Laboratorio 2

Giovanni Zanotti – giovanni.zanotti@polimi.it
Stefano Silvestrini – stefano.silvestrini@polimi.it

Introduzione all'Analisi di Missioni Spaziali

A.A. 2022-2023

Andrea Colagrossi

POLITECNICO MILANO 1863

Contenuti

- Trasfrimento da Orbita Iniziale a Finale
- Cambio di Piano
- Cambio dell’Anomalia del Pericentro
- Cambio della Forma dell’Orbita (i.e., *a* ed *e*)
- Procedura completa

Trasferimento da orbita iniziale a finale

Procedura standard: **3** manovre

1. Cambio di piano (ΔV_1)
2. Cambio dell'anomalia del pericentro (ΔV_2)
3. Cambio della forma dell'orbita (ΔV_3, ΔV_4)

⇨ 2 impulsi (i.e., Trasferimento Bitangente)

Trasferimento da orbita iniziale a finale

- **Cambio di piano** (*changeOrbitalPlane*):

$$\left[a, e, i_i, \Omega_i, \omega_i, i_f, \Omega_f\right] \rightarrow \left[\Delta v, \omega_f, \theta\right]$$

- **Cambio dell'anomalia del pericentro** (*changePericenterArg*):

$$\left[a, e, \omega_i, \omega_f\right] \rightarrow \left[\Delta v, \theta_i^{1,2}, \theta_f^{1,2}\right]$$

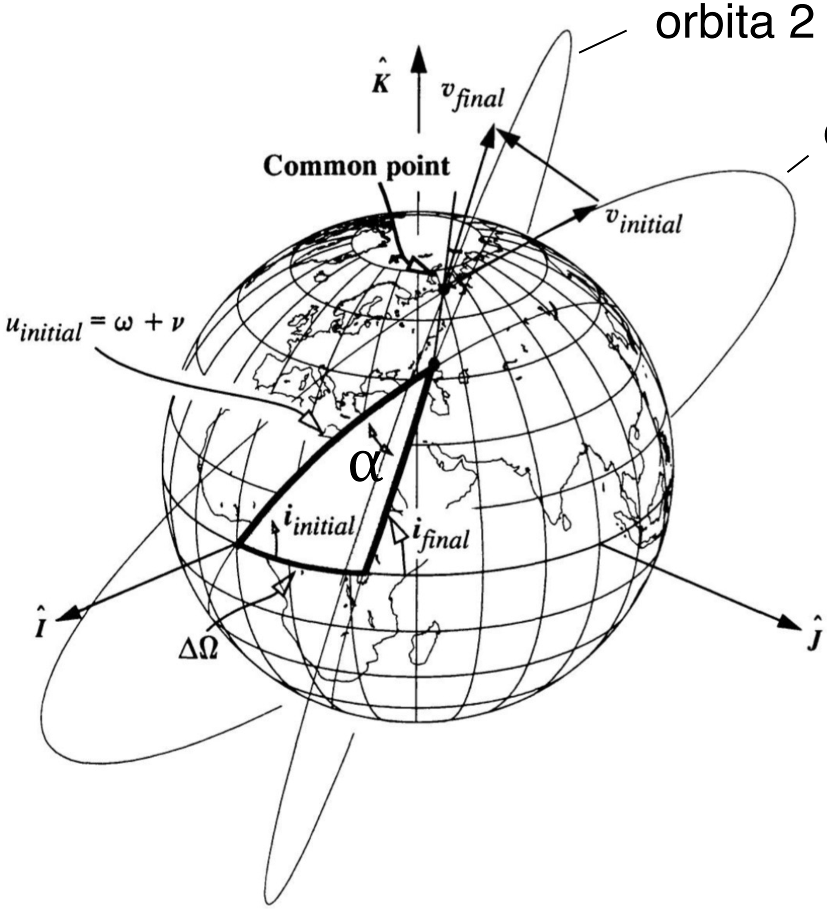
- **Trasferimento bitangente** (*bitangentTransfer*):

$$\left[a_i, e_i, a_f, e_f, type\right] \rightarrow [\Delta v_1, \Delta v_2, \Delta \mathrm{t}]$$

Codice colori:

- Orbita iniziale
- Orbita finale
- Parametri fissi
- Variabili trasferimento

Cambio di piano



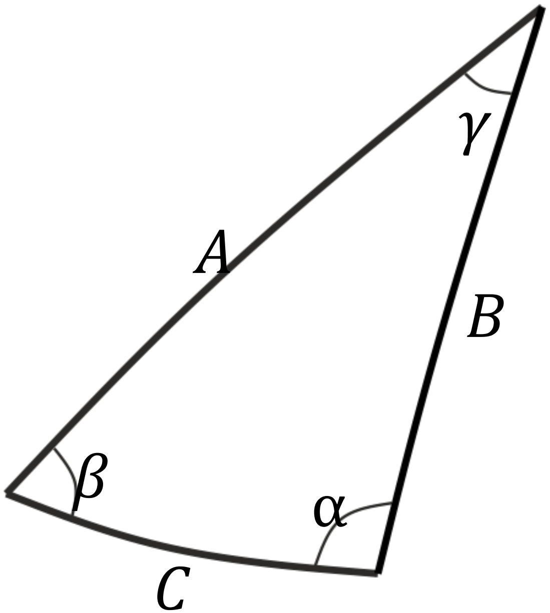
Geometricamente:

- Data orbita iniziale (i_1 , Ω_1)
- (i_2 , Ω_2) definiscono altro piano
- Si individua l'intersezione dell'orbita iniziale con il nuovo piano ($\vec{r}^*$)
- Si ruota il vettore velocità intorno ad $\vec{r}^*$ per portarla su nuovo piano

– Parametri orbitali che non cambiano: $a \quad e \quad \theta$

– Parametri orbitali che cambiano: $i \quad \Omega \quad \omega$

Triangoli sferici



Definizione:

Un'area di una sfera delimitata da tre **geodetiche** (archi di cerchio massimo) è detta **triangolo sferico.**

I **lati** di un triangolo sferico si identificano utilizzando l'**angolo ad essi sotteso**, e non la lunghezza lineare.

La **trigonometria sferica** è simile a quella **euclidea**, con le dovute modifiche.

Legge dei seni

$$\frac{\sin A}{\sin \alpha} = \frac{\sin B}{\sin \beta} = \frac{\sin C}{\sin \gamma}$$

Legge del coseno

$$\cos C = \cos A \cos B + \sin A \sin B \cos \gamma \qquad \text{(lati)}$$

$$\cos \gamma = -\cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta \cos C \qquad \text{(angoli)}$$

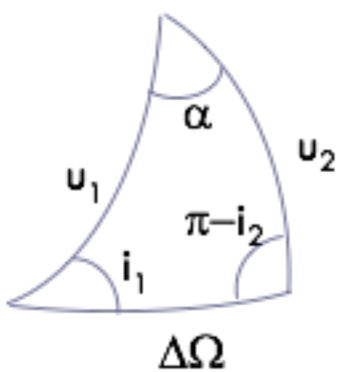
Cambio di piano

$\Delta\Omega > 0, \Delta i > 0$
$\Delta\Omega < 0, \Delta i < 0$

$$\cos\alpha = \cos i_1 \cos i_2 + \sin i_1 \sin i_2 \cos\Delta\Omega \;\Rightarrow\; \alpha$$

$$\left.\begin{array}{l}\cos i_1 = \cos\alpha\cos i_2 + \sin\alpha \sin i_2 \cos u_2 \\ \cos i_2 = \cos\alpha\cos i_1 - \sin\alpha \sin i_1 \cos u_1 \\ \sin u_1 = \dfrac{\sin\Delta\Omega}{\sin\alpha}\sin i_2 \\ \sin u_2 = \dfrac{\sin\Delta\Omega}{\sin\alpha}\sin i_1 \end{array}\right| \;\Rightarrow\; u_1,\ u_2$$

$$\begin{array}{l} u_1 = \omega_1 + \vartheta_1 \\ u_2 = \omega_2 + \vartheta_2 \end{array} \;\Rightarrow\; \theta_1 = \theta_2,\ \omega_2$$

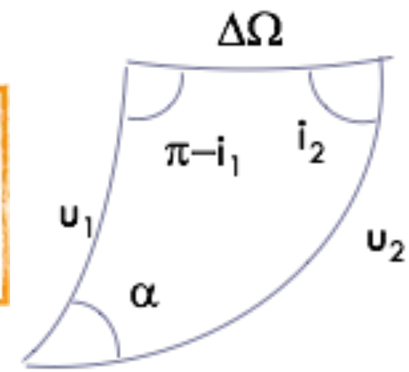


$\Delta\Omega > 0, \Delta i < 0$
$\Delta\Omega < 0, \Delta i > 0$

$$\cos\alpha = \cos i_1 \cos i_2 + \sin i_1 \sin i_2 \cos\Delta\Omega \;\Rightarrow\; \alpha$$

$$\left.\begin{array}{l}\cos i_2 = \cos\alpha\cos i_1 + \sin\alpha \sin i_1 \cos u_1 \\ \cos i_1 = \cos\alpha\cos i_2 - \sin\alpha \sin i_2 \cos u_2 \\ \sin u_1 = \dfrac{\sin\Delta\Omega}{\sin\alpha}\sin i_2 \\ \sin u_2 = \dfrac{\sin\Delta\Omega}{\sin\alpha}\sin i_1 \end{array}\right| \;\Rightarrow\; u_1,\ u_2$$

$$\begin{array}{l} u_1 = 2\pi - (\omega_1 + \vartheta_1) \\ u_2 = 2\pi - (\omega_2 + \vartheta_2) \end{array} \;\Rightarrow\; \theta_1 = \theta_2,\ \omega_2$$



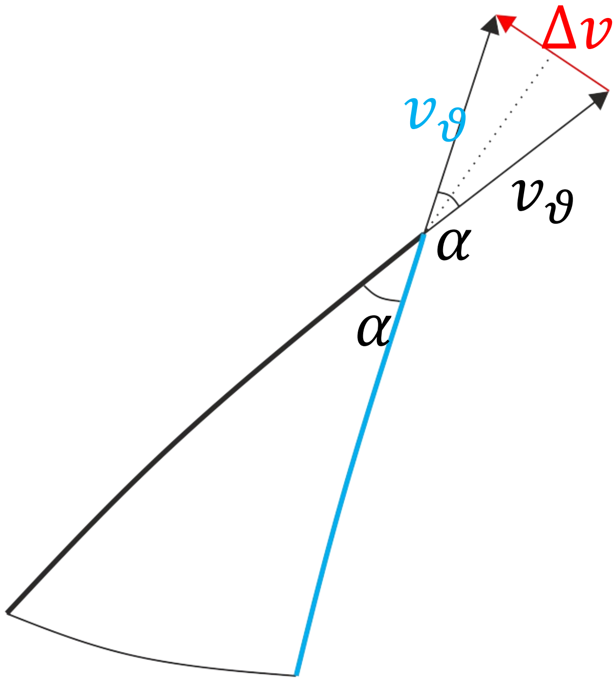
Nota:
sign(α) = sign(ΔΩ)

Cambio di piano

Calcolare il **costo della manovra**

$$v_\vartheta = \sqrt{\frac{\mu}{p}}(1 + e\cos\theta)$$

$$\Delta v = 2v_\vartheta \sin\frac{\alpha}{2}$$



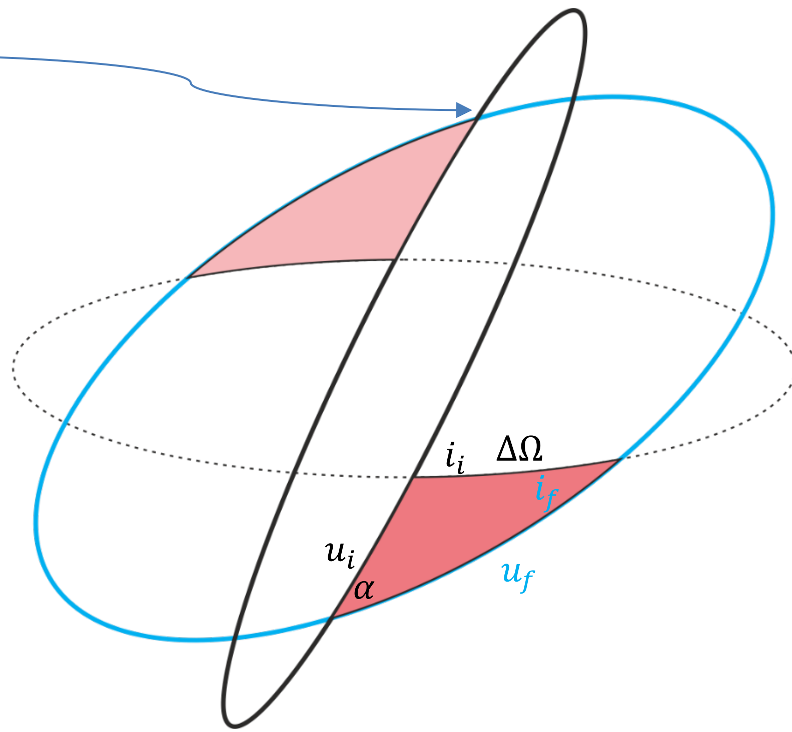
OUTPUT: $[\Delta v, \omega_f, \theta]$

NOTE:

Più lontano è, meglio è…

Cambio di piano – Alternativa

Esiste **un secondo punto di intersezione**
$\tilde{\theta} = \theta + \pi$



Dal momento che $\Delta v \propto v_\vartheta$, funzione dell'anomalia vera, **potrebbe essere conveniente manovrare in** $\tilde{\theta}$.

Come scegliere il punto di manovra?

$$v_\vartheta = \sqrt{\frac{\mu}{p}}(1 + e\cos\theta)$$

Abbiamo v_ϑ piccola quando $\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{3}{2}\pi$, poiché $\cos\theta < 0$.

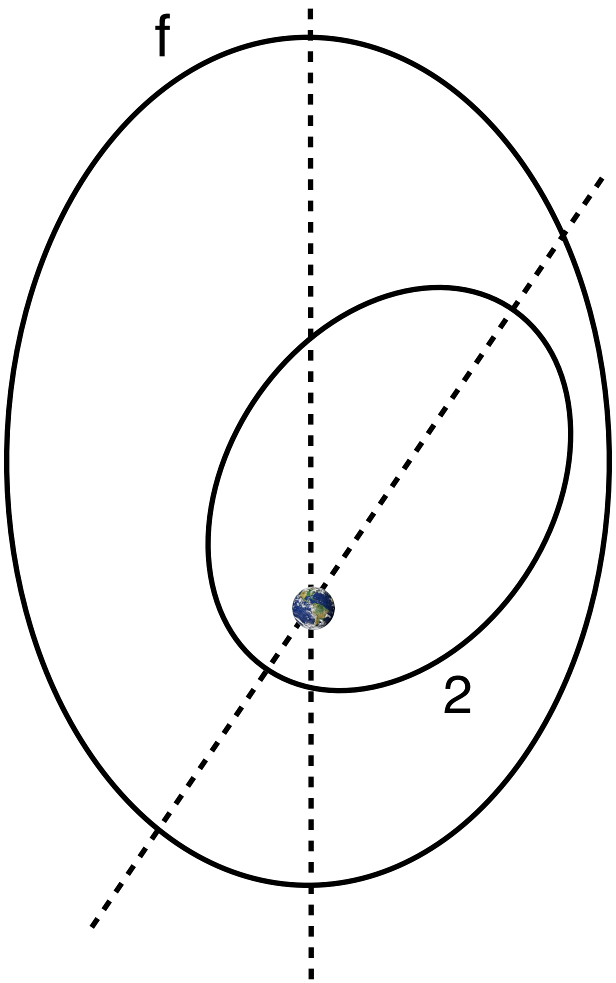
Quindi se l'algoritmo vi restituisce θ nel I o IV quadrante, risulterà conveniente manovrare a $\tilde{\theta} = \theta + \pi$.

NOTE:

- Per sapere se θ è nel I o IV quadrante, controllate il segno del coseno. Se positivo, scegliete $\theta + \pi$.

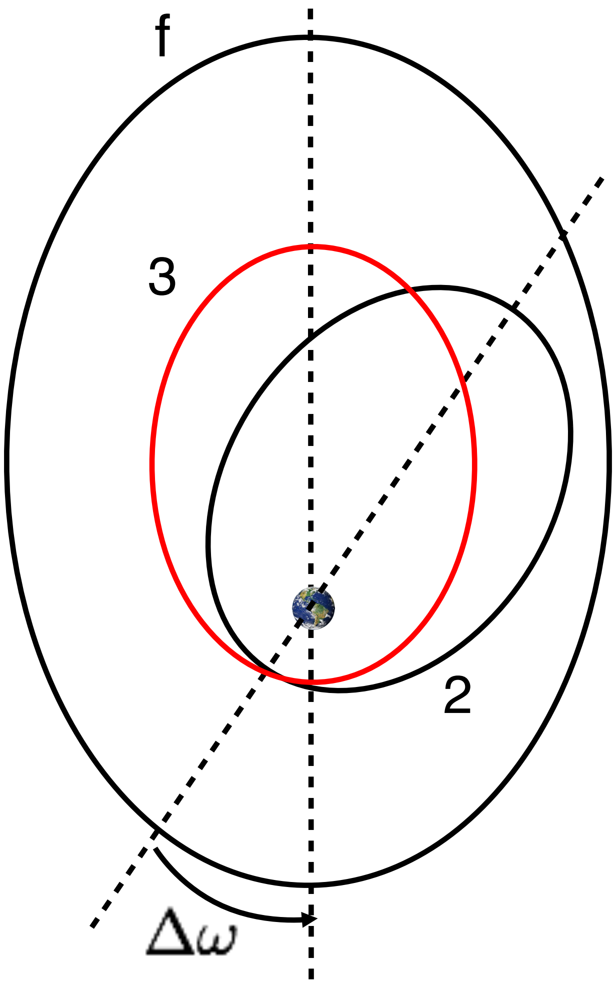
Cambio di anomalia del pericentro

- Siamo sullo stesso piano dell'orbita finale



Cambio di anomalia del pericentro

- Siamo sullo stesso piano dell'orbita finale

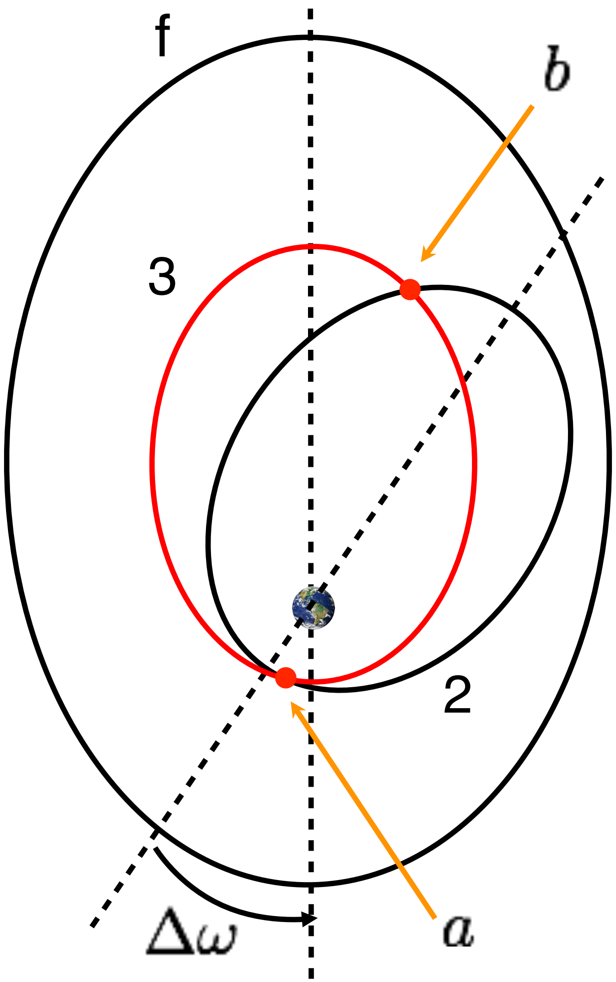


$$\omega_3 = \omega_f$$

$$\Rightarrow \Delta\omega = \omega_3 - \omega_2 = \omega_f - \omega_2$$

Cambio di anomalia del pericentro

- Siamo sullo stesso piano dell'orbita finale



$$\omega_3 = \omega_f$$

$$\Rightarrow \Delta\omega = \omega_3 - \omega_2 = \omega_f - \omega_2$$

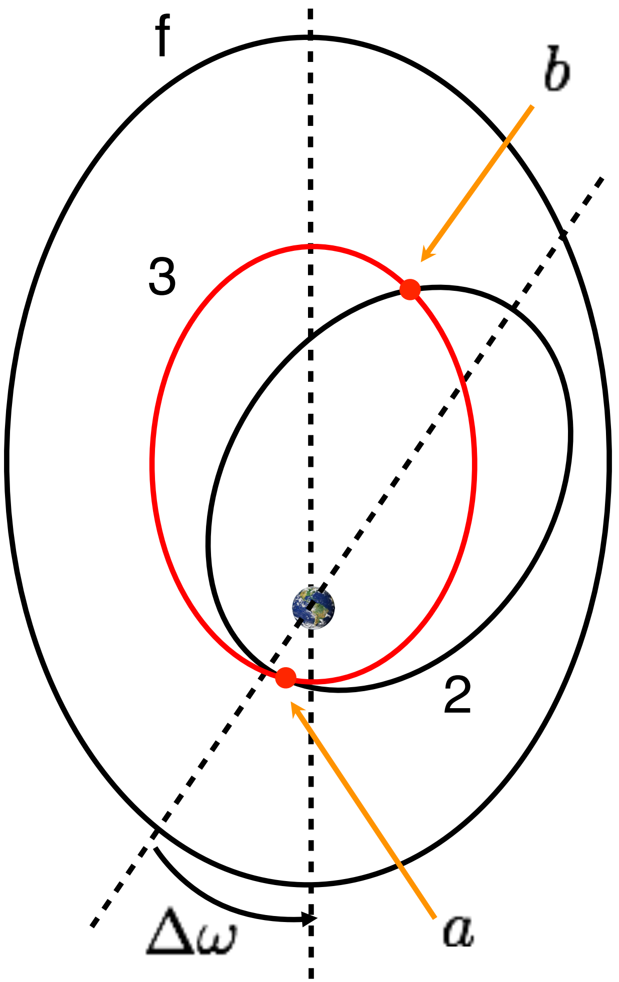
- Manovra di cambio ω

$$\theta_a^2 = \frac{\Delta\omega}{2}$$

$$\theta_b^2 = \frac{\Delta\omega}{2} + \pi$$

Cambio di anomalia del pericentro

- Siamo sullo stesso piano dell'orbita finale



$$\omega_3 = \omega_f$$

$$\Rightarrow \Delta\omega = \omega_3 - \omega_2 = \omega_f - \omega_2$$

- Manovra di cambio ω

$$\theta_a^2 = \frac{\Delta\omega}{2} \Rightarrow \theta_a^3 = 2\pi - \theta_a^2$$

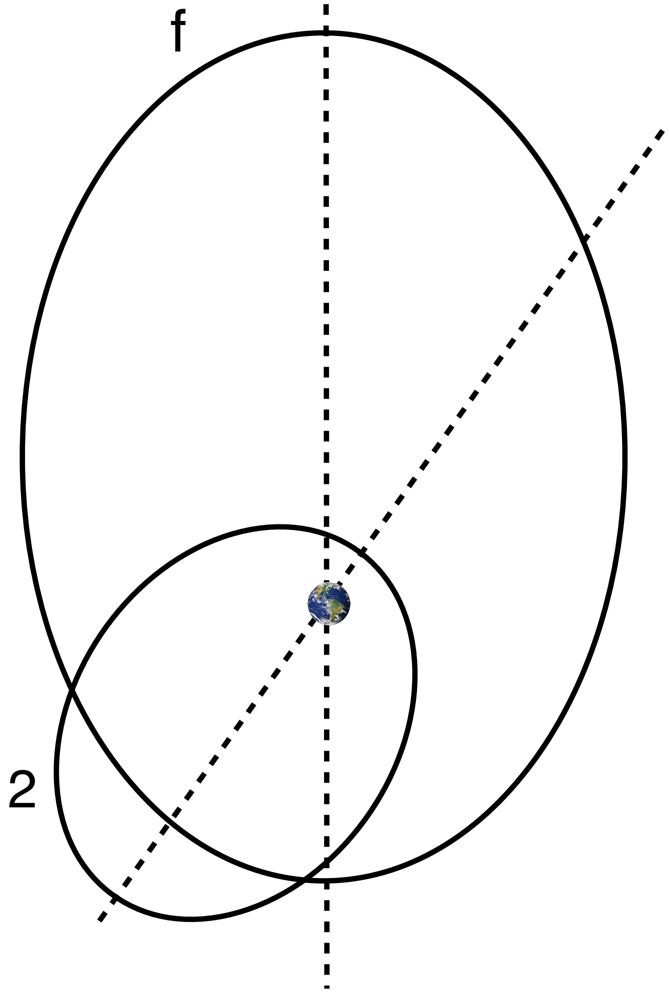
$$\theta_b^2 = \frac{\Delta\omega}{2} + \pi \Rightarrow \theta_b^3 = 2\pi - \theta_b^2$$

– parametri orbitali che non cambiano:
$a \quad e \quad i \quad \Omega$

– parametri orbitali che cambiano:
$\omega \quad \theta$

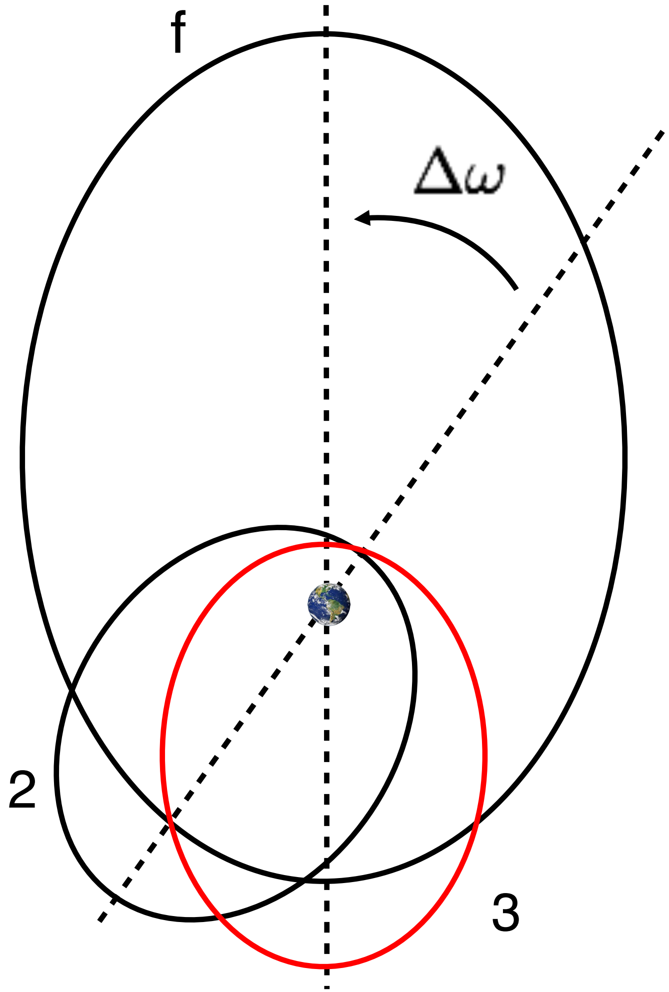
Cambio di anomalia del pericentro

- Pericentri in direzioni opposte



Cambio di anomalia del pericentro

- Pericentri in direzioni opposte

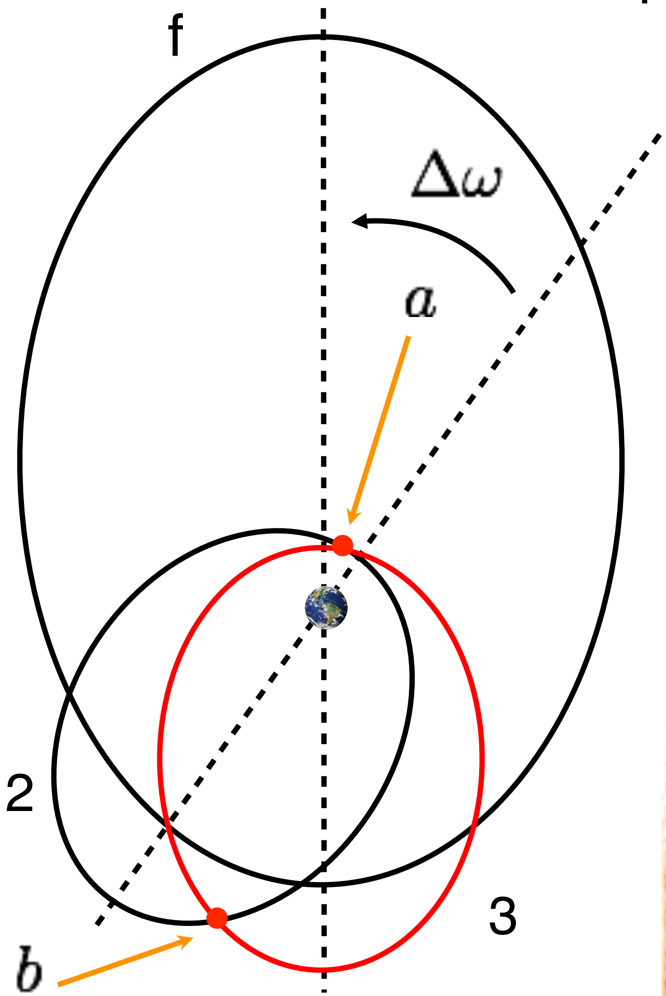


$$\omega_3 = \omega_f + \pi$$

$$\Rightarrow \Delta\omega = \omega_3 - \omega_2 = \pi + \omega_f - \omega_2$$

Cambio di anomalia del pericentro

- Pericentri in direzioni opposte



$$\omega_3 = \omega_f + \pi$$

$$\Rightarrow \Delta\omega = \omega_3 - \omega_2 = \pi + \omega_f - \omega_2$$

- Manovra di cambio ω

$$\theta_a^2 = \frac{\Delta\omega}{2} \quad \Rightarrow \theta_a^3 = 2\pi - \theta_a^2$$

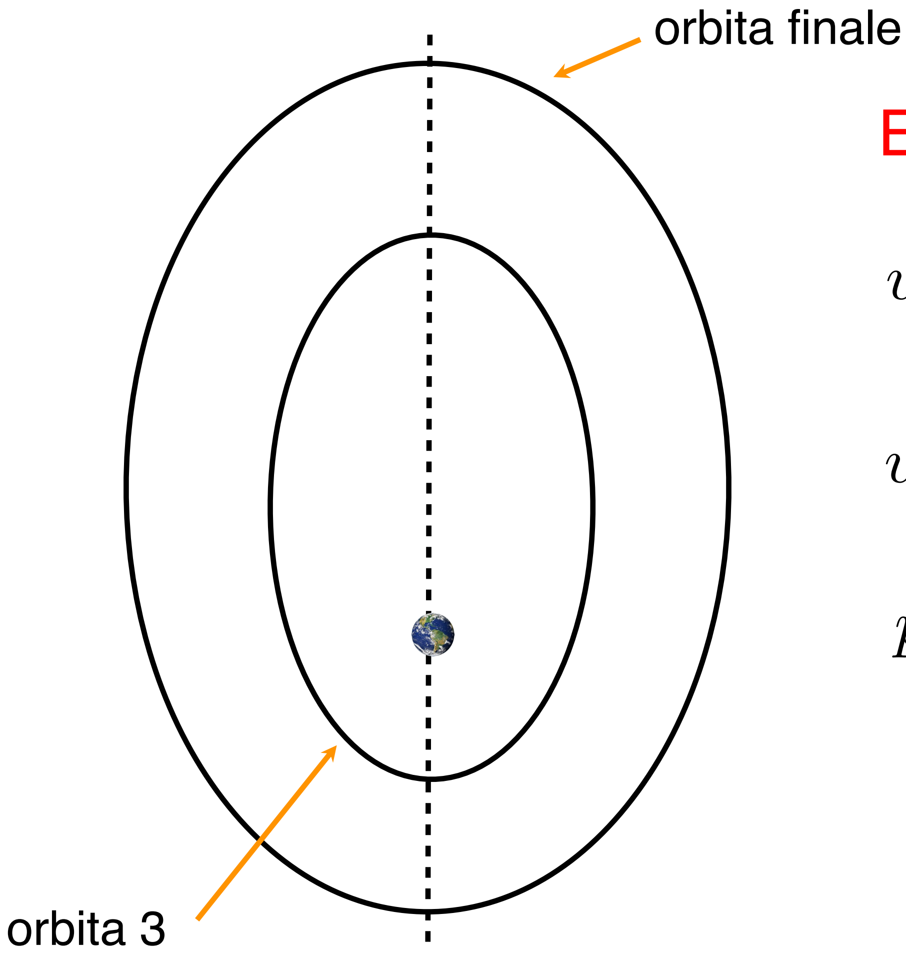
$$\theta_b^2 = \frac{\Delta\omega}{2} + \pi \quad \Rightarrow \theta_b^3 = 2\pi - \theta_b^2$$

parametri orbitali che non cambiano:
$a \quad e \quad i \quad \Omega$

parametri orbitali che cambiano:
$\omega \quad \theta$

Cambio di *a* ed *e*

- Le due orbite sono ora coassiali



Ellissi

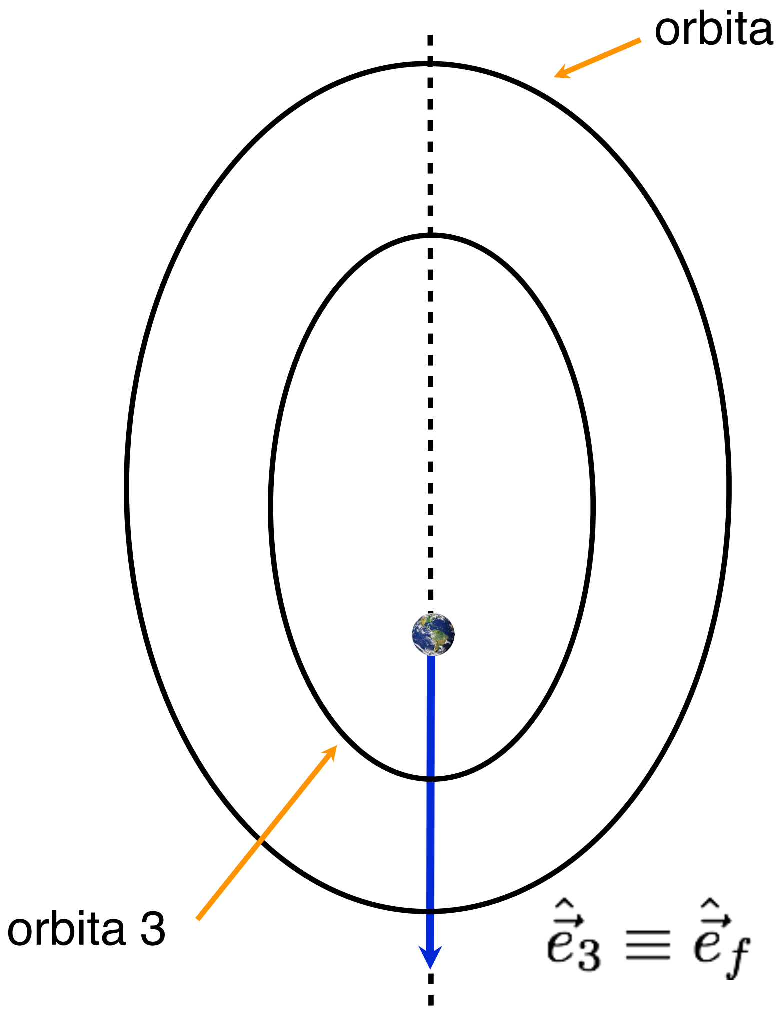
$$v_p = \sqrt{\frac{\mu}{p}} \cdot (1 + e)$$

$$v_a = \sqrt{\frac{\mu}{p}} \cdot (1 - e)$$

$$p = a \cdot (1 - e^2) = \frac{h^2}{\mu}$$

Cambio di *a* ed *e*

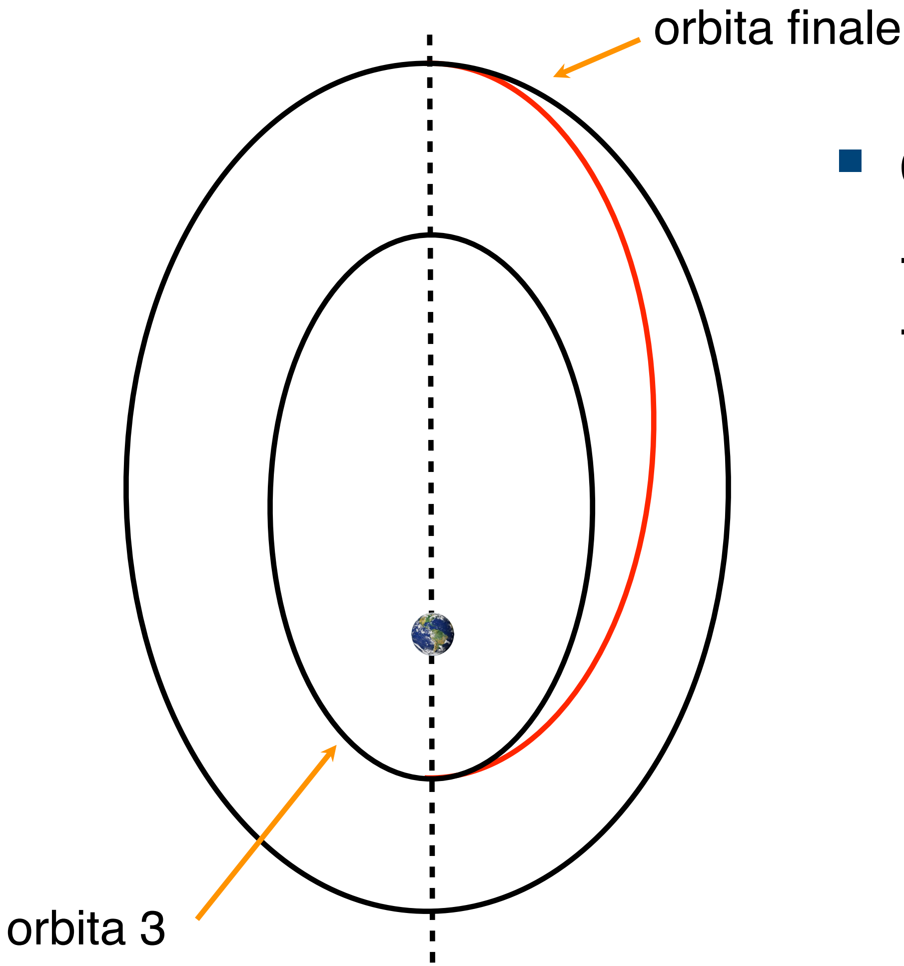
- Le due orbite sono ora coassiali $\Rightarrow$ trasferimento bitangente



- Caso $\omega_3 = \omega_f$
  - pericentro $\Rightarrow$ apocentro
  - apocentro $\Rightarrow$ pericentro

Cambio di *a* ed *e*

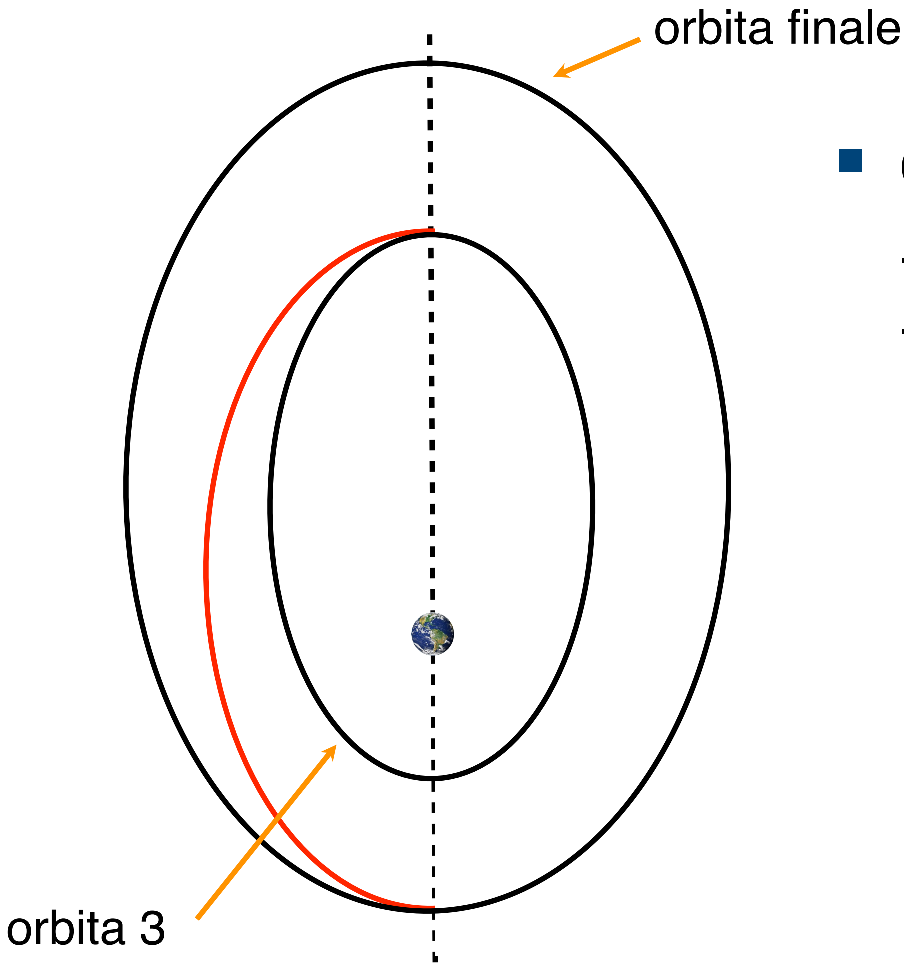
- Le due orbite sono ora coassiali ⇨ trasferimento bitangente



- Caso $\omega_3 = \omega_f$
  - pericentro ⇨ apocentro
  - apocentro ⇨ pericentro

Cambio di *a* ed *e*

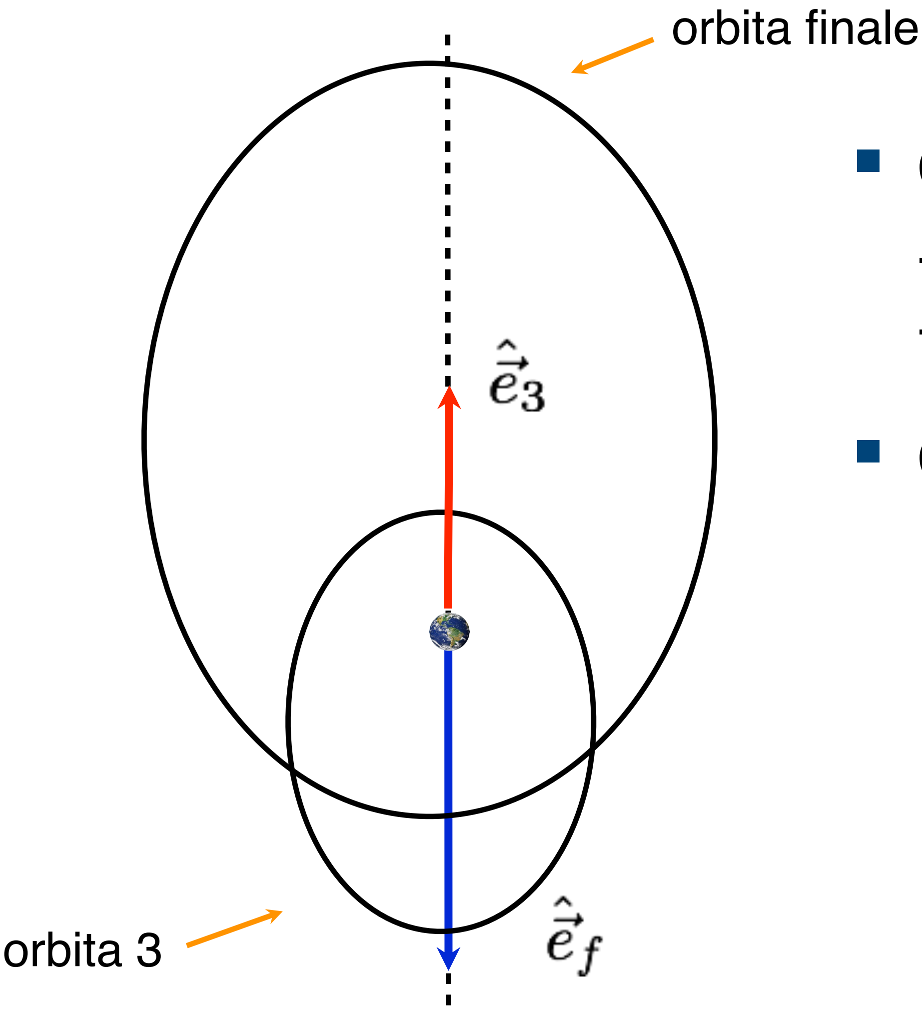
- Le due orbite sono ora coassiali ⇨ trasferimento bitangente



- Caso $\omega_3 = \omega_f$
  - pericentro ⇨ apocentro
  - apocentro ⇨ pericentro

Cambio di *a* ed *e*

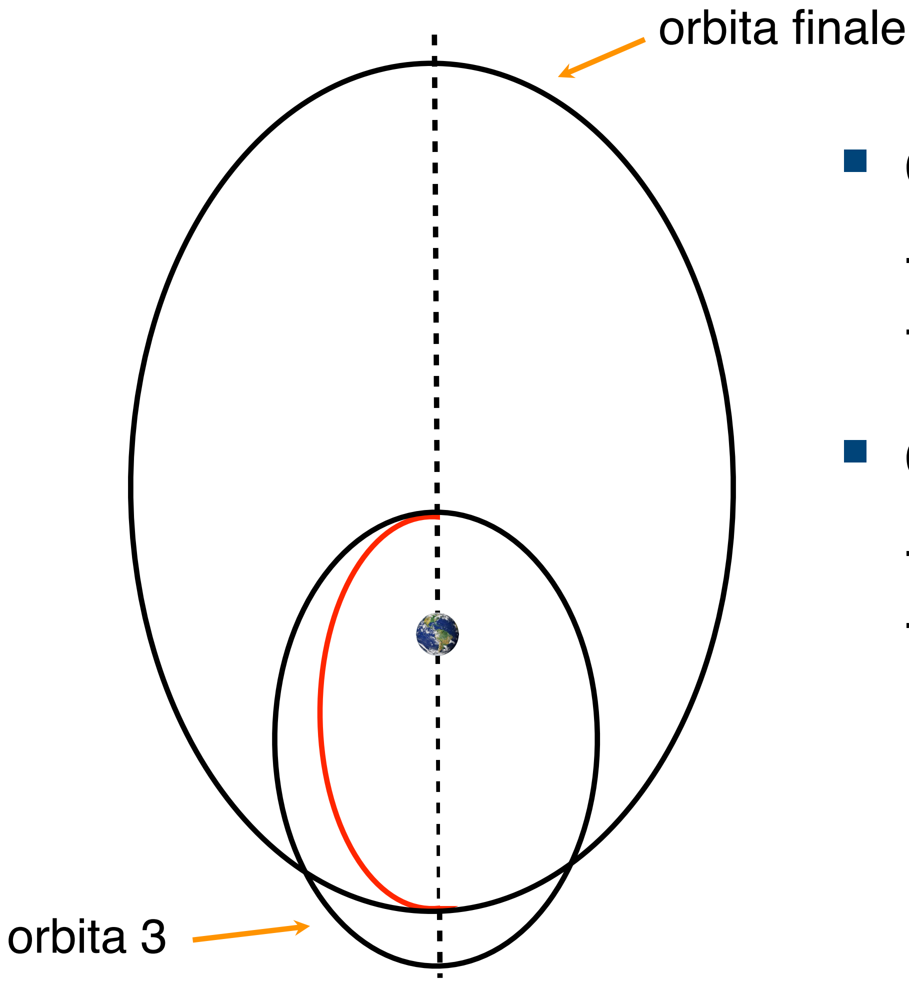
- Le due orbite sono ora coassiali ⇨ trasferimento bitangente



- Caso $\omega_3 = \omega_f$
  - pericentro ⇨ apocentro
  - apocentro ⇨ pericentro
- Caso $\omega_3 = \omega_f + \pi$

Cambio di *a* ed *e*

- Le due orbite sono ora coassiali ⇨ trasferimento bitangente

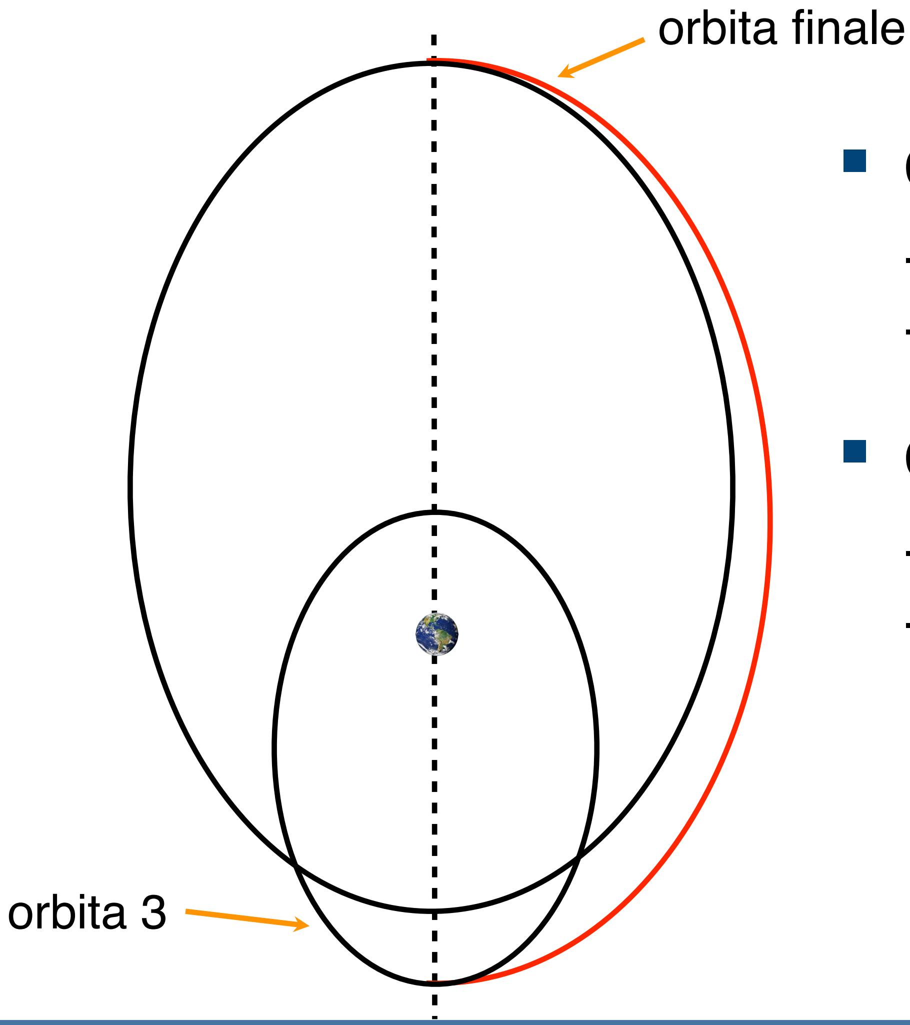


- Caso $\omega_3 = \omega_f$
  – pericentro ⇨ apocentro
  – apocentro ⇨ pericentro

- Caso $\omega_3 = \omega_f + \pi$
  – pericentro ⇨ pericentro
  – apocentro ⇨ apocentro

Cambio di *a* ed *e*

- Le due orbite sono ora coassiali ⇨ trasferimento bitangente



- Caso $\omega_3 = \omega_f$
  - pericentro ⇨ apocentro
  - apocentro ⇨ pericentro
- Caso $\omega_3 = \omega_f + \pi$
  - pericentro ⇨ pericentro
  - apocentro ⇨ apocentro

Procedura

- Orbita iniziale: $\{a_i, e_i, i_i, \Omega_i, \omega_i, \theta_i\}$

- Orbita finale: $\{a_f, e_f, i_f, \Omega_f, \omega_f, \theta_f\}$

Procedura

- Orbita iniziale: $\{a_i, e_i, i_i, \Omega_i, \omega_i, \theta_i\}$

$$\{a_i, e_i, i_i, \Omega_i, \omega_i, \theta_2\}$$

$$\{a_i, e_i, i_f, \Omega_f, \omega_2, \theta_2\}$$

  - attesa fino a punto manovra: Δt_1
  - cambio piano: Δv_1

- Orbita finale: $\{a_f, e_f, i_f, \Omega_f, \omega_f, \theta_f\}$

Procedura

- Orbita iniziale: $\{a_i, e_i, i_i, \Omega_i, \omega_i, \theta_i\}$

$$\{a_i, e_i, i_i, \Omega_i, \omega_i, \theta_2\}$$

$$\{a_i, e_i, i_f, \Omega_f, \omega_2, \theta_2\}$$

$$\{a_i, e_i, i_f, \Omega_f, \omega_2, \theta_3\}$$

$$\{a_i, e_i, i_f, \Omega_f, \omega_f, \theta_4\}$$

  - attesa fino a punto manovra: Δt_1
  - cambio piano: Δv_1
  - attesa fino a punto manovra: Δt_2
  - cambio anomalia pericentro: Δv_2

- Orbita finale: $\{a_f, e_f, i_f, \Omega_f, \omega_f, \theta_f\}$

Procedura

- Orbita iniziale: $\{a_i, e_i, i_i, \Omega_i, \omega_i, \theta_i\}$

$$\{a_i, e_i, i_i, \Omega_i, \omega_i, \theta_i\}$$
– attesa fino a punto manovra: Δt_1
$$\{a_i, e_i, i_i, \Omega_i, \omega_i, \theta_2\}$$
– cambio piano: Δv_1
$$\{a_i, e_i, i_f, \Omega_f, \omega_2, \theta_2\}$$
– attesa fino a punto manovra: Δt_2
$$\{a_i, e_i, i_f, \Omega_f, \omega_2, \theta_3\}$$
– cambio anomalia pericentro: Δv_2
$$\{a_i, e_i, i_f, \Omega_f, \omega_f, \theta_4\}$$
– attesa fino a punto manovra: Δt_3
$$\{a_i, e_i, i_f, \Omega_f, \omega_f, \theta_5\}$$
– cambio a ed e: $\Delta v_3, \Delta v_4, \Delta t_4$
$$\{a_f, e_f, i_f, \Omega_f, \omega_f, \theta_6\}$$

- Orbita finale: $\{a_f, e_f, i_f, \Omega_f, \omega_f, \theta_f\}$

Procedura

- Orbita iniziale: $\{a_i, e_i, i_i, \Omega_i, \omega_i, \theta_i\}$

  – attesa fino a punto manovra: Δt_1

  $\{a_i, e_i, i_i, \Omega_i, \omega_i, \theta_2\}$

  – cambio piano: Δv_1

  $\{a_i, e_i, i_f, \Omega_f, \omega_2, \theta_2\}$

  – attesa fino a punto manovra: Δt_2

  $\{a_i, e_i, i_f, \Omega_f, \omega_2, \theta_3\}$

  – cambio anomalia pericentro: Δv_2

  $\{a_i, e_i, i_f, \Omega_f, \omega_f, \theta_4\}$

  – attesa fino a punto manovra: Δt_3

  $\{a_i, e_i, i_f, \Omega_f, \omega_f, \theta_5\}$

  – cambio a ed e: $\Delta v_3, \Delta v_4, \Delta t_4$

  $\{a_f, e_f, i_f, \Omega_f, \omega_f, \theta_6\}$

  – attesa fino a punto finale: Δt_5

- Orbita finale: $\{a_f, e_f, i_f, \Omega_f, \omega_f, \theta_f\}$

Funzioni da implementare

- Cambio piano:

$$[\Delta v_1, \omega_2, \theta_2] = \text{CambioPiano}(a_i, e_i, i_i, \Omega_i, \omega_i, i_f, \Omega_f)$$

- Cambio anomalia pericentro:

$$[\Delta v_2, \theta_3, \theta_4] = \text{CambioAnPericentro}(a_i, e_i, \omega_i, \omega_f, \theta_2)$$

- Cambio forma orbita:

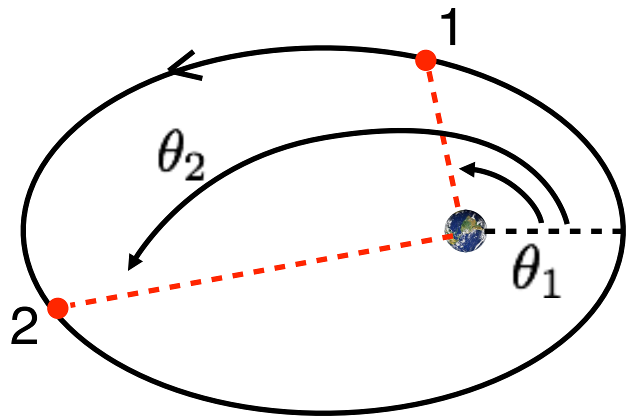
$$[\Delta v_3, \Delta v_4, \Delta t_4] = \text{CambioFormaOrbita}(a_i, e_i, a_f, e_f)$$

- Calcolo tempi fra anomalie vere:

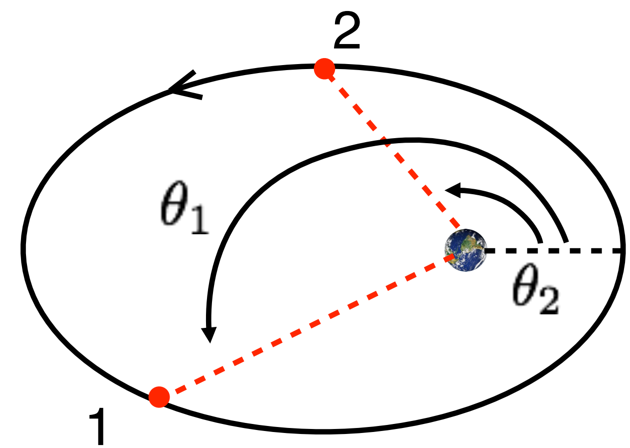
$$[\Delta t_{12}] = \text{CalcoloTempi}(a, e, \theta_1, \theta_2)$$

Nota su calcolo dei tempi

- Calcolo tempi fra anomalie vere: $[\Delta t_{12}] = \text{CalcoloTempi}(a, e, \theta_1, \theta_2)$



$\theta_2 > \theta_1 \Rightarrow \Delta t_{12} = t_2 - t_1$



$\theta_1 > \theta_2 \Rightarrow \Delta t_{12} = t_2 - t_1 + T$

Matlab

Funzioni che potrebbero tornare utili:

- *switch/case/otherwise* – struttura che permette di discriminare diversi casi (alternativa a *if*)
- *atan2* – arcotangente conoscendo valori seno e coseno *(*trova angolo fra 0 e 2π*)*

Laboratorio 2

Giovanni Zanotti – `giovanni.zanotti@polimi.it`
Stefano Silvestrini – `stefano.silvestrini@polimi.it`

Introduzione all'Analisi di Missioni Spaziali

A.A. 2022-2023

Andrea Colagrossi

POLITECNICO MILANO 1863