

Интегралы

Интегральное исчисления

Неопределенный интеграл -
подинтегральное выражение

первообразная

$$\int f(x) dx = F(x) + C_{const}$$

знак интеграла, подинтегральная функция, дифференциал =

dx - это дифференциал по переменной x , тк аргумент функции $f(x)$ - это x . дифференциал - это бесконечно малая прибавка (приращение) к аргументу. Он не является числом - это символ. $dx \neq 1$. Он постоянно меняется.

dx - это ширина каждого эл-та в бесконечной сумме, которая составляет интеграл. $f(x)$ - длина прямоугольника. Интеграл - сумма площадей прямоугольников.

Ряд тейлора - разложение функции на полином. Используется для аппроксимации сложных функций. Изучение функции в окрестности точки

Геометрический смысл интеграла - площадь под кривой.

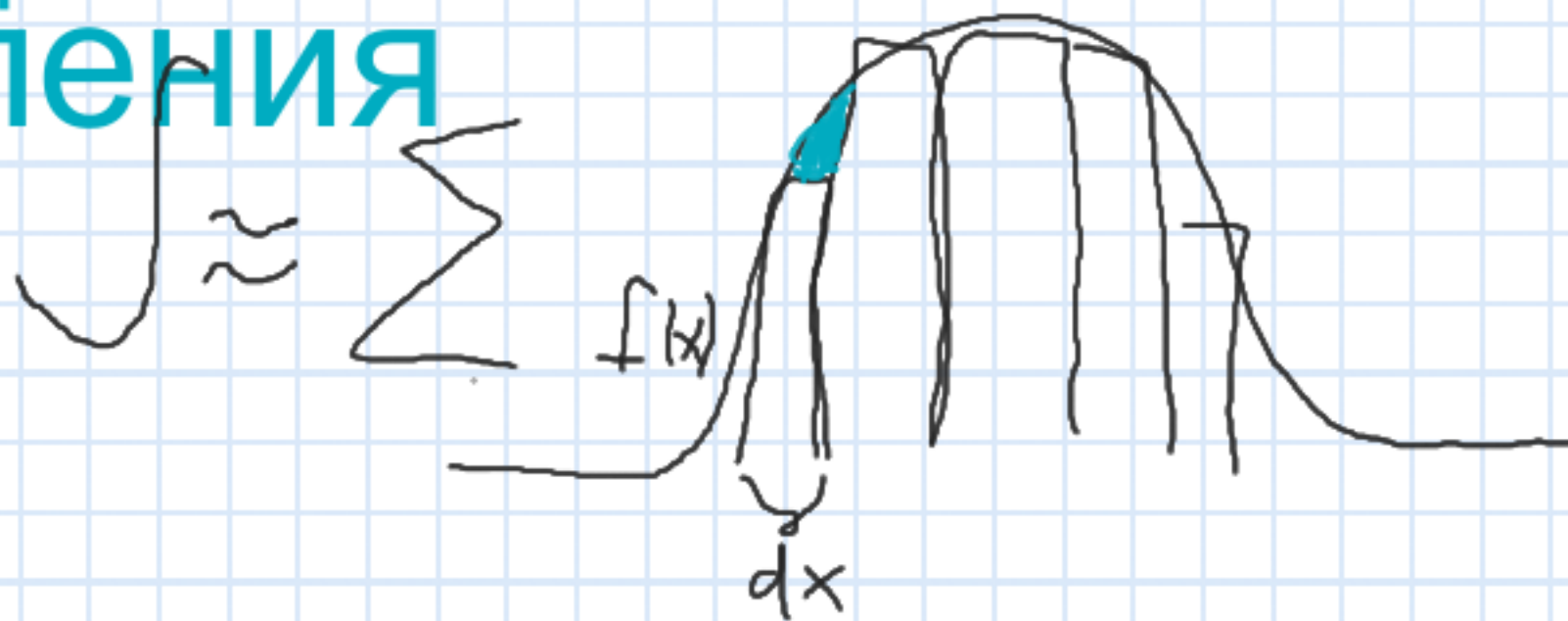
$$F(x) + C - \text{МНОЖЕСТВО ПЕРВООБРАЗНЫХ ФУНКЦИЙ}$$

$F(x)$ первообразная

ПЕРВООБРАЗНАЯ функции = антипроизводная, взяв от которой производную, получишь подинтегральную функцию.

Производная какой функции дает функцию

$$\int \sin x dx = -\cos x + C \Rightarrow -\cos x + \sin^2; -\cos x - \frac{1}{x}; -\cos x - e$$



$$const$$

$$(F(x) + C)' = F'(x) + 0 = f(x) \quad \int f(x) dx$$

$$(-\cos x + C)' = -(-\sin x) + 0 = \sin x$$

Свойства линейности в интегральном исчислении

$$1. \int k u dx = k \int u dx$$

$$2. \int (u \pm v) dx = \int u dx \pm \int v dx$$

$$\int \left(x + \sqrt{x} - 3x^5 + \frac{2}{x^3} - \frac{1}{\sin^2 x} + \overset{\text{const}}{\downarrow} \text{tg } 5 \right) dx$$

$$= \int x dx + \int \sqrt{x} dx - \int (x^5) dx + 2 \int \frac{1}{x^3} dx - \int \frac{1}{\sin^2 x} dx + \int \text{tg } 5 dx$$

$$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} = \frac{x^{1+1}}{1+1} = \frac{x^2}{2} \quad (n \neq -1) \quad \int \frac{dx}{x} = \int \frac{1}{x} dx$$

$$= \frac{1}{2} x^2 + \frac{x^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1} - 3 \cdot \frac{x^6}{6} + 2 \cdot \frac{x^{-3+1}}{-2} + C + 3x + \log(5) \cdot x =$$

$$= \frac{1}{2} x^2 + \frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{2} x^6 - x^{-2} + C + 3x + \log(5) \cdot x =$$

$$= \frac{1}{2} x^2 + 2 \sqrt{x^3} - \frac{x^6}{2} - \frac{1}{x^2} + (3 + \log(5)) \cdot x + C$$

Интегралы, которые не берутся. Решение конечно

$$\int e^{-x^2} dx - \text{Интеграл Пуассона}$$

$$\int \sin x^2 dx, \int \cos x^2 dx - \text{Интегралы Френеля}$$

$$\int \frac{dx}{\ln x} - \text{Интегральный логарифм}$$

$$\int \frac{e^x dx}{x} - \text{Интегральная экспонента}$$

$$\int \frac{\sin x dx}{x} - \text{Интегральный синус}$$

$$\int \frac{\cos x dx}{x} - \text{Интегральный косинус}$$

$$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C, \quad \int e^x dx = e^x + C$$

$$\int \sin x dx = -\cos x + C$$

$$\int \cos x dx = \sin x + C$$

$$\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \tan x + C$$

$$1) \int \frac{dx}{x^2 - a^2} = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{x-a}{x+a} \right| + C$$

$$2) \int \frac{dx}{a^2 - x^2} = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{a+x}{a-x} \right| + C$$

Проверка неопределенного интеграла через дифференциал

$$\begin{aligned}
 & d\left(\frac{x^2}{2} + \frac{2}{3}\sqrt{x^3} - \frac{x^6}{2} - \frac{1}{x^2} + \operatorname{ctg} x + \lg 5 \cdot x + C\right) = \\
 & = \left(\frac{x^2}{2} + \frac{2}{3}\sqrt{x^3} - \frac{x^6}{2} - \frac{1}{x^2} + \operatorname{ctg} x + \lg 5 \cdot x + C\right)' \cdot dx = \\
 & = \left[\frac{1}{2}(x^2)' + \frac{2}{3}(x^{\frac{3}{2}})' - \frac{1}{2}(x^6)' - (x^{-2})' + (\operatorname{ctg} x)' + \lg 5(x)' + 0\right] dx = \\
 & = \left[\frac{1}{2} \cdot 2x^1 + \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{2} x^{\frac{1}{2}} - \frac{1}{2} \cdot 6x^5 - (-2)x^{-3} + (-\frac{1}{\sin^2 x}) + \lg 5 \cdot 1 + 0\right] dx = \\
 & = \left(x + \sqrt{x} - 3x^5 + \frac{2}{x^3} - \frac{1}{\sin^2 x} + \lg 5\right) dx
 \end{aligned}$$

$$d(u + v + \dots) = dv = d[f(x)]$$

Дуғ

1) $d y$ уралар

2) $d x$ суратка, $+ ()'$

$$d(2x-1) = (2x-1)' dx = (2-0)dx = 2!$$

$$\int x^2 (3+4x)^2 dx = \int x^2 (9 + 2 \cdot 4x + 16x^2) dx =$$

~~$$\int uv dx = \int u dx \cdot \int v dx, \quad \int \frac{u}{v} dx = \frac{\int u dx}{\int v dx}$$~~

$$\begin{aligned}\int (9x^2 + 24x^3 + 16x^4) dx &= 9 \int x^2 dx + 24 \int x^3 dx + 16 \int x^4 dx = \\ &= 9 \cdot \frac{x^3}{3} + \frac{24 \cdot x^4}{4} + \frac{16 \cdot x^5}{5} + C = 3x^3 + 6x^4 + \frac{16}{5}x^5 + C\end{aligned}$$