1 Последовательность.

$f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$
$f(n) =: f_n$
Опр. Последовательность называется ограниченной сверху, если $\exists M : |f_n| \leqslant M$. Снизу, если $\exists m : f_n \geqslant m$. f_n — ограниченная, если $\exists M : |f_n| \leqslant \forall n \in \mathbb{N}$.
Опр. $M_0 = supf_n$, если M_0 — верхняя грань и $\forall \varepsilon > 0$ $\exists n_0 : f_{n0} > M_0 - \varepsilon$. $m_0 = inff_n$, если m_0 — нижняя грань и $\forall \varepsilon > 0$ $\exists n_0 : f_{n0} < m_0 + \varepsilon$.
Аксиома вещественных чисел. Если множество X ограничено сверху, то $\exists supX$. Если f_n неограничено сверху, то $supf_n =: +\infty$. Если снизу, то $inff_n =: -\infty$.
Опр. f_n — бесконечно большая (бб), если $\forall \varepsilon > 0$ $\exists N = N(\varepsilon) : |f_n| > \frac{1}{\varepsilon}$ $\forall n \geqslant N$. f_n — не бб, $\exists \varepsilon > 0 : \forall N \exists n > N : |f_n| \leqslant \frac{1}{\varepsilon}$.
Опр. f_n — бесконечно малая (бм), если $\forall \varepsilon > 0$ $\exists N = N(\varepsilon) : |f_n| < \varepsilon$ $\forall n \geqslant N$.
Лемма. f_n — бм $\Rightarrow f_n$ — ограничена.
Доказательство:
Пусть $\varepsilon = 1$, тогда $\exists N : |f_n| \leqslant 1$ $\forall n \geqslant N$
$M := max|f_1|, \dots, |f_{N-1}|, 1$, тогда $|f_n| \leqslant M$ $\forall n \in N$.
Лемма.

a) f_n — бб $\Rightarrow \frac{1}{f_n}$ — бм

b) f_n — бм $(f_n \neq 0) \Rightarrow \frac{1}{f_n}$ — бб

Лемма. f_n — неограниченная последовательность, тогда существует бб подпоследовательность f_{nk}.
Доказательство:
$\exists n_1 : |f_{n1} > 1|$,
$\exists n_2 > n_1 : |f_{n2} > 2|$,
$\exists n_3 > n_2 : |f_{n3}| > 3$,
$\vdots$,
$\exists n_1 < n_2 < \dots < n_k < \dots$
$|f_{nk}| > k \Rightarrow f_{nk}$ — бб.
Лемма.

a) бм + бм = бм

b) бм · C = бм

c) бм · бм = бм

d) бб · C = бб, $C \neq 0$

e) бб · бб = бб