

Производная через предел

$$f(x) = x^2$$

$$1) f(x_0) = x_0^2; \quad f(x_0 + \Delta x) = (x_0 + \Delta x)^2 = x_0^2 + 2x_0\Delta x + \Delta x^2$$

$$2) \Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = x_0^2 + 2x_0\Delta x + \Delta x^2 - x_0^2 = 2x_0\Delta x + \Delta x^2$$

$$3) f'(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{2x_0\Delta x + \Delta x^2}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} 2x_0 + \Delta x = 2x_0$$

Основные правила нахождения производных

1. $(c \cdot f)' = c \cdot f'$, c - константа

$$(c)' = 0, c - \text{const}$$

2. $(u \pm v)' = u' \pm v'$

3. $(uv)' = u'v + uv'$

4. $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$

5. $(f(g))' = f' \cdot g'$

$$y = f(x^n)' = n \cdot x^{n-1} \\ (x^3)' = 3x^2; (\sqrt{x})' = (x^{\frac{1}{2}})' = \frac{1}{2} x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$(ax+b)' = (ax)' + (b)' = a$$

$$(ax^2+bx+c)' = 2ax+b$$

Таблица производных

$$\left(\frac{1}{x}\right)' = (x^{-1})' = -1 \cdot x^{-2} = -\frac{1}{x^2}$$

$$f(\sin x)' = \cos x$$

$$f(x_0) = \sin x_0, f(x_0 + \Delta x) =$$

$$= \sin x_0 + \sin \Delta x$$

$$\Delta y = \sin(x + \Delta x) - \sin(x) = 2 \sin \frac{x + \Delta x - x}{2} \cos \frac{x + \Delta x + x}{2} =$$

Справочные материалы

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$$

$$\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cdot \cos \alpha$$

$$\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha$$

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cdot \cos \beta + \cos \alpha \cdot \sin \beta$$

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cdot \cos \beta - \sin \alpha \cdot \sin \beta$$

$$1. c' = 0, c = \text{const}$$

$$2. (x^n)' = nx^{n-1}$$

$$3. (a^x)' = a^x \cdot \ln a$$

$$4. (e^x)' = e^x$$

$$5. (\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}$$

$$6. (\ln x)' = \frac{1}{x}$$

$$7. (\sin x)' = \cos x$$

$$8. (\cos x)' = -\sin x$$

$$9. (\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$10. (\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$$

$$11. (\operatorname{ctg} x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$$

$$12. (\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$13. (\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$14. (\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1+x^2}$$

$$15. (\operatorname{arcc} \operatorname{tg} x)' = -\frac{1}{1+x^2}$$

$$16. (\operatorname{sh} x)' = \operatorname{ch} x$$

$$17. (\operatorname{ch} x)' = \operatorname{sh} x$$

$$18. (\operatorname{th} x)' = \frac{1}{\operatorname{ch}^2 x}$$

$$19. (\operatorname{th} x)' = -\frac{1}{\operatorname{sh}^2 x}$$

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{2 \sin \frac{\Delta x}{2} \cos \frac{2x + \Delta x}{2}}{\Delta x} =$$

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\sin \frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}}$$

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \cos \frac{2x + \Delta x}{2} = 1 \cdot \cos \frac{2x + 0}{2}$$

$$\cos x$$

$$y = \sin x$$

$$y = f(x) \Rightarrow f'(x) = \cos x$$

$$y = (\sin x)' = \cos x$$

$$(\cos x)' = -\sin x$$

$$(\tan x)' = \left(\frac{\sin x}{\cos x} \right)' = \frac{\cos x}{-\sin x} = \frac{1}{\cos^2 x}$$

$$(\cot x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$$

<https://studfile.net/preview/2868310/page:14/>

Определение: нормалью к плоской кривой y в т. M_0 называется перпендикуляр к касательной к кривой y в этой точке.

Угловые коэффициенты двух перпендикулярных прямых связаны соотношением $k_2 = -1/k_1$. Отсюда получаем уравнение нормали к графику $f(x)$ в точке x_0 :

$$n: y - y_0 = -1/f'(x_0)(x - x_0)$$

Пусть $u = u(x)$ и $v = v(x)$ - функции, определенные в некоторой окрестности точки x и имеют производные в этой точке. Обозначим $\Delta u = u(x + \Delta x) - u(x)$ и $\Delta v = v(x + \Delta x) - v(x)$ приращения этих функций, соответствующие приращению Δx . Эти формулы можно записать в виде $u(x + \Delta x) = u + \Delta u$ и $v(x + \Delta x) = v + \Delta v$

Теорема: производная суммы (разности) равна сумме (разности) производных: $(u + v)' = u' + v'$

Производная произведения $(uv)' = u'v + uv'$, в частности, постоянную можно выносить за знак производной: $(Cv)' = Cv'$

$$(\ln x)' = \frac{1}{x}$$

1. $(c \cdot f)' = c \cdot f'$, c - константа

2. $(u \pm v)' = u' \pm v'$

3. $(uv)' = u'v + uv'$

4. $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$

5. $(f(g))' = f' \cdot g'$

$$1) (x^5 + 4x^3 - 7x^2 + 6)' = 5x^4 + 12x^2 - 14x$$

$$2) \left(\frac{1}{x\sqrt{x}} + \sqrt[7]{x^2} \right)' = \left(x^{-\frac{3}{2}} + x^{\frac{2}{7}} \right)' = -\frac{3}{2}x^{-\frac{5}{2}} + \frac{2}{7}x^{-\frac{5}{7}}$$

$$= \frac{2}{7\sqrt[7]{x^5}} - \frac{3}{2\sqrt{x^5}} = \frac{2}{7\sqrt[7]{x^5}} - \frac{3}{2x^2\sqrt{x}} +$$

$$3) \left(\frac{x}{1+x^2} \right)' = \frac{x'(1+x^2) - x(1+x^2)'}{(1+x^2)^2} = \frac{1 \cdot (1+x^2) - x(2x)}{(1+x^2)^2} = \frac{1+x^2-2x^2}{(1+x^2)^2} = \frac{1-x^2}{(1+x^2)^2}$$

+

Правило дифференцирования сложной функции

$$f(t(x))' = f'(t(x)) \cdot t'(x) \quad \sqrt{2-x} \cdot \sqrt{2+x} = 2-x^2$$

Правило дифференцирования обратной функции

$$y_x'(x) = \frac{1}{x'_y}$$

$$f'(2-x) = 1 - \frac{2}{\sqrt{2-x}} \quad (+)$$

$$y = \left(\frac{2}{\sqrt[3]{x}} - 3x^2 \log_3 x + \frac{e^x}{5\sqrt{x}} \right)'$$

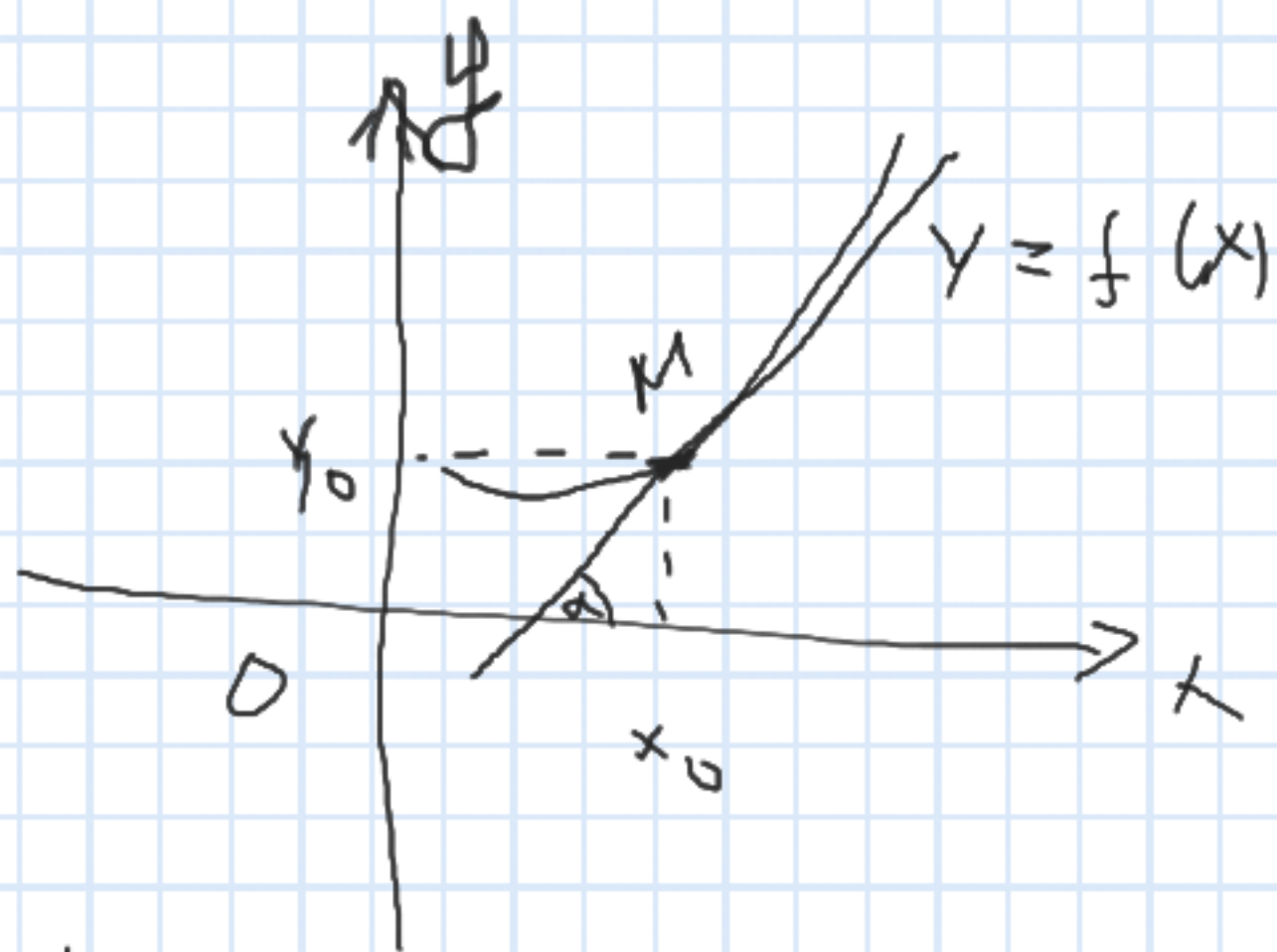
$$f(x) = x - 4\sqrt{x}, \text{ найти max } f'(4); f'(0,01); f'(2-x)$$

$$f(x)' = 1 - 4 \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} = 1 - \frac{2}{\sqrt{x}} \quad (+) \quad f'(4) = 0; f'(0,01) = 1 - \frac{2}{\sqrt{0,01}} = -19$$

$\sqrt{100} \rightarrow \frac{1}{10}$

$y = f(x)$ кривая

AM — касательная в (.) $M(x_0, y_0)$



$$y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0)$$

$$y = f(x_0) \text{ в } M(x_0, y_0)$$

$$f'(x_0) = \operatorname{tg} \alpha, \alpha - \text{угол касательной}$$

т.е. мы имеем $\operatorname{tg} (.)$:
 $f(x) = x^2, M(-3, 9)$

$$f'(x) = 2x$$

$$x_0 = -3$$

$$\operatorname{tg} \alpha = f'(-3) = 2x_0 = 2 \cdot (-3) = -6 \quad \text{Ⓟ}$$

$$f(x) = \frac{4x - x^2}{4}; M_1(0;0); M_2(2,1) \quad M_3(4;0)$$

$$f'(x) = \frac{4x}{4} - \frac{x^2}{4} = \left(x - \frac{x^2}{4}\right)' = 1 - \frac{1}{4} \cdot 2x = 1 - \frac{1}{2}x$$

$$\text{tg} \alpha_1 = f'(0) = 1$$

$$\text{tg} \alpha_2 = f'(2) = 0$$

$$\text{tg} \alpha_3 = f'(4) = -1$$

+