Analisi Numerica

Appunti di Morello Filippo

II semestre 2025

Indice

1 Introduzione

def. ANALISI NUMERICA: L'Analisi Numerica è la disciplina che sviluppa ed analizza metodi per la risoluzione di problemi della Matematica e delle Scienze applicate con l'ausilio del calcolatore.

Quello che si fa in Analisi numerica è quindi studiare algoritmi per la soluzione approssimata di tali problemi, è necesssario quindi l'uso di un calcolatore su cui implementare tali algoritmi.
Lavorando con i calcolatori bisogna stare attenti agli errori che derivano dalla rapresentazione numerica, pertanto si cercano algoritmi che risolvano i problmei nel minimo tempo possibile (quindi con una complessità temporale ottima) e che abbiano la massima accuratezza possibile.

Per questo corso, l'implementazione degli algoritmi avverrà per mezzo di MatLab.

Esempi di problemi risolvibili dall'analisi numerica

Alcuni esempi di problemi che si riusciranno a risolvere sono ad esempio, equazioni trascendentali:

$$x^2 - 3\sin x = \log x$$

$$e^{x-2} = \sqrt{x^2+1}$$

Integrali definiti:

$$\int_1^2 \sin(x^2)\,dx$$

$$\int_{-3}^0 \exp(-x^2)\,dx$$

$$\int_\pi^{2\pi} \frac{\sin x}{x}\,dx$$

Eequazioni differenziali: esempio: problema di Cauchy lineare del primo ordine

$$\begin{cases} y'(x) + \sin(\sqrt{x})y(x) = x+1 \\ y(1) = 1 \end{cases}$$

Esempio 1: Fluidodinamica

In fluidodinamica, la correlazione di Colebrook è un'equazione che permette di ricavare il coefficiente di attrito di Darcy λ di un generico fluido in tubi lisci o ruvidi.
Questo legame matematico nasce dalla combinazione di risultati empirici e studi di flusso laminare e turbolento nelle tubature. Fu sviluppata nel 1939 da Colebrook e White.
L'equazione (detta di Colebrook-White) è la seguente:

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda}} = -2\log_{10}\left(\frac{e}{3.51d} + \frac{2.52}{N_R\sqrt{\lambda}}\right)$$

Tale equazione è non lineare e dipende dai seguenti parametri:

- e: scabrezza del tubo (in metri),
- d: diametro del tubo (in metri),
- N_R: numero di Reynolds.

Nota: Non esiste una soluzione esplicita dell'equazione per nessuna combinazione dei parametri.

Esempio 2: Ottica

Per il progetto di una camera a raggi infrarossi, si è interessati a calcolare l'energia emessa da un corpo nero nello spettro (infrarosso) compreso tra le lunghezze d'onda $3\,\mu$m e $14\,\mu$m.
La risoluzione di questo problema si ottiene calcolando il valore del seguente integrale:

$$I = E(T) = 2.39 \cdot 10^{-11} \int_{3\cdot 10^{-4}}^{14\cdot 10^{-4}} \frac{1}{x^5 \left(\exp\left(\frac{1.432}{T\cdot x}\right) - 1\right)}\, dx$$

che rappresenta l'equazione di Planck per l'energia, dove x è la lunghezza d'onda (in cm) e T la temperatura in gradi Kelvin del corpo nero.
Si vuole approssimare, per esempio, il valore di $E(T_0)$ con $T_0 = 215\,\mathrm{K}$ (gradi Kelvin).
Nota: Non esiste una primitiva esplicita della funzione integranda per nessun valore di T.

Esempio 3: Fattorizzazioni di matrici in Data Science

Il calcolo matriciale è alla base degli algoritmi di *Data Science e Machine Learning*. I dati sono rappresentati da vettori, matrici o tensori.
Nelle applicazioni, le matrici $(m \times n)$ possono avere dimensioni molto grandi e descrivono dati come:

- **Documenti e parole**: ad esempio, associazioni tra documenti e i termini contenuti.
- **Immagini mediche**: immagini da risonanza magnetica e lesioni tumorali.
- **Social Web**: gruppi del web e utenti individuali.

In molte applicazioni i dati sono rappresentati come tensori:

Esempi:

- **Immagini a colori**: array rappresentati con dimensioni, come 32×32 pixel e 3 stati (RGB).
- **Riconoscimento facciale**: collezione di fotografie della stessa persona con espressioni diverse.

Tipicamente le applicazioni nellanalisi dei dati trattano matrici molto grandi.
Considerare tutti i valori di queste matrici si rivela computazionalmente troppo costoso (e spesso ridondante).

Passaggio fondamentale in Data Analysis
Costruire una rappresentazione compressa della matrice A che la rende più maneggevole e che ne rivela le caratteristiche più importanti.
Ciò si ottiene mediante una:

Approssimazione con matrice di basso rango (low-rank), ovvero:
Data $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$, l'approssimazione di rango k di A (con $k \ll n, m$) è data da

$$A \approx WH$$

dove $W \in \mathbb{R}^{m\times k}$ e $H \in \mathbb{R}^{k\times n}$.
Si immagazzinano soltanto $k(m+n)$ elementi anziché le mn componenti della matrice originale.

Esempio: Il sistema di raccomandazione di Netflix

Il sistema di raccomandazione di Netflix è un esempio di filtraggio di informazioni per prevedere la preferenza che un utente assegnerà a un oggetto (in questo caso, una pellicola).

I dati disponibili

- 100 milioni di valutazioni (da 1 a 5) di 17.000 film.
- 500.000 utenti.
- I dati sono organizzati come tuple: $(\text{Utente}, \text{Film}, \text{Voto})$.

Rappresentazione tramite matrici

I dati sono rappresentati da una matrice A, in cui:

- Ogni elemento non nullo A_{ij} indica il voto (1-5) dato dall'utente j al film i.

Il problema

Dato una terna $(U, F, ?)$ non presente nel database, prevedere come l'utente U valuterà il film F.

Idea

Usare l'estrazione di caratteristiche (*Feature Extraction*) per definire:

- Aspetti fondamentali di ogni film: qualità, genere (azione, commedia, ecc.), attori presenti.
- Preferenze di ogni utente: tipi di di film e star preferite.

Netflix utilizza un sistema di raccomandazione basato su un'approssimazione con matrici di basso rango per prevedere le preferenze degli utenti.

Descrizione del modello

Il sistema considera:

- Una matrice $W \in \mathbb{R}^{17{,}000 \times 40}$ che rappresenta gli aspetti di ciascun film.
- Una matrice $H \in \mathbb{R}^{40 \times 500{,}000}$ che rappresenta le preferenze degli utenti.

Le matrici W e H vengono ottenute minimizzando una funzione di errore:

$$||A - WH||.$$

La matrice di rating R viene definita come:

$$R = WH, \quad \text{dove} \quad R_{ij} = \sum_{k=1}^{40} W_{ik} H_{kj}.$$

Esempio pratico

- La pellicola "Terminator" ha gli aspetti: azione=1.2, sentimentale=-1, ecc.
- Le preferenze dell'utente Paolo sono: azione=3, sentimentale=-1, ecc.

Combinando le informazioni, il gradimento di Paolo per "Terminator" può essere calcolato come:

$$3 \cdot 1.2 + (-1) \cdot (-1) + \ldots = 4.6 + \ldots$$

Un valore relativamente grande di R_{ij} indica che l'utente j darà un voto alto al film i.

2 Aritmetica del calcolatore

Come abbiamo già detto, la soluzione al calcolatore di un problema matematico è affetto da errori di vario tipo:

- ERRORI DI MODELLAZIONE: i modelli servono a rappresentare approssimando la realtà mediante semplificazioni. L'errore è dovuto alla scelta di usare una modellazione matematica della realtà, oltre a errori presenti nei dati sperimentali.
- ERRORI DI TRONCAMENTO: commessi nella trasformazione di un problema matematico di dimensione infinita in una dimensione finita. Il classico esempio è il calcolo dell'integrale definito (somme infinite) approssimato ad una sommatoria di quantità finite.
- ERRORI DI ARROTONDAMENTO: dovuti al fatto che nel calcolatore si possono rappresentare solo un sottoinsieme finito dei numeri reali.

Di questi 3 tipi di errori solamenti i punti 2 e 3 sono oggetto di studio dell'Analisi numerica.

Effetti disastrosi degli errori numerici

Fallimento del missile Patriot: il giorno 25 Febbraio 1991, durante la prima guerra del golfo, un missile Patriot fallì l'intercettazione di un missile Scud iracheno che centrò il suo obiettivo causando la morte di 28 soldati americani e un centinaio di feriti.

- **Causa**: L'orologio interno del sistema misurava il tempo in decimi di secondo, poi questo numero intero veniva moltiplicato per 0.1 per ottenere il tempo in secondi e memorizzato usando soli 24 bit.
- 0.1 **non** ha un'espansione binaria finita $\longrightarrow$ ad ogni decimo di secondo l'errore che si commette è (circa) 0.95×10^{-7} secondi.
- Il computer che regolava i lanci dei Patriot rimase in funzione per 100 ore il che produsse un errore pari a $0.95 \times 10^{-7} \times 10 \times 3600 \times 100 \approx 0.34$ secondi.
- Lo Scud viaggiava a Mach 5 (1700 m/sec) con un conseguente errore nella traiettoria di circa 600 metri.

Esplosione del razzo Ariane 5: Il 4 Giugno 1996, il razzo Ariane 5 esplose dopo 40 secondi dal lancio a causa di un overflow durante la conversione di un numero in virgola mobile a 64 bit in un intero con soli 16 bit. Il numero rappresentava la velocità orizzontale del razzo ed era più grande del massimo valore rappresentabile in 16 bit. Il costo della missione fu di 7.5 miliardi di dollari.
Altri esempi di errori numerici disastrosi:

- Crollo di una piattaforma petrolifera nel Mare del Nord (Norvegia) nel 1991.
- Distruzione del veicolo spaziale Mars Climate Orbiter nel 1999.

Per ulteriori informazioni:

- Pagina del Professor D. Arnold: `http://www.ima.umn.edu/ arnold/disasters/`
- Informazioni su Mars Climate Orbiter: `http://marsprogram.jpl.nasa.gov/msp98/orbiter`

2.1 Sistema Posizionale

def. RAPPRESENTAZIONE POSIZIONALE: fissato un numero $B > 1$, e un numero $x \in \mathbb{R}$, sia x con un numero k finito di cifre d_k, $k = -m, -m+1, ..., -1, 0, +1, ..., n+1$, si definisce x_B la RAPPRESENTAZIONE POSIZIONALE di x in base B:

$$\begin{aligned} x_B &= (-1)^s \left(d_n d_{n-1} \dots d_1 d_0 . d_{-1} \dots d_{-m}\right) \\ &= (-1)^s \left(\sum_{k=-m}^{n} d_k B^k \right) \end{aligned}$$

B è detta BASE, $s = 0$ se il numero è positivo, $s = 1$ se il numero è negativo, $d_k \neq 0$ e $d_k \in \{0, 1, ..., B-1\}$
In generale, ogni $x \in \mathbb{R}$ so scrive, fissata la base B, come:

$$x_B = (-1)^s \left(\sum_{k=0}^{n} d_k B^k \right) + \left(\sum_{k=1}^{m} d_{-k} B^{-k} \right) \text{ con } \ d_n \neq 0$$

dove la prima serie è la parte intera, la seconda la parte frazionaria

OSS: perchè la serie che rappresenta la parte frazionaria converge?
Per maggiorazione, il termine generale

$$d_{-k} \leq (B-1), \text{ con } k = 1, ..., \infty$$

Si ottiene che:

$$(B-1) \left(\sum_{k=0}^{\infty} B^{-k} \right)$$

Tale serie è una serie geometrica convergente (il termine generale $B^{-k} < 0$). Se $\forall d_{-k} = (B-1)$:

$$\begin{aligned} (B-1) \left(\sum_{k=0}^{\infty} B^{-k} \right) &= (B-1) \frac{B^{-1}}{1 - B^{-1}} \\ &= 1 \end{aligned}$$

Questo dimostra che se $d_{-k} = B - 1 \ \forall k \in \mathbb{N}$ la serie converge a 1. Quindi in base 10, il valore di $0.9999... = 1.0$, come in base 2 il numero $0.1111... = 1.0$

OSS: un numero razionale può avere rappresentazione data da un numero finito di cifre in una base e infinito in un'atra: es. se $x = \frac{1}{3}$, in base 10 $x_{10} = 0.\overline{3}$, in base 3 $x_3 = 0.1$

2.1.1 Conversione di base

Conversione da base 2 a 10:
Per trasformare un numerio binario in decimale è sufficente esprimerlo con la sua notazione posizionale. es.

$$\begin{aligned} x &= 10110.011 \\ &= 1 \cdot 2^4 + 0 \cdot 2^3 + 1 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2^1 + 0 \cdot 2^0 + 0 \cdot 2^{-1} + 1 \cdot 2^{-2} + 1 \cdot 2^{-3} \end{aligned}$$

Conversione da base 10 a 2: Suddividiamo il problema nella conversione della parte intera e quella decimale:

- Parte intera: si effettua la divisione della parte intera del numero, si prende il quoziente q_1 e il resto r_1. Si continua nella divisione per due ottendendo un nuovo quoziente q_2 e un resto r_2. Si continua con il procedimento fino a ottenere zero.

  La conversione della parte intera si ottiene leggendo i resti della divisione da r_n a r_1.

  es. $x_{10} = 83$

Numero	Quoziente	Resto
83	41	1
41	20	1
20	10	0
10	5	0
5	2	1
2	1	0
1	0	1

  $x_2 = 10110011$

- Parte frazionaria: prendo solo la parte frazionaria f_1 del numero e moltiplico per due. Ottengo una parte intera i_1 e una parta frazionaria f_2. Continuo il procedimento fino a quando la parte frazionaria è 0, oppure noto una ricorrenza della parte frazionaria (quindi ho una periodicità della parte frazionaria).

  La conversione della parte frazionaria è data dai valori i_1 fino a i_n

  es. $x_{10} = 0.1$

Calcolo (Frazione $\times$ 2)	**Parte Intera**
$0.1 \times 2 = 0.2$	0
$0.2 \times 2 = 0.4$	0
$0.4 \times 2 = 0.8$	0
$0.8 \times 2 = 1.6$	1
$0.6 \times 2 = 1.2$	1
$0.2 \times 2 = 0.4$	0
$0.4 \times 2 = 0.8$	0

  Si nota che c'è una ripetizione, quindi la parte frazionaria di $x_{10} = 0.1$ è $x_2 = 0.0\overline{0011}$.

2.1.2 Rappresentazione in virgola mobile

Def. RAPPRESENTAZIONE IN VIRGOLA MOBILE STANDARDIZZATA: sia B una base, allora un numero $x \in \mathbb{R}, x \neq 0$, si può scirvere in virgola mobile standardizzata come:

$$x = (-1)^s B^e \left(\sum_{k=1}^{\infty} d_k B^{-k} \right)$$

con $d_1 > 0$, $0 \leq d_k \leq B - 1$, $e \in \mathbb{Z}$
In modo più compatto si scrive:

$$x = \pm p B^e, \text{ dove } B^{-1} \leq p \leq 1$$

Il numero reale p è detto MANTISSA e il numero intero e è detto ESPONENTE

es.

Base $B = 10$

$$x = 0.00745 \implies 0.745 \cdot 10^{-2}$$
$$x = 70408.102 \implies 0.70408102 \cdot 10^{5}$$

Base $B = 2$

$$x = 11001.111 \implies 0.11001111 \cdot 2^{5}$$

OSS: La rappresentazione di un numero in virgola mobile non è unica, ma quella normalizzata sì ($d_1 \neq 0$ garantisce l'unicità della rappresentazione).

Esempi di rappresentazione in virgola mobile

Esempio
Per rappresentare il numero $x = 43.75$ in virgola mobile, è possibile farlo in diverse forme:

$$0.4375 \cdot 10^2, \quad 4.375 \cdot 10^1, \quad 43.75 \cdot 10^0, \quad 0.04375 \cdot 10^3, \quad \ldots$$

La forma normalizzata però è unica:

$$0.4375 \cdot 10^2, \quad \text{con } d_1 = 4 \neq 0.$$

Altri esempi

- $x = 453.25$:

$$x = 0.45325 \cdot 10^3 = (-1)^0 \cdot \left(4 \cdot 10^1 + 5 \cdot 10^0 + 3 \cdot 10^{-1} + 2 \cdot 10^{-2} + 5 \cdot 10^{-4}\right) \cdot 10^3.$$

- $x = -0.0026$:

$$x = -0.26 \cdot 10^{-2} = (-1)^1 \cdot \left(2 \cdot 10^{-1} + 6 \cdot 10^{-2}\right) \cdot 10^{-2}.$$

- Il numero irrazionale π:

$$\begin{aligned} \pi &= 3.14159\ldots = 0.314159\ldots \cdot 10^1 \\ &= (-1)^0 \cdot \left(3 \cdot 10^1 + 1 \cdot 10^0 + 4 \cdot 10^{-1} + 1 \cdot 10^{-2} + 5 \cdot 10^{-3} + 9 \cdot 10^{-4} \ldots\right) \cdot 10^1 \end{aligned}$$

2.2 Numeri macchina:

All'interno del calcolatore i numeri vengono immagazzinati in virgola mobile standardizzata con un numero finito t di cifre per la mantissa e un numero finito di cifre per codificare l'esponente ($L \leq e \leq U$).

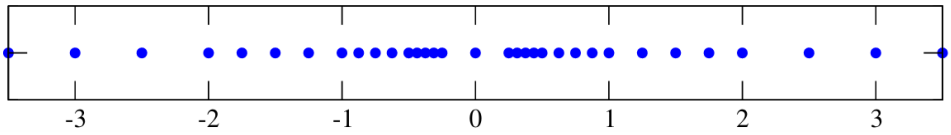
def. Insieme di numeri macchina: sia B una base (generalmente 2), sia t e $L < 0$ (lower) e $U > 0$ (upper), con $L, U \in \mathbb{Z}$, si definisce insieme di numeri macchina $\mathbb{F}(B, t, L, U)$:

$$\mathbb{F}(B, t, L, U) = \left\{ x | x = (-1)^s B^e \left(\sum_{k=1}^{t} d_k B^{-k} \right) \right\} \cup \{0\}$$

con $d_1 > 0$, $0 \leq d_k \leq B - 1$, $L \leq e \leq U$. Lo 0 si codifica con mantissa nulla ed esponente nullo.

es. $\mathbb{F}(2, 3, -1, 2)$**:**

1. Ho BASE 2, con 3 cifre per la mantissa
2. Le mantisse possibili sono: 0.100, 0.101, 0.110, 0.111
3. Ad ogni mantissa si abbina uno degli $U - L + 1 = 2 - (-1) + 1 = 4$ esponenti possibili, ovvero: 2^{-1}, 2^0, 2^1, 2^2
4. In totale ho quindi 4 mantisse per 4 esponenti = 16 numeri rappresentabili
5. Caratteristica dei numeri macchina è che sono più addensati quanto più piccoli sono e la loro separazione aumenta man mano che aumenta il loro valore assoluto:



Nel calcolatore

Nel calcolatore la base è chiaramente 2, le cifre utilizzate sono 0 e 1
Per codificare un numero macchina $x = (-1)^s(0.d_1d_2...d_t)B^e$ è sufficiente memorizzare:

- Il segno, costituito da un bit
- Le cifre della mantissa, costituite da t bit
- L'esponente

Ogni numero macchina è rappresentato in 3 diverse forme:

1. Precisione singole (single precision), da 32 bit
2. Precisione doppia (double precision), da 64 bit
3. Precisione mezza (half precision), dal 2008 per l'utilizzo delle GPU, da 16 bit

2.2.1 Single Precision

I numeri macchina a precisione singola occupano 32 bit:

- 1 bit per il segno
- 8 bit per l'esponente
- 23 bit per la mantissa

Attualmente l'insieme dei numeri macchina in singola precisione è $\mathbb{F}(2, 24, -126, 127)$.

Il numero 24 di bit per la mantissa deriva dal bit nascosto: nella rappresentazione floating point normalizzata la prima cifra dopo la virgola è diversa da 0, il che implica che in base due è 1. Assumendo ciò non avrebbe senso rappresentare quella cifra sprecando un bit, che lo si usa invece per rappresentare una cifra in più per la mantissa.

Nell'esponente, avendo 8 bit si possono rappresentare $2^8 = 256$ esponenti possibili, metà pari e metà dispari. Di quei 256, 2 sono riservati per uso speciale:

- rappresentazione di infinito: mantissa = 0, esponente 0 o 1, seguito dal massimo esponente possibile, 1111111
- NaN, Not a Number: mantissa $\neq$ 0, sponente 0 o 1 seguito dal massimo esponente possibile, 1111111

I numeri rappresentabili in singola precisione sono:

$$2(U - L + 1)(B - 1)B^{t-1} + 1 = 2 \cdot 254 \cdot 1 \cdot 2^{23} + 1 \approx 4.2789 \cdot 10^9$$

2.2.2 Double Precision

I numeri macchina a precisione doppia occupano 64 bit:

- 1 bit per il segno
- 11 bit per l'esponente
- 52 bit per la mantissa

L'insieme dei numeri macchina in precisione doppia è $\mathbb{F}(2, 53, -1022, 1023)$.

Il numero 53 di bit per la mantissa deriva dal bit nascosto, come per la precisione singola.
Nell'esponente, avendo 11 bit si possono rappresentare $2^{11} = 2048$ esponenti possibili, metà pari e metà dispari. Di quei 2048, 2 sono riservati per uso speciale:

- rappresentazione di infinito: mantissa $= 0$, esponente 0 o 1, seguito dal massimo esponente possibile, tutti bit a 1
- NaN, Not a Number: mantissa $\neq 0$, sponente 0 o 1 seguito dal massimo esponente possibile, tutti i bit a 1

I numeri rappresentabili in doppia precisione sono:

$$2(U - L + 1)(B - 1)B^{t-1} + 1 = 2 \cdot 2046 \cdot 1 \cdot 2^{52} + 1 \approx 1.8438 \cdot 10^{19}$$

2.2.3 Half Precision

I numeri macchina ad half precision occupano 16 bit; l'utilizzo di così pochi bit permette di eseguire i calcoli molto più velocemente, fondamentale per le GPU:

- 1 bit per il segno
- 5 bit per l'esponente
- 10 bit per la mantissa

L'insieme dei numeri macchina in precisione doppia è $\mathbb{F}(2, 11, -14, 15)$.

Il numero 10 di bit per la mantissa deriva dal bit nascosto, come per la precisione singola e doppia.
Nell'esponente, avendo 5 bit si possono rappresentare $2^5 = 32$ esponenti possibili, metà pari e metà dispari. Di quei 32, 2 sono riservati per uso speciale:

- rappresentazione di infinito: mantissa $= 0$, esponente 0 o 1, seguito dal massimo esponente possibile, tutti bit a 1
- NaN, Not a Number: mantissa $\neq 0$, sponente 0 o 1 seguito dal massimo esponente possibile, tutti i bit a 1

I numeri rappresentabili nella half precision sono:

$$2(U - L + 1)(B - 1)B^{t-1} + 1 = 2 \cdot 30 \cdot 1 \cdot 2^{10} + 1 \approx 6.1440 \cdot 10^4$$

2.3 Approssimazione

In $\mathbb{F}(B,t,L,U)$ quando un numero $x = pB^e \in \mathbb{R}$ ha più di t cifre nella mantissa (con esponente L e U) può venire approssimato con un numero macchina, che chiameremo $fl(x)$, in due modi possibili:

- TRONCAMENTO:

  Nella mantissa p si cancella la parte che eccede la t-esima cifra.

- ARROTONDAMENTO:

  Nella mantissa p si aggiunge $\frac{B}{2}B^{-(t+1)}$ e poi si tronca alla t-esima cifra

es. con t = 6, per troncamento:

$$\begin{aligned} x &= 0.745645897 \\ fl(x) &= tr(x) = tr(0.745645897) \\ &= 0.745645 \end{aligned}$$

Si noti che arrotondare equivale a sommare 1 alla t-esima cifra della mantissa, d_t, se la successiva cifra (d_{t+1}) è $\geq \frac{B}{2}$, altrimenti la cifra t-esima rimane invariata.

2.4 Underflow e Overflow

In $\mathbb{F}(B,t,L,U)$, nell'approssimare x con $fl(x)$

- se l'esponente $e > U$, si produce un Overflow. Il numero x viene rappresentato come Inf. (Più grave)
- se l'esponente $e < L$, si produce un Underflow. Il numero x viene rappresentato come 0.

OSS: una pratica per evitare l'overflow è quella di separare i calcoli

2.5 Errori Assoluti e relativi

Se x è un numero reale e x^* una sua approssimazione definiamo:
ERRORE ASSOLUTO: la quantità $|x - x^*|$, in sè non da molta informazione
ERRORE RELATIVO: la quantità $\frac{|x-x^*|}{|x|}$ se $x \neq 0$.

Nel caso si abbia a che fare con enti diversi da numeri reali (funzioni, vettori, matrici) le sono le stesse a patto di sostituire il valore assoluto con un'opportuna norma.
L'errore relativo fornisce una indicazione più precisa della distanza fra x e x^*.

Esempio. Siano $x = 0.456789 \cdot 10^{-30}$ e $x^* = 0.6 \cdot 10^{-30}$.

- Errore assoluto $|x - x^*| = 0.143211 \cdot 10^{-30}$
- Errore relativo $\frac{|x-x^*|}{|x|} = 0.313517$

L'errore relativo è maggiore del 31%!!

2.5.1 Errori assoluti di rappresentazione

Sia $x \in \mathbb{R}$ e $fl(x) \in \mathbb{F}(B,t,U,L)$, allora:
l'errore assoluto per troncamento è (trovo un upper bound):

$$\begin{aligned} |x - fl(x)| &= |pB^e - \overline{p}B^e| \\ &= |p - \overline{p}|B^e \\ &\leq B^{-t}B^e \end{aligned}$$

più nello specifico:

$$\begin{aligned} p &= 0.d_1d_2...d_t... \\ \overline{p} &= 0.d_1d_2...d_t000 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} |p - \overline{p}| &= 0.0...0d_{t+1}d_{t+2} \\ &\leq 0.0...(B-1)(B-1)... \\ &= \sum_{k=t+1}^{\infty} (B-1)B^{-k} \\ &= B^{-t} \end{aligned}$$

Esempio:

- $x = 0.745645897,\ fl(x) = 0.745645$

$$|x - fl(x)| = 0.000000897 = 0.897 \cdot 10^{-6} < 10^{-6}$$

L'errore assoluto per arrotondamento è:

$$\begin{aligned} |x - \text{fl}(x)| &= |pB^e - \bar{p}B^e| \\ &= |p - \bar{p}|\, B^e \\ &\leq \frac{B}{2}B^{-(t+1)}B^e \end{aligned}$$

più nello specifico distinguo due casi:

$$\begin{cases} 0.d_1d_2...d_td_{t+1}... \\ 0.d_1d_2...d_t \end{cases}$$

A:

$$d_{t+1} \geq \frac{B}{2} \implies |p - \overline{p}| \leq \frac{B}{2}B^{-(t+1)}$$

B:

$$\begin{aligned} d_{t+1} &\leq \frac{B}{2} \quad \text{(applico troncamento)} \\ &\implies 0.d_1d_2\ldots d_t\left(\frac{B}{2} - 1\right)(B-1)(B-1)\ldots \\ |p - \overline{p}| &= \left(\frac{B}{2} - 1\right)B^{-(t+1)} + (B-1)\sum_{k=t+1}^{\infty} d_kB^{-k} \\ &= \left(\frac{B}{2} - 1\right)B^{-(t+1)} + (B-1)\sum_{k=t+1}^{\infty} B^{-k} \\ &= \ldots \end{aligned}$$

Esempio:

- $x = 0.745645897,\ fl(x) = 0.745646$

$$|x - fl(x)| = 0.000000103 = 1.03 \cdot 10^{-7} < 5 \cdot 10^{-7}$$

2.5.2 Errore relativi di rappresentazione

L'errore relativo per troncamento è:

$$\begin{aligned}\frac{|x - \text{fl}(x)|}{|x|} &= \frac{|pB^e - \bar{p}B^e|}{pB^e} \\ &= \frac{|p - \bar{p}|}{p} \\ &\leq \frac{B^{-t}}{B^{-1}} = B^{1-t}\end{aligned}$$

L'errore relativo per arrotondamento è:

$$\begin{aligned}\frac{|x - \text{fl}(x)|}{|x|} &= \frac{|pB^e - \bar{p}B^e|}{pB^e} \\ &= \frac{|p - \bar{p}|}{p} \\ &\leq \frac{B}{2}\frac{B^{-(t+1)}}{B^{-1}} = \frac{1}{2}B^{1-t}\end{aligned}$$

Si nota subito che l'errore relativo per arrotondamento è la metà di quello per troncamento: difatti, attualmente, la maggior parte dei sistemi implementa la tecnica di arrotondamento perché produce mediamente errori più piccoli.

def. PRECISIONE MACCHINA: si chiama PRECISIONE MACCHINA e si denota con il simbolo u (unit roundoff) la quantità:

$$u = \frac{1}{2}B^{1-t} \text{ (massimo errore)}$$

Rappresenta il massimo errore relativo che si commette nell'approssimare il numero reale x con il suo corrispondente numero macchina $fl(x)$ per arrotondamento.

In $\mathbb{F}(2, 24, -126, 127)$, singola precisione, $u = 2^{-24} \approx 5.96 \cdot 10^{-8}$

In $\mathbb{F}(2, 53, -1022, 1023)$, doppia precisione, $u = 2^{-53} \approx 1.11 \cdot 10^{-16}$

In $\mathbb{F}(2, 11, -14, 15)$, doppia precisione, $u = 2^{-11} \approx 4.8828125 \cdot 10^{-4}$

2.6 Standard ANSI IEEE-754r

Lo standard ANIS IEEE 754r è stato scritto nel 1985 e modificato nel 1989 e, più recentemente, nel 2008 e costituisce lo standard ufficiale per la rappresentazione binaria dei numeri all'interno del calcolatore e l'aritmetica di macchina (il nome dello standard in inglese "Binary floating point arithmetic for microprocessor systems").
Secondo lo standard un numero non nullo normalizzato si scrive come

$$x = (-1)^s \cdot (1 + f) \cdot 2^{e^* - bias}$$

La mantissa si rappresenta dunque come $1.d_1d_2...d_\tau$, dove $f = 0.d_1d_2...d_\tau$

τ identifica il numero di bit usati per codificare la parte frazionaria della mantissa. Il numero di cifre totali per la mantissa è $t = \tau + 1$.
Il vero esponente del numero e si immagazzina in traslazione come $e^* = e + bias$. In questa maniera non serve un bit di segno per l'esponente (faccio una semplice traslazione a sinistra).
Il bias in singola precisione vale 127 mentre in doppia 1023.
Lo standard riserva due dei possibili valori per l'esponente per codificare due situazioni speciali:

- $e^* = 0$, viene riservato per la codifica dello zero ed eventuali numeri denormalizzati.
- $e^* = 255$ o $e^* = 2047$, che corrisponde a un esponente vero pari a 128 (singola) o 1024 (doppia), viene riservato per la codifica di:

  1. Inf (Overflow)
  2. NaN (Not a Number), ovvero operazioni del tipo $\frac{0}{0}$, $Inf - Inf$, $\frac{Inf}{Inf}$.

Il valore di Inf viene codificato con mantissa nulla, mentre il valore NaN corrisponde a mantissa $\neq 0$.

Esempi:

Vediamo come si rappresenta il numero $x = 126$ secondo lo standard IEEE in singola precisione: $(126)_{10} = (1111110)_2$. Il numero $(1111110)_2$ si scrive, in virgola mobile normalizzata secondo lo standard IEEE, come:

$$1.111110 \cdot 2^6$$

Della mantissa si immagazzinano solo le cifre dopo la virgola. L'esponente normalizzato è:

$$e^* = 6 + 127 = 133,$$

che in binario corrisponde a:

$$10000101.$$

Il numero 126 viene codificato con la stringa:

$$0 \quad 10000101 \quad 11111100000000000000000$$

2.7 Massimo e minimo rappresentabili

Sia $\mathbb{F}(B, t, L, U)$, quali sono il massimo e il minimo rappresentabili?

MASSIMO: Il numero più grande rappresentabile in aritmetica di macchina ha tutte le cifre della mantissa uguali a $B - 1$ ed esponente U.

Esempio: in $\mathbb{F}(10, 6, L, U)$, sarebbe $0.999999 \cdot 10^U = (1 - 10^{-6}) \cdot 10^U$

Nello standard IEEE-754r in doppia precisione $\mathbb{F}(2, 53, -1022, 1023)$ il più grande valore rappresentabile è $(2 - 2^{52}) \cdot 2^1023 = 1.7977 \cdot 10^{308}$

minimo: Il più piccolo numero rappresentabile in aritmetica di macchina ha tutte le cifre della mantissa uguali a 0 tranne la prima (virgola mobile normalizzata) ed esponente L.

Esempio: in $\mathbb{F}(10, 6, L, U)$, sarebbe $0.100000 \cdot 10^L = 10^{-1} \cdot 10^U$

Nello standard IEEE-754r in doppia precisione $\mathbb{F}(2, 53, -1022, 1023)$ il più piccolo valore rappresentabile è $1 \cdot 2^{-1022} = 2.2251 \cdot 10^{308}$

2.8 Distanza assoluta tra due numeri macchina

A differenza di quello che occorre in $\mathbb{R}$, in $\mathbb{F}$ la distanza tra x e il suo elemento successivo x_+ non è infinitamente piccola, ma un valore ben determinato.

def. sia $x = (-1)^s(1 + 0.d_1d_2 \cdots d_\tau) \cdot B^e$ e $x_+ = (-1)^s(1 + 0.d_1d_2 \cdots (d_\tau + 1)) \cdot B^e$, la **distanza assoluta** tra x e x_+ è:

$$\Delta x = |x - x_+| = B^{-\tau} \cdot B^e = B^{e-\tau}$$

L'insieme dei numeri macchina è un insieme finito, questo implica che ci tale insieme dei numeri è "bucato": l'errore di rappresentazione è inevitabile.
La distanza assoluta tra un numero macchina e il suo successivo determina, dato $x \in \mathbb{R}$, i numeri sommabili "non visibili".
Se $x \in \mathbb{R}$ è compreso tra $fl(x)$ e $fl(x_+)$ tale numero x non potrà essere rappresentato se non da $fl(x)$ o $fl(x_+)$, per troncamento o per arrotondamento.
Questa distanza è uguale per tutti i numeri macchina aventi lo stesso esponente.

L'incremento/decremento di una unità dell'esponente comporta un incremento/decremento di in fattore pari alla base della distanza assoluta tra due numeri macchina consecutivi.

OSS: Come visto in precedenza: i numeri macchina sono più addensati quanto più piccoli sono e la loro separazione aumenta man mano che aumenta il loro valore assoluto.

2.8.1 Distanza relativa

def. distanza relativa: la distanza relativa tra x e il suo elemento successivo x_+ si ottiene dividendo la distanza assoluta per il valore di x:

$$\frac{|x - x_+|}{|x|} = \frac{B^{e-\tau}}{p \cdot B^e} = \frac{B^{-\tau}}{p}$$

OSS: Si può vedere che la distanza relativa tra due numeri macchina consecutivi ha un andamento periodico.

Si può definire la massima distanza relativa tra due numeri macchina consecutivi come:

$$\epsilon_M = B^{-\tau}$$

che si ottiene quando la mantissa p è uguale a 1.

OSS: Nello standard IEEE-754r in doppia precisione $\epsilon_M = 2^{-52}$

Precizione macchina (2)

A questo punto si può definire la precisione macchina come il massimo errore relativo di arrotondamento, che coincide anche con:

$$u = \frac{\epsilon_M}{2}$$

OSS: In un computer che usa doppia precisione secondo lo standard IEEE-754r il valore della precisione di macchina è pari a $2^{-53} \approx 1.11 \cdot 10^{-16}$

2.9 Aritemtica macchina

Abbiamo visto che il numero x non si rappresenta esattamente nel calcolatore ma si immagazzina come $fl(x)$ con un errore relativo massimo pari a $u = \frac{1}{2}B^{1-t}$.

OSS: Come si propagano questi errori di rappresentazione quando si effettuano delle operazioni aritmetiche con i numeri macchina?
Per distinguere le operazioni aritmetiche in $\mathbb{F}$ eseguite al calcolatore da quelle definite in $\mathbb{R}$, la seguente notazione:
Dati x, y reali:

- Somma $\oplus$: $x \oplus y = \text{fl}(\text{fl}(x) + \text{fl}(y))$
- Sottrazione $\ominus$: $x \ominus y = \text{fl}(\text{fl}(x) - \text{fl}(y))$
- Prodotto $\otimes$: $x \otimes y = \text{fl}(\text{fl}(x) \cdot \text{fl}(y))$
- Divisione $\oslash$: $x \oslash y = \text{fl}(\text{fl}(x)/\text{fl}(y))$

OSS: $fl(x) + fl(y)$ è la somma nel calcolatore, mentre $fl(fl(x) + fl(y))$ è il "trasferimento in memoria"

Errori nelle operazioni macchina

Ricordiamo l'errore relativo di rappresentazione:

$$\varepsilon_x = \frac{|x - \text{fl}(x)|}{|x|} \leq u.$$

Definiamo ora l'errore relativo introdotto dalle operazioni macchina:

$$\varepsilon_{x,y}^{\oplus} = \frac{|(x + y) - (x \oplus y)|}{|x + y|}$$

Analogamente per le altre operazioni.
Si può dimostrare che:

$$\varepsilon_{x,y}^{\oplus} \leq \left|\frac{x}{x+y}\right| \varepsilon_x + \left|\frac{y}{x+y}\right| \varepsilon_y$$

$$\varepsilon_{x,y}^{\otimes} \lesssim \varepsilon_x + \varepsilon_y$$

$$\varepsilon_{x,y}^{\oslash} \leq |\varepsilon_x - \varepsilon_y|$$

dove ε_x e ε_y sono tali che $\varepsilon_x, \varepsilon_y \leq u$.

2.9.1 Errori nelle operazioni macchina: addizione

Dimostrazione di:

$$\varepsilon_{x,y}^{\oplus} \leq \left|\frac{x}{x+y}\right| \varepsilon_x + \left|\frac{y}{x+y}\right| \varepsilon_y$$

Assumiamo:

$$x \neq 0, \quad y \neq 0, \quad x+y \neq 0, \quad \text{e} \quad \text{fl}(\text{fl}(x)+\text{fl}(y)) = \text{fl}(x)+\text{fl}(y),$$

cioè la somma di $\text{fl}(x)$ e $\text{fl}(y)$ è un numero macchina. In caso contrario, la dimostrazione è più complicata ma l'enunciato rimane vero.

$$\varepsilon^{\oplus}_{x,y} = \frac{|(x+y)-(x \oplus y)|}{|x+y|} = \frac{|(x+y)-(\text{fl}(x)+\text{fl}(y))|}{|x+y|}$$

Applicando la disuguaglianza triangolare:

$$\leq \frac{|(x-\text{fl}(x))|}{|x+y|} + \frac{|(y-\text{fl}(y))|}{|x+y|}$$

Moltiplicando e dividendo per $|x|$ e $|y|$:

$$= \frac{|(x-\text{fl}(x))||x|}{|x+y||x|} + \frac{|(y-\text{fl}(y))||y|}{|x+y||y|}$$

Utilizzando la definizione di errore relativo:

$$= \frac{|(x-\text{fl}(x))|}{|x|}\frac{|x|}{|x+y|} + \frac{|(y-\text{fl}(y))|}{|y|}\frac{|y|}{|x+y|} = \varepsilon_x \left|\frac{x}{x+y}\right| + \varepsilon_y \left|\frac{y}{x+y}\right|$$

2.9.2 Errori nelle operazioni macchina: prodotto

Stesse ipotesi: assumiamo $x \neq 0, y \neq 0, x \cdot y \neq 0$, e

$$\text{fl}(\text{fl}(x) \cdot \text{fl}(y)) = \text{fl}(x) \cdot \text{fl}(y),$$

ossia il prodotto di $\text{fl}(x)$ e $\text{fl}(y)$ è già arrotondato.
Dimostrazione (analoga) di:

$$\varepsilon^{\otimes}_{x,y} \lesssim \varepsilon_x + \varepsilon_y.$$

L'errore relativo del prodotto macchina è definito da:

$$\varepsilon^{\otimes}_{x,y} = \frac{|(x \cdot y)-(x \otimes y)|}{|x \cdot y|}.$$

Passaggi:

$$\varepsilon^{\otimes}_{x,y} = \frac{|(x \cdot y)-\text{fl}(\text{fl}(x) \cdot \text{fl}(y))|}{|x \cdot y|},$$

$$= \frac{|(x \cdot y)-(\text{fl}(x) \cdot \text{fl}(y))|}{|x \cdot y|},$$

$$= \frac{|x \cdot y - x \cdot \text{fl}(y) + x \cdot \text{fl}(y) - \text{fl}(x) \cdot \text{fl}(y)|}{|x \cdot y|}.$$

$$= \frac{|x \cdot (y-\text{fl}(y)) + (x-\text{fl}(x)) \cdot \text{fl(y)}|}{|x \cdot y|}.$$

Utilizzando la disuguaglianza triangolare:

$$\leq \frac{|x \cdot (y-\text{fl}(y))|}{|x \cdot y|} + \frac{|(x-\text{fl}(x)) \cdot \text{fl}(y)|}{|x \cdot y|}.$$

Assumendo che $\text{fl}(y)/y \approx 1$, diventa:

$$= \frac{|y - \text{fl}(y)|}{|y|} + \frac{|x - \text{fl}(x)|}{|x|}.$$

Quindi otteniamo:

$$\varepsilon_{x,y}^{\otimes} \lesssim \varepsilon_x + \varepsilon_y.$$

Osservazioni sugli errori macchina

Le operazioni macchina, come il prodotto e la divisione, introducono un errore relativo dell'ordine della precisione di macchina u:

$$\varepsilon_{x,y}^{\otimes} \approx \varepsilon_x + \varepsilon_y.$$

$$\varepsilon_{x,y}^{\ominus} \leq |\varepsilon_x - \varepsilon_y|.$$

Tuttavia, per la somma o la sottrazione, non si può garantire un errore relativo piccolo. In particolare:

$$\varepsilon_{x,y}^{\oplus} \leq \frac{|x|}{|x+y|}\varepsilon_x + \frac{|y|}{|x+y|}\varepsilon_y$$

il quale può diventare grande quando $x \approx -y$. Questo fenomeno è noto come **Cancellazione numerica**. Quindi, quando $x \approx -y$, il risultato della somma (o sottrazione) è molto piccolo rispetto ai termini individuali, si amplifica l'effetto degli errori relativi di rappresentazione di x e y.
Nota: Questo è considerato una delle principali fonti di instabiltà

2.9.3 Cancellazione numerica

La cancellazione numerica si verifica come perdita di cifre significative nel risultato dovuto alla sottrazione di due numeri quasi uguali.

Esempio

Consideriamo, in $\mathbb{F}(10, 5, *, *)$, i numeri:

$$a = 0.73415507 \quad \text{e} \quad b = 0.73415448, \text{ essi sono qusi uguali}$$

Nell'aritmetica di macchina:

$$\text{fl}(a) = 0.73416, \quad \text{fl}(b) = 0.73415.$$

Calcoliamo:

$$a - b = 0.59 \cdot 10^{-6} \quad \text{(valore esatto)}.$$

Nell'aritmetica di macchina:

$$\text{fl}(\text{fl}(a) - \text{fl}(b)) = 0.00001 = 10^{-5}.$$

L'errore relativo è dato da:

$$\left|\frac{(a-b) - (a \ominus b)}{a-b}\right| = \frac{0.59 \cdot 10^{-6} - 10^{-5}}{0.59 \cdot 10^{-6}} = \frac{0.941 \cdot 10^{-5}}{0.59 \cdot 10^{-6}} = 15.949 \approx 1595\%.$$

La precisione di macchina in questa aritmetica è:

$$u = \frac{1}{2}B^{1-t} = \frac{1}{2}10^{-4} = 5 \cdot 10^{-5}.$$

con una differenza in grandezza di un ordine di 10^8.

Obiettivo: Arrivare ad avere un errore pari alla precisione di macchina.

Cancellazione numerica: esempio

Anche in casi non clamorosi come il precedente, l'errore può comunque essere molto maggiore della precisione di macchina.
Sia l'aritmetica di macchina $\mathbb{F}(10, 6, *, *)$. Consideriamo:

$$a = 0.147554326, \quad b = 0.147251742.$$

Naturalmente:

$$\text{fl}(a) = 0.147554, \quad \text{fl}(b) = 0.147252.$$

Calcoliamo la differenza esatta:

$$a - b = 0.000302584 \quad \text{(valore esatto)}.$$

Nell'aritmetica di macchina:

$$a \ominus b = 0.000302.$$

Errore relativo:

$$\frac{|(a-b) - (a \ominus b)|}{|a-b|} = \frac{0.000302584 - 0.000302}{0.000302584} \approx 1.9 \cdot 10^{-3} \approx 0.19\%.$$

Precisione di macchina:

$$u = \frac{1}{2}B^{1-t} = \frac{1}{2}10^{-5} = 5 \cdot 10^{-6}.$$

OSS: il problema della cancellazione numerica si verifica quando i due numeri (sommati o sottratti) sono molto simili $\implies$ non è sempre un problema

Violazione della proprietà associativa nelle operazioni macchina: La proprietà associativa non è valida nelle operazioni in aritmetica floating-point F. Questo implica che, in generale:

$$(a \oplus b) \oplus c \neq a \oplus (b \oplus c).$$

Esempio:

Consideriamo i numeri: $(1 \oplus 10^{-15}) \oplus 1 \quad \text{e} \quad (1 \oplus 1) \oplus 10^{-15}$.
Calcoliamo:

$$(1 \oplus 10^{-15}) \oplus 1 = 1.11 \cdot 10^{-15}$$

$$(1 \oplus 1) \oplus 10^{-15} = 10^{-15}$$

L'ordine delle operazioni influenza in modo significativo il risultato.

Esempio: Overflow o Underflow

Quando i numeri diventano molto grandi o molto piccoli, si possono verificare fenomeni di *overflow* o *underflow*. Ad esempio $a = 1.0 \cdot 10^{308}, \quad b = 1.1 \cdot 10^{308}, \quad c = -1.001 \cdot 10^{308}$.
Calcoliamo:

$$a \oplus (b \oplus c) = 1.0 \cdot 10^{308} \oplus (0.99 \cdot 10^{307}) = 1.099 \cdot 10^{308}$$

$$(a \oplus b) \oplus c = \infty \oplus c = \infty$$

Nota: L'ordine delle operazioni può portare a risultati non confrontabili.

Cancellazione numerica e stabilità di un algoritmo

def. Un metodo numerico (formula, algoritmo) si dice **stabile** se *non propaga gli errori (inevitabili) dovuti alla rappresentazione dei numeri nel calcolatore.* Altrimenti si dice **instabile**.

OSS:

- La cancellazione numerica genera delle formule instabili.
- Per evitare i problemi legati alla cancellazione numerica occorre trasformare le formule in altre numericamente più stabili.
- La stabilità è un concetto legato all'algoritmo usato per risolvere un determinato problema.

OSS: Una formula può essere instabile anche per altre cause, NON SOLO per cancellazione numerica!!!

La cancellazione numerica è un problema che si verifica durante l'operazione su numeri con differenze significative di ordine di grandezza. Questo può essere affrontato attraverso metodi alternativi per rendere l'algoritmo più stabile.

Esempio:
Consideriamo la seguente operazione:

$$\sqrt{x+\delta} - \sqrt{x}, \quad \text{per} \quad \delta \to 0$$

Questa formula subisce cancellazione numerica. Si può risolvere razionalizzandola:

$$\sqrt{x+\delta} - \sqrt{x} = \frac{\sqrt{x+\delta} + \sqrt{x}}{\sqrt{x+\delta} + \sqrt{x}} = \frac{\delta}{\sqrt{x+\delta} + \sqrt{x}}$$

Esempio: in doppia precisione
Calcoliamo:

$$\sqrt{1+10^{-14}} - \sqrt{1} = 4.88498130835069 \cdot 10^{-15}$$

con un errore relativo di $0.023 = 2.3\%$.
Usando la formula stabile:

$$\frac{10^{-14}}{\sqrt{1+10^{-14}} + \sqrt{1}} = 4.999999999999999 \cdot 10^{-15}$$

con un errore relativo relativo di $1.58 \cdot 10^{-16}$.

Esempio di algoritmo instabile

Formula risolutiva dell'equazione di secondo grado
Si vuole risolvere l'equazione:

$$ax^2 + bx + c = 0 \quad \text{con} \quad a \neq 0$$

Dividendo per a, otteniamo:

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0$$

Ponendo:

$$\frac{b}{a} = 2p \quad \text{e} \quad \frac{c}{a} = -q$$

l'equazione si trasforma in:

$$x^2 + 2px - q = 0$$

La formula risolutiva per un'equazione quadratica calcola le due radici come:

$$x_{1,2} = \frac{-2p \pm \sqrt{4p^2 + 4q}}{2}$$

Semplificando:

$$x_{1,2} = -p \pm \sqrt{p^2 + q}$$

Se q è molto piccolo rispetto al termine quadratico p^2, i risultati possono essere numericamente instabili. Ciò può portare a cancellazione numerica quando q viene sommato o sottratto a p^2.

Consideriamo ora l'equazione quadratica:

$$x^2 + 2px - q = 0$$

con la condizione $p^2 + q \geq 0$, che garantisce radici reali.
La radice x_1 viene calcolata con la seguente formula:

$$x_1 = -p + \sqrt{p^2 + q}$$

Problema di instabilità: La formula diventa instabile se $p \gg q > 0$, a causa della possibile cancellazione numerica tra p e $\sqrt{p^2 + q}$.

Soluzione alternativa

Per evitare l'instabilità numerica, possiamo razionalizzare la formula. Moltiplicando numeratore e denominatore per $p + \sqrt{p^2 + q}$, otteniamo:

$$x_1 = \frac{(-p + \sqrt{p^2 + q})(p + \sqrt{p^2 + q})}{p + \sqrt{p^2 + q}}$$
$$x_1 = \frac{q}{p + \sqrt{p^2 + q}}$$

Questa forma è numericamente più stabile e riduce il rischio di cancellazione.

Esempio:

Si vuole risolvere l'equazione:

$$x^2 - 2px + 10^{-2} = 0$$

per valori di p crescenti: $p = 10^4, 10^5, 10^6, 10^7, 10^8$.
Utilizzando la formula quadratica in doppia precisione (calcolata in Matlab), otteniamo la seguente tabella:

p	x_1	x_1 vera	ERR. REL
$1.0e+04$	$5.0000016927e-07$	$4.9999999999e-07$	$3.4e-07$
$1.0e+05$	$5.0000380725e-08$	$5.0000000000e-08$	$7.6e-06$
$1.0e+06$	$5.0058588386e-09$	$5.0000000000e-09$	$1.2e-03$
$1.0e+07$	$0.0000000000e+00$	$5.0000000000e-10$	$1.0e+00$
$1.0e+08$	$0.0000000000e+00$	$5.0000000000e-11$	$1.0e+00$

Osservazioni

I risultati evidenziano che:

- Per valori di p crescenti, la cancellazione numerica compromette i calcoli.
- Errori relativi **gravi** emergono per $p = 10^7$ e $p = 10^8$, dove si ottiene $x_1 = 0$ anziché il valore corretto.

Esempio di algoritmo instabile

In questo esempio, si vuole approssimare il valore di π utilizzando una formula ricorsiva. Questo processo può diventare instabile a causa di errori di arrotondamento accumulati a ogni iterazione.
La formula per la successione z_n è data da:

$$z_2 = 2$$
$$z_{n+1} = 2^{n-0.5}\sqrt{1-\sqrt{1-4^{1-n}z_n^2}}, \quad n = 2, 3, \ldots$$

Dove $r = 4^{1-n}z_n^2$
Questa formula dovrebbe teoricamente convergere al valore di π. Tuttavia, errori numerici possono influire negativamente sulla convergenza.

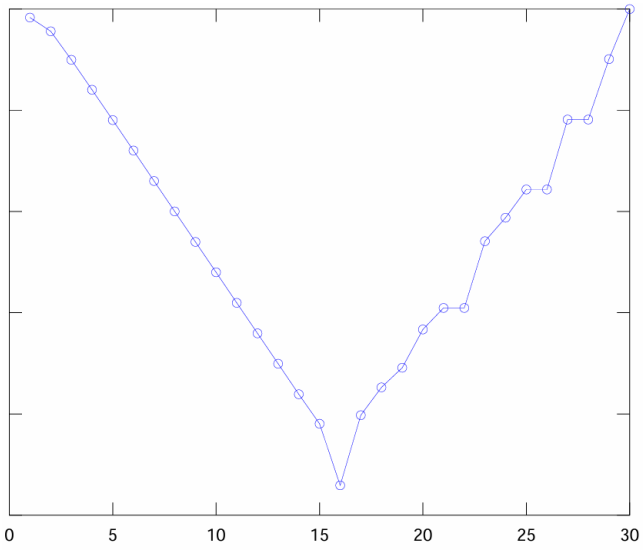
Analisi dei risultati:
La tabella seguente mostra i valori calcolati per alcuni passi dell'iterazione:

$n+1$	r	$1-\sqrt{1-r}$	z_{n+1}	$\frac{\lvert z_{n+1}-\pi\rvert}{\pi}$
10	$1.505 \cdot 10^{-4}$	$7.529 \cdot 10^{-5}$	3.14157294036	$6.27 \cdot 10^{-6}$
11	$3.764 \cdot 10^{-5}$	$1.882 \cdot 10^{-5}$	3.14158772527	$1.57 \cdot 10^{-6}$
12	$9.412 \cdot 10^{-6}$	$4.706 \cdot 10^{-6}$	3.14159142150	$3.92 \cdot 10^{-7}$
13	$2.353 \cdot 10^{-6}$	$1.176 \cdot 10^{-6}$	3.14159234561	$9.08 \cdot 10^{-8}$
14	$5.882 \cdot 10^{-7}$	$2.941 \cdot 10^{-7}$	3.14159257654	$2.45 \cdot 10^{-8}$
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
28	$2.220 \cdot 10^{-15}$	$1.110 \cdot 10^{-15}$	3.16227766016	$6.58 \cdot 10^{-3}$
29	$5.551 \cdot 10^{-16}$	$3.330 \cdot 10^{-16}$	3.46410161513	$1.03 \cdot 10^{-1}$
30	$1.665 \cdot 10^{-16}$	$1.110 \cdot 10^{-16}$	4.00000000000	$2.73 \cdot 10^{-1}$
31	$5.551 \cdot 10^{-17}$	$0.000 \cdot 10^{0}$	0.00000000000	$1.00 \cdot 10^{0}$
32	$0.000 \cdot 10^{0}$	$0.000 \cdot 10^{0}$	0.00000000000	$1.00 \cdot 10^{0}$

Commenti sui risultati

- **Convergenza iniziale**: Nei primi passi, i valori z_{n+1} si avvicinano rapidamente a π, con un errore relativo decrescente. - **Instabilità numerica**: Dopo un certo numero di iterazioni, gli errori di arrotondamento accumulati portano a risultati significativamente errati. Ad esempio, per $n+1 = 30$, il valore diverge completamente. - **Problema finale**: Nei passi finali, la successione collassa a zero, indicando un fallimento dell'algoritmo.

Grafico del comportamento:



Il grafico seguente illustra come l'errore relativo $\frac{|z_{n+1}-\pi|}{\pi}$ varia al crescere di $n+1$. Si osserva che l'errore aumenta drasticamente dopo un certo numero di iterazioni, a causa dell'accumulo degli errori numerici.

Esempio di algoritmo instabile

Consideriamo la successione di integrali definiti I_n, data da:

$$I_n = \frac{1}{e}\int_0^1 x^n e^x\,dx, \quad n \geq 0$$
$$\text{dove } I_0 = \frac{1}{e}\int_0^1 e^x\,dx = \frac{1}{e}\left[e^x\right]_0^1 = 1 - \frac{1}{e} \approx 0.632121$$

Per $n \geq 1$, utilizziamo l'integrazione per parti:

$$u = x^n, \quad dv = e^x\,dx \implies du = nx^{n-1}\,dx, \quad v = e^x$$

Da cui:

$$I_n = \frac{1}{e}\left(\left[x^n e^x\right]_0^1 - \int_0^1 nx^{n-1}e^x\,dx\right) = 1 - nI_{n-1}$$

E quindi fissato I_0, per $n \geq 1$:

$$I_n = 1 - nI_{n-1}$$

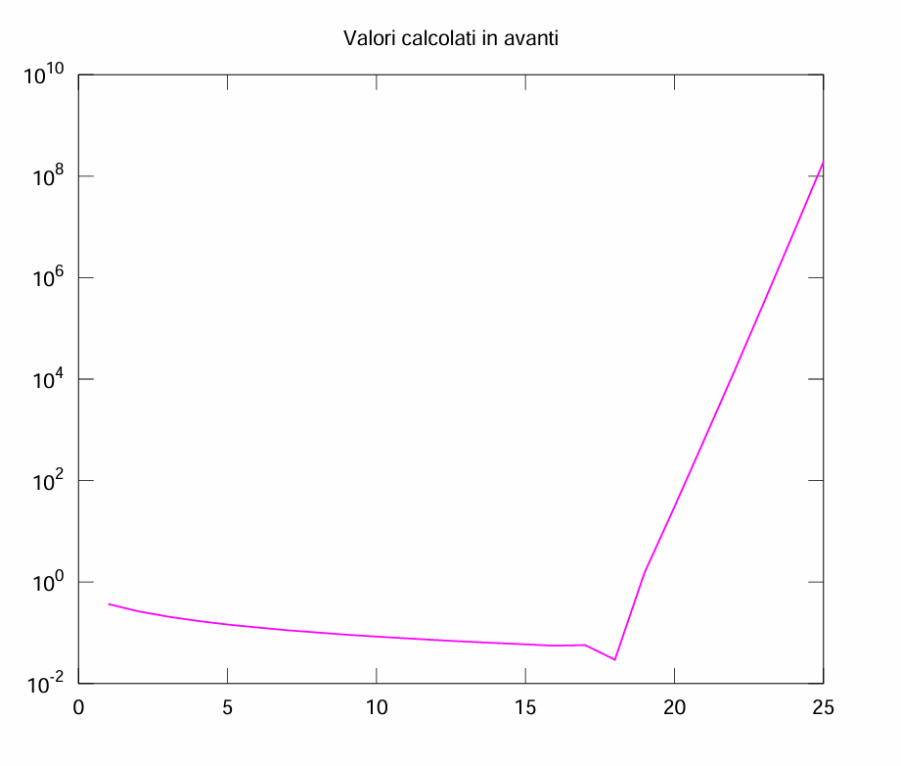
Si ottiene quindi che:

$$(I_n)_n = \begin{cases} 1 - \frac{1}{e}, & \text{n} = 0 \\ 1 - nI_{n-1}, & \text{altrimenti} \end{cases}$$

OSS: NON c'è cancellazone numerica

OSS: si noti che $0 \leq I_n \leq 1 \implies nI_{n-1} \neq 1$

Implementando tale formula per il calcolo di I_n,per $n = 2, \ldots, 25$, si ottengono i valori plottati in modulo nel seguente grafico:



La formula $I_n = 1 - nI_{n-1}$ è instabile, quindi amplifica l'errore ad ogni passo, infatti nel calcolatore:

$$(I_n + \epsilon_n) = 1 - (I_{n-1} + \epsilon_{n-1})$$

Sottraendo dalla precedente equazione la relazione $I_n = 1 - nI_{n-1}$ si può quantificare l'errore:

$$\begin{aligned} \epsilon_n &= -n\epsilon_{n-1}, \text{ per induzione} \\ |\epsilon_n| &= n!|\epsilon_0| \end{aligned}$$

Il fattore $n!$ amplifica l'errore di rappresentazione iniziale (su I_0), ϵ_0

Esempio: Nel calcolo di I_{20} l'errore è $\epsilon_{20} = 20!\epsilon_0 \approx 2.7 \cdot 10^2$

2.9.4 Formula Alternativa stabile:

Successione ricorrente all'indietro

Il valore di I_{m-k} si può calcolare a partire da una approssimazione di I_m mediante questa formula all'indietro:

$$I_{n-1} = \frac{1}{n}(1 - I + n), \ n = m, m-1, \ldots, m-k+1$$

che si ottiene dalla precedente ricavando I_{n-1} in funzione di I_n.
L'idea è di partire da un numero alto per andare fino ad un numero basso.
Questa formula è stabile perchè l'errore ad ogni passo diminuisce anzichè aumentare.

L'errore al passo $n-1$ si trova come:

$$\varepsilon_{n-1} = -\frac{1}{n}\varepsilon_n$$

Partendo da m

$$
\begin{aligned}
|\varepsilon_{m-1}| &= \frac{|\varepsilon_m|}{m} \\
|\varepsilon_{m-2}| &= \frac{|\varepsilon_m|}{m(m-1)} \\
&\vdots \\
|\varepsilon_{m-k}| &= \frac{|\varepsilon_m|}{m(m-1)\cdots(m-k+1)}
\end{aligned}
$$

Oss: La produttoria al denominatore abbatte rapidamente l'errore iniziale!

Esempio Per calcolare l_{25} partendo da $l_{40} = 0.5$, l'errore iniziale $|l_{40}| < 0.5$ verrebbe abbattuto di un fattore:

$$40 \cdot 39 \cdot \ldots \cdot 27 \cdot 26 = 5.2602 \cdot 10^{22}$$

2.10 Condizionamento

def. Un problema si dice **mal condizionato** se a piccole variazioni nei dati corrispondono grandi variazioni nei risultati.

- In caso contrario, il problema si dice **ben condizionato**.
- Il malcondizionamento è indipendente dall'algoritmo scelto per risolvere il problema: se il problema è mal condizionato, nessun algoritmo, per quanto stabile, potrà dare una soluzione corretta al problema stesso.

Esempio: Consideriamo il problema di risolvere il sistema lineare:

$$
\begin{cases}
x + y = 2 \\
1001x + 1000y = 2001
\end{cases}
$$

che ha come soluzione $x = 1$, $y = 1$.
Se perturbiamo il coefficiente della x nella prima equazione di 0.01, otteniamo:

$$
\begin{cases}
1.01x + y = 2 \\
1001x + 1000y = 2001
\end{cases}
$$

Il nuovo sistema ha come soluzione $x = -0.11111111$, $y = 2.11222222$ con un errore relativo su x e su y pari a:

$$\text{err}_x = \frac{|1 + 0.11111111|}{1} = 1.11111111,$$

$$\text{err}_y = \frac{|1 - 2.11222222|}{1} = 1.11222222$$

entrambi maggiori del 100%.

def. numero di condizionamento la quantità che misura il grado di sensibilità di un problema rispetto a piccole variazioni nei dati si dice **Numero di condizionamento**.

Consideriamo il problema di valutare una funzione di una variabile f in un punto: $y = f(x)$.
Se il dato di ingresso x è perturbato di una quantità Δx, assumendo f derivabile, per il teorema di Lagrange:

$$f(x + \Delta x) - f(x) = \Delta x f'(\xi)$$

Detto $\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$ l'errore assoluto sul valore della funzione, quello relativo è:

$$\left|\frac{\Delta y}{y}\right| = \left|\frac{\Delta x f'(\xi)}{y}\right| = \left|\frac{\Delta x}{x} \cdot \frac{x f'(\xi)}{y}\right|.$$

Al limite, per $\Delta x \to 0$, $\xi \to x$:

$$\left|\frac{\Delta y}{y}\right| = K(f,x)\frac{|\Delta x|}{|x|}$$

dove $K(f,x) = \frac{|x f'(x)|}{|y|}$ è detto **Numero di condizionamento**.

Esempio:
Data la funzione $f(x) = \sqrt{1-x^2}$, calcoliamo analiticamente il numero di condizionamento:

$$K(f,x) = \frac{|x f'(x)|}{|y|} = \frac{|x\frac{-2x}{2\sqrt{1-x^2}}|}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{x^2}{1-x^2}$$

Il problema sarà peggio condizionato quanto più x si approssima a 1:

x	$1-10^{-6}$	$1-10^{-12}$	$1-10^{-15}$
$K(f,x)$	$4.99999 \cdot 10^5$	$5.00011 \cdot 10^{11}$	$5.0039996 \cdot 10^{14}$

3 Funzioni:

Sia dato il problema: $f(x) = 0$, con $f : I = [a,b] \to \mathbb{R}$, continua, allora il nostro obiettico sarà quello di trovare $\alpha \in I \mid f(\alpha) = 0$; quindi si cercano gli zeri della funzione f (radici di f)

Esempio:

$$f(x) = (x-1)^2 = 0, \quad \alpha = +1$$
$$f(x) = \cos\left(\log\left(\frac{1}{x}\right)\right) = 0, \quad \alpha =$$

def. zero semplice: sia $f(x)$ una funzione, allora α si dice **zero semplice** se $f(\alpha) = 0$ e $f'(\alpha) \neq 0$, altrimenti ($f'(\alpha) = 0$) α si dice **multiplo**

def. molteplicità di uno zero: sia $f(x)$ una funzione, allora la molteplicità di uno zero è l'indice della prima derivata che non si annulla in α.

Esempio: sia $f(x) = \cos x - 1 + \frac{x^2}{2} + \frac{x^5}{5}$
Si nota che uno zero di f è in $x = 0$; la derivata di f in 0 però si annulla, pertanto $\alpha = x = 0$ è multiplo:

$$f'(x) = -\sin x + x + x^4 \quad ; \quad f'(0) = 0$$
$$f''(x) = -\cos x + 4x^3 \quad ; \quad f''(0) = 0$$
$$f^{(3)}(x) = \sin x + 12x^2 \quad ; \quad f^{(3)}(0) = 0$$
$$f^{(4)}(x) = \cos x + 24x \quad ; \quad f^{(4)}(0) = 1 \neq 0$$

Quindi la molteplicità di uno zero è $\tau = 4$.

th. esistenza dello zero: sia $f(x)$ continua in $[a,b]$ e tale che $f(a)f(b) < 0$, allora esiste $\alpha \in [a,b]$ tale che $f(\alpha) = 0$.

Condizione sufficiente per l'unicità dello zero: se $f(x)$ è monotona in senso stretto in $[a,b]$ ed $\exists\ \alpha \in [a,b]$ tale che $f(\alpha) = 0$, allora α è unico.

Esempio: Consideriamo l'equazione: $f(x) = 2x^2 + \log(x) - \frac{1}{x} = 0$
Esistenza: $f(0.1) = -12.28, \quad f(1) = 1 > 0 \implies$ esiste $\alpha \in [0.1, 1]$ tale che $f(x) = 0$.

Unicità: $f'(x) = 4x + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} > 0 \quad \forall x \in [0.1, 1] \implies f$ è monotona crescente in $[0.1, 1]$, e quindi lo zero di f in $[0.1, 1]$ è unico.

3.1 Metodi Iterativi

Le procedure di calcolo di zeri di funzioni sono iterative.

def. metodo iterativo: un metodo iterativo è una procedura che a partire da un valore iniziale x_0 genera una successione $\{x_k\}_{k\geq 0}$ a partire da uno o più termini precedenti.

def convergenza di un metodo iterativo: un metodo iterativo (o la successione $\{x_k\}$ da esso generata) è convergente ad α se:

$$\lim_{k\to\infty} x_k = \alpha$$

o equivalentemente se:

$$\lim_{k\to\infty} |\alpha - x_k| = 0, \text{ con } |\alpha - x_k| = e_k$$

(dove e_k è l'errore al passo k).

def. convergenza locale: un metodo iterativo converge localmente ad α se esiste $\delta > 0$ tale che $\forall$ $x_0 \in B(\alpha, \delta) = [\alpha - \delta, \alpha + \delta]$, si ha:

$$\lim_{k\to\infty} x_k = \alpha.$$

def. ordine di convergenza (di un metodo iterativo:) sia x_k un metodo iterativo convergente tale che $x_k \to \alpha$ (la successione ha come limite α), allora se esistono due costanti positive c e p tali che:

$$\lim_{k\to\infty} \frac{|e_{k+1}|}{|e_k|^p} = c, \quad c > 0, \quad p \geq 1, \quad p \in \mathbb{R}.$$

con $e_k = \alpha - x_k$, allora si dice che x_k ha ordine di convergenza p.
Se:

- $p = 1$, allora il metodo iterativo x_k ha convergenza lineare

$$\lim_{k\to\infty} \frac{|e_{k+1}|}{|e_k|} = c \approx |e_{k+1}| \approx c \cdot |e_k|$$

- $p = 2$, allora il metodo iterativo x_k ha convergenza quadratica:

$$\lim_{k\to\infty} \frac{|e_{k+1}|}{|e_k|^2} = c \approx |e_{k+1}| \approx c \cdot |e_k|^2$$

- se $p > 1$, allora il metodo iterativo x_k ha convergenza superlineare.

def. costante asintotica di riduzione dell'errore: per i metodi lineari, la costante c si chiama costante asintotica di riduzione dell'errore (fattore del quale si riduce l'errore asintoticamente).

Oss. Per $p = 1$, deve essere che $c < 1$, cosa non necessaria per $p = 2$

3.2 Metodo di Bisezione (Dicotomico)

Sia $f(x) = 0$, continua in $[a, b]$ e tale che esiste uno zero unico $\alpha \in I = [a, b]$ tale che $f(\alpha) = 0$, si trovi α

Vantaggi:

- Garantisce la convergenza se le ipotesi sono soddisfatte.
- È semplice da implementare.

Svantaggi:

- La convergenza è lenta rispetto ad altri metodi come il metodo di Newton.
- Richiede che $f(a)f(b) < 0$, quindi non può essere applicato a funzioni che non soddisfano questa condizione.

Funzionamento: genera una successione di intervalli I_k, chiusi, limitati e inscatolati di ragione la metà del precedente. Si ha inoltre che per ogni I_k vale che $f(a_k)f(b_k) < 0$.

Pseudocodice: Dato $[a, b], f, f(a)f(b) < 0$, con $a_0 = a$, $b_0 = b$

$x_k = \frac{a_k+b_k}{2}$
for $k = 0, 1, \ldots$ **do**
    if $f(x_k) = 0$ **then**
        Fine
    else if $f(x_k) \cdot f(a_k) < 0$ **then**
        $b_k = x_k$
    else
        $a_k = x_k$
    end if
end for

Spiegazione: Si calcola il punto medio per $x_k = \frac{a_k+b_k}{2}$. Si valuta a questo punto $f(x_k)$:

- Se $f(x_k) = 0$, allora x_k è lo zero cercato.
- Se $f(a_k)f(x_k) < 0$, allora lo zero si trova nell'intervallo $[a_k, x_k]$ e si pone $a_{k+1} = a_k$ e $b_{k+1} = x_k$
- Se $f(x_k)f(b_k) < 0$, allora lo zero si trova nell'intervallo $[x_k, b_k]$ si pone $a_{k+1} = a_k$ e $b_{k+1} = x_k$

Si ripete poi processo restringendo l'intervallo fino a ottenere una tolleranza desiderata ϵ, cioè $|b_k - a_k| < \epsilon$.
($e_k = \alpha - x_k$ è l'errore al passo k, mentre $f(x_k)$ si dice residuo al passo k)

Convergenza globale: Il metodo di bisezione ha una convergenza globale, ad ogni iterazione, la lunghezza dell'intervallo si dimezza, quindi l'errore e_k al passo k è dato da:

$$0 \leq |e_k| \leq \frac{b_k - a_k}{2} = \frac{b-a}{2^{k+1}}$$

dim: basta dimostrare che

$$\lim_{k\to+\infty} \frac{b-a}{2^{k+1}} = 0$$

Per il teorema dei due carabinieri si ha che

$$\lim_{k\to+\infty} 0 = 0$$

$$\lim_{k\to+\infty} \frac{b-a}{2^{k+1}} = 0$$

Quindi

$$0 \leq |e_k| \leq \frac{b-a}{2^{k+1}}$$

e quindi

$$\lim_{k\to+\infty} |e_k| = 0.$$

Oss: si noti l'ordine di convergenza e la costante asintotica: il metodo di bisezione ha come costanti $p = 1$ e $c = \frac{1}{2}$, ma se si calcola

$$\lim_{k \to +\infty} \frac{|e_{k+1}|}{|e_k|}$$

NON esiste per il comportamento

3.2.1 Criterio di arresto

Test di arresto sul residuo: Per arrestare le iterazioni, nel metodo della bisezione, posso considerare la semilunghezza dell'intervallo al passo k.

Un criterio di arresto importante è quello basato sul **test di arresto sul residuo**: sia $e_k = \alpha - x_k$ l'errore al passo k, $f(\alpha) - f(x_k)$ è il residuo

OSS: problemi di arresto sul residuo:
Il criterio di arresto basato sul residuo consiste nel fermare l'algoritmo iterativo quando il valore assoluto di $f(x_k)$ è sufficientemente piccolo, ovvero $|f(x_k)| < \text{tol}$, dove tol è una tolleranza prefissata. Tuttavia, questo criterio può essere problematico in alcune situazioni:

Esempio funzione molto piatta: consideriamo $f(x) = 10^{-50}x$. Questa funzione è estremamente piatta, quindi anche per valori di x_k lontani dallo zero, il residuo $f(x_k)$ può risultare molto piccolo. Ad esempio, se $x_k = 10^{20}$, allora:

$$f(x_k) = 10^{-50} \cdot 10^{20} = 10^{-30}.$$

In questo caso, il residuo $f(x_k)$ è molto piccolo, ma il valore di x_k è ancora lontano dalla radice $\alpha = 0$. Questo può portare a un arresto prematuro dell'algoritmo, senza aver raggiunto una soluzione accurata.
Esempio funzione molto ripida: consideriamo $f(x) = 10^{50}x$. Questa funzione è estremamente ripida, quindi anche per valori di x_k molto vicini alla radice, il residuo $f(x_k)$ può risultare molto grande. Ad esempio, se $x_k = 10^{-20}$, allora:

$$f(x_k) = 10^{50} \cdot 10^{-20} = 10^{30}.$$

In questo caso, il residuo $f(x_k)$ è molto grande, ma il valore di x_k è già molto vicino alla radice $\alpha = 0$. Questo può portare a un prolungamento inutile dell'algoritmo, nonostante la soluzione sia già sufficientemente accurata.

Soluzione: RESIDUO PESATO si utilizza la quantità chiamata residuo pesato:

$$\frac{f(x_k)}{f'(x_k)} \approx e_k + O(e_k^2)$$

Il residuzo pesato è una buona approssimazione di ordine 1 dell'errore

Dim. $e_k = \alpha - x_k; \quad \alpha = x_k + e_k$
Scrivo lo sviluppo di Tyalor (utilizzando il resto di Lagrange):

$$0 = f(\alpha) = f(x_k + e_k) = f(x_k) + f'(x_k)e_k + O(e_k^2)$$

Assumendo che $f'(\alpha) \neq 0$ e che quindi α sia uno zero semplice

$$\frac{-f(x_k)}{f'(x_k)} \approx e_k + O(e_k^2) \text{ dove } O(e_k^2) \text{ è trascurabile}$$

Oss. Si puà approssimare la derivata con il rapporto incrementale, perchè non si richiede che la fz. sia continua, quindi non è detto che la derivata esista.

3.2.2 Numero Minimo di iterazioni

Il numero minimo di iterazioni per avere un errore inferiore a tol è:

$$|e_k| < 10^{-t} = tol$$

$$|e_k| \leq \frac{b-a}{2^{k+1}} < tol$$

$$\log(b-a) - (k+1)\log_2 < \log(tol)$$

$$\log(b-a) - \log_(\, tol) < (k+1)\log_2$$

$$\frac{\log(b-a) - \log_(\, tol)}{\log_2} < (k+1)$$

$$k > \frac{\log(b-a) - \log(tol)}{\log_2} - 1$$

Esempio: $f(x) = e^{-2x} - x^2 = 0$, $I = [0, 1]$

$$\frac{1}{2^{k+1}} < 10^{-7}$$

$$\frac{1}{10^{-7}} < 2^{k+1}$$

$$k + 1 > \log_2(10^7)$$

$$k > 23.25 - 1 \approx 23$$

Esercizi:

$$\sin(x) - x = 0$$
$$5x - e^{-x} = 0$$
$$x^2 - 5x + 6 = 0$$
$$e^{-\frac{x}{4}} - x = 0$$

3.3 Metodo Newton-Raphson

Applicabilità:

- $f \in C^1([a, b])$
- $\alpha \in [a, b] \mid f(\alpha) = 0$

Funzionamento:
Dato x_0 punto iniziale, il metodo di Newton approssima f comn la retta tangente al f in $(x_0, f(x_0))$, interseca la tangente con l'asse x. Il punto di intersezione è la nuova approssimazione dello zero. Poi si ripete la procedura.

Scehma iterativo: Ci sono due modi per ricavarlo:

1. Traduzione matematica: suppongo di essere in x_k:

$$x_k = \begin{cases} y = f(x_k) + f'(x_k)(x - x_k) \text{ (eq retta tangente)} \\ y = 0 \end{cases}$$

$$0 = f(x_k) + f'(x_k)(x - x_k) \to \frac{-f(x_k)}{f'(x_k)} = x - x_k \to x = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}$$

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}, \quad k \geq 0$$

2. considero: $x_{k+1} = x_k + S$, dove x_{k+1} è lo zero e S è la differenza tra lo zero e il termine precedente utilizzo l'approssiazione di Tylor di f attorno a x_k

$$0 = f(x_{k+1}) = f(x_k + S) = f(x_k) + f'(x_k)S \quad \to -\frac{f(x_k)}{f'(x_k)} = S$$

$$\to x_{k+1} = x_k + S = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}, \quad k \geq 0$$

Th. di convergenza locale del Metodo di Newton-Raphson: Sia $f \in C^2([a,b])$, con $\alpha \in [a,b] \mid f(\alpha) = 0$. Se $f'(x) \neq 0 \, \forall x \in [a,b]$ (garantisce che lo zero sia semplice perchè $f'(\alpha) \neq 0$), allora esiste $\delta > 0$ tale che $\forall x_0 \in B(\alpha, \delta)$:

1. il metodo è ben definito, $\{x_k\}_{k \geq 0} \subset B(\alpha, \delta) \to$ (la successione delle iterate è inclusa nella palla aperta di centro α e raggio δ)
2. $\frac{|e_{k+1}|}{|e_k|^2} < M$; (e quindi il limite $k \to \infty \, x_k = \alpha$) $\to$ (il rapporot tra errori è maggiorato da una costante)

Inoltre si ha convergenza quadrata:

$$\lim_{k \to \infty} \frac{|e_{k+1}|}{|e_k|^2} = \frac{1}{2} \left| \frac{f''(\alpha)}{f'(\alpha)} \right|$$

Dimostrazione:

$$e_k = \alpha - x_k; \quad \alpha = x_k + e_k;$$

Utilizzando il resto di Lagrange:

$$0 = f(\alpha) = f(x_k + e_k) = f(x_k) + f'(x_k)e_k + \frac{1}{2} f''(\xi_k) e_k^2, \quad \xi_k \in \text{int}(x_k, \alpha)$$

$$\text{Sapendo per ipotesi che } f'(x_k) \neq 0 \to -\frac{f(x_k)}{f'(x_k)} = e_k + \frac{1}{2} \frac{f''(\xi_k)}{f'(x_k)} e_k^2$$

$$-\frac{f(x_k)}{f'(x_k)} = x_{k+1} - x_k = e_k + \frac{1}{2} \frac{f''(\xi_k)}{f'(x_k)} e_k^2$$

Sapendo che:

$$x_{k+1} - \alpha + \alpha - x_k = e_k + \frac{1}{2} \frac{f''(\xi_k)}{f'(x_k)} e_k^2$$

e:

$$x_{k+1} - \alpha + \alpha - x_k = -e_{k+1} + e_k$$

Divido per e_k^2 :

$$\frac{-e_{k+1}}{e_k^2} = \frac{1}{2} \frac{f''(\xi_k)}{f'(x_k)}$$

Trovo che:

$$\frac{|e_{k+1}|}{|e_k|^2} \leq \frac{1}{2} \frac{\max_{x \in [a,b]} |f''(x)|}{\min_{x \in [a,b]} |f'(x)|} = M$$

Questo risultato ci permette di dimostrare la convergenza di x_k ad α (ovvero che $\lim_{k\to\infty} x_k = \alpha \iff \lim_{k\to\infty} |e_k| = 0$).

$$|e_{k+1}| \leq M|e_k|^2 \quad \to |e_k| \leq M|e_{k-1}|^2$$

Moltiplico e divido per M:

$$M|e_k| \leq (M|e_{k-1}|)^2 \leq (M|e_{k-2}|)^{2^2} \leq \ldots \leq (M|e_0|)^{2^k}$$

Quindi:

$$M(e_k) \leq (M|e_0|)^{2^k} \quad \to \quad 0 \leq |e_k| \leq \frac{1}{M}(M|e_0|)^{2^k}$$

$$\Rightarrow x_0 \in \left(\alpha - \frac{1}{M}, \alpha + \frac{1}{M}\right) = B(\alpha, \delta) \quad \text{con} \quad \delta = \frac{1}{M}$$

Partendo da $x_0 \in B(\alpha, \frac{1}{M})$, tutte le iterate restano dentro la palla $B \Rightarrow \{x_k\} \subset B(\alpha, \frac{1}{M})$

$$x_k \in B(\alpha, \frac{1}{M}) \Rightarrow \underbrace{|\alpha - x_k|}_{e_k} < \frac{1}{M}$$

Da $-\frac{e_{k+1}}{|e_k|^2} = \frac{1}{2}\frac{f''(\xi_k)}{f'(x_k)}$ passo al limite e ai valori assoluti:

$$\begin{aligned}\lim_{k\to\infty} \frac{|e_{k+1}|}{|e_k|^2} &= \frac{1}{2}\lim_{k\to\infty}\frac{|f''(xi_k)|}{f'(x_k)} = \frac{1}{2}\frac{f''(\lim_{k\to\infty}\xi_k)}{f'(\lim_{k\to\infty} x_k)} \to \text{(per continuità)} \\ &= \frac{1}{2}\frac{|f''(\alpha)|}{|f'(\alpha)|}\end{aligned}$$

So che $x_k \to \alpha$, $\xi_k \in \text{int}(x_k, \alpha)$, quindi per $k \to \infty$, $\xi_k \to \alpha$.

Ordine di convergenza del metodo di Newton

- se $f''(\alpha) \neq 0$, $c = \frac{1}{2}\left|\frac{f''(\alpha)}{f'(\alpha)}\right| \neq 0 \implies p = 2$
- se $f''(\alpha) = 0$, $c =? \implies p \geq 3$ (il metodo converge ancora più veloce perchè $\lim_k \frac{|e_{k+2|}}{|e_k|^2} = 0$)
- se $f'(\alpha) = 0 \implies p = 1$; $c = 1 - \frac{1}{r}$ con r la molteplicità dello zero

3.3.1 Criterio d'arresto

Lo schema iterativo è:

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}$$

Loop:

$$\begin{cases} 1.\ f(x_k), f'(x_k) \neq 0 \quad \to \quad \text{se è} = 0 \text{ mi arresto} \\ 2.\ S_{k+1} = -\frac{f(x_k)}{f'(x_k)} \to (\text{ scarto al passo } k+1) \\ 3.\ x_{k+1} = x_k + S_{k+1} \end{cases}$$

Un buon criterio d'arresto è il **residuo pesato**, che corrisponde allo scarto al passo $k+1$ (S_{k+1}). Per Newton è $x_{k+1} - x_k = S_{k+1}$.

test: if $|S_{k+1}| < \text{tol}$ (visto che $S_{k+1} \approx e_k \to$ è un ottimo test d'arresto)

Esempio: k = 3; $|S_4 \leq 10^{-7}| \to x_4 = x_3 + x_4$. Lo scarto 4 è una approssimazione id $e_3 \implies$ al passo 3 l'errore è già $< 10{-}7$

ESERCIZIO SVOLTO ———————————————————

3.4 Metodo di Newton in più variabili

sia $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $F(X) = F(x_1, ..., x_n) = [f_1(x_1, ..., x_n), f_2(x_1, ..., x_n), ..., f_n(x_1, ..., x_n)]$

$$F(X) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} f_1(x_1, ..., x_n) = 0 \\ f_2(x_1, ..., x_n) = 0 \\ \vdots \\ f_n(x_1, ..., x_n) = 0 \end{cases}$$

Nel caso scalare, lo schema iterativo del metodo di Newton è $x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}$ dove lo scarto è $S_{k+1} = x_{k+1} - x_k = -\frac{f(x_k)}{f'(x_k)} \Rightarrow S_{k+1} = -f'(x_k)^{-1} \cdot f(x_k)$
Nel caso di più variabili: $S_{k+1} = -F'(x_k)^{-1}F(x_k)$ con $x_{k+1} = x_k + S_{k+1}$, dove $F'(x_k)^{-1}$ è l'inversa della matrice Jacobiana.
A livello computazionale richiede, per ogni iterazione, di creare una matrice $n \times n$ con tutte le derivate parziali.

Nella realtà, invertire una matrice ha un costo computazionale molto alto, quindi la formula $S_{k+1} = -F'(x_k)^{-1} \cdot F(x_k)$ viene premoltiplicata per $F'(x_k)$, ottenendo $F'(x_k)S_{k+1} = -F(x_k)$. Ad ogni iterazione si dovrà quindi risolvere questo sistema lineare $n \times n$ ($Ax = b$ con $A = F'(x_k)$, $b = -F(x_k)$).

Nel teorema di convergenza locale del metodo di Newton si erano richieste determinate condizioni, vediamo come cambiano nel caso a più variabili:

- $f \in C^2([a, b]) \longrightarrow f'$ sia Lipschitziana
- $f'(x) \neq 0 \quad \forall x \in (a, b) \longrightarrow F(x_k)$ dev'essere invertibile, ovvero il determinante della Jacobiana è $\neq 0$

3.5 Varianti del metodo di Newton

3.5.1 Metodo della tangente fissa

SCHEMA ITERATIVO: $x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_0)}$ (*il coefficiente angolare di ogni iterazione è quello della tangente tracciata alla 1^a iterata.*)

Questo metodo ha un costo computazionale minore (calcolo $f'(\alpha)$ solo una volta per $x = x_0$) ma è molto più lento del metodo di Newton normale.
Il metodo della tangente fissa ha convergenza lineare $p = 1$ con $c = \left|1 - \frac{f'(x)}{f'(x_0)}\right|$.
Con $p = 1$ la costante c dev'essere < 1 per avere convergenza, quindi, se α non è zero semplice, vale $f'(x) = 0 \Rightarrow c = 1 \Rightarrow$ NON C'È convergenza $\Rightarrow$ il metodo NON converge per zeri multipli.

3.5.2 Metodo delle secanti variabili (o delle secanti)

SCHEMA ITERATIVO: $x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{q_k}$ *per* $k \geq 1$ *con* $q_k = \frac{f(x_k) - f(x_{k-1})}{x_k - x_{k-1}}$ (*RAPP. INCREM.*)

Oss: per partire servono 2 p.ti iniziali x_0 e x_1

La convergenza è super lineare $p > 1$, se $f \in C^2([a, b])$ e $f''(x) \neq 0$ si dimostra che $p = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \approx 1,618$ (sezione aurea) con costante asintotica $c = \left|\frac{f''(x)}{f'(x)}\right|^{0,618} \cdot \left|\frac{1}{f'(x)}\right|^{1-0,618}$
Questo metodo ha comunque una forte riduzione dell'errore, poiché $\lim_{k\to\infty} \frac{|e_{k+1}|}{|e_k|^p} = c \quad \Rightarrow |e_{k+1}| \approx c \cdot |e_k|^p \quad \Rightarrow |e_{k+1}| \approx c \cdot |e_k|^{1,618}$
In più variabili questo metodo è chiamato *QUASI NEWTON*

3.5.3 Metodo di punto fisso (o iterazione funzionale)

Def. α è un punto fisso di $g : [a, b] \to \mathbb{R}$ se $g(\alpha) = \alpha$

Riscrivo il problema $f(x) = 0$ nella forma $g(x) = x$ tc. $f(x) = 0 \iff g(x) = x$
Per farlo, ho due modi:

- da $f(x) = 0$, sommo x da entrambe le parti e ottengo $x + f(x) = x$;
- ricavo x da $f(x)$ esplicitandola rispetto al resto della funzione.

Esempio: $f(x) = e^x - \cos x + 3x^2 = 0$
posso scriverlo come: $e^x = \cos x - 3x^2 \to x = -\log(\cos x - 3x^2)$
oppure: $\cos x = e^x + 3x^2 \to x = \arccos(e^x + 3x^2)$
oppure: $3x^2 = \cos x - e^x \to x = \sqrt{\frac{1}{3}\cos x - e^x}$

SCHEMA ITERATIVO: $x_{k+1} = g(x_k), \quad k \geq 0$ (La convergenza dipende dalla g)

La derivata prima di g attorno ad x determina la convergenza del metodo: $|g'(x)| < 1$ e $|g'(x)| \leq m < 1 \quad \forall x \in I_x$, dove 1 è il coefficiente angolare della retta bisettroce del primo e terzo quadrante.