Производная через предел

$$f(x) = x^2$$

1) $f(x_0) = x_0^2$; $f(x_0 + \Delta x) = (x_0 + \Delta x)^2 = x_0^2 + 2x_0\Delta x + \Delta x^2$

2) $\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = \cancel{x_0^2} + 2x_0\Delta x + \Delta x^2 - \cancel{x_0^2} = 2x_0\Delta x + \Delta x^2$

3) $f'(x_0) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{2x_0\Delta x + \Delta x^2}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} 2x_0 + \underbrace{\Delta x}_{0} = 2x$

Основные правила нахождения производных

1. $(c \cdot f)' = c \cdot f'$, c - константа

2. $(u \pm v)' = u' \pm v'$

3. $(uv)' = u'v + uv'$

4. $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$

5. $(f(g))' = f' \cdot g'$

$(C)' = 0$, C - const

$y' = f(x^n)' = n \cdot x^{n-1} =$

$(x^3)' = 3x^2$; $(\sqrt{x})' = (x^{\frac{1}{2}})' = \frac{1}{2} x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$

$(ax+b)' = (ax)' + (b)' = a$

$(ax^2+bx+c)' = 2ax + b$

Таблица производных

$$\left(\frac{1}{x}\right)' = (x^{-1})' = -1x^{-2} = -\frac{1}{x^2}$$

$$f\ (\sin x)' = \cos x$$

$$f(x_0) = \sin x_0;\ f(x_0 + \Delta x) =$$

$$= \sin x_0 + \sin \Delta x$$

$$\Delta y = \sin(x + \Delta x) - \sin(x) = 2\sin\frac{\cancel{x}+\Delta x - \cancel{x}}{2} \cdot \cos\frac{\overbrace{x + \Delta x + x}^{2x}}{2} =$$

Справочные материалы

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$$
$$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha \cdot \cos\alpha$$
$$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha$$
$$\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha \cdot \cos\beta + \cos\alpha \cdot \sin\beta$$
$$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha \cdot \cos\beta - \sin\alpha \cdot \sin\beta$$

1. $c' = 0$, c – const
2. $(x^n)' = nx^{n-1}$
3. $(a^x)' = a^x \cdot \ln a$
4. $(e^x)' = e^x$
5. $(\log_a x)' = \frac{1}{x\ln a}$
6. $(\ln x)' = \frac{1}{x}$
7. $(\sin x)' = \cos x$
8. $(\cos x)' = -\sin x$
9. $(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$
10. $(\mathrm{tg}x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$
11. $(\mathrm{ctg}x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$
12. $(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
13. $(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
14. $(\mathrm{arctg}x)' = \frac{1}{1+x^2}$
15. $(\mathrm{arcctg}x)' = -\frac{1}{1+x^2}$
16. $(\mathrm{sh}\,x)' = \mathrm{ch}\,x$
17. $(\mathrm{ch}\,x)' = \mathrm{sh}\,x$
18. $(\mathrm{th}\,x)' = \frac{1}{\mathrm{ch}^2 x}$
19. $(\mathrm{th}\,x)' = -\frac{1}{\mathrm{sh}^2 x}$

$$f(x)' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{2\sin\frac{\Delta x}{2}\cos\frac{2x+\Delta x}{2}}{\Delta x} =$$

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sin\frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}} \cdot \lim_{\Delta x \to 0} \cos\frac{2x+\Delta x}{2} = 1 \cdot \cos\frac{\cancel{2}x+0}{\cancel{2}}$$

$$\cos x$$

$y = \sin x$

$y = f(x)' = \cos x$

$y = (\sin x)' = \cos x$

$$(\cos x)' = -\sin x$$

$$(tg\,x)' = \left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)' = \frac{\cos x}{-\sin x} = \frac{1}{\cos^2 x}$$

$$(ctg\,x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$$

https://studfile.net/preview/2868310/page:14/

Определение: нормалью к плоской кривой γ в т.M_0 называется перпендикуляр к касательной к кривой γ в этой точке. Угловые коэффициенты двух перпендикулярных прямых связаны соотношение $к_2=-1/к_1$. Отсюда получаем уравнение нормали к графику f(x) в точке x_0:

$$n: y-y_0=1/ f'(x_0)(x-x_0)$$

Пусть u=u(x) и v=v(x)- функции, определенные в некоторой окрестности точки x и имеют производные в этой точке. Обозначим $\Delta u=u(x+\Delta x)-u(x)$ и $\Delta v=v(x+\Delta x)-v(x)$ приращения этих функций, соответствующие приращению Δx. Эти формулы можно записать в виде $u(x+\Delta x)=u+\Delta u$ и $v(x+\Delta x)=v+\Delta v$

Теорема: производная суммы (разности) равна сумме (разности) производных: $(u+v)'= u'+ v'$

Производная произведения $(uv)'= u'v+ u v'$, в частности, постоянную можно выносить за знак производной: $(Cv)'= Cv'$

1. $(c \cdot f)' = c \cdot f'$, c - константа
2. $(u \pm v)' = u' \pm v'$
3. $(uv)' = u'v + uv'$
4. $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$
5. $(f(g))' = f' \cdot g'$

$$(\ln x)' = \frac{1}{x}$$

1) $$(x^5 + 4x^3 - 7x^2 + 6)' = 5x^4 + 12x^2 - 14x$$

2) $$\left(\frac{1}{x\sqrt{x}} + \sqrt[7]{x^2}\right)' = \left(x^{-\frac{3}{2}} + x^{\frac{2}{7}}\right)' = -\frac{3}{2}x^{-\frac{5}{2}} + \frac{2}{7}x^{-\frac{5}{7}} =$$

$$= \frac{2}{7\sqrt[7]{x^5}} - \frac{3}{2\sqrt{x^5}} = \frac{2}{7\sqrt[7]{x^5}} - \frac{3}{2x^2\sqrt{x}}$$ +

3) $$\left(\frac{x}{1+x^2}\right)' = \frac{x'(1+x^2) - x(1+x^2)'}{(1+x^2)^2} = \frac{1 \cdot (1+x^2) - x(2x)}{(1+x^2)^2} =$$

+ $$= \frac{1+x^2 - 2x^2}{(1+x^2)^2} = \frac{1 - x^2}{(1+x^2)^2}$$

Правило дифферинцирования сложной функции

$$f(t(x))' = f'(t(x)) \cdot t'(x) \qquad \sqrt{2-x} \cdot \sqrt{2+x} = \sqrt{2^2 - x^2} = 2 - x$$

Правило дифференцирования обратной функции

$$y_x'(x) = \frac{1}{x_y'} \qquad f'(2-x) = 1 - \frac{2}{\sqrt{2-x}} \quad +$$

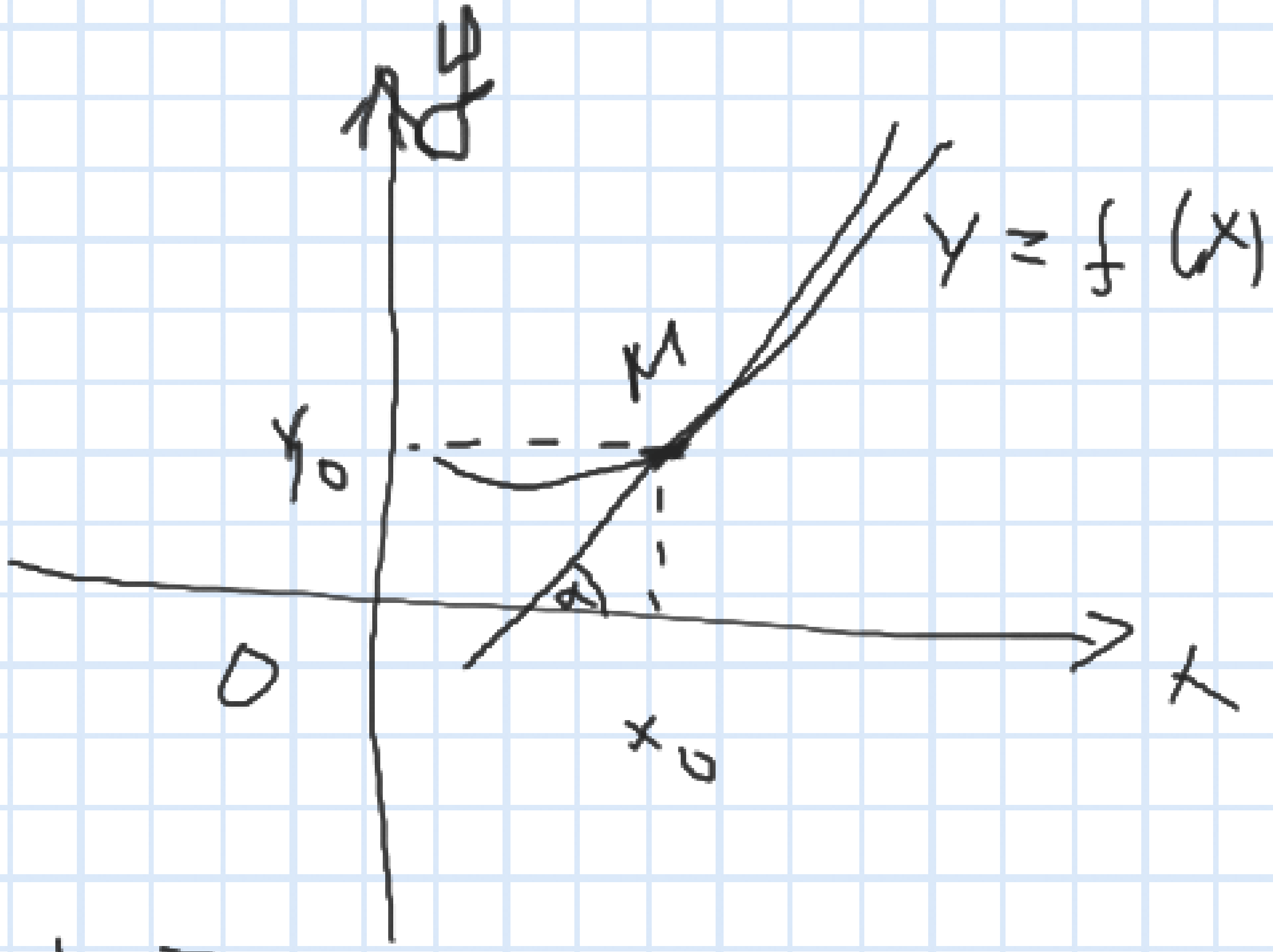
$$y = \left(\frac{2}{\sqrt[3]{x}} - 3x^2 \log_3 x + \frac{e^x}{5\sqrt{x}} \right)' =$$

$f(x) = x - 4\sqrt{x}$, Найти $f'(4)$; $f'(0{,}01)$; $f'(2-x)$

$$f(x)' = 1 - 4\frac{1}{2\sqrt{x}} = 1 - \frac{2}{\sqrt{x}} \quad + \qquad f'(4) = 0; \quad f'(0{,}01) = 1 - \frac{2}{\sqrt{\frac{1}{100}}} = -19 \qquad \sqrt{\frac{1}{100}} \to \frac{1}{10}$$

$y = f(x)$ кривая

AM — касательная в (.) $M(x_0; y_0)$



$$y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0)$$

$y = f(x_0)$ и $M(x_0; y_0)$

$f'(x_0) = tg\,\alpha$, α — угол касательной

Найти tg (.) :
$f(x) = x^2$, $M(-3, 9)$

$f'(x) = 2x$

$x_0 = -3$

$tg\,\alpha = f'(-3) = 2x_0 = 2\cdot(-3) = -6$

$$f(x)=\frac{4x-x^2}{4};\ M_1(0;0);\ M_2(2,1)\quad M_3(4;0)$$

$$f'(x)=\frac{4x}{4}-\frac{x^2}{4}=\left(x-\frac{x^2}{4}\right)'=1-\frac{1}{4}\cdot 2x=1-\frac{1}{2}x$$

$$tg\alpha_1=f'(0)=1$$

$$tg\alpha_2=f'(2)=0$$

$$tg\alpha_3=f'(4)=-1$$

+

$$\left(\sqrt[3]{9x^2-16}\right)' = \frac{1}{3}(9x^2-16)^{-\frac{2}{3}} = \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{\sqrt[3]{(9x^2-16)^2}}\cdot$$

$$(9x^2-16)^{\frac{1}{3}}$$

$$(9x^2-16)'_x = (*)$$

$$u^n(x)'_x = n\cdot u^{n-1}(x)\cdot u'_x(x)$$

$$(au-bv)' = a\cdot u' - b\cdot v'$$

$$=(*) = \frac{1}{3\sqrt[3]{(9x^2-16)^2}}\cdot\left(9\cdot(x^2)' - 16'\right)_x$$

$$= \frac{1\cdot 9\cdot 2x}{3\sqrt[3]{(9x^2-16)^2}} = \frac{6x}{\sqrt[3]{(9x^2-16)^2}}$$

1. $(c\cdot f)' = c\cdot f'$, c - константа
2. $(u\pm v)'=u'\pm v'$
3. $(uv)'=u'v+uv'$
4. $\left(\frac{u}{v}\right)'=\frac{u'v-uv'}{v^2}$
5. $(f(g))'=f'\cdot g'$

Уравнение нормали

$\to$ это y_0

Нормаль к графику ф-ции y=f(x) в точке (x0; f(x0)) называется прямая проходящая через данную точку перепендикулярно касательной к графику ф-ции в этой точке.

Номаль - перпендикулярная к ксательной прямая, проходящая через точку касания

Если существует конечная и отличная от 0 призводная отличная от x0, то уравнение номали к графику функции y = f(x) в точке (x0, f(x0))

$$y - f(x_0) = f'(x_0)\cdot(x \xrightarrow{x_0+\Delta x} - x_0)$$

Уравнение касательной

Если существует бесконечная производная $f'(x_0) = \pm\infty$

то касательная будет параллельная оси OY, $\Rightarrow$ ур-е касатетльной $x - x_0 = 0$

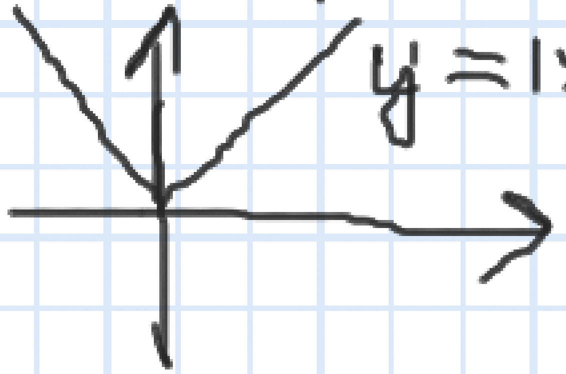
уравнение нормали $\boxed{y - f(x_0) = -\frac{1}{f'(x_0)}(x - x_0)}$

$$f(x) = \sqrt[3]{x} \qquad f'(x) = \frac{1}{3\cdot\sqrt[3]{x^2}}$$

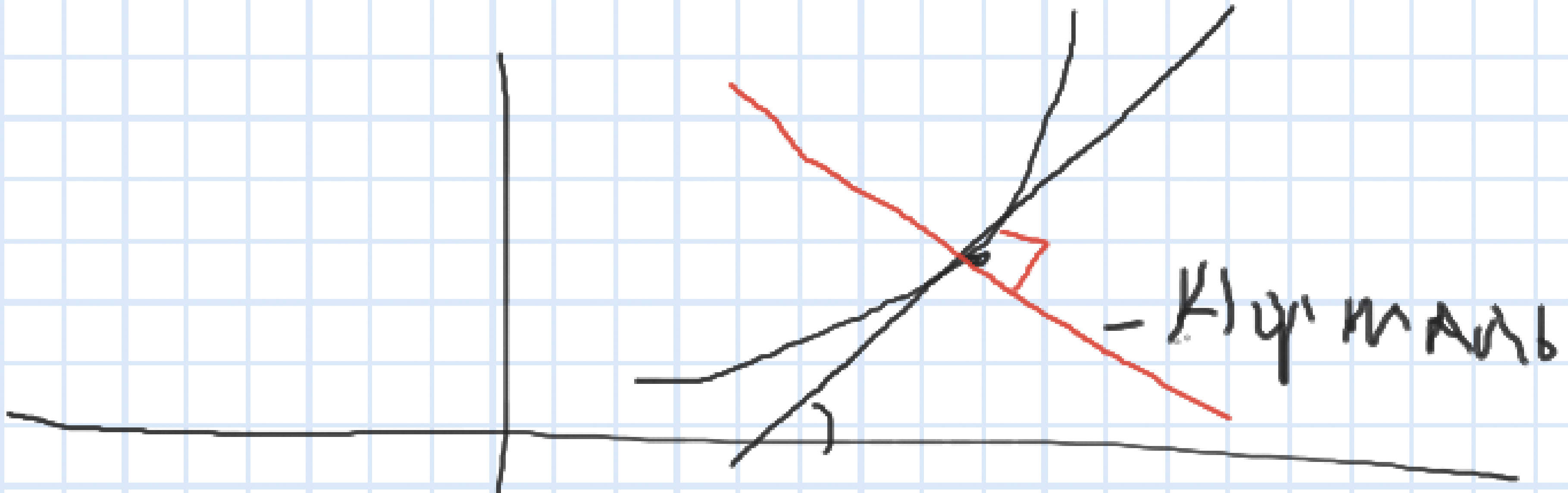
Критическая точка x0=0, где производная обращается в inf

$f'(x_0)$ не существует общей касательной

$f(x) = |x|$



$\boxed{f(-x) = f(x)}$ четность по определению



$y = f(x) = \sqrt{\frac{6-x^2}{3}}$ в т-ке $x_0 = -\sqrt{3}$

1) составим уравнение касательной $y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$

$$f(x_0) = f(-\sqrt{3}) = \sqrt{\frac{6-(-\sqrt{3})^2}{3}} = \sqrt{\frac{3}{3}} = 1$$

$$f'(x) = \left(\left(\frac{6-x^2}{3}\right)^{\frac{1}{2}}\right)' = \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot (\sqrt{6-x^2})' = \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{6-x^2}} \cdot (6-x^2)' =$$

$$\frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{6-x^2}} \cdot (0-2x) = -\frac{x}{\sqrt{3} \cdot \sqrt{6-x^2}}$$

правило диффер слож функции

$$f'(x_0) = f'(-\sqrt{3}) = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3} \cdot \sqrt{6-(-\sqrt{3})^2}} = \frac{1}{\sqrt{6-3}} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$f(x_0) = 1$

$f'(x_0) = \frac{1}{\sqrt{3}}$

$$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0) \qquad y - 1 = \frac{1}{\sqrt{3}}(x-(-\sqrt{3}))\ y$$

$$\sqrt{3}(y-1)=x+\sqrt{3}$$

$$\sqrt{3}y-\sqrt{3}=x+\sqrt{3}$$

$$k:\ x-\sqrt{3}y+2\sqrt{3}=0$$

$$y-f(x_0)=-\frac{1}{f'(x_0)}\cdot(x-x_0)$$

$$y-1=-\frac{1}{\frac{1}{\sqrt{3}}}(x-(-\sqrt{3}))$$

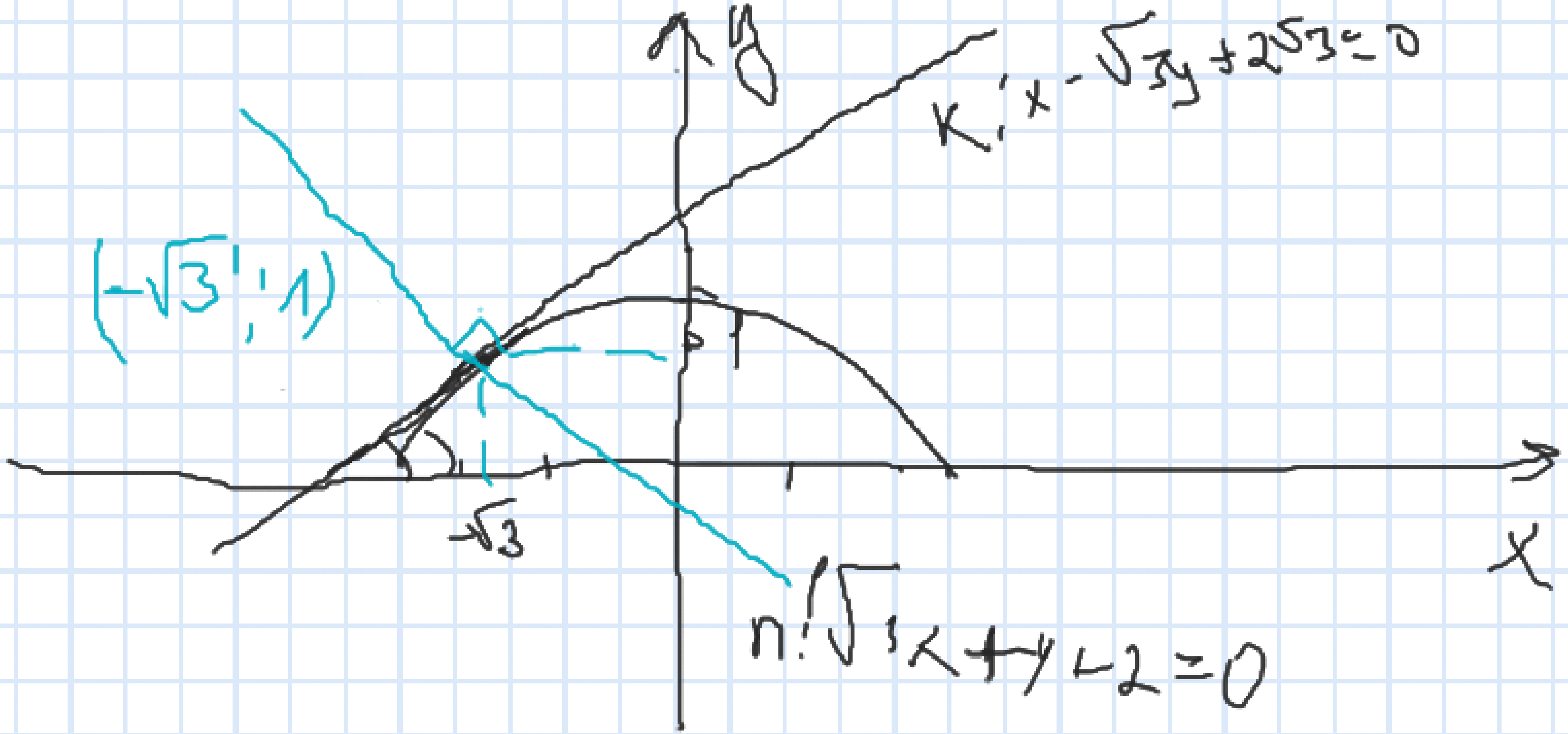
$$y-1=-\sqrt{3}(x+\sqrt{3})$$

$$y-1=-\sqrt{3}x-3$$

$$n:\ \sqrt{3}x+y+2=0$$

Отвем: $k:\ x-\sqrt{3}y+2\sqrt{3}=0.$

$n:\ \sqrt{3}x+y+2=0$



$$y=\sqrt{\frac{6-x^2}{3}}$$

Касательная к графику ф-ции - это предельное положение секщей, стремящейся к точке X0.

$$f'(x_0)=\left(tg\frac{\pi}{4}\right)'=(1)'=0$$

2) $y=f(x)=tg\frac{x}{4}$; $x_0=\pi$;

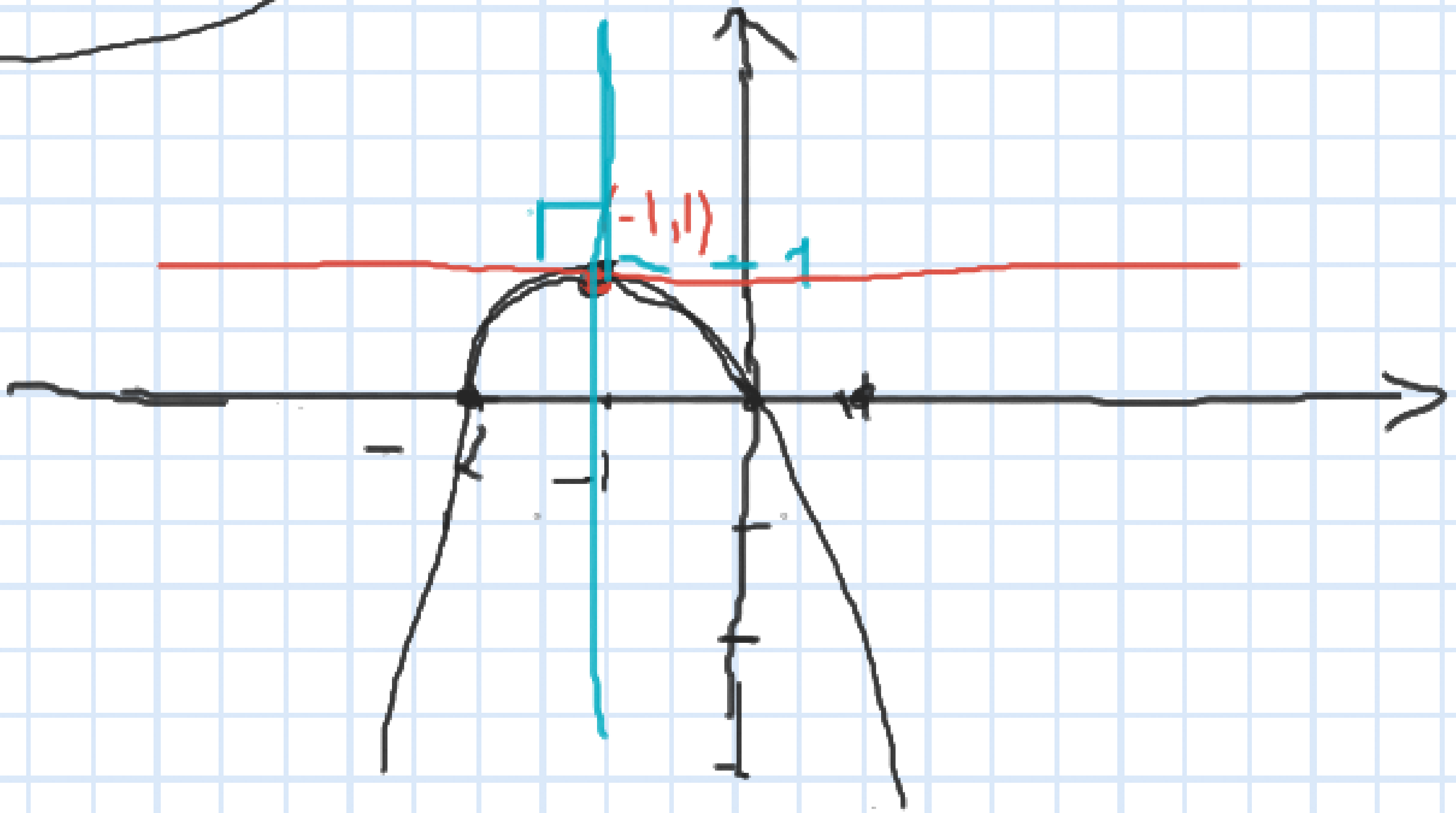
1) ур-е кас. $y-f(x_0)=f'(x_0)(x-x_0)$

$y-f(x_0)=0$ качательная параллельна оси OX

$y=f(x_0)$ $\Rightarrow$ нормаль параллельна оси OY

$\Rightarrow$ уравнение нормали $x-x_0=0$

производная существет в точке X0 и бесконечна. Те f'(X0)=+-inf .
Касательная парл-на OX, нормаль пал-на парал-на OY . Ур-е нормали y-f(x0) = 0.



$$f(x) = -2x - x^2$$

$$x_0 = -1$$

x	-1	1	-2	0
y	1	-3	0	0

$$f(x_0) = -2\cdot(-1) - (-1)^2 = 2 - 1 = 1$$

$$f'(x) = (-2x - x^2)' = -2 - 2x$$

$$f'(x_0) = -2 - 2(-1) = 0$$

$$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$$

$$y - 1 = 0 \cdot (x - (-1))$$

$$K: y - 1 = 0$$ — ур кас-ой

Ур-е нормали при кас парал оси OX

$$x - x_0 = 0$$

$$x - (-1) = 0$$

$$n: x + 1 = 0$$ — ур-е нормали

Анализ функций с пом производных или применение производной при исследовании функции

1) Достаточным условием возрастания, убывания ф-ции(монотонности)

если для f на промежутке I выполняется условие f' > 0 в каждой точке из I, то f возрастает на {I}. f $\nearrow$ + иначе f'<0 - функия убывает

2) Экстремумы функции

точки в которых производная функции = 0 или не существует - КРИТИЧЕСКИЕ ТОЧКИ

НЕОБХОДИМОЕ УСЛОВИЕ СУЩЕСТОВАНЕИЯ ЭКСТРЕМУМА(ПО КРИТЕРИЮ ТЕОРЕМЫ ФЕРМА) не гарантирует существование экстремума

1. если точка X0 - т-ка экстремума для f(x) и в этой т-ке сущ. производная f'(x0) = 0

Первое ДОСТАТОЧНОЕ УСЛОВИЕ СУЩ-Я ЭКСТРЕМУМА

Если f(x) - непрерывна в точке x0 и x' > 0 на интервале от (a;x0) и f'(x)<0 на (x0; b), то x0 - максимум ф-ции (a,b)

Если f(x) - непрерывна в точке x0 и x' < 0 на интервале от (a;x0) и f'(x)>0 на (x0; b), то x0 - мин ф-ции (a,b)

Если при переходе черехз точку X0, производная меняет знак с + на -, то прозводная точка МАКС. Если с - на + , то точка МИН

$y = f(x) = 3x - x^3$

Найти участки убывания и возрастания ф-уии на ее D(F) и эекстермумы

1) $f'(x) = 3 - 3x^2$

2) $f'(x) = 0 \Leftrightarrow$

$3 - 3x^2 = 0$

$-3x^2 = -3 \quad | \cdot -1$

$x^2 = 1$

$x_1 = 1$

$x_2 = -1$

Критические точки (где f'(x) = 0 или не сущ-ет)

$D(f) = (-\infty; +\infty)$

X	$(-\infty; -1)$	-1	$(-1; 1)$	1	$(1; +\infty)$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	$\searrow$	$3\cdot(-1)-(-1)^3$ -2	$\nearrow$	2	$\searrow$
		min		max	

$y_{min} = f(-1) = -3 + 1 = -2$

$y_{max} = f(1) = 3 - 1 = 2$

Второе достаточное условие существование экстремума

Если для ф-ции f в точке С вып-ся условие f'(C)=0 и f''(C)>0,то С - точка MIN для f(x). ИНАЧЕ если f'(C)=0 и f''(C)<0,то С- точка MAX для f(x)

$\exists f'(x)$, $f(x)$ непрерывна на $[a;b]$ и $f(x)=0$ в т-ке C

Если во всех точках [a;b] f''(x) >0, ТО значение ф-ции в т-ке С, явл-ся наименшим значением на отрезке от [a, b] .

Иначе Если во всех точках [a;b] f''(x) <0, ТО значение ф-ции в т-ке С, явл-ся наибольшим значением на отрезке от [a, b]

вода наливается

выпуклая ф-я

$f''(x)>0$

вода выливается

вогнутаяя ф-я

$f''(x)<0$

$$\boxed{y = x^3 - 3x}$$