ДЗ: Метрические пространства

Задача 1. *Докажите, что ∂A является замкнутым подмножеством.*

Решение. *Докажем, что дополнение $X \setminus \partial A$ открыто. Пусть $x \in X \setminus \partial A$. По определению границы, это означает, что существует $r > 0$, такой что шар $B(x, r)$ либо целиком лежит в A, либо целиком лежит в $X \setminus A$. В обоих случаях $B(x, r) \cap \partial A = \emptyset$, то есть $B(x, r) \subset (X \setminus \partial A)$. Так как для любой точки x из дополнения существует окрестность, лежащая в дополнении, множество $X \setminus \partial A$ открыто. Следовательно, ∂A замкнуто.*

Задача 2. *Докажите, что A замкнуто тогда и только тогда, когда $\partial A \subset A$.*

Решение. ($\Rightarrow$) *Пусть A замкнуто. Тогда $X \setminus A$ открыто. Предположим, что существует $x \in \partial A$, такой что $x \notin A$. Тогда $x \in X \setminus A$. Так как $X \setminus A$ открыто, существует $\varepsilon > 0$, такой что $B(x, \varepsilon) \subset X \setminus A$. Значит, $B(x, \varepsilon) \cap A = \emptyset$, что противоречит определению граничной точки. Следовательно, $\partial A \subset A$.*

($\Leftarrow$) *Пусть $\partial A \subset A$. Рассмотрим произвольную точку $y \in X \setminus A$. Так как $y \notin A$, то $y \notin \partial A$. Значит, y — внешняя точка (не граничная и не внутренняя). По определению, существует $r > 0$, такой что $B(y, r) \cap A = \emptyset$, то есть $B(y, r) \subset X \setminus A$. Таким образом, $X \setminus A$ открыто $\Rightarrow$ A замкнуто.*

Задача 3. *Рассмотрим $\rho_1(x, y) = \min\{1, \rho(x, y)\}$.*

(a) Докажите, что ρ_1 является метрикой.

(b) Докажите, что множество открыто в $(X, \rho) \Leftrightarrow$ открыто в (X, ρ_1).

Решение. *(a) Аксиомы 1 (положительность) и 2 (симметрия) очевидны. Проверим неравенство треугольника:*

$$\min(1, \rho(x, z)) \leqslant \min(1, \rho(x, y)) + \min(1, \rho(y, z)).$$

- *Если $\rho(x, y) + \rho(y, z) \geqslant 1$, то правая часть неравенства $\geqslant 1$, а левая всегда $\leqslant 1$. Верно.*
- *Если $\rho(x, y) + \rho(y, z) < 1$, то $\rho(x, y) < 1$ и $\rho(y, z) < 1$. Тогда $\rho_1(x, z) \leqslant \rho_1(x, y) + \rho_1(y, z)$. Верно.*

(b) Заметим, что для любого $r \in (0, 1)$ выполняется $B^{\rho}(x, r) = B^{\rho_1}(x, r)$. Пусть U открыто в (X, ρ). Тогда $\forall x \in U \exists \varepsilon > 0 : B^{\rho}(x, \varepsilon) \subset U$. Выберем $\delta = \min(0.5, \varepsilon)$. Тогда $B^{\rho_1}(x, \delta) = B^{\rho}(x, \delta) \subset U$. Значит, U открыто в (X, ρ_1). Обратное доказывается аналогично.

Задача 4. *Существуют ли три открытых подмножества с общей границей?*

Решение. ***Да, существуют.*** *Пример:* $(0, 1); (-\infty, 0) \cup (1, \infty); \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$.