$

$W = \frac{1}{2}\, CU^2 = \frac{1}{2}\, \frac{Q^2}{C} = \frac{1}{2}\, \frac{2}{1 + \epsilon_r}\, \frac{Q^2}{C_0} = \frac{2}{1 + \epsilon_r}\, W_0$

b) Was passiert, wenn nicht Q, sondern U konstant bleibt?

Wir setzen wieder die Kapazitäten wie in a) ein:

$C = \frac{2\epsilon_r}{\epsilon_r + 1}\, C_0$ (Fall 1)

$C = \frac{1 + \epsilon_r}{2}\, C_0$ (Fall 2)

Fall 1:

$Q = C \cdot U = \frac{2\epsilon_r}{\epsilon_r + 1}\, C_0 \cdot U = \frac{2\epsilon_r}{\epsilon_r + 1}\, Q_0$

$$E = \frac{Q}{\epsilon_0\,\epsilon_r\,A} \quad\longrightarrow\quad E_1 = \frac{2}{\epsilon_r + 1}\,E_0$$

$$E_2 = \frac{2\epsilon_r}{\epsilon_r + 1}\,E_0$$

$$D = \frac{Q}{A} = D_1 = D_2 = \frac{2\epsilon_r}{\epsilon_r + 1}\,D_0 = \sigma$$

$$W = \frac{1}{2}\,CU^2 = \frac{2\epsilon_r}{\epsilon_r + 1}\,W_0$$

Fall 2:

$$Q = C \cdot U = \frac{\epsilon_r + 1}{2}\,Q_0$$

$$E = \frac{U}{d} = E_1 = E_2 = E_0$$

$$D = \epsilon_0 \cdot \epsilon_r \cdot E \quad\longrightarrow\quad \sigma_1 = D_1 = \epsilon_r\,D_0$$

$$\sigma_2 = D_2 = D_0$$

$$W = \frac{1}{2}\,CU^2 = \frac{\epsilon_r + 1}{2}\,W_0$$

Übungen zur Experimentalphysik B **SS 2017**

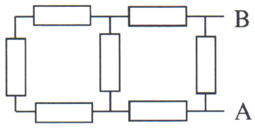
Prof. Dr. B. Pilawa
F.Wertz

4. Übungsblatt

Ströme und Widerstände

Es empfiehlt sich, zuerst allgemein zu rechnen und erst in die Endformeln Zahlenwerte einzusetzen.

1. Welcher Gesamtwiderstand liegt zwischen den Punkten A und B, wenn die Einzelwiderstände jeweils 3 Ω haben?



Ergebnis: $R_{ges} = 2{,}20\ \Omega$.

2. Gegeben sei ein Würfel, dessen Kanten aus Silberdrähten bestehen (Kantenlänge a = 10 cm, Durchmesser d = 1 mm, $\rho_{Ag} = 1{,}6 \cdot 10^{-8}\ \Omega\mathrm{m}$). Skizzieren Sie die Anordnung und berechnen Sie den Gesamtwiderstand zwischen zwei Eckpunkten der Raumdiagonalen.

Ergebnis: $R_{ges} = 1{,}70\ m\Omega$.

3. Von einer Reise aus den USA hat jemand eine 60 W-Glühlampe und einen 500 W-Tauchsieder mitgebracht, beide ausgelegt für die Spannung 115 V.
   a) Können Sie Lampe und Tauchsieder in Serie schalten und an unserem Stromnetz mit 230 V betreiben?
   b) Welchen Vorwiderstand benötigen Sie, um beide Geräte parallel geschaltet an unser Stromnetz anzuschließen?
   c) Welche Leistung wird im Fall b) im Vorwiderstand dissipiert?
   d) Was passiert im Fall b), wenn der Thermoschalter des Tauchsieders abschaltet?

Ergebnisse: b) $R = 23{,}6\ \Omega$; *c)* $P_R = 560\ W$.

4. An einer Autobatterie wird eine Leerlaufspannung $U_0 = 12$ V gemessen. Nach Einschalten von 2 Scheinwerfern (je 12 V/60 W) plus 2 Rückleuchten (je 12 V/20 W) sinkt die Spannung an den Klemmen der Batterie auf $U_{Bel} = 10$ V.
   a) Welcher Strom fließt dann insgesamt?
   b) Welche Leistung wird dabei in der Batterie selbst verbraucht?
   c) Welcher Strom fließt durch einen Startermotor, dessen Leistung mit $P_A = 500$ W bei 12 V angegeben ist?
   d) Welchen Bruchteil der angegebenen Leistung erreicht der Starter damit?

Ergebnisse: a) $I_{Bel} = 11{,}1\ A$; *b)* $P_B = 22{,}2\ W$; *c)* $I_{mot} = 25{,}6\ A$; *d)* $P_{mot}/P_0 = 38\%$.

5. Eine Autowerkstatt bietet eine Autobatterie mit einer Batteriekapazität von 63 Ah, einer Kurzschluss-Stromstärke von 300 A und einer Leerlaufspannung von 12 V an.

   a) Wie groß ist der Innenwiderstand der Batterie?
   b) Mit welcher Leistung wird die Batterie beheizt, wenn man sie kurzschließt?
   c) Wie lange brennt das Standlicht (Vier Birnchen zu je 5 W), wenn die Batterie zuvor vollgeladen war?
   d) Welche Energie ist in der vollgeladenen Batterie gespeichert?
   e) Welche Spannung liegt an den Batterieklemmen noch an, wenn ein Strom von 45 A fließt? Wie groß ist dann die Nutzleistung beim Verbraucher?

   Ergebnisse: a) $R_i = 0{,}04\ \Omega$; b) $P_i = 3{,}6\ kW$; c) $t = 38{,}0\ h$; d) $W = 2{,}72\ MJ$;
   e) $U = 10{,}2\ V$; $P = 459\ W$.

6. Ein Strommessgerät mit dem Innenwiderstand 1 kΩ zeigt bei einem Strom von 2 mA Vollausschlag. Wie kann man dieses Instrument durch geeignete Beschaltung mit Widerständen

   a) zu einem Strommesser mit dem Vollausschlag 1 A und
   b) zu einem Spannungsmesser mit dem Vollausschlag 100 V machen?

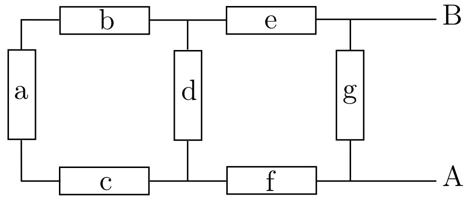
   Skizzieren Sie jeweils die Schaltungen und geben Sie die Größe der Widerstände an.

   Ergebnisse: a) $R = 2\ \Omega$; b) $R = 49\ k\Omega$.

A1: Gesamtwiderstand

R jeweils $3\,\Omega$

R_{ges}?



- R_{a}, R_{b}, R_{c}: Reihe

  $R_{\text{abc}} = R_{\text{a}} + R_{\text{b}} + R_{\text{c}} = 3R = 9\,\Omega$
- $R_{\text{abc}}, R_{\text{d}}$: Parallel

$$\frac{1}{R_{\text{abcd}}} = \frac{1}{R_{\text{abc}}} + \frac{1}{R_{\text{d}}} = \frac{R_{\text{d}} + R_{\text{abc}}}{R_{\text{abc}} \cdot R_{\text{d}}}$$

$$\Rsh\; R_{\text{abcd}} = \frac{R_{\text{abc}} \cdot R_{\text{d}}}{R_{\text{d}} + R_{\text{abc}}} = \frac{9\,\Omega \cdot 3\,\Omega}{3\,\Omega + 9\,\Omega} = \frac{9}{4}\,\Omega$$

- $R_{\text{abcd}}, R_{\text{e}}, R_{\text{f}}$: Reihe

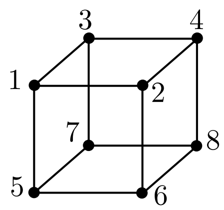
  $R_{\text{abcdef}} = R_{\text{abcd}} + R_{\text{e}} + R_{\text{f}} = \frac{9}{4}\,\Omega + 3\,\Omega + 3\,\Omega = \frac{33}{4}\,\Omega$
- R_{abcdef}, R_{g}: Parallel

$$\frac{1}{R_{\text{ges}}} = \frac{1}{R_{\text{abcdef}}} + \frac{1}{R_{\text{g}}} = \frac{R_{\text{g}} + R_{\text{abcdef}}}{R_{\text{abcdef}} \cdot R_{\text{g}}}$$

$$\Rsh\; R_{\text{ges}} = \frac{R_{\text{abcdef}} \cdot R_{\text{g}}}{R_{\text{g}} + R_{\text{abcdef}}} = \frac{\frac{33}{4}\,\Omega \cdot 3\,\Omega}{3\,\Omega + \frac{33}{4}\,\Omega} = \frac{11}{5}\,\Omega = 2{,}2\,\Omega$$

A2: Würfel aus Widerständen

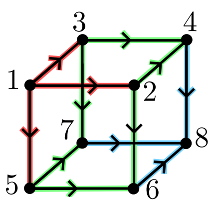
Alle Kanten des Würfels bestehen aus gleichartigen Widerständen.



Gesucht: Gesamtwiderstand zwischen den Punkten 1 und 8.

Wie kann der Strom fließen?

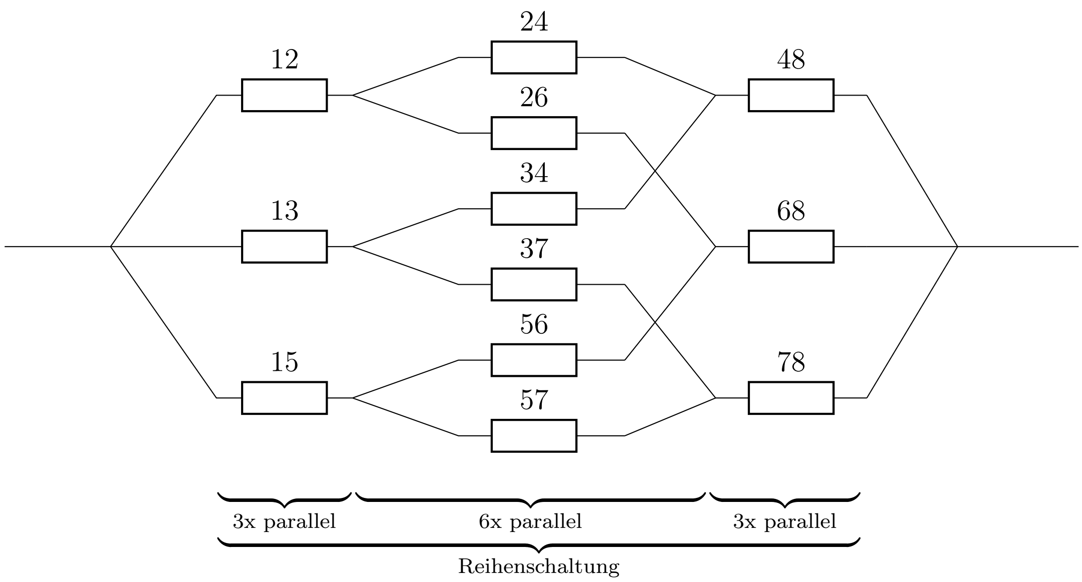
↳ Drei Schritte – jeweils einer in x-, y- und z-Richtung –, sodass pro Schritt mehrere Wege möglich sind.



1. Schritt: 3 Möglichkeiten

2. Schritt: 6 Möglichkeiten

3. Schritt: 3 Möglichkeiten



$R = \rho \cdot \frac{l}{A} = 1{,}6 \cdot 10^{-8}\,\Omega\,\mathrm{m} \cdot \frac{0{,}1\,\mathrm{m}}{\pi \cdot \left(0{,}5 \cdot 10^{-3}\,\mathrm{m}\right)^2}$

Erste Parallelschaltung: $\frac{1}{R_1} = \frac{1}{R} + \frac{1}{R} + \frac{1}{R} = \frac{3}{R} \quad \Rightarrow \quad R_1 = \frac{1}{3}R$

Analog dazu: $R_2 = \frac{1}{6}R \quad , \quad R_3 = \frac{1}{3}R$

Reihenschaltung: $R_{\text{ges}} = R_1 + R_2 + R_3 = \frac{5}{6}R = 1{,}70\,\mathrm{m}\Omega$

A3: Lampe und Tauchsieder

$P = U \cdot I = U \cdot \frac{U}{R} = \frac{U^2}{R}$

Welchen Widerstand haben die beiden Geräte?

Lampe: $R_{\text{L}} = \frac{U_0^2}{P_{\text{L}}} = \frac{(115\,\mathrm{V})^2}{60\,\mathrm{W}} = 220{,}4\,\Omega$

Tauchsieder: $R_{\text{T}} = \frac{U_0^2}{P_{\text{T}}} = \frac{(115\,\mathrm{V})^2}{500\,\mathrm{W}} = 26{,}45\,\Omega$

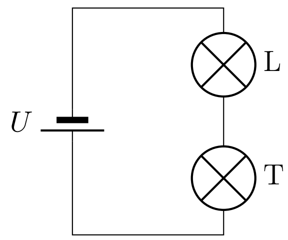
a) L und T in Reihe: $R_{\text{LT}} = R_{\text{L}} + R_{\text{T}} = 246{,}9\,\Omega$

Reihe bedeutet: I bei beiden gleich.

$I = \frac{U}{R_{\text{ges}}} = \frac{230\,\mathrm{V}}{246{,}85\,\Omega} = 0{,}932\,\mathrm{A}$

$U_{\text{L}} = R_{\text{L}} \cdot I = 205{,}4\,\mathrm{V}$

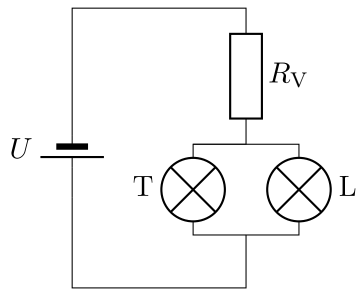
$P_{\text{L}} = U_{\text{L}} \cdot I = 191{,}4\,\mathrm{W} \gg 60\,\mathrm{W}$ *(Kawumm!)*



$U_T = R_T \cdot I = 24{,}7\,\mathrm{V}$
$P_T = U_T \cdot I = 23{,}0\,\mathrm{W} \ll 500\,\mathrm{W}$ *(Nichts passiert!)*

Fazit: Lampe und Tauchsieder lassen sich nicht in Reihe betreiben.
Die Lampe brennt durch, der Tauchsieder wird nicht warm.

b) L und T parallel:



$$R_{LT} = \frac{R_L \cdot R_T}{R_L + R_T} = 23{,}62\,\Omega$$

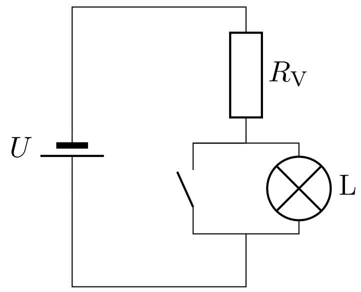
An R_V sollen 115 V abfallen.

$$I = \frac{\overbrace{U - U_0}^{U_0}}{R_V} = \frac{U_0}{R_{LT}}$$

$$\Rightarrow \quad R_V = \frac{U - U_0}{U_0} R_{LT} = \frac{U_0}{U_0} R_{LT} = 23{,}62\,\Omega$$

c)
$$\begin{aligned} P_V &= U_0 \cdot I = P_{LT} \\ &= U_0(I_L + I_T) \\ &= P_L + P_T \\ &= 60\,\mathrm{W} + 500\,\mathrm{W} = 560\,\mathrm{W} \end{aligned}$$

d) Reihenschaltung:



$$I = \frac{U}{R_V + R_L} = \frac{230\,\mathrm{V}}{244\,\Omega} = 0{,}94\,\mathrm{A}$$

$$P_L = U_L \cdot I = R_L \cdot I^2 = 194{,}8\,\mathrm{W} \gg 60\,\mathrm{W}$$

$\Rightarrow$ Birne brennt wieder durch

A4: Autobatterie I

Parallelschaltung: $U_i = U_0$, $I = \sum_i I_i$

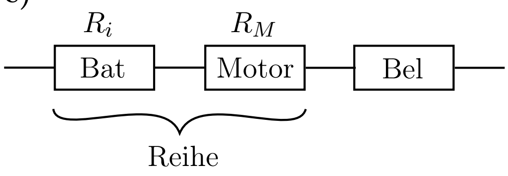
↳ $P_{ges} = U_0 \cdot \sum_i I_i = \sum_i P_i = 2 \cdot 60\,\mathrm{W} + 2 \cdot 20\,\mathrm{W} = 160\,\mathrm{W}$

$$P = U \cdot I = \frac{U^2}{R} \;,\; R_{Bel} = \frac{U_0^2}{P_{Bel}} = 0{,}9\,\Omega$$

a) $I = \frac{U_{Bel}}{R_{Bel}} = \frac{10\,\mathrm{V}}{0{,}9\,\Omega} = 11{,}1\,\mathrm{A}$

b)
$$\begin{aligned} P_{Bat} &= (U_0 - U_{Bel}) \cdot I = (U_0 - U_{Bel}) \cdot \frac{U_{Bel}}{R_{Bel}} \\ &= 2\,\mathrm{V} \cdot 11{,}1\,\mathrm{A} = 22{,}2\,\mathrm{W} \end{aligned}$$

c)



$$I = \frac{U}{R} = \frac{U}{R_i + R_M} = 25{,}64\,\mathrm{A}$$

Innenwiderstand:

$$R_i = \frac{U_0 - U_{\mathrm{Bel}}}{I} = \frac{2\,\mathrm{V}}{11{,}1\,\mathrm{A}} = 0{,}18\,\Omega$$

Widerstand Motor:

$$R_M = \frac{U^2}{P} = \frac{(12\,\mathrm{V})^2}{500\,\mathrm{W}} = 0{,}288\,\Omega$$

d) $\frac{P_M}{P_0} = \frac{U \cdot I}{P_0} = \frac{R_M \cdot I^2}{P_0} = \frac{189{,}3\,\mathrm{W}}{500\,\mathrm{W}} = 0,379 \mathrel{\widehat{=}} 37{,}9\,\%$

A5: Autobatterie II

a) $R_i = \frac{U}{I} = \frac{12\,\mathrm{V}}{300\,\mathrm{A}} = 0{,}04\,\Omega$

b) $P = U \cdot I = 12\,\mathrm{V} \cdot 300\,\mathrm{A} = 3600\,\mathrm{W}$

c) Widerstand Standlicht: $R_{SL} = \frac{U^2}{P} = \frac{(12\,\mathrm{V})^2}{4 \cdot 5\,\mathrm{W}} = 7{,}2\,\Omega$

Gesamtwiderstand: $R_{\mathrm{ges}} = R_i + R_{SL} = 7{,}24\,\Omega$

Strom: $I = \frac{U}{R} = \frac{12\,\mathrm{V}}{7{,}24\,\Omega} = 1{,}66\,\mathrm{A}$

$t = \frac{63\,\mathrm{A\,h}}{1{,}66\,\mathrm{A}} \approx 38\,\mathrm{h}$

d) $W = P \cdot t = 12\,\mathrm{V} \cdot 1{,}66\,\mathrm{A} \cdot 38\,\mathrm{h}$

$= 12\,\mathrm{V} \cdot 1{,}66\,\mathrm{A} \cdot 38 \cdot (60\,\mathrm{s})^2$

$= 2{,}73 \cdot 10^6\,\mathrm{J}$

e) Spannungsabfall am Innenwiderstand:

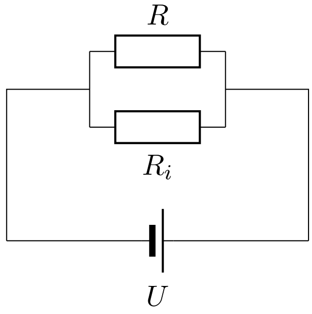
$U_i = R_i \cdot I = 0{,}04\,\Omega \cdot 45\,\mathrm{A} = 1{,}8\,\mathrm{V}$

Es bleiben: $U = 12\,\mathrm{V} - 1{,}8\,\mathrm{V} = 10{,}2\,\mathrm{V}$

$P = U \cdot I = 10{,}2\,\mathrm{V} \cdot 45\,\mathrm{A} = 459\,\mathrm{W}$

A6: Strommessgerät mit Widerstand

a) Parallelschaltung:



Spannung am Strommessgerät = Spannung am Widerstand.

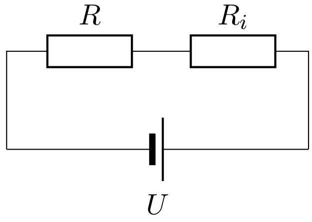
$U = R_i \cdot I_i = 1000\,\Omega \cdot 2\,\text{mA} = 2\,\text{V}$

Stromstärke insgesamt: $I = I_i + I_R = 1\,\text{A}$

↳ $I_R = 1\,\text{A} - 2\,\text{mA} = 0{,}998\,\text{A}$

$R = \frac{U}{I_R} = \frac{2\,\text{V}}{0{,}998\,\text{A}} = 2{,}004\,\Omega \approx 2\,\Omega$

b) Reihenschaltung:



Spannung bei R_i: $U = R_i \cdot I = 2\,\text{V}$

↳ Spannung bei R: $U_R = 100\,\text{V} - 2\,\text{V} = 98\,\text{V}$

$R = \frac{U_R}{I} = \frac{98\,\text{V}}{2\,\text{mA}} = 49\,\text{k}\Omega$

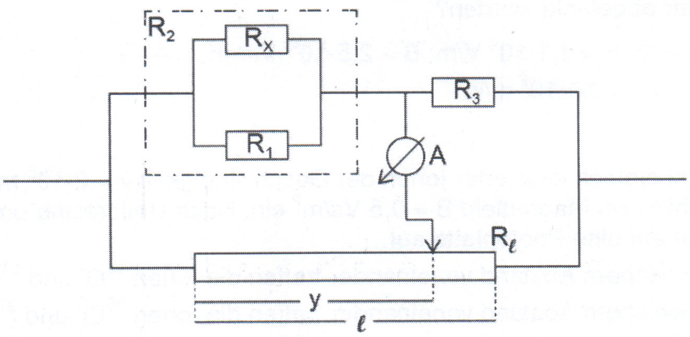
Übungen zur Experimentalphysik B SS 2017

Prof. Dr. B. Pilawa
F.Wertz

5. Übungsblatt

Ströme und Widerstände

1. Wheatstonesche Brückenschaltung (siehe Skizze): Wie groß ist der Widerstand R_x, wenn der Spannungsteiler auf y = 30 cm eingestellt werden muss, damit der Brückenstrom I verschwindet (ℓ = 1 m, $R_\ell = R_1 = R_3$ = 1 kΩ)?



Ergebnis: R_x = 0,75 kΩ.

2. Sie schalten bei Ihrem Auto das Licht ein. Wie lange brauchen die Elektronen für das Durchlaufen des Kabels zwischen dem Schalter und dem Rücklicht (12 V, 5 W)? Nehmen Sie dabei an, dass jedes Rücklicht mit einem 5 m langen Kupferdraht mit einem Querschnitt von 0,75 mm^2 mit dem Schalter verbunden ist und dass pro Kupferatom ein freies Elektron existiert. Berechnen Sie die freie Flugzeit τ in dem Draht.

   Dichte: ρ_{Cu} = 8,93 g/cm^3; Molmasse: M_{Cu} = 63,5 g/mol; $\sigma = 0{,}59 \cdot 10^6\ \Omega^{-1}\mathrm{cm}^{-1}$.
   Ergebnisse: t = 33,9 h; $\tau = 2{,}48 \cdot 10^{-14}$ s.

Magnetostatik

3. Bei Wasserstoffatomen im Grundzustand bewegt sich ein Elektron auf einer Kreisbahn mit Radius $r_B = 5{,}29 \cdot 10^{-11}$ m.

   a) Aus dem Kräftegleichgewicht von Coulombkraft und Zentrifugalkraft berechne man die Umlauffrequenz ν.

   b) Welcher mittleren Stromstärke entspricht diese Ladungsbewegung?

   c) Wie groß ist das Magnetfeld, das dadurch am Ort des Atomkerns erzeugt wird?

   Ergebnisse: a) $\nu = 6{,}5 \cdot 10^{15}\ s^{-1}$; b) I = 1,05 mA; c) B = 12,5 T.

4. Ein Strahl von Elektronen verschiedener Geschwindigkeiten läuft im Vakuum durch ein Gebiet, in dem ein homogenes Magnetfeld B und ein homogenes elektrisches Feld E herrschen. E und B stehen senkrecht aufeinander und senkrecht zu v. Wie groß ist die Geschwindigkeit von Elektronen, die nicht durch die Felder abgelenkt werden?

   Zahlenwerte: $E = 1{,}1 \cdot 10^4$ V/m; $B = 2{,}5 \cdot 10^{-3}\ Vs/m^2$.

   Ergebnis: $v = 4{,}40 \cdot 10^6$ m/s.

5. Ein Strahl einfach ionisierter Ionen der Geschwindigkeit $v = 2 \cdot 10^5$ m/s tritt senkrecht in ein Magnetfeld $B = 0{,}5\ Vs/m^2$ ein. Nach Umlenkung um 180° treffen die Ionen auf eine Photoplatte auf.

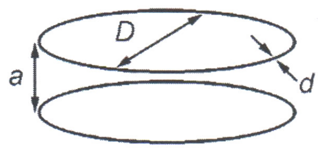
   a) In welchem Abstand voneinander treffen die Ionen $^{16}O^-$ und $^{18}O^-$ auf?

   b) In welchem Abstand voneinander treffen die Ionen $^{35}Cl^-$ und $^{37}Cl^-$ auf?

   c) Wie groß ist der Drehimpuls eines ^{16}O-Ions bei seiner Bahn im Magnetfeld?

   Ergebnisse: a) d = 1,66 cm; b) d = 1,66 cm; c) $L = 3{,}53 \cdot 10^{-22}\ kgm^2/s$.

6. Zwei Ringe mit Durchmesser D aus Kupferdraht der Dicke d = 2 mm sind im Abstand a = 1 cm horizontal übereinander angeordnet, wobei D >> a. In den Ringen fließen Ströme betragsmäßig gleicher Stromstärke I.



   a) Skizzieren Sie das resultierende Magnetfeld für gleichsinnig und entgegengesetzt fließende Ströme.

   b) Welche Richtung müssen die Ströme relativ zueinander haben, damit sich die Ringe abstoßen?

   c) Bei welcher Stromstärke I ist die Abstoßungskraft auf den oberen Ring gleich seiner Gewichtskraft? (Dichte von Kupfer: $\rho_{Cu} = 8{,}9 \cdot 10^3\ kg/m^3$)

   Ergebnis: c) I = 117 A.

A1: Wheatstone-Brücke

Parallelschaltung: $\frac{1}{R_2} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_X} \qquad (1)$

Bedingung: Brückenstrom $= 0$

Voraussetzung: $U_{\text{Brücke}} = 0$

$\Rightarrow \quad \frac{U_3}{U_2} = \frac{U_{\ell-y}}{U_{\text{y}}} \quad \Rightarrow \quad \frac{R_3}{R_2} = \frac{R_\ell - R_{\text{y}}}{R_{\text{y}}} \qquad | : R_3$

$$\frac{1}{R_2} = \frac{R_\ell - R_{\text{y}}}{R_3 \cdot R_{\text{y}}} \overset{(1)}{=} \frac{1}{R_1} + R_{\text{X}}$$

Aufgelöst nach R_{X}:

$$\frac{1}{R_X} = \frac{R_\ell - R_{\text{y}}}{R_3 \cdot R_{\text{y}}} - \frac{1}{R_1}$$

$R_1 = R_3 = R_\ell = 1\,\text{kV}$

$R_{\text{y}} = 0{,}3\,\text{kV}$

$$R_{\text{X}} = \left(\frac{R_\ell - R_{\text{y}}}{R_3 \cdot R_{\text{y}}} - \frac{1}{R_1} \right)^{-1} = 750\,\Omega$$

A2: Elektronen im Autokabel

$$I = \frac{\Delta Q}{\Delta t} = \frac{n \cdot e \cdot A \cdot u_{\text{D}} \cdot \Delta t}{\Delta t} = n \cdot e \cdot A \cdot u_{\text{D}}$$

Elektronen pro Volumen: $n = \frac{\rho_{\text{Cu}} \cdot N_{\text{A}}}{M_{\text{Cu}}}$

$$= \frac{8930\,\frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \cdot 6{,}023 \cdot 10^{23} \frac{1}{\text{mol}}}{0,0635 \frac{\text{kg}}{\text{mol}}}$$

$$= 8{,}47 \cdot 10^{28} \frac{1}{\text{m}^3}$$

Driftgeschwindigkeit: $u_{\text{D}} = \frac{I}{n \cdot A \cdot e} = \frac{0{,}416\,\text{A}}{8{,}47 \cdot 10^{28} \frac{1}{\text{m}^3} \cdot 7{,}5 \cdot 10^{-7}\,\text{m}^2 \cdot 1{,}602 \cdot 10^{-19}\,\text{C}}$

$$= 40,9\,\frac{\mu\text{m}}{\text{s}}$$

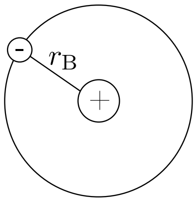
Laufzeit durch das Kabel: $t = \frac{l}{u_{\text{D}}} = 1{,}22 \cdot 10^5\,\text{s} \mathrel{\widehat{=}} 33\,\text{h}\,57\,\text{min}$

Berechne Flugzeit aus $u_{\text{D}} = a \cdot \tau = \frac{e}{m_{\text{e}}} \cdot \frac{j}{\sigma} \cdot \tau = \frac{j}{ne}$

$$\Lsh \; \tau = \frac{m_{\text{e}} \cdot \sigma}{ne^2} = \frac{9{,}11 \cdot 10^{-31}\,\text{kg} \cdot 59 \cdot 10^6 \frac{1}{\Omega \cdot \text{m}}}{8{,}47 \cdot 10^{28} \frac{1}{\text{m}^3} \cdot (1{,}602 \cdot 10^{-19}\,\text{C})^2} = 2{,}47 \cdot 10^{-14}\,\text{s}$$

A3: Kreisbahn beim Wasserstoffatom

a)



Bohr-Radius: $r_\mathrm{B} = 5{,}29 \cdot 10^{-11}\,\mathrm{m}$

Kräftegleichgewicht: $F_\mathrm{C} = F_\mathrm{Z}$

$\Lsh\ \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{e^2}{r_\mathrm{B}^2} = m_\mathrm{e}\omega^2 r_\mathrm{B} = m_\mathrm{e}(2\pi f)^2 r_\mathrm{B}$

Aufgelöst nach f: $f^2 = \frac{1}{(2\pi)^2} \cdot \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{e^2}{m_\mathrm{e} r_\mathrm{B}^3}$

$$\Rightarrow f = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{e^2}{m_\mathrm{e} r_\mathrm{B}^3}}$$

$$= \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{1}{4\pi \cdot 8{,}854 \cdot 10^{-12}\frac{\mathrm{C}^2}{\mathrm{Nm}^2}} \cdot \frac{(1{,}602 \cdot 10^{-19}\,\mathrm{C})^2}{9{,}11 \cdot 10^{-31}\,\mathrm{kg} \cdot (5{,}29 \cdot 10^{-11}\,\mathrm{m})^3}}$$

$$= 6{,}58 \cdot 10^{15}\,\mathrm{Hz}$$

b) $I = \frac{e}{T} = e \cdot f = 1{,}05\,\mathrm{mA}$

c) Biot-Savart: $\mathrm{d}H = \frac{I\,\mathrm{d}S}{4\pi r^2} \cdot \underbrace{\sin(\varphi)}_{\text{Hier: } \sin(\varphi) = 1, \text{ da } \mathrm{d}\vec{s} \perp \vec{r}}$

$$B = \mu_0 \int_0^{2\pi} \mathrm{d}H = \mu_0 \int_0^{2\pi} \frac{I\,\mathrm{d}s}{4\pi r^2} = \mu_0 \frac{I}{4\pi r^2} \cdot \int_0^{2\pi} \mathrm{d}s$$

$$= \mu_0 \cdot \frac{I}{4\pi r^2} \cdot 2\pi r = \mu_0 \frac{I}{2r}$$

$$= 4\pi \cdot 10^{-7}\,\frac{\mathrm{Vs}}{\mathrm{Am}} \cdot \frac{1{,}05 \cdot 10^{-3}\,\mathrm{A}}{2 \cdot 5{,}29 \cdot 10^{-11}\,\mathrm{m}} = 12{,}5\,\mathrm{T}$$

A4: Elektronengeschwindigkeit im Feld

$\vec{E} \perp \vec{B} \perp \vec{v}$: Kräfte durch Felder wirken sich vollständig aus.

E-Feld $\longrightarrow$ bewirkt elektrische Kraft F_E

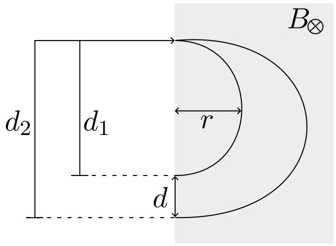
B-Feld $\longrightarrow$ bewirkt Lorentzkraft F_L

Gleichsetzen: $F_\mathrm{L} = F_\mathrm{E}$

$$q \cdot v \cdot B = q \cdot E$$

$$\Lsh\ v = \frac{E}{B} = \frac{1{,}1 \cdot 10^4\,\frac{\mathrm{V}}{\mathrm{m}}}{2{,}5 \cdot 10^{-3}\,\frac{\mathrm{Vs}}{\mathrm{m}^2}} = 4{,}4 \cdot 10^6\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$$

A5: Ionen im Magnetfeld



Lorentzkraft (Magnetfeld lenkt geladenes Teilchen ab) wirkt als Zentripetalkraft (Kraft zum Kreismittelpunkt; hält Teilchen auf Kreisbahn).

Gleichsetzen: $F_\mathrm{L} = F_\mathrm{Z}$

↳ $e \cdot v \cdot B = \frac{m}{r}\, v^2 \quad \Rightarrow \quad r = \frac{mv}{eB}$

a) $d = 2\, r_2 - 2\, r_1 = \dfrac{2\,(m_2 - m_1) \cdot v}{eB}$

$$\left.\begin{array}{l} m_1 = 16\, m_\mathrm{p} \quad (8\,\mathrm{p}^+,\ 9\,\mathrm{e}^-,\ 8\,\mathrm{n}^\circ) \\ m_2 = 18\, m_\mathrm{p} \quad (8\,\mathrm{p}^+,\ 9\,\mathrm{e}^-,\ 10\,\mathrm{n}^\circ) \end{array}\right\} \Delta m = 2\, m_\mathrm{p}$$

$$d = \frac{2 \cdot (2 \cdot 1{,}67 \cdot 10^{-27}\,\mathrm{kg}) \cdot 2 \cdot 10^5\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}}{1{,}602 \cdot 10^{-19}\,\mathrm{C} \cdot 0,5\,\frac{\mathrm{Vs}}{\mathrm{m}^2}} = 0{,}0167\,\mathrm{m} = 1{,}67\,\mathrm{cm}$$

b) Analog: $\left.\begin{array}{l} m_1 = 37\, m_\mathrm{p} \\ m_2 = 35\, m_\mathrm{p} \end{array}\right\} \Delta m = 2\, m_\mathrm{p}$

↳ $d = 1{,}67\,\mathrm{cm}$

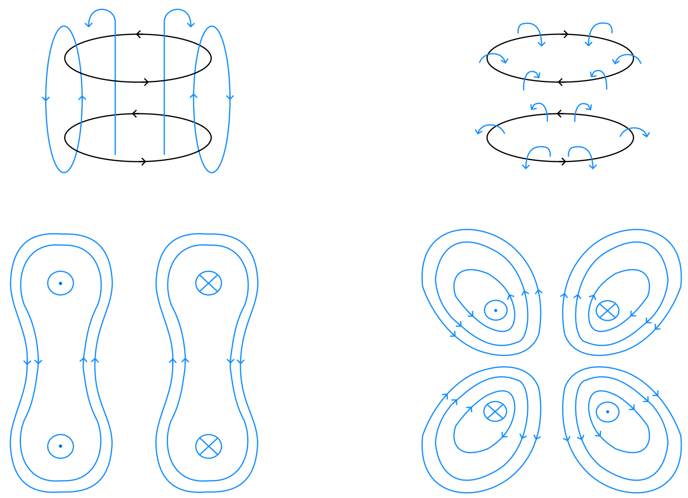
c) $L = r \cdot m \cdot v = \underbrace{\dfrac{m \cdot v}{e \cdot B}}_{r} \cdot m \cdot v = \dfrac{m^2 \cdot v^2}{e \cdot B}$

$$= \frac{(16 \cdot 1{,}67 \cdot 10^{-27}\,\mathrm{kg})^2 \cdot \left(2 \cdot 10^5\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}\right)^2}{1{,}602 \cdot 10^{-19}\,\mathrm{C} \cdot 0,5\,\frac{\mathrm{Vs}}{\mathrm{m}^2}}$$

$$= 3{,}57 \cdot 10^{-22}\,\frac{\mathrm{kg\,m}^2}{\mathrm{s}}$$

A6: Magnetfeld zwischen Drahtringen

a) Gleichsinnig: Entgegengesetzt:



b) Betrachte Skizze in Teil a), bzw. wende Rechte-Hand-Regel an:
Entgegengesetzte Stromrichtung = Abstoßung

c)

- $D \gg a$: Ring wie „langer“ Leiter

  $H = \dfrac{I}{2\pi r} \quad \rightarrow$ Satz von Stokes: $\quad I = \oint \vec{H}\,\mathrm{d}\vec{s} = H \cdot 2\pi r$

  $\Lsh B = \mu_0 \cdot H = \mu_0 \dfrac{I}{2\pi r} = \mu_0 \dfrac{I}{2\pi a}$

- $F_L = q \cdot \left(\vec{v} \times \vec{B}\right)$

  mit $q \cdot v = I \cdot \Delta t \cdot \dfrac{l}{\Delta t} = I \cdot l$

  $\Lsh F_L = I \left(\vec{l} \times \vec{B}\right)$

- $F_G = m \cdot g = \underbrace{\rho \cdot V}_{m} \cdot g$

  $$= \rho \cdot D \cdot \pi \cdot \frac{d^2}{4} \pi g$$
  $$= \rho \cdot D \cdot \frac{d^2}{4} \pi^2 \cdot g$$

- Gleichsetzen mit bisherigen Ergebnissen: $F_G = F_L$

  $IlB = I \cdot l \cdot \mu_0 \dfrac{I}{2\pi a} == \mu_0 \dfrac{I^2 \cdot l}{2\pi a} = \mu_0 \dfrac{I^2 D \pi}{2\pi a} = \mu_0 \dfrac{I^2 D}{2a}$

  $$= \rho D \frac{d^2}{4} \pi^2 g$$

  Aufgelöst nach I: $\quad I = \sqrt{\rho \dfrac{a}{\mu_0} \dfrac{d^2}{2} \pi^2 g} = 117\,\mathrm{A}$

Prof. Dr. B. Pilawa
F. Wertz

6. Übungsblatt

Magnetostatik

1. Zwei Drehspulinstrumente A und B unterscheiden sich nur in der Konstruktion der Drehspule. Die Spule A hat 50 Windungen und der Innenwiderstand von A beträgt $R_{ia} = 10\ \Omega$. Die Spule von B hat 100 Windungen und $R_{iB} = 40\ \Omega$.
   a) Wenn A und B in einem Stromkreis in Serie geschaltet sind, zeige A einen Ausschlag von 6 Skalenteilen. Welchen Ausschlag zeigt B?
   b) Wenn A und B parallel zu einer Batterie geschaltet sind, zeige A einen Ausschlag von 6 Skalenteilen. Welchen Ausschlag zeigt B?

   Ergebnisse: a) $\varphi_B = 12$ *Skt.; b)* $\varphi_B = 3$ *Skt.*

2. Eine Hallsonde mit dem Querschnitt 1,0 x 1,0 cm^2 befindet sich in einem transversalen Magnetfeld von 1,0 T. Bei einer Stromstärke von 0,1 A wird eine Hallspannung von 10^{-3} V gemessen.
   a) Wie groß ist die Ladungsträgerkonzentration in dem Sondenmaterial?
   b) Wie groß ist die mittlere Driftgeschwindigkeit der Elektronen?

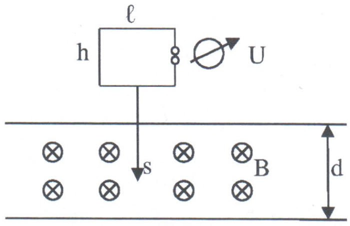
   Ergebnisse: a) $n = 6{,}25 \cdot 10^{22}\ m^{-3}$*; b)* $v = 0{,}1\ m/s$.

Magnetische Induktion

3. Ein Zug fährt mit einer Geschwindigkeit v = 200 km/h nach Süden über eine gerade Eisenbahnstrecke, deren Schienen einen Abstand d von 1,5 m haben. Welche Spannung wird aufgrund der Flussdichte des Erdmagnetfeldes B zwischen den Schienen induziert, wenn $|B| = 4 \cdot 10^{-5}$ T und die $\vec{B}$-Richtung um 65° gegen die Vertikale geneigt ist?

   Ergebnis: $U_{ind} = 1{,}41\ mV$.

4. Eine rechteckige Drahtschleife der Länge ℓ und der Höhe h wird mit konstanter Geschwindigkeit v in vertikaler Richtung durch ein örtlich begrenztes, homogenes Magnetfeld B der räumlichen Ausdehnung d geführt, wobei die Ebene der Schleife senkrecht zur Feldrichtung steht. Es sei h < d.



a) Skizzieren Sie die mit dem Voltmeter gemessene Spannung U in Abhängigkeit vom Weg s.

b) Wie groß ist der Betrag der induzierten Spannung U während des Eintauchens in den Feldbereich?

c) Das Voltmeter werde entfernt und die Schleife in sich kurzgeschlossen. Der Widerstand der Drahtschleife sei R. Wie groß ist die Stromstärke in der Schleife bei gleicher Bewegung wie zuvor? Welche Kraft F_m wirkt hierbei der Bewegung entgegen?

d) Die kurzgeschlossene Schleife (Masse m) wird bei gleicher Ausrichtung zum Magnetfeld frei fallengelassen. Welche Endgeschwindigkeit v_E erreicht die Schleife während des Eintauchens in das Feld?

Zahlenwerte: B = 1,5 T; ℓ = 5 cm; v = 10 cm/s, m = 2 g; R = 3 mΩ.

Ergebnisse: b) U = 7,5 mV; c) I = 2,50 A; F_m = 188 mN; d) v_E = 1,05 cm/s *(Original-Klausuraufgabe).*

5. Eine ebene Rechteckspule mit 100 Windungen und der Fläche A = 10 cm^2 rotiert um eine in der Spulenfläche liegenden Achse mit der Winkelgeschwindigkeit $\omega = 200\ s^{-1}$.

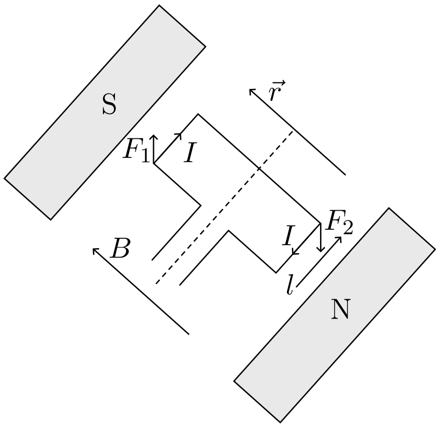
a) Wie groß ist die elektrische Spannung an den Enden der Spule, wenn die Rotation in einem zur Rotationsachse senkrechten Magnetfeld B = 0,20 Vs/m^2 erfolgt?

b) Die Spule wird mit ihrer Fläche senkrecht zum Magnetfeld festgehalten. Das Magnetfeld wird innerhalb von 0,50 s mit konstantem dB/dt vom Wert 0 auf den Maximalwert 0,20 Vs/m^2 hochgefahren. Welche Spannung tritt dabei an den Enden der Spule auf?

c) Anschließend fließe durch Anlegen einer äußeren Spannung ein Strom von 0,50 A durch die Spule. Wie groß ist das Drehmoment auf die Spule und warum? Erläutern Sie Ihr Ergebnis mit Hilfe einer Skizze.

Ergebnisse: a) $U_{ind} = (4\ V)\cdot\sin(\omega t)$; b) $U_{ind} = 0{,}04\ V$; c) $M = 0\ Nm$.

A1: Drehspulmessgerät



$$U_{\text{ind}} = -N \cdot \frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t}$$

$$F_{\mathrm{L}} = N \cdot I \cdot \left(\vec{l} \times \vec{B}\right)$$

$$M = N \cdot I \cdot \vec{r} \times \vec{l} \times \vec{B}$$

$$\Lsh \ \varphi \sim M \sim F_{\mathrm{L}} \sim N \cdot I$$

$$\Rightarrow \ \varphi_{\mathrm{B}} = \varphi_{\mathrm{A}} \cdot \frac{N_{\mathrm{B}} \cdot I_{\mathrm{B}}}{N_{\mathrm{A}} \cdot I_{\mathrm{A}}}$$

a) Serienschaltung: $I_{\mathrm{A}} = I_{\mathrm{B}}$

$$\Lsh \ \varphi_{\mathrm{B}} = \varphi_{\mathrm{A}} \cdot \frac{N_{\mathrm{B}}}{N_{\mathrm{A}}} = 6\,\text{Skt.} \cdot \frac{100}{50} = 12\,\text{Skt.}$$

b) Parallel: $U_{\mathrm{A}} = U_{\mathrm{B}}$

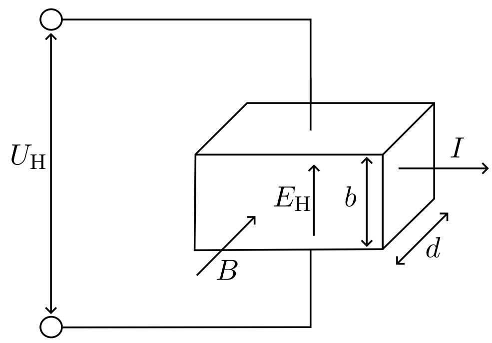
$$I = \frac{U}{R}$$

$$I_{\mathrm{B}} = \frac{R_{\mathrm{A}} \cdot I_{\mathrm{A}}}{R_{\mathrm{B}}}$$

$$\varphi_{\mathrm{B}} = \varphi_{\mathrm{A}} \cdot \frac{R_{\mathrm{A}} \cdot N_{\mathrm{B}}}{R_{\mathrm{B}} \cdot N_{\mathrm{A}}} = 6\,\text{Skt.} \cdot \frac{10\,\Omega \cdot 100}{40\,\Omega \cdot 50} = 3\,\text{Skt.}$$

A2: Hallsonde

a) $I = j \cdot A = \underbrace{n \cdot u_{\mathrm{D}} \cdot e}_{\text{Stromdichte}\,j} \cdot \underbrace{b \cdot d}_{\mathrm{A}}$



$$\Lsh \ u_{\mathrm{D}} = \frac{I}{n \cdot e \cdot b \cdot d}$$

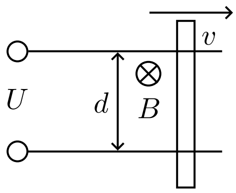
$$\underbrace{q \cdot u_{\mathrm{D}} \cdot B}_{\text{Lorentz-Kraft}} = \underbrace{q \cdot E_{\mathrm{H}}}_{\text{Coulomb-Kraft}} \qquad | : q$$

$$E_{\mathrm{H}} = \frac{1}{n \cdot e \cdot b \cdot d} \cdot B = \frac{U_{\mathrm{H}}}{b}$$

Aufgelöst nach n: $n = \frac{I}{e \cdot d \cdot U_{\mathrm{H}}} = \frac{0{,}1\,\mathrm{A}}{1{,}602 \cdot 10^{-19}\,\mathrm{C} \cdot 0{,}01\,\mathrm{m} \cdot 10^{-3}\,\mathrm{V}} \cdot 1\,\mathrm{T}$

$$= 6{,}24 \cdot 10^{22}\,\frac{1}{\mathrm{m}^3}$$

A3: Induktionsspannung zwischen Schienen



$$|U_{\text{ind}}| = \left|-\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t}\right| = \left|-\frac{\mathrm{d}(A \cdot B)}{\mathrm{d}t}\right| = |-B\dot{A}|$$

$A = d \cdot v$

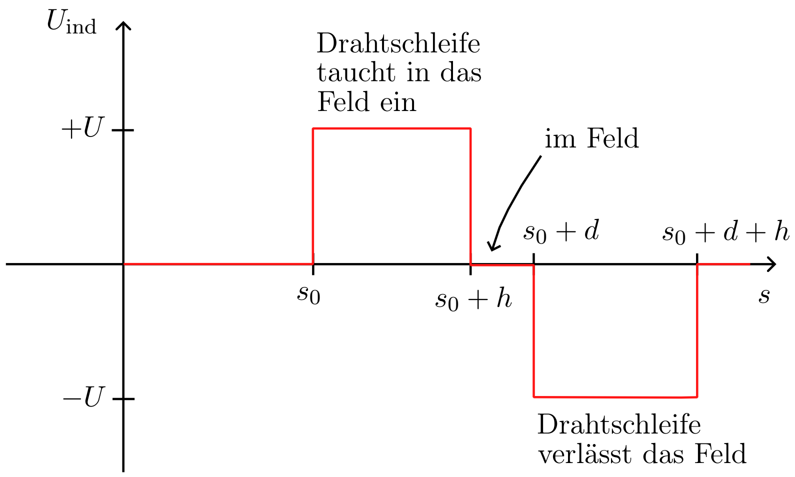
B nicht direkt senkrecht: $B_\perp = B \cdot \cos(65°)$

$200\,\mathrm{km/h} = 55,56\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$

$$\begin{aligned}|U_{\text{ind}}| &= |-B \cdot \cos(65°) \cdot d \cdot v| \\ &= \left|-4 \cdot 10^{-5}\,\mathrm{T} \cdot \cos(65°) \cdot 1{,}5\,\mathrm{m} \cdot 55,56\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}\right| \\ &= 1{,}41 \cdot 10^{-3}\,\mathrm{V} = 1{,}41\,\mathrm{mV}\end{aligned}$$

A4: Drahtschleife durchläuft Feld

a)



b) U_{ind} bei Änderung von A:

$$\begin{aligned}|U_{\text{ind}}| &= N \cdot \vec{B} \cdot \frac{\mathrm{d}\vec{A}}{\mathrm{d}t} \\ &= N \cdot B \cdot l \cdot v \\ &= 1 \cdot 1{,}5\,\mathrm{T} \cdot 0{,}05\,\mathrm{m} \cdot 0,1\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} \\ &= 7{,}5\,\mathrm{mV}\end{aligned}$$

mit $A = l \cdot b$,
$N = 1$ (Anzahl der Windungen),
$v = \frac{\mathrm{d}b}{\mathrm{d}t}$

c) $I = \frac{U}{R} = \frac{7{,}5 \cdot 10^{-3}\,\mathrm{V}}{3 \cdot 10^{-3}\,\Omega} = 2{,}5\,\mathrm{A}$

Kraft auf stromdurchflossenen Leiter: $F = I \cdot B \cdot s$ (Merkspruch: „Fibs“)

bzw. hier: $F = I \cdot B \cdot l = 2{,}5\,\mathrm{A} \cdot 1{,}5\,\mathrm{T} \cdot 0{,}05\,\mathrm{m} = 187{,}5\,\mathrm{mN}$

d) Maximale Geschwindigkeit wird erreicht, wenn $F_G = F_L$:

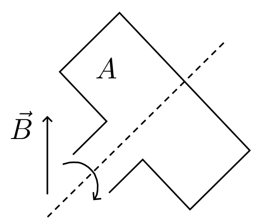
$$\begin{aligned} m \cdot g &= I \cdot l \cdot B \\ &= \frac{U}{R} \cdot l \cdot B \qquad \mid \text{mit } U = B \cdot l \cdot v \text{ (siehe Teil b)) folgt:} \\ &= \frac{B \cdot l \cdot v}{R} \cdot l \cdot B \\ m \cdot g &= \frac{B^2 \cdot l^2 \cdot v}{R} \end{aligned}$$

Aufgelöst nach v:

$$v = \frac{m \cdot g \cdot U}{B^2 \cdot l^2} = \frac{0{,}002\,\mathrm{kg} \cdot 9{,}81\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} \cdot 3 \cdot 10^{-3}\,\Omega}{(1{,}5\,\mathrm{T})^2 \cdot (0{,}05\,\mathrm{m})^2}$$

$$= 1{,}05 \cdot 10^{-2}\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} = 1{,}05\,\frac{\mathrm{cm}}{\mathrm{s}}$$

A5: Drehende Spule



$$\begin{aligned} U_{\text{ind}} &= -N \cdot \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \int \vec{B} \cdot \mathrm{d}\vec{A} \\ &= -N \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \Phi = -N \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} (\vec{B} \cdot \vec{A}) \end{aligned}$$

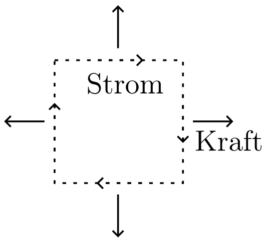
a) A verändert sich wegen Drehung, B bleibt konstant.

$$\begin{aligned} \left| U_{\text{ind}} \right| &= -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} (N \cdot B \cdot A \cdot \cos(\omega t)) = N \cdot B \cdot A \cdot \omega \cdot \sin(\omega t) \\ &= 100 \cdot 0{,}2\,\frac{\mathrm{Vs}}{\mathrm{m}^2} \cdot 10^{-3}\,\mathrm{m}^2 \cdot 200\,\frac{1}{\mathrm{s}} \cdot \sin(\omega t) \\ &= 4\,\mathrm{V} \cdot \sin(\omega t) \end{aligned}$$

b) Diesmal bleibt A konstant, B ändert sich.

$$\begin{aligned} \left| U_{\text{ind}} \right| &= \left| -N \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} (B \cdot A \cdot \cos(\varphi)) \right| \\ &= \left| -N \cdot A \cdot \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} B \right| = \left| -N \cdot A \cdot \frac{0{,}2\,\mathrm{V\,s/m^2}}{0{,}5\,\mathrm{s}} \right| \\ &= 0{,}04\,\mathrm{V} \end{aligned}$$

c) Zeichnerisch:

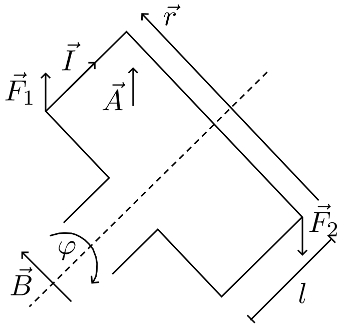


Rechte-Hand-Regel:

Lorentz-Kräfte heben sich gegenseitig auf

↳ Kein Drehmoment

Rechnerisch:



$$
\begin{aligned}
\vec{F}_1 &= N \cdot I \cdot (\vec{l} \times \vec{B}) \\
\vec{F}_1 &= -N \cdot I \cdot (\vec{l} \times \vec{B}) \\
\vec{M} &= \left(\frac{\vec{r}}{2} \times \vec{F}_1\right) + \left(-\frac{\vec{r}}{2} \times \vec{F}_2\right) \\
&= N \cdot I \cdot \vec{r} \times \vec{l} \times \vec{B} \\
&= N \cdot I \cdot \vec{A} \times \vec{B} \\
&= N \cdot I \cdot \vec{A} \cdot \vec{B} \cdot \sin(\alpha) \\
&= 0
\end{aligned}
$$

Übungen zur Experimentalphysik B — SS 2017

Prof. Dr. B. Pilawa
F.Wertz

7. Übungsblatt

Induktion und Transformatoren

1. Ein Kabel liegt in 0,50 m Tiefe in der Erde und wird von einem sinusförmigen Wechselstrom mit der Amplitude I und der Frequenz f durchflossen.
   a) Welche Amplitude hat die magnetische Flussdichte B an der Erdoberfläche?
   b) Zu ihrer Messung werde eine kleine Zylinderspule vom Querschnitt A und der Windungszahl N zusammen mit einem Spannungsmessgerät verwendet. Wie muss die Spule angeordnet werden, um eine maximale Spannung zu erhalten?
   c) Welche Amplitude hat dann die Spannung?

   Zahlenbeispiel: I = 50 A; f = 50 Hz; A = 1,0 cm^2; N = 3000.
   Ergebnisse: a) $B_0 = 2{,}0 \cdot 10^{-5}$ *Vs/m*^{2}*; c)* $U_0 = 1{,}9$ *mV.*

2. Eine 20 cm lange Spule mit einer Querschnittsfläche A = 10 cm^2 und einer Windungszahl N = 2000 Windungen wird von einem Strom I = 10 A durchflossen.
   a) Wie groß ist die magnetische Feldstärke in der Spule?
   b) Um die Spule wird eine einzige Induktionsschleife gelegt. Wie groß ist der Spannungsstoß beim Ein- bzw. Ausschalten des Stromes?
   c) Bei eingeschaltetem Strom (I = 10 A) wird das Innere der Spule vollständig mit einem Material ausgefüllt. Dabei tritt in der Induktionsschleife ein Spannungsstoß von $1{,}0 \cdot 10^{-8}$ Vs auf. Das Vorzeichen des Spannungsstoßes entspricht dem, das man beim Ausschalten des Stromes beobachtet hatte. Wie groß ist die Permeabilität des in die Spule gebrachten Materials? Um welche Art magnetischen Materials handelt es sich dabei?

   Ergebnisse: a) $H = 10^5$ *A/m; b) Ein:* $\int U_{ind}dt = -1{,}26 \cdot 10^{-4}$ *Vs; Aus:* $\int U_{ind}dt = 1{,}26 \cdot 10^{-4}$ *Vs;*
   c) $\mu_r = 0{,}99992$.

3. Durch eine zylindrische Magnetspule mit der Windungszahl N und der Querschnittsfläche A fließt ein Strom der Stromstärke I und erzeugt im Inneren der Spule ein homogenes Magnetfeld der Stärke H. Der ohmsche Widerstand der Spule sei R.
   a) Wie lang ist die Spule und welche Energie ist in ihr gespeichert?
   b) Wie groß ist die Induktivität der Spule?
   c) Welche Ladungsmenge fließt, wenn der Feld erzeugende Strom abgeschaltet und gleichzeitig die Spule kurzgeschlossen wird?

   Zahlenwerte: N = 5000; A = $2{,}0 \cdot 10^{-3}$ m^2; I = 60 A; H = $6{,}0 \cdot 10^5$ A/m; R = 38 Ω.
   Ergebnisse: a) $\ell = 0{,}5$ *m; W = 227 J; b) L = 126 mH; c) Q = 0,20 C.*

4. Um Leitungsverluste bei der Übertragung elektrischer Energie über lange Strecken zu vermeiden, wird die in Kraftwerksgeneratoren erzeugte Wechselspannung auf mehrere Kilovolt hochtransformiert, dann über Hochspannungsleitungen geleitet und lokal in der Nähe des Verbrauchers heruntertransformiert.

   a) Welches Windungsverhältnis muss ein Transformator besitzen, um Wechselspannung von 4,4 kV auf 220 V herunterzutransformieren?

   b) Eine Leitung habe einen Widerstand pro Länge von 0,002 Ω/km. Etwaige kapazitive und induktive Widerstände seien zu vernachlässigen. Welcher Teil der eingespeisten Leistung geht bei der Übertragung über eine 10 km lange Leitung verloren, wenn 200 kW elektrischer Leistung bei einer Spannung von 230 V eingespeist werden? Wie groß ist die Verlustleistung bei einer Spannung von 4,6 kV?

Ergebnisse: a) $n_1/n_2 = 20$; *b)* $P_{R,230V}/P = 7{,}6\ \%$; $P_{R,4{,}6kV} = 37{,}8\ W$.

A1: Induktion im Stromkabel

a) Satz von Stokes: (Kreis mit Abstand r um das Kabel)

$$I = \oint \vec{H} \mathrm{d}\vec{s} = H \cdot 2\pi r \quad \Rightarrow \quad H = \frac{I}{2\pi r}$$

Magnetische Flussdichte: $B = \mu_0 \cdot \mu_r \cdot H = \dfrac{4\pi \cdot 10^{-7} \frac{\mathrm{Vs}}{\mathrm{Am}} \cdot 50\,\mathrm{A}}{2\pi \cdot 0{,}5\,\mathrm{m}} = 2 \cdot 10^{-5}\,\mathrm{T}$

b) Induktionsgesetz:

$$U_{\text{ind}} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\vec{A} \times \vec{B}\right) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(A \cdot B \cdot \cos(\alpha)\right)$$

U_{ind} maximal $\Leftrightarrow$ $\alpha = 0°$, d.h. $A \parallel B$

Feldlinien senkrecht zum Strom ($B \perp I$), also ($A \perp I$).

c)
$$\begin{aligned} U_{\text{ind}} &= -N\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t} = -N \cdot A \cdot \frac{\mathrm{d}B}{\mathrm{d}t} \\ &= -N \cdot A \cdot \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(B_0 \cdot \sin(\omega t)\right) \\ &= -N \cdot A \cdot \omega \cdot B_0 \cdot \cos(\omega t) \\ &= 1{,}88\,\mathrm{mV} \end{aligned}$$

A2: Spule in Spule

a) Magnetische Erregung:

$$H = I \cdot \frac{N}{l} = \frac{10\,\mathrm{A} \cdot 2000}{0{,}2\,\mathrm{m}} = 10^5\,\frac{\mathrm{A}}{\mathrm{m}}$$

b) $U_{\text{ind}} = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Phi \qquad |$ integrieren

$$\begin{aligned} \int U_{\text{ind}}\,\mathrm{d}t &= -\Delta\Phi = -\Delta B \cdot A \\ &= -\mu_0 \cdot \mu_r \cdot H \cdot A \\ &= -4\,\pi \cdot 10^{-7} \cdot 1 \cdot 10^5\,\frac{\mathrm{A}}{\mathrm{m}} \cdot 10^{-3}\,\mathrm{m}^2 \\ &= -1{,}26 \cdot 10^{-4}\,\mathrm{V\,s} \end{aligned}$$

Beim Ausschalten mit umgekehrtem Vorzeichen:

$$\int U_{\text{ind}}\,\mathrm{d}t = 1{,}26 \cdot 10^{-4}\,\mathrm{V\,s}$$

c)
$$\begin{aligned} \int U_{\text{ind}}\,\mathrm{d}t &= -\left(B_{\text{Mat}} - B_{\text{Luft}}\right) A \\ &= -\left(\mu_r - 1\right) H \cdot A \cdot \mu_0 \end{aligned}$$

Aufgelöst nach μ_r:

$$-\frac{\int U_{\text{ind}}\,\mathrm{d}t}{\mu_0 H\cdot A} = \mu_r - 1 \qquad | +1$$

$$\mu_r = 1 - \frac{\int U_{\text{ind}}\,\mathrm{d}t}{\mu_0 H\cdot A} \qquad | \text{ Hier die Werte aus Teil b) einsetzen}$$

$$= 1 - \frac{1\cdot 10^{-8}\,\mathrm{V\,s}}{4\cdot\pi\cdot 10^{-7}\,\frac{\mathrm{Vs}}{\mathrm{Am}}\cdot 10^5\,\frac{\mathrm{A}}{\mathrm{m}}\cdot 10^{-3}\,\mathrm{m}^2} = 0,99992 < 1.$$

$\mu_r < 1$ bedeutet diamagnetisch.

A3: Zylindrische Spule

a) $H = \frac{N\cdot I}{l} \quad\Rightarrow\quad l = \frac{N\cdot I}{H} = \frac{5000\cdot 60\,\mathrm{A}}{6\cdot 10^5\,\frac{\mathrm{A}}{\mathrm{m}}} = 0{,}5\,\mathrm{m}$

Energie = Energiedichte · Volumen

$$W = w\cdot V$$

$$= \underbrace{\frac{1}{2}\,\mu_0\,\mu_r\,H^2}_{w}\cdot V = \tfrac{1}{2}\,H\cdot B\cdot V$$

$$= \tfrac{1}{2}\cdot\left(6{,}0\cdot 10^5\,\tfrac{\mathrm{A}}{\mathrm{m}}\right)^2\cdot 4\pi\cdot 10^{-7}\,\frac{\mathrm{Vs}}{\mathrm{Am}}\cdot 1\cdot 0{,}5\,\mathrm{m}\cdot 2\cdot 10^{-3}\,\mathrm{m}^2$$

$$= 226{,}2\,\mathrm{J}$$

b) $L = \mu_r\cdot\mu_0\cdot A\cdot\frac{N^2}{l} = 1\cdot 4\pi\cdot 10^{-7}\,\frac{\mathrm{Vs}}{\mathrm{Am}}\cdot 2\cdot 10^{-3}\,\mathrm{m}^2\cdot\frac{(5000)^2}{0{,}5\,\mathrm{m}} = 126\,\mathrm{mH}$

c) $$\Delta Q = \int I\mathrm{d}t = \frac{\int U_{\text{int}}\mathrm{d}t}{R} = \frac{-N\Delta\Phi}{R}$$

$$= \frac{-N\cdot A\cdot\Delta B}{R} = \frac{N\cdot A\cdot\mu_0\cdot H}{R}$$

$$= \frac{5000\cdot 2\cdot 10^{-3}\,\mathrm{m}^2\cdot 4\pi\cdot 10^{-7}\,\frac{\mathrm{Vs}}{\mathrm{Am}}\cdot 6\cdot 10^5\,\frac{\mathrm{A}}{\mathrm{m}}}{38\,\Omega}$$

$$= 0{,}198\,\mathrm{C}$$

A4: Transformator

a) Gleiches $\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t}$ durch beide Spulen: Induzierte Spannung pro Windung, d.h. $\frac{U}{N}$, bei beiden gleich.

$$\frac{U_{\text{ind1}}}{U_{\text{ind2}}} = \frac{N_1}{N_2} = \frac{4{,}4\,\mathrm{kV}}{220\,\mathrm{V}} = 20$$

b) Widerstand auf 10 km:

$$R = 0,002\,\frac{\Omega}{\text{km}} \cdot 10\,\text{km} = 0{,}02\,\Omega$$

$$P = U \cdot I = R \cdot I^2 = R \cdot \left(\frac{P}{U}\right)^2$$

$$\begin{aligned}\frac{P_{R,230\text{V}}}{P} &= 0{,}02\,\Omega \cdot \left(\frac{200\,\text{kW}}{230\,\text{V}}\right)^2 \cdot \frac{1}{200\,\text{kW}} \\ &= 0,076 \;\widehat{=}\; 7{,}6\,\%\end{aligned}$$

$$P_{R,4,6\text{kV}} = 0{,}02\,\Omega \cdot \left(\frac{200\,\text{kW}}{4{,}6\,\text{kV}}\right)^2 = 37{,}81\,\text{W}$$

Übungen zur Experimentalphysik B **SS 2017**

Prof. Dr. B. Pilawa
F.Wertz

8. Übungsblatt

Elektromagnetische Wellen und Brechungsgesetz

1. Die elektrische Feldstärke einer Lichtwelle lässt sich folgendermaßen beschreiben:

$$E(x,t) = 20\ \mathrm{V/m} \cdot \cos(9 \cdot 10^{15}\ \mathrm{s}^{-1} \cdot t - 6 \cdot 10^{7}\ \mathrm{m}^{-1} \cdot x).$$

a) Wie groß sind Schwingungsdauer und Wellenlänge dieser Welle?
b) Wie groß ist der Brechungsindex des Mediums, in dem sich die Welle ausbreitet?
c) Geben Sie die Intensität der Lichtwelle an.
d) Worin besteht der Unterschied zwischen Welle und Schwingung?

Zahlenwerte: $\mu_r \approx 1$.

Ergebnisse: a) $T = 0{,}70$ fs; $\lambda = 105$ nm; b) $n = 2$.

2. Eine Plexiglasplatte werde von oben von einer punktförmigen Lampe mit einem Öffnungswinkel von 30° aus einer Entfernung von 25 cm angestrahlt. Wie dick muss das Plexiglas sein, damit an der unteren Seite ein Kreis mit einem Durchmesser von 15 cm beleuchtet wird?

Brechungsindex $n_{Plexiglas} = 1{,}5$.

Ergebnis: $d = 4{,}6$ cm.

3. Direkt an der Kante einer 50 m hohen Klippe stehe ein 75 m hoher Turm. Er wird von der tief stehenden Abendsonne (25° zur Horizontalen) von Land aus angestrahlt. In welcher Entfernung von der Klippe endet der Schatten des Turms

a) auf der Wasseroberfläche?
b) auf dem Meeresboden, wenn die Wassertiefe 15 m beträgt?
c) auf dem Meeresboden, wenn die Wassertiefe direkt an der Klippe 15 m beträgt und in einem Winkel von 5° zur Horizontalen tiefer wird?

Brechungsindex $n_{Wasser} = 1{,}3$.

Ergebnisse: a) $x = 268$ m; b) $x = 283$ m; c) $x = 309$ m.

4. Ein Angler sitzt in seinem Boot auf dem Meer. Als er in 30 m Entfernung eine Taucherboje sieht, steht er auf. Sein Kopf befindet sich nun in einer Höhe von 2 m über der Wasseroberfläche. In einem Winkel von 20° zur Horizontalen sieht er unter Wasser einen Taucher.

a) In welcher Tiefe befindet sich der Taucher, wenn er senkrecht unter der Boje taucht?

b) Als der Taucher nach oben sieht, entdeckt er einen Hubschrauber, der über dem Anglerboot schwebt. Der Taucher sieht ihn in einem Winkel von 15° zur Vertikalen. In welcher Höhe befindet sich der Hubschrauber?

Brechungsindex $n_{Wasser} = 1{,}3$.

Ergebnisse: a) $x = 23{,}4$ m; b) $h = 66{,}4$ m.

5. Ein (punktförmiger) Scheinwerfer, der sich inmitten einer Höhle unter Wasser befindet, soll die Höhle oberhalb des Wassers vollständig ausleuchten.

a) Welchen Öffnungswinkel sollte der Lichtkegel unter Wasser mindestens haben?

b) Welchen Öffnungswinkel benötigt man, wenn eine Ölschicht die Wasseroberfläche bedeckt?

c) Welchen Wert nimmt der erforderliche Öffnungswinkel an, wenn sich der Scheinwerfer unter Öl statt unter Wasser befindet?

d) Was geschieht mit Licht, das vom Scheinwerfer unter einem noch größeren als dem berechneten Öffnungswinkel abgestrahlt wird (Begründung)?

Brechungsindizes: $n_{Wasser} = 1{,}3$; $n_{Öl} = 1{,}6$.

Ergebnisse: a) $2\alpha = 100{,}6°$; c) $2\alpha = 77{,}4°$.

(Original-Klausuraufgabe)

A1: Lichtwelle im Medium

a) Allgemeine Form der Wellengleichung:

$E(x,t) = E_0 \cdot \sin(\omega t - kx)$

Hier: $E(x,t) = \underbrace{20\,\frac{\text{V}}{\text{m}}}_{E_0} \cdot \cos\left(\underbrace{9 \cdot 10^{15}\frac{1}{\text{s}}}_{\omega} \cdot t - \underbrace{6 \cdot 10^{7}\,\frac{1}{\text{m}}}_{k} \cdot x\right)$

$\omega = 2\pi f = \frac{2\pi}{T}$

$\Rsh\ T = \frac{2\pi}{\omega} = 6{,}98 \cdot 10^{-16}\,\text{s}$

$k \cdot \lambda = 2\pi$

$\Rsh\ \lambda = \frac{2\pi}{k} = 1{,}05 \cdot 10^{-7}\,\text{m} = 105\,\text{nm}$

b) Licht im Medium: $c = \frac{\lambda}{T} = \frac{\omega}{k}$

Brechungsindex: $n = \frac{c_0}{c} = \frac{c_0 k}{\omega} = \dfrac{3 \cdot 10^{8}\frac{\text{m}}{\text{s}} \cdot 6 \cdot 10^{7}\frac{1}{\text{m}}}{9 \cdot 10^{15}\frac{1}{\text{s}}} = 2$

c) Intensität: Energie pro Zeit und Fläche.

Idee dahinter: $w_{\text{el}} = w_{\text{magn}}$

$$\frac{\epsilon_0 \cdot E^2}{2} = \frac{B^2}{2\mu_0} \quad ; \text{ aufgelöst nach } B\text{:} \quad B = \underbrace{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}}_{1/c} \cdot E$$

$$\Rsh\ E = c \cdot B \quad \text{bzw.} \quad B = \frac{E}{c}$$

$$I = \frac{E_0 \cdot B_0}{2 \cdot \mu_0 \cdot \mu_r} = \frac{E_0^2}{2 \cdot \mu_0 \cdot \mu_r \cdot c} \cdot \frac{k}{\omega} \quad \text{(da im Medium)}$$

$$= \frac{\left(20\frac{\text{V}}{\text{m}}\right)^2}{2 \cdot 4\pi \cdot 10^{-7}\,\frac{\text{Vs}}{\text{A}} \cdot 1 \cdot 3 \cdot 10^{8}\,\frac{\text{m}}{\text{s}}} \cdot 2 = 1,06\,\frac{\text{W}}{\text{m}^2} = 1,06\,\frac{\text{J}}{\text{m}^2\text{s}}$$

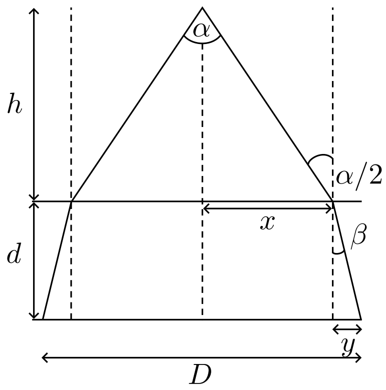
d) Welle: Periodisch in Ort UND Zeit.

$y(x,t) = y_0 \cdot \sin(\omega t - kx)$

Schwingung: Periodisch in der Zeit.

$y(x,t) = y_0 \cdot \sin(\omega t)$

A2: Lichtkegel in Plexiglas



$D = 2(x + y)$

$n_{\text{Luft}} \cdot \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right) = n_{\text{Plex}} \cdot \sin(\beta)$

$\sin(\beta) = \frac{n_{\text{Luft}}}{n_{\text{Plex}}} \cdot \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{1}{1,5} \cdot \sin(15°)$

$\Rightarrow \ \beta = 9{,}94°$

$\tan\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{x}{h}$

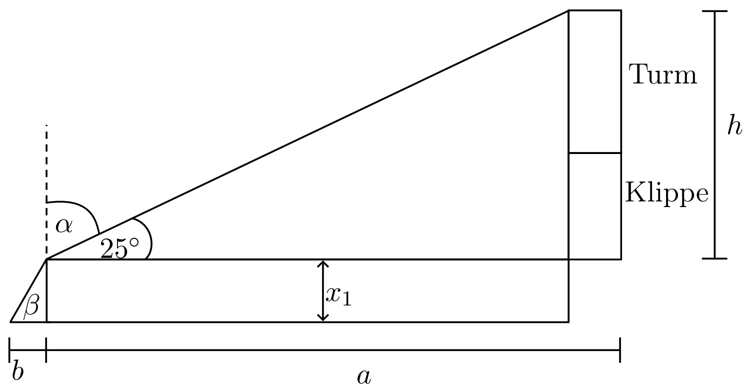
$x = h \cdot \tan\left(\frac{\alpha}{2}\right) = 0{,}067\,\text{m}$

$y = \frac{D}{2} - x = \frac{0{,}15\,\text{m}}{2} - 0{,}067\,\text{m} = 0{,}008\,\text{m} = 8\,\text{mm}$

$\tan(\beta) = \frac{y}{d} \ \Rightarrow \ d = \frac{y}{\tan(\beta)} = 0{,}046\,\text{m} = 4{,}6\,\text{cm}$

A3: Turm wirft Schatten

a)



$\tan(25°) = \frac{h}{a}$

$\Rightarrow a = \frac{h}{\tan(25°)} = \frac{125\,\text{m}}{\tan(25°)} = 268\,\text{m}$

b) Gesamtlänge: $a + b$

$n_{\text{Luft}} \cdot \sin(\alpha) = n_{\text{Wasser}} \cdot \sin(\beta)$

$\sin(\beta) = \frac{n_{\text{Luft}}}{n_{\text{Wasser}}} \cdot \sin(\alpha)$

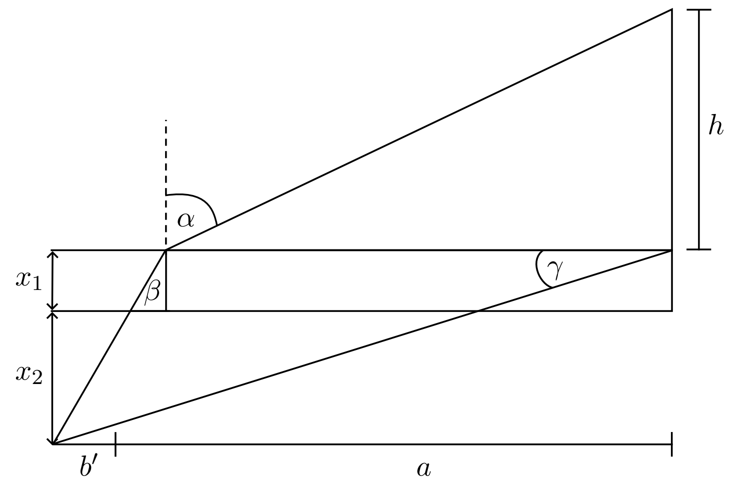
↳ $\beta = 44{,}2°$

mit $\alpha = 90° - 25° = 65°$
und $n_{\text{Luft}} \approx 1$, $n_{\text{Wasser}} = 1,3$

$\tan(\beta) = \frac{b}{x_1} \quad \Rightarrow \quad b = x_1 \cdot \tan(\beta) = 14{,}6\,\text{m}$

$a + b = 282{,}6\,\text{m}$

c)



$$\tan(\beta) = \frac{b'}{x_1 + x_2}$$

$$\tan(\gamma) = \frac{x_2}{a + b'} \quad \Rightarrow \quad x_2 = (a + b') \cdot \tan(\gamma)$$

$$\tan(\beta) = \frac{b'}{x_1 + (a + b') \cdot \tan(\gamma)} \qquad \Big| \cdot \text{Nenner}$$

$$\tan(\beta) \cdot (x_1 + (a + b') \cdot \tan(\gamma)) = b' \qquad \Big| -b' \tan(\beta) \tan(\gamma)$$

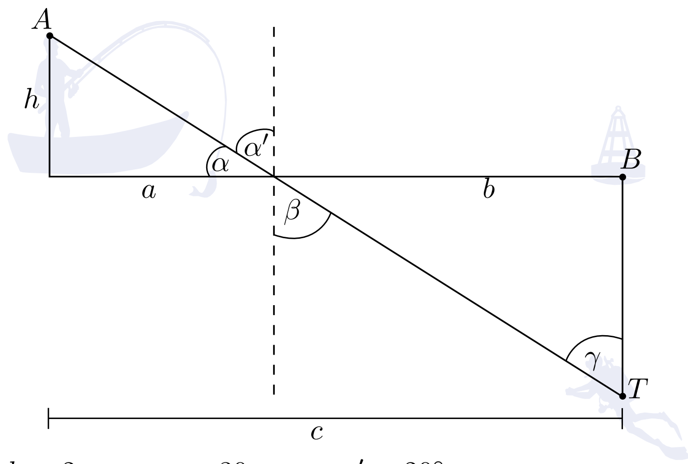
$$b' = \frac{\tan(\beta) \cdot (x_1 + a \cdot \tan(\gamma))}{1 - \tan(\beta) \tan(\gamma)}$$

$$= \frac{\tan(44{,}2°) \cdot (15\,\mathrm{m} + 268\,\mathrm{m} \cdot \tan(5°))}{1 - \tan(44{,}2°) \cdot \tan(5°)} = 40{,}9\,\mathrm{m}$$

$$a + b' \approx 309\,\mathrm{m}$$

A4: Angler und Taucher

a)



$h = 2\,\text{m} \quad , \quad c = 30\,\text{m} \quad , \quad \alpha' = 20°$

$n_{\text{Luft}} \cdot \sin(\alpha) = n_{\text{Wasser}} \cdot \sin(\beta)$

$\Lsh \ \sin(\beta) = \frac{1}{1,3} \cdot \sin(70°) \quad \Rightarrow \quad \beta = 46{,}3°$

$\tan(\alpha') = \frac{h}{a} \quad \Rightarrow \quad a = \frac{2\,\text{m}}{\tan(20°)} = 5{,}5\,\text{m}$

$b = c - a = 30\,\text{m} - 5{,}5\,\text{m} = 24{,}5\,\text{m}$

$\tan(\beta) = \frac{b}{x} \quad \Rightarrow \quad x = \frac{b}{\tan(\beta)} = \frac{24{,}5\,\text{m}}{\tan(46{,}3°)} = 23{,}4\,\text{m}$

b) $c = 30\,\text{m} \ , \ 15°$

$b = x \cdot \tan(\beta) = 6{,}27\,\text{m}$

$a = c - b = 23{,}73\,\text{m}$

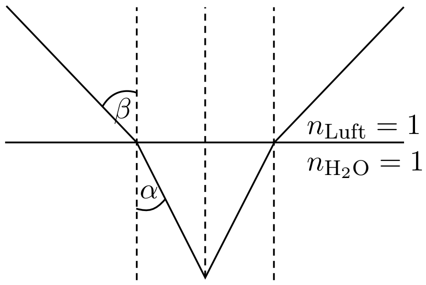
$n_{\text{Luft}} \cdot \sin(\alpha) = n_{\text{Wasser}} \cdot \sin(\beta)$

$\Lsh \ \sin(\alpha) = \frac{n_{\text{Wasser}}}{n_{\text{Luft}}} \cdot \sin(\beta) \quad \Rightarrow \quad \alpha = 19{,}7°$

$\tan(\alpha) = \frac{a}{h} \quad \Rightarrow \quad h = \frac{a}{\tan(\alpha)} = 66{,}3\,\text{m}$

A5: Scheinwerfer im Wasser

a)



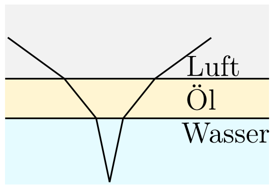
$n_{\text{H}_2\text{O}} \cdot \sin(\alpha) = n_{\text{Luft}} \cdot \sin(\alpha)$

Vollständige Ausleuchtung bedeutet $\beta = 90°$, d.h. $\sin(\beta) = 1$.

$\sin(\alpha) = \frac{n_{\text{Luft}}}{n_{\text{H}_2\text{O}}} \cdot \sin(90°) = \frac{1}{n_{\text{H}_2\text{O}}}$

$\alpha = 50{,}3° \quad \Rightarrow \quad$ Öffnungswinkel: $2\alpha = 100{,}6°$

b)



1) Übergang Wasser-Öl: $\frac{\sin(\alpha_{\text{Öl}})}{\sin(\alpha_{\text{H}_2\text{O}})} = \frac{n_{\text{H}_2\text{O}}}{n_{\text{Öl}}}$

2) Übergang Öl-Luft: $\sin(\alpha_{\text{Öl}}) = \frac{1}{n_{\text{Öl}}}$

da $\alpha_{\text{Luft}} = 90°$, $n_{\text{Luft}} = 1$

Gesamt: $\frac{1}{n_{\text{Öl}}} \cdot \frac{1}{\sin(\alpha_{\text{H}_2\text{O}})} = \frac{n_{\text{H}_2\text{O}}}{n_{\text{Öl}}}$

↳ $\sin(\alpha_{\text{H}_2\text{O}}) = \frac{1}{n_{\text{H}_2\text{O}}}$, also wie in Aufgabenteil a).

c) $\sin(\alpha_{\text{Öl}}) = \frac{1}{n_{\text{Öl}}} = \frac{1}{1,6} \quad \Rightarrow \quad \alpha_{\text{Öl}} = 38{,}7°$

$2\alpha = 77{,}4°$

d) Licht, das unter einem noch größeren Öffnungswinkel abgestrahlt wird, erfährt eine Totalreflexion, wird also an der Wasseroberfläche vollständig reflektiert.

Übungen zur Experimentalphysik B — SS 2017

Prof. Dr. B. Pilawa
F. Wertz

9. Übungsblatt

Geometrische Optik

1. Im Abstand g = 10 cm vor einem Wölbspiegel mit dem Krümmungsradius r = 10 cm steht ein G = 2,0 cm großer Gegenstand.
   a) Zeichnen Sie den Strahlengang und skizzieren Sie die Lage des (virtuellen) Bildes.
   b) Berechnen Sie die Größe und die Lage des Bildes.

   Ergebnisse: b) b = -3,3 cm; B = 0,67 cm.

2. Eine Sammellinse erzeugt von einem Gegenstand (Pfeil der Höhe G = 2,0 cm, Gegenstandsweite g = 10 cm) ein auf die Hälfte verkleinertes Bild.
   a) Konstruieren Sie die Lage des Bildes und der Brennpunkte in möglichst korrektem Maßstab und erklären Sie die Konstruktion.
   b) Berechnen Sie die Brennweite f der Linse.
   c) In welchem Abstand g von der Linse muss der Gegenstand hingestellt werden, damit das Bild gleich groß ist wie der Gegenstand?

   (Original-Klausuraufgabe)

   Ergebnisse: b) f = 3,3 cm; c) g = 6,7 cm.

3. Ein Gegenstand steht im Abstand ℓ vor einem Schirm. In diese Anordnung soll eine Linse so eingefügt werden, dass der Gegenstand auf dem Schirm abgebildet wird.
   a) Berechnen Sie die maximal mögliche Brennweite f_{max} der Linse.
   b) Eine Linse der Brennweite $f < f_{max}$ wird vom Ort des Gegenstandes bis zum Schirm verschoben. Wie oft sieht man ein scharfes Bild des Gegenstandes auf dem Schirm und wie groß sind jeweils die Gegenstandsweiten g?
   c) Konstruieren Sie für das Beispiel: Gegenstandsgröße G = 1,0 cm, ℓ = 10 cm, g = 2,5 cm möglichst maßstabsgerecht den Brennpunkt F der Linse und geben Sie die Brennweite f an. Beschreiben Sie Ihr Vorgehen.

4. Flintglas hat für Licht der Wellenlänge λ = 656 nm den Brechungsindex n = 1,608. Aus diesem Material soll eine Sammellinse mit der Brennweite f = 100 mm gefertigt werden. Wie groß müssen die Krümmungsradien r gewählt werden im Falle einer

   a) plankonvexen Linse?

   b) symmetrisch bikonvexen Linse?

   c) konkavkonvexen Linse mit $|r_1| = 2\,|r_2|$?

   Wie groß ist die Brennweite dieser Linsen für Licht der Wellenlänge λ = 486 nm (n = 1,624)? Welcher Brechkraft entspricht dies? Wie groß ist die Brennweite bzw. die Brechkraft von zwei solchen Linsen im Abstand d = 3,00 cm voneinander (bei dieser Wellenlänge)?

   Ergebnisse: a) r = 60,8 mm; b) r = 121,6 mm; c) r_1 = 30,4 mm; f = 97,4 mm; D = 10,3 dpt; f_2 = 57,6 mm; D_2 = 17,4 dpt.

5. Die abbildende Linse eines Fotoapparates habe einen maximal nutzbaren Durchmesser D = 2,0 cm und eine Brennweite f = 10 cm.

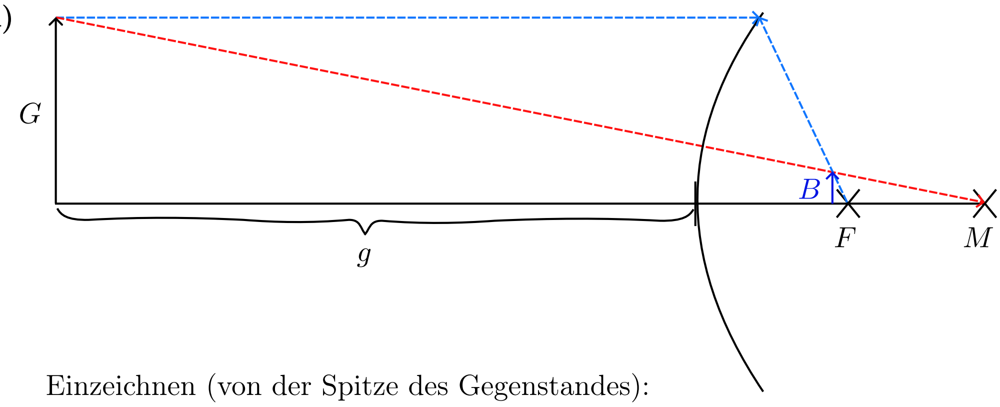
   a) Bis zu welchem kleinsten Abstand g von der Linse werden bei dem für unendliche Entfernung eingestelltem Apparat Gegenstände noch „scharf“ abgebildet, wenn anstelle von Bildpunkten Kreise mit einem Durchmesser 0,10 mm zugelassen werden?

   b) Wie lässt sich die Schärfentiefe so weit erhöhen, dass der kleinste Abstand unter den angegebenen Bedingungen g/2 wird?

   Ergebnisse: a) g = 20 m; b) D´ = 1,0 cm.

A1: Wölbspiegel

a)



Einzeichnen (von der Spitze des Gegenstandes):

- Mittelpunktstahl (rot),
- Parallelstrahl (blau).

Brennweite f: $f = \frac{r}{2}$

Brennstrahl: Durch Fokus und Auftreffpunkt des Parallelstrahls konstruieren.

Schnittpunkt mit Mittelpunktstrahl liefert Bildhöhe B (blau).

b) $g = 0{,}1\,\mathrm{m}$, $r = 0{,}1\,\mathrm{m}$, $G = 0{,}02\,\mathrm{m}$

Abbildungsgesetz: $\frac{1}{g} + \frac{1}{b} = \frac{1}{f}$

Aufgelöst nach b:

$$b = \frac{1}{\frac{1}{f} - \frac{1}{g}} \overset{f=\frac{r}{2}}{=} \frac{1}{\frac{1}{-0{,}05\,\mathrm{m}} - \frac{1}{0{,}1\,\mathrm{m}}} = \frac{1}{-\frac{2}{0{,}1\,\mathrm{m}} - \frac{1}{0{,}1\,\mathrm{m}}} = -\frac{0,1}{3}\,\mathrm{m} \approx -3{,}3\,\mathrm{cm}$$

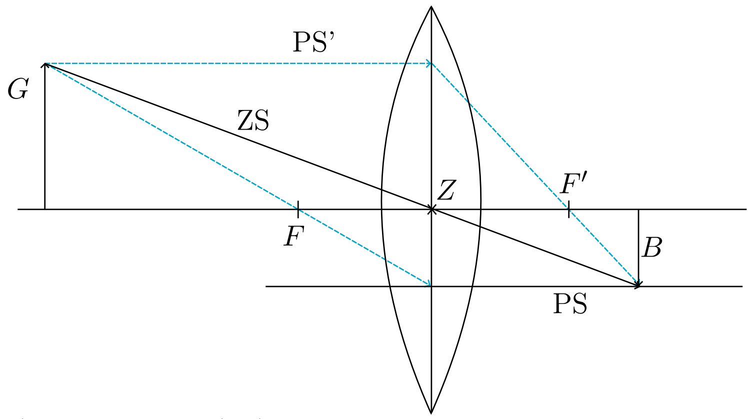
(negatives Vorzeichen $\widehat{=}$ hinter dem Spiegel)

Größe des Bildes: $V = \frac{B}{G} = -\frac{b}{g}$

$$B = -G \cdot \frac{b}{g} = -\frac{0{,}02\,\mathrm{m} \cdot (-1/30\,\mathrm{m})}{0{,}1\,\mathrm{m}} = \frac{2}{3}\,\mathrm{cm}$$

A2: Sammellinse

a)



1) Zentralstrahl (ZS) durch Spitze von G und Z
2) Brennstrahl (BS) von Spitze von G zu $B = \frac{G}{2}$ in der Linse; geht in Parallelstrahl (PS, Weite b) über.
   Schnittstelle mit der Achse: F (Fokus; Brennpunkt)
   Schnittstelle ZS und PS: Spitze von B
3) Parallelstrahl PS': Verbindung zu Spitze von B.
   Schnittpunkt mit der Achse: F' (Fokus auf der Bildseite)

b) $V = \frac{B}{G} = -\frac{b}{g} = -\frac{1}{2}$

$b = \frac{g}{2}$

$\downarrow$

$\frac{1}{f} = \frac{1}{g} + \frac{1}{b} = \frac{1}{g} + \frac{2}{g} = \frac{3}{g}$

$\Rsh$ $f = \frac{g}{3} = \frac{10}{3}\,\mathrm{cm}$

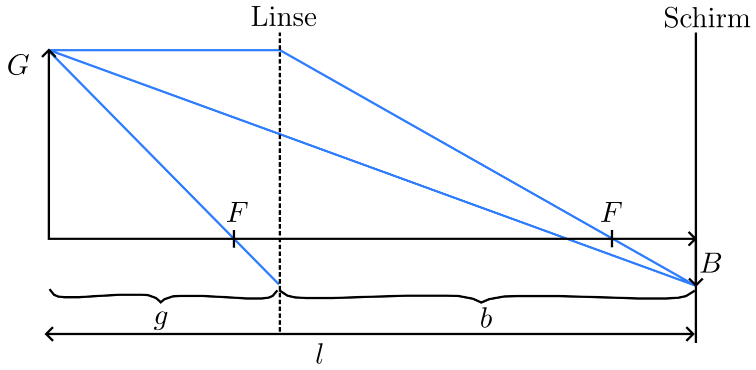
c) $V = \frac{B}{G} = -\underbrace{\frac{b}{g}}_{b=g} = -1$

$\frac{1}{f} = \frac{1}{b} + \frac{1}{b} = \frac{2}{b}$

$\Rsh$ $b = 2f = \frac{20}{3}\,\mathrm{cm}$

A3: Abbildung auf Schirm

a)



$\frac{1}{g} + \frac{1}{b} = \frac{1}{f}$

Wir wollen f in Abhängigkeit von b bestimmen:

$b + g = l \quad \Rightarrow \quad g = l - b$

$\Lsh\ \frac{1}{f} = \frac{1}{l-b} + \frac{1}{b} = \frac{b+l-b}{b\cdot(l-b)} = \frac{l}{b\cdot(l-b)}$

Kehrwert: $f(b) = \frac{bl - b^2}{l} = b - \frac{b^2}{l}$

Ableiten: $f'(b) = 1 - \frac{2b}{l} \stackrel{!}{=} 0$

$b_{\max} = \frac{l}{2}$

Einsetzen: $f_{\max} = f\left(\frac{l}{2}\right) = \frac{\frac{l^2}{2} - \frac{l^2}{4}}{l} = \frac{l}{4}$

b) Aus Teil a):

$f = b - \frac{b^2}{l}$

$\frac{b^2}{l} - b + f = 0 \quad | \cdot l$

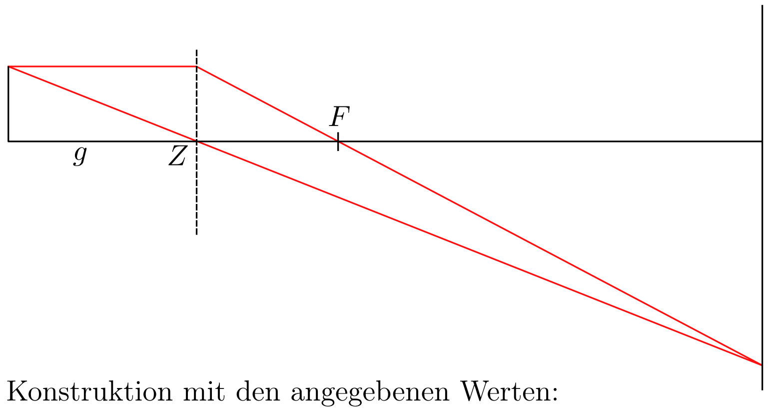
$b^2 - bl + fl = 0$

$b_{1,2} = \frac{l}{2} \pm \sqrt{\frac{l^2}{4} - fl}$

Wie viele Bilder (d.h. Lösungen für b) gibt es?

- Zwei, wenn $\sqrt{\frac{l^2}{4} - fl} > 0$, d.h. $\frac{l}{4} - f > 0$ und somit $f < \frac{l}{4}$.
- Eine, wenn $\sqrt{\frac{l^2}{4} - fl} = 0$, d.h. $f = \frac{l}{4}$.

c)



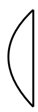
Konstruktion mit den angegebenen Werten:

1) Zentral- bzw. Mittelpunktstrahl durch die Spitze des Gegenstands G und das Zentrum Z; bestimmt Position auf dem Schirm
2) Parallelstrahl von G zur Linse L parallel zum Boden
3) Brennstrahl von L zu B bestimmt F als Schnittpunkt mit der Bodenlinie
4) Abstand zwischen Linse und Fokus messen: $f = 1{,}9\,\mathrm{cm}$

A4: Krümmungsradius der Linse

Für die Brennweite von Linsen gilt:
$\frac{1}{f} = (n-1) \cdot \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right)$

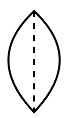
a) Plankonvex: $r_2 = \infty$, also $\frac{1}{r_2} \to 0$



$$\frac{1}{f} = (n-1) \cdot \frac{1}{r_1}$$

$$r_1 = (n-1) \cdot f = 60{,}8\,\mathrm{mm}$$

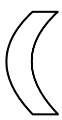
b) Symmetrisch bikonvex: $r_2 = -r_1$



$$\frac{1}{f} = (n-1) \cdot \frac{2}{r_1}$$

$$r_1 = (n-1) \cdot f = 121{,}6\,\mathrm{mm}$$

c) Konkavkonvex: $r_1 = 2r_2$



$$r_2 = -(n-1) \cdot \frac{f}{2} = -30{,}4\,\mathrm{mm}$$

Nun wird Licht einer anderen Wellenlänge verwendet, dieses wird in einer anderen Stärke gebrochen (Fokus ändert sich, Radius aber nicht):

$$\underbrace{\frac{1}{f \cdot (n-1)}}_{\text{alt}} = \underbrace{\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}}_{\text{bleibt}} = \underbrace{\frac{1}{f' \cdot (n'-1)}}_{\text{neu}}$$

$$f' = \frac{n-1}{n'-1} \cdot f \approx 97{,}4\,\mathrm{nm}$$

Brechkraft: $D' = \dfrac{1}{f'} = 10,3\,\mathrm{m}^{-1} = 10,3\,\mathrm{dpt}$

Zwei dünne Linsen der Brennweite f':

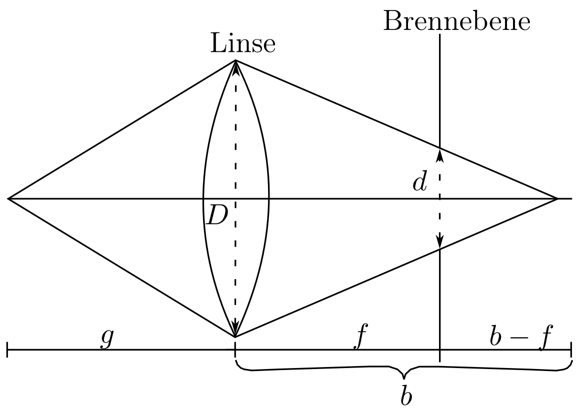
$$\frac{1}{f_{\text{ges}}} = \frac{1}{f_1} + \frac{1}{f_2} - \frac{d}{f_1 \cdot f_2} = \frac{2}{f'} - \frac{d}{f'^2}$$

$$f_{\text{ges}} = \frac{f'^2}{2f' - d} \approx 57{,}6\,\mathrm{mm}$$

$$D_{\text{ges}} = \frac{1}{f_{\text{ges}}} \approx 17,37\,\mathrm{dpt}$$

A5: Linse beim Fotoapparat

a)



(1) $\dfrac{D}{d} = \dfrac{b}{b-f}$

$$bD - fD = bd \;\Rightarrow\; b = \frac{fD}{D-d}$$

(2) $\dfrac{1}{g} + \dfrac{1}{b} = \dfrac{1}{f}$

(1) in (2): $\dfrac{1}{g} = \dfrac{1}{f} - \dfrac{D-d}{fD} \;\Rightarrow\; g = f \cdot \dfrac{D}{d} = 20\,\mathrm{m}$

b) $g \sim D$

Blende schließen:

$$D' = \underbrace{\frac{g'}{g}}_{1/2} \cdot D = \frac{D}{2} = 1\,\mathrm{cm}$$

Übungen zur Experimentalphysik B SS 2017

Prof. Dr. B. Pilawa
F. Wertz

10. Übungsblatt

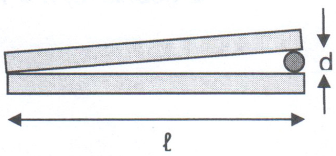
Wellenoptik

1. Die Oberfläche einer Linse mit dem Brechungsindex n_L wird mit einem Material vom Brechungsindex $n < n_L$ vergütet.
   a) Wie lautet die Formel für den Gangunterschied Δ für die Reflexion zweier senkrecht einfallender Teilstrahlen, die auf der Ober- bzw. auf der Unterseite der Vergütungsschicht reflektiert werden?
   b) Welches ist die kleinstmögliche Dicke der Vergütungsschicht, damit senkrecht einfallendes, grünes Licht der Wellenlänge λ_g bei der Reflexion ausgelöscht wird?
   c) Welchen Gangunterschied erfährt rotes Licht der Wellenlänge λ_r bei der Reflexion (in Bruchteilen von λ_r ausdrücken)?

   Zahlenwerte: $n = 1{,}20$; $\lambda_g = 550$ nm; $\lambda_r = 700$ nm.

   Ergebnisse: b) $d = 115$ nm; c) $\Delta = 0{,}393\,\lambda_r$.

2. Es soll der Durchmesser d eines feinen Drahtes bestimmt werden. Hierfür wird der Draht wie abgebildet zwischen zwei planparallele Glasplatten der Länge $\ell = 20{,}0$ cm gelegt. Anschließend wird die Anordnung von oben mit gelben Licht einer Natriumlampe ($\lambda = 590$ nm) beleuchtet. Es lassen sich 19 helle Streifen beobachten. Was lässt sich daraus für die Dicke des Drahtes aussagen?



   Ergebnis: $5{,}46\ \mu m < d < 5{,}75\ \mu m$.

3. Zwei parallele Spalte der Breite a im Abstand d werden mit monochromatischem parallelem Licht der Wellenlänge λ senkrecht beleuchtet.
   a) Leiten Sie anhand einer Skizze her, unter welchen Winkeln Helligkeitsmaxima auftreten.
   b) Skizzieren Sie den Intensitätsverlauf des Interferenzbildes.
   c) Wie ändert sich das Interferenzbild, wenn Sie vor einen der beiden Spalte eine planparallele Glasplatte mit dem Brechungsindex $n = 1{,}5$ und der Dicke λ anbringen.
   d) Wo liegen die Maxima, wenn Sie einen der Spalte abdecken?

4. Beugungsgitter

a) Auf ein Beugungsgitter mit der Gitterkonstanten $g = 5{,}00\ \mu m$ fällt Licht der Wellenlänge $\lambda = 500$ nm senkrecht ein. Unter welchen Winkeln treten die Beugungsmaxima 1., 2. und 3. Ordnung auf?

b) Wie groß ist die Spaltbreite des Gitters aus a), wenn kein Maximum in der 3. Ordnung auftritt?

c) Ein Beugungsgitter wird mit parallelem weißem Licht beleuchtet. Kann es passieren, dass sichtbares Licht aus dem Spektrum 1. Ordnung unter dem gleichen Winkel gebeugt wird, wie sichtbares Licht aus dem Spektrum 2. Ordnung, d.h. dass sich die beiden Ordnungen teilweise überlappen? (Sichtbarer Spektralbereich: 400 nm bis 780 nm)

Ergebnis: a) $\alpha_1 = 5{,}74°$; $\alpha_2 = 11{,}5°$; $\alpha_3 = 17{,}5°$; *b)* $b_1 = 1{,}67\ \mu m$; $b_2 = 3{,}33\ \mu m$.

Polarisiertes Licht

5. Ein paralleles, monochromatisches Lichtbündel fällt unter dem Einfallswinkel 55° auf eine ebene Glasplatte. Das Licht ist parallel zur Einfallsebene linear polarisiert. Unter diesen Bedingungen wird kein reflektiertes Licht beobachtet.

a) Wie kann man das Fehlen des reflektierten Lichtes verstehen?

b) Was folgt aus dieser Beobachtung für den Brechungsindex des Glases?

c) Was geschieht, wenn statt dem linear polarisierten ein unpolarisiertes Lichtbündel eingestrahlt wird?

Ergebnis: b) $n = 1{,}43$.

Allgemeines zur Phasenbeziehung

Wichtige Begriffe zur Interferenz:

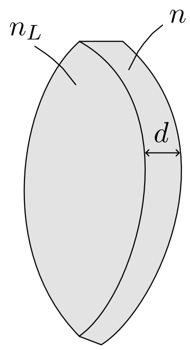
Überlagerung von zwei oder mehr kohärenten Wellenzügen führt zu

- **konstruktiver Interferenz** = Verstärkung, wenn Phasendifferenz geradzahliges Vielfaches von π ist
- **destruktiver Interferenz** = Auslöschung, wenn Phasendifferenz ungeradzahliges Vielfaches von π ist

Kohärenz: feste Phasenbeziehung zwischen Wellenzügen; nahezu monochromatisches (frequenzgleiches) Licht

A1: Vergütungsschicht

a) Gangunterschied $\Delta s \rightarrow$ wie weit sind die Wellen gegeneinander verschoben?



Übergang von einem optisch dünnerem zum optisch dichteren Medium ($n \rightarrow n_L$):

$\Delta s = 2 \cdot d \cdot \sqrt{n^2 - \sin^2(\alpha)}$

Senkrechter Einfall: $\alpha = 0°$; $\sin(0°) = 0$

$\Delta s = 2 \cdot d \cdot \sqrt{n^2} = 2 \cdot d \cdot n$

b) Destruktive Interferenz, wenn $\Delta s = 2nd \overset{!}{=} \frac{\lambda_g}{2}$

↳ $d = \frac{\lambda_g}{4n} = \frac{550 \cdot 10^{-9}\,\text{m}}{4 \cdot 1,2} = 114{,}6\,\text{nm}$

c) Formel aus Teil b) durch λ_r teilen:

$\frac{\Delta s}{\lambda_r} = \frac{\lambda_g}{2 \cdot \lambda_r} = \frac{11}{28} \approx 0,393$

A2: Interferenz-Draht

Reflexion am optisch dichteren Medium (Glas > Luft):

$\Delta = 2 \cdot d \cdot n + \frac{\lambda}{2}$ mit $n = 1$ (Luft)

Helle Streifen, d.h. konstruktive Interferenz:

$\Delta = 2d + \frac{\lambda}{2} = m \cdot \lambda$ (m: Anzahl der Streifen)

↳ $d = (2m - 1)\frac{\lambda}{4}$

Anzahl Streifen:

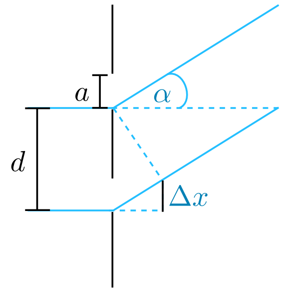
$m = 19$: $d_{\text{min}} = \frac{37}{4}\,\lambda = 5{,}46\,\mu\text{m}$

$m = 20$: $d_{\text{min}} = \frac{39}{4}\,\lambda = 5{,}75\,\mu\text{m}$

↳ $5{,}46\,\mu m < d < 5{,}75\,\mu m$

A3: Doppelspaltexperiment

a)



Gangunterschied:

$\Delta x = d \cdot \sin(\alpha)$

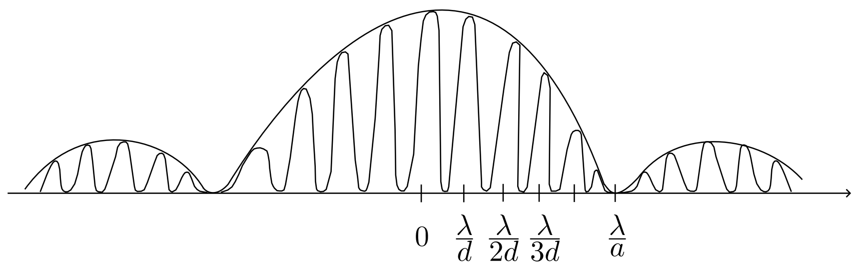
Bedingung für Helligkeitsmaximum:

$\Delta x = m \cdot \lambda \quad (m \in \mathbb{N})$

↳ $\Delta x = d \cdot \sin(\alpha) = m \cdot \lambda$

$\alpha_{\text{max}} = \arcsin\left(\frac{m \cdot \lambda}{d}\right)$

b) Intensitätsverlauf:



c) 1. Spalt: Glasplättchen, Brechungsindex n

2. Spalt: „Luftplättchen", Brechungsindex n'

Gangunterschied: $\Delta = (n \cdot \lambda - n' \cdot \lambda) = \lambda \cdot (n - n')$

$= \lambda \cdot (1,5 - 1) = \frac{\lambda}{2}$

Bedeutung: halbzahliges Vielfaches von λ, d.h. Maxima werden zu Minima und umgekehrt.

d) Nur ein Spalt: Interferenzmuster des Einzelspalts entspricht Einhüllende in b).

Minima: Zerlegung des Strahls in $2\,m$ Strahlbündel, die sich paarweise auslöschen.

Gangunterschied benachbarter Strahlbündel: $\frac{\lambda}{2}$

$a \cdot \sin(\alpha) = m \cdot \lambda$

↳ $\alpha_{\text{min}} = \arcsin\left(\frac{m \cdot \lambda}{a}\right) \qquad (m \in \mathbb{Z})$

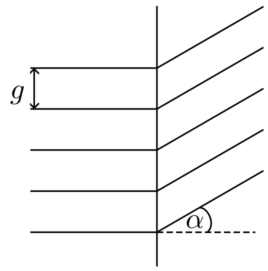
Maxima: Zerlegung in $2\,m + 1$ Strahlbündel, von denen sich $2\,m$ auslöschen, sodass nur eines übrigbleibt.

$a \cdot \sin(\alpha) = (2\,m + 1) \cdot \frac{\lambda}{2}$

↳ $\alpha = \arcsin\left(\frac{2\,m + 1}{2} \cdot \frac{\lambda}{a}\right)$

A4: Beugungsgitter

a)



$$g \cdot \sin(\alpha_{\text{max}}) = m \cdot \lambda$$

$$\alpha_{\text{max}} = \arcsin\left(\frac{m \cdot \lambda}{g}\right)$$

mit $m = 1,\ 2,\ 3...$ und $m < \frac{g}{\lambda}$

$\alpha_1 = 5{,}74°$

$\alpha_2 = 11{,}54°$

$\alpha_3 = 17{,}46°$

b) Maximum 3. Ordnung: $\sin(\alpha_3) = \frac{3\lambda}{g}$

Hier: Kein Maximum $\widehat{=}$ Minimum des Einzelspaltes.

$\sin(\alpha) = \frac{m \cdot \lambda}{a}$ (siehe 3d))

$\Lsh\ \frac{3\lambda}{g} = \frac{m \cdot \lambda}{a} \quad \longrightarrow \quad a = \frac{m \cdot g}{3}$

Spalt muss kleiner sein als Abstand g, daher kommen nur zwei Möglichkeiten infrage: $m = 1$ und $m = 2$.

$a_1 = \frac{5}{3}\,\mu\text{m} \approx 1{,}67\,\mu\text{m}$

$a_2 = \frac{10}{3}\,\mu\text{m} \approx 3{,}33\,\mu\text{m}$

c) $\alpha_{1,\text{max}} = \arcsin\left(\frac{\lambda_{\text{max}}}{g}\right)$

$\alpha_{2,\text{max}} = \arcsin\left(\frac{2 \cdot \lambda_{\text{min}}}{g}\right)$

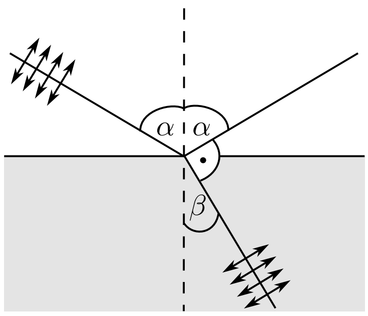
$\Rightarrow \lambda_{\text{max}} < 2 \cdot \lambda_{\text{min}}$

$\alpha_{1,\text{max}} < \alpha_{2,\text{max}}$

$\Lsh$ keine Überlappung

A5: Polarisiertes Licht

a)



Warum wird kein reflektiertes Licht beobachtet?

$\Rightarrow$ Nur Licht, das senkrecht zur Einfallsebene polarisiert ist, wird reflektiert.

Grund: Reflektierte Welle im dichteren Medium wird durch schwingende Dipole erzeugt. Diese schwingen parallel zur Einfallsebene und können daher keine Energie senkrecht dazu abstrahlen.

b) Brechungsgesetz:

$1 \cdot \sin(\alpha) = n \cdot \sin(\beta)$

Brewsterbedingung:

Winkel zwischen gebrochenem und reflektiertem Strahl: 90°

↳ $\beta = 90° - \alpha$, denn $\alpha + \beta + 90° = 180°$

$$\begin{aligned} 1 \cdot \sin(\alpha) = n \cdot \sin(90° - \alpha) &= n \cdot \cos(-\alpha) \\ &= n \cdot \cos(\alpha) \end{aligned}$$

$$n = \frac{\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)} = \tan(\alpha) = 1,428$$

c) Nur senkrecht zur Einfallsebene polarisiertes Licht wird reflektiert.
Das reflektierte Licht ist also der linear polarisierte Anteil des Lichtbündels.

Übungen zur Experimentalphysik B **SS 2017**

Prof. Dr. B. Pilawa
F. Wertz

11. Übungsblatt

Spezielle Relativitätstheorie

1. Eine Rakete bewege sich relativ zu einem ruhenden Beobachter mit 99,0% der Lichtgeschwindigkeit.
   a) Um welchen Faktor ändert sich die Masse der Rakete im Vergleich zu ihrer Ruhemasse m_0?
   b) Wie viel Zeit ist nach der Uhr des ruhenden Beobachters vergangen, wenn nach der Uhr, die sich mit der Rakete bewegt, ein Jahr vergangen ist?
   c) Wie ändern sich für den ruhenden Beobachter die linearen Abmessungen der Körper in der Rakete in Richtung ihrer Bewegung sowie senkrecht dazu?
   d) Wie ändert sich folglich für den Beobachter die Dichte der Stoffe in dieser bewegten Rakete im Vergleich zum Ruhezustand?
   (Original-Klausuraufgabe)

2. Ein Elektron mit der Ruheenergie 0,511 MeV bewege sich mit der Geschwindigkeit $v = 0{,}800 \cdot c$. Wie groß sind seine Gesamtenergie, seine kinetische Energie und sein Impuls?
   (Original-Klausuraufgabe)

   Ergebnisse: a) $E = 0{,}852$ MeV; b) $E_{kin} = 0{,}341$ MeV; c) $p = 0{,}681$ MeV/c

3. Ein Proton wird beschleunigt, bis seine Masse das Dreifache seiner Ruhemasse beträgt.
   a) Berechnen Sie die Geschwindigkeit v des Protons.
   b) Berechnen Sie die kinetische Energie des Protons.
   c) Mit welcher Spannung U wurde das Proton beschleunigt?

Ihre Fragen zur Vorlesung und zu den Übungen

An dieser Stelle haben Sie die Möglichkeit, in den Tutorien Fragen zum bisherigen Inhalt der Vorlesung und zu den Übungsaufgaben zu stellen. Notieren Sie sich Themen, die Sie noch einmal im Tutorium durchsprechen wollen. Damit sich die Tutoren vorbereiten können, senden Sie Ihrem Tutor die Fragen am besten vorab per E-Mail.

A1: Rakete

a) Relativistische Gleichung: $m(v) = \dfrac{m_0}{\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}}$

$\Rightarrow$ Daraus folgt das Massenverhältnis: $\dfrac{m(v)}{m_0} = \dfrac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = \dfrac{1}{\sqrt{1-(0,99)^2}} \approx 7,09$

b) Zeitdilatation („bewegte Uhren gehen langsamer“)

Beobachter misst (analog zu a)):

$\Delta t_{\text{Beo}} = \dfrac{\Delta t_{\text{Rakete}}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \approx 7,09\,\text{Jahre}$

c) Längenkontraktion:

Längen parallel zur Bewegungsrichtung erscheinen aus Sicht des Beobachters verkürzt. An den anderen Längen ändert sich nichts.

$\Delta x_{\text{Beo}} = \Delta x_{\text{Rakete}} \cdot \sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}} = \dfrac{\Delta x_{\text{Rakete}}}{7,09}$

$\Delta y_{\text{Beo}} = \Delta y_{\text{Rakete}}$

$\Delta z_{\text{Beo}} = \Delta z_{\text{Rakete}}$

d) Dichte: $\rho = \frac{m}{V}$.

Es zählen die Masse der bewegten Rakete (siehe a)) sowie die Länge, die der Beobachter misst (siehe c)), d.h. m und x_{Beo}.

$$\begin{aligned}\rho &= \frac{m}{V_{\text{Beo}}} = \frac{m}{x_{\text{Beo}} \cdot y \cdot z} = \frac{m}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \cdot \frac{1}{x_{\text{Beo}} \cdot \sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}} \cdot y \cdot z} \\ &= \frac{\rho_0}{1-\frac{v^2}{c^2}} \approx 50,25\,\rho_0\end{aligned}$$

A2: Relativistisches Elektron

$$E_{\text{ges}} = mc^2 = \frac{m_0}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \cdot c^2 = \frac{E_0}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = \frac{E_0}{\sqrt{1-(0,8)^2}} = \frac{E_0}{0,6} = 0{,}852\,\text{MeV}$$

$$E_{\text{kin}} = E_{\text{ges}} - E_0 = 0{,}341\,\text{MeV}$$

$$p = m \cdot v = \frac{m_0 \cdot v}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = \frac{9{,}1 \cdot 10^{-31}\,\text{kg} \cdot 0,8 \cdot 3 \cdot 10^8 \frac{\text{m}}{\text{s}}}{0,6} = 3{,}64 \cdot 10^{-22}\,\text{kg}\frac{\text{m}}{\text{s}} = 0,682\,\frac{\text{MeV}}{\text{c}}$$

A3: Protonenbeschleuniger

a) $m(v) = \dfrac{m_0}{\sqrt{1-\dfrac{v^2}{c^2}}} \stackrel{!}{=} 3\,m_0 \qquad \left|\begin{array}{l} :\ 3\,m_0 \\ \cdot\sqrt{1-\dfrac{v^2}{c^2}} \end{array}\right.$

$\sqrt{1-\dfrac{v^2}{c^2}} = \dfrac{1}{3}$

$1-\dfrac{v^2}{c^2} = \dfrac{1}{9}$

$\dfrac{8}{9} = \dfrac{v^2}{c^2} \quad \Rightarrow \quad v = \sqrt{\dfrac{8}{9}}\,c \approx 0,94\,c$

b) $E_0 = m_0 \cdot c^2 = 938\,\mathrm{MeV}$

$$E_{\text{kin}} = E - E_0 = E_0 \cdot \left(\underbrace{\frac{1}{\sqrt{1-\dfrac{v^2}{c^2}}}}_{\approx 3} - 1 \right) \approx 2\,E_0 \approx 1{,}88\,\mathrm{GeV}$$

c) $E_{\text{kin}} = e \cdot U$

↳ $U = \dfrac{E_{\text{kin}}}{e} = 1{,}88\,\mathrm{GV}$

Übungen zur Experimentalphysik B SS 2017

Prof. Dr. B. Pilawa
F. Wertz

12. Übungsblatt

Moderne Physik

1. Wenn monochromatisches Licht der Wellenlänge λ_1 auf eine Metalloberfläche trifft, so lassen sich die emittierten Photoelektronen durch eine Gegenspannung U_1 stoppen. Für Licht der Wellenlänge λ_2 ist dazu die Gegenspannung U_2 notwendig.
   a) Leiten Sie mit diesen Daten bei bekannter Vakuumlichtgeschwindigkeit c eine Formel für den Wert von h/e her.
   b) Wie groß ist die Austrittsarbeit ϕ des Metalls?
   c) Wie groß ist die maximale Wellenlänge des Lichts, bei der Photoelektronen emittiert werden?

2. Paarbildung
   a) Wie groß darf die Wellenlänge elektromagnetischer Strahlung höchstens sein, damit die Bildung von Elektron-Positron-Paaren möglich ist?
   b) Wie groß ist die elektrische Spannung U, die an eine Röntgenröhre mindestens angelegt werden muss, um Photonen zu erzeugen, deren Energie der Ruheenergie eines Elektron-Positron-Paares entspricht?
   c) Welche de-Broglie-Wellenlänge haben die mit der Spannung U beschleunigten Elektronen?

3. Ein Elektron, ein Proton und ein Photon haben jeweils die (de-Broglie-) Wellenlänge $\lambda = 0{,}2$ nm.
   a) Wie groß sind die Impulse der Teilchen?
   b) Wie groß sind ihre kinetischen Energien? Rechnen Sie beim Elektron und beim Proton nicht-relativistisch.
   c) Begründen Sie, warum die nicht-relativistische Betrachtung für das Elektron und das Proton in b) zulässig war.

4. Wie groß ist die Unschärfe der Energie von Photonen, die beim Zerfall eines angeregten Atomzustands der Lebensdauer 10^{-17} s emittiert werden?

5. Bohrsches Atommodell

a) Wie lauten im Bohrschen Atommodell die Bedingungen für die erlaubten Bahnen der Elektronen im Wasserstoffatom?

b) Berechnen Sie den Radius r_n der n-ten Bohrschen Bahn sowie die Geschwindigkeit v_n eines Elektrons auf dieser Bahn.

c) Berechnen Sie die Gesamtenergie eines Elektrons auf der n-ten Bohrschen Bahn.

(Original-Klausuraufgabe)

6. Ein H-Atom im Grundzustand (n = 1) absorbiere ein Photon und gehe dadurch in den Zustand mit n = 2 über.

a) Welcher Impuls wird bei der Absorption auf das H-Atom übertragen?

b) Welcher Anteil der Photonenenergie $h\nu$ wird bei der Absorption in kinetische Energie des H-Atoms umgesetzt?

c) Wie groß ist diese kinetische Energie im Vergleich zur mittleren thermischen Energie eines H_2-Moleküls im H_2-Gas bei T = 300 K?

7. ${}^{235}_{92}U$ geht mit einer Halbwertszeit $T_{1/2} = 7 \cdot 10^8$ Jahre durch α-Zerfall in den Folgekern Th über.

a) Wie groß sind Ordnungszahl und Massenzahl des Folgekerns?

b) Die kinetische Energie des emittierten α-Teilchens beträgt 4,7 MeV. Wie groß ist die Rückstoßenergie des Folgekerns?

c) Nach welcher Zeit ist die Aktivität $|dN/dt|$ auf 5% des ursprünglichen Wertes abgesunken?

(Original-Klausuraufgabe)

A1: Photoelektronen

a) $E_{\text{Photon}} = h \cdot \nu = \underbrace{e \cdot U}_{\substack{\text{elektr.}\\ \text{Energie}}} + \Phi$

Φ: Auslöseenergie; nur vom Material und nicht von der Frequenz abhängig, also in beiden Fällen gleich

$\Phi = h \cdot \nu - e \cdot U$

$c = \lambda \cdot \nu \quad \Rightarrow \quad \nu = \frac{c}{\lambda}$

$\Lsh\ h\,\frac{c}{\lambda_1} - eU_1 = h\,\frac{c}{\lambda_2} - eU_2 \quad |:e$

$\frac{h}{e}\,\frac{c}{\lambda_1} - U_1 = \frac{h}{e}\,\frac{c}{\lambda_2} - U_2$

$\frac{h}{e}\left(\frac{c}{\lambda_1} - \frac{c}{\lambda_2}\right) = U_1 - U_2 \quad |$ aufgelöst nach h/e:

$$\frac{h}{e} = \frac{U_1 - U_2}{c \cdot \left(\frac{1}{\lambda_1} - \frac{1}{\lambda_2}\right)}$$

b) $\Phi = h\nu_i - eU = h\frac{c}{\lambda_i} - eU \quad (i \in 1, 2)$

c) Energie der Photonen $\widehat{=}$ Auslöseenergie

$\Phi = h\,\frac{c}{\lambda_{\max}} \quad \Rightarrow \quad \lambda_{\max} = \frac{h \cdot c}{\Phi}$

A2: Paarbildung

a) $E_{\text{Photon}} = E_{e^+} + E_{e^-}$

$\Lsh\ h \cdot \nu = h \cdot \frac{c}{\lambda} = m_\text{e} \cdot c^2 + m_\text{e} \cdot c^2 = 2 \cdot m_\text{e} \cdot c^2$

Aufgelöst nach λ:

$\lambda = \frac{h \cdot c}{2 \cdot m_\text{e} \cdot c^2} = \frac{h}{2 \cdot m_\text{e} \cdot c} \approx 1{,}21 \cdot 10^{-12}\,\text{m} = 1{,}21\,\text{pm}$

mit $h = 6{,}63 \cdot 10^{-34}\,\text{J s}$

$m_\text{e} = 9{,}11 \cdot 10^{-31}\,\text{kg}$

$c = 3 \cdot 10^8\,\frac{\text{m}}{\text{s}}$

$e = 1{,}602 \cdot 10^{-19}\,\text{C}$

b) $2m_\text{e}c^2 = e \cdot U$

$\Lsh\ U = \frac{2m_\text{e} \cdot c^2}{e}$

$= 1{,}024 \cdot 10^6\,\text{V}$

$= 1024\,\text{kV}$ bzw. $1{,}024\,\text{MV}$

c) De-Broglie-Wellenlänge: $\lambda = \frac{h}{p}$

Wo bekommen wir jetzt den Impuls her? $\Rightarrow$ Energie-Impuls-Beziehung:

$E^2 - p^2c^2 = \underbrace{m^2 \cdot c^4}_{E_0^2}$; hier: $E^2 = \underbrace{2 \cdot E_0}_{\substack{\text{durch}\\\text{Beschleun.,}\\\text{siehe b)}}} + E_0 = 3E_0$ $\qquad$ E_0: Ruheenergie

$$p^2 = \frac{E^2 - E_0^2}{c^2} = \frac{(3 \cdot E_0)^2 - E_0^2}{c^2} = \frac{8E_0}{c^2} = \frac{8m_0^2c^4}{c^2} = 8m_0^2c^2$$

$\Rightarrow$ $p = \sqrt{p^2} = \sqrt{8}m_0c$

$$\lambda = \frac{h}{p} = \frac{h}{\sqrt{8}m_0 \cdot c} = 8{,}58 \cdot 10^{-13}\,\text{m}$$

A3: Quantenmechanische Teilchen

a) Anders als bei einer klassischen Betrachtung müssen wir den Impuls nur einmal ausrechnen, da die de-Broglie-Wellenlänge bei allen dreien gleich ist.

$$p = \frac{h}{\lambda} = \frac{6{,}63 \cdot 10^{-34}\,\text{J s}}{0{,}2 \cdot 10^{-9}\,\text{m}} = 3{,}315 \cdot 10^{-24}\,\text{kg}\,\frac{\text{m}}{\text{s}}$$

b) Nichtrelativistisch: $E_{\text{kin}} = \frac{1}{2}mv^2$

Quantenmechanisch: $E_{\text{kin}} = h \cdot \nu$

mit $p = m \cdot v \quad \Rightarrow \quad v = \frac{p}{m}$

und $c = \lambda \cdot \nu \quad \Rightarrow \quad \nu = \frac{c}{\lambda}$

$\Rightarrow$ $E_{\text{kin},e^-} = \frac{1}{2}\frac{p^2}{m_\text{e}} = 6{,}03 \cdot 10^{-18}\,\text{J}$

$E_{\text{kin},p^+} = \frac{1}{2}\frac{p^2}{m_\text{p}} = 3{,}29 \cdot 10^{-21}\,\text{J}$

$E_{\text{kin},\gamma} = h \cdot \frac{c}{\lambda} = 9{,}94 \cdot 10^{-16}\,\text{J}$

c) Geschwindigkeit der e^-: viel langsamer als Lichtgeschwindigkeit.
Bewegungsenergie daher kleiner als Ruheenergie:

$E_{\text{kin}} \ll E_0 = mc^2$

A4: Energieunschärfe

$$\Delta E \approx \frac{h}{\Delta t} = 6{,}63 \cdot 10^{-17}\,\text{J}$$

A5: Bohrsches Atommodell

a) • Gleichgewichtsbedingung: $F_Z = F_C$

$$\frac{mv_n^2}{r_n} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{e^2}{r_n^2}$$

- Quantisierungsbedingung:

  $m \cdot v_n \cdot r_n = n \cdot \hbar$ mit $\hbar = \dfrac{h}{2\pi}$

  Bedeutet: Drehimpuls kann nur Vielfaches von $\hbar$ sein.

b) Stelle Formeln aus a) nach r_n um:

$v_n = \dfrac{n \cdot \hbar}{m \cdot r_n}$; eingesetzt in die erste Formel:

$$\frac{m \cdot v_n^2}{r_n} = \frac{m \cdot n^2 \cdot \hbar^2}{m^2 \cdot r_n^3} \overset{\text{a)}}{=} \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{e^2}{r_n^2} \qquad | \cdot r_n^2$$

$$\frac{n^2 \cdot \hbar^2}{m \cdot r_n} = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0} \qquad \text{; aufgelöst nach } r_n\text{:}$$

$$r_n = \frac{4\pi\epsilon_0 n^2\hbar^2}{me^2} = n^2 \cdot 5{,}299 \cdot 10^{-11}\,\mathrm{m}$$
$$= n^2 \cdot 0{,}5299\,\text{Å}$$

Eingesetzt in die Formel vom Anfang:

$$v_n = \frac{n \cdot \hbar}{m \cdot r_n} = \frac{1}{n} \cdot 2{,}19 \cdot 10^6\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$$

c) $E_n = E_{\text{kin}} + E_{\text{pot}}$

$$\text{mit } \Delta E_{\text{pot}} = \int_a^b \vec{F}\,\mathrm{d}s = \int_\infty^{r_n} \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{e^2}{r^2}\,\mathrm{d}r = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0}\left[-\frac{1}{r}\right]_\infty^{r_n} = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{e^2}{r_n}$$

wird vom Unendlichen (Potential: 0) auf n-te Bahn gebracht

$$\begin{aligned}
\Rightarrow E_n &= \frac{1}{2}mv_n^2 - \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{e^2}{r_n} \\
&= \frac{1}{2}m\frac{n^2\hbar^2}{m^2r_n^2} - \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{e^2}{r_n} \\
&= \frac{1}{2}\frac{n^2\hbar^2}{m} \cdot \left(\frac{m^2e^4}{16\pi^2\epsilon_0^2n^4\hbar^4}\right) - \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{e^2 \cdot me^2}{4\pi\epsilon_0 n^2\hbar^2} \\
&= \frac{1}{2}\frac{me^4}{16\pi^2\epsilon_0^2n^2\hbar^2} - \frac{me^4}{16\pi^2\epsilon_0^2n^2\hbar^2} \\
&= -\frac{1}{2}\frac{1}{16\pi^2\epsilon_0^2}\frac{me^4}{\hbar^2} \cdot \frac{1}{n^2} \\
&= -\frac{1}{n^2} \cdot 2{,}18 \cdot 10^{-18}\,\mathrm{J} \text{ bzw. } -\frac{1}{n^2} \cdot 13{,}6\,\mathrm{eV}
\end{aligned}$$

A6: Photonische Anregung

a) Der Impuls eines Photons wird übertragen:

$$\Delta p = p_{\text{Photon}} = \frac{h}{\lambda} = \frac{h \cdot \nu}{c} = \frac{\Delta E}{c} \;\}\text{ siehe 5c)}$$

$$= \frac{1}{c} R \cdot \left(\frac{1}{1^2} - \frac{1}{2^2}\right) \cdot 2{,}18 \cdot 10^{-18}\,\text{J}$$
$$= \frac{3R}{4c} \cdot 2{,}18 \cdot 10^{-18}\,\text{J}$$
$$= \frac{10{,}2\,\text{eV}}{c} = \frac{2{,}18\,\text{J}}{c}$$

b) $E_{\text{kin}} = \frac{1}{2}\, m \cdot v^2 = \frac{1}{2}\, m \cdot \frac{p^2}{m^2} = \frac{1}{2}\, \frac{p^2}{m} \quad | \, p = \frac{h}{\lambda}$

$$= \frac{1}{2}\, \frac{h^2}{\lambda^2 \cdot m} \quad | \, \lambda = \frac{c}{\nu}$$
$$= \frac{1}{2}\, \frac{h^2 \cdot \nu^2}{m \cdot c^2}$$

$\frac{E_{\text{kin}}}{h\nu} = \frac{1}{2}\, \frac{h^2 \nu^2}{m \cdot c^2 \cdot h \cdot \nu} = \frac{1}{2}\, \frac{h\nu}{mc^2} = \frac{3}{8}\, \frac{R}{mc^2} \leftarrow$ in J umrechnen!

$$= 5{,}44 \cdot 10^{-9}$$

c) H_2-Molekül (zweiatomig):

Anzahl Freiheitsgrade $f = 5$ (2 durch Drehung, 3 durch Translation)

$E_{\text{therm}} = \frac{5}{2} \cdot k_{\text{B}} \cdot T \quad$ mit $k_{\text{B}} = 1{,}38 \cdot 10^{-23}\,\frac{\text{J}}{\text{K}}$

$\frac{E_{\text{kin}}}{E_{\text{therm}}} = \frac{1}{2}\, \frac{h^2 \cdot \nu^2}{m \cdot c^2} \cdot \frac{2}{5}\, \frac{1}{k_{\text{B}} \cdot T} \quad |$ mit $h \cdot \nu = \Delta E$

$$= \frac{1}{5 \cdot m \cdot c^2 \cdot k_{\text{B}} \cdot T} \cdot \left(\frac{3}{4} R_y\right)^2$$
$$= 8{,}59 \cdot 10^{-7}$$

A7: Alpha-Zerfall

a) α-Zerfall: Heliumkern $\left({}^{4}_{2}\text{He}^{2+}\right)$ spaltet sich ab.

$${}^{235}_{92}\text{U} \longrightarrow {}^{231}_{90}\text{Th} + {}^{4}_{2}\text{He}$$

↳ Ordnungszahl: $Z = 90$

Massenzahl: $A = 231$

b) Impulserhaltung:

$m_\alpha \cdot v_\alpha = m_{\text{Th}} \cdot v_{\text{Th}} \quad \Rightarrow \quad v_{\text{Th}} = \frac{m_\alpha \cdot v_\alpha}{m_{\text{Th}}}$

$E_{\text{kin,Th}} = \frac{1}{2}\, m_{\text{Th}} \cdot v_{\text{Th}}^2 = \frac{1}{2}\, m_{\text{Th}} \cdot \left(\frac{m_\alpha \cdot v_\alpha}{m_{\text{Th}}}\right)^2 = \frac{m_\alpha}{m_{\text{Th}}}\, E_{\text{kin},\alpha}$

$$= \frac{4}{231} \cdot 4{,}7\,\text{MeV} = 81\,385\,\text{eV} \approx 0{,}081\,\text{MeV}$$

c) Zerfallsgesetz: $N(t) = N_0 \cdot e^{-\lambda \cdot t}$

N_0: Anzahl Atome.

$\lambda = \frac{1}{\tau}$ (τ: Zerfallszeit; $T_{1/2} = \frac{\ln(2)}{\lambda}$: Halbwertszeit)

Aktivität: $\frac{\mathrm{d}N}{\mathrm{d}t} = -\lambda \cdot N(t) = -\lambda \cdot N_0 \cdot e^{-\lambda \cdot t}$

$\frac{\mathrm{d}N}{\mathrm{d}t}(t)$ soll 5 % von $\frac{\mathrm{d}N}{\mathrm{d}t}(0)$ betragen; wie groß ist dann t?

$$\frac{\frac{\mathrm{d}N}{\mathrm{d}t}(t)}{\frac{\mathrm{d}N}{\mathrm{d}t}(0)} = \frac{-\lambda \cdot N_0 \cdot e^{-\lambda \cdot t}}{-\lambda \cdot N_0 \cdot \underbrace{e^0}_{1}} = e^{-\lambda \cdot t} \overset{!}{=} 0,05$$

Halbwertszeit: $T_{1/2} = \frac{\ln(2)}{\lambda} \quad \Rightarrow \quad \lambda = \frac{\ln(2)}{7 \cdot 10^8 \mathrm{yr}}$

$\Rightarrow \; -\lambda \cdot t \overset{!}{=} \ln(0,05)$

$$t = -\frac{\ln(0,05)}{\lambda} = -\frac{\ln(0,05)}{\ln(2)} \cdot 7 \cdot 10^8 \mathrm{yr} = 3{,}03 \cdot 10^9 \mathrm{yr}$$