

# Содержание

<b>1 Последовательности.</b>	<b>2</b>
1.1 Арифметическая прогрессия. . . . .	2
1.2 Геометрическая прогрессия. . . . .	2
<b>2 Производная и интеграл.</b>	<b>2</b>
<b>3 Предел.</b>	<b>4</b>
<b>4 Показательная функция.</b>	<b>4</b>
<b>5 Логарифм.</b>	<b>5</b>
<b>6 Показательные уравнения.</b>	<b>6</b>
6.1 Методы решения. . . . .	6
<b>7 Неравенства.</b>	<b>6</b>
<b>8 Метод рационализации.</b>	<b>6</b>

# 1 Последовательности.

**Определение 1.1.** Последовательность — объекты (элементы), пронумерованные последовательными натуральными числами. Последовательности бывают как конечными, так и бесконечными.

**Определение 1.2.** Стационарная последовательность — последовательность, у которой равны все элементы.

**Заметка 1.1.** Способы задания (правило, которое позволяет найти каждый элемент последовательности) последовательностей:

- Словесно/описательно.
- Таблица.
- Рекуррентно.
- Формульно.

## 1.1 Арифметическая прогрессия.

Пример: ряд натуральных чисел  $1, 2, 3, \dots, n$ .

**Определение 1.3.** Арифметическая прогрессия — последовательность, где каждый следующий элемент увеличивается на фиксированную величину.  $a_{n+1} = a_n + d$ ,  $d$  — разность арифметической прогрессии.

**Утверждение 1.1.** Формулы.

$$\begin{aligned} a_n &= a_1 + (n - 1) \cdot d. \\ a_n &= \frac{a_{n+1} + a_{n-1}}{2} \rightarrow a_n = \frac{a_{n+k} + a_{n-k}}{2}. \\ S_n &= \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n = \left(a_1 + \frac{(n-1) \cdot d}{2}\right) \cdot n = a_1 \cdot n + \frac{(n-1) \cdot n}{2} \cdot d. \end{aligned}$$

## 1.2 Геометрическая прогрессия.

**Определение 1.4.** Геометрической прогрессией называется такая последовательность, где первый член не нулевой, а каждый следующий в фиксированное число (не ноль) раз больше.

**Определение 1.5.**  $b_n = b_{n-1} \cdot q$ ,  $q$  — знаменатель ГП.

**Определение 1.6.** Если  $|q| < 1$ , тогда бесконечно убывающая ГП.

**Утверждение 1.2.** Формулы.

$$\begin{aligned} S_n &= \frac{b_{n+1} - b_1}{q - 1} = \frac{b_1 \cdot (q^n - 1)}{q - 1}. \\ \text{Для бесконечно убывающей ГП верно: } \frac{b_1}{b_2} &= \frac{S}{S - b_1}. \end{aligned}$$

# 2 Производная и интеграл.

**Определение 2.1.** Непрерывная функция —

1. Можно нарисовать не отрывая руки.
2.  $\forall \varepsilon \exists \delta$ .

3. Собпадают левый и правый предел. (Если пойти слева и справа, то придем в одну точку.)

**Утверждение 2.1.** Производная точки касания — наклон касательной ( $k = f'(x_0)$ ,  $b = f(x_0) - f'(x_0) \cdot x_0$ ).

**Утверждение 2.2.** Полное уравнение касательной —  $y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$ .

**Определение 2.2.** Уравнение нормали (перпендикуляра) —  $y = -\frac{1}{f'(x_0)}(x - x_0) + f(x_0)$ .

**Свойство 2.1.** 1.  $f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$ .

2.  $f'(x) = 0$ ;  $x_i$  - корни = подозрительный экстремум.

3.  $f''(x) > 0 \Leftrightarrow$  выпукла вниз.  $f''(x) < 0 \Leftrightarrow$  выпукла вверх.

4.  $(f^n(x))' = n \cdot f^{n-1}(x) \cdot f'(x)$ .

5.  $(f(x) + g(x))' = f'(x) + g'(x)$ .

6.  $(f(x) \cdot g(x))' = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$ .

7.  $\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{g^2(x)}$ ;  $\Leftrightarrow f(x) \cdot g^{-1}(x)$ .

8.  $(f(g(x)))' = f'(g(x)) \cdot g'(x)$ .

**Свойство 2.2.** 1.  $(\text{const})' = 0$ .

2.  $(k \cdot x^n)' = kn \cdot x^{n-1}$ .

3.  $(k_1(k_2x + k_3)^n)' = nk_1(k_2x + k_3)^{n-1} \cdot k_2$ .

4.  $(\sin x)' = \cos x$ .

5.  $(\cos x)' = -\sin x$ .

6.  $\operatorname{tg}'(x) = \frac{1}{\cos^2(x)}$ .

7.  $\operatorname{ctg}'(x) = -\frac{1}{\sin^2(x)}$ .

8.  $(e^{f(x)})' = e^{f(x)} \cdot f'(x)$ .

9.  $(a^x)' = a^x \cdot \ln a$ .

10.  $(e^x)' = e^x$

11.  $(\ln x)' = \frac{1}{x}$

12.  $(\log_a x)' = \frac{1}{x \cdot \ln a}$

### 3 Предел.

**Определение 3.1** (По Коши).  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists \delta : |x - x_0| < \delta, \text{ mo } |f(x) - A| < \varepsilon (f(x_0) = A).$

**Свойство 3.1.** 1.  $\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) \pm g(x)) = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \pm \lim_{x \rightarrow x_0} g(x).$

2.  $\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) \cdot g(x)) = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \cdot \lim_{x \rightarrow x_0} g(x).$

3.  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A, \lim_{y \rightarrow A} g(y) = B \Rightarrow \lim_{x \rightarrow a} g(f(x)) = B.$

4. Правило Лапитала.

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0, \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = 0 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

**Утверждение 3.1.**  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1.$

### 4 Показательная функция.

**Определение 4.1.**  $f(x) = a^x$ , где  $x$  — независимая переменная,  $a > 0$ ,  $a \neq 1$ .

**Определение 4.2.** Возведение в вещественную степень:  $a^x = \lim_{n \rightarrow \infty} a^{x_n}$ ,  $x_n$  — число  $x$  с  $n$  знаками после запятой  $\Leftrightarrow x_n = \frac{\lfloor x \cdot 10^n \rfloor}{10^n}$ .

**Свойство 4.1.** 1.  $D(x) = \mathbb{R}$ .

2.  $E(y) = (0; +\infty)$ .

3.  $\uparrow \downarrow$

- $a \in (0; 1)$ :  $\downarrow$
- $a \in (1; \infty)$ :  $\uparrow$

4. Ограничность. Снизу 0.

5. max / min. Нет.

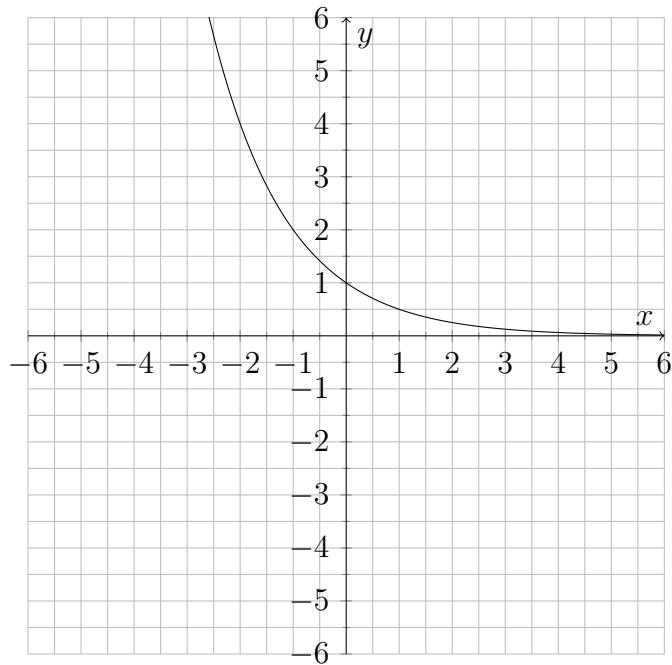
6. Асимптоты.  $y = 0$ .

7. Монотонность.  $\mathbb{R}$ .

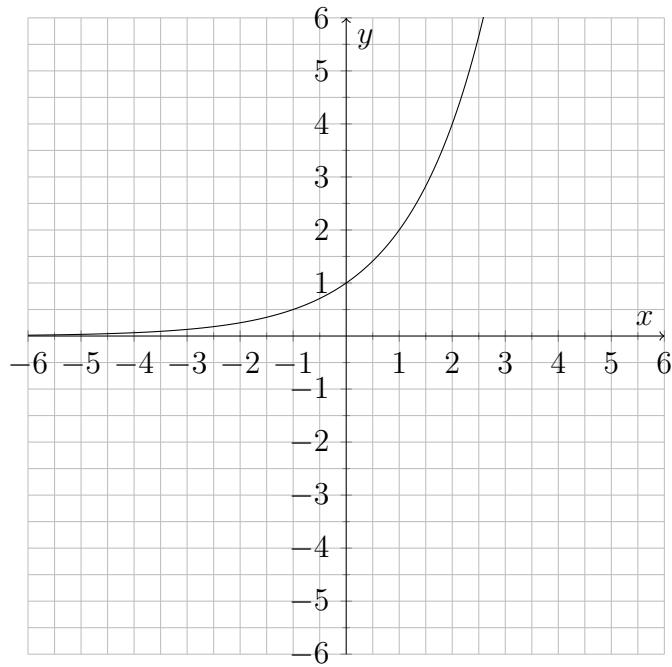
8. Вывуклость. Вывукла вниз.

9. График

- $a \in (0; 1)$



- $a \in (1; \infty)$



10. Четность. Общего вида.

## 5 Логарифм.

**Определение 5.1.**  $\log_a b$  — логарифм числа  $b$  по основанию  $a$ .  $\log_a b$  — такое число, что если возведем  $a$  в эту степень, то получим  $b$  ( $a^{\log_a b} = b$ );  $a > 0, a \neq 1, b > 0$ .

**Свойство 5.1.** 1.  $a^{\log_a b} = b$

2.  $\log_a(bc) = \log_a |b| + \log_a |c|$

$$3. \log_a\left(\frac{b}{c}\right) = \log_a|b| - \log_a|c|$$

$$4. \log_a b^r = r \log_a |b|$$

$$5. \log_{a^r} b = \frac{\log_{|a|} b}{r}$$

$$6. \log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}$$

$$7. \log_a b = \frac{1}{\log_b a}$$

$$8. \log_a b \cdot \log_c a = \log_c b$$

$$9. a^{\log_b c} = c^{\log_b a}$$

**Заметка 5.1.**  $\lg b = \log_{10} b$ ,  $\ln b = \log_e b$ .

## 6 Показательные уравнения.

**Определение 6.1** (Показательное уравнение.).  $a^x = b$ .

### 6.1 Методы решения.

1. Смотрим.
2. Вынос общего множителя за скобки.
3. Замена.
4. Однородные уравнения.

## 7 Неравенства.

**Заметка 7.1.** Думать об основании  $> 1$  и  $< 1$ .

## 8 Метод рационализации.

$$1. \log_{f(x)} g(x) > 0 = \log_{f(x)} 1$$

$$f(x) > 0, g(x) > 0, f(x) \neq 1$$

$$\begin{cases} f(x) > 1 \\ g(x) > 1 \end{cases} \Leftrightarrow (f(x) - 1)(g(x) - 1) > 0$$
$$\begin{cases} f(x) < 1 \\ g(x) < 1 \end{cases}$$
$$\log_{f(x)} g(x) > 0 \Rightarrow (f(x) - 1)(g(x) - 1) > 0$$

$$2. \log_{f(x)} g(x) - \log_{f(x)} h(x) > 0 \Rightarrow (f(x) - 1)(g(x) - h(x)) > 0$$

$$3. (a) \log_{f(x)} g(x) > 1 \Rightarrow (f(x) - 1)(g(x) - f(x)) > 0$$

$$(b) \log_{f(x)} g(x) > k \Rightarrow (f(x) - 1)(g(x) - f^k(x)) > 0$$

$$4. \log_{f(x)} g(x) - \log_{h(x)} g(x) > 0 \Rightarrow (g(x) - 1)(f(x) - 1)(h(x) - 1)(h(x) - f(x)) > 0$$

5. (a)  $f(x)^{g(x)} - 1 > 0 \Rightarrow g(x)(f(x) - 1) > 0$   
(b)  $f(x)^{g(x)} - k > 0 \Rightarrow (g(x) - \log_{f(x)} k)(f(x) - 1) > 0$
6.  $f(x)^{g(x)} - f(x)^{h(x)} > 0 \Rightarrow (f(x) - 1)(g(x) - h(x)) > 0$
7.  $f(x)^{g(x)} - h(x)^{g(x)} > 0 \Rightarrow g(x)(f(x) - h(x)) > 0$
8.  $|a| - |b| > 0 \Rightarrow (a - b)(a + b) > 0$