経済数理

2025 年 1 月 18 日

1　集合論

$\mathbb{N}$: 自然数全体の集合
$\mathbb{Z}$: 整数
$\mathbb{Q}$: 有理数
$\mathbb{R}$: 実数
$\mathbb{C}$: 複素数

・A, B は集合。$A \subset B$ かつ $A \neq B$ のとき、$A \subsetneq B$ と略記する。A は B の**真部分集合**という。

1.1　演算

- $A \setminus B := \{x \mid x \in A$ かつ $x \notin B\}$ を A と B の**差集合**という。

- de morgen の法則
  X, A, B : 集合

$$\begin{cases} X \setminus (A \cup B) = (X \setminus A) \cap (X \setminus B) \\ X \setminus (A \cap B) = (X \setminus A) \cup (X \setminus B) \end{cases}$$

  全体集合 X が定まっていたとき (すべての考える集合が X の部分集合のとき)、

$$X \setminus A =: A^c \quad \text{補集合 (Complement)}$$
$$(A \cup B)^c = A^c \cap B^c \iff (A \cap B)^c = A^c \cup B^c$$

1.2　写像

すべての A の元に対し、B の元がただ 1 つ対応する規則 f のことを A から B への写像といい、$f : A \to B$ と表す。
ex) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \quad x \mapsto sin(x)$

$$f(\mathbb{R}) = \{x \in \mathbb{R} \mid -1 \leq x \leq 1\} =: [-1, 1]$$
$$f^{-1}(0) = \{n\pi \mid n \in \mathbb{Z}\}$$

$f : A \to B,\ g : B \to C$ を写像とすると、$g(b)$ の b に $f(a)$ を代入することにより、A から C への新たな写像を定義することができる。これを $f : A \to B$ と $g : B \to C$ の**合成写像**といい、記号 $g \circ f : A \to C$ で表す。

$$g \circ f(a) = g(f(a))$$

◯集合の演算と写像の関係：

<u>定理</u>

$$f : A \to B, \quad A_1, A_2 \subset A, \quad B_1, B_2 \subset B$$

(1) $f(A_1 \cup A_2) = f(A_1) \cup f(A_2)$

(2) $f(A_1 \cap A_2) \subset f(A_1) \cap f(A_2)$　単射ならば包含の逆も成立

(3) $f^{-1}(B_1 \cup B_2) = f^{-1}(B_1) \cup f^{-1}(B_2)$

(4) $f^{-1}(B_1 \cap B_2) = f^{-1}(B_1) \cap f^{-1}(B_2)$

(5) $A_1 \subset f^{-1}(f(A_1))$　単射ならば包含の逆も成立

(6) $f(f^{-1}(B_1)) \subset B_1$　全射ならば包含の逆も成立

(7) $f(A_1 \setminus A_2) \supset f(A_1) \setminus f(A_2)$　単射ならば包含の逆も成立

(8) $f^{-1}(B_1 \setminus B_2) = f^{-1}(B_1) \setminus f^{-1}(B_2)$

例) $f : \{-2, -1, 0, 1, 2\} \to \{0, 1, 2, 3, 4, 5\} \quad n \mapsto n^2$ について、$A_1 := \{1, -1, 2\}, A_2 := \{-1, -2\}$ とする。

$$\begin{aligned}
&A_1 \cap A_2 = \{-1\} \\
\therefore\ &f(A_1 \cap A_2) = \{1\}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&f(A_1) = \{1, 4\} = f(A_2) \\
\therefore\ &f(A_1) \cap f(A_2) = \{1, 4\} \\
\therefore\ &f(A_1 \cap A_2) \subsetneq f(A_1) \cap f(A_2) \quad \text{(2)の例}
\end{aligned}$$

$$f^{-1}(A_1) = \{-2, -1, 1, 2\} \supsetneq A_1 \quad \text{(5)の例}$$

$$\begin{aligned}
&A_1 \setminus A_2 = \{1\} \\
\therefore\ &f(A_1 \setminus A_2) = \{1\} \\
&f(A_1) \setminus f(A_2) = \emptyset \\
\therefore\ &f(A_1 \setminus A_2) \supsetneq f(A_1) \setminus f(A_2) \quad \text{(7)の例}
\end{aligned}$$

1.3　可算集合、非可算集合

<u>定義</u>

集合 A, B に対し、A と B は濃度が等しいとは、全単射 $f : A \to B$ が存在するときとする。そのとき、それを

$$|A| = |B|$$

という記号で表す。

Bernstein の定理

$$|A| \le |B| \text{ かつ } |A| \ge |B| \quad \Rightarrow \quad |A| = |B|$$

定理：$\mathbb{R}$ は非可算集合である。

例)：$|\mathbb{N}| < |\mathbb{R}|$

(Cantor の対角線論法)

Proof. 半開区間 [0,1) が可算集合だと仮定して、矛盾を導けば十分である。つまり、$|(0,1]| \le \mathbb{R}$ なので、$|\mathbb{N}| < |(0,1]|$ が示されればよい。$|\mathbb{N}| = |(0,1]|$ を仮定し、背理法により示す。仮定より

$$\exists a : \mathbb{N} \to (0,1] : \text{全単射}$$

各 $n \in \mathbb{N}$ に対して、$a(n)$ の 2 進小数展開を考える。

$$\begin{aligned} &a(0) = 0.a_{00}\,a_{01}\,a_{02}... \\ &a(1) = 0.a_{10}\,a_{11}\,a_{12}... \\ &a(2) = 0.a_{20}\,a_{21}\,a_{22}... \\ &: \\ &: \\ &b_n := \begin{cases} 0 & \text{if } a_{nm} = 1 \\ 1 & \text{if } a_{nn} = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

$b := 0.\,b_0\,b_1\,b_2...$ とすると、$b \in (0,1]$ だが、すべての $n \in \mathbb{N}$ に対し $a(n)$ とは 2 進小数展開の n 番目が異なるので、$n \in \mathbb{N} < 1\ a(n) = b \quad \therefore a$ の全射性に矛盾。 □

定理 (Cantor)：任意の集合に対し、$|A| < |2^A|, \qquad |\mathbb{N}| < |\mathbb{R}| = |2^{\mathbb{N}}| < |2^{\mathbb{R}}| < ...$

2　位相

位相空間が何をしたいのかを直感的に理解する

位相とは「近さのルール」

位相空間を考える目的は、**「ものごとの近さや連続性を考えるために必要なルール」**を定義することにあります。距離の概念がある場合はもちろん、距離を使わずに「近い」「連続性」を定めたい場合にも位相空間が使われます。

例え話で考える

例 1: 地図を考える

- 集合 X: 世界地図上のすべての都市の集合。
- 位相 τ:「どの都市が互いに近い」と感じるルール。

例えば：

- τ を「飛行機で直接行ける都市どうしが近い」と考える場合、ある種の「開集合」を定義することになります。
- 別の位相を選べば、「車で直接行ける都市だけを近いとみなす」といった異なる「近さのルール」を構築できます。

例 2: インターネットの接続網

- 集合 X: 世界中のすべてのウェブページ。
- 位相 τ: どのウェブページが互いにリンクされているかというルールを「位相」として定める。

「リンクされているページどうしが近い」とみなす場合、この位相を使ってウェブ全体の構造を研究できます。また、別の位相では「特定のカテゴリ（例えば同じニュースサイト内）のみを近いとみなす」ことも可能です。

なぜ位相空間を考えるのか？

通常、空間を考えるときは「距離」で考えます（例: 地図上で都市間の距離を測る）。しかし、**距離がなくても「近さ」や「連続性」を考えたい場合**があります。

- 例 1: ページ間の「物理的な距離」よりも「リンクのつながり」の方が重要な場合。
- 例 2: 人間関係や交通網のように、関係性そのものが重要な場合。

距離を捨てて、「開集合」という概念を使って近さや連続性を表現するのが位相空間の目的です。

位相の具体例

ユークリッド空間の例

- 集合 $X = \mathbb{R}^2$: 平面上のすべての点。
- 位相（近さのルール）:「開円盤」を使います。

開集合の定義：

$$B(x, \varepsilon) = \{y \in \mathbb{R}^2 \mid \|y - x\| < \varepsilon\}$$

これに基づき、任意の開集合 $U \subseteq \mathbb{R}^2$ を以下のように定義します：

$$U = \bigcup_{i \in I} B(x_i, \varepsilon_i), \quad B(x_i, \varepsilon_i) \text{ は開基の要素}$$

別の位相の例

- 集合 $X = \mathbb{R}^2$: 同じ平面。
- 位相（ルール）:「縦または横方向の長方形」を使います。

開集合の定義：

$$B(x, \varepsilon) = \{y \in \mathbb{R}^2 \mid x_1 - \varepsilon < y_1 < x_1 + \varepsilon,\ x_2 - \varepsilon < y_2 < x_2 + \varepsilon\}$$

このように、位相の選び方によって「近いとみなす範囲」が変わります。

何が変わるのか？

位相を定義することで、次のことが可能になります：

1. **連続性を考えられる**: 点 x から点 y にスムーズに行けるか（空間の「途切れ」を調べる）。
2. **空間の性質を調べられる**: コンパクト性、連結性などの性質を位相のルールに基づいて議論できる。

もっと身近な例

- **電車の路線図**:
  - X: 駅の集合。
  - τ:「直接接続されている駅どうしが近い」とするルール。

  例えば、路線の接続を基に「駅どうしの近傍」を定義できます。

まとめ

- 位相空間を定義するとは、集合に「近さ」や「連続性」を考えるルールを与えることです。
- 距離や座標に依存しない柔軟な方法で、空間の構造を記述できます。
- 具体例として、地図、ネットワーク、路線図などを「開集合」を使って表現できます。

2.1 収束・連続性 ($\mathbb{R}$ *or* $\mathbb{R}^2$)

最も単純な無限集合は可算無限集合であるが、可算でない無限集合も存在する。実際、実数全体の集合 $\mathbb{R}$ が可算ではない。

実数の連続性の定義（ε-δ 論法）

関数 $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ が点 $x = a$ で連続であるとは、以下を満たすことである：

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 \text{ s.t. } |x - a| < \delta \implies |f(x) - f(a)| < \varepsilon.$$

例：関数 $f(x) = x^2$ の連続性の証明

関数 $f(x) = x^2$ が $x = 1$ で連続であることを ε-δ 論法で証明する。

Proof. 任意の $\varepsilon > 0$ に対して、$\delta > 0$ を次のように選ぶ：

$$\delta = \min\left(1, \frac{\varepsilon}{3}\right).$$

このとき、$|x-1|<\delta$ を満たす任意の x について、以下が成り立つ：

$$|f(x)-f(1)|=|x^2-1|=|x-1||x+1|.$$

$|x-1|<\delta\leq 1$ より、$x\in(0,2)$ が成り立ち、$|x+1|\leq 3$。よって、

$$|f(x)-f(1)|=|x-1||x+1|\leq\delta\cdot 3.$$

さらに $\delta\leq\frac{\varepsilon}{3}$ より、$|f(x)-f(1)|<\varepsilon$。したがって、$f(x)=x^2$ は $x=1$ で連続である。 $\square$

2.2 距離空間

数直線 $\mathbb{R}$ の各元 x,y に対して

$$d(x,y)=|x-y|$$

とおく。d を $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ 上の関数 (距離関数) であると考える。

定理 関数 $d:\mathbb{R}\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ は次の性質を持つ。

$$\begin{aligned}
&(D1)\quad d(x,y)\geq 0\\
&(D2)\quad d(x,y)=0\iff x=y\\
&(D3)\quad d(x,y)=d(y,x)\\
&(D4)\quad d(x,y)+d(y,z)\geq d(x,z)\quad\text{(三角不等式)}
\end{aligned}$$

2.3 位相空間

定義 (開集合の公理) 集合 X の部分集合の族 $\mathcal{O}$ が 3 条件

$(O1)$ $X\in\mathcal{O}$, $\emptyset\in\mathcal{O}$

$(O2)$ $\mathcal{O}$に属する2個の集合の共通部分は$\mathcal{O}$に属する。 $\iff$ $U_1,U_2\in\mathcal{O}\Rightarrow U_1\cap U_2\in\mathcal{O}$

$(O3)$ $\mathcal{O}$に属する任意個の集合の和集合は$\mathcal{O}$に属する。 $\iff$ $U_\lambda\in\mathcal{O}(\forall\lambda\in\Lambda)\Rightarrow\bigcup_{\lambda\in\Lambda}U_\lambda\in\mathcal{O}$

を満たすとき、$\mathcal{O}$ を X の位相といい、位相の定まった集合 $(X,\mathcal{O})$ を位相空間という。$\mathcal{O}$ に属する集合を X の**開集合**という。X の元を点という。

離散位相と密着位相

離散位相

- 集合: $X=\{a,b,c\}$
- 位相 τ:

$$\tau=\{\emptyset,\{a\},\{b\},\{c\},\{a,b\},\{a,c\},\{b,c\},\{a,b,c\}\}$$

- ここで、すべての部分集合が開集合です。

密着位相

- 集合: $X = \{a, b, c\}$
- 位相 τ:

$$\tau = \{\emptyset, \{a, b, c\}\}$$

- ここでは、空集合と全体集合だけが開集合です。

開基や準開基の視点から

- 離散位相では、開基を

$$\mathcal{B} = \{\{a\}, \{b\}, \{c\}\}$$

として指定できます。
- 密着位相には開基が存在しません（全体集合だけで構成されるため）。

2.4 閉集合

定義 (閉集合)　(X, d) : 距離空間

$$\begin{aligned}&F \subset X\text{が閉集合}\\&:\Longleftrightarrow\ \forall (x_n)_{n\geq 0} \subset F \qquad s.t.\ \varinjlim x_n = x \in X\\&\Rightarrow x \in F\end{aligned}$$

補題

$$F \subset X : \text{閉集合} \quad \Longleftrightarrow \quad F^c \subset X : \text{開集合}$$