Доказательство по Коши = по определению

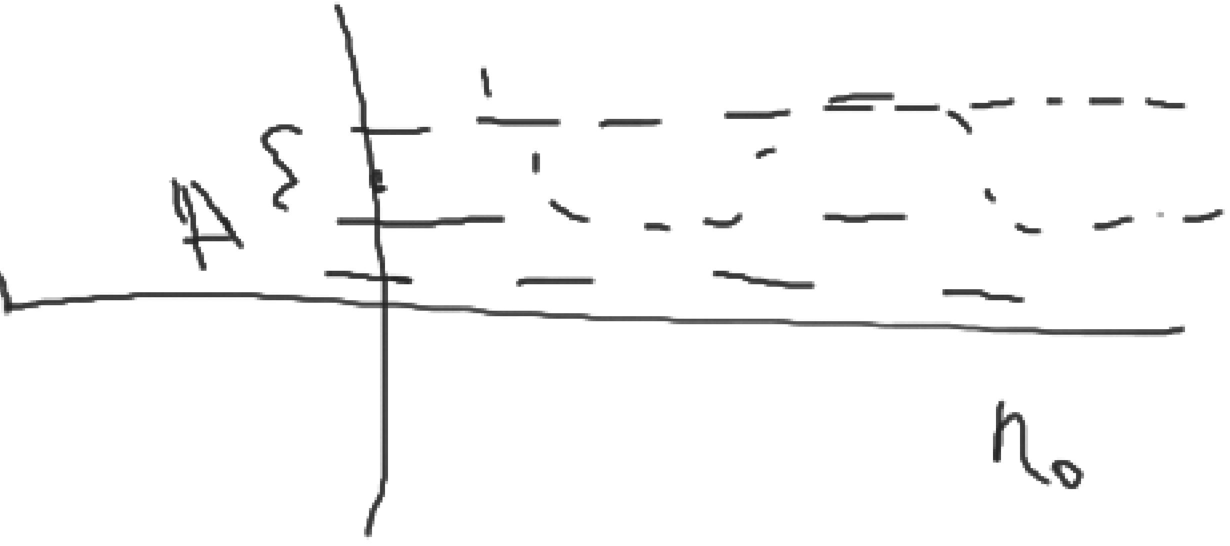
$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = A$ $\qquad \{a_n\}$

$\forall \varepsilon > 0, \exists \underset{n_0}{N(\varepsilon)} \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0 : |a_n - A| < \varepsilon$

$\lim\limits_{n\to\infty} \frac{2\ln(n-1)}{3(n+1)}$. Пуст $\varepsilon > 0$, тогда

$\left| \frac{2\ln(n-1)}{3(n+1)} - \lim\limits_{n\to\infty} \frac{2\ln(n-1)}{3(n+1)} \right| < \varepsilon$

$\lim\limits_{n\to\infty} \frac{2\ln(n-1)}{3(n+1)} = \frac{2}{3}$ $\qquad \lim \frac{\ln(n-1)(n-1)}{(n+1)(n-1)} =$




$= \frac{2}{3} \lim \frac{n-1}{n+1} = \frac{2}{3}$

$$\left|\frac{2\ln(n-1)}{3\ln(n+1)}-\frac{2}{3}\right|<\varepsilon$$

$$\begin{cases}\dfrac{2\ln(n-1)}{3\ln(n+1)}-\dfrac{2}{3}<\varepsilon\\[2ex] 3(n+1)>0\end{cases}$$

$$\frac{2\ln(n-1)-2\ln(n+1)}{3(3\ln(n+1))}<\varepsilon$$

номер  которго мы войдем в коридор

$n >$


$N_0$

$n \geq N_0$

# Бесконечно малые функции (бмф) и бесконечно большие функции (ббм)

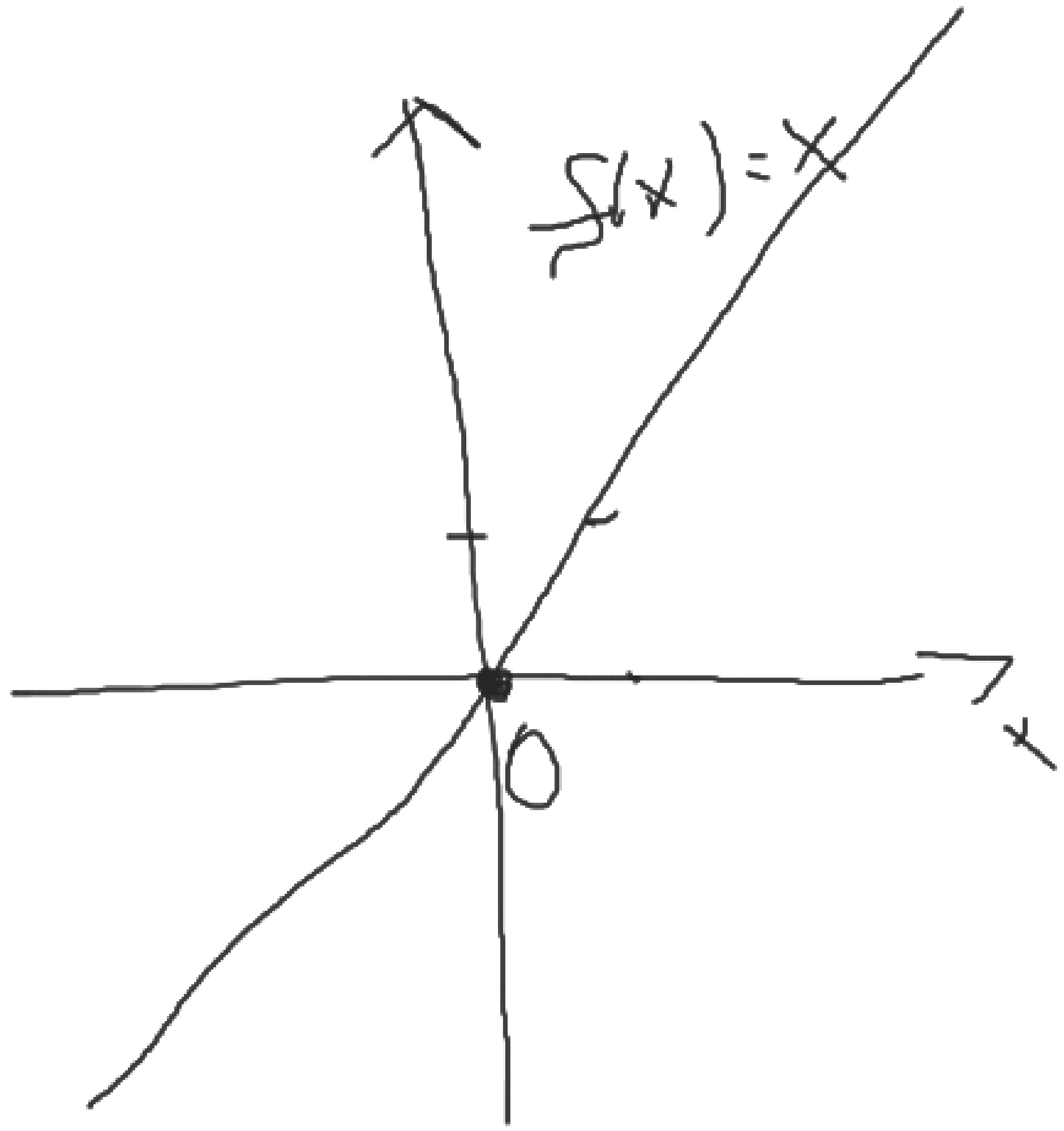
$$\lim_{x\to x_0} f(x) = 0$$

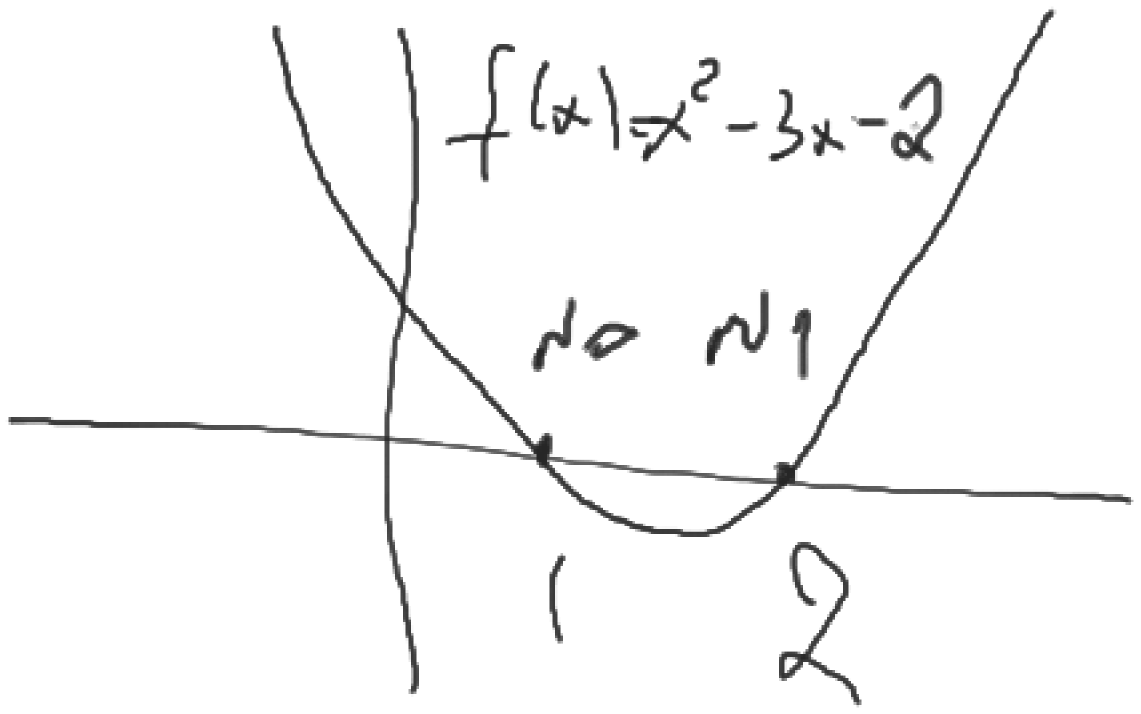
ф-я бесконечно малая мб только в какой-то точке

БМФ - в любых точках кроме точки О(о,о) наш предел равен какому-то числу.

$$\lim_{x\to 0} (x) = 0$$

$$\lim_{x\to \pm\infty} (x) = \pm\infty$$






$f(x)$ — б.м. пр 0 $x_0$, $x_1$

$$\lim_{x\to 1}(x^2-3x-2)=0$$

$$\lim_{x\to 2}(x^2-3x+2)=0$$

$$\lim_{x\to +\infty}(x^2-3x+2)=+\infty$$

осциллирующая последоательность=функция


Осциллирующая последовательность – это последовательность, элементы которой периодически меняются между двумя или более значениями.

(-1)^n
x->inf

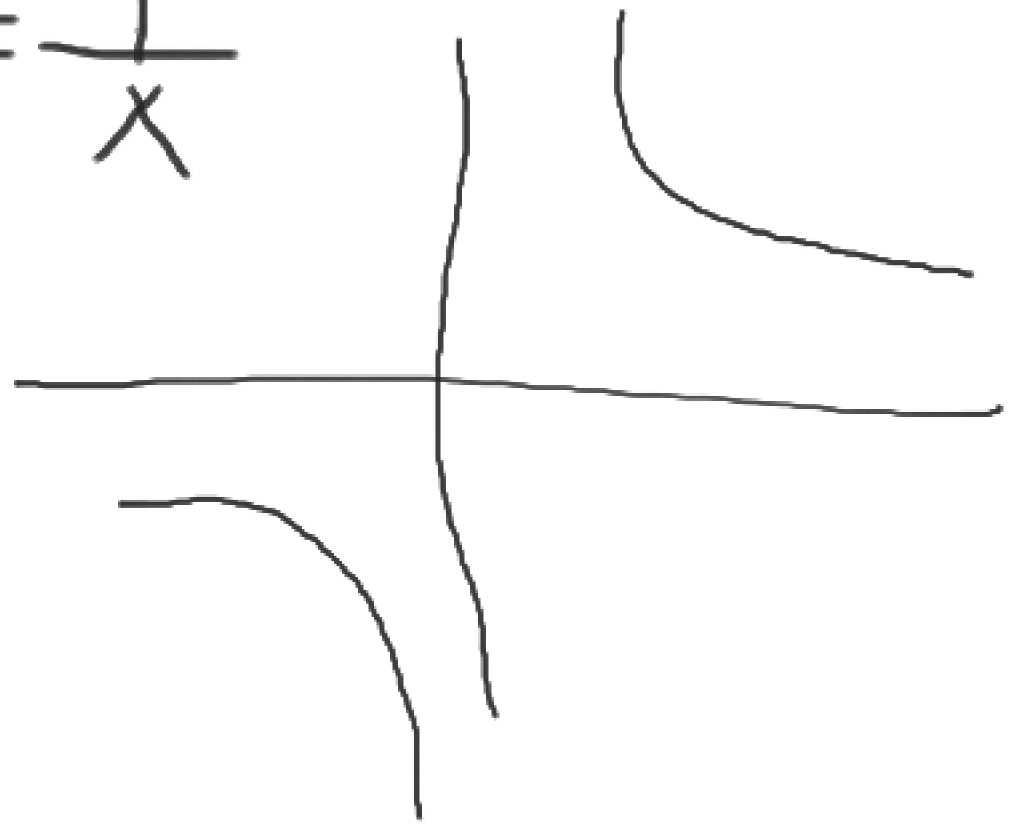
$\lim_{x\to\infty}\sin(x)=0$, $\lim_{x\to 0}\sin(x)=0$

$$\lim_{x\to +\infty}\sin(x)=0$$

$$f(x) = \frac{1}{x}$$

бмф на бесконечности тк мы стремимся к 0.

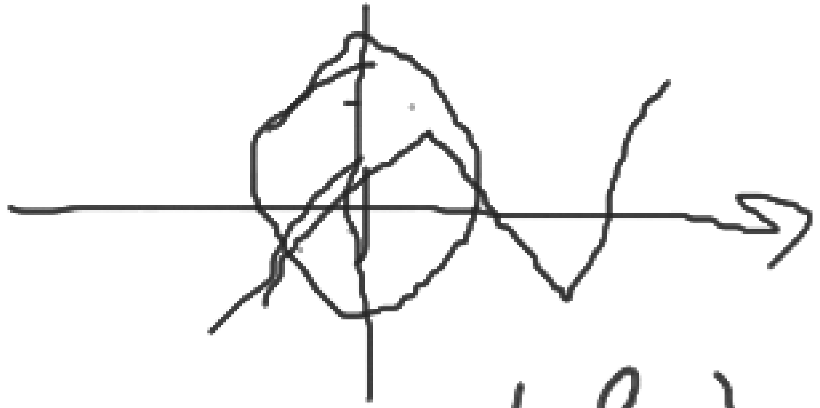
$$f(x) = \frac{1}{x}$$



$$\lim_{x \to \pm\infty} \frac{1}{x} = 0$$

$$\lim_{x \to k} f(x) = 0$$

$\lim\limits_{x \to k} f(x) = 0$ f(x) - б.м. в точке К при lim x->0



# Замечательные эквивалентности

$\alpha$ - угол, $\alpha \to 0$

1) $\sin(\alpha) \sim \alpha$
2) $tg(\alpha) \sim \alpha$
3) $\arcsin(\alpha) \sim \alpha$
4) $arctg(\alpha) \sim \alpha$
5) $1 - \cos(\alpha) \sim \frac{1}{2} \cdot \alpha^2$
6) $\log_b(1+\alpha) \sim \frac{\alpha}{\ln b}$, $b > 0$, $b \neq 1$, $\ln(1+\alpha) \sim \alpha$
7) $b^\alpha - 1 \sim \alpha \ln b$, $b > 0$, $b \neq 1$

$e^\alpha - 1 \sim \alpha$

8) $(1+\alpha)^k - 1 \sim \alpha \cdot k$

$(1+\alpha)^k \sim \alpha \cdot k + 1$

$$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos 3x}{\operatorname{arctg} 2x \cdot \log_2 (1-4x)} = (*)$$

при $x \to 0$ верны экв; $1-\cos 3x \sim \frac{9x^2}{2}$,

$\operatorname{arctg} 2x \sim 2x$,

$\log_2 (1-4x) \sim \frac{-4x}{\ln 2}$, то получим

$$* = \lim_{x\to 0} \frac{9x^2 \cdot \ln 2}{2 \cdot 2x(-4x)} = -\frac{9}{16} \ln 2$$

# Сравнение функций.Символ Ландау

$$f(x) = O(g(x)),\ x \to x_0,\ f(x) \text{ и } g(x)$$

определены в проколотой окрестности точки x0 если в этой окрестности выполняется равенство f(x)=h(x)=g(x),где |h(x)| <= C (const)

«O» большое и «o» малое (O и o) — математические обозначения для сравнения асимптотического поведения (асимптотики) функций

Задача оценить функцию на асимптотику при работе с гигантским n.

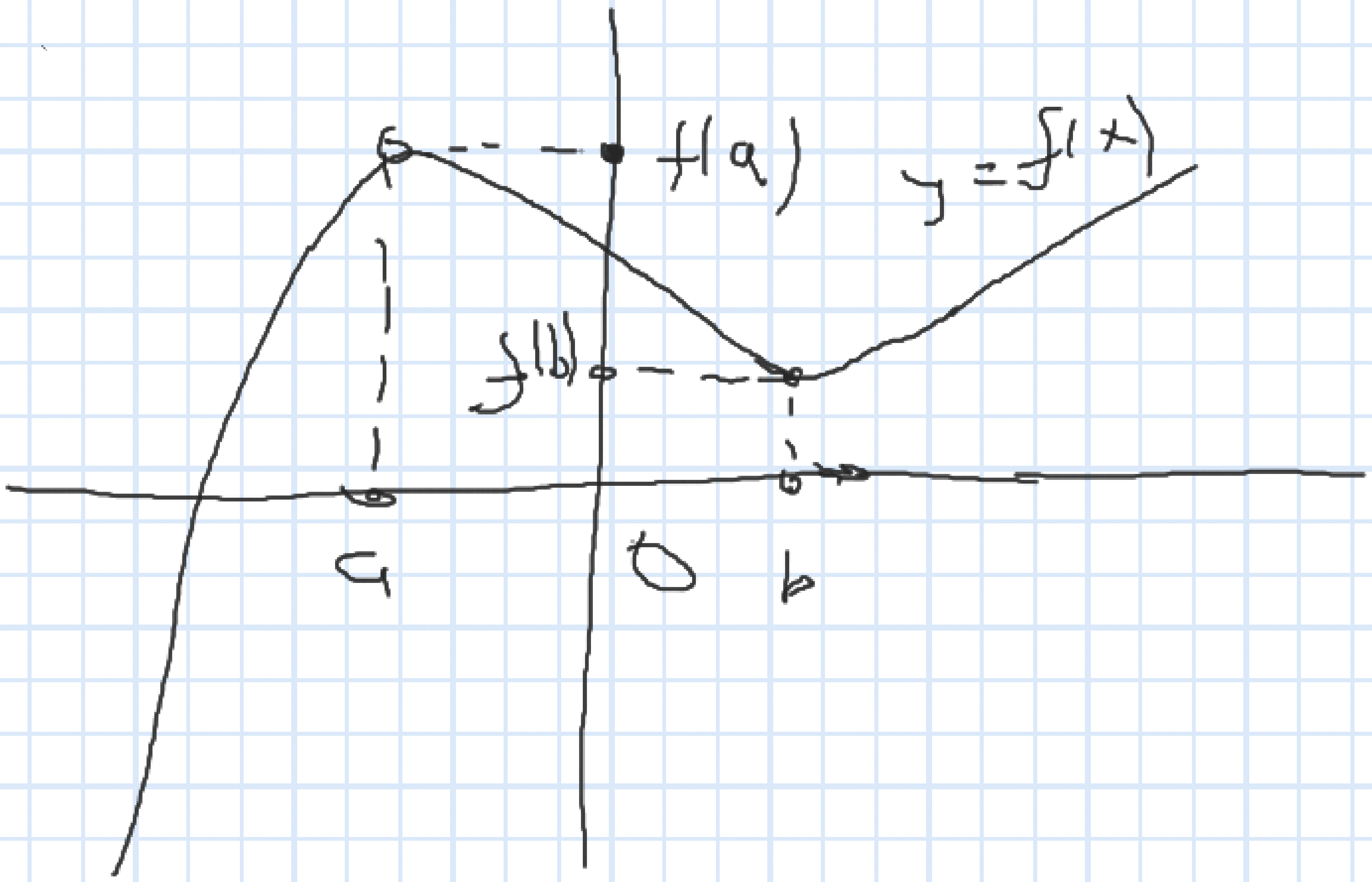
# Производные

Монотонность - возростание и уюывание функции

Экстремумы функции - макимум и минимум функции

$(-\infty; a), (b; +\infty) \uparrow$

$(a, b) \downarrow$

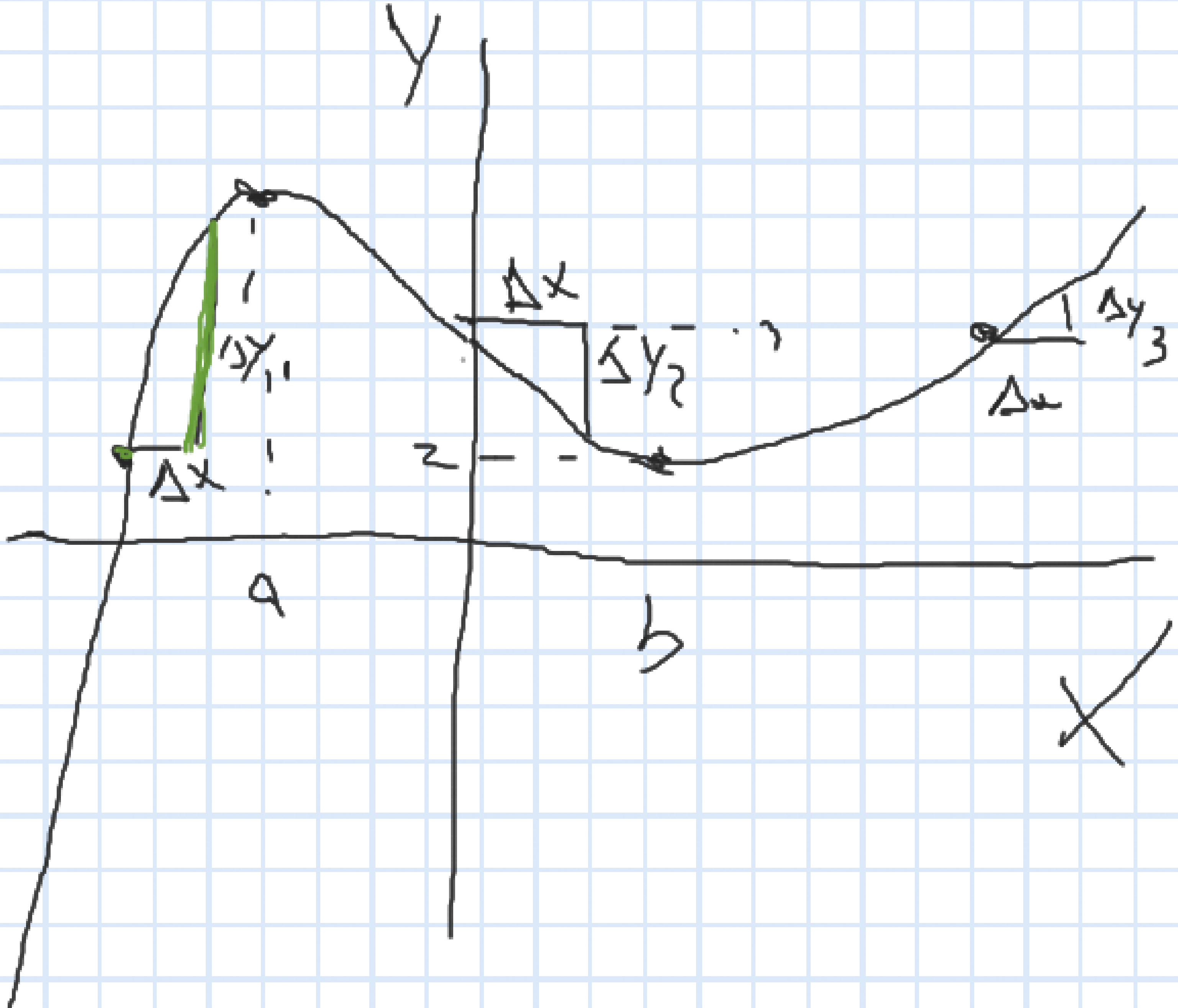


Скорость изменения функции -

Возьмем некоторое значение    x  - приращение аргумента.

$\Delta x$ — приращение аргумента

$\Delta y$ — приращение функции




$$\frac{\Delta y_1}{\Delta x} > 0 \uparrow$$

$$\frac{\Delta y_3}{\Delta x} = \frac{5}{10} = \frac{1}{2} > 0 \uparrow$$

$\Delta x = 10$

$\Delta y_3 = 5$

$$\frac{\Delta y_2}{\Delta x} = \frac{-1}{10} < 0 \downarrow$$

Чем меньше значение $\Delta$x тем более точно мы можем описать функцию

Если отношение $\Delta$ x/$\Delta$ y  = 0 - то мы в точке эстремума

# ПРОИЗВОДНЫЕ

Производная - это предел отношения приращения функции к приращению аргумента, когда приращение аргумента стремится к 0

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

$$\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$$

$f'(x)$, $y'$, $(f(x))'$, $\frac{dy}{dx}$ — dy по dx

$y''$ — произв. второго порядка. ТЕ первая производная от первой производной.

$y^{(n)}$ — производная n-го порядка

Физический смысл протзводной - $V = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta S}{\Delta t}$ = скорость изменения величины описываемой функцией

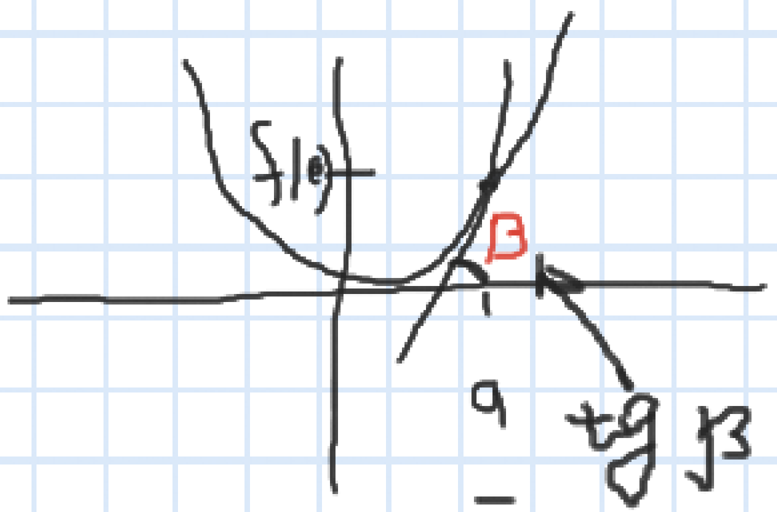
отношение расстояния к времени = скорость

Геометрический смымсл производной - угол наклона касательной к графику функции f(x) в точке ккасания X0. *

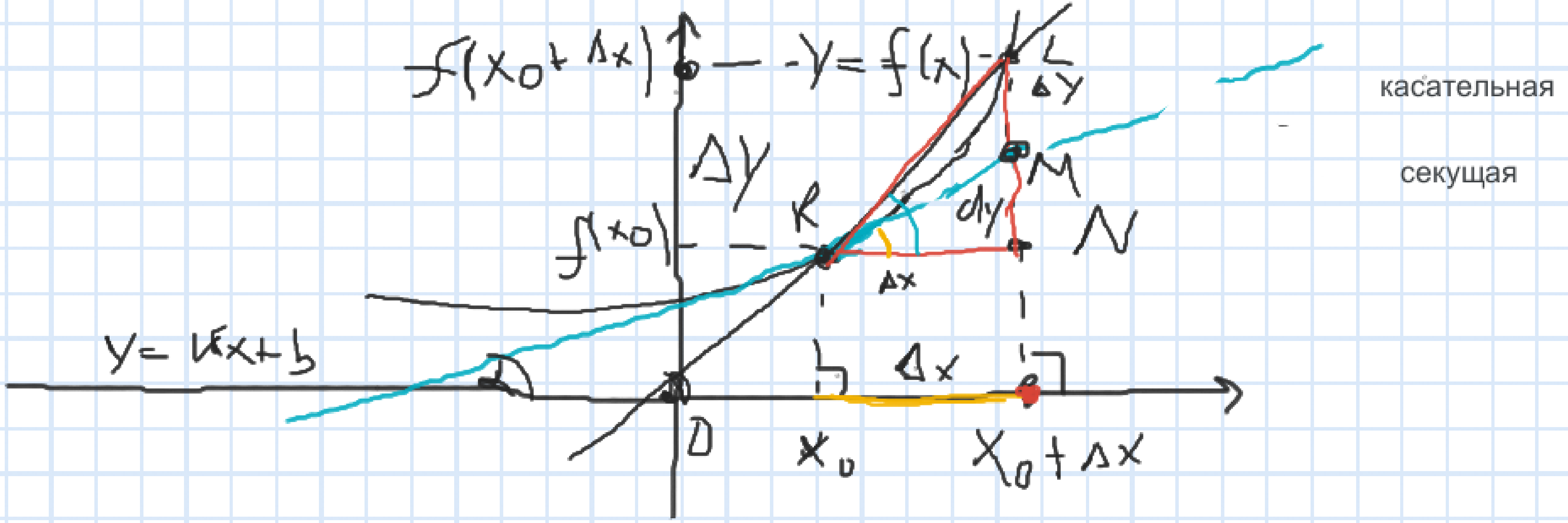
$f'(x_0) = \operatorname{tg}\alpha$, где $\alpha$ — касательной к графику функции в точке касания X0

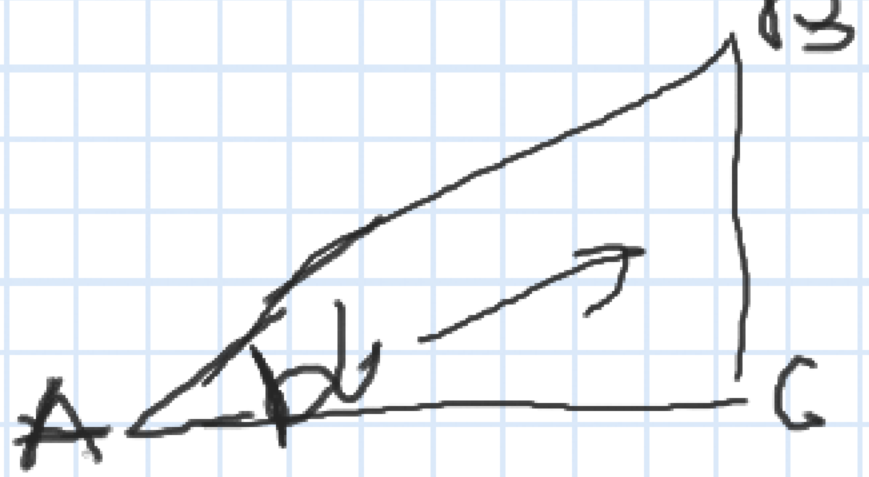
Механический смысл производной - мгновенная скорость изменения функции

*



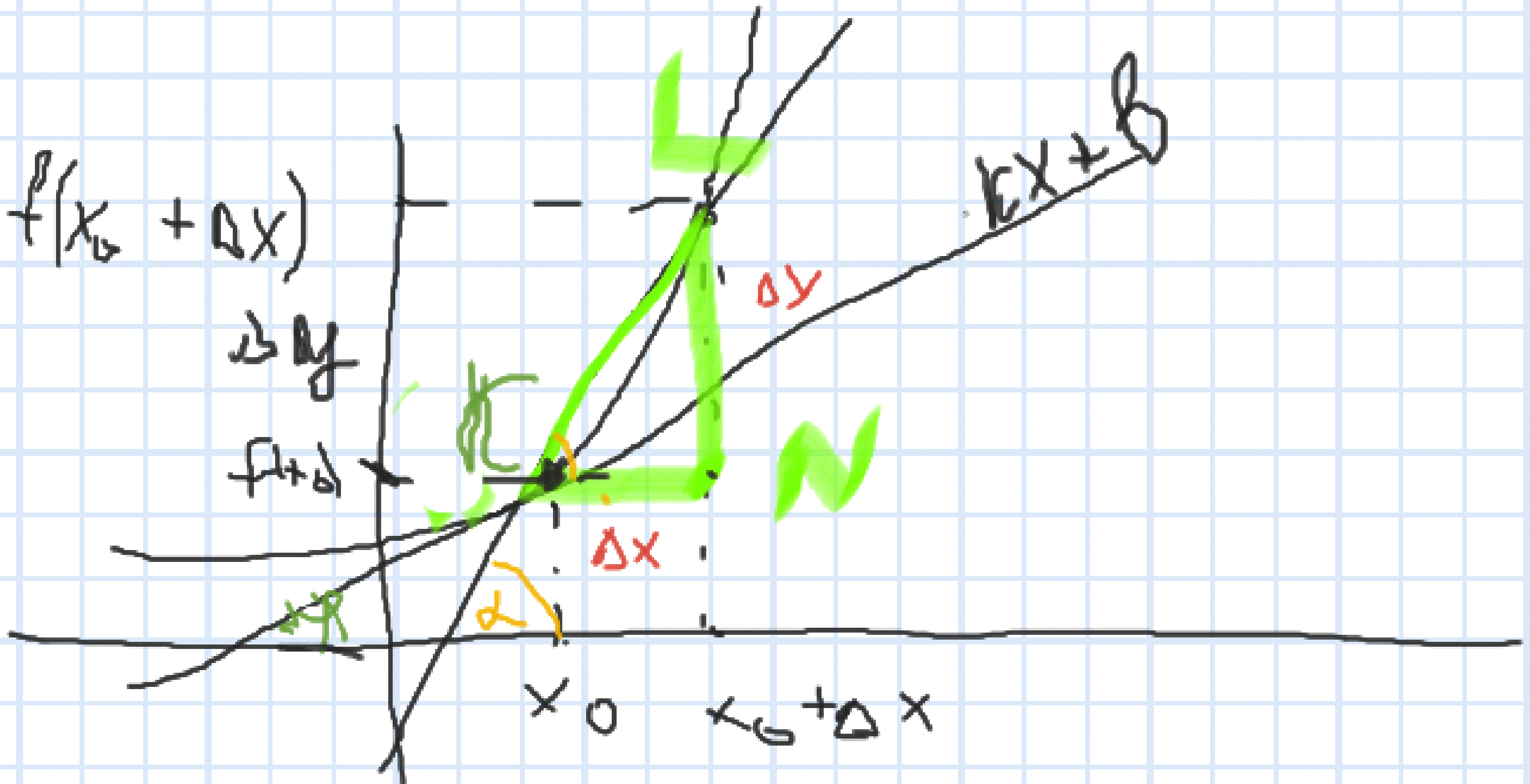

$\operatorname{tg}\beta$ — ной к графику функции в точке касания X0




$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{BC}{AC}$$

# Введение в дифференциальные исчисления




функия выпуклая. Мб и вогнутой. Это показывает секущая

секущая образует прямоуг треугольник $KLN$

$\alpha$ - угол наклона секущей к оси ох

$$\angle\alpha = \angle LKN$$

$$tg\,\alpha = \frac{LN}{KN} = \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = tg\,\alpha \Rightarrow \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = tg\,\varphi$$ — $\varphi$ угол к касательной

Угол наклона секущей стремится к углу наклона касательной

$\Delta y = f(x_0+\Delta x) - f(x_0)$ ⟶ приращение функции

$\Delta x$ ⟶ приращение аргумена

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = tg\,\varphi$$

Производная от производной - это ускорение

Производная (в точке X0) - это предел отношения приращения функции к прищению аргумента, когда приращение аргумента стремится к 0.

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0+\Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

$\Delta x \to$ б м в $\to 0{,}00\ldots1$

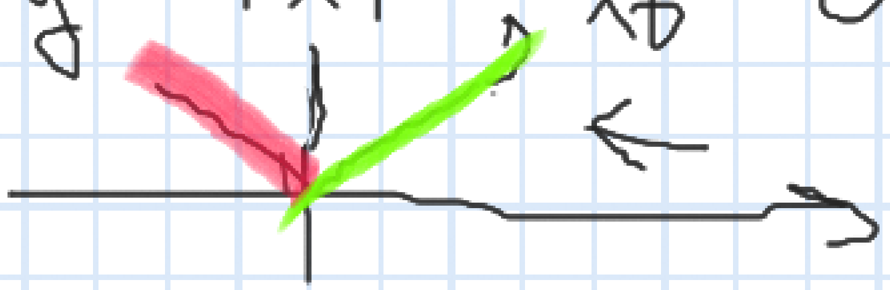
Дифференциал функции в точке и его геометрический смысл

$$f'(x_0) = \frac{d(f(x_0))}{dx}$$

Из диференцируемости ф-ции в точке x0 обязательно следует ее непрерывность

НО из непрервыности функции не следует ее дифференципуемость

$y = |x|$ $\quad x_0 = 0$



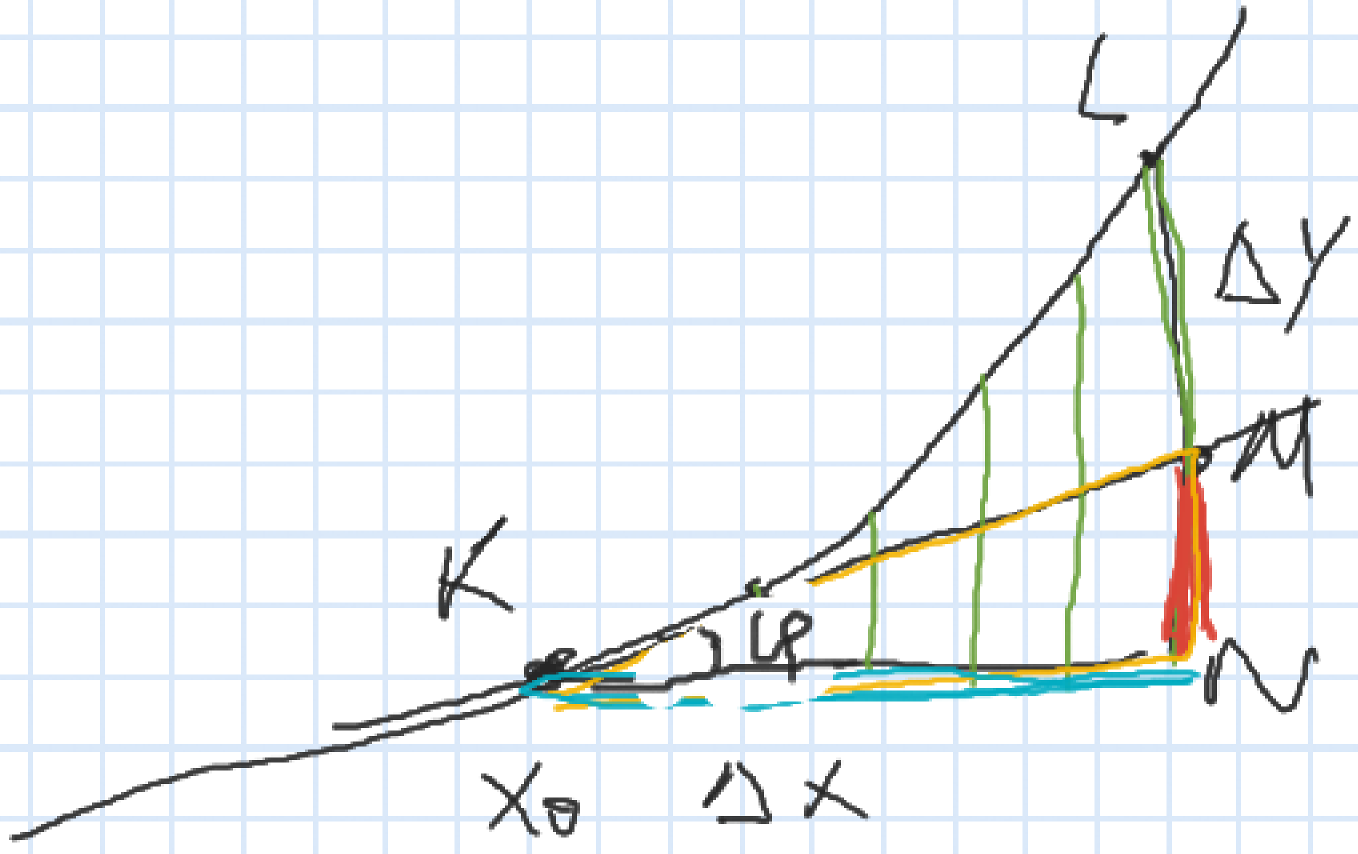
$$\lim_{\Delta x \to 0+} = 1 \qquad y = x$$

$$\lim_{\Delta x \to 0-} = -1 \qquad y = -x$$

передклы существуют, но они не равны.
Те нет общего предела и нет обшей касательной. То ф-я |x| - непрерывна в т-ке X0,  но недеференцируемая.

$$d[y(x_0)] = d(f(x_0)) =$$

$$y = f(x)$$




Дифференциал функции $dy$ в точке x0 - это главная линейная часть приращения ф-ции дельта у $d(x_0)$

Длина отрезка NM - дифференциал ф-и в точке X0

$\Delta y = LN$ - приращ. ф-и

$dy \to \Delta y$

$$\boxed{dy = f'(x) \cdot dx}, \text{ где } dx = \Delta x$$

т.к.

$$\Delta y \approx dy = f'(x) \cdot \Delta x$$

Рассмотрим прямоуг треуг KMN и тангенс угла наклона к касательной

$$tg\varphi = \frac{MN}{KN} = \frac{MN}{\Delta x} = \frac{dy}{\Delta x}$$

$$tg\varphi = f'(x_0)$$

$$dy = tg\varphi \cdot \Delta x \Rightarrow d[f(x_0)] = f'(x_0) \cdot \Delta x$$

Диф- л - это инструмент - помогвает понять как изменяется функция при небольшом изменении аргемента

Диф - л это приращение пути если мы немного изменим скорость.

$f(x) = x^2$ — функция

$f'(x) = 2x$ — производная $\quad x^2 \Rightarrow nx^{n-1}$

$dy = 2x \cdot dx$

$dx$ — диференциал независимой переменной по х. Это бесконечно малая прибавка = приращение по Х

$dx$ — не число! это аимвол = абстрактное понятие

$dx$ — применяется только в сочетании с производной

дифференциал = приращение по иксу

$dx = \Delta x = d(x) = 5, 4, 3 = 0,000001$

Дифференциал является линейной функцией аргумента.

Диференциал постоянной функции = константы равен 0

Дифференциал суммы = произвежению суммы диференуиалов

Дифференциал произведения функций равен произведению первого дифференциала на вторую функцию плюс произведение первой функции на дифференциал второй функции.

Дифференциал частного от функций равен (произведению дифференциала числителя на знаменатель минус произведение числителя на дифференциал знаменателя) деленному на квадрат знаменателя.

Если вы находитесь в точке x = 2, ваша скорость составляет 4 (f'(2) = 4).
Если вы немного увеличите скорость, скажем, на 0.1, то ваш путь за этот короткий промежуток времени увеличится на 0.8 (dy = 2 * 2 * 0.1 = 0.8)

## Таблица производных

| Функция | Производная |
|---|---|
| $y = C, \quad C = Const$ | $0$ |
| $y = Cx$ | $y' = C$ |
| $y = x^n$ | $y' = n \cdot x^{n-1}$ |
| $y = e^{nx}$ | $y' = ne^{nx}$ |
| $y = a^x$ | $y' = a^x \ln a$ |
| $y = \ln x$ | $y' = \frac{1}{x}$ |
| $y = \sin x$ | $y' = \cos x$ |
| $y = \cos x$ | $y' = -\sin x$ |
| $y = tgx$ | $y' = \frac{1}{\cos^2 x}$ |
| $y = ctgx$ | $y' = -\frac{1}{\sin^2 x}$ |

Найти производную по определению ; $f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$

$$\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$$

$f(x_0) = C$ Придадим аргументу $f(x_0 + \Delta x) = C \Rightarrow \Delta y = C - C = 0$

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{0}{\Delta x} = 0$$

Найти производную по определению $y=f(x)=-2x-1$ в 17 уст

$f(x_0)=-2x_0-1$

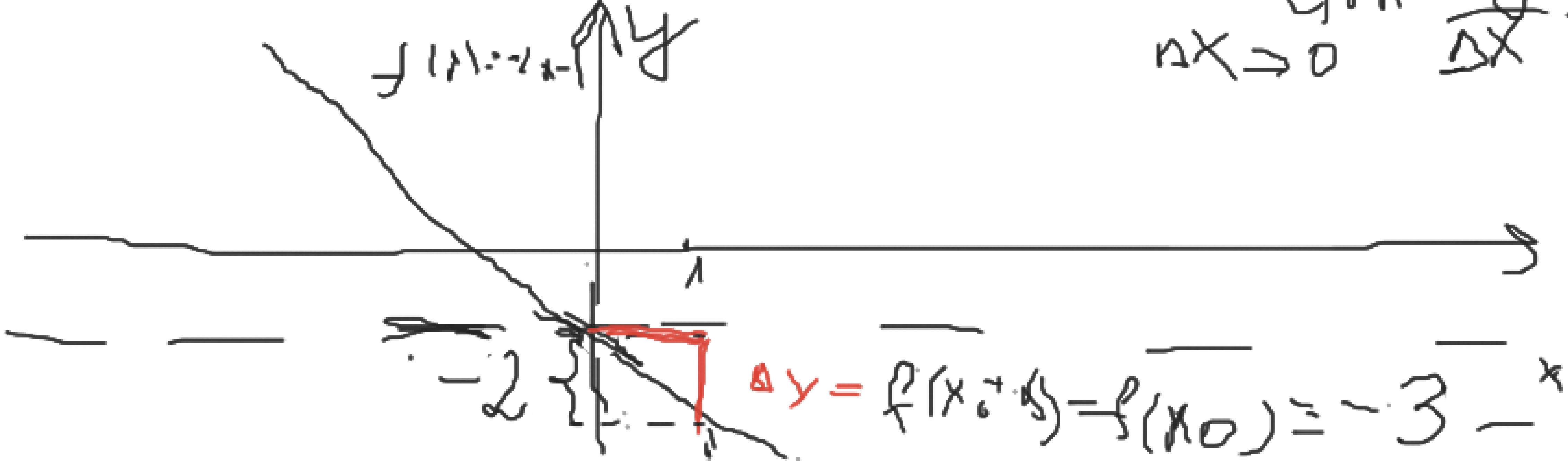
Зададим аршгумент приращени я дельта х и вычислим его значение $f(x_0+\Delta x)=-2(x_0+\Delta x)-1=$

$=-2x_0-2\Delta x-1$

$\Delta y=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)=\cancel{-2x_0}-2\Delta x\underline{-1}+\cancel{2x_0}\underline{+1}=-2\Delta x$

$f'(x_0)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{-2\Delta x}{\Delta x}=-2$

$f'(x)=-2$ Ф-я $f(x)=-2x-1$, убывает на всей области определения тк для любого х - производная отрицательна. Наклон везде одинаковый. Следовательно $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=-2$ в любой точке.




$\Delta y=f(x_0+1)-f(x_0)=-3-(-1)=-2$

Найти производную ф-и по определению

$f(x) = x^2 + 2$

1) $f(x_0) = x_0^2 + 2$

2) $f(x_0 + \Delta x) = (x_0 + \Delta x)^2 + 2 = x_0^2 + 2x_0\Delta x + \Delta x^2 + 2$

3) $\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = x_0^2 + 2x_0\Delta x + \Delta x^2 + 2 - x_0^2 - 2 =$
$= 2x_0\Delta x + \Delta x^2$

4) $f'(x_0) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{2x_0\Delta x + \Delta x^2}{\Delta x} = \frac{2x_0\cancel{\Delta x}}{\cancel{\Delta x}} + \frac{\cancel{\Delta x^2}\ \Delta x}{\cancel{\Delta x}} =$

$= 2x_0 + \Delta x \to 2x_0$

$\lim\limits_{\Delta x \to 0} 2x + \Delta x = 2x$

$\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{2x\Delta x + \Delta x^2}{\Delta x}$

$\lim\limits_{\Delta x \to 0} 2x + \Delta x = 2x$

проверка

5) $f'(x) = (x^2 + 2)' = 2x$

$f(x) = x^2 \quad f(x + \Delta x) = (x + \Delta x)^2$

$f(x + \Delta x) - f(x) = x^2 + 2x\Delta x + \Delta x^2 - x^2 = 2x\Delta x + \Delta x^2$

$= 2x + \Delta x$