

1 Последовательность.

$$f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$f(n) =: f_n$$

Опр. Последовательность называется ограниченной сверху, если $\exists M : |f_n| \leq M$. Снизу, если $\exists m : f_n \geq m$. f_n — ограниченная, если ограничена сверху и снизу.

Опр. $M_0 = \sup f_n$, если M_0 — верхняя грань и $\forall \varepsilon > 0 \exists n_0 : f_{n_0} > M_0 - \varepsilon$. $m_0 = \inf f_n$, если m_0 — нижняя грань и $\forall \varepsilon > 0 \exists n_0 : f_{n_0} < m_0 + \varepsilon$.

Аксиома вещественных чисел. Если множество X ограничено сверху, то $\exists \sup X$. Если f_n неограничено сверху, то $\sup f_n =: +\infty$. Если снизу, то $\inf f_n =: -\infty$.

Опр. f_n — бесконечно большая (бб), если $\forall \varepsilon > 0 \exists N = N(\varepsilon) : |f_n| > \frac{1}{\varepsilon} \forall n \geq N$. f_n — не бб, $\exists \varepsilon > 0 : \forall N \exists n > N : |f_n| \leq \frac{1}{\varepsilon}$.

Опр. f_n — бесконечно малая (бм), если $\forall \varepsilon > 0 \exists N = N(\varepsilon) : |f_n| < \varepsilon \forall n \geq N$.

Лемма. f_n — бм $\Rightarrow f_n$ — ограничена.

Доказательство:

Пусть $\varepsilon = 1$, тогда $\exists N : |f_n| \leq 1 \forall n \geq N$

$M := \max\{|f_1|, \dots, |f_{N-1}|, 1\}$, тогда $|f_n| \leq M \forall n \in \mathbb{N}$.

Лемма.

a) f_n — бб $\Rightarrow \frac{1}{f_n}$ — бм

b) f_n — бм ($f_n \neq 0$) $\Rightarrow \frac{1}{f_n}$ — бб

Лемма. f_n — неограниченная последовательность, тогда существует бб подпоследовательность f_{nk} .

Доказательство:

$$\begin{aligned} &\exists n_1 : |f_{n_1}| > 1, \\ &\exists n_2 > n_1 : |f_{n_2}| > 2, \\ &\exists n_3 > n_2 : |f_{n_3}| > 3, \\ &\vdots, \\ &\exists n_1 < n_2 < \dots < n_k < \dots \\ &|f_{n_k}| > k \Rightarrow f_{n_k} \text{ — бб.} \end{aligned}$$

Лемма.

a) бм + бм = бм

b) бм · C = бм

c) бм · бм = бм

d) бб · C = бб, $C \neq 0$

e) бб · бб = бб

1.1 Предел последовательности.

a_n — последовательность.

Опр. $a = \lim a_n$, если $\forall \varepsilon > 0 \exists N : |a_n - a| < \varepsilon \forall n \geq N$.

Опр. Эпсилон окрестность: $U_\varepsilon(a) := (a - \varepsilon; a + \varepsilon)$. Выколотая эпсилон окрестность: $U_\varepsilon^\circ(a) := U_\varepsilon(a) \setminus \{a\}$.

$\varepsilon_1 < \varepsilon_2 \Rightarrow U_{\varepsilon_1}(a) \subset U_{\varepsilon_2}(a), a \in \mathbb{R}$.

Опр. $\mathbb{R} \cup \{\pm\infty\} = \overline{\mathbb{R}}$ — расширенная числовая прямая.

Опр. $\varepsilon > 0$ $U_\varepsilon(+\infty) = (\frac{1}{\varepsilon}; +\infty)$; $U_\varepsilon(-\infty) = (-\infty; -\frac{1}{\varepsilon})$.

$\lim |a_n| = +\infty \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists N(\varepsilon) : |a_n| > \frac{1}{\varepsilon}$.

Если a_n — бб $\Leftrightarrow \lim |a_n| = +\infty$.

Если a_n — бм $\Leftrightarrow \lim |a_n| = 0$.

Утв. $\lim a_n = a \Leftrightarrow \exists$ бм последовательность d_n , такая что $a_n = a + d_n$.

Утв. Если предел последовательности существует, то он единственный.

Доказательство:

$$\exists a < b \text{ и } a = \lim a_n, b = \lim a_n.$$

$$\text{Тогда } \varepsilon := \frac{b-a}{42} :$$

$$\exists N_1 : a_n \in U_\varepsilon(a) \forall n \geq N_1$$

$$\begin{aligned} \exists N_2 : a_n \in U_\varepsilon(b) \forall n \geq N_2 \\ \Rightarrow a_n \in (U_\varepsilon(a) \cap U_\varepsilon(b)) = \emptyset \quad \forall n \geq \max\{N_1, N_2\}!?! \end{aligned}$$

Предельный переход в неравенства. $a_n \leq b_n \quad \forall n \geq N_0$.

Пусть $\exists \lim a_n = a$; $\lim b_n = b$, $a, b \in \overline{\mathbb{R}}$

Тогда $a \leq b$.

Доказательство:

$$\begin{aligned} \text{Пусть } a > b. \text{ Тогда } \varepsilon := \frac{a-b}{42} : \\ \exists N_1 : a_n \in U_\varepsilon(a) \forall n \geq N_1 \\ \exists N_2 : a_n \in U_\varepsilon(b) \forall n \geq N_2 \\ \Rightarrow a_n > b_n \quad \forall n \geq \max\{N_1, N_2\}!?! \end{aligned}$$

Лемма о сжатых последовательностях. Пусть $a_n \leq b_n \leq c_n \quad \forall n \geq N_0$ и $\exists \lim a_n = \lim c_n = a \in \overline{\mathbb{R}}$, тогда $\exists \lim b_n = a$.

Доказательство:

$$\begin{aligned} \varepsilon > 0 : \\ \exists a_n \in U_\varepsilon, n \geq N_1 \\ \exists c_n \in U_\varepsilon, n \geq N_2 \\ \Rightarrow b_n \in U_\varepsilon : \forall n \geq \{N_1, N_2, N_0\} =: N \Rightarrow a = \lim b_n \text{ по определению.} \end{aligned}$$

Лемма об отделимости от нуля. Пусть $\exists \lim a_n = a > 0$. Тогда $\exists N : a_n > \frac{a}{2} > 0, \forall n \geq N$.

Следствие. Если $\lim a_n \neq 0 \Rightarrow \frac{1}{a_n}$ ограничена ($a_n \neq 0$).

Доказательство:

$$\begin{aligned} \lim a_n = a > 0 \\ \exists N_1 : a_n > \frac{a}{2} \Rightarrow 0 < \frac{1}{a_n} < \frac{2}{a} \quad \forall n \geq N_1 \\ \min\{a_1, \dots, a_{N-1}, \frac{a}{2}\} \leq \frac{1}{a_n} \leq \max\{a_1, \dots, a_{N-1}, \frac{2}{a}\} \end{aligned}$$

Теорема. Арифметические свойства предела. Пусть $\lim a_n = a$, $\lim b_n = b$; $a, b \in \overline{\mathbb{R}}$. Тогда:

1. $\lim(a_n + b_n) = a + b$, кроме случаев $+\infty + (-\infty)$, $-\infty + (+\infty)$
2. $\lim(ka_n) = ka$, кроме случая $0 \cdot (\pm\infty)$
3. $\lim(a_n \cdot b_n) = ab$, кроме случая $0(\pm\infty)$
4. $\lim \frac{a_n}{b_n} = \frac{a}{b}$, кроме случаев $\frac{0}{0}, \frac{\infty}{\infty}$

Доказательство:

$$\begin{aligned} a, b \in \mathbb{R} \\ a_n = a + \alpha_n, b_n = b + \beta_n; \alpha_n, \beta_n \rightarrow 0. \\ 1. a_n + b_n = (a + b) + (\alpha_n + \beta_n) \Leftrightarrow \lim(a_n + b_n) = a + b. \\ 2. \text{ Аналогично.} \\ 3. a_n b_n = (a + \alpha_n)(b + \beta_n) = ab + \alpha_n b + \beta_n a + \alpha_n \beta_n \\ 4. \text{ Если } b \neq 0 \quad \frac{1}{b_n} \rightarrow \frac{1}{b} \text{ — ограничена} \\ \frac{a_n}{b_n} - \frac{a}{b} = \frac{a + \alpha_n}{b + \beta_n} - \frac{a}{b} = \frac{\alpha_n b - \beta_n a}{b_n b} = \frac{1}{b} \cdot \frac{1}{b_n} \cdot (\alpha_n b - \beta_n a) \\ \text{Если } b = 0 \Rightarrow b_n \rightarrow 0 \Rightarrow \frac{1}{b_n} \rightarrow \infty \Rightarrow a_n \cdot \frac{1}{b_n} = \text{ограниченная } \infty \end{aligned}$$

Опр. Линейное пространство — множество, сумма двух элементов которого лежит в этом множестве и элемент с коэффициентом лежит в этом множестве.

Опр. Последовательность называется возвратной, если $a_n = \beta_{n-1}a_{n-1} + \beta_{n-2}a_{n-2} + \dots + \beta_{n-k}a_{n-k}$; β_i — фиксированные коэффициенты.

$$a_n^{(1)}, a_n^{(2)} \Rightarrow \forall \lambda, \mu \in \mathbb{R} \quad \lambda a_n^{(1)} + \mu a_n^{(2)} \text{ тоже удовлетворяет } (x).$$

$$a_n := t^n$$

$$t^k = \beta_{n-1}t^{k-1} + \dots + \beta_{n-k}$$

$$t_0 \text{ — простой корень, то } t_0^n$$

$$t_0 \text{ — корень } (m) \Rightarrow t_0^n; nt_0^n; n^2 t_0^n; \dots; n^{m-1} t_0^n$$

Теорема.

1. Пусть a_n возрастает и ограничена сверху. Тогда $\exists \lim a_n = \sup a_n$
2. Пусть a_n убывает и ограничена снизу. Тогда $\exists \lim a_n = \inf a_n$

Доказательство:

fix $\varepsilon > 0$

Так как a_n — ограничена, то $\exists M \sup a_n \in \mathbb{R}$; И $\exists N : a_N > M - \varepsilon$. Тогда $\begin{cases} a_n \geq M - \varepsilon \\ a_n \leq M < M + \varepsilon \end{cases} \quad \forall n \geq N, \text{ так как } a_n \uparrow \Rightarrow$
 $\exists N : |a_n - M| < \varepsilon \forall n \geq N \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = M$ по определению.

Найти предел последовательности $a_n = (1 + \frac{1}{n})^n$.

$$b_n = (1 + \frac{1}{n})^{n+1}; b_1 = 4, b_2 = 3, \dots b_n \downarrow$$

$$b_n \geq 1$$

Докажем, что b_n убывает.

$$\frac{b_n}{b_{n+1}} = \frac{(\frac{n+1}{n})^{n+1}}{(\frac{n+2}{n+1})^{n+2}} = \frac{n+1}{n} \cdot \frac{n+1}{n+2} = \frac{n+1}{n+2} \cdot (\frac{n^2+2n+1}{n^2+2n})^{n+1} = \frac{n+1}{n+2} \cdot (1 + \frac{1}{n^2+2n})^{n+1} \quad (\text{неравенство Бернулли})$$

$$> \frac{n+1}{n+2} \cdot (1 + \frac{n+1}{n^2+2n}) = \frac{(n+1)(n^2+3n+1)}{(n+2)(n^2+2n)} = \frac{n^3+4n^2+4n+1}{n^3+4n^2+4n} > 1.$$

$$a_n = \frac{b_n}{(1+\frac{1}{n})}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b_n}{1+\frac{1}{n}} = \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} b_n}{\lim_{n \rightarrow \infty} (1+\frac{1}{n})} = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n - \text{существует.}$$

$$e := \lim_{n \rightarrow \infty} (1 + \frac{1}{n})^n \approx 2.718281828459045\dots$$