Содержание

1 Последовательность.

$f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$
$f(n) =: f_n$

Определение 1.1. *Последовательность называется ограниченной сверху, если* $\exists M : |f_n| \leqslant M$*. Снизу, если* $\exists m : f_n \geqslant m$*.* f_n *— ограниченная, если ограничена сверху и снизу.*

Определение 1.2. $M_0 = \sup f_n$*, если* M_0 *— верхняя грань и* $\forall \varepsilon > 0\ \exists n_0 : f_{n0} > M_0 - \varepsilon$*.* $m_0 = \inf f_n$*, если* m_0 *— нижняя грань и* $\forall \varepsilon > 0\ \exists n_0 : f_{n0} < m_0 + \varepsilon$*.*

Аксиома 1.1 (Вещественных чисел)**.** *Если множество* X *ограничено сверху, то* $\exists supX$*. Если* f_n *неограничено сверху, то* $supf_n =: +\infty$*. Если снизу, то* $inf f_n =: -\infty$*.*

Определение 1.3. f_n *— бесконечно большая (бб), если* $\forall \varepsilon > 0\ \exists N = N(\varepsilon) : |f_n| > \frac{1}{\varepsilon}\ \forall n \geqslant N$*.* f_n *— не бб,* $\exists \varepsilon > 0 : \forall N \exists n > N : |f_n| \leqslant \frac{1}{\varepsilon}$*.*

Определение 1.4. f_n *— бесконечно малая (бм), если* $\forall \varepsilon > 0\ \exists N = N(\varepsilon) : |f_n| < \varepsilon\ \forall n \geqslant N$*.*

Лемма 1.1. f_n *— бм* $\Rightarrow f_n$ *— ограничена.*

Доказательство. Пусть $\varepsilon = 1$, тогда $\exists N : |f_n| \leqslant 1\ \forall n \geqslant N$.
$M := max|f_1|, \ldots, |f_{N-1}|, 1$, тогда $|f_n| \leqslant M\ \forall n \in N$. □

Лемма 1.2. *a)* f_n *— бб* $\Rightarrow \frac{1}{f_n}$ *— бм*

b) f_n *— бм (*$f_n \neq 0$*)* $\Rightarrow \frac{1}{f_n}$ *— бб*

Лемма 1.3. f_n *— неограниченная последовательность, тогда существует бб подпоследовательность* f_{nk}*.*

Доказательство. $\exists n_1 : |f_{n1} > 1|$,
$\exists n_2 > n_1 : |f_{n2} > 2|$,
$\exists n_3 > n_2 : |f_{n3}| > 3$,
$\vdots$,
$\exists n_1 < n_2 < \cdots < n_k < \ldots$
$|f_{nk}| > k \Rightarrow f_{nk}$ — бб. □

Лемма 1.4. *a) бм + бм = бм*

b) бм $\cdot\ C =$ *бм*

c) бм $\cdot$ *бм = бм*

d) бб $\cdot\ C =$ *бб,* $C \neq 0$

e) бб $\cdot$ *бб = бб*

1.1 Предел последовательности.

a_n — последовательность.

Определение 1.5. $a = \lim\, a_n$*, если* $\forall \varepsilon > 0\ \exists N : |a_n - a| < \varepsilon\ \forall n \geqslant N$*.*

Определение 1.6. *Эпсилон окрестность:* $U_\varepsilon(a) := (a-\varepsilon; a+\varepsilon)$*. Выколотая эпсилон окрестность:* $\mathring{U}_\varepsilon(a) := U_\varepsilon(a) \backslash \{a\}$*.*

$\varepsilon_1 < \varepsilon_2 \Rightarrow U_{\varepsilon 1}(a) \subset U_{\varepsilon 2}(a), a \in \overline{\mathbb{R}}$.

Определение 1.7. $\mathbb{R} \cup \{\pm\infty\} = \overline{\mathbb{R}}$ *— расширенная числовая прямая.*

Определение 1.8. $\varepsilon > 0\ U_\varepsilon(+\infty) = (\frac{1}{\varepsilon}; +\infty)$*;* $U_\varepsilon(-\infty) = (-\infty; -\frac{1}{\varepsilon})$*.*

$\lim |a_n| = +\infty \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0\ \exists N(\varepsilon) : |a_n| > \frac{1}{\varepsilon}$.
Если a_n — бб $\Leftrightarrow \lim |a_n| = +\infty$.
Если a_n — бм $\Leftrightarrow \lim |a_n| = 0$.

Утверждение 1.1. $\lim a_n = a \Leftrightarrow \exists$ *бм последовательность* d_n*, такая что* $a_n = a + d_n$*.*

Утверждение 1.2. *Если предел последовательности существует, то он единственный.*

Доказательство. $\exists a < b$ и $a = \lim a_n$, $b = \lim a_n$. Тогда $\varepsilon := \frac{b-a}{42}$:
$\exists N_1 : a_n \in U_\varepsilon(a) \forall n \geqslant N_1$
$\exists N_2 : a_n \in U_\varepsilon(b) \forall n \geqslant N_2$
$\Rightarrow a_n \in (U_\varepsilon(a) \cap U_\varepsilon(b)) = \emptyset\ \forall n \geqslant \max\{N_1, N_2\}$!?!. □

Лемма 1.5 (Предельный переход в неравенства)**.** $a_n \leqslant b_n\ \forall n \geqslant N_0$. *Пусть* $\exists \lim a_n = a$; $\lim b_n = b$, $a, b \in \overline{\mathbb{R}}$. *Тогда* $a \leqslant b$.

Доказательство. Пусть $a > b$. Тогда $\varepsilon := \frac{a-b}{42}$:
$\exists N_1 : a_n \in U_\varepsilon(a) \forall n \geqslant N_1$
$\exists N_2 : a_n \in U_\varepsilon(b) \forall n \geqslant N_2$
$\Rightarrow a_n > b_n\ \forall n \geqslant \max\{N_1, N_2\}$!?!. □

Лемма 1.6 (О сжатой последовательности)**.** *Пусть* $a_n \leqslant b_n \leqslant c_n\ \forall n \geqslant N_0$ *и* $\exists \lim a_n = \lim c_n = a \in \overline{\mathbb{R}}$, *тогда* $\exists \lim b_n = a$.

Доказательство. $\varepsilon > 0$:
$\exists\ a_n \in U_\varepsilon,\ n \geqslant N_1$
$\exists\ c_n \in U_\varepsilon,\ n \geqslant N_2$
$\Rightarrow b_n \in U_\varepsilon : \forall n \geqslant \{N_1, N_2, N_0\} =: N \Rightarrow a = \lim b_n$ по определению. □

Лемма 1.7 (Об отделимости от нуля)**.** *Пусть* $\exists \lim a_n = a > 0$. *Тогда* $\exists\ N : a_n > \frac{a}{2} > 0,\ \forall n \geqslant N$.
Следствие. Если $\lim a_n \neq 0 \Rightarrow \frac{1}{a_n}$ *ограничена* ($a_n \neq 0$).

Доказательство. $\lim a_n = a > 0$
$\exists N_1 : a_n > \frac{a}{2} \Rightarrow 0 < \frac{1}{a_n} < \frac{2}{a}\ \forall n \geqslant N_1$
$\min\{a_1, \ldots, a_{N-1}, \frac{a}{2}\} \leqslant \frac{1}{a_n} \leqslant \max\{a_1, \ldots, a_{N-1}, \frac{2}{a}\}$ □

Теорема 1.1 (Арифметические свойства предела)**.** *Пусть* $\lim a_n = a$, $\lim b_n = b$; $a, b \in \overline{\mathbb{R}}$. *Тогда:*

1. $\lim(a_n + b_n) = a + b$, *кроме случаев* $+\infty + (-\infty)$, $-\infty + (+\infty)$
2. $\lim(k a_n) = ka$, *кроме случая* $0 \cdot (\pm\infty)$
3. $\lim(a_n \cdot b_n) = ab$, *кроме случая* $0(\pm\infty)$
4. $\lim \frac{a_n}{b_n} = \frac{a}{b}$, *кроме случаев* $\frac{0}{0}$, $\frac{\infty}{\infty}$

Доказательство. $a, b \in \mathbb{R}$. $a_n = a + \alpha_n$, $b_n = b + \beta_n$; α_n, β_n — бм.

1. $a_n + b_n = (a + b) + (\alpha_n + \beta_n) \Leftrightarrow \lim(a_n + b_n) = a + b$.
2. Аналогично.
3. $a_n b_n = (a + \alpha_n)(b + \beta_n) = ab + \alpha_n b + \beta_n a + \alpha_n + \beta_n$
4. Если $b \neq 0$ $\frac{1}{b_n}$ — ограниченна
   $\frac{a_n}{b_n} - \frac{a}{b} = \frac{a+\alpha_n}{b+\beta_n} - \frac{a}{b} = \frac{\alpha_n b - \beta_n a}{b_n b} = \frac{1}{b} \cdot \frac{1}{b_n} \cdot (\alpha_n b - \beta_n a)$
   Если $b = 0 \Rightarrow b_n$ бм $\Rightarrow \frac{1}{b_n}$ — бб $\Rightarrow a_n \cdot \frac{1}{b_n}$ = ограниченная бб

□

Определение 1.9. *Линейное пространство — множество, сумма двух элементов которого лежит в этом множестве и элемент с коэффициентом лежит в этом множестве.*

Определение 1.10. *Последовательность называется возвратной, если* $a_n = \beta_{n-1} a_{n-1} + \beta_{n-2} a_{n-2} + \cdots + \beta_{n-k} a_{n-k}$; βi — *фиксированные коэффициенты.*

$a_n^{(1)}, a_n^{(2)} \Rightarrow \forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}\ \lambda a_n^{(1)} + \mu a_n^{(2)}$ тоже удовлетворяет (x).
$a_n := t^n$
$t^k = \beta_{n-1} t^{k-1} + \cdots + \beta_{n-k}$
t_0 — простой корень, то t_0^n
t_0 — корень $(m) \Rightarrow t_0^n; n t_0^n; n^2 t_0^n; \ldots; n^{m-1} t_0^n$

Теорема 1.2. 1. *Пусть* a_n *возрастает и ограничена сверху. Тогда* $\exists \lim a_n = \sup a_n$

2. *Пусть a_n убывает и ограничена снизу. Тогда $\exists \lim a_n = \inf a_n$*

Доказательство. fix $\varepsilon > 0$. Так как a_n — ограничена, то $\exists M \sup a_n \in \mathbb{R}$; И $\exists N : a_N > M - \varepsilon$.
Тогда $\begin{cases} a_n \geqslant M - \varepsilon & \forall n \geqslant N, \text{ так как } a_n \uparrow \\ a_n \leqslant M < M + \varepsilon \end{cases} \Rightarrow \exists N : |a_n - M| < \varepsilon \forall n \geqslant N \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} a_n = M$ по определению. □

Определение 1.11. *Найти предел последовательности $a_n = (1 + \frac{1}{n})^n$.*

$b_n = (1 + \frac{1}{n})^{n+1}; b_1 = 4, b_2 = 3, ...\ b_n \downarrow$
$b_n \geqslant 1$
Докажем, что b_n убывает.
$\frac{b_n}{b_{n+1}} = \frac{(\frac{n+1}{n})^{n+1}}{(\frac{n+2}{n+1})^{n+2}} = \frac{n+1}{n})^{n+1} \cdot \frac{n+1}{n+2})^{n+2} = \frac{n+1}{n+2} \cdot (\frac{n^2+2n+1}{n^2+2n})^{n+1} = \frac{n+1}{n+2} \cdot (1 + \frac{1}{n^2+2n})^{n+1}$ *(неравенство Бернули)*
$> \frac{n+1}{n+2} \cdot (1 + \frac{n+1}{n^2+2n}) = \frac{(n+1)(n^2+3n+1)}{(n+2)(n^2+2n)} = \frac{n^3+4n^2+4n+1}{n^3+4n^2+4n} > 1.$
$a_n = \frac{b_n}{(1+\frac{1}{n})}$
$\lim\limits_{n\to\infty} = \lim \frac{b_n}{1+\frac{1}{n}} = \frac{\lim b_n}{\lim(1+\frac{1}{n})} = \lim b_n$ — *существует.*
$e := \lim\limits_{n\to\infty}(1 + \frac{1}{n})^n \approx 2.718281828459045...$

Теорема 1.3 (Вейерштрасса)**.** *Пусть последовательность a_n ограничена. Тогда существует сходящаяся подпоследовательность.*

Доказательство. $|a_n| \leqslant M$
$[-M = \alpha_1; M = \beta_1]$. α_2 — середина. $a_1 = x_1 \in [\alpha_1; \alpha_2]$.
$[\alpha_2; \beta_2]$. β_3 — середина. $x_2 = a_{\min n} \in [\alpha_2; \beta_3]$.
И тд.
α_k неубывающая и ограниченная сверху. $\exists \lim \alpha_k = \alpha$. β_k неубывающая и ограниченная сверху. $\exists \lim \beta_k = \beta$.
$\beta - \alpha = \lim\limits_{k\to\infty}(\beta_k - \alpha_k) = \lim\limits_{k\to\infty} \frac{2M}{2^{k-1}} = 0.$
По построению x_k — подпоследовательность и $\alpha_k \leqslant x_k \leqslant \beta_k \Rightarrow \exists \lim x_k$. □

Определение 1.12. *Последовательность называется фундаментальной (или последовательностью Коши), если $\forall \varepsilon > 0\ \exists N(\varepsilon)$: $|a_n - a_k| < \varepsilon\ \forall n, k \geqslant N$.*

Утверждение 1.3. *Пусть $\exists \lim a_n = a \in \mathbb{R}$. Тогда $\{a_n\}$ фундаментальная.*

Доказательство. fix $\varepsilon > 0 \exists N : |a_n - a| < \frac{\varepsilon}{2} \forall n \geqslant N$. Тогда $\forall n, k \geqslant N$ $|a_n - a_k| = |(a_n - a) + (a - a_k)| \leqslant |a_n - a| + |a_k - a| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$. □

Теорема 1.4 (Коши)**.** *Пусть $\{a_n\}$ фундаментальная последовательность. Тогда $\exists \lim a_n$.*

Доказательство. 1) (!)$\{a_n\}$ ограничена.
$\varepsilon = 1$: $\exists N$: $|a_n - a_k| \leqslant \varepsilon\ \forall n, k \geqslant N \Rightarrow a_k \in [a_{N-1}; a_{N+1}] \forall k \geqslant N$
$M = max\{|a_1|, |a_2|, \dots, |a_N + 1|\} \Rightarrow |a_n| \leqslant M \forall n.$

2) Тогда по теореме Вейерштрасса $\exists a_{n_k}$ — подпоследовательность; $\lim\limits_{n\to\infty} a_{n_k} = a$.

3) fix $\varepsilon > 0$. $\exists N_1 : |a_{n_k} - a| < \frac{\varepsilon}{2}\ \forall n_k \geqslant N_1$
$\exists N_2 : |a_m - a_n| < \frac{\varepsilon}{2}\ \forall m, n \geqslant N_2$
Пусть $n \geqslant max\{N_1, N_2\}$ $\exists n_k \geqslant m$.
$|a_m - a| = |(a_m - a_{n_k}) + (a_{n_k} - a)| \leqslant |a_n - a_{n_k}| + |a_{n_k} - a| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \Rightarrow a = \lim\limits_{m\to\infty} a_m.$

□

2 Возведение в вещественную степень.

$n \in \mathbb{N}$; $x^n = x \cdot x \cdot ... \cdot x$, n раз.
$x^{-n} = \frac{1}{x^n}$, $x \neq 0$
$x^0 := 1$
$\sqrt[n]{x} = x^{\frac{1}{n}}$
x^p, $p \in \mathbb{Q}$, $x \geqslant 0$ $(p > 0)$ или $x > 0$ $(p \geqslant 0)$
$\underline{\text{fix } a > 0,\ x \in \mathbb{R}}$
$a^x := \lim\limits_{n\to\infty} a^{x_n}$, где $\{x_n\}$ последовательность, такая что $x_n \in \mathbb{Q}$, $\lim\limits_{n\to\infty} x_n := x$.
Корректность определения.

1. $x \in \mathbb{Q}$. Докажем, что a^x совпадает со старым определением.
   $x \in \mathbb{Q}$, берем $x_n = x \Rightarrow a^x = a^x$

2. Берем произвольную последовательность $\{x_n\}$, $x_n \to x \Rightarrow x_n$ — фундаментальная последовательность.
   fix $\varepsilon > 0$ $|a^{x_n} - a^{x_k}| = a^{x_n}|1 - a^{x_k - x_n}|$. Сходится. Значит ограничена. Тогда a^{x_n} ограничена. Тогда $a^{x_n}|1-a^{x_k-x_n}| \leqslant M \cdot |1 - a^{x_k - x_n}|$.
   $\exists N : |a^{\frac{1}{m}} - 1| < \frac{M}{\varepsilon}\ \forall m \geqslant N \Rightarrow |a^{\frac{1}{n}} - 1| < \frac{M}{\varepsilon} \Rightarrow \exists N_0 : |x_n - x_k| < \frac{1}{N}\ \forall n, k \geqslant N$
   $M \cdot |1 - a^{x_k - x_n}| < M \cdot \frac{2}{M}\ \forall n, k \geqslant N_0 \Rightarrow a^{x_n}$ образует фундаментальную последовательность $\Rightarrow$ (по теореме Коши) $\exists \lim\limits_{n\to\infty} a^{x_n}$

3. $x_n \to x$, $y_m \to x$, $x_n, y_m \in \mathbb{Q}$
   $\exists a = \lim a^{x_n}$; $\alpha = \lim a^{y_m}$
   $(a - \alpha) = \lim\limits_{n\to\infty}(a^{x_n} - a^{y_m}) = \lim\limits_{n\to\infty} a^{x_n}(1 - a^{x_n - y_m}) = 0$
   $\lim(y_n - x_n) = x - x = 0$

Свойства:

1. $a^x \cdot a^y = a^{x+y}$
   Пусть $x_n \to x$, $y_n \to y$; $x_n, y_n \in \mathbb{Q}$
   $a^{x_n} \cdot a^{y_n} = a^{x_n + y_n}$
   $a^x \cdot a^y = \lim a^{x_n} \cdot \lim a^{y_n} = \lim a^{x_n} \cdot a^{y_n} = \lim a^{x_n + y_n} = a^{x+y}$

2. $(a^x)^y = a^{xy}$
   Пусть $x_n \to x$, $y_m \to y$; $x_n, y_m \in \mathbb{Q}$
   $x_n y_n \to xy$
   $\lim\limits_{m\to\infty}(\lim\limits_{n\to\infty} a^{x_n})^{y_m}\ ?\ \lim\limits_{n\to\infty} a^{x_n y_n}$
   $\lim\limits_{n\to\infty}(a^x)^{y_n} = \lim\limits_{n\to\infty} a^{x_n y_n}$
   $\lim\limits_{n\to\infty}|b^{y_n} - a^{x_n y_n}| = 0$, где $b = a^x$
   $\exists N : |a^{x_n} - b| < \varepsilon\ \forall n \geqslant N$
   $b - \varepsilon < a^{x_n} < b + \varepsilon$
   $1 - \frac{\varepsilon}{b} < \frac{a^{x_n}}{b} < 1 + \frac{\varepsilon}{b} \uparrow^{y_n}, y_n > 0$, для < 0 аналогично
   $(1 - \frac{\varepsilon}{b})^{y_n} < (\frac{a^{x_n}}{b})^{y_n} < (1 + \frac{\varepsilon}{b})^{y_n}$
   $1 - \frac{y_n \varepsilon}{b} < \frac{a^{x_n y_n}}{b^{y_n}} < 1 + \frac{y_n \varepsilon}{b}$
   $\Rightarrow |\frac{a^{x_n y_n}}{b^{y_n}} - 1| \leqslant \frac{|y_n|}{b}\varepsilon$
   $|a^{x_n y_n} - b^{y_n}| < \frac{|y_n|}{b} \cdot b^{y_n}\varepsilon \leqslant M\varepsilon\ \forall n \geqslant N$
   $\Rightarrow \lim |b^{y_n} - a^{x_n y_n}| = 0$

fix $a > 0$, $a \neq 1$
$y = a^x$, $x \in \mathbb{R}$

Определение 2.1. *$f(x)$ — возрастающая на X, если $\forall x_1, x_2 \in X$ $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$. $f(x)$ неубывающая, если $\leqslant$.*

Утверждение 2.1. *При $a > 1$ $f(x) = a^x$ — возрастает на $\mathbb{R}$; При $0 < a, < 1$ $f(x) = a^x$ — убывает на $\mathbb{R}$.*

Пусть $x < \xi$, $x_n \to x$, $\xi_n \to \xi$
$x < x_0 < \xi_0 < \xi$ и x_0 не в окрестности x и аналогично ξ.
$\forall n \geqslant N$
$x_n < x_0 < \xi_0 < \xi_0$
Тогда $a^{x_n} < a^{x_0} < a^{\xi_0} < a^{\xi_n}$
$a^x \leqslant a^{x_0} < a^{\xi_0} \leqslant a^{\xi} \Rightarrow a^x < a^{\xi}$
$0 < a < 1$
$a^x = (\frac{1}{a})^{-x}$; $a^{\xi} = (\frac{1}{a})^{-\xi}$
$x < \xi \Rightarrow -x > -\xi$ $(\frac{1}{a})^{-x} > (\frac{1}{a})^{-\xi} \Rightarrow a^x > a^{\xi}$

3 Предел и непрерывность.

Определение 3.1. *Передельная точка x_0 области D — такая точка, что $\forall \varepsilon > 0$ $\mathring{U}_{\varepsilon}(x_0) \cap D \neq \emptyset$. Множество предельных точек множества D — называется замыкание D, обозначается $\overline{D}$.*

$f : D \to \mathbb{R}$; $D \subset \mathbb{R}$. Пусть x_0 — предельная точка D.

Определение 3.2 (По Гейне)**.** *Если* $\forall$ *последовательности* $x_n \to x_0$; $x_n \neq x_0$ $\exists \lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = a$, *то говорят, что* $\exists \lim\limits_{x\to x_0} f(x) = a$.

Определение 3.3. f *непрерывна в точке* $x_0 \in D$, *если* $\exists \lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$.

Определение 3.4 (ПО Коши)**.** $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = a$, *если* $\forall\varepsilon > 0\ \exists\delta > 0$: $f(x) \subset U_\varepsilon(a)\ \forall x \in \mathring{U}_\delta(x_0) \cap D(f)$.

Утверждение 3.1. *Определения по Коши и по Гейне равносильны.*

Доказательство. Доказательство Коши $\Rightarrow$ Гейне.

> Известно, что $\forall\varepsilon > 0\ \exists\delta > 0$: $f(x) \in U_\varepsilon(a) \forall x \in \mathring{U}_\delta(x_0)$.
> Берем произвольную $x_n \to x_0$: fix $\varepsilon > 0 \Rightarrow \exists\delta$, такое что выполнено $f(x) \in U_\varepsilon(a) \forall x \in \mathring{U}_\delta(x_0)$ и $\exists N$: $x_n \in U_\delta(x_0) \forall n \geqslant N \Rightarrow \exists N$: $\forall n \geqslant N$ $x_n \in \mathring{U}_\delta(x_0) \Rightarrow f(x_n) \in U_\varepsilon(a)$.
> Те $\forall\varepsilon > 0\ \exists N$: $\forall n \geqslant N$ $f(x_n) \in U_\varepsilon(a)$, те $a = \lim\limits_{n\to\infty} f(x_n)$

Доказательство не Коши $\Rightarrow$ не Гейне.

> Нет предела по Коши. fix a: $\exists\varepsilon$: $\forall\delta > 0$. $\exists\tilde{x} \in \mathring{U}_\delta(x_0)$: $f(\tilde{x}) \notin U_\varepsilon(a) \Rightarrow a$ не является пределом по Гейне?
> От противного. $a = \lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ по Гейне.
> $\delta_n = \frac{1}{n}$ $\exists\tilde{x_n} \in \mathring{U}_{\frac{1}{n}}(x_0)$ и $f(\tilde{x_n}) \notin U_\varepsilon(a) \Rightarrow \tilde{x_n} \to x_0, \tilde{x_n} \neq x_0$, но $\lim\limits_{n\to\infty} f(\tilde{x_n}) \neq a$

□

Утверждение 3.2. $f(x)$ *бесконечно малая в точке* x_0, *если* $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = 0$.

Утверждение 3.3. $f(x)$ *бесконечно большая в точке* x_0, *если* $\lim\limits_{x\to x_0} |f(x)| = +\infty$.

Лемма 3.1 (О двух милиционерах)**.** *Пусть* $f(x) \leqslant g(x) \leqslant h(x)$ *в некоторой окрестности точки* x_0 *(передельная точка* $D(f), D(g), D(h)$*). Если* $\exists \lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \lim\limits_{x\to x_0} h(x) = a$, *то* $\exists \lim\limits_{x\to x_0} g(x) = a$.

Лемма 3.2 (Предельный переход в неравенства)**.** *Пусть* $f(x) \leqslant g(x)$ *в некоторой окрестности точки* x_0 *(передельная точка* $D(f), D(g)$*). Если* $\exists \lim\limits_{x\to x_0} f(x) = a$; $\exists \lim\limits_{x\to x_0} g(x) = b$, *то* $a \leqslant b$.

Лемма 3.3 (Об ограниченности)**.** *Если* $\exists \lim\limits_{x\to x_0} f(x) = a \in \mathbb{R}$. *Тогда* f *ограничена в некотром* $\mathring{U}(x_0)$.

Доказательство. $\varepsilon = 1$: $\exists\delta > 0$: $|f(x) - a| < 1\ \forall x \in \mathring{U}_\delta(x_0) \Rightarrow |f(x)| \leqslant |a| + 1\ \forall x \in \mathring{U}_\delta(x_0)$ □

Лемма 3.4 (Об отделимости от нуля)**.** *Если* $\exists \lim\limits_{x\to x_0} f(x) = a > 0$. *Тогда* $\inf f(x) > 0$ *в некоторой* $\mathring{U}(x_0)$ *(*f *отделима от нуля).*

Доказательство. $\varepsilon = \frac{a}{42}$: $\exists\delta < \frac{a}{42}$ $\forall x \in \mathring{U}_\delta(x_0) \Rightarrow f(x) \geqslant \frac{41}{42}a > 0$ $\forall x \in \mathring{U}_\delta(x_0) \Rightarrow \inf f(x) \geqslant \frac{41}{42}a > 0$. □

Следствие 3.1. *Если* $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) \neq 0$, *то* $\frac{1}{f(x)}$ *ограничена в некоторой* $\mathring{U}(x_0)$.

Определение 3.5. f *непрерывна в точке* $x_0 \in D(f)$, *если* $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$.

Определение 3.6. $x^\alpha, \alpha \in \mathbb{R}; a^x; \log_a x; \sin, \cos, \mathrm{tg}, \arcsin, \arccos, \mathrm{arctg}$ — *основные элементарные функции.*

Определение 3.7. *Функция называется элементарной, если она получается арифметическими операциями или композицией конечного числа основных элементарных функций.*

Утверждение 3.4. *Любая элементарная функция непрерывна.*

Теорема 3.1 (Теорема о пределе композиций)**.** $f : X \to Y$; $g : Y \to Z$, x_0 — *предельная точка множества* X, y_0 — *предельная точка множества* Y. $\exists \lim\limits_{x\to x_0} f(x) = y_0$, $\exists \lim\limits_{y\to y_0} g(y) = g(y_0) = a$. *Тогда* $\exists \lim\limits_{x\to x_0} g(f(x)) = a$.

Доказательство. $\forall x \in \mathring{U}_\delta(x_0) \Rightarrow g(f(x)) \in U_\varepsilon(a)$
$a = \lim\limits_{y\to y_0} g(y) \Rightarrow \exists\varepsilon_1 > 0$: $y \in U_{\varepsilon_1}(y_0) \Rightarrow g(y) \in U_\varepsilon(g(y_0))$
$\exists\delta > 0$: $x \in \mathring{U}_\delta(x_0) \Rightarrow f(x) \in U_{\varepsilon_1}(y_0) \Rightarrow g(f(x)) \subset U_\varepsilon(g(y_0))$ □

Теорема 3.2 (Непрерывности обратной функции)**.** *Пусть f непрерывная биекция на $\langle a; b\rangle$. Тогда f^{-1} тоже непрерывная биекция $Y \to \langle a; b\rangle$.*

Доказательство. НУО f строго возрастает на $\langle a; b\rangle$
fix $\varepsilon > 0$, тогда $y_1 := f(x_0 - \varepsilon)$; $y_2 := f(x_0 + \varepsilon)$
$\delta = \min\{y_2 - y_0; y_0 - y_1\}$
Тогда $\forall y \in U_\delta(y) \Rightarrow f^{-1}(y) \in U_\epsilon(f^{-1}(y_0))$ тк $y_1 < y < y_2 \Rightarrow f^{-1}(y_1) < f^{-1}(y) < f^{-1}(y_2)$ □

Утверждение 3.5. *Полезные пределы.*

1. $\lim\limits_{x\to+\infty}(1+\frac{1}{x})^x = e$
2. $\lim\limits_{x\to-\infty}(1+\frac{1}{x})^x = e$
3. $\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}} = e$
4. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x} = 1$
5. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x} = 1$; $\lim\limits_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x}$
6. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{(1+x)^m-1}{x} = m$; $m \in \mathbb{R}$
7. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2} = \frac{1}{2}$
8. $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{n}{2^n} = 0$

Утверждение 3.6. $(1+x)^p \simeq 1 + px$, $x \to 0$.

Определение 3.8. *Символ Ландау $-$ $\overline{o}$.*

1. $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)} = 0$, *тогда* $f(x) := \overline{o}(g(x))$, $x \to x_0$.
2. $f(x) = \overline{o}(g(x))$, *если* $\forall\varepsilon > 0\ \exists\delta > 0$: $|f(x)| \leqslant \varepsilon|g(x)|$, $\forall x \in \mathring{U}_\delta(x_0)$.

Свойство 3.1.

1. $f(x)$ *называется бесконечно малой в точке* x_0, *если* $f(x) = \overline{o}(1)$, $x \to x_0$.
2. $\overline{o}(f(x)) + \overline{o}(f(x)) = \overline{o}(f(x))$, $x \to x_0$.
3. $C \cdot \overline{o}(f(x)) = \overline{o}(f(x))$, $x \to x_0$.
4. $\overline{o}(\overline{o}(f(x))) = \overline{o}(f(x))$, $x \to x_0$.

Определение 3.9.

1. *Пусть f, g обе бесконечно большие или бесконечно малые.* $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)} = 1$, *тогда* $f(x) \sim g(x)$, $x \to x_0$.
2. $f(x) \sim g(x) \Leftrightarrow \forall\varepsilon > 0\ \exists\delta > 0\ (1-\varepsilon)|g(x)| \leqslant |f(x)| \leqslant (1+\varepsilon)|g(x)|$, $\forall x \in \mathring{U}_\delta(x_0)$.

Утверждение 3.7. $f(x) \sim g(x)$, $x \to x_0 \Leftrightarrow f(x) = g(x) + \overline{o}(g(x))$, $x \to x_0$.

Определение 3.10. $f(x) = \underline{O}(g(x))$, $x \to x_0$, *если* $\exists\ C > 0$: $|f(x)| \leqslant C|g(x)|$ *в некоторой выколотой окрестности точки* x_0.

Определение 3.11. $f(x) \asymp g(x)$, $x \to x_0$, *если* $\exists\ c_1, c_2 > 0$: $c_1|g(x)| \leqslant |f(x)| \leqslant c_2|g(x)|$ *в некоторой выколотой окрестности точки* x_0.

Теорема 3.3. *Пусть $f(x) \sim f_1(x)$, $x \to x_0$ и функции не обращаются в 0 в некоторой $\mathring{U}(x_0)$. Тогда $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)g(x)$ и $\lim\limits_{x\to x_0} f_1(x)g(x)$ $\exists$ или $\nexists$ одновременно, и если $\exists$, то они равны. Словами: в произведение пределов сомножители можно заменять на эквивалентные; слагаемые нельзя!*

Доказательство. $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)g(x) = \lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{f_1(x)} \cdot f_1(x)g(x)$. □