Лабораторная работа 3 [1, Задача II, С. 196-198]

Имеется распределенная вычислительная система (ВС) состоящая из n элементарных машин (ЭМ). Программным путем система может быть разбита на n подсистем различных рангов: из одной машины, из двух, …, из n машин. В различных подсистемах могут одновременно выполняться параллельные программы.

На вход в систему поступает поток параллельных задач различных рангов. Пусть спрос a_j на подсистему ранга j есть непрерывная случайная величина с плотностью распределения вероятностей $p_j(a_j)$. Тогда математическим ожиданием спроса на подсистему ранга j будет

$$\rho_j = \int_0^\infty a_j p_j(a_j) da_j .$$

Обозначим через d_j цену эксплуатации, а за c_j – стоимость эксплуатации подсистемы ранга j в течение длительного промежутка времени T.

Если спрос на подсистему ранга j за время T превысит число организованных подсистем ранга j, то убыток составит $d_j - c_j$ за каждый неудовлетворенный спрос. С другой стороны, если организовано подсистем ранга j больше, чем требуется, то убыток составит c_j на каждую избыточную подсистему.

Требуется найти значения неизвестных $x_1, x_2, \ldots, x_n$, где x_j – количество организуемых подсистем ранга j. Разбиение $x_1, x_2, \ldots, x_n$ должно максимизировать ожидаемую прибыль за время T.

Ожидаемые потери от недостатка подсистем ранга j составят

$$(d_j - c_j)\int_{x_j}^\infty (a_j - x_j) p_j(a_j) da_j ,$$

а ожидаемые потери от избытка –

$$c_j \int_0^{x_j} (x_j - a_j) p_j(a_j) da_j = c_j(x_j + \rho_j) + c_j \int_{x_j}^\infty (a_j - x_j) p_j(a_j) da_j .$$

Математическое ожидание прибыли при эксплуатации ВС равно:

$$\sum_{j=1}^n (d_j - c_j)\rho_j - \sum_{j=1}^n c_j(x_j + \rho_j) - \sum_{j=1}^n d_j \int_{x_j}^\infty (a_j - x_j) p_j(a_j) da_j ,$$

или

$$\sum_{j=1}^n (d_j \rho_j - c_j x_j - d_j \int_{x_j}^\infty (a_j - x_j) p_j(a_j) da_j).$$

Итак, требуется найти разбиение $x_1, x_2, \ldots, x_n$ системы на подсистемы, доставляющее минимум целевой функции F и удовлетворяющее системе ограничений:

$$F(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \sum_{j=1}^n (c_j x_j + d_j \int_{x_j}^\infty (a_j - x_j) p_j(a_j) da_j) \to \min_{(x_j)}$$

при ограничениях:

$$\sum_{j=1}^{n} jx_j \le n,$$

$$x_j \ge 0, \quad j = 0, 1, \ldots, n.$$

Сформулированная задача относится к дискретной оптимизации и может быть решения методом динамического программирования [1, С. 207-209].

В рамках лабораторной работы требуется выполнить нижеследующие задания.

1. Написать программу решения сформулированной задачи методом динамического программирования. В качестве входных параметров программа получает количество n машин в системе, значения: $c_1, c_2, \ldots, c_n$; $d_1, d_2, \ldots, d_n$; $\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_n$. Считать, что спрос на подсистему ранга j имеет пуассоновское распределение с параметром ρ_j.

2. Исследовать зависимость значения целевой функции F от значений параметров c_j и d_j.

Контрольные вопросы

1. Объяснить суть подхода к организации функционирования распределенных ВС с использованием аппарата стохастического программирования.
2. Когда следует осуществлять построение нового разбиения системы?

Литература

1. Евреинов Э.В., Хорошевский В.Г. Однородные вычислительные системы. – Новосибирск: Наука, 1978. – 319 с.