# ЛЕКЦИЯ 3. Расчет показателей надежности ВС для переходного режима

**Кулагин Иван Иванович**

ст. преп. Кафедры вычислительных систем

Сибирский государственный университет телекоммуникаций и информатики

**Created by:**

Пазников Алексей Александрович

к.т.н. доцент Кафедры вычислительных систем

Получим оценки функции надёжности ВС для фиксированного числа $n$ машин основной подсистемы при $N \to \infty$.

- Пусть параметры ВС изменяются в моменты времени $1, 2, \ldots, \tau, \ldots, t, \ldots$;
- $r(\tau)$ – вероятность безотказной работы одной ЭМ или вероятность того, что ЭМ в момент $\tau$ исправна;
- $N(\tau)$ – общее число ЭМ в момент $\tau$.

# Надёжность большемасштабных ВС

Можно доказать справедливость формул:

$$R(t)\begin{cases}\geq 1 - B^{-1}(1-t^{-B});\\ \leq \frac{2}{1+t};\\ \approx e^{-\Lambda t};\end{cases} \quad \text{при } N(t)\begin{cases}\geq \frac{1+B}{K}\ln(\tau+1);\\ \leq \frac{1}{K}\ln(\tau+1);\\ = N = \text{const};\end{cases} \qquad (1)$$

где $B$ – произвольное число;

$$K = \max_{1\leq\tau\leq t} \kappa(\tau), \qquad k = \min_{1\leq\tau\leq t} \kappa(\tau);$$

$$\kappa(\tau) = \nu(\tau)\ln\frac{\nu(\tau)}{r(\tau)} + [1-\nu(\tau)]\ln\frac{1-\nu(\tau)}{1-r(\tau)}, \qquad \nu(\tau) = \frac{n-1}{N(\tau)}$$

для константы $\Lambda$ справедливо неравенство

$$\ln[1-e^{-KN}] \geq \Lambda \geq \ln[1-e^{-KN}]$$

- Таким образом, чтобы невосстанавливаемая ВС имела достаточно высокий уровень надёжности $(R(t) \to 1)$ сколь угодно продолжительное время $(t \to \infty)$, необходим, по крайней мере, **логарифмический рост во времени числа её ЭМ**.

- Из (1) следует, что вероятность безотказной работы системы, в которой $N = \mathrm{const}$, экспоненциально с ростом t стремится к нулю.

- Скорость уменьшения $R(t)$ зависит от параметра $\Lambda$, т.е. от интенсивности отказов ВС. Надёжность ВС может быть повышена за счёт уменьшения $\Lambda$.

- Применение **классического способа** расчёта мат. ожидания $T$ и $\Theta$ **затруднено** из-за сложных расчётов функций $R(t)$ и $U(t)$.
- Вычисления функций $R(t)$ и $U(t)$ основываются на **моделях ТМО и методах приближённых вычислений.**
- Трудоёмкость такого расчёта повышается с ростом $N$, кроме того, **не удаётся получить аналитические формулы** для расчёта $T$ и $\Theta$.
- Для расчёта $T$ и $\Theta$ удобно использовать **«частотный» метод**.

Легко установить, что среднее время безотказной работы ВС при $n \neq N$ и при $n = N$ равно:

$$\Theta = \sum_{j=n+1}^{N} \frac{1}{j\lambda} \prod_{l=n}^{j-1} \frac{\mu_l}{l\lambda} + \frac{1}{n\lambda}; \quad \Theta = \frac{1}{N\lambda} \tag{2}$$

Среднее время восстановления ВС при $n \neq 1$ и $n = 1$:

$$T = \frac{1}{\mu_0} \prod_{l=1}^{n-1} \frac{l\lambda}{\mu_l} + \sum_{j=1}^{n-1} \frac{1}{j\lambda} \prod_{l=j}^{n-1} \frac{l\lambda}{\mu_l}; \quad T = \frac{1}{\mu_0} \tag{3}$$

В формулах (2), (3)

$$\mu_l = \begin{cases} (N-l)\mu, & \text{если } (N-m) \le l \le N; \\ m\mu, & \text{если } 0 \le l < (N-m); \end{cases}$$

где $\lambda^{-1}$ – среднее время безотказной работы ЭМ;

$m$ – число восстанавливающих устройств;

$\mu^{-1}$ – среднее время восстановления отказавшей ЭМ одним ВУ.

# Функция готовности ВС

Для простоты обозначим

$$P_j(t) = P\{\xi(t) = j \mid i \in E_0^N\}, \qquad j \in E_0^N.$$

Для вывода дифференциальных уравнений воспользуемся формулой полных вероятностей:

$$P_j(t + \Delta t) = \sum_{l=0}^{N} P_l(t) P_{ij}(\Delta t)$$

где $P_{ij}(\Delta t)$ – условная вероятность того, что ВС, находящаяся в некоторый момент $t \geq 0$ в состоянии $l$, т.е. $\xi(t) = l$, перейдёт по истечении времени $\Delta t$ в состояние $j$, т.е. $\xi(t + \Delta t) = j$

# Функция готовности ВС

Известно (*из формулы вероятности отказов для ЭВМ*), что вероятность появления за $\Delta t$ *одного отказа в ЭМ* – есть величина порядка $\lambda\Delta t$, а вероятность появления *более одного отказа* – величина $o(\Delta t)$.

Тогда вероятность появления за время $\Delta t$ *хотя бы одного отказа* в ВС, находящейся в состоянии $l \in E_0^N$, есть величина $l\lambda\Delta t + o(\Delta \mathrm{t})$.

# Функция готовности ВС

*Из функции восстановимости для ЭВМ* следует, что вероятность восстановления за время $\Delta t$ отказавшей машины одним восстанавливающим устройством равна

$$\mu \Delta t + o(\Delta t)$$

Если ВС находится в состоянии $l \in E_0^N$ и восстановлением занято $k$ устройств, то вероятность восстановления за время $\Delta t$ одной отказавшей ЭМ:

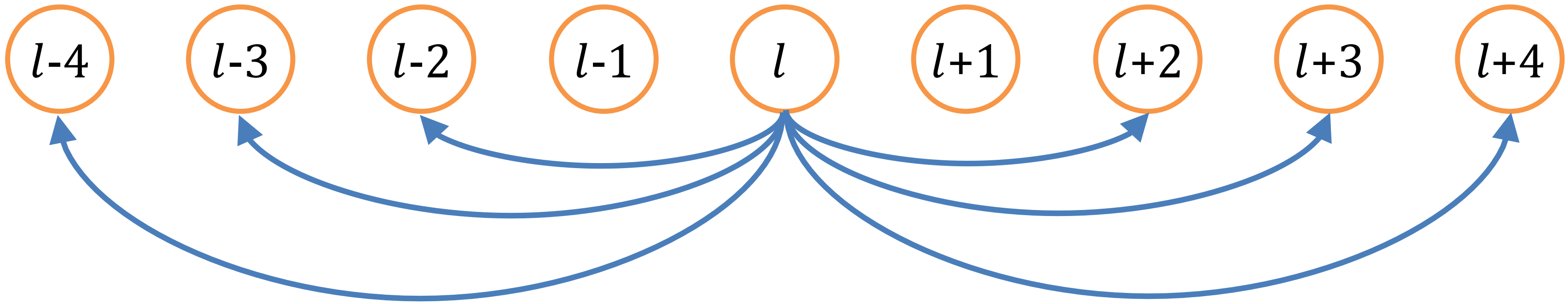
$$k \mu \Delta t + o(\Delta t)$$

где $k = (N - l)$ при $(N - m) \le l$ и $k = m$ при $(N - m) > l$

## Функция готовности ВС

1. Переход системы из состояния $l$ в состояние $j$ при $|l-j|>1$ требует наступления двух событий (или двух отказов или двух восстановлений). Следовательно:

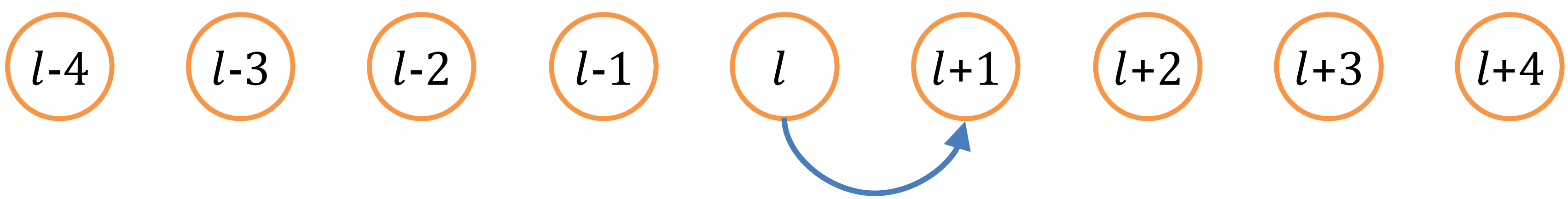
$$P_{ij}(\Delta t)=o(\Delta t), \qquad |l-j|\geq 2, \qquad l,j\in E_0^N$$



# Функция готовности ВС

2. Для перехода ВС из состояния $0 \leq l < N$ в состояние $l+1$ требуется, чтобы произошло одно восстановление или наступило несколько событий, поэтому:

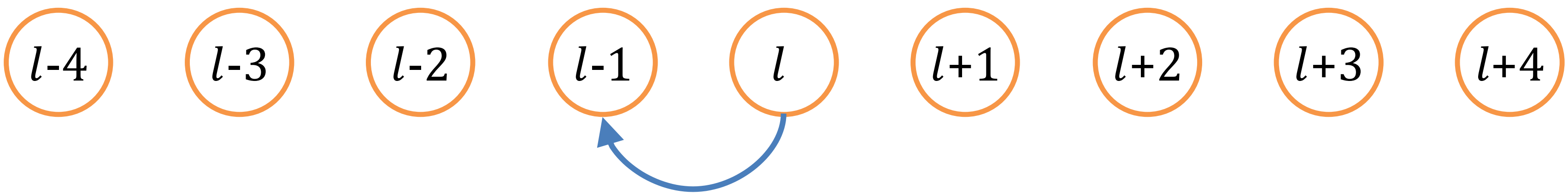
$$f(x) = \begin{cases} m\mu\Delta t + o(\Delta t), & 0 \leq l \leq (N-m) \\ (N-l)\mu\Delta t + o(\Delta t), & (N-m) < l < N \end{cases}$$



# Функция готовности ВС

3. Очевидно, что:

$$P_{l,l-1}(\Delta t) = l\lambda\Delta t + o(\Delta t), \qquad 0 < l \leq N$$



# Функция готовности ВС

4. Наконец, учитывая пп.1-3, имеем:

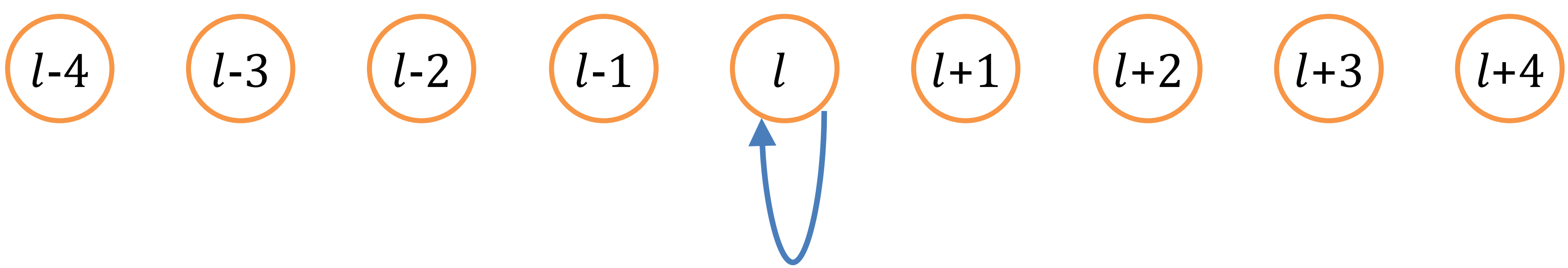
$$P_{ll}(\Delta t) = 1 - P_{l,l+1}(\Delta t) - P_{l,l-1}(\Delta t) + o(\Delta t), 0 \leq l \leq N$$

где при $l = N$ второй, а при $l = 0$ третий член правой части надо заменить на 0. Следовательно,

$$P_{00} = 1 - m\mu\Delta t + o(\Delta t);$$

$$P_{ll}(\Delta t) = \begin{cases} 1 - l\lambda\Delta t - m\mu\Delta t + o(\Delta t), & 0 < l \leq (N - m); \\ 1 - l\lambda\Delta t - (N - l)\mu\Delta t + o(\mu\Delta t), & (N - m) < l < N; \end{cases}$$

$$P_{NN}(\Delta t) = 1 - N\lambda\Delta t + o(\Delta t).$$



# Функция готовности ВС

Подставляя в $P_j(t+\Delta t) = \sum_{l=0}^{N} P_l(t) P_{ij}(\Delta t)$ полученные асимптотические оценки, получаем:

$$\boldsymbol{P_0(t+\Delta t)} = P_0(t)P_{00}(\Delta t) + P_1(t)P_{10}(\Delta t) + o(\Delta t) =$$
$$= (1 - m\mu\Delta t)P_0(t) + \lambda\Delta t P_1(t) + o(\Delta t);$$

$$\boldsymbol{P_j(t+\Delta t)} = P_{j-1}(t)P_{j-1,j}(\Delta t) + P_j(t)P_{jj}(\Delta t) +$$
$$+P_{j+1}(t)P_{j+1}(\Delta t) + o(\Delta t) =$$
$$= \{m\mu\Delta t P_{j-1}(t) + [1 - (j\lambda + m\mu)\Delta t]P_j(t) + \qquad (4)$$
$$= \begin{cases} m\mu\Delta t P_{j-1}(t) + [1 - (j\lambda + m\mu)\Delta t]P_j(t) + \\ +(j+1)\lambda\Delta t P_{j+1}(t) + o(\Delta t), \qquad 0 < j \le (N-m); \\ [N-(j-1)]\mu\Delta t P_{j-1}(t) + \{1 - [j\lambda + (N-j)\mu]\Delta t\}P_j(t) + \\ +(j+1)\lambda\Delta t P_{j+1}(t) + o(\Delta t), \qquad (N-m) < j < N; \end{cases}$$

$$\boldsymbol{P_N(t+\Delta t)} = P_{N-1}(t)P_{N-1,N}(\Delta t) + P_N(t)P_{NN}(\Delta t) + o(\Delta t) =$$
$$= m\mu\Delta t P_{N-1}(t) + (1 - N\lambda\Delta t)P_N(t) + o(\Delta t)$$

# Функция готовности ВС

Перенеся $P_j(t), j \in E_0^N$ в левую часть последний равенств, разделив на $\Delta t$ и перейдя в к пределу при $\Delta t \to 0$, получим:

$$P_0'(t) = -m\mu P_0(t) + \lambda P_1(t);$$

$$P_j'(t) = \begin{cases} m\mu P_{j-1}(t) - (j\lambda + m\mu)P_j(t) + (j+1)\lambda P_{j+1}(t), \\ 0 < j \le (N-m); \\ [N-(j-1)]\mu P_{j-1}(t) - [j\lambda + (N-j)\mu]P_j(t) + (j+1)\lambda P_{j+1}(t), \\ (N-m) < j < N; \end{cases} \quad (4)$$

$$P_N'(t) = \mu P_{N-1}(t) - N\lambda P_N(t)$$

Начальные условия могут быть заданы в следующем виде:

$$P_j(0) = 0, \qquad j \ne i, \qquad P_i(0) = 1, \qquad i, j \in E_0^N$$

Задача интегрирования системы уравнений относительно неизвестных функций $P_j(t), j \in E_0^N$, разрешима. Практически отыскание решения при заданных начальных условиях - численными методами и по описанной ранее схеме. Расчет $P_j(t)$ для большемасштабных ВС трудоёмок.

# Функция готовности ВС

При изучении поведения большемасштабных ВС можно строить математические модели с числом ЭМ, равным бесконечности ($N \to \infty$). Это существенно упрощает расчёт функции готовности. Модернизируем обозначения.

Пусть $E_0^\infty = \{0,1,2,\dots\}$ – пространство состояния системы; $P_j(t)$ – вероятность того, что ВС в момент времени $t \geq 0$ имеет $j \in E_0^N$ исправных машин. Тогда для расчёта функции готовности ВС следует вместо $S(t) = \sum_{j=n}^{N} P_j(i,t)$ использовать формулу:

$$S(t) = \sum_{j=n}^{\infty} P_j(t) = 1 - \sum_{j=0}^{n-1} P_j(t)$$

# Функция готовности ВС

Очевидно, что $N \to \infty$ число отказавших ЭМ системы будет больше числа $m$ ВУ. Тогда при любом состоянии ВС и для любого момента времени будет занято $m$ ВУ:

$$P_{l,l+1}(\Delta t) = m\mu\Delta t + o(\Delta t), \qquad l \in E_0^\infty$$

Учёт полученной формулы позволяет преобразовать систему (4) к более простому виду:

$$\begin{cases} P_0'(t) = -m\mu P_0(t) + \lambda P_1(t) \\ P_j'(t) = m\mu P_{j-1}(t) - (j\lambda + m\mu)P_j(t) + (j+1)\lambda P_{j+1}(t), \qquad j \geq 1 \end{cases}$$

При этом нормировочное условие принимает вид $\sum_{j=0}^{\infty} P_j(t) = 1$

## Функция готовности ВС

Решение однородной системы (5) обыкновенных линейных ДУ первого порядка может быть найдено **методом производящих функций**

$$P_j(t) = e^{-\frac{m\mu}{\lambda}\left(1-e^{-\lambda t}\right)} \sum_{l=0}^{j} b_l(t) \frac{\left(\frac{m\mu}{\lambda}\right)^{j-l} \left(1 - e^{-\lambda t}\right)^{j-l}}{(j-l)!}$$

где $b_l(t)$ определяются из неравенства

$$\sum_{l=0}^{\infty} b_l(t) x^l = \sum_{l=0}^{\infty} P_l(0)\left(xe^{-\lambda t} + 1 - e^{-\lambda t}\right)^l,$$

$$\sum_{l=0}^{\infty} P_l(0) = 1, \qquad |x| \leq 1, \qquad j \in E_0^{\infty}$$

Данные формулы позволяют анализировать готовность ВС с массовым параллелизмом.

П.Мондриан. Серое дерево