Содержание

1 Теория групп.

Определение 1.1. *Группа — множество с одной операцией* $*: G \times G \to G$ *со следующими свойствами:*

1. $a * (b * c) = (a * b) * c$
2. $\exists e$: $a * e = e * a = a$
3. $\forall a\ \exists a^{-1}$: $a * a^{-1} = a^{-1} * a = e$

Пример 1.1.
- $(\mathbb{Z}; +)$
- $(\mathbb{Q}; +)$
- $(\mathbb{R}; +)$
- $(\mathbb{C}; +)$
- $(V; +)$
- $(\mathbb{R}_+; \cdot)$
- $(\mathbb{R} \setminus \{0\}; \cdot)$
- $(\mathbb{Z}_n; +)$

Определение 1.2. *Пусть* G *— группа,* $H \subset G$. *Говорим, что* H *является подгруппой (пишем* $H < G$*), если* H *является группой относительно операции в* G. *Чтобы проверить, что* H *является подгруппой, необходимо убедиться, что произведение двух элементов из* H *принадлежит* H, *и элементы, обратные к* H, *тоже лежат в* H.

Теорема 1.1 (Кэли). *Любая группа* G *является подгруппой в группе подстановок, а именно* S_G.

Определение 1.3. *Абелева группа — группа с коммутативностью.*

Определение 1.4. *Говорят, что группа* G *порождается элементами* $\{x_i\}$, *если любой элемент из* G *можно представить как произведение нескольких* x_i *и обратных к ним. Группа называется циклической, если она порождена одним элементом.*

Теорема 1.2. *Конечная циклическая группа изоморфна* $(\mathbb{Z}_n, +)$.

Определение 1.5. *Пусть* G *— группа,* $H < G$. *Введем два отношения эквивалентности на* G: $x \sim_1 y$ *если* $xy^{-1} \in H$, $x \sim_2 y$ *если* $x^{-1}y \in H$.

Утверждение 1.1. $\sim_1$ *и* $\sim_2$ *совпадают в абелевой группе.*

Заметка 1.1. *Классы эквивалентности по отношению* $\sim_1$ *называются левыми смежными классами; класс элемента* x *обозначается* xH. *Классы эквивалентности по* $\sim_2$ *— правые смежные классы, обозначаются* Hx.

Определение 1.6. *Пусть теперь группа* G *конечна,* $H < G$. *Количество классов эквивалентности* $\sim_1$ *называется индексом* G *по* H *и обозначается* $[G : H]$.

Теорема 1.3 (Лагранжа). $|G| = |H| \cdot [G : H]$.

Определение 1.7. *Пусть $x \in G$. Порядком элемента x называется наименьшее натуральное число n, такое что $x^n = e$, где e — нейтральный элемент. Обозначение: $ord(x)$. Если такого n не существует, то пишем $ord(x) = +\infty$.*

Определение 1.8. *Пусть $X, Y \subset G$ — подмножества группы. Их произведением будем называть множество $\{xy | x \in X, y \in Y\}$.*

Определение 1.9. *Полная линейна группа $GL(n, F)$ — это множество всех квадратных матриц размера $n \times n$ с элементами из поля F, которые являются обратимыми ($\det \neq 0$), вместе с операцией матричного умножения.*

Определение 1.10. *Специальная линейная группа $SL(n, F)$ — это подгруппа полной линейной группы, состоящая из всех матриц с определителем, равным 1. То есть это множество всех матриц A размера $n \times n$ над полем F, таких что $\det(A) = 1$.*

Определение 1.11. *Специальная ортогональная группа $SO(n, F)$ — группа из ортогональных матриц. Матрица A называется ортогональной, если $A^T \times A = A \times A^T = E$.*

Утверждение 1.2. *Пусть X — произвольное множество. Тогда множество всех биекций $f : X \to X$ образуют группу относительно композиции. Эту группу обозначают S_X. Если $X = \{1, 2, \dots, n\}$, то S_X обозначают S_n — группа подстановок.*

1.1 Таблица Кэли.

Определение 1.12. *Пусть G — конечная группа порядка n. Её таблицей Кэли (таблицей умножения) будем называть таблицу $(n+1) \times (n+1)$ (левый столбец и левая строка считаются нулевыми и служат лишь для нумерации). В нулевом столбце и в нулевой строке стоят все элементы группы в одном и том же порядке. На пересечении строки и столбца этой таблицы будем ставить произведение соответствующих элементов в нулевом столбце и в нулевой строке (слева пишется элемент, задающий строку, справа — столбец).*

Определение 1.13. *Напомним, что перестановкой мы будем называть биекцию $f : \{1, 2, \dots, n\} \to \{1, 2, \dots, n\}$. Умножение перестановок — композиция биекций. Перестановки записываются в две строчки: в первой — числа от 1 до n (как правило, в порядке возрастания, но не обязательно), а во второй строчке под числом k стоит число $f(k)$.*

1.2 Группы.

Теорема 1.4. *G — группа; $H < G$. Равносильно:*

1. $\forall x \; xH = Hx$
2. $\forall x \; xH \subset Hx$
3. $\forall x \; xH \supset Hx$
4. $\forall x \; xHx^{-1} = H$
5. $\forall x \; xHx^{-1} \subset H$
6. $\forall x \; xHx^{-1} \supset H$
7. $\forall x \in G \; \forall h \in H \; x^{-1}hx \in H$

Определение 1.14. *Такая H называется нормальной подгруппой. Обозначается $H \lhd G$.*

Определение 1.15. xhx^{-1} *называется сопряженным элементом* h.

Утверждение 1.3. $h \sim x^{-1}hx$ *— отношение эквивалентности.*

Определение 1.16. $H \lhd G$. *Класс смежности по* H *можно перемножать.*

Определение 1.17. *Множество классов смежности образуют группу. Это называется фактор-группой* G *по* H. G/H.

Определение 1.18. *Простая группа — группа без нетривиальных нормальных подгрупп.*

1.3 Перестановки.

Определение 1.19. *Перестановкой конечного множества* M *называется биекция* $\pi : M \to M$. *Множество всех перестановок множества* M *обозначается символом* $S(M)$. *Произведением перестановок* π *и* σ *называется перестановка* $\sigma \cdot \pi$, *соответствующая биекции* $x \mapsto \sigma(\pi(x))$.

Определение 1.20. *Пусть* $\pi \in S(M)$. *Орбитой элемента* $a \in M$ *называется множество* $orb_\pi(a) = \{a, \pi(a), \pi^2(a), \dots\}$. *Порядком элемента a называется мощность его орбиты:* $ord(a) = |orb(a)|$.

Определение 1.21. *В предыдущей серии показано, что любая перестановка является произведением циклов. Количество циклов в перестановке обозначается* $cycl(\pi)$. *Если перестановка разбивается на циклы, длины которых —* $l_1, \dots, l_m$, *то* $(l_1, \dots, l_m)$ *называется цикленным типом перестановки* π. *Перестановка, у которой цикленный тип* $(2, 1, 1, \dots, 1)$, *называется транспозицией.*

Определение 1.22. *Перестановка* π *называется четной или нечетной в зависимости от четности числа* $n + cycl(\pi)$. *Знаком перестановки называется число* $sign(\pi) = (-1)^{n+cycl(\pi)}$.

Определение 1.23. *Хотим* $\forall$ *перестановки называть ее четной или нечетной: ЧЧ = Ч, НН = Ч, ЧН = Н, НЧ = Н и* $\exists$ *Ч и НЧ перестановки.*

Определение 1.24. *Инверсия:* $\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & i & \dots & j & \dots & n \\ a_1 & a_2 & \dots & a_i & \dots & a_j & \dots & n \end{pmatrix}$. *Пара* (i, j) *называется инверсией, если* $i < j$ *и* $a_i > a_j$.

Определение 1.25. *Перестановка с четным количеством инверсий — четная, с нечетным — нечетная.*

Заметка 1.2. $\forall$ *перестановка — произведение транспозиций. Четное количество транспозиций* $\Leftrightarrow$ *четная перестановка.*

Определение 1.26. *Четная перестановка* $=$ $(n +$ *количество циклов*$) \mod 2$.

Теорема 1.5. *Перестановки сопряжены* $\Leftrightarrow$ *совпадает их циклический тип.*

1.4 Центр группы.

Определение 1.27. G *— группа. Центр* G: $Z(G) := \{g \in G | gh = hg, \forall g \in G\}$.

Утверждение 1.4. $Z(S_n) = \{e\}$.

Теорема 1.6. $Z(G) \lhd G$.

Утверждение 1.5. $Z(GL(\mathbb{R})) = \begin{pmatrix} \alpha & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \alpha & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \alpha \end{pmatrix}$

Определение 1.28 (Коммутатор)**.** $x, y \in G$. $[x, y] := xyx^{-1}y^{-1}$.

Утверждение 1.6. $[x, y]^{-1} = [y, x]$.

Заметка 1.3. *Произведение коммутаторов не обязательно является коммутатором.*

Определение 1.29 (Коммутант)**.** $[G, G] := \langle [x, y] \rangle$.

Теорема 1.7. *1.* $[G, G] \lhd G$.

2. $G/[G; G]$ *— абелева.*

3. G/H *— абелева* $\Rightarrow H \supset [G, G]$.

Утверждение 1.7. $\alpha^{-1}[x, y]\alpha = [\alpha^{-1}x\alpha, \alpha^{-1}y\alpha]$.

Утверждение 1.8. $\alpha^{-1}[x_1, y_1][x_2, y_2] \ldots [x_k, y_k]\alpha \in [G, G]$.

Теорема 1.8 (Галуа.)**.** A_n *простая, если* $n \geqslant 5$.

1.5 Гомоморфизм группы.

Определение 1.30. $(G, \cdot)$; $(H; *)$ *— группа.* $f : G \to H$ *— отображение.* f *называется гомоморфизмом, если* $\forall a, b \in G$ $f(a \cdot b) = f(a) * f(b)$.

Определение 1.31. $f : G \to H$ *— гомоморфизм.* f *называется:*

- *Эпиморфизмом, если* f *— сюръекция.*
- *Мономорфизм, если* f *— инъекция.*
- *Изоморфизм, если* f *— биекция.*

$G \simeq H$*, если существует изоморфизм* $f : G \to H$.

1.6 Кватернионы.

$\mathbb{H} := \{a + bi + cj + dk | a, b, c, d \in \mathbb{R}\}$.

$\times$	i	j	k
i	-1	$k = -ji$	$-j = -ki$
j	$-k = -ij$	-1	$i = -kj$
k	$j = -ik$	$-i = -jk$	-1

1.6.1 Группа Кватернионов.

$\mathbb{H} = \{\pm 1, \pm i, \pm j, \pm k\}$.

Лемма 1.1. $a_1, a_2, \ldots, a_{2n}$ *— строка из символов* j *и* k*. Если перевернуть строку и заменить* $j \leftrightarrow k$*, то произведение не изменится.*

1.7 Теоремы об изоморфизме.

1.7.1 Первая теорема об изоморфизме.

Теорема 1.9. *Пусть* $f : G \to H$ *— гомоморфизм групп. Тогда* $Im(f) \simeq G/Ker(f)$.

1.7.2 Вторая теорема об изоморфизме.

Теорема 1.10. *Пусть G — группа, H и K — ее подгруппы, причем K нормальна. Тогда $HK/K \simeq H/(H \cap K)$.*

1.7.3 Третья теорема об изоморфизме.

Теорема 1.11. *Пусть G — группа, H и K — ее нормальные подгруппы, причем $K \subset N$. Тогда $(G/K)/(N/K) \simeq G/N$.*

1.8 Группы автоморфизмов графа.

Определение 1.32. *Автоморфизмом графа Γ называется биекция множества его вершин на себя, так что пара вершин смежны тогда и только тогда, когда смежны их образы. Автоморфизмы графа образуют группу относительно композиции. Обозначается $Aut(\Gamma)$.*

Теорема 1.12 (Фрухта)**.** *Для любой группы G найдется граф, группа автоморфизмов которого в точности G.*

1.9 Действие группы на множестве.

Определение 1.33. *G — группа, M — множество. Действием (левое) называем G на M называем $\cdot\colon G \times M \to M\colon (g;x) \mapsto g \cdot x$ или $g(x)$.*

Свойство 1.1.

1. *$(g \cdot h) \cdot x = g \cdot (h \cdot x)$.*
2. *$e \cdot x = x$.*

Следствие 1.1. *$gx = y \Rightarrow g^{-1}y = x$.*

Определение 1.34 (2)**.** *Действие G на M — это гомоморфизм $F : G \to S_M$ (группа перестановок M). $g \cdot x := F(g)(x)$. Наоборот: есть $\cdot\colon G \times M \to M\colon F(g)(x) := g(x)$.*

Определение 1.35. *x неподвижен под действием g, если $g \cdot x = x$. Орбита x: $orb(x) := \{g \cdot x | g \in G\}$.*

Утверждение 1.9. *Орбиты либо совпадают, либо не пересекаются.*

Определение 1.36. *$x \in M$; стабилизатор x — это $st(x) := \{g \in G | gx = x\}$.*

Утверждение 1.10. *$st(x)$ — подгруппа в G.*

Определение 1.37. *$st(g) := \{x | gx = x\}$ — стабилизатор g.*

Лемма 1.2 (Бермсайда)**.** *G — конечная группа; M — конечная $\Rightarrow$ количество орбит $= \dfrac{1}{|G|}\sum\limits_{g \in G} |st(g)| = \dfrac{1}{|G|}\sum\limits_{x \in M} |st(x)|$, тк $\sum\limits_{g \in G} |st(g)| = \sum\limits_{x \in M} |st(x)| = \#\{(g, x) | gx = x\}$.*

2 Метрические пространства.

Определение 2.1. M — *множество;* ρ: $M \times M \to \mathbb{R}$.

1. $\rho(x, y) \geqslant 0$; $\rho(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$
2. $\rho(x, y) = \rho(y, x)$
3. $\rho(x, z) \leqslant \rho(x, y) + \rho(y, z)$

(M, ρ) — *метрическое пространство.*

Определение 2.2. $B(x_0, r) := \{x \in M | \rho(x, x_0) < r\}$

Определение 2.3. $A \subset M$. *A называется открытым, если* $\forall x_0 \in A\, \exists \varepsilon : B(x_0, \varepsilon) \subset A$.

Определение 2.4. *f называется замкнутым, если $X \setminus f$ открыто.*

Теорема 2.1.

1. $\{U_i\}_{i \in I}$ — *открыто* $\Rightarrow \bigcup\limits_{i \in I}$ — *открыто.*
2. $\{U_i\}_{i \in I}^n$ — *открыто* $\Rightarrow \bigcup\limits_{i \in I}^n$ — *открыто.*
3. $\emptyset; M$ — *открыты.*

Теорема 2.2.

1. $\{F_i\}_{i \in I}$ — *замкнуто* $\Rightarrow \bigcap\limits_{i \in I} F_i$ — *замкнуто.*
2. $\{F_i\}_{i \in I}^n$ — *замкнуто* $\Rightarrow \bigcap\limits_{i \in I}^n F_i$ — *замкнуто.*
3. $\emptyset; M$ — *замкнуто.*

Определение 2.5 (Топологическое пространство)**.** *Множество X с множеством $\Omega \subset 2^X$ ($A \in \Omega$ — открытые подмножества):*

1. $\bigcup\limits_{i \in I} U_i \in \Omega$, *если* $\forall U_i \in \Omega$
2. $U_1, \ldots, U_n \in \Omega \Rightarrow \bigcap\limits_{i=1}^n U_i \in \Omega$
3. $\emptyset, X \in \Omega$