1 Теория вероятностей.

Монетка:
$\Omega = \{\text{О}; \text{Р}\}$. Ω — множество элементарных исходов; $\leqslant$ счетное.
Случайное событие: $A \subset \Omega$.
$P : \Omega \to \mathbb{R}_+$:

1. $P(x) \geqslant 0$
2. $\sum_{x \in \Omega} P(x) = 1$

(Ω, P) — вероятностное пространство.
Вероятность события A — $P(A) = \sum_{x \in A} P(x)$.
Случайное событие — измеримое подмножество вероятностного пространства.
Сумма событий — объединение множеств.
Произведение событий — пересечение множеств.
$P(A + B) = P(A) + P(B) - P(AB)$.
$P(A + B + C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(AB) - P(BC) - P(AC) + P(ABC)$.
Опр. A и B называются независимыми, если $P(AB) = P(A) \cdot P(B)$.
Пример:

> Ω_1 и Ω_2 — вероятностные пространства.
> $\Omega_1 \times \Omega_2$ — вероятностное пространство.
> $A \subset \Omega_1$ — случайное событие.
> $P(x, y) = P_1(x) \cdot P_2(y)$.
> $P_1(A) = P(A \times \Omega_2)$.

$AB \leftrightarrow (A \times \Omega_2) \cap (\Omega_1 \times B) = A \times B$.
A, B, C — независимы, если $P(ABC) = P(A)P(B)P(C)$.
События $A_1, A_2, \ldots, A_n$ независимы, если $\forall A_{i1}, \ldots, A_{ik}$ верно $P(A_{i1}A_{i2} \ldots A_{ik}) = \Pi_{j=1}^{k} P(A_{ij})$.
Опр. Условная вероятность. $P(A|B)$ — вероятность A при условие, что B произошло.
Теорема. Формула полной вероятности. Пусть $A_1, A_2, \ldots, A_n$ — система попарно несовместимых событий, в сумме дающих достоверное. Тогда для любого события B выполнена формула $P(A) = \sum_{i=1}^{k} P(A|B_i) \cdot P(B_i)$.
Доказательство:

> $P(A|B) = \frac{P(AB)}{P(B)}$.
> $P(A) = \sum_{i=1}^{k} P(AB_i)$.

1.1 Случайные величины.

Опр. Ω — вероятностное пространство, $f : \Omega \to \mathbb{R}$. f называется случайной величиной.
Пример:
Бросаем кубик. $\Omega = 1, 2, 3, 4, 5, 6$, $p(x) = \frac{1}{6}$. $f(1) = 1, f(2) = 2$, и т. д.
На $\mathbb{R}$ введем структуру вероятностного пространства: $1 - \frac{1}{6}, 2 - \frac{1}{6}, 3 - \frac{1}{6}, 4 - \frac{1}{6}, 5 - \frac{1}{6}, 6 - \frac{1}{6}$, остальные 0.
Опр. $f : \Omega \to \mathbb{R} \Rightarrow$ на $\mathbb{R}$ вводится структура вероятностного пространства. $\forall x \in \mathbb{R}$ $P_{\mathbb{R}}(x) = P_{\Omega}(f^{-1}(x))$.
Опр. Распределение случайно величины f — структура вероятностного пространства на $\mathbb{R}$.
Стандартное распределение:

1. Дискретное равномерное. $x_1 - \frac{1}{n}, x_2 - \frac{1}{n}, \ldots, x_n - \frac{1}{n}$.
2. Распределение Бернулли.
   $f(x) = \begin{cases} 1 & p \\ 0 & q = 1 - p \end{cases}$
   $f = \sum_{i=1}^{n} f_i$.
   $0 - q^n, 1 - C_n^1 p q^{n-1}, \ldots, n$.
   $P(f(x) = k) = C_n^k \cdot p^k \cdot q^{n-k}$.
3. Геометрическое распределение. Бросаем неравновесную монетку до выпадения орла. Случайная величина — количество испытаний.
   $P(f(x) = k) = q^{k-1} \cdot p$.
4. Распределение Пуассона.
   $P(f = k) = \frac{\lambda^k}{k!} \cdot e^{-\lambda}$. $e \approx 2.718281828459045$, $\lambda > 0$.

5. Гипергеометрическое распределение. В сосуде N белых шаров и M черных. Мы не глядя вытаскиваем n шаров без возвращения. Случайная величина — количество белых шаров.
   $P(f = k) = \frac{C_N^k \cdot C_M^{n-k}}{C_{N+M}^n}$.

Опр. Сложение. $f : \Omega \to \mathbb{R}$, $g : \Omega \to \mathbb{R}$. $(f + g)(x) = f(x) + g(x)$.
Опр. $f(x) = a$ — случайное событие.
Опр. f и g независимые, если $\forall A, B \in \mathbb{R} : P(f(x) \in A; g(x) \in B) = P(f(x) \in A) \cdot P(g(x) \in B)$. Или: $P(f(x) = a; g(x) = b) = P(f(x) = a) \cdot P(g(x) = b)$.

1.2 Математическое ожидание.

Опр. f — случайная величина. Ее математическим ожиданием называется $Mf = Ef = \sum_{x\in\Omega} f(x)P(x)$.
Свойства:

1. c - константа это случайная величина.
2. $f_1 \leqslant f_2 (\Leftrightarrow f_1(x) \leqslant f_2(x) \forall x) \Rightarrow Mf_1 \leqslant Mf_2$.
3. $M(cf) = c \cdot Mf$.
4. $M(f_1 + f_2) = Mf_1 + Mf_2$. $\sum_{x\in\Omega}(f_1(x) + f_2(x))P(x) = \sum f_1(x) \cdot P(x) + \sum f_2(x) \cdot P(x)$
5. Если f_1, f_2 - независимы $\Rightarrow M(f_1 \cdot f_2) = Mf_1 \cdot Mf_2$. $Mc = c$.

$M(f_1 \cdot f_2) = \sum_{x\in\Omega} f_1(x) \cdot f_2(x) \cdot P(x) = \sum a_i \cdot b_j \cdot P(f_1 = a_i; f_2 = b_j) = \sum_{i,j} a_i \cdot b_j \cdot P(f_1 = a_i) \cdot P(f_2 = b_j) = \sum_i a_i \cdot P(f_1 = a_i) \cdot \sum_j b_j \cdot P(f_2 = b_j) = Mf_1 \cdot Mf_2$.
$P(f = k) = \frac{C_M^k \cdot C_N^{n-k}}{C_{M+N}^n}$.
$Mf = \frac{n \cdot M}{M+N}$.
$Mf = \sum_{k=0}^n \frac{k \cdot C_M^k \cdot C_N^{n-k}}{C_{M+N}^n} =$
$\frac{n \cdot M}{M+N} \cdot \frac{(M-1)!N!(n-1)!(M+N-n)!}{(M+N-1)!} \sum_{k=0}^n \frac{1}{(k-1)!(M-k)!(n-k)!(N-n+k)!} \sum_{k=0}^n \frac{(M-1)!N!(n-1)!(M+N-n)!}{(k-1)!(M-k)!(n-k)!(N-n+k)!(M+N-1)!} =$
$= \sum_{k=0}^N \frac{C_{n-1}^{k-1} \cdot C_{M+N-n}^{M-k}}{C_{M+N-1}^{M-1}} = 1$.

1.3 Дисперсия.

Опр. Мера отклонения случайной величины от своего математического ожидания. f — случайная величина; $Df = M(f - Mf)^2$.
Опр. Центрирование случайной величины — $M(f - Mf) = Mf - M(Mf) = 0$. Условно сдвигаем систему координат в 0.
$Df = M(f^2 - 2f \cdot Mf + (Mf)^2) = Mf^2 - 2M^2f + M(M^2f) = Mf^2 - M^2f$.
Свойства:

1. $D(c) = 0$ $D(f) = 0 \Rightarrow f = const$
2. $D(cf) = c^2D(f)$
3. $D(f + c) = Df$
4. Если случайные величины f и g независимы, то $D(f + g) = Df + Dg$

Формула Стирлинга. $n! \approx \sqrt{2\pi n} \cdot (\frac{n}{e})^n \cdot e^{\frac{\theta_n}{12n}}$. При больших n, $e^{\frac{\theta_n}{12n}} \approx 1$.

1.4 Неравенство Маркова.

f — случайная величина; $|Mf| < \infty$; $c > 0$; $f \geqslant 0$.
$P(f \geqslant c) \leqslant \frac{Mf}{c}$.
f :

$a_1 < c$	$a_2 < c$	$\dots$	$a_n \geqslant c$	$a_{n+1} \geqslant c$	$a_{n+2} \geqslant c$	$\dots$
p_1	p_2	$\dots$	p_n	p_{n+1}	p_{n+2}	$\dots$

$g := \frac{f}{c}$.

$\frac{a_1}{c} < 1$	$\frac{a_2}{c} < 1$	$\dots$	$\frac{a_n}{c} \geqslant 1$	$\frac{a_{n+1}}{c} \geqslant 1$	$\frac{a_{n+2}}{c} \geqslant 1$	$\dots$
p_1	p_2	$\dots$	p_n	p_{n+1}	p_{n+2}	$\dots$

Надо: $P(g \geqslant 1) \leqslant Mg$.
$b_i = \frac{a_i}{c}$.
$Mg = b_1p_1 + b_2p_2 + \dots + b_np_n + b_{n+1}p_{n+1} + \dots \geqslant p_{n+1} + p_{n+2} + \dots$.

1.5 Неравенство Чебышева.

f — случайная величина, Mf и Df $\exists$, $c > 0$.
$\Rightarrow P(|f - Mf| \geqslant c) \leqslant \frac{Df}{c^2}$.
Нормировка случайной величины. $g := \frac{f - Mf}{\sqrt{Df}}$. $Mg = 0$, $Dg = 1$.
$|f - Mf| \geqslant c \Leftrightarrow \sqrt{Df} \cdot g \geqslant c$.
$P(|g| \geqslant \frac{c}{\sqrt{Df}}) \leqslant \frac{Df}{c^2}$.
$P(|g| \geqslant \frac{c}{\sqrt{Df}}) = P(g^2 \geqslant \frac{c^2}{Df}) \leqslant \frac{Mg^2}{(\frac{c^2}{Df})} = \frac{Df}{c^2}$.

1.6 Закон больших чисел.

$f_1, f_2, f_3, \dots$ — последовательность. $M := Mf_i$, $D = Df_i$.
Одинаковое распределение случайных величин.
$S_n := \frac{f_1 + f_2 + \dots + f_n}{n} \Rightarrow \forall \varepsilon > 0 \lim_{n \to \infty} P(|S_n - M| \geqslant \varepsilon) = 0$.
$MS_n = M$; $DS_n = \frac{D}{n}$.
$P(|S_n - M| \geqslant \varepsilon) \leqslant \frac{D(S_n)}{\varepsilon^2} = \frac{D}{n\varepsilon^2} \to 0$. $n \to \infty$, ε — фикс.

1.7 Ковариация и корреляция.

Опр. $cov(f; g) = M(f - Mf)(g - Mg)$. $cov(f; f) = Df = Mf^2 - M^2f$. $cov(f, g) = M(fg) - Mf \cdot Mg$.
Главное свойство ковариации: f, g — независимы $\Rightarrow cov(f, g) = 0$.
Опр. $r(f, g) = \frac{cov(f,g)}{\sqrt{Df \cdot Dg}}$ — коэффициент корреляции.
Теорема.

$-1 \leqslant r(f, g) \leqslant 1$.
$r(f, g) = 1 \Leftrightarrow \frac{f}{g} = const > 0$.
$r(f, g) = -1 \Leftrightarrow \frac{f}{g} = const < 0$.

1.8 Применение к комбинаторике.

Опр. Перестановки. $f : \{1 \dots n\} \to \{1 \dots n\}$; биекция. Таких $n!$. Неподвижная точка — $f(x) = x$.

1.9 Теорема Рамсея.

Задача. Есть полный граф K_N, ребра которого покрашены в 2 цвета. Всегда ли можно выбрать либо K_m с ребрами 1 цвета, либо K_n с ребрами 2 цвета?
Теорема. $\forall m; n \exists N >> 0$: утверждение верно. Наименьшее такое N — число Рамсея $R(m; n)$.
Например $R(3, 3) = 6$. Но вот $R(5, 5)$ уже не известно.
Два аспекта:

1. Верхняя оценка = теорема Рамсея.

2. Нижняя оценка.

Теорема (все та же). $R(m;n) \leqslant R(m-1;n) + R(m;n-1)$. $R(m;n) \leqslant 2^{m+n}$.
$R(m;n) \leqslant C_{m+n}^{m}$ — более точная оценка.
Теорема Эрдеша. $R(n;n) \geqslant 2^{\frac{n}{2}}$.
Вероятностный метод. Суть: рассмотрим случайный (со случайной раскраской ребер) граф на $2^{\frac{n}{2}}$ вершин. f — количество одноцветных клик K_n. Если $M(f) < 1 \Rightarrow$ Ок.
Задача. Пьяница стоит на краю обрыва. С вероятностью p — шаг к обрыву, $q = 1-p$ — от обрыва.
$P(\text{упадет ровно после } 2k+1 \text{ шага}) = p^{k+1} \cdot q^k \cdot c_k$.
c_k имеет рекуррентную формулу: $c_{n+1} = c_0 \cdot c_n + c_1 \cdot c_{n-1} + \cdots + c_{n-1} \cdot c_1 + c_n \cdot c_0; c_0 = 1$.
$P(\text{упадет}) = \frac{1-\sqrt{1-4pq}}{2q}$.

1.10 Числа Каталана.

Опр. c_n — n-е число Каталана.
Опр. $c_{n+1} = c_0 \cdot c_n + c_1 \cdot c_{n-1} + \cdots + c_{n-1} \cdot c_1 + c_n \cdot c_0$; $c_0 = 1$.
Явная формула: $\frac{(2n)!}{n!(n+1)!}$.
Конструкции:

1. У $n+2$ угольника — c_n триангуляций.

2 Близкие дроби.

Опр. n-ый ряд Фарея — последовательность дробей от 0 до 1 со знаменателем $\leqslant n$, несократимых, в порядке возрастания. На n-ом шаге $\varphi(n)$ дробей.
Опр. Медианта дробей $\frac{a}{b}$ и $\frac{c}{d}$ — это $\frac{a+c}{b+d}$.
Опр. $\frac{a}{b}$ и $\frac{c}{d}$ близки, если $|\frac{a}{b} - \frac{c}{d}| = \frac{1}{bd} \Leftrightarrow |ad - bc| = 1$.
Свойства:

1. $\frac{a}{b} < \frac{c}{d} \Rightarrow \frac{a}{b} < \frac{a+c}{b+d} < \frac{c}{d}$.
   Доказательство:

   $\frac{a}{b} < \frac{a+c}{b+d} \Leftrightarrow ab + ad < ab + bc \Leftrightarrow ad < bc \Leftrightarrow \frac{a}{b} < \frac{c}{d}$.
   $\frac{a+c}{b+d} < \frac{c}{d} \Leftrightarrow ad + cd < bc + cd \Leftrightarrow ad < bc \Leftrightarrow \frac{a}{b} < \frac{c}{d}$.

2. $\frac{a}{b}; \frac{c}{d}$ — близкие (и тогда несократимые) $\Rightarrow \frac{a+c}{b+d}$ — несократимая.
   Доказательство:

   Очевидно из 3 и 4 пункта.

3. Близкие дроби несократимые.
   Доказательство:

   Пусть нет. $\frac{a}{b} = \frac{a_1 k}{b_1 k} \Rightarrow |ad - bc| = |a_1 kd - b_1 kc| = 1?!?$.

4. Если дроби близки, то медианта близка к каждой из них.
   Доказательство:

   $|\frac{a}{b} - \frac{a+c}{b+d}| =?$.
   $a(b+d) - (a+c)b = ad - bc = 1$.

5. Дроби близкие $\Rightarrow$ они соседние в каком-то ряду Фарея.

6. Дроби соседние в каком-то ряду Фарея $\Rightarrow$ они близкие.

7. $\frac{a}{b}$ и $\frac{c}{d}$ — близкие $\Rightarrow$ дробь с min знаменателем между ними — медианта.

Перенос на плоскость ряда Фарея. Вектора (a, b) и (c, d) из точки $(0, 0)$. Их сумма равна $(a+c, b+d)$. Площадь параллелограмма, образованного данными векторами, равна $S = |ad - bc|$. Равна 1, если вектора близки. Также на векторах нет целочисленных точек, иначе дроби сократимые. Тогда по формуле Пика $S = n + \frac{k}{2} - 1; n$ — количество внутренних вершин, k — количество вершин на сторонах. $S = 1$ для близких векторов.
Опр. $\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right)$ — матрица. $ad - bc$ — определитель $\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right)$. $def \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) = \left|\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right| = ad - bc$.
Свойства:

1. $def \left(\begin{smallmatrix} \lambda a & \lambda b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) = \lambda def \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right)$

3 Цепные дроби.

Опр. Конечной цепной дробью называется число $a_0 + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2 + \dots + \frac{1}{a_n}}}$, где a_0 — целое, $a_1, \dots, a_n$ — натуральные числа.

Такую цепную дробь будем обозначать $[a_0, a_1, \dots, a_n]$.
Теорема. $\forall \frac{m}{n} \exists!$ цепная дробь.
Доказательство:

$a_0 = \left[\frac{m}{n}\right]$
$\frac{1}{a_1 + \frac{1}{\dots}} = \left\{\frac{m}{n}\right\} = \frac{m_1}{n_1}$
$\frac{n_1}{m_1} = a_1 + \frac{1}{a_2 + \frac{1}{\dots}} = \frac{m_2}{n_2}$
Это Алгоритм Евклида.

$1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{\dots}} = [1, 1, \dots, 1] = \frac{F_{n+1}}{F_n}$.
Опр. Несократимая дробь $\frac{p_k}{q_k} = [a_0, a_1, \dots, a_k]$ называется k-й подходящей дробью цепной дроби $[a_0, a_1, \dots, a_n]$.
Теорема. Рекуррентные формулы Эйлера. $p_k = a_k p_{k-1} + p_{k-2}$; $q_k = a_k q_{k-1} + q_{k-2}$.
$\frac{p_k}{q_k}$ располагается между $\frac{p_{k-2}}{q_{k-2}}$ и $\frac{p_{k-1}}{q_{k-1}}$ и равна $\frac{p_{k-2} + a_k \cdot p_{k-1}}{q_{k-2} + a_k \cdot q_{k-1}}$.

1. $|\frac{p_k}{q_k} - \alpha| \leqslant \frac{1}{q_k^2}$
   $|\frac{p_k}{q_k} - \alpha| \leqslant \frac{1}{q_k q_{k+1}} \leqslant \frac{1}{q_k^2}$
   $\frac{p_k}{q_k} < \alpha \leqslant \frac{p_{k+1}}{q_{k+1}}$
   $|\frac{p_k}{q_k} - \alpha| \leqslant |\frac{p_k}{q_k} - \frac{p_{k+1}}{q_{k+1}}| = \frac{1}{q_k q_{k+1}}$

2. $|\frac{p_k}{q_k} - \alpha| \geqslant \frac{1}{q_k(q_k + q_{k+1})}$
   $|\frac{p_k}{q_k} - \alpha| \geqslant |\frac{p_k}{q_k} - \frac{p_{k+2}}{q_{k+2}}| \geqslant \frac{1}{q_k q_{k+2}}$

$r_n := a_n + \frac{1}{a_{n+1} + \frac{1}{\dots}} = [a_n, a_{n+1}, \dots]$.
$[a_0, a_1, \dots] = [a_0, a_1, \dots, a_{n-1}, r_n]$.
Теорема. $[a_0, a_1, \dots] = \frac{p_{n-1} r_n + p_{n-2}}{q_{n-1} r_n + q_{n-2}}$
$\alpha = \frac{p_{n-2} r_{n-1} + p_{n-3}}{q_{n-2} r_{n-1} + q_{n-3}}$
$r_{n-1} = a_{n-1} + \frac{1}{r_n}$
Теорема. Если цепная дробь α — периодическая, то α — корень квадратного трехчлена с целыми коэффициентами.
Теорема Лиувилля. α — иррациональное число; α — корень $f(x)$ степени n (n — min) с целыми коэффициентами $\Rightarrow \exists C > 0 : \forall \frac{p}{q}$ выполнено $\left|\alpha - \frac{p}{q}\right| \geqslant \frac{c}{q^n}$, C — константа.
Доказательство:

$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$, $a_i \in \mathbb{Z}$
$f(x) = (x - \alpha) g(x) \Rightarrow \alpha$ — не корень $g(x)$, тк тогда $g(x)$ — нецелые коэффициенты.
$x - \alpha = \frac{f(x)}{g(x)}$, $\forall x$
$\left|\frac{p}{q} - \alpha\right| = \frac{\left|f(\frac{p}{q})\right|}{\left|g(\frac{p}{q})\right|} = \frac{\left|a_n \frac{p^n}{q^n} + a_{n-1} \frac{p^{n-1}}{q^{n-1}} + \dots + a_0\right|}{\left|g(\frac{p}{q})\right|} = \frac{1}{q^n} \left|\frac{a_n p^n + a_{n-1} p^{n-1} q + \dots + a_0 q^n)}{g(\frac{p}{q})}\right|$
Надо: $\left|\frac{a_n p^n + a_{n-1} p^{N-1} q + \dots + a_0 q^n}{g(\frac{p}{q})}\right| \geqslant C$