INTÉGRALES DE LEBESGUE : LES GRANDS THÉORÈMES

CHOUKHANTRI IKRAM

EL FOUTAYENI YOUSSEF ET IDMBAREK ASMAA

18-06-2022

Table des matières

Remerciement

La réalisation de ce projet de fin d'étude n'a été possible que grâce au effort de plusieurs personnes à qui je voudrai témoigner toute ma gratitude.

Tout d'abord je vais commencer par adresser toute ma reconnaissance à monsieur **El Foutayeni Youssef** et madame **Idmbarek Asmaa** pour leurs patiences, leurs disponibilités et surtout leurs judicieux conseils, qui ont contribué à alimenter ma réflexion et m'ont aidé a accomplir ce modeste projet.

Je désire aussi remercier mes parents, qui m'ont fourni les outils nécessaires à la réussite de ce projet.

Enfin, je tiens à remercier les menbres du jury pour leur préscence et j'espère être à la hauteur en réalisant un bon travail.

INTRODUCTION

H. Lebesgue est généralement considéré comme le père de la théorie moderne de l'intégration. Sa définition de fonction intégrable reste la plus satisfaisante à ce jour. On doit cependant également citer trois mathématiciens qui ont aidé Lebesgue à formuler son intégrale. Les deux premiers sont G. Peano et C. Jordan : G. Peano a défini le premier les notions de mesure intérieure et extérieure, tandis que C. Jordan est le premier à intégrer sur des ensembles distincts d'intervalles, appelés ensembles Jordan-mesurables. Le troisième est le mathématicien E. Borel, qui définit les notions de tribus (boréliennes) et de mesures de Borel. C'est la première apparition de mesures σ-finie sur un espace mesurable (et non une algèbre).
Pourquoi H. Lebesgue a-t-il eu besoin de toutes ces notions ? D'où viennent les notions de tribus, de mesure extérieure ?
Une réponse est la résolution du problème de Lebesgue, que nous aborderons rapidement. Nous discuterons ensuite brièvement des différences fondamentales entre intégrale de Riemann et intégrale de Lebesgue, avant d'aborder le domaine des probabilités. Le cours sera ensuite divisé en deux grandes parties : la théorie de la mesure, théorie abstraite qui sera ensuite appliquée à une nouvelle théorie de : l'intégrale de Lebesgue.
Commençons par le problème de Lebesgue qui a pour objectif le suivant :
tenter de généraliser la notion de longueur (aire, volume,...) à une famille de

parties plus grandes que les intervalles (pavés). Plus précisément, il cherche une fonction

$$\lambda : \mathfrak{P}\left(\mathbb{R}^n\right) \longrightarrow [0, +\infty]$$

vérifiant les 3 propriétés suivantes :

- invariance par translation

$$\forall \vec{v} \in \mathbb{R}^n, \lambda(A + \vec{v}) = \lambda(A)$$

- σ-additivité

$$\lambda\left(\bigcup_{i\in I} A_i\right) = \sum_{i\in I} \lambda\left(A_i\right), I \text{ dénombrable, } A_i \text{ disjoints}$$

- normalisation

$$\lambda\left([0,1]^n\right) = 1$$

En 1905 (Vitali) : le problème de Lebesgue n'a pas de solution : il faut affaiblir les hypothèses. Deux solutions sont apportées. Elles conduisent à deux notions différentes de mesure :
- On demande seulement la σ-sous-additivité

$$\lambda\left(\bigcup_{i\in I} A_i\right) \leq \sum_{i\in I} \lambda\left(A_i\right), I \text{ dénombrable}$$

Une solution unique appelée mesure extérieure.
- On travaille sur un sous-ensemble $\mathcal{B}$ de $\mathfrak{P}\left(\mathbb{R}^n\right)$: Une solution unique sur la tribu des boréliens appelée mesure de Borel ou mesure de Lebesgue (cette dernière étant en fait la mesure sur la tribu complétée).

Nous aborderons maintenant la différence entre les intégrales de Riemann et les intégrales de Lebesgue.
Concernant l'intégration, l'idée de Lebesgue est la suivante : plutôt que de

définir les fonctions horizontalement par $f(t)$, il définit les fonctions verticalement par $f^{-1}(x)$. L'intégrale est alors une somme sur les valeurs et non sur le support.

$$\sum_{i \in [1,n]} f(i) \qquad \text{Riemann discret contre}$$

$$\sum_{x \in \mathbb{R}} x \cdot \operatorname{Card}\left(f^{-1}(x)\right) \qquad \text{Lebesgue discret}$$

Les principales différences entre les deux intégrales sont alors les suivantes :

Riemann		Lebesgue
mesure des intervalles $A \in \mathcal{A}$		mesure des boréliens $B \in \mathcal{B}$
$\Downarrow A \mapsto 1_A$		$\Downarrow B \mapsto 1_B$
$\int$ fonctions en escalier		$\int$ fonctions étagées
$\downarrow$ *limite uniforme*		$\downarrow$ *limite simple dominée*
$\int$ fonctions réglées (≥ 0)		$\int$ fonctions mesurables (≥ 0)

Comparativement aux intégrales de Riemann, l'inversion de la limite avec une intégrale est possible lorsqu'on intègre au sens de Lebesgue par le biais des théorèmes de convergence qui représentent l'objectif essentiel de ce rapport. En effet, nous aborderons non seulement les théorèmes d'inversion de la limite et l'intégrale mais aussi les théorèmes fondamentaux des intégrales dépendant d'un paramètre.

Chapitre 1

Tribus (σ-algèbre) et mesures

1.1 Algèbre et σ-algèbre

On considère dans la suite X un ensemble fixé (des exemples typiques auxquels penser sont $X = \mathbb{N}$ et $X = \mathbb{R}$).

Définition 1. *(Algèbre)*
Une famille $\mathcal{A}$ de sous-ensembles de X est une algèbre si :

1. *$X \in \mathcal{A}$;*
2. *$\mathcal{A}$ est stable par complémentaire : si $A \in \mathcal{A}$ alors $A^c \in \mathcal{A}$;*
3. *$\mathcal{A}$ est stable par réunion (finie) : si $A, B \in \mathcal{A}$ alors $A \cup B \in \mathcal{A}$.*

Remarque 1.

— *Nécessairement, l'ensemble vide $\emptyset \in \mathcal{A}$ puisque $\emptyset = X^c$.*

— *On peut remplacer $X \in \mathcal{A}$ par $\mathcal{A}$ non vide car si $E \in \mathcal{A}$, on a aussi $E^c \in \mathcal{A}$ et $X = E \cup E^c \in \mathcal{A}$.*

— *Une algèbre* $\mathcal{A}$ *est stable par intersection : si* $A, B \in \mathcal{A}$ *alors* $A \cap B \in \mathcal{A}$ *(un ensemble vérifiant une telle propriété est appelée* π*-système).*

— *Par une récurrence immédiate, une algèbre* $\mathcal{A}$ *est stable par intersection finie et par union finie.*

— *Une algèbre* $\mathcal{A}$ *est stable par différence (ensembliste) : si* $A, B \in \mathcal{A}$ *alors* $A \backslash B \in \mathcal{A}$*.*

Exemple 1.

- $\mathcal{A} = \{\emptyset, X\}$,
- $\mathcal{P}(X)$,
- $A \subset X$ *:* A *fini ou* $X \backslash A$ *fini ,*

sont des algèbres de X*.*

Définition 2. *(* σ*-algèbre, tribu)*

Une famille $\mathcal{A}$ *de sous-ensembles de* X *est une tribu ou une* σ*-algèbre si*

1. $X \in \mathcal{A}$ *;*
2. $\mathcal{A}$ *est stable par complémentaire : si* $A \in \mathcal{A}$ *alors* $A^c \in \mathcal{A}$ *;*
3. $\mathcal{A}$ *est stable par réunion dénombrable : si pour tout* $n \geq 1, A_n \in \mathcal{A}$ *alors* $\bigcup_{n \geq 1} A_n \in \mathcal{A}$*.*

Conséquence 1.

Pour une σ*-algèbre* $\mathcal{A}$ *:*

— *l'ensemble vide* $\emptyset \in \mathcal{A}$ *;*

— *une* σ*-algèbre est une algèbre ;*

— $\mathcal{A}$ *est stable par intersection dénombrable : si pour tout* $n \geq 1, A_n \in \mathcal{A}$*, alors* $\bigcap_{n \geq 1} A_n \in \mathcal{A}$ *;*

— *particulier,* $A \cap B \in \mathcal{A}$ *et* $A \cup B \in \mathcal{A}$ *quand* A *et* B *sont dans* $\mathcal{A}$ *;*

— *si* $A, B \in \mathcal{A}$ *alors* $A \backslash B \in \mathcal{A}$.

Exemple 2.

- $\{\emptyset, X\}$ *(la tribu grossière),*
- $\mathcal{P}(X)$ *(la tribu totale),*
- *Famille d'observables* $\mathcal{F}$ *en probabilités sont des* σ*-algèbres.*

Définition 3. *(Espace mesurable)*

Un ensemble muni d'une tribu $(X, \mathcal{A})$ *est appelé un espace mesurable.*

Les ensembles $A \in \mathcal{A}$ *s'appellent aussi les (ensembles) mesurables.*

Proposition 1.

Une intersection quelconque de tribus est une tribu.

Démonstration :

Soit $\mathcal{A}_i, i \in I$, *des tribus.*

On montre que $\mathcal{A} = \bigcap_{i \in I} \mathcal{A}_i$ *l'est une aussi.*

- D'abord $X \in \mathcal{A}_i$ *pour tout* $i \in I$ *donc* $X \in \bigcap_{i \in I} \mathcal{A}_i = \mathcal{A}$.

- Soit $A \in \mathcal{A}$ *alors pour tout* $i \in I, A \in \mathcal{A}_i$, *stable par complémentaire donne* $A^c \in \mathcal{A}_i$ *pour chaque* $i \in I$. *Mais alors,* $A^c \in \mathcal{A} = \bigcap_{i \in I} \mathcal{A}_i$. *La famille* $\mathcal{A}$ *est donc stable par complémentaire.*

- Soit pour $j \geq 1, A_j \in \mathcal{A} = \bigcap_{i \in I} \mathcal{A}_i$. *Pour chaque* $i \in I, A_j \in \mathcal{A}_i$ *donc* $\bigcup_{j \geq 1} A_j \in \mathcal{A}_i$ *car* $\mathcal{A}_i$ *est une tribu. Finalement,* $\bigcup_{j \geq 1} A_j \in \bigcap_{i \in I} \mathcal{A}_i = \mathcal{A}$, *qui est stable par réunion dénombrable.*

La famille $\mathcal{A}$ *satisfait tous les axiomes caractéristiques d'une tribu, elle est donc une.*

Définition 4. *(Tribu engendrée)*
Soit $\mathcal{M}$ une famille de sous-ensemble de X ($\mathcal{M} \subset \mathcal{P}(X)$).
On note $\sigma(\mathcal{M})$ la plus petite tribu de X (pour l'inclusion) contenant $\mathcal{M}$. On l'appelle la tribu engendrée par $\mathcal{M}$.

Proposition 2.
La tribu engendrée par une famille $\mathcal{M}$ est donnée par

$$\sigma(\mathcal{M}) = \bigcap_{\mathcal{A} \text{ tribu contenant } \mathcal{M}} \mathcal{A}.$$

Démonstration :
Notons $\mathcal{B} = \bigcap_{\mathcal{A} \text{ tribu contenant } \mathcal{M}} \mathcal{A}$
D'après la proposition précédente $\mathcal{B}$ est une tribu et clairement elle contient $\mathcal{M}$, si bien qu'on a $\sigma(\mathcal{M}) \subset \mathcal{B}$ d'après la définition de $\sigma(\mathcal{M})$.
Puis $\sigma(\mathcal{M})$ est une tribu contenant $\mathcal{M}$ donc par définition de $\mathcal{B}$, intersection de telles tribus, on a $\mathcal{B} \subset \sigma(\mathcal{M})$.
Finalement, on a bien $\mathcal{B} = \sigma(\mathcal{M})$.

Exemple fondamental : Tribu borélienne
On considère un ensemble X muni d'une topologie $\mathcal{T} \subset \mathcal{P}(X)$. On rappelle qu'une **topologie** est une famille d'ensembles $\mathcal{T}$

1. contient X ;
2. stable par intersection finie ;
3. stable par réunion quelconque.

Cette définition est à comparer avec celle d'une tribu en (définition 2) Les ensembles de $\mathcal{T}$ sont appelés les ouverts de la topologie.

Définition 5. *(Tribu borélienne)*

La tribu engendrée par une topologie (c'est à dire engendrée par la famille $\mathcal{M} = \mathcal{T}$ des ouverts d'une topologie) est la tribu (ou σ-algèbre) borélienne, notée $\mathcal{B}(X)$. Les éléments de la tribu borélienne $\mathcal{B}(X)$ s'appellent les (ensembles) boréliens de X.

Il s'agit de la plus petite tribu contenant tous les ouverts de X.

Remarque 2.

La tribu borélienne $\mathcal{B}(X)$ de X contient :

- *les ouverts U_i ;*
- *les intersections $\bigcap_{i\in I} U_i$ d'ouverts (I dénombrable) ;*
- *les réunions d'intersection $\bigcup_{j\in J}\bigcap_{i\in I} U_i$ d'ouverts I (I,J dénombrable) ;*
- *en généralisant le procédé : les réunions d'intersections de réunions de .... d'ouverts*

$$\cdots \bigcap_{i\in I}\bigcup_{j\in J}\cdots\bigcap_{k\in K}\bigcup_{l\in L}\cdots\bigcap_{m\in M}\bigcup_{n\in N}\cdots U_n$$

avec des ensembles d'indexation $I, J, \ldots, K, L, \ldots, M, N, \ldots$ dénombrables.

Comme le processus ne s'arrête pas, on ne peut pas décrire tous les boréliens par des réunions d'intersections (etc) d'ouverts. Par contre, dans le cas de $X = \mathbb{R}$, on peut optimiser la famille qui engendre $\mathcal{B}(\mathbb{R})$, c'est à dire choisir une famille encore plus petite que celle des ouverts qui suffit pour retrouver toute la tribu borélienne $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ avec les opérations $\bigcup, \bigcap$, et les complémentaires.

Boréliens réels

Les boréliens jouent un rôle essentiel dans l'intégration (réelle). Dans cette section, on considère $X = \mathbb{R} =]-\infty, +\infty[$ muni de sa topologie usuelle (topologie de l'ordre qui coïncide avec la topologie engendrée par la distance usuelle $|\cdot|$).

On considère alors sur $\mathbb{R}$ la tribu borélienne $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ engendrée par les ouverts de sa topologie usuelle. On rappelle que les ouverts de $\mathbb{R}$ sont des réunions dénombrables d'intervalles ouverts $\bigcup_{n\geq 1}\left] a_n, b_n\right[$ (réunion finie ou dénombrable).

Typiquement, les boréliens de $\mathbb{R}$ sont :

- tout ouvert, tout fermé
- tout intervalle ouvert, fermé, semi-fermé, fini, infini ;
- tout singleton $\{x\}, x \in \mathbb{R}$;
- tout ensemble dénombrable $\{x_i : i \in I\}, I \subset \mathbb{N}$,

En effet, $]a, b\,[\in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ car est ouvert, $[a, b] = \bigcap_{n\geq 1}\left] a-1/n, b+1/n\right[$, $\left[a, b\right[= \bigcap_{n\geq 1}\left] a-1/n, b\right[$, $]\,a, b] = \bigcap_{n\geq 1}\left] a, b+1/n\right[$ sont dans $\mathcal{B}(\mathbb{R})$.

Puis $]-\infty, b] = (\bigcup_{n\leq |b| \text{ et } n\in\mathbb{Z}}]n-1, n]) \cup]n, b])$, $]-\infty, b[= \bigcup_{n\geq 1}]-\infty, b-1/n]$, $[a, +\infty] =]-\infty, a[^c$, $]a, +\infty[=]-\infty, a]^c$ sont aussi dans $\mathcal{B}(\mathbb{R})$.

Enfin, $\{x\} = \bigcap_{n\in\mathbb{N}}\left] x - \frac{1}{n}, x\right] \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$.

Un ensemble dénombrable est une union disjointe de singletons donc est dans $\mathcal{B}(\mathbb{R})$.

Proposition 3.

Les boréliens de $\mathbb{R}$ sont engendrés par

- *les ouverts ;*
- *les fermés ;*
- *les intervalles ouverts $]a, b[$;*
- *les intervalles fermés $[a, b]$;*
- *les intervalles semi-ouverts $[a, b[,]a, b]$;*
- *les demi-droites fermées $]-\infty, a]$ ou $[b, +\infty[$*

1.2 Mesure

Considérons un espace mesurable $(X, \mathcal{A})$.

Définition 6. *(Mesure)*
Une mesure μ sur $(X, \mathcal{A})$ est une application de $\mathcal{A} \to [0, +\infty]$ telle que :

1. $\mu(\emptyset) = 0$;
2. *Si $(A_n)_{n \geq 1}$ est une suite dénombrable d'ensembles de $\mathcal{A}$ deux à deux disjoints alors :*

$$\mu \left(\bigcup_{n \geq 1} A_n \right) = \sum_{n \geq 1} \mu(A_n) \quad (\sigma\text{-}\textit{additivité})$$

Définition 7. *(Espace mesuré)*
Le triplet $(X, \mathcal{A}, \mu)$ est appelé un espace mesuré (espace mesurable + mesure).

Remarque 3. *(En pratique)*

- *Si l'espace X est discret, par exemple $\mathbb{N}$, la tribu totale $\mathcal{P}(X)$ est une bonne tribu à considérer.*
- *Si l'espace X est topologique, la tribu borélienne $\mathcal{B}(X)$ est une bonne tribu à considérer. Par exemple pour $\mathbb{R}$: $\mathcal{B}(\mathbb{R})$.*

Exemple 3.

- *Mesure de comptage (ou de dénombrement) sur $(X, \mathcal{P}(X))$:*

$$\eta(A) = \begin{cases} \textit{card } A & \textit{si } A \textit{ est fini} \\ +\infty & \textit{sinon.} \end{cases}$$

- *Mesure de Dirac sur* $(X, \mathcal{P}(X))$ *soit* $a \in X$,

$$\delta_a(A) = \begin{cases} 1 & si\ a \in A \\ 0 & si\ a \notin A. \end{cases}$$

La mesure de Dirac δ_a *indique si un ensemble contient ou non le point* a.

Par exemple $\delta_0([-1,1]) = 1, \delta_0(]0,1]) = \delta_0(\mathbb{R}^*) = 0, \delta_2(\mathbb{N}) = 1$.

- *Exemple fondamental : la mesure de Lebesgue*

Définition 8. *(Mesure de Lebesgue)*
Il existe une unique mesure λ *sur* $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ *telle que :*

1. *pour tout intervalle* $[a,b]$ *borné, on a* : $\lambda([a,b]) = \lambda(]a,b[) = b - a$.
2. *invariance par translation : pour tout* $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$, $\lambda(A+x) = \lambda(A)$ *où* $A + x = \{a + x : a \in A\}$

La mesure de Lebesgue λ généralise la notion de longueur d'un intervalle à tous les boréliens $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$. Il aurait été vain de chercher à généraliser la longueur à une mesure qui mesure toutes les parties de $\mathbb{R}$ (c'est à dire une mesure sur tout $\mathcal{P}(\mathbb{R})$) car on montre qu'une telle généralisation sur $\mathcal{P}(\mathbb{R})$ contient une incohérence.
Il faut se contenter d'une généralisation sur la tribu borélienne $\mathcal{B}(\mathbb{R})$.

Remarque 4.
Dans le cadre probabiliste, on note $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ *plutôt que* $(X, \mathcal{A}, \mu)$.
Dans $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}), \Omega$ *est un ensemble (dit espace de probabilité),* $\mathcal{F}$ *une tribu appelée la famille des observables, et* $\mathbb{P}$ *une mesure appelée probabilité. c'est*

à dire une mesure de poids $1 : \mathbb{P}(\Omega) = 1$.

Définition 9.

Soit μ *une mesure sur* (X, A).

1. *On appelle poids de* μ *la quantité* $\mu(X)$.
2. *Si* $\mu(X) < +\infty$, *alors la mesure* μ *est dite finie.*
3. *Si* X *se décompose en* $X = \bigcup_{n \geq 1} X_n$ *avec* $\mu(X_n) < +\infty$ *alors la mesure est dite* σ*-finie.*
4. *Si* $\mu(X) = 1$, *alors la mesure* μ *est dite de probabilité.*
5. *La mesure* μ *est dite borélienne si* $\mathcal{A} = \mathcal{B}(X)$, *ie.* μ *est définie sur une tribu borélienne.*
6. *La mesure* μ *est dite de Borel si elle est borélienne et est finie sur tous les ensembles compacts.*

Exemple 4.

- *Sur* $\mathbb{R}$, *la mesure de Lebesgue* λ *est*

  - borélienne,

  - une mesure σ*-finie car*

  $$\mathbb{R} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} [-n, n] \text{ et } \lambda([-n, n]) = 2n;$$

  - une mesure de Borel car pour tout compact K, *il existe* n *tel que* $K \subset [-n, n]$ *et* $\lambda(K) \leq \lambda([-n, n]) = 2n$.

- *Une mesure de Dirac* δ_a *est une mesure de probabilité (dégénérée) car* $\delta_a(X) = 1$.

- $([0,1], \mathcal{B}([0,1]), \lambda)$ *est un espace de probabilité car* $\lambda([0,1]) = 1$.
- *Un exemple de mesure finie est la mesure de dénombrement sur un ensemble fini* X *puisque la mesure de* X *est* $\mathrm{card}(X)$ *qui est fini.*

1.3 Propriétés des mesures

Proposition 4.

1. *Croissance :*

   Une mesure μ *est une application croissante : si* $A, B \in \mathcal{A}$ *avec* $A \subset B$, *alors* $\mu(A) \leq \mu(B)$.

   En effet $A = B \cup (A \backslash B)$, *comme l'union est disjointe, par additivité, on a :*

   $$\mu(A) = \mu(B) + \mu(A \backslash B)$$

   et $\mu(A \backslash B) \geq 0$.

2. *Additivité :*

   Si $A, B \in \mathcal{A}$ *avec* $A \cap B = \emptyset$ *alors*

   $$\mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B).$$

3. *Différence propre :*

   Si $A, B \in \mathcal{A}, B \subset A$ *et* $\mu(A) < +\infty$, *alors*

   $$\mu(A \backslash B) = \mu(A) - \mu(B)$$

   En effet, cela vient de la décomposition $A = B \cup (A \backslash B)$, *union disjointe.*

4. *Croissance séquentielle :*

   Si $A_n \in \mathcal{A}$ *et* $A_n \subset A_{n+1}$ *pour* $n \geq 1$ *alors*

   $$\mu\left(\bigcup_{n \geq 1} A_n\right) = \lim_{n \to +\infty} \mu\left(A_n\right).$$

En effet, on note que $\bigcup_{k=1}^{n} A_k = A_n$.

Soit $C_n = A_n \backslash A_{n-1}, n \geq 1$, *(avec* $A_0 = \emptyset$*).*

On montre facilement que $\bigcup_{k=1}^{n} C_k = \bigcup_{k=1}^{n} A_k$ *: une inclusion vient de ce que* $C_k \subset A_k$ *pour tout* k*, l'autre de ce que si* $x \in \bigcup_{k=1}^{n} A_k$ *alors en notant* k *le plus petit entier tel que* $x \in A_k$ *alors on a* $x \in C_k$ *car* $x \notin A_{k-1}$ *et donc* $x \in \bigcup_{k=1}^{n} C_k$.

De plus les $C_k, k \geq 1$*, sont deux à deux disjoints : si* $x \in C_k$ *alors* $x \notin A_{k-1}$ *et donc* $x \notin C_l$ *pour* $l < k$.

Comme les C_k *sont disjoints, on a*

$$\begin{aligned}\lim_{n\to+\infty} \mu(A_n) &= \lim_{n\to+\infty} \mu\left(\bigcup_{k=1}^{n} A_k\right) = \lim_{n\to+\infty} \mu\left(\bigcup_{k=1}^{n} C_k\right) = \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} \mu(C_k) \quad \textit{(additivité)} \\ &= \sum_{k=1}^{+\infty} \mu(C_k) = \mu\left(\bigcup_{k=1}^{+\infty} C_k\right)\end{aligned}$$

5. *Décroissance séquentielle :*

   Si $A_n \in \mathcal{A}$ *et* $A_n \supset A_{n+1}, n \geq 1$ *et si* $\mu(A_1) < +\infty$ *alors*

$$\mu\left(\bigcap_{n=1}^{+\infty} A_n\right) = \lim_{n\to+\infty} \mu(A_n)$$

   Comme $\mu(A_1) < +\infty$*, on peut passer aux complémentaires dans* A_1 *: en notant* $B_i = A_1 \backslash A_i$*. la suite* $B_i, i \geq 1$*, est croissante et d'après le cas précédent*

$$\lim_{n\to+\infty} \mu(B_n) = \mu\left(\bigcup_{n\geq 1} B_n\right)$$

   Comme $\mu(A_1) < +\infty$*, on a* $\mu(B_n) = \mu(A_1) - \mu(A_n)$ *et* $\bigcup_{n\geq 1} B_n =$

$A_1 \backslash \bigcap_{n\geq 1} A_n$ *de mesure* $\mu\left(\bigcup_{n>1} B_n\right) = \mu(A_1) - \mu\left(\bigcap_{n>1} A_n\right)$, *on a donc*

$$\lim_{n\to+\infty} (\mu(A_1) - \mu(A_n)) = \mu(A_1) - \mu\left(\bigcap_{n\geq 1} A_n\right)$$

et il suffit de retrancher $\mu(A_1) < +\infty$ *(et changer le signe) pour conclure.*

Contre-exemple pour la décroissance sans hypothèse de finitude sur la mesure : sur $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$, *soit* $A_n =]\, n, +\infty\, [$, *on a* $\bigcap_{n=1}^{+\infty} A_n = \emptyset$ *de mesure nulle tandis que* $\lim_{n\to+\infty} \lambda(A_n) = +\infty$.

6. μ *est sous-additive :*

   Si $A_n \in \mathcal{A}$ *pour* $n \geq 1$, *alors*

$$\mu\left(\bigcup_{n\geq 1} A_n\right) \leq \sum_{n\geq 1} \mu(A_n) \qquad \textit{(sous-additivité).}$$

   En effet, il suffit de prouver $\mu(A \cup B) \leq \mu(A) + \mu(B)$, *la preuve se complète ensuite par récurrence pour avoir* $\mu\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) \leq \sum_{i=1}^{n} \mu(A_i)$ *puis par croissance séquentielle*

$$\mu\left(\bigcup_{n\geq 1} A_n\right) = \lim_{m\to+\infty} \mu\left(\bigcup_{n=1}^{m} A_n\right) \leq \lim_{m\to+\infty} \sum_{n=1}^{m} \mu(A_n) = \sum_{n\geq 1} \mu(A_n).$$

   On utilise la décomposition $A \cup B = (A\backslash B) \cup (A \cap B) \cup (B\backslash A)$ *en ensembles disjoints, par additivité :*

$$\begin{aligned} \mu(A \cup B) &= \mu(A\backslash B) + \mu(A \cap B) + \mu(B\backslash A) \\ &= \mu(A) + \mu(B\backslash A) \\ &\leq \mu(A) + \mu(B) \end{aligned}$$

Définition 10. *(Négligeable, presque partout)*

1. *Un ensemble N de $(X, \mathcal{A}, \mu)$ est dit μ-négligeable s'il existe $A \in \mathcal{A}$ tel que $N \subset A$ et $\mu(A) = 0$.*

2. *On dit qu'une propriété est vraie μ-presque partout (μ-p.p.) sur $(X, \mathcal{A}, \mu)$ si l'ensemble des $x \in X$ pour lesquelles elle n'est pas vraie est négligeable. S'il n'y a pas d'ambiguïté sur la mesure μ dont on se sert, on écrit seulement presque partout et on note p.p.*

Chapitre 2

Mesure de Lebesgue

2.1 Construction de la mesure de Lebesgue

On considère l'ensemble $X = \mathbb{R}$ et le semi-anneau des intervalles bornés semi-ouverts

$$\mathcal{P} = \{]a, b] : -\infty < a \leq b < +\infty\}.$$

On considère alors la fonction d'ensemble ℓ définie sur le semi-anneau $\mathcal{R}$ par $\ell(]a, b]) = b - a$. Pour appliquer la stratégie d'extension des sections nous montrons que la fonction d'ensemble ℓ est σ-additive donc est une mesure sur $\mathcal{R}$. On en déduira une unique extension λ sur la famille $\mathcal{S}(\mathcal{R})$ qui coïncide avec la tribu borélienne $\mathcal{B}(\mathbb{R})$:

Proposition 5.

On a $\mathcal{B}(\mathbb{R}) = \mathcal{S}(\mathcal{P})$

Démonstration :

Rappelons que $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ est définie (définition 5) et d'après la proposition 4, $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ contient les intervalles $]a, b]$ donc $\mathcal{P} \subset \mathcal{B}(\mathbb{R})$. De plus $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ est un σ-anneau *donc* $\mathcal{S}(\mathcal{R}) \subset \mathcal{B}(\mathbb{R})$.

Comme $\mathbb{R} = \bigcup_{n \in Z} \left] -n, n \right] \in \mathcal{S}(\mathcal{P})$,*donc* $\mathcal{S}(\mathcal{P})$ *est une* σ*-algèbre. Cette* σ*-algèbre contient les unions dénombrables d'intervalles* $]a_i, b_i]$ *donc les ouverts de* $\mathbb{R}$*. Nécessairement, on a aussi* $\mathcal{B}(\mathbb{R}) \subset \mathcal{S}(\mathcal{P})$.

Définition 11.

La mesure λ *ainsi construite est la mesure de Lebesgue sur* $\mathcal{B}(\mathbb{R})$

Pour appliquer la stratégie de la Section on utilise les résultats préliminaires suivants :

Lemme 1.

Soit $E_0 \in \mathcal{P}$ *et* $(E_i)_{i \geq 1}$ *une suite d'intervalles disjoints de* $\mathcal{P}$ *tels que* $E_i \subset E_0$ *pour* $i \geq 1$*. Alors*

$$\sum_{i \geq 1} \ell(E_i) \leq \ell(E_0)$$

Démonstration :

Pour n *fixé, on voit facilement que*

$$\sum_{i=1}^{n} \ell(E_i) = \sum_{i=1}^{n} (b_i - a_i) \leq b_0 - a_0 = \ell(E_0).$$

Le résultat s'obtient en faisant $n \to +\infty$.

Lemme 2.

Si un intervalle fermé borné $F_0 = [a_0, b_0]$ *est contenu dans une union finie d'intervalles ouverts* $U_1 = (a_1, b_1), \ldots, U_n = (a_n, b_n)$ *alors*

$b_0 - a_0 \leq \sum_{i=1}^{n} (b_i - a_i)$.

Démonstration :

L'inégalité vient de manipulations algébriques élémentaires.

Lemme 3.

Soient $E_0, E_1, E_2, \ldots$ *des ensembles dans* $\mathcal{P}$ *tels que* $E_0 \subset \bigcup_{i=1}^{+\infty} E_i$.

Alors

$$\ell(E_0) \leq \sum_{i=1}^{+\infty} \ell(E_i)$$

Démonstration :

On note $E_i =]a_i, b_i]\,, i \geq 1$. *Soit* $0 < \varepsilon < b_0 - a_0$.

Comme par hypothèse $]a_0, b_0] \subset \bigcup_{i=1}^{+\infty}]a_i, b_i]$,

on a

$$[a_0 + \varepsilon, b_0] \subset \bigcup_{i=1}^{+\infty} \left]a_i, b_i + \varepsilon/2^i\right[.$$

D'après le théorème de Borel, le compact $[a_0 + \varepsilon, b_0]$ *est couvert par une union finie*

$$[a_0 + \varepsilon, b_0] \subset \bigcup_{i=1}^{n} \left]a_i, b_i + \varepsilon/2^i\right[.$$

D'après le lemme 2, on a alors

$$b_0 - a_0 - \varepsilon \leq \sum_{i=1}^{n} \left(b_i - a_i + \varepsilon/2^i\right) \leq \sum_{i=1}^{n} (b_i - a_i) + \varepsilon.$$

Comme $\varepsilon > 0$ *est arbitraire, la preuve s'achève en faisant* $\varepsilon \searrow 0$.

Théorème 1. *(Mesure de Lebesgue)*

Il existe une unique mesure λ *sur la* σ*-algèbre* $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ *des boréliens telle que* $\lambda([a, b]) = b - a$ *pour tout réels* $a < b$.

De plus λ *est* σ*-finie et s'appelle la mesure de Lebesgue sur* $\mathcal{B}(\mathbb{R})$.

Démonstration :

On commence par définir ℓ sur $\mathcal{P}$ par $\ell(]a,b]) = b - a$.

Si les $E_i \in \mathcal{P}, i \geq 1$ sont disjoints et $E_0 = \bigcup_{i\geq 1} E_i \in \mathcal{P}$ alors d'après les Lemmes 1 et 3 ; $\ell\left(E_0\right) = \sum_{i\geq 1} \ell\left(E_i\right)$ et donc ℓ est bien une mesure sur $\mathcal{P}$.

Puisque ℓ a une unique extension σ-finie λ à $\mathcal{S}(\mathcal{P})$.

Enfin $\mathcal{S}(\mathcal{P}) = \mathcal{B}(\mathbb{R})$.

2.2 Propriétés de la mesure de Lebesgue

Proposition 6.

La mesure de Lesbesgue n'a pas d'atome, ie. il n'existe pas de $a \in \mathbb{R}$ tel que $\lambda(\{a\}) > 0$.

Démonstration :

En effet, pour tout $a \in \mathbb{R}$, on a $\lambda(]a - 1/n, a]) = 1/n$ et par continuité décroissante de λ, on a $\lambda(\{a\}) = \lim_{n\to+\infty} \lambda(]a - 1/n, a]) = 0$.

Par σ-additivité, on déduit facilement :

Proposition 7.

Tout ensemble dénombrable A est de mesure de Lebesgue $\lambda(A) = 0$.

Et on déduit de plus que les intervalles bornés sont de même mesure de Lebesgue qu'ils soient fermés, ouverts ou semi-ouverts :

$$\lambda([a,b]) = \lambda(]a,b]) = \lambda([a,b[)\lambda(]a,b[) = b - a.$$

Cela reste vrai pour les intervalles non bornés puisque leur mesure sont toute $+\infty$.

Proposition 8.

La mesure de Lebesgue est invariante par translation, ie. pour tout $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ *et* $\alpha \in \mathbb{R}, \lambda(A+\alpha) = \lambda(A)$. *De plus, cette propriété caractérise la mesure de Lebesgue si on rajoute* $\lambda([0,1]) = 1$.

Proposition 9.

La mesure de Lebesgue est invariante par symétrie : $\lambda(-A) = \lambda(A)$ *pour tout* $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$

Démonstration :

On définit $s(x) = -x$ *et on considère* λ_s *définie par* $\lambda_s(A) = \lambda\left(s^{-1}A\right)$. *A nouveau,* $s^{-1}A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ *ssi* $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ *ce qui assure que* $\lambda_s(A)$ *est bien défini. On montre facilement que* λ_s *est une mesure (cas particulier de mesure image. On a*

$$\lambda_s([a,b]) = \lambda\left(s^{-1}\right] a,b]\big) = \lambda([-b,-a[) = \lambda(]-b,-a]) = -a-(-b) = b-a.$$

Proposition 10.

Soit T *une application affine définie par* $Tx = \alpha x + \beta, \alpha \in \mathbb{R}^*, \beta \in \mathbb{R}$.
Si $E \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$, *on a* $\lambda(TE) = |\alpha|\lambda(E)$.

Démonstration : *On sait déjà que* TE *est borélien ssi* E *l'est. On observe d'abord que* $\lambda(TE) = |\alpha|\lambda(E)$ *pour tout* $E \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$. *En effet, pour cela, on définit deux mesures sur* $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ *en posant* $\nu_1(E) = \lambda(TE)$ *et* $\nu_2(E) = |\alpha|\lambda(E), E \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$. *Ces mesures* ν_1 *et* ν_2 *coïncident sur le semi-anneau* $\mathcal{R}$ *donc aussi sur* $\mathcal{B}(\mathbb{R})$.

Chapitre 3

Fonctions mesurables

Rappel (Images directe et réciproque)

Si $f : X \to Y$ est une application quelconque

— pour toute partie A de X, l'image directe de A par f est la partie de Y donnée par

$$f(A) = \{f(x) : x \in A\},$$

— pour toute partie B de Y, l'image réciproque de B par f est la partie de X donnée par

$$f^{-1}(B) = \{x \in X : f(x) \in B\}.$$

— Si $(A_i)_{i\in I}$ et $(B_j)_{j\in J}$ sont des parties de X et Y respectivement, on rappelle que le comportement de f vis à vis de $\cup, \cap$ et de ^{c}

$$f\left(\bigcup_{i\in I} A_i\right) = \bigcup_{i\in I} f\left(A_i\right) \quad ; \quad f\left(\bigcap_{i\in I} A_i\right) \subset \bigcap_{i\in I} f\left(A_i\right)$$

tandis que le comportement de f^{-1} est meilleur :

$$f^{-1}\left(\bigcup_{j\in J} B_j\right) = \bigcup_{j\in J} f^{-1}\left(B_j\right); \quad f^{-1}\left(\bigcap_{j\in J} B_j\right) = \bigcap_{j\in J} f^{-1}\left(B_j\right); \quad f^{-1}\left(B^c\right) = \left(f^{-1}(B)\right)^c.$$

Dans tout le chapitre, on considère un espace mesuré $(X, \mathcal{A}, \mu)$.

3.1 Mesurabilité de fonction

Définition 12. *(Fonction mesurable)*
Soient $(X, \mathcal{A}), (Y, \mathcal{B})$ *deux espaces munis de tribus. Une fonction* $f : X \to Y$ *est dite* $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$*-mesurable si et seulement si*

$$\forall B \in \mathcal{B}, f^{-1}(B) \in \mathcal{A}$$

.

Remarque 5.

— *Cette définition est à comparer avec la définition de la continuité : l'image réciproque d'un ouvert doit être ouverte.*

— *Quand* Y *est un espace topologique et que rien n'est précisé, on prendra la tribu borélienne* $\mathcal{B}(Y)$ *de* Y.

— *Dans le contexte probabiliste, les fonctions mesurables s'appellent les variables aléatoires ; dans ce cas, on note traditionnellement* $(X, \mathcal{A}, \mu) = (\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ *et une fonction* $X : (\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}) \to \mathbb{R}$ *mesurable s'appelle une variable aléatoire.*

Définition 13. *(Indicatrice)*
Une fonction indicatrice $\mathbb{1}_A$ *d'un ensemble* A *est la fonction définie par*

$$\mathbb{1}_A(x) = \begin{cases} 1 & si \quad x \in A, \\ 0 & si \quad x \notin A. \end{cases}$$

Cette fonction ne prend donc que deux valeurs 1 ou 0 selon qu'elle est évaluée sur A ou non.

On vérifie facilement les propriétés suivantes :

Proposition 11.
On a $A = B$ *ssi* $\mathbb{1}_A = \mathbb{1}_B$;
On a $\mathbb{1}_A \mathbb{1}_B = \mathbb{1}_{A\cap B}$,
$1 - \mathbb{1}_A = \mathbb{1}_{A^c}$;
si A *et* B *sont disjoints, on a* $\mathbb{1}_A + \mathbb{1}_B = \mathbb{1}_{A\cup B}$;
si $A \subset B$, *on a* $\mathbb{1}_A \leq \mathbb{1}_B$.

Proposition 12.
La fonction indicatrice $\mathbb{1}_A$ *de* A *est mesurable (en tant que fonction) de* $(X, \mathcal{A})$ *dans* $\mathbb{R}$ *ssi* A *est mesurable (en tant qu'ensemble).*
Démonstration :
On suppose $A \in \mathcal{A}$. *Soit* $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ *alors* $(\mathbb{1}_A)^{-1}(B) = \{x \in X : \mathbb{1}_A(x) \in B\}$ *et*

— *si 0 et* $1 \in B$ *alors* $(\mathbb{1}_A)^{-1}(B) = X \in \mathcal{A}$,
— *si* $1 \in B$ *mais* $0 \notin B$ *alors* $(\mathbb{1}_A)^{-1}(B) = A \in \mathcal{A}$,
— *si* $0 \in B$ *mais* $1 \notin B$ *alors* $(\mathbb{1}_A)^{-1}(B) = A^c \in \mathcal{A}$,
— *si 0 et* $1 \notin B$ *alors* $(\mathbb{1}_A)^{-1}(B) = \emptyset \in \mathcal{A}$,

Finalement on a pour tout $B \in \mathcal{A}, (\mathbb{1}_A)^{-1}(B) \in \mathcal{A}$: *la fonction* $\mathbb{1}_A$ *est mesurable.*
Réciproquement si $\mathbb{1}_A$ *est mesurable alors* $A = (\mathbb{1}_A)^{-1}(\{1\}) \in \mathcal{A}$.

Proposition 13.

Si $\mathcal{M}$ engendre la tribu $\mathcal{B}$ de Y, f est mesurable ssi

$$f^{-1}(B) \in \mathcal{A}$$

pour tout $B \in \mathcal{M}$

Démonstration :

En effet notons $\mathcal{C}$ l'ensemble des $B \in \mathcal{B}$ tels que $f^{-1}(B) \in \mathcal{A}$.

Alors $\mathcal{C}$ est une tribu de Y car

- $f^{-1}(Y) = X \in \mathcal{A}$ donc $Y \in \mathcal{C}$

- Si $B \in \mathcal{C}, f^{-1}(B^c) = \left(f^{-1}(B)\right)^c \in \mathcal{A}$ car $f^{-1}(B) \in \mathcal{A}$ et $\mathcal{A}$ est stable par complémentaire.

- Si $A_n, n \geq 1$, sont dans $\mathcal{C}$ alors $f^{-1}(A_n) \in \mathcal{A}$ d'où $f^{-1}\left(\bigcup_{n\geq 1} A_n\right) = \bigcup_{n\geq 1} f^{-1}(A_n) \in \mathcal{A}$.

Et donc $\bigcup_{n\geq 1} A_n \in \mathcal{C}$, qui est stable par réunion.

Finalement, $\mathcal{C}$ est une tribu puis par hypothèse $\mathcal{C}$ contient $\mathcal{M}$ qui engendre $\mathcal{B}$. Donc $\mathcal{B} \subset \mathcal{C}$ et on a en particulier pour tout $B \in \mathcal{B}, f^{-1}(B) \in \mathcal{A}$, c'est à dire f est mesurable.

Ainsi, quand $Y = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ (ou un espace topologique) muni de la tribu borélienne, f est mesurable

- ssi $\forall\, B \in \mathcal{B}(Y)$ alors $f^{-1}(B) \in \mathcal{A}$.
- ssi $\forall\, O$ ouvert, $f^{-1}(O) \in \mathcal{A}$
- ssi, pour tout $a \in \mathbb{R}, f^{-1}(]a, +\infty[) \in \mathcal{A}$ dans le cas $Y = \mathbb{R}$.

Corollaire 1.

Une fonction continue de $(X, \mathcal{T})$ dans $(Y, \mathcal{T}')$ est mesurable pour les tribus boréliennes $\mathcal{B}(X)$ et $\mathcal{B}(Y)$ associées à X et à Y.

On connait donc maintenant beaucoup de fonctions mesurables (pour les tribus boréliennes) : toutes les fonctions continues.

Démonstration :

En effet, comme les ouverts de Y engendrent $\mathcal{B}(Y)$, il suffit de voir que l'image réciproque $f^{-1}(O)$ d'un ouvert O de Y est dans $\mathcal{B}(X)$.

Or par continuité de f, $f^{-1}(O)$ est ouvert dans X donc borélien.

3.2 Propriétés des fonctions mesurables

La mesurabilité des fonctions est une propriété stable par toutes les opérations usuelles sur les fonctions :

Proposition 14. *(Composition 1)*

Si $f : (X, \mathcal{A}) \to (Y, \mathcal{B})$ et $g : (Y, \mathcal{B}) \to (Z, \mathcal{C})$ sont mesurables alors

$$g \circ f : (X, \mathcal{A}) \to (Z, \mathcal{C})$$

est mesurable.

Démonstration :

Soit $C \in \mathcal{C}, (g \circ f)^{-1}(C) = f^{-1}\left(g^{-1}(C)\right)$. Or par mesurabilité de g, $g^{-1}(C) \in \mathcal{B}$, puis par celle de $f, f^{-1}\left(g^{-1}(C)\right) \in \mathcal{A}$.

En particulier, on a :

Proposition 15. *(Composition 2)*

Si $f : (X, \mathcal{A}) \to Y$ espace topologique est mesurable et $g : Y \to Z$, espace topologique est continue alors

$$g \circ f : (X, \mathcal{A}) \to Z$$

est mesurable.

Démonstration :
Soit $C \in \mathcal{T}_Z, (g \circ f)^{-1}(C) = f^{-1}\left(g^{-1}(C)\right)$. Or par continuité de g. $g^{-1}(C) \in \mathcal{T}_Y$, puis par mesurabilité de $f, f^{-1}\left(g^{-1}(C)\right) \in \mathcal{A}$.

Exemple 5.

- *si $f : (X, \mathcal{A}) \to \mathbb{R}$ est mesurable alors $|f|, f^+, f^-$le sont. En effet, on peut appliquer la propriété 11 avec les applications continues*
$$\left\{\begin{array}{l} \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+ \\ x \to |x| \end{array}\right., \left\{\begin{array}{lll} \mathbb{R} & \to \mathbb{R}_+ & \\ x & \to & \max(x,0) \end{array}\right., \left\{\begin{array}{lll} \mathbb{R} & \to \mathbb{R}_+ & \\ z & \to & \min(-x,0) \end{array}\right..$$
- *si $f : (X, \mathcal{A}) \to \mathbb{C}$ est mesurable alors $|f|, \mathfrak{Im}(f), \mathfrak{Re}(f)$ le sont. En effet, on peut appliquer la propriété 11 avec les applications continues*
$$\left\{\begin{array}{l} \mathbb{C} \to \mathbb{R}_+ \\ z \mapsto |z| \end{array}\right., \left\{\begin{array}{lll} \mathbb{C} & \to & \mathbb{R}_+ \\ z & \mapsto & \mathfrak{Re}(z) \end{array}\right., \left\{\begin{array}{lll} \mathbb{C} & \to & \mathbb{R}_+ \\ z & \mapsto & \mathfrak{Im}(z) \end{array}\right..$$

Proposition 16. *(Couple)*
Soit $(X, \mathcal{A})$ un espace mesurable et $f : (X, \mathcal{A}) \to \mathbb{R}, g : (X, \mathcal{A}) \to \mathbb{R}$ sont mesurables, alors
$$h = (f, g) : (X, \mathcal{A}) \to \mathbb{R}^2$$
est mesurable.

Démonstration :
On munit $\mathbb{R}^2$ de la topologie produit pour laquelle les ouverts sont des produits d'ouverts $U \times V$. Soit donc $U \times V$ un ouvert produit de $\mathbb{R}^2$. D'après la propriété 9, (f, g) est mesurable ssi
$$(f, g)^{-1}(U \times V) \in \mathcal{A}$$

Or

$$\begin{aligned}(f,g)^{-1}(U\times V) &= \{x\in X : (f,g)(x)\in U\times V\}\\ &= \{x\in X : (f(x),g(x))\in U\times V\}\\ &= \{x\in X : f(x)\in U, g(x)\in V\}\\ &= \{x\in X : f(x)\in U\}\cap\{x : g(x)\in V\}\\ &= f^{-1}(U)\cap g^{-1}(V)\in\mathcal{A}\end{aligned}$$

car $f^{-1}(U)\in\mathcal{A}$ et $g^{-1}(V)\in\mathcal{A}$ par mesurabilité de f,g.

On en déduit si f et g sont mesurables, a est scalaire

- $af,\ f+g, f-g, f\times g, f/g$ (si $g(x)\neq 0,\forall x), \max(f,g), \min(f,g)$ sont mesurables.
- Toute combinaison linéaire de fonctions mesurables est mesurable.
- $f:(X,\mathcal{A})\to\mathbb{C}$, est mesurable ssi $\mathfrak{Re}(f)$ et $\mathfrak{Im}(f)$ le sont.
- $f:(X,\mathcal{A})\to\mathbb{R}$, est mesurable ssi $f^+=\max(f,0)$ et $f^-=\min(f,0)$ le sont.

3.3 Limite de fonctions mesurables

Topologie métrique sur $\overline{\mathbb{R}}$

On considère les ensembles $\overline{\mathbb{R}}=\mathbb{R}\cup\{+\infty,-\infty\}$ et $[0,+\infty]=[0,+\infty[\cup\{+\infty\}$. On définit une distance (et donc une topologie métrique associée à cette distance) sur ces ensembles : Soit ϕ une bijection de $\overline{\mathbb{R}}$ sur un compact (par exemple $\phi=\arctan$, bijection de $\overline{\mathbb{R}}$ sur $[-\pi/2,\pi/2]$). On pose

$$d(x,y)=|\phi(x)-\phi(y)|$$

avec $\arctan(\pm\infty)=\pm\pi/2$. Alors $(\overline{\mathbb{R}},d)$ et $([0,+\infty],d)$ sont métriques.

Les boréliens associés à ces ensembles (avec la topologie définie par la métrique indiquée) sont engendrés par $\{]a,+\infty], a \in \mathbb{R}\}$. On adopte les règles de calculs suivantes dans $[0,+\infty]$:

Proposition 17. *(Règles de calcul)*
Soient $a, b \in \mathbb{R}$, on a

$$\begin{aligned} a \times b = ab \quad & si \quad a, b \neq +\infty \\ a \times (+\infty) = +\infty \quad & si \quad a > 0 \\ 0 \times (+\infty) = 0 \quad & si \quad a = 0 \end{aligned}$$

Remarque 6.
- Ce produit n'est pas continu dans $[0,+\infty]$ en effet avec $a_n = n$ et $b_n = 1/n$ on a $a_n \to +\infty, b_n \to 0$ puis $a_n b_n = 1 \nrightarrow ab = +\infty \times 0 = 0$.
- La convention $0 \times (+\infty) = 0$ est naturelle malgré tout quand on pense à $0 \times (+\infty)$ comme le calcul de la surface de $\mathbb{R}$ de longueur $+\infty$ et de largeur 0 .

Liminf et limsup de fonctions

Pour une suite réelle $u = (u_n)_{n \geq 1}$, on définit ses limites supérieure et inférieure

$$\liminf_{n \to +\infty} u_n = \sup_{n \geq 1} \inf_{k \geq n} u_k,$$

$$\limsup_{n \to +\infty} u_n = \inf_{n \geq 1} \sup_{k \geq n} u_k.$$

Ce sont les plus petites et plus grandes valeurs d'adhérence de la suite u, elles existent toujours. On a toujours

$$\liminf_{n \to +\infty} u_n \leq \limsup_{n \to +\infty} u_n$$

et il y a égalité ssi la suite u converge ; de plus si tel est le cas

$$\lim_{n \to +\infty} u_n = \liminf_{n \to +\infty} u_n = \limsup_{n \to +\infty} u_n.$$

En plus, en changeant le signe, les limites inférieure et supérieure s'échangent :

$$\liminf_{n\to+\infty}(-u_n) = -\limsup_{n\to+\infty} u_n,$$
$$\limsup_{n\to+\infty}(-u_n) = -\liminf_{n\to+\infty} u_n$$

Proposition 18.

Soient $f_n : (X,\mathcal{A}) \to \overline{\mathbb{R}}, n \geq 1$, une suite de fonctions mesurables alors $\sup_{n\geq1} f_n$ et $\inf_{n\geq1} f_n$ sont mesurables.

Démonstration :

On le montre pour le sup, le raisonnement s'adapterait facilement à l'inf.

$$\begin{aligned}
(\sup_{n\geq1} f_n)^{-1}([a,+\infty]) &= \{x : (\sup_{n\geq1} f_n)(x) \in]a,+\infty]\} \\
&= \{x\in X : \sup_{n\geq1} f_n(x) \in]a,+\infty]\} \\
&= \{x\in X : \sup_{n\geq1} f_n(x) > a\} \\
&= \{x\in X : \exists n\geq1, f_n(x) > a\} \\
&= \bigcup_{n\geq1}\{x\in X : f_n(x) > a\} \\
&= \bigcup_{n\geq1} f_n(x)^{-1}(]a,+\infty[\in \mathcal{A}
\end{aligned}$$

car pour chaque $n \geq 1, f_n^{-1}(]a,+\infty[) \in \mathcal{A}$ (f_n mesurable) qui est stable par réunion.

Proposition 19.

Soit $(X,\mathcal{A})$ un espace mesurable, $f_n : (X,\mathcal{A}) \to \overline{\mathbb{R}}$ ou $[0,+\infty], n \geq 1$, des fonctions mesurables.

Alors $\limsup_n f_n$ et $\liminf f_n : (X,\mathcal{A}) \to \overline{\mathbb{R}}$ ou $[0,+\infty]$ sont mesurables.

Démonstration :

Pour limsup $\sup_n$, on note $g_k = \sup_{n \geq k} f_n(x)$.

D'après le résultat pour le sup, les fonctions $g_k, k \geq 1$, sont toutes mesurables. Puis

$$\limsup f_n = \inf_{k \geq 1} g_k$$

est mesurable car inf de fonctions mesurables.

Pour $\liminf f_n$ enfin, l'argument est analogue ou on utilise

$$\liminf_n f_n = -\limsup_n (-f_n) .$$

On en déduit que la mesurabilité se conserve même en passant à la limite :

Théorème 2.

Soit $(f_n)_{n \geq 1}$ une suite de fonctions mesurables sur $(X, \mathcal{A})$ dans un espace métrique (E, d). Si cette suite de fonctions converge simplement vers f (c'est à dire pour tout $x \in X, f(x) = \lim_{n \to +\infty} f_n(x)$) alors f est une fonction mesurable à valeurs dans E.

Démonstration :

D'après la proposition 9 , il suffit de montrer que si O est un ouvert de E alors $f^{-1}(O) \in \mathcal{A}$. Pour cela, on pose

$$O_r = \{x \in O : d(x, E \backslash O) > 1/r\}, \quad r \geq 1$$

Comme la distance d est continue et $E \backslash O$ est fermé, l'application $g(x) = d(x, E \backslash O)$ est continue et donc $O_r = g^{-1}(]1/r, +\infty[\ )$ est ouvert (continuité de g). L'ensemble O_r est donc borélien de E et

$$\bigcup_{r \geq 1} O_r = \{x \in O : d(x, E \backslash O) > 0\} = O$$

(noter que $d(x, E\backslash O) = 0$ ssi $x \in E\backslash O$ ie. $x \notin O$. On a

$$\begin{aligned}
f^{-1}(O) &= \{x \in X : f(x) \in O\} \\
&= \left\{x \in X : \lim_{n \to +\infty} f_n(x) \in O\right\} \\
&= \left\{x \in X : \lim_{n \to +\infty} f_n(x) \in \bigcup_{r \geq 1} O_r\right\} \\
&= \{x \in X : \exists r \geq 1, \exists m \geq 1, \forall n \geq m : f_n(x) \in O_r\} \\
&= \bigcup_{r,m \in \mathbb{N}^*} \bigcap_{n \geq m} f_n^{-1}(O_r)
\end{aligned}$$

est un ensemble mesurable de $\mathcal{A}$.

3.4 Fonctions étagées (simples)

On rappelle la notion de fonction indicatrice en définition 12. En particulier, l'indicatrice $\mathbb{1}_A$ est mesurable ssi A l'est (Proposition 12).

Définition 14. *(Fonction simple ou étagée)*
Une fonction $f : (X, \mathcal{A}) \to \mathbb{R}^+$ est dite étagée positive si c'est une combinaison linéaire finie à coefficients positifs de fonctions indicatrices $\mathbb{1}_{A_i}$ pour des ensembles mesurables A_i deux à deux disjoints (pour simplifier) :

$$f(x) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \mathbb{1}_{A_i}, \quad \alpha_i \in \mathbb{R}^+, \quad A_i \in \mathcal{A}, \quad n \geq 1$$

- Cela ressemble à une fonction en escalier mais c'est plus général car pour une fonction en escalier les ensembles A_i doivent être des intervalles de $\mathbb{R}$, alors qu'ici, il s'agit d'ensembles mesurables quelconques sur X quelconque. En fait quand $X = \mathbb{R}$, les fonctions en escalier sont des cas particuliers de fonctions étagées (avec des A_i égaux à des intervalles disjoints, plutôt qu'à des ensembles mesurables généraux).

- Une fonction étagée est mesurable car combinaison linéaire de fonctions indicatrices qui le sont clairement.
- Une fonction étagée prend un nombre fini de valeur : elle vaut α_i sur l'ensemble A_i.
- Si les $\alpha_i, 1 \leq i \leq n$, sont les valeurs possibles pour une fonction étagée f, alors avec $A_i = f^{-1}(\alpha_i)$, qui est mesurable par mesurabilité de f, on peut écrire

$$f = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \mathbb{1}_{f^{-1}(\alpha_i)} = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \mathbb{1}_{A_i}.$$

- Une combinaison linéaire de fonctions étagées est encore une fonction étagée.

Pour l'intégrale de Riemann, on définit une fonction Riemann intégrable quand elle est (uniformément) approchable par une fonction en escalier et l'intégrale se définit comme la limite de celles en escalier. Les fonctions étagées vont jouer un rôle analogue en théorie de la mesure pour l'intégrale de Lebesgue, mais les choses se passent mieux : toute fonction mesurable est limite de fonctions étagées.

Proposition 20. *(Approximation)*
Toute fonction mesurable f à valeurs dans $\mathbb{R}^d$ est limite simple de fonctions étagées. Si de plus f est réelle positive, la limite peut être choisie croissante.

Démonstration :
Soit d'abord f fonction mesurable réelle positive. On définit pour tout n et $k \geq 1$

$$A_{n,k} = \left\{ x \in X : \frac{k-1}{2^n} \leq f(x) < \frac{k}{2^n} \right\}, \quad 1 \leq k \leq n2^n$$

$$B_n = \{x \in X : f(x) \geq n\}$$

Les ensembles $A_{n,k} = f^{-1}\left([(k-1)/2^n, k/2^n[\right)$ et $B_n = f^{-1}([n, +\infty[$ sont des images réciproques par f, mesurable, d'intervalles. Ils sont donc dans $\mathcal{A}$. La suite

$$f_n(x) = \sum_{k=1}^{n2^n} \frac{k-1}{2^n} \mathbb{1}_{A_{n,k}}(x) + n\mathbb{1}_{B_n}(x)$$

converge en croissant vers $f(x)$.

En effet, comme

$$\left[\frac{k-1}{2^n}, \frac{k}{2^n}\right[\subset \left[\frac{2k-2}{2^{n+1}}, \frac{2k-1}{2^{n+1}}\right[\cup \left[\frac{2k-1}{2^{n+1}}, \frac{2k}{2^{n+1}}\right[$$

on a $A_{n,k} = A_{n+1,2k-1} \cup A_{n+1,2k}$.
Ainsi pour $f_n(x) = \dfrac{k-1}{2^n}$ on a soit $f_{n+1}(x) = \dfrac{2k-2}{2^{n+1}} = f_n(x)$ soit $f_{n+1}(x) = \dfrac{2k-1}{2^{n+1}} \geq f_n(x)$ donc en tout cas $f_{n+1}(x) \geq f_n(x)$.
Puis si $f(x) \geq n$ alors soit $f(x) \geq n+1$ et alors $f_{n+1}(x) = n+1 \geq f_n(x) = n$, soit $f(x)$ est dans

$$[n, n+1[= \bigcup_{k=2^{n+1}n+1}^{2^{n+1}(n+1)} \left[\frac{k-1}{2^{n+1}}, \frac{k}{2^{n+1}}\right[$$

Pour $k \in [2^{n+1}n+1, 2^{n+1}(n+1)]$, on a alors $f_{n+1}(x) = \dfrac{k-1}{2^{n+1}} \geq \dfrac{2^{n+1}n}{2^{n+1}} = n = f_n(x)$ et donc $f_{n+1}(x) \geq f_n(x)$

Pour la convergence : si $f(x) = +\infty$ alors on a clairement $f_n(x) = n \to +\infty$ soit $\lim\limits_{n\to+\infty} f_n(x) = f(x)$.
Tandis que si $f(x) < +\infty$ alors pour $n \geq [f(x)] + 1$, on a $f(x) \leq n$ et donc $f_n(x) = \dfrac{k-1}{2^n}$ pour $f(x) \in \left[\frac{k-1}{2^n}, \frac{k}{2^n}\right[$, ie. $|f(x) - f_n(x)| \leq 2^{-n}$. On a donc $\lim\limits_{n\to+\infty} f_n(x) = f(x)$.

Si f est réelle mais de signe quelconque, on écrit $f = f^+ - f^-$avec $f^+(x) = \max(f(x), 0)$, $f^-(x) = \max(-f(x), 0)$ et on approxime f^+et f^- comme précédemment. Si $f = (f_1, \dots, f_d)$ est à valeurs dans $\mathbb{R}^d$, on applique la stratégie précédente à chaque fonction coordonnée $f_i, 1 \leq i \leq d$.

Ce résultat va permettre de définir l'intégrale d'une fonction mesurable à partir de celle des fonctions étagées car toute fonction mesurable est limite de fonctions étagées croissantes.

Chapitre 4

Intégrales des fonctions mesurables positives

Dans toute la suite, on considère un espace mesure (X, A, µ).

4.1 Intégrale des fonctions positives

Définition 15.
Soit $f = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \mathbb{1}_{A_i}$ *une fonction étagée positive* $(\alpha_i \geq 0)$ *avec les* A_i *deux à deux disjoints, on définit l'intégrale de f par rapport à la mesure* μ *par*

$$\int f d\mu = \int_X f d\mu = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \mu\left(A_i\right).$$

Comme $f\mathbb{1}_E = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \mathbb{1}_{A_i \cap E}$ *est encore étagée, on définit l'intégrale sur* $E \in \mathcal{A}$ *par*

$$\int_E f d\mu = \int \left(f\mathbb{1}_E\right) d\mu \quad = \left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \mu\left(A_i \cap E\right)\right).$$

Remarque 7.

— L'intégrale de f étagée ne dépend pas de son écriture sous forme de combinaison linéaire de fonctions étagées, une autre écriture de f donne la même valeur à l'intégrale : cette définition a donc bien un sens.
- Par exemple

$$\int \left(2\mathbb{1}_A + 3\mathbb{1}_B + \frac{1}{2}\mathbb{1}_C\right) d\mu = 2\mu(A) + 3\mu(B) + \frac{1}{2}\mu(C)$$

- Noter en particulier que pour une fonction indicatrice :

$$\int \mathbb{1}_A d\mu = \mu(A), \quad \int_E \mathbb{1}_A d\mu = \mu(A \cap E).$$

Ce résultat est à la fois élémentaire et important : il fait le lien entre une mesure $\mu(A)$ et une intégrale $\int \mathbb{1}_A d\mu$, toute mesure d'un ensemble peut se voir comme une intégrale.

Définition 16. *(Intégrale)*
Soit $f : (X, \mathcal{A}, \mu) \to [0, +\infty]$ mesurable. On définit son intégrale comme le sup des intégrales de fonctions étagées majorées par f :

$$\int f d\mu = \int_X f d\mu = \sup\left(\int s\, d\mu : s \text{ étagée } \leq f\right).$$

De même pour $E \in \mathcal{A}$ de X, on définit son intégrale sur E par

$$\int_E f d\mu = \int (f\mathbb{1}_E)\, d\mu = \sup\left(\int_E s\, d\mu : s \text{ étagée } \leq f \text{ sur } E\right).$$

Définition 17. *(Intégrabilité)*
Une fonction mesurable positive est dite μ-intégrable si $\displaystyle\int f d\mu < +\infty$

Exemple 6.

- *On considère* $(X, \mathcal{A})$ *muni de la mesure* δ_a.

  Dans ce cas,
$$\int f d\delta_\alpha = f(a)$$
  En effet, si $f = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \mathbb{1}_{A_i}$ $\left(\text{avec } (A_i)_{1 \le i \le n}\right.$ *une partition de* X $\left.\right)$ *est étagée alors il existe un unique indice* $1 \le i_0 \le n$ *tel que* $a \in A_{i_0}$ *et*
$$\int f d\delta_a = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \, \delta_a (A_i) = \alpha_{i_0} \, \delta_a (A_{i_0}) = \alpha_{i_0} = f(a)$$
  car $f(a) = \alpha_{i_0} \, \mathbb{1}_{A_{i_0}}(a) = \alpha_{i_0}$.

  De façon générale,
$$\int f d\delta_a = \sup \left(\int s \, d\delta_a : s \text{ étagée } \le f \right) = \sup(s(a) : s \text{ étagée } \le f) = f(a).$$

- *On considère* $(X, \mathcal{A}, \mu) = (\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}), \eta)$ *où* η *est la mesure de dénombrement, alors si on se donne une suite* $u = (u_n)_{n \ge 1}$, *on peut l'écrire* $u = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n \mathbb{1}_{\{\mathrm{n}\}}$.

  En effet, $u(k) = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n \mathbb{1}_{\{n\}}(k) = u_k$ *car le seul terme non nul dans la somme est* $\mathbb{1}_{\{k\}}(k) = 1$.

  On a alors
$$\int_{\mathbb{N}} u \, d\eta = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_{\{n\}} u \, d\eta = \sum_{n=0}^{+\infty} u(n) \, \eta(\{n\}) = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n$$

Autrement dit une série se voit comme une intégrale par rapport à une mesure discrète : la mesure de dénombrement.

Une série positive converge ssi la suite associée est intégrable pour la mesure de dénombrement.

4.2 Propriétés de l'intégrale

On considère des fonctions mesurables positives f et g et des ensembles E, F mesurables :

- Croissance 1

  Si $f \leq g$ sur X, alors $\int f d\mu \leq \int g d\mu$.

  En effet si $f \leq g$ toute fonction étagée s majorée par f l'est aussi par g si bien que le sup qui définit $\int g d\mu$ est pris sur un ensemble plus grand que celui définissant $\int f d\mu$, il est donc plus grand :

  $$\int f d\mu = \sup\left(\int s d\mu : s \text{ étagée } \leq f\right) \leq \sup\left(\int s d\mu : s \text{ étagée } \leq g\right) = \int g d\mu$$

  car $\{s \text{ étagée } \leq f\} \subset \{s \text{ étagée } \leq g\}$.

- Croissance 2

  Si $E \subset F$ alors $\int_E f d\mu \leq \int_F f d\mu$.

  Comme $E \subset F$, ensembles mesurables, on a $\mathbb{1}_E \leq \mathbb{1}_F$. Puis comme f est une fonction positive, on a aussi $f\mathbb{1}_E \leq f\mathbb{1}_F$. Et donc par croissance de l'intégrale (premier point) $\int f\mathbb{1}_E d\mu \leq \int f\mathbb{1}_F d\mu$, c'est à dire pour f mesurable positive :

  $$E \subset F \Longrightarrow \int_E f d\mu \leq \int_F f d\mu$$

- Nullité 1

  Si $f(x) = 0$ pour $x \in E$ alors $\int_E f d\mu = 0$.

  En effet $\int_E f d\mu = \int f\mathbb{1}_E d\mu = \sup\left(\int s\, d\mu\right)$ où le sup est pris sur les fonctions étagées positives s majorées par $f\mathbb{1}_E$, ie. $s(x) \leq f(x)\mathbb{1}_E(x)$. Or sur E, f est nulle donc nécessairement, $s(x) = 0$ sur E et pour les fonctions s à considérer l'intégrale est $\int s\mathbb{1}_E d\mu = 0$, dont le sup ne peut manquer d'être aussi 0 .

- Nullité 2

  Si $\mu(E)=0$ alors $\int_E f d\mu=0$.

  En effet
$$\int_E f\,d\mu=\int f\mathbb{1}_E d\mu=\sup\left(\int s\,\mathbb{1}_E d\mu\right)$$
  où le sup est pris sur les fonctions étagées positives s majorées par $f\mathbb{1}_E$. Or pour une telle fonction $s=\sum_{i=1}^{n} a_i\mathbb{1}_{A_i}$, on a
$$\int s\mathbb{1}_E d\mu=\sum_{i=1}^{n} a_i\mu\left(A_i\cap E\right)=0$$
  car $\mu\left(A_i\cap E\right)\leq\mu(E)=0$. Finalement, on prend le sup sur 0 , ce qui donne 0 .

- Linéarité 1

  Si $c\geq 0$ alors $\int cf d\mu=c\int f d\mu$. C'est clair d'abord si $f=\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\mathbb{1}_{A_i}$ est une fonction étagée car alors cf l'est aussi et
$$\int cf d\mu=\sum_{i=1}^{n} c\alpha_i\mu\left(A_i\right)=c\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\mu\left(A_i\right)=c\int f d\mu.$$
  Puis si f est quelconque, s est une fonction étagée majorée par f ssi cs en est une majorée par cf. Donc l'ensemble des fonctions étagées majorées par cf est exactement $\{cs: s\text{ étagée }\leq f\}$
$$\begin{aligned}\int cf d\mu&=\sup\left(\int s' d\mu: s'\text{ étagée }\leq cf\right)\\&=\sup\left(\int s' d\mu: s'=cs, s\text{ étagée }\leq f\right)\\&=\sup\left(\int cs\,d\mu: s\text{ étagée }\leq f\right)\\&=\sup\left(c\int s\,d\mu: s\text{ étagée }\leq f\right)\\&=\mathrm{c}\sup\left(\int s d\mu: s\text{ étagée }\leq f\right)\\&=c\int f d\mu\end{aligned}$$

où on a utilisé le fait que pour une fonction étagée $\int csd\mu = c\int sd\mu$.

- Linéarité 2

$\int(f+g)d\mu = \int fd\mu + \int gd\mu$

(On le prouve d'abord pour des fonctions étagées pus on utilisera le théorème de convergence monotone pour généraliser aux fonctions positives et de signe quelconque. D'abord donc si f et g sont étagées :

$$f = \sum_{i=1}^{n} a_i \mathbb{1}_{A_i:} \quad g = \sum_{j=1}^{p} b_j \mathbb{1}_{B_j}$$

avec les A_i deux à deux disjoints et les B_j aussi. On suppose (sans restriction) que $\bigcup_{1\leq i\leq n} A_i = X$ et $\bigcup_{1\leq j\leq p} B_j = X$. On a donc pour chaque $1 \leq i \leq n$ et $1 \leq j \leq p$

$$A_i = A_i \cap \bigcup_{j=1}^{p} B_j = \bigcup_{j=1}^{p} (A_i \cap B_j) \quad \text{et} \quad B_j = B_j \cap \bigcup_{i=1}^{n} A_i = \bigcup_{i=1}^{n} (A_i \cap B_j),$$

puis comme les unions sont disjointes

$$\mathbb{1}_{A_i} = \sum_{j=1}^{p} \mathbb{1}_{A_i \cap B_j} \quad \text{et} \quad \mathbb{1}_{B_j} = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{1}_{A_\ell \cap B_j}.$$

On peut alors réécrire f et g comme combinaisons des mêmes indicatrices $\mathbb{1}_{A_\ell \cap B_j}, 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq p$:

$$f = \sum_{\substack{1\leq i\leq n\\1\leq j\leq p}} a_i \mathbb{1}_{A_i \cap B_j}, \quad g = \sum_{\substack{1\leq i\leq n\\1\leq j\leq p}} b_i \mathbb{1}_{A_i \cap B_j}$$

$$\begin{aligned}
\int (f+g)d\mu &= \sum_{\substack{1<i\leq n\\1\leq j\leq p}} (a_i + b_j)\,\mu\,(A_i \cap B_j) \\
&= \sum_{\substack{1\leq i\leq n\\1\leq j\leq p}} a_i \mu\,(A_i \cap B_j) + \sum_{\substack{1\leq i\leq n\\1\leq j\leq p}} b_j \mu\,(A_i \cap B_j) \\
&= \sum_{i=1}^{n} a_i \sum_{j=1}^{p} \mu\,(A_i \cap B_j) + \sum_{j=1}^{p} b_j \sum_{i=1}^{n} \mu\,(A_i \cap B_j) \\
&= \sum_{i=1}^{n} a_i \mu \left(A_i \cap \bigcup_{j=1}^{p} B_j \right) + \sum_{j=1}^{p} b_j \mu \left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i \cap B_j \right)
\end{aligned}$$

$$= \sum_{i=1}^{n} a_i \mu (A_i) + \sum_{j=1}^{p} b_j \mu (B_j)$$
$$= \int f d\mu + \int g d\mu.$$

Si f et g sont des fonctions mesurables positives quelconques, soient $(s_n)_{n\geq 1}$ et $(t_n)_{n\geq 1}$ des suites croissantes de fonctions étagées positives qui convergent vers f et g. Alors $s_n + t_n$ sont. ainsi des fonctions étagées positives et elles convergent vers $f + g$.

D'après le théorème de convergence monotone $\int s_n d\mu, \int t_n d\mu \int (s_n + t_n) d\mu$ convergent respectivement vers $\int f d\mu, \int g d\mu_1 \int (f+g) d\mu$. Donc la linéarité vient en passant à la limite dans $\int (s_n + t_n) d\mu = \int s_n d\mu + \int t_n d\mu$.

- Relation de Chasles

  Si E et F sont mesurables disjoints, alors pour une fonction mesurable
$$\int_{E\cup F} f d\mu = \int_E f d\mu + \int_F f d\mu$$
  Comme E et F sont disjoints, $\mathbb{1}_{E\cup F} = \mathbb{1}_E + \mathbb{1}_F$, il vient alors
$$\int_{E\cup F} f d\mu = \int f \mathbb{1}_{E\cup F} d\mu = \int f (\mathbb{1}_E + \mathbb{1}_F) d\mu = \int (f\mathbb{1}_E + f\mathbb{1}_F) d\mu$$
$$= \int f\mathbb{1}_E d\mu + \int f\mathbb{1}_F d\mu = \int_E f d\mu + \int_F f d\mu$$
  en utilisant la linéarité 2 .

  Notation.

  Dans la suite, pour insister sur la variable d'intégration, on notera les intégrales
$$\int f d\mu = \int f(x)\mu(dx).$$
  En particulier, quand $\mu = \lambda$ (la mesure de Lebesgue), on notera $\lambda(dx) = dx$
$$\int f d\lambda = \int f(x)\lambda(dx) = \int f(x) dx$$

4.3 Convergence monotone

Théorème 3. *(Convergence monotone, Beppo Levi)*

Soit $(X, \mathcal{A}, \mu)$ *un espace mesuré et* $f_n : (X, \mathcal{A}, \mu) \to [0, +\infty], n \geq 1$*, une suite croissante de fonctions mesurables* ($f_n \leq f_{n+1}$)*. On pose* $f(x) = \lim\limits_{n\to+\infty} f_n(x)$ *la limite dans* $[0, +\infty]$*. Alors*

$$\int f d\mu = \lim_{n\to+\infty} \int f_n d\mu$$

Remarque 8.

- Dans l'énoncé, c'est la suite $(f_n)_{n\geq 1}$ *qui est croissante (i.e.* $f_n(x) \leq f_{n+1}(x)$ *et non pas les fonctions* f_n*.*

- La limite simple f *des* f_n *peut aussi prendre la valeur* $+\infty$ *.*

- le théorème est faux pour une suite positive décroissante : sur$(X, \mathcal{A}, \mu) = (\mathbb{R}_+, \mathcal{B}(\mathbb{R}_+), \lambda)$.

Prenons $f_n(x) = 1/(x+n)$ *pour* $n \geq 1$*. Pour tout* $n \geq 1$*, on a* $f_n(x) \leq f_{n+1}(x)$ *et* $\lim\limits_{n\to+\infty} f_n(x) = 0$*.*

Mais $\int f d\mu = 0$ *alors que*

$$\int f_n d\mu = \int_0^{+\infty} \frac{dx}{x+n} = +\infty$$

Pour démontrer ce théorème On a d'abord besoin d'un résultat préliminaire :

Lemme 4.

Soit s *une fonction étagée alors* $\psi : E \longmapsto \int_E s\, d\mu$ *définit une mesure.*

Démonstration :

On vérifie les deux axiomes d'une mesure.

- $\varphi(\emptyset)=\int_{\emptyset} s\,d\mu=0$ car on obtient 0 en intégrant sur un ensemble de mesure 0 .
- Soient $E_k, k\geq 1$, des ensembles mesurables deux à deux disjoints de réunion E. On suppose que ss' écrit.

$$s=\sum_{i=1}\alpha_i \mathbb{1}_{A_i}.$$

Alors

$$\begin{aligned}
\varphi(E)=\varphi\left(\bigcup_{k\geq 1}E_k\right)&=\int_{\bigcup_{k\geq 1}E_k} sd\mu-\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\mu\left(A_i\cap\left(\bigcup_{k\geq 1}E_k\right)\right)\\
&=\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\mu\left(\bigcup_{k\geq 1}(A_i\cap E_k)\right)=\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\sum_{k\geq 1}\mu\left(A_i\cap E_k\right)\\
&=\sum_{k\geq 1}\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\mu\left(A_i\cap E_k\right)=\sum_{k\geq 1}\int_{E_k} sd\mu=\sum_{k\geq 1}\varphi\left(E_k\right)
\end{aligned}$$

L'application φ est donc bien une mesure sur $\mathcal{A}$.

Passons à la preuve du théorème de convergence monotone .

Démonstration :

On a pour tout $x\in X$ et tout $n\geq 1, f_n(x)\leq f_{n+1}(x)$ et en passant à la limite $f_n(x)\leq f(x)$, ce qui donne en intégrant

$$\int_X f_n d\mu\leq\int_X f d\mu. \tag{4.1}$$

D'autre part, on a aussi $\displaystyle\int_X f_n d\mu\leq\int_X f_{n+1}d\mu$ donc $\displaystyle\int_X f_n d\mu$ est une suite (numérique) croissante de $[0,+\infty]$.

Elle a donc une limite, notée $\alpha\in[0,+\infty]$:

$$\lim_{n\to+\infty}\int_X f_n d\mu=\alpha.$$

En passant à la limite dans 4.1, on a déjà $\alpha \leq \int_X f d\mu$.
Soit maintenant, s une fonction étagée majorée par f et $c \in]0,1[$, on introduit les ensembles mesurables

$$E_n = \{x \in X : f_n(x) \geq cs(x)\} = (f_n - cs)^{-1}([0, +\infty[).$$

Comme $(f_n)_{n\geq 1}$ est une suite croissante, on constate que $E_n \subset E_{n+1}$ car si $f_n(x) \geq cs(x)$ a fortiori $f_{n+1}(x) \geq cs(x)$.
De plus, $f_n(x) \to f(x)$ ce qui donne l'existence d'un entier N tel que pour tout $n \geq N, f_n(x) \geq cf(x) \geq \mathrm{cs}(x)$, ie. $x \in E_n$ et $x \in \bigcup\limits_{n=1}^{+\infty} E_n$.
Autrement écrit

$$X = \bigcup_{n=1}^{+\infty} E_n.$$

On a

$$\int_X f_n d\mu \geq \int_{E_m} f_n d\mu \geq \int_{E_n} cs d\mu = c \int_{E_n} s d\mu = c\varphi(E_n) \tag{4.2}$$

Puis comme d'après le Lemme 4 φ définit une mesure et $(E_n)_{n\geq 1}$ est croissante pour l'inclusion, on a par croissance séquentielle de la mesure φ.

$$\lim_{n\to+\infty} \varphi(E_n) = \varphi\left(\bigcup_{n\geq 1} E_n\right) = \varphi(X) = \int_X s\, d\mu,$$

on a donc en passant à la limite dans 4.2 :

$$\alpha \geq c \int_X s\, d\mu.$$

Comme c'est vrai pour tout $c \in]0,1[$, en faisant tendre c vers 1 , on obtient $\alpha \geq \displaystyle\int_X s\, d\mu$ puis en prenant le sup sur les fonctions s étagées majorées par f, on déduit $\alpha \geq \int_X f d\mu$.
Finalement, on a obtenu

$$\lim_{n\to+\infty} \int_X f_n\, d\mu = \alpha = \int_X f\, d\mu.$$

Quelques conséquences de la convergence monotone

Corollaire 2. *(Linéarité)*

Soient f et g des fonctions mesurables positives, on a

$$\int (f+g)\,du = \int f\,du + \int g\,du$$

Démonstration :

Si f et g sont des fonctions mesurables positives quelconques, soient $(s_n)_{n\geq 1}$ et $(t_n)_{n\geq 1}$ des suites croissantes de fonctions étagées positives qui convergent vers f et g. Alors $s_n + t_n$ sont aussi des fonctions étagées positives et elles convergent vers $f+g$.

D'après le théorème de convergence monotone $\int s_n d\mu, \int t_n d\mu$ et $\int (s_n+t_n)\,d\mu$ convergent respectivement vers $\int f d\mu, \int g d\mu, \int (f+g) d\mu$. Donc la linéarité vient en passant à la limite dans $\int (s_n+t_n)\,d\mu = \int s_n d\mu + \int t_n d\mu$, due à la linéarité déjà vue pour les fonctions étagées.

Corollaire 3. *(Intégrale et série)*

Soient $(f_n)_{n\geq 1}$ une suite de fonctions mesurables dans X dans $[0,+\infty]$ alors

$$\int \sum_{n=1}^{+\infty} f_n d\mu = \sum_{n=1}^{+\infty} \int f_n d\mu.$$

Démonstration :

Appliquer le théorème de convergence monotone à $g_p = \sum_{n-1}^{p} f_n$ qui est mesurable, et forme une suite croissante car $g_{p+1} - g_p = f_p \geq 0$. Comme la limite

g de g_p est $g = \sum_{n=1}^{+\infty} f_n$, on a

$$\begin{aligned}
\int \sum_{n=1}^{+\infty} f_n \, d\mu &= \int g \, d\mu \\
&= \lim_{p \to +\infty} \int g_p \, d\mu \\
&= \lim_{p \to +\infty} \int \sum_{n=1}^{p} f_n \, d\mu \\
&= \lim_{p \to +\infty} \sum_{n=1}^{p} \int f_n \, d\mu \\
&= \sum_{n=1}^{+\infty} \int f_n \, d\mu
\end{aligned}$$

où on a juste utilisé la linéarité de l'intégrale pour échanger la somme finie $\sum_{n=1}^{p}$ et l'intégrale $\int$

Corollaire 4. *(Relation de Chasles dénombrable)*

Soient $E_i, i \geq 1$, ensembles mesurables disjoints et f une fonction mesurable positive

$$\int_{\cup_{i\geq 1} E_i} f d\mu = \sum_{i \geq 1} \int_{E_i} f d\mu.$$

Démonstration :

Comme les E_i sont disjoints on a $\mathbb{1}_{\cup_{i\geq 1} E_i} = \sum_{i\geq 1} \mathbb{1}_{E_i}$ et

$$\begin{aligned}
\int_{\bigcup_{i\geq 1} E_i} d\mu = \int f \mathbb{1}_{\cup_{i_1} E_i} d\mu = \int \sum_{i\geq 1} (f \mathbb{1}_{E_i})\, d\mu = \sum_{i\geq 1} \int (f \mathbb{1}_{E_i})\, d\mu \\
= \sum_{i\geq 1} \int_{E_i} f d\mu
\end{aligned}$$

Le résultat suivant est l'analogue du Lemme 4 pour des fonctions mesurables positives quelconques :

Corollaire 5.

Soit $f : (X, \mathcal{A}, \mu) \to [0, +\infty]$ *mesurable alors la fonction sur* $\mathcal{A}$

$$\varphi(E) = \int_E f d\mu$$

est une mesure (elle est finie ssi f *est intégrable). Puis pour une fonction mesurable* g*.*

$$\int_X g\, d\varphi = \int_X gf\, d\mu.$$

Remarque 9.

- En quelque sorte, on a $d\,\varphi = f d\mu$*.*

- Le théorème de convergence monotone est la clef de nombreux raisonnements typiques. Pour justifier une propriété, souvent, on la montre d'abord pour les fonctions indicatrices $\mathbb{1}_A$*, on la généralise par linéarité aux fonctions étagées positives puis enfin aux fonctions mesurables quelconques positives par convergence monotone en approximant par des fonctions simples. Enfin, les fonctions* f *de signe quelconque s'écrivent* $f = f^+ - f^-$*.*

Illustrons cette façon de faire par la deuxième partie de cette preuve.

Démonstration :

φ *est une mesure car :*

- $\varphi(\emptyset) = \int_\emptyset f d\mu = 0$ *car on obtient 0 en intégrant sur un ensemble de mesure 0 .*

- Soient $E_k, k \geq 1$*, des ensembles mesurables deux à deux disjoints de réunion* E*.*

On a $\mathbb{1}_E = \sum_{k\geq 1} \mathbb{1}_{E_k}$ *car les* E_k *sont deux à deux disjoints*

$$\varphi(E) = \int_X \mathbb{1}_E f\, d\mu = \int_X \sum_{k\geq 1} \mathbb{1}_{E_k} f d\,\mu = \sum_{k\geq 1} \int_X \mathbb{1}_{E_k} f\, d\mu = \sum_{k\geq 1} \varphi\,(E_k)$$

L'application φ est donc bien une mesure.

Pour la seconde partie, si $g = \mathbb{1}_A$ est une indicatrice, on a

$$\int_X \mathbb{1}_A d\varphi = \varphi(A) = \int_X \mathbb{1}_A f d\mu = \int_X g f d\mu$$

et le corollaire 5 est satisfaite dans ce cas.

Pour une fonction étagée, ça reste vraie par linéarité en utilisant le premier cas : si $g = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \mathbb{1}_{A_i}$ alors

$$\begin{aligned}\int_X g d\varphi &= \int_X \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \mathbb{1}_{A_i} d\rho = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \int_X \mathbb{1}_{A_i} d\rho = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \int_X \mathbb{1}_{A_i} f d\mu \\ &= \int_X \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \mathbb{1}_{A_i} f d\mu = \int_X g f d\mu.\end{aligned}$$

Pour g mesurable positive, on prend $(s_n)_{n\geq 1}$ suite de fonctions étagées croissantes qui converge vers g et on applique le théorème de convergence monotone

$$\lim_{n\to+\infty} \int_X s_n d\varphi = \int_X g d\varphi \quad , \quad \lim_{n\to+\infty} \int_X s_n f d\mu = \int_X g f d\mu$$

car $s_n \nearrow g$ et $s_n f \nearrow g f (f \geq 0)$.

D'après le cas étagé lemme 4 , pour s_n, on a :

$$\int_X s_n d\varphi = \int_X s_n f d\mu$$

ce qui donne en passant à la limite par convergence monotone :

$$\int_X g d\varphi = \int_X g f d\mu$$

Si g est de signe quelconque on écrit $g = g^+ - g^-$et on utilise le cas positif et la linéarité pour obtenir (4.5) dans ce cas réel de signe quelconque.

Pour g complexe, on écrit $g = \mathfrak{Re}(g) + i\mathfrak{Im}(g)$ et on applique le cas réel à chaque terme réel.

4.4 Lemme de FATOU

Théorème 4.

Soit f_n :$(X,\mathcal{A},\ \mu)\to [0,+\infty[\,, n \geq 1$, une suite de fonctions mesurable positive, alors

$$\int_X \lim_{n\to+\infty} \inf f_n d\mu \leq \lim_{n\to+\infty} \inf \int_X f_n d\mu$$

Démonstration :

On a, $\lim\limits_{n\to+\infty} \inf f_n = \sup\limits_{n\geq 1} \inf\limits_{k\geq n} f_k = \sup\limits_{n\geq 1} g_n$ avec $g_n = \inf\limits_{k\geq n} f_k$. Les fonctions g_n sont mesurables, positives et $g_n \leq g_{n+1}$. Par le théorème de convergence monotone.

$$\int \lim_{n\to+\infty} g_n d\mu = \lim_{n\to+\infty} \int g_n d\mu$$

Or comme la suite $(g_n)_{n\geq 1}$ est croissante sa limite est égale à son sup et

$\lim\limits_{n\to+\infty} g_n = \sup\limits_{n\geq 1} g_n = \sup\limits_{n\geq 1} \inf\limits_{k\geq n} f_k = \lim\limits_{n\to+\infty} \inf f_n$

Et comme, $g_n \leq f_n$ on a $\int g_n d\mu \leq \int f_n d\mu$.

D'où $\int \lim\limits_{n\to+\infty} \inf f_n d\mu = \lim\limits_{n\to+\infty} \int g_n\, d\mu = \lim\limits_{n\to+\infty} \inf \int g_n\, d\mu \leq \lim\limits_{n\to+\infty} \inf \int f_n\, d\mu$

En utilisant le fait que la limite de $\int g_n\ d\mu$ coïncide avec sa lim inf car la limite existe.

Corollaire 6.

Soit $(f_n)_{n\geq 1}$ une suite de fonction mesurable positives qui converge simplement vers f et telle que la suite des intégrales $\int f_n d\mu$ est majorée par M alors :

$$\int f d\mu \leq M$$

Corollaire 7. *(Inégalité généralissime de Fatou)*

Étant donné une suite quelconque $(f_n)_{n=1}^{+\infty}$ *de fonctions mesurables positives sur* $\mathbb{R}^d$ *:* $f_n > 0$*, à valeurs dans* $\overline{\mathbb{R}_+}$ *, la fonction limite inférieure (positive) :*

$$\lim_{n\to+\infty} \inf f_n(x)$$

est toujours automatiquement mesurable, et on a en toute généralité maximalisme :

$$\int_{\mathbb{R}^d} \lim_{n\to+\infty} \inf f_n d\mu \leq \lim_{n\to+\infty} \inf \int_{\mathbb{R}^d} f_n d\mu$$

Corollaire 8. *(Inégalité de Fatou inverse)*

Étant donné une suite quelconque de fonctions mesurables négatives sur $\mathbb{R}$ *à valeurs dans* $\{-\infty\} \cup \mathbb{R}-$*, on a :*

$$\lim_{n\to+\infty} \sup \int_X f_n d\mu \leq \int_X \lim_{n\to+\infty} \sup f_n d\mu$$

Démonstration :

Appliquons le lemme de FATOU à la suite de fonctions $(-f_n) > 0$:

$$\int_X \lim_{n\to+\infty} \inf(-f_n) d\mu \leq \lim_{n\to+\infty} \inf \int_X (-f_n) d\mu$$

Pour arriver à démontrer l'inégalité de Fatou inverse on a besoin du lemme suivant.

Lemme 5.

Pour toute suite $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ *de nombres réels* $a_n \in \mathbb{R}$*, on a :*

$$\lim_{n\to\infty}\inf(-a_n) = -\lim_{n\to\infty}\sup a_n$$

et

$$\lim_{n\to\infty}\sup(-a_n) = -\lim_{n\to\infty}\inf a_n$$

Grâce à ce lemme élémentaire, l'inégalité en cours de travaux devient :

$$\int_X -\lim_{n\to+\infty}\sup f_n d\mu \leq -\lim_{n\to+\infty}\sup \int_X f_n d\mu$$

et puis

$$\lim_{n\to+\infty}\sup \int_X f_n d\mu \leq \int_X \lim_{n\to+\infty}\sup f_n d\mu$$

Proposition 21.

Soient, sur (X,$\mathcal{T}$, μ), g une fonction mesurable intégrable et $(f_n)_{n\geq 1}$ une suite de fonctions mesurables intégrables.

1. *Si $g \leq f_n$ alors $\int \lim_{n\to+\infty}\inf f_n d\mu \leq \lim_{n\to+\infty}\inf \int f_n d\mu$.*
2. *Si $f_n \leq g$ alors $\lim_{n\to+\infty}\sup \int f_n d\mu \leq \int \lim_{n\to+\infty}\sup f_n d\mu$.*

Démonstration :

Par le lemme de Fatou appliquée à $f_n - g \geq 0$, on a

$$\int \lim_{n\to+\infty}\inf(f_n - g)\ d\mu \leq \lim_{n\to+\infty}\inf \int (f_n - g)\ d\mu$$

en rajoutant $\int g d\mu$ qui est finie, on obtient le premier résultat.

Pour le deuxième il suffit d'appliquer le lemme de Fatou pour la fonction $g - f_n \leq 0$ et puis on retranche $\int g\ d\mu < +\infty$ et on change le signe pour récupérer l'inégalité demandé.

Chapitre 5

Intégrales des fonctions mesurables de signe quelconque

Sauf mention contraire, on considère dans tout ce chapitre un espace mesure (X, A, µ).

Définition 18.

Par défaut, dans la suite, on considère une fonction $f : (X, \mathcal{A}, \mu) \to \mathbb{R}$ *mesurable (ou selon les cas, à valeurs dans* C*. Pour une telle fonction* f*, la fonction* $|f|$ *est mesurable et son intégrale* $\int f d\mu$ *est bien définie (mais peut valoir* $+\infty$ *).*

Définition 19. *(Intégrabilité)*

Une fonction f *est dite* μ*-intégrable si la fonction positive* $|f|$ *est d'intégrale finie :*

$$\int |f| d\mu < +\infty$$

Dans la suite, on écrit une fonction $f : (X, \mathcal{A}, \mu) \to \mathcal{C}$ *sous la forme*

$$\begin{aligned} f &= u + iv \\ &= u^+ - u^- + i\left(v^+ - v^-\right) \end{aligned}$$

avec $u = \mathfrak{Re}(f)$ *et* $v = \mathfrak{Im}(f)$.

Comme les fonctions positives u^+, u^-, v^+, v^- *sont toutes majorées par* $|f|$ *alors leurs intégrales sont toutes finies.*

Et on pose alors par définition

$$\begin{aligned}\int f d\mu &= \int u^+ d\mu - \int u^- d\mu + i\left(\int v^+ d\mu - \int v^- d\mu\right)\\ &= \int u d\mu + i\int v d\mu\end{aligned}$$

ou, plus simplement, si $f : X \longrightarrow \mathbb{R}, \int f d\mu = \int f^+ d\mu - \int f^- d\mu$.

Puis l'intégrale sur $E \in \mathcal{A}$ *de* f *fonction intégrable est définie par*

$$\int_E f d\mu = \int f \mathbb{1}_E d\mu$$

ce qui a bien un sens car la fonction $f\mathbb{1}_E$ *est intégrable puisque* $|f\mathbb{1}_E| \leq |f|$.

Remarque 10.

- Notons que si une fonction mesurable est positive, on peut toujours définir son intégrale mais elle peut valoir $+\infty$. *Elle est dite alors* μ*-intégrable si son intégrale par rapport à* μ *est finie.*

- Tandis que si f *est de signe quelconque, on ne définit son intégrale que si elle est intégrable, c'est à dire lorsque* $|f|$ *est d'intégrale (forcément définie) finie.*

- En particulier dans la théorie de l'intégrale de Lebesgue, il n'y a pas de notion de simple intégrabilité, c'est à dire de fonction non intégrable dont l'intégrale converge simplement comme par exemple l'intégrale de Riemann $\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx$ *(à voir).*

Proposition 22. *(Quelques propriétés)*

- Si f, g *sont mesurables réelles et* $f \leq g$ *alors* $\int f d\mu \leq \int g d\mu$.

- Si $\mu(E) = 0$, *alors* $\int_E f d\mu = 0$ *pour toute fonction intégrable.*

- *(Linéarité) Soient $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ et f, g intégrables de X dans $\mathbb{C}$ alors*

$$\int (\alpha f + \beta g) d\mu = \alpha \int f d\mu + \beta \int g d\mu.$$

- *(Chasles) Si E et F sont disjoints, alors $\int_{E \cup F} f d\mu = \int_E f d\mu + \int_F f d\mu$.*

Démonstration :
Tout ceci provient facilement des propriétés déjà vues pour les intégrales de fonctions positives et passe au cas des fonctions de signe quelconque en les écrivant sous la forme (définition 18) et en appliquant à chaque terme les propriétés correspondantes des intégrales de fonction mesurables positives. Pour la linéarité, c'est fastidieux : écrire $f = \mathfrak{Re}(f)^+ - \mathfrak{Re}(f)^- + i\left(\mathfrak{Im}(f)^+ - \mathfrak{Im}\left(f^-\right)\right)$, $\alpha = \mathfrak{Re}(\alpha)^+ - \mathfrak{Re}(\alpha)^- + i\left(\mathfrak{Im}(\alpha)^+ - \mathfrak{Im}\left(\alpha^-\right)\right)$et de même pour g et β.
Développer $(\alpha f + \beta g)$ et utiliser la linéarité pour les fonctions positives avec des coefficients positifs et reformer α, β, f, g à la fin.

Proposition 23. *(Intégrale et valeurs absolues ou module)*
Soit $f : (X, \mathcal{A}, \mu) \to \mathbb{C}$ intégrable alors

$$\left| \int f d\mu \right| \leq \int |f| d\mu$$

Démonstration :
Si $\int f d\mu = 0$, c'est immédiat. Sinon, soit $\alpha = \left|\int f d\mu\right| / \left(\int f d\mu\right)$.
Alors $|\alpha| = 1$. Puis

$$\begin{aligned}\left| \int f d\mu \right| &= \alpha \int f d\mu = \int \alpha f d\mu = \int Re(\alpha f) d\mu + i \int Im(\alpha f) d\mu = \int Re(\alpha f) d\mu \\ &\leq \int |\alpha f| d\mu = \int |f| d\mu\end{aligned}$$

en utilisant la majoration $\mathfrak{Re}(z) \leq |z|$ valable pour tout $z \in \mathbb{C}$ puis $|\alpha| = 1$.

5.1 Ensembles négligeables

Définition 20.

Un ensemble $A \in \mathcal{A}$ *est dit* μ*-négligeable si* $\mu(A) = 0$.

Exemple 7.

Sur $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda), \{x_0\}, \mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}$ *sont négligeables. Sur* $(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}), \eta)$*, où* η *est la mesure de comptage, seul* $\emptyset$ *est négligeable.*

Définition 21.

Une fonction f *mesurable est dite* μ*-négligeable s'il existe* A *négligeable tel que* $\forall x \notin A$ *alors* $f(x) = 0$ *(l'ensemble des points où* f *est non nulle est dans un négligeable).*

Exemple 8.

Sur $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$,

$f(x) = 1 - \mathbb{Q}(x), g(x) = x\mathbb{1}_{\mathbb{N}}(x)$ *sont négligeables.*

Proposition 24. *(Presque partout)*

Une propriété est dite vraie (μ*-)presque partout, si l'ensemble des points où elle n'est pas vraie est* μ*-négligeable.*

En particulier, $f = g$ *presque partout si* $\{x \in X : f(x) \neq g(x)\}$ *est dans un négligeable. On écrit p.p. pour presque partout.*

Proposition 25.

- Si $f = g$ *p.p. alors* f *est intégrable ssi* g *l'est et*

$$\int f d\mu = \int g d\mu.$$

- Si $f \leq g$ *p.p. alors* $\int f d\mu \leq \int g d\mu$.

- Si $f \geq 0$ *et* $\int f d\mu < +\infty$ *alors* f *est finie p.p.*

- Si $\left|\int f d\mu\right| = \int |f| d\mu$ *alors il existe* $\alpha \in \mathbb{C}$ *de module 1 tel que* $\alpha f = |f|$ *ie.*

f est d'argument constant.

Démonstration :

- Soit $A = \{x \in X : f(x) \neq g(x)\}$ alors $\mu(A) = 0$. Si $x \notin A$, on a $f(x) = g(x)$ donc $|f(x)| = |g(x)|$. Donc si f est intégrable alors g l'est aussi puisque

$$\begin{aligned}\int |g|d\mu &= \int_A |g|d\mu + \int_{A^c} |g|d\mu = \int_{A^c} |g|d\mu \\ &= \int_{A^c} |f|d\mu = \int_{A^e} |f|d\mu + \int_A |f|d\mu = \int |f|d\mu < +\infty.\end{aligned}$$

Puis le même calcul sans les $|\cdot|$ montre que $\int f d\mu = \int g d\mu$.

- Si $A = \{x \in X : f(x) = +\infty\}$ n'est pas négligeable alors

$$\int f d\mu \geq \int_A f d\mu = +\infty$$

car $f = +\infty$ sur A qui est de mesure $\mu(A) > 0$. On contredit la finitude de $\int f d\mu$. Il faut donc avoir $\mu(A) = 0$.

- Reprendre la preuve de $\left|\int f d\mu\right| \leq \int |f|d\mu$. Pour avoir égalité, il faut qu'il y ait égalité dans toutes les étapes de cette preuve, ce qui nécessite $\mathfrak{Re}(\alpha f) = |\alpha f|$. Mais $\mathfrak{Re}(z) = |z|$ exige $z = |z|$. Ici on a donc $|\alpha f| = \alpha f$, soit, puisque $|\alpha| = 1, |f| = \alpha f$.

5.2 Convergence dominée et applications

Théorème 5. *(Convergence dominée)*

Soit sur $(X, \mathcal{A}, \mu)$, $f_{\mathrm{n}} : (X, \mathcal{A}, \mu) \to \mathbb{C}, n \geq 1$, mesurables telles que $f_n \to f$ p. p. quand $n \to +\infty$. Sil existe g une fonction mesurable $(X, \mathcal{A}, \mu) \to [0, +\infty]$ telle que

1. $|f_n| \leq g \quad p.p.$

2. g *est* μ*-intégrable.*

Alors

$$\lim_{n\to+\infty} \int f_n d\mu = \int f d\mu \tag{5.1}$$

Démonstration

On considère la fonction $2g - |f - f_n|$.

Comme $|f_n| \leq g$ et (à la limite) $|f| \leq g$, il vient facilement $|f - f_n| \leq 2g$, c'est à dire $2g - |f - f_n| \geq 0$.

De plus, comme $f_n \to f$ simplement, on a $\lim\limits_{n\to+\infty} 2g - |f - f_n| = 2g$.

On applique alors le lemme de Fatou à cette suite de fonctions :

$$\begin{aligned}
\int \liminf_{n\to+\infty} (2g - |f - f_n|)\, d\mu &\leq \liminf_{n\to+\infty} \int 2g - |f - f_n|\, d\mu \\
\int 2g d\mu &\leq \liminf_{n\to+\infty} \int 2g d\mu - \int |f - f_n|\, d\mu \\
\int 2g d\mu &\leq \int 2g d\mu + \liminf_{n\to+\infty} \left(- \int |f - f_n|\, d\mu\right) \\
0 &\leq - \limsup_{n\to+\infty} \int |f - f_n|\, d\mu \\
\limsup_{n\to+\infty} \int |f - f_n|\, d\mu \leq 0 &
\end{aligned}$$

en simplifiant par $\int g d\mu$ finie. Comme en plus $\liminf\limits_{n\to+\infty} \int |f - f_n|\, d\mu \geq 0$, on a $\lim\limits_{n\to+\infty} \int |f - f_n|\, d\mu = 0$ et a fortiori

$$\lim_{n\to+\infty} \int f_n d\mu = \int f d\mu.$$

5.3 Application aux intégrales à paramétrés

Continuité des intégrales à paramètre

Soient (X,$\mathcal{T}$,μ) un espace mesuré, I un intervalle de $\mathbb{R}$, et

$$f : I \times X \to \mathbb{R}$$
$$(t, x) \to f(t, x)$$

On suppose que f satisfait les hypothèses :

1. (mesurabilité) pour tout $t \in I$, l'application $x \to f(t, x)$ est mesurable ;
2. (continuité) pour μ-presque tout $x \in X$, l'application $t \to f(t, x)$ est continue sur I ;
3. (domination) il existe une fonction $\varphi : E \to \mathbb{R}+$ mesurable telle que : $\displaystyle\int \varphi d\mu < \infty$ et pour tout $t \in I$; $|f(t, x)| \leq \varphi$ p.p.
   Alors pour tout $t \in I$ la fonction $x \to f(t, x)$ est intégrable et la fonction $F : t \to F(t) = \displaystyle\int_X f(t, x) d\mu(x)$ est continue en t_0.

Démonstration :

Comme $\mathbb{R}$ et $\mathbb{C}$ sont métriques, la continuité est donnée par la continuité séquentielle (c'est à dire avec les suites : F est continue en t_0 ssi pour toute suite $(t_n)_{n\geq 1}$ qui converge vers t_0, on a ($\lim\limits_{n\to+\infty} F(t_n) = F(t_0)$). Il faut alors voir que pour toute suite $(t_n)_{n\geq 1}$ qui converge vers t_0, on a $F(t_n) \to F(t_0)$. Mais $F(t_n) = \int_X f(t_n, x)\, \mu(dx)$. Les fonctions $x \mapsto f(t_n, x)$ sont mesurables et dominées par g, intégrable. De plus quand $n \to +\infty$, $f(t_n, x) \to f(t_0, x)$ pour presque chaque $x \in X$ par la continuité presque partout de $f(t_0, \cdot)$. La conclusion découle directement du théorème de convergence dominée :

$$\lim_{n\to+\infty} F(t_n) = \lim_{n\to+\infty} \int_X f(t_n, x)\,\mu(dx) = \int_X f(t_0, x)\,\mu(dx) = F(t_0)\,.$$

Dérivabilité des intégrales à paramètre

Soient I un intervalle ouvert non vide de $\mathbb{R}$ et $f : I \times X \to \mathbb{R}$ une fonction telle que :

1. (existence de F) pour tout $t \in I$, $x \to f(t,x)$ est intégrable ;
2. (dérivabilité) pour $\mu - presque$ tout $x \in X$, $\dfrac{\partial f}{\partial x}(t,x)$ existe
3. (domination de la dérivée) il existe une fonction $\phi : E \to \mathbb{R}$ mesurable telle que $\displaystyle\int \phi d\mu < \infty$ pour tout $t \in I$, on a

$$\left|\frac{\partial f}{\partial x}(t,x)\right| \leq \phi \qquad p.p.$$

Alors pour tout $t \in I$ la fonction $x \to \dfrac{\partial f}{\partial x}(t,x)$ est intégrable, la fonction F définie par $F(x) = \displaystyle\int_X f(t,x)d\mu(x)$ est dérivable est on a

$$F'(t) = \int_X \frac{\partial f}{\partial x}(t,x)d\mu(x)$$

Démonstration :
Pour $x \in A$, $\quad \dfrac{\partial f}{\partial t}(t,x) = \lim\limits_{t_n\to t} \dfrac{f(t_n,x) - f(t.x)}{t_n - t}$ est mesurable car limite de

fonctions mesurables. Pour $t_1 \in I$ quelconque et t_0 donné dans l'énoncé, par le théorème des accroissements finis, on a $\theta \in]t_0, t_1[$:

$$|f(t_1, x) - f(t_0, x)| = \left| \frac{\partial f}{\partial t}(\theta, x) \right| |t_1 - t_0| \leq g(x) |t_1 - t_0|$$

Il suit $|f(t_1, x)| \leq g(x) |t_1 - t_0| + |f(t_0, x)|$ qui est intégrable car g et $f(t_0, \cdot)$ le sont. L'intégrale $F(t_1)$ est donne finie pour tout $t_1 \in I$. Soit maintenant $t \in I$ fixé et $t_n \to t$, on a

$$\frac{F(t_n) - F(t)}{t_n - t} = \int_A \frac{f(t_n, x) - f(t, x)}{t_n - t} \mu(dx).$$

Or $\dfrac{f(t_n, x) - f(t, x)}{t_n - t}$ est une suite de fonctions qui tend vers $\frac{\partial f}{\partial t}(t, x)$ et qui vaut par le théorème des accroissements finis $\frac{\partial f}{\partial t}(\theta_n, x)$ pour un certain $\theta_n \in]t, t_n[$. Or $\frac{\partial f}{\partial t}(\theta_n, x)$ est dominée par $g(x)$, intégrable. Le théorème de convergence dominée s'applique et donne

$$F'(t) = \lim_{n \to +\infty} \frac{F(t_n) - F(t)}{t_n - t} = \int_A \frac{\partial f}{\partial t}(t, x) \mu(dx). = \int_X \frac{\partial f}{\partial t}(t, x) \mu(dx).$$

Application : Fonction GAMMA

1. Définition

   Soit $x \in \mathbb{R}$. On pose $\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t} dt$.

   La fonction $f : t \mapsto t^x e^{-t}$ est continue et positive sur $]0, +\infty[$.

   - Étude en $+\infty$. D'après un théorème de croissances comparées, $t^2 \times t^{x-1} e^{-t} \underset{t \to +\infty}{\to} 0$ et donc $t^{x-1} e^{-t} = 0\left(\frac{1}{t^2}\right)$. On en déduit que la fonction f est intégrable sur un voisinage de $+\infty$.
   - Étude en 0. $t^{x-1} e^{-t} \underset{t \to +\infty}{\sim} t^{x-1}$ et donc la fonction f est intégrable sur un voisinage de 0 si et seulement si $x - 1 > -1$ ce qui équivaut à $x > 0$.

Finalement, $\Gamma(x)$ existe si et seulement si $x > 0$.

$$\forall x > 0, \Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t} dt$$

2. Relation fonctionnelle

   Soit $x > 0$. Soient a et A deux réels tels que $0 < a < A$. Les deux fonctions $t \mapsto t^x$ et $t \mapsto -e^{-t}$ sont de classe C^1 sur le segment $[a, A]$.

   On peut donc effectuer une intégration par parties et on obtient

   $$\int_a^A t^x e^{-t} dt = \left[-t^x e^{-t}\right]_a^A + x \int_a^A t^{x-1} e^{-t} dt = -A^x e^{-A} + a^x e^{-a} + x \int_a^A t^{x-1} e^{-t} dt$$

   Puisque $x > 0$ et donne $x + 1 > 0$, quand a tend vers 0 et A tend vers $+\infty$, on obtient $\Gamma(x + 1) = x\Gamma(x)$.

   $$\forall x > 0, \Gamma(x + 1) = x\Gamma(x)$$

3. Quelques valeurs.

   - En particulier, pour tout entier naturel $n \geqslant 2, \Gamma(n)$ $= (n-1)\Gamma(n-1)$. De plus, $\Gamma(1) = \int_0^{+\infty} \quad e^{-t} dt = [-e^{-t}]_0^{+\infty} = 1$.

     Par récurrence, on obtient alors

     $$\forall \mathrm{n} \in \mathbb{N}^*, \Gamma(\mathrm{n}) = (\mathrm{n} - 1)!$$

   - Calculons aussi $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)$. On pose $u = \sqrt{t}$ et donc $t = u^2$ et dt $= 2u$ du et on obtient

     $$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}} dt = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-u^2}}{u} 2u du = 2 \int_0^{+\infty} e^{-u^2} du = \sqrt{\pi} \text{ (intégrale de GAuss).}$$

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=\sqrt{\pi}$$

La relation fonctionnelle du 2) permet encore d'écrire : $\forall \mathrm{n} \in \mathrm{N}^{+}, \Gamma\left(\mathrm{n}+\frac{1}{2}\right)=\left(\mathrm{n}-\frac{1}{2}\right) \Gamma\left(n-\frac{1}{2}\right)$ et donc pour $\mathrm{n} \in \mathrm{N}^{+}$:

$$\begin{aligned}
\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right) &= \frac{2n-1}{2} \times \frac{2n-3}{2} \times \ldots \times \frac{1}{2} \times \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) \\
&= \frac{(2n) \times (2n-1) \times \ldots \times 3 \times 2}{2\pi(2n) \times (2n-2) \times \ldots \times 2} \sqrt{\pi} \\
&= \frac{(2n)!\sqrt{\pi}}{2^{2n} n!}
\end{aligned}$$

ce qui reste vrai quand $n=0$.

$$\forall n \in \mathbb{N}, \Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right)=\frac{(2n)!\sqrt{\pi}}{2^{2n} n!}$$

4. Continuité.

   Soient a et A deux réels tels que $0<a<A$.

$$\begin{aligned}
&\textit{Soit } \Phi : [a, A] \times]0,+\infty[\rightarrow \mathbb{R} \\
&\qquad\qquad (x, t) \rightarrow t^{x-1} e^{-t}
\end{aligned}$$

   de sorte que pour tout $x \in [a, A]$, $\Gamma(x)=\int_0^{+\infty} \Phi(x, t) dt$.

   - Pour chaque $x \in [a, A]$, la fonction $t \mapsto \Phi(x, t)$ est continue par morceaux sur $]0,+\infty[$,
   - Pour chaque $t \in]0,+\infty[$, la fonction $x \mapsto \Phi(x, t)$ est continue sur $[a, A]$,
   - Soit $(x, t) \in [a, A] \times]0,+\infty[$. Si $0<t \leqslant 1$, alors $\left|t^{x-1} e^{-t}\right|=t^{x-1} e^{-t} \leqslant t^{a-1} e^{-t}$ et si $t \geqslant 1, \left|t^{x-1} e^{-t}\right| \leqslant t^{A-1} e^{-t}$.

On en déduit que

$$\forall (x,t) \in [a,A] \times \left]0,+\infty\right[, |\Phi(x,t)| \leqslant \begin{cases} t^{a-1}e^{-t} \text{ si } t < 1 \\ t^{A-1}e^{-t} \text{ si } t \geqslant 1 \end{cases} = \varphi_0(t).$$

D'après le 1), la fonction φ_0 est continue par morceaux et intégrable sur $]0,+\infty[$. D'après le théorème de continuité des intégrales à paramètres, la fonction Γ est continue sur $[\mathrm{a},\mathrm{A}]$. Ceci étant vrai pour tous réels a et A tels que $0 < a < A$, on a montré que

La fonction Γ est continue sur $]0,+\infty[$.

5. Dérivation

On reprend les notations de 4).

- Pour chaque x de $[a,A]$, la fonction $t \mapsto \Phi(x,t)$ est continue par morceaux et intégrable sur $]0,+\infty[$.
- La fonction Φ admet sur $[a,A]\times]0,+\infty[$ une dérivée partielle par rapport à sa première variable x définie par

$$\forall (x,t) \in [a,A]\times]0,+\infty[, \frac{\partial \Phi}{\partial x}(x,t) = (\ln t)t^{x-1}e^{-t}.$$

De plus,

— pour chaque x de $[a,A]$, la fonction $t \mapsto \frac{\partial \Phi}{\partial x}(x,t)$ est continue par morceaux sur $]0,+\infty[$

— pour chaque $t \in]0,+\infty[$, la fonction $x \mapsto \frac{\partial \Phi}{\partial x}(x,t)$ est continue sur $[a,A]$,

— pour chaque $(x,t) \in [a,A] \times]0,+\infty[$,

$$|\frac{\partial \Phi}{\partial x}(x,t)| \leqslant \begin{cases} |\ln t| t^{a-1} e^{-t} \text{ si } t < 1 \\ |\ln t| t^{A-1} e^{-t} \text{ si } t \geqslant 1 \end{cases}$$
$$= \varphi_1(t)$$

Vérifions alors l'intégrabilité de la fonction φ_1 sur $]\,0,+\infty[$. Pour cela, pour $\alpha > 0$ donné, vérifions l'intégrabilité de la fonction $t \mapsto (\ln t) t^{\alpha-1} e^{-t}$ sur $]0,+\infty\,[$.

Cette fonction est :

i- continue par morceaux sur $]0,+\infty[$

ii- négligeable en $+\infty$ devant $\frac{1}{t^2}$ d'après un théorème de croissances comparées,

iii- négligeable en 0 devant $t^{-1+\frac{\alpha}{2}}$ avec $-1+\frac{\alpha}{2} > -1$ car :

$$t^{1-\frac{\alpha}{2}} \times (\ln t) t^{\alpha-1} e^{-t} t^{\alpha/2} (\ln t) \underset{t \to 0}{\to} 0$$

d'après un théorème de croissances comparées. On en déduit que la fonction $t \mapsto (\ln t) t^{\alpha-1} e^{-t}$ est intégrable sur $]0,+\infty\,[$ et il en est de même de la fonction φ_1.

D'après le théorème de dérivation des intégrales à paramètres (théorème de LEIBNIZ), la fonction Γ est de classe C^1 sur $[a,A]$ et sa dérivée s'obtient par dérivation sous le signe somme. Ceci étant vrai pour tous réels a et A tels que $0 < a < A$, on a montré que La fonction Γ est de classe C^1 sur $]0,+\infty\,[$ et

$$\forall x > 0, \Gamma'(x) = \int_0^{+\infty} (\ln t) t^{x-1} e^{-t} dt.$$

Conclusion

Il existe une relation importante entre la théorie de mesure et de l'intégration et la théorie des probabilités.
D'ailleurs la théorie des probabilités est une branche des mathématiques qui permet de modéliser les phénomènes aléatoires. Celle-ci repose sur une formalisation développe par le mathématicien russe Kolmogorov dans les années 1930. Son axiomatique repose sur les notions de tribu et de mesure développées par Borel dans les années 1900. La théorie de l'intégrale de Lebesgue développée à la même époque a permis d'asseoir en toute généralité la notion de moment d'une variable aléatoire.

Bibliographie

[1] Intégrale de Lebesgue , L3 Mathématiques, Jean-Christophe Breton, Université de Rennes 1

[2] THÉORIE DE LA MESURE ET DE L'INTÉGRATION, THIERRY GALLAY

[3] Théorie de la Mesure et Intégration,Xavier MARY

[4] Intégrale de Lebesgue, T. Deheuvels

[5] Théorie de l'intégration de Lebesgue François DE MARÇAY Département de Mathématiques d'Orsay Université Paris-Sud, France

[6] Université Paris-Dauphine, Intégrale de Lebesgue et Probabilités