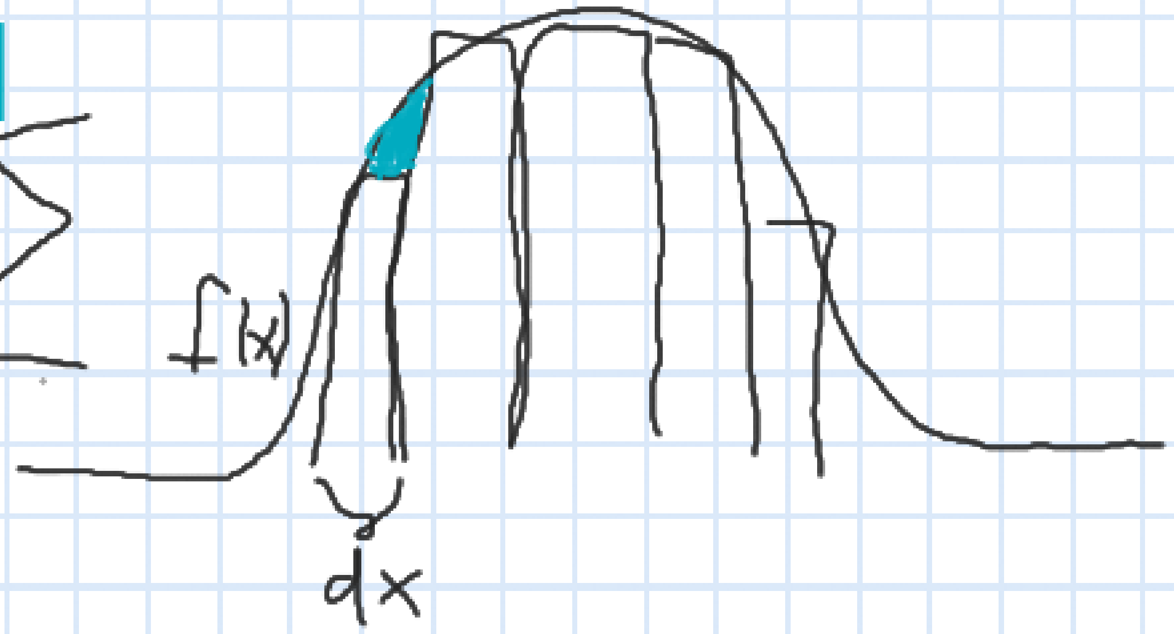
Интегралы

Интегральное исчисления

$$\int \approx \sum$$



Неопределенный интеграл - первообразная

подинтегральное выражение

$$\int f(x)\,dx = F(x) + \underset{const}{C}$$

знак интеграла, подинтегральная функция, дифференциал =

dx - это дифференуиал по переменной X, тк аргумент функции f(x) - это X. дифференуиал - это бесконечно малая прибавка(приращение) к аргументу. Он не является числом - это символ. dx !=1. Он постоянно меняется.

dx - это ширина каждого эл-та в бесконечной сумме, которая составляет интеграл. f(x) - длина прямогульника. Интеграл - сумма площадей прямоугольников.

Ряд тейлора - разложение функции на полином. Используется для аппроксимации сложных функций. Изучение функции в окрестности точки

Геометрический смысл интеграла - площадь под кривой.

$F(x) + C$ - МНОЖЕСТВО ПЕРВООБРАЗНЫХ ФУНКЦИЙ

$F(x)$ первообразная

ПЕРВООБРАЗНАЯ функции = антипроизводная , взяв от которой производную, получишь подинтегральную функцию.

Производная какой функуии дает функцию

const

$$\int \sin x\,dx = -\cos x + C \Rightarrow -\cos x + \sin 2;\ -\cos x - 4;\ -\cos x - e$$

$$(F(x)+C)' = F'(x) + 0 = f(x) \qquad \int f(x)\,dx$$

$$(-\cos x + C)' = -(-\sin x) + 0 = \sin x$$

Свойства линейности в интегральном исчислении

1. $\int ku\,dx = k\int u\,dx$
2. $\int (u \pm v)\,dx = \int u\,dx \pm \int v\,dx$

$$\int \left(x + \sqrt{x} - 3x^5 + \frac{2}{x^3} - \frac{1}{\sin^2 x} + \overset{\text{const}}{\overset{\downarrow}{tg\,5}}\right)dx$$

$$= \int x\,dx + \int \sqrt{x}\,dx - 3\int x^5\,dx + 2\int \frac{1}{x^3}\,dx - \int \frac{1}{\sin^2 x}\,dx + tg\,5\int dx$$

$$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} = \frac{x^{1+1}}{1+1} = \frac{x^2}{2} \quad (n \neq -1)$$

$$\int \frac{dx}{x} = \int \frac{1}{x} dx$$

$$= \frac{1}{2} x^2 + \frac{x^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1} - 3 \cdot \frac{x^6}{6} + 2 \cdot \frac{x^{-3+1}}{-2} + ctg\,x + tg(5) \cdot x =$$

$$= \frac{1}{2} x^2 + \frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{2} x^6 - x^{-2} + ctg\,x + tg(5) \cdot x =$$

$$= \frac{x^2}{2} + 2\sqrt{x^3} - \frac{x^6}{2} - \frac{1}{x^2} + ctg\,x + tg(5) \cdot x + C$$

Интегралы, которые не берутся. Решение конечно

$\int e^{-x^2} dx$ — Интеграл Пуассона

$\int \sin x^2 dx$, $\int \cos x^2 dx$ — Интерралы Френеля

$\int \frac{dx}{\ln x}$ — Интегральный логарифм

$\int \frac{e^x dx}{x}$ — Интегральная экспонента

$\int \frac{\sin x dx}{x}$ Интегральный синунс

$\int \frac{\cos x dx}{x}$ — Интегральный косинус

$$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C, \quad \int e^x dx = e^x + C$$

$$\int \sin x\, dx = -\cos x + C$$

$$\int \cos x\, dx = \sin x + C$$

$$\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \int \frac{1}{\cos^2 x}\, dx = \operatorname{tg} x + C$$

1) $$\int \frac{dx}{x^2 - a^2} = \frac{1}{2a} \ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right| + C$$

2) $$\int \frac{dx}{a^2 - x^2} = \frac{1}{2a} \ln\left|\frac{a+x}{a-x}\right| + C$$

Проверка неопределенного интеграла через диффекренциал

$$d\left(\frac{x^2}{2}+\frac{2}{3}\sqrt{x^3}-\frac{x^6}{2}-\frac{1}{x^2}+ctg\,x+tg5\cdot x+C\right)=$$

$$=\left(\frac{x^2}{2}+\frac{2}{3}\sqrt{x^3}-\frac{x^6}{2}-\frac{1}{x^2}+ctg\,x+tg5\cdot x+C\right)'\cdot dx=$$

$$=\left[\frac{1}{2}(x^2)'+\frac{2}{3}\left(x^{\frac{3}{2}}\right)'-\frac{1}{2}(x^6)'-(x^{-2})'+(ctg\,x)'+tg5\,(x)'+(C)'\right]dx=$$

$$=\left[\frac{1}{2}\cdot 2x^1+\frac{2}{3}\cdot\frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}}-\frac{1}{2}\cdot 6x^5-(-2)x^{-3}+\left(-\frac{1}{\sin^2 x}\right)+tg5\cdot 1+0\right]dx=$$

$$=\left(x+\sqrt{x}-3x^5+\frac{2}{x^3}-\frac{1}{\sin^2 x}+tg5\right)dx$$

$$d(\quad\quad)=dy=d[f(x)]$$

Диф

1) d убираем

2) $d\,x$ справа, $+\ (\ )'$

$$d(2x-1) = (2x-1)'dx = (2-0)dx = 2$$

$$\int x^2(3+4x)^2dx = \int x^2(9+24x+16x^2)dx =$$

$$\cancel{\int uv\,dx = \int u\,dx \cdot \int v\,dx}, \quad \cancel{\int \frac{u}{v}dx = \frac{\int u\,dx}{\int v\,dx}}$$

$$\int(9x^2+24x^3+16x^4)dx=9\int x^2dx+24\int x^3dx+16\int x^4dx=$$

$$=\frac{9\cdot x^3}{3}+\frac{24\cdot x^4}{4}+\frac{16x^5}{5}+C=3x^3+6x^4+\frac{16}{5}x^5+C$$

$$\int x(1-2x)^3dx=\int x(1^3-3\cdot 1^2\cdot 2x)+3\cdot 1(2x)^2-(2x)^3)dx=$$

$$=\int x(1-6x+12x^2-8x^3)dx=\int x\,dx-\int 6x^2dx+\int 12x^3dx-\int 8x^4dx=$$

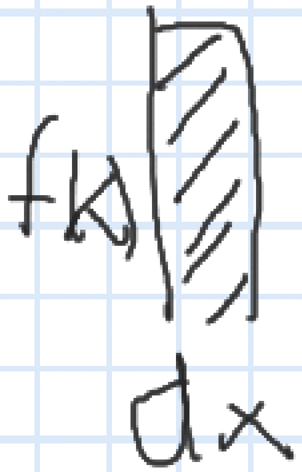
$$=\frac{x^2}{2}-\frac{6}{3}x^3+\frac{12}{4}x^4+\frac{8\cdot x^5}{5}+C \quad +$$

$$(a-b)^3=a^3-3a^2b+3ab^2-b^3 \rightarrow$$

План урока 22.03 :

1. Свойства линейности ✓
2. Подведение фунции под знак интеграла ✓
3. Метод замены переменной
4. Интегрирование по частям ✓
5. Тригонометрический интеграл
6. Определнный интеграл
7. Несобственный интегрвал

$S = f(x)\,dx$



Базовые свройства интеграла:

1) $\left(\int f(x)\,dx\right)' = f(x)$ 2) $d\left(\int f(x)\,dx\right) = f(x)\cdot dx$

Свойства линейности:

1) $\int k f(x)\,dx = k\int f(x)\,dx$ 2) $\int (f(x)+f(g))\,dx = \int f(x)\,dx + \int f(g)\,dx$

Подведение функции под знак дифференциала

$d(2x-1) = (2x-1)'\,dx = 2\,dx$ $(2x)' = 2\cdot 1\cdot x^{1-1} = 2\cdot 1 = 2$

$dx = \frac{1}{2}\cdot d(2x-1)$

$\int \sin(3x+1)\,dx = \frac{1}{3}\int \sin(3x+1)\,d(3x+1) =$ $d(3x+1) \overset{\vee}{=} 3\,dx$ $(3x+1)'dx$

$= \frac{1}{3}\int \sin(3x+1)\cdot(3x+1)'\,dx = \frac{1}{3}\int \sin(3x+1)\cdot 3\,dx = \int \sin(3x+1)\,dx$ $dx = \frac{d(3x+1)}{3}$

$$\int \sin(3x+1)\,dx = \frac{1}{3}\int \sin(3x+1)\,d(3x+1) =$$

$$= -\frac{1}{3}\cos(3x+1) + C$$

Метод замены перемнной .

$$\int \sin(\underbrace{3x+1}_{t})\underbrace{dx}_{\frac{dt}{3}} = \frac{1}{3}\int \sin t\cdot dt = -\frac{1}{3}\cos t + C = -\frac{1}{3}\cos(3x+1)+C$$

$t = 3x+1$ $\quad dt = dy = f(x)'\,dx$

$$dt = (3x+1)'\cdot dx = 3dx \Rightarrow dx = \frac{dt}{3}$$

$$\int \sin(3x+1)\,dx = \frac{1}{3}\int \sin t\,dt = -\frac{1}{3}\cos t + C = -\frac{1}{3}\cos(3x+1)+C$$

$$dt = 3dx \Rightarrow dx = \frac{dt}{3}$$

Интегрирование по частям

$$\cancel{\int uv\,dx = \int u\,dx \cdot \int v\,dx}$$

$$\int u\,dv = uv - \int v\,du$$

Ex $\int \underbrace{\ln x}_{u}\, \underbrace{dx}_{v}$, $\int x e^{x} dx$, $\int (x^2 - 2x + 5) e^{-2x} dx$

1) $\int \ln x\,dx = x\ln x - \int x \cdot \frac{dx}{x} = x\ln x - \int dx = x\ln x - x + C$

$u = \ln x \Rightarrow du = (\ln x)'dx = \frac{1}{x}dx$

$dv = dx \Rightarrow v = \int dx = x$

$u = \ln^2 x \Rightarrow du = (\ln^2 x)' dx = 2\ln x (\ln x)' dx = \frac{2\ln x\,dx}{x}$

$dv = x\,dx \Rightarrow v = \int x\,dx = \frac{x^2}{2}$

2) $\int \underbrace{x}_{} \underbrace{\ln^2 x}_{u}\, \underbrace{dx}_{v} = \frac{x^2\ln^2 x}{2} - \int \frac{x^2}{2} \cdot \frac{2\ln x\,dx}{x} = \frac{x^2\ln^2 x}{2} - \int x\ln x\,dx = (*)$

$$\int \underbrace{\underbrace{x\ln x}_{u}\,dx}_{v} = \frac{x^2}{2}\ln x - \int \frac{x^2}{2}\cdot\frac{dx}{x} = \frac{x^2}{2}\ln x - \frac{x^2}{4}$$

$$u = \ln x \Rightarrow du = (\ln(x))' dx = \frac{dx}{x}$$

$$dv = x\,dx \Rightarrow v = \int x\,dx = \frac{x^2}{2}$$

$$(*) = \frac{x^2\ln^2 x}{2} - \frac{x^2\ln x}{2} + \frac{x^2}{4} + C = \frac{x^2(2\ln^2 x - 2\ln x + 1)}{4} + C$$

+

$$\int \underbrace{(x-2)}_{u}\,\underbrace{e^{2x}dx}_{v}$$

$$u = x-2 \Rightarrow du = (x-2)'dx = dx$$

$$dv = e^{2x}dx \Rightarrow v = \int e^{2x}dx = \frac{1}{2}e^{2x}$$

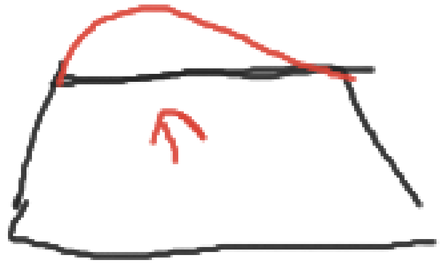
Неопред интеграл от тригонометрической формулы

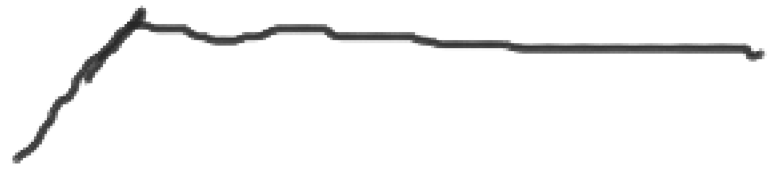
$$\int \sin 5x \cdot \sin 7x\,dx = \int \frac{\cos(5x-7x)-\cos(5x+7x)}{2}\,dx = \frac{1}{2}\int \cos(2x)\,dx -$$

$$\sin\alpha \sin\beta = \frac{\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)}{2}$$

$$-\frac{1}{2}\int \cos(12x)\,dx =$$

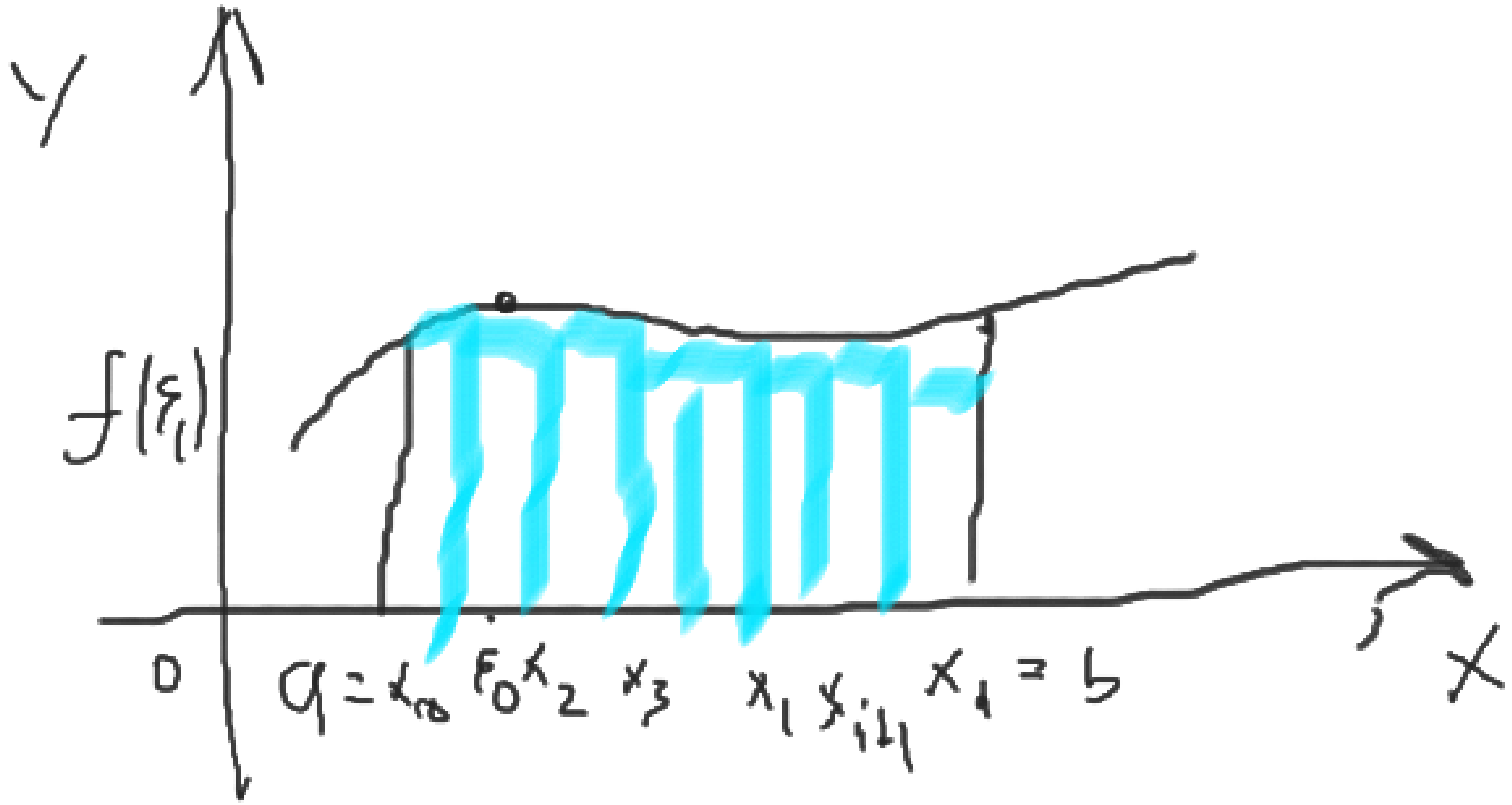
Определенный интеграл (инт Риммана) - по





1. Интеграл Риммана(определенный интеграл)
2. Ф-лв Ньютона Лейбница
3. Основные правила интегрирования
4. Вычисление площадей с пом. опред.интеграла

1) $\int_a^b f(x)\,dx$



$y = f(x)$, $f(x) > 0$

$[a, b]$