

# **Лекция 5. Режим обслуживания потока задач**

**Кулагин Иван Иванович**

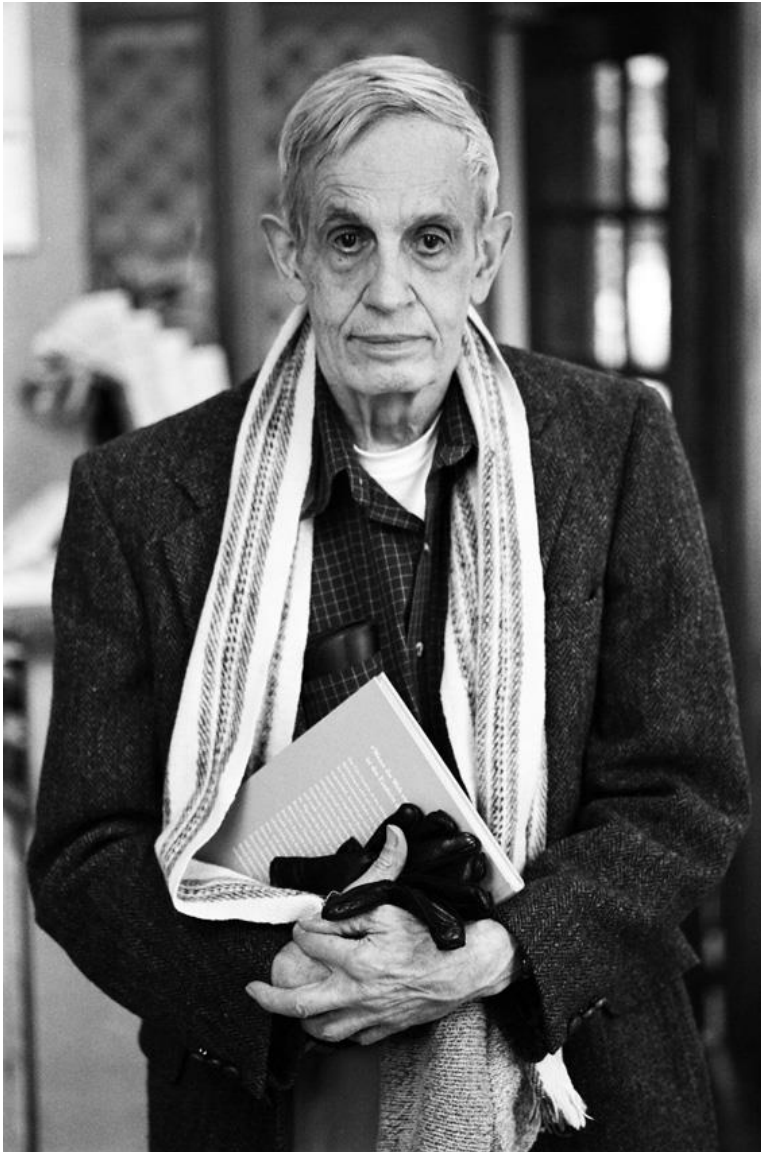
ст. преп. Кафедры вычислительных систем  
Сибирский государственный университет  
телекоммуникаций и информатики

**Created by:**

Пазников Алексей Александрович  
к.т.н. доцент Кафедры вычислительных систем



# Теоретико-игровой подход к проблеме организации функционирования ВС



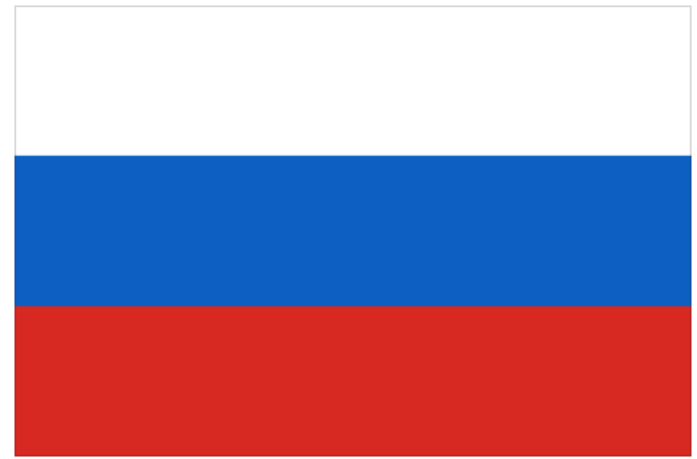
**Джон Нэш** (John Nash; род.1928)

- Американский математик, работающий в области теории игр и дифференциальной геометрии.
- Лауреат Нобелевской премии по экономике 1994 года «За анализ равновесия в теории некооперативных игр».
- Известен широкой публике большей частью по биографической драме Рона Ховарда «Игры разума» (англ. A Beautiful Mind) о его математическом гении и борьбе с шизофренией.



# Теоретико-игровой подход к проблеме организации функционирования ВС

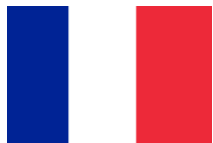
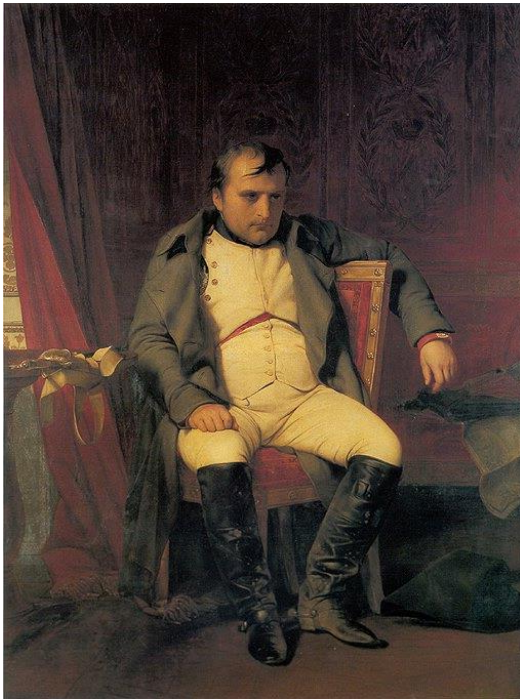
- В теории игр рассматриваются ситуации, связанные с принятием решений, в которых **два противника имеют конфликтующие цели.**





# Теоретико-игровой подход к проблеме организации функционирования ВС

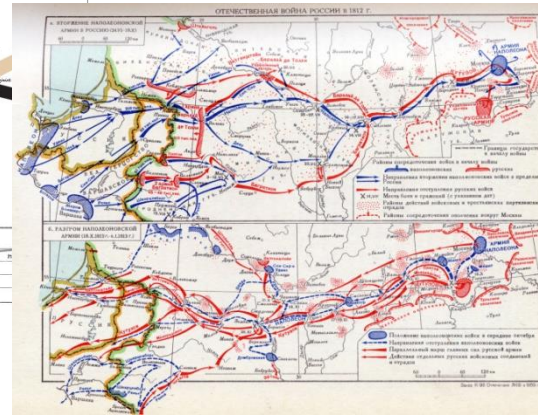
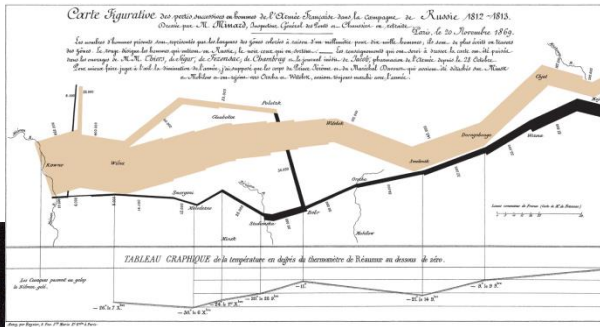
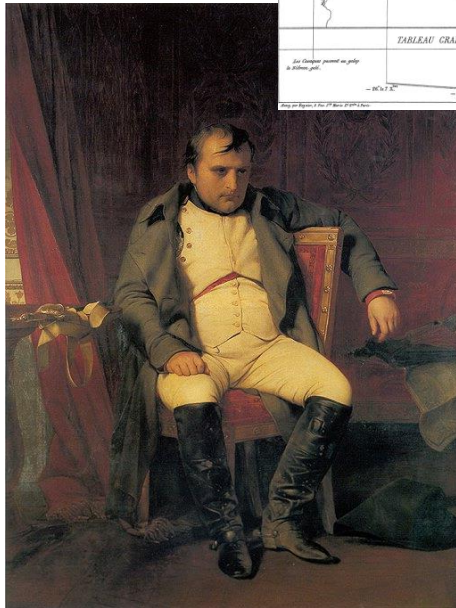
- В игровом конфликте участвуют два противника, именуемые **игроками**, каждый из которых имеет множество возможных выборов, которые называются стратегиями





# Теоретико-игровой подход к проблеме организации функционирования ВС

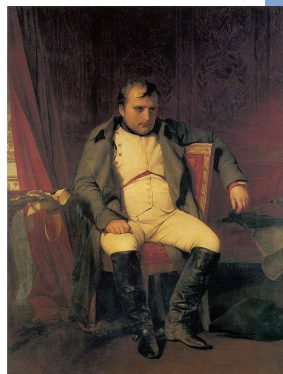
- Каждый из игроков имеет некоторое множество возможных выборов, которые называются **стратегиями**.







# Теоретико-игровой подход к проблеме организации функционирования ВС

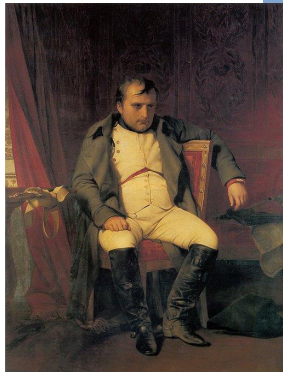


	$B_1$	$B_2$	...	$B_n$
$A_1$	$a_{11}$	$a_{12}$	...	$a_{1n}$
$A_2$	$a_{21}$	$a_{22}$	...	$a_{2n}$
...	...	...	...	...
$A_m$	$a_{m1}$	$a_{m2}$	...	$a_{mn}$

- С каждой парой стратегий связан **платёж**, который один из игроков выплачивает другому.
- Такие игры известны как **игры двух лиц с нулевой суммой**.



# Теоретико-игровой подход к проблеме организации функционирования ВС



	$B_1$	$B_2$	...	$B_n$
$A_1$	$a_{11}$	$a_{12}$	...	$a_{1n}$
$A_2$	$a_{21}$	$a_{22}$	...	$a_{2n}$
...	...	...	...	...
$A_m$	$a_{m1}$	$a_{m2}$	...	$a_{mn}$

- Если игрок  $A$  использует стратегию  $i$ , а игрок  $B$  – стратегию  $j$ , то:
- платёж игроку  $A$  составляет  $a_{ij}$ ,
  - платёж игроку  $B$  составляет  $-a_{ij}$





# Теоретико-игровой подход к проблеме организации функционирования ВС



**Что является оптимальным решением игры?**





# Теоретико-игровой подход к проблеме организации функционирования ВС

- **Оптимальным решением игры** является одна или несколько стратегий для каждого из игроков, при котором любое отклонение от данных стратегий не улучшает плату тому или другому игроку.
- Эти решения могут быть в виде единственной **чистой** стратегии
- или нескольких стратегий, которые являются **смешанными** в соответствии с заданными вероятностями.



# Решение в чистых стратегиях

	$B_1$	$B_2$	$B_3$	$B_4$
$A_1$	8	-2	9	-3
$A_2$	6	<b>5</b>	6	8
$A_3$	-2	4	-9	5

Минимумы  
строк

-3

**5** *максимин*

-9

Максимумы  
столбцов

8

**5**

9

8

*минимакс*



## Теоретико-игровой подход к проблеме организации функционирования ВС

- Решение может быть основано на обеспечении **наилучшего результата из наихудших** для каждого игрока.
- Критерий наилучшего результата из наихудших соответствует выбору **минимаксному значению**.
- Оптимальным решением в игре является выбор стратегий  $A_2$  и  $B_2$ .
- При этом цена игры составляет 5 и игроки А и В используют стратегии, соответствующие **седловой точке**.



# Решение в смешанных стратегиях

	$B_1$	$B_2$
$A_1$	1	-1
$A_2$	-1	1

Минимумы  
строк

-1

-1

Максимумы  
столбцов

1

1





# Теоретико-игровой подход к проблеме организации функционирования ВС

ВЦ

ВС

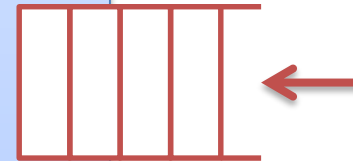
ЭМ<sub>1</sub>

ЭМ<sub>2</sub>

ЭМ<sub>3</sub>

⋮

ЭМ<sub>n</sub>



Диспетчер





**Дано:** ВЦ, на котором эксплуатируется ВС из  $n$  ЭМ, и диспетчер.

**Требуется** выделять вычислительные ресурсы для задач.



## Задача 1. [Евреинов, Хорошейвский, с. 185]

Имеется ВЦ, эксплуатирующий ВС из  $n$  ЭМ

ВЦ для решения задач может выставлять любое число ЭМ

$$i \in E = \{0, 1, \dots, n\}$$

На ВЦ поступает поток задач различных рангов

Считается, что интенсивность такая, что имеются задачи всех рангов.



## Теоретико-игровой подход к проблеме организации функционирования ВС

Считается, что интенсивность такая, что имеются задачи всех рангов.

Считаем, что построены пакеты задач  $r_j'$

Имеется диспетчер, который в дискретные моменты времени  $t = 0, 1, 2, \dots$  назначает на ВС задачи с различным рангом

**Имеется игра** с участием двух игроков: ВЦ и диспетчера  
ВЦ использует *чистую стратегию*  $i \in E$ , если для решения задач отводит  $i$  ЭМ

Диспетчер использует *чистую стратегию*  $j$ , если для решения он назначает задачу ранга  $j$ .





## Теоретико-игровой подход к проблеме организации функционирования ВС

Если ВЦ выбирает стратегию  $i$ , а диспетчер стратегию  $j$ , то диспетчер “платит” ВЦ сумму  $c_{ij}$ ,  $c = \| c_{ij} \|$  - матрица платежей.



# Теоретико-игровой подход к проблеме организации функционирования ВС

Если ВЦ применяет смешанную стратегию  $P = \{p_0, p_1, \dots, p_n\}$ , а диспетчер – смешанную стратегию  $\Pi = \{\pi_0, \pi_1, \dots, \pi_n\}$ , то средний платёж вычислительному центру составит

$$\sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^n c_{ij} p_i \pi_j$$

$p_i$  и  $\pi_i$  – вероятности выбора соответственно вычислительным центром стратегии с номером  $i$  и диспетчером стратегии с номером  $j$ .



# Теоретико-игровой подход к проблеме организации функционирования ВС

ВЦ имеет оптимальную смешанную стратегию  $P^* = \{p_0^*, p_1^*, \dots, p_n^*\}$ , а диспетчер – оптимальную смешанную стратегию  $\Pi^* = \{\pi_0^*, \pi_1^*, \dots, \pi_n^*\}$  такие что

$$\sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^n c_{ij} p_i^* \pi_j \geq V \geq \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^n c_{ij} p_i \pi_j^*$$

$$V = \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^n c_{ij} p_i^* \pi_j^*$$

Требуется для заданной матрицы платежей найти решение  $\{P^*, \Pi^*\}$  и цену  $V$  игры



## Подбор элементов платёжной матрицы

Будем считать, что если  $i, j$  – чистые стратегии соответственно ВЦ и диспетчера, то элементы матрицы платежей

$$c_{ij} = \begin{cases} jc_1 + (i - j)c_2 & \text{при } i \geq j, \\ jc_1 + (j - i)c_3 & \text{при } i < j, \end{cases}$$

$c_1$  – платёж за использование одной машины в течение единицы времени

$c_2$  – штрафы в единицу времени за простой одной машины  $(i - j)$  машин

$c_3$  – штраф за недостающие машины  $(j - i)$  машин





Наиболее вероятно, что в на ВЦ будут поступать задачи всех рангов. Поэтому алгоритм функционирования ВС, состоящий в назначении задач одного ранга, представляется неэффективным. Следовательно, игра не должна иметь решения в чистых стратегиях, т.е. матрица  $\|c_{ij}\|$  **не должна иметь седловых точек.**



**Теорема.** Матрица  $c_{ij}$  не имеет седловых точек тогда и только тогда, когда  $c_1 < \min\{c_2, c_3\}$



## Доказательство.

Необходимость Пусть матрица  $\|c_{ij}\|$  не имеет седловых точек. Из определения  $c_{ij}$  следует, что максимальным элементом 0-столбца является  $c_{n0}$ . Так как по условию  $\|c_{ij}\|$  не имеет седловых точек, то  $c_{n0}$  не должен быть минимальным в своей строке. Минимум в последней строке должен достигаться в  $c_{nn}$ . Значит,  $c_{nn} < c_{n0}$ , но так как  $c_{n0} = nc_2$ , а  $c_{nn} = nc_1$ , то  $c_1 < c_2$

Аналогично рассуждая для 0-строки и  $n$ -столбца, получим  $c_1 < c_3$ . Необходимость доказана.



## Достаточность

Если  $c_1 < \min\{c_2, c_3\}$ , то легко увидеть, что диагональные элементы являются минимальными в своей строке и в своём столбце, причём минимум строгий. Следовательно, матрица не имеет седловых точек.







**Имеется** ВС из  $n$  ЭМ и множество  $J = \{1, 2, \dots, m\}$  задач.

Задачи характеризуются рангом  $r_j$  и временем  $t_j$  решения.

**Требуется** множество всех задач ранга  $r$ ,  $i \leq r \leq n$ , разбить на подмножества так, чтобы в каждое из них входили задачи, суммарное время решение которых было близко к заданному значению  $\Theta$ .



## Стохастический алгоритм формирования пакетов задач

**Пусть** подмножества  $J^r \subseteq J$ ,  $r = 1, \dots, n$  – такие, что в  $J^r$  входят все задачи  $I_i^r \in J$ ,  $i = 1, 2, \dots, a$ , которые имеют ранг  $r$ . Время решения этих задач

$$T_r = \sum_{i=1}^a t_i^r$$



Пусть также  $J' = \{I_1^r, I_2^r, \dots, I_i^r, \dots, I_a^r\}$  – некоторая последовательность, членами которой являются элементы  $J_i^r$ . Подмножество  $J_j \subseteq J'$  включает в себя  $k_j$  задач, причём

$$J_j = \bigcup_{i=K_j+1}^{K_j+k_j} J_i^r,$$

где

$$K_j = \sum_{s=0}^{j-1} k_s, \quad k_0 = 0, \quad j = 1, 2, \dots, L_r, \quad L_r = \lceil T_r / \Theta \rceil$$

( $L_r$  – ближайшее к  $T_r / \Theta$  целое число,  $L_r \geq T_r / \Theta$ )



## Стохастический алгоритм формирования пакетов задач

Каждое подмножество  $J_j \subset J'$ ,  $j = 1, 2, \dots, L_r$ , назовём укрупнённой задачей  $b_j$  ранга  $r$ . Время решения таких задач

$$T_j = \sum_{i=K_j+1}^{K_j+k_j} t_i^r$$

Будем считать, что для пакет укрупнённых задач ранга  $r$  сформирован, если справедливо равенство

$$|T' - \Theta| = o(T'),$$

где  $T' = \max_{J_j \subset J} \{T_j\}$



## Стохастический алгоритм формирования пакетов задач

Подмножества  $J_j \subset J'$  выбираются следующим образом.

Пусть построены подмножества  $J_s \subset J'$ ,  $s = 1, 2, \dots, j - 1$ , тогда подмножества

$$J_j = \begin{cases} J_j'', k_j = k'_j, \text{ если } (\Theta_u)_j > [T_j - (\Theta_b)_j](L_r - j)^{-1} \\ J_j'' \cup I_{K_j+k'_j+1}, k_j = k'_j + 1, \text{ в противном случае} \end{cases}$$

где  $J_j''$  – часть последовательности  $J'$  такая, что

$$J'_j = \{I_{K_j+1}, I_{K_j+2}, \dots, I_{K_j+k'_j}\}, \quad T^j = \sum_{i=K_j+1}^{L_r} t_i^r$$

а для величин  $(\Theta_u)_j$  и  $(\Theta_b)_j$  справедливы соотношения

$$\sum_{i=K_j+1}^{K_j+k'_j+1} t_i^r = (\Theta_u)_j > \Theta, \quad \sum_{i=K_j+1}^{K_j+k'_j} t_i^r = (\Theta_b)_j \leq \Theta$$



**Требуется** найти такую последовательность  $J'^*$  задач, которая обеспечит выполнение условия

$$|T' - \Theta| = o(T') \quad (*)$$

Последовательность  $J'^*$  отыскивается с помощью **метода цепей Монте-Карло**





## Стохастический алгоритм формирования пакетов задач

1. Последовательность  $J'$  принимается за базовую.
2. Рассматриваем перестановки, находящиеся на расстоянии не больше  $k$ ,  $k \leq a$ , от базовой. В качестве *расстояния* между двумя последовательностями  $J'$  и  $J''$  принимают число индексов в  $J''$ , которые не следуют за теми же индексами, что и в базовой  $J'$ .



## Стохастический алгоритм формирования пакетов задач

3. Сначала получаем  $k - 1$  переменных  $x_i$  в непрерывном интервале  $(0, a)$ :  $x_i = a\xi_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, k - 1$ , где  $\xi_i \in U(0, 1)$ .
4. Если  $0 = x_0 \leq x_1 \leq \dots \leq x_i \leq x_k = a$ , то  $x_i$  делят последовательность  $J'$  на  $k$  частей  $J^s \subseteq J$ ,  $s = 1, 2, \dots, k$ , содержащих задачи, номера которых являются целыми числами в  $(x_{i-1}, x_i]$ . Некоторые части могут оказаться пустыми. Случайная перестановка этих частей даёт новую последовательность  $J''$  с расстоянием не больше  $k$  от базовой.
5. Если  $T''$  для новой последовательности  $J''$  меньше  $T$ , т.е. наилучшим образом удовлетворяет (\*), то  $J''$  берётся в качестве базовой.



6. Если сделано  $d$  попыток моделирования последовательностей с расстоянием  $k$  от базовой без изменения базовой, то рассматриваются последовательности с расстоянием  $k / 2$  и так далее до тех пор, пока не будут смоделированы последовательности расстоянием 2.



Д. Поллок «Человек с ножом»