# Содержание

# 1 Последовательность.

$f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$
$f(n) =: f_n$

**Определение 1.1.** *Последовательность называется ограниченной сверху, если* $\exists M : |f_n| \leqslant M$. *Снизу, если* $\exists m : f_n \geqslant m$. $f_n$ *— ограниченная, если ограничена сверху и снизу.*

**Определение 1.2.** $M_0 = \sup f_n$, *если* $M_0$ *— верхняя грань и* $\forall \varepsilon > 0\ \exists n_0 : f_{n0} > M_0 - \varepsilon$. $m_0 = \inf f_n$, *если* $m_0$ *— нижняя грань и* $\forall \varepsilon > 0\ \exists n_0 : f_{n0} < m_0 + \varepsilon$.

**Аксиома 1.1** (Вещественных чисел)**.** *Если множество* $X$ *ограничено сверху, то* $\exists sup X$. *Если* $f_n$ *неограничено сверху, то* $sup f_n =: +\infty$. *Если снизу, то* $inf f_n =: -\infty$.

**Определение 1.3.** $f_n$ *— бесконечно большая (бб), если* $\forall \varepsilon > 0\ \exists N = N(\varepsilon) : |f_n| > \frac{1}{\varepsilon}\ \forall n \geqslant N$. $f_n$ *— не бб,* $\exists \varepsilon > 0 : \forall N \exists n > N : |f_n| \leqslant \frac{1}{\varepsilon}$.

**Определение 1.4.** $f_n$ *— бесконечно малая (бм), если* $\forall \varepsilon > 0\ \exists N = N(\varepsilon) : |f_n| < \varepsilon\ \forall n \geqslant N$.

**Лемма 1.1.** $f_n$ *— бм* $\Rightarrow$ $f_n$ *— ограничена.*

*Доказательство.* Пусть $\varepsilon = 1$, тогда $\exists N : |f_n| \leqslant 1\ \forall n \geqslant N$.
$M := max|f_1|, \dots, |f_{N-1}|, 1$, тогда $|f_n| \leqslant M\ \forall n \in N$. □

**Лемма 1.2.** *a)* $f_n$ *— бб* $\Rightarrow \frac{1}{f_n}$ *— бм*

*b)* $f_n$ *— бм* $(f_n \neq 0) \Rightarrow \frac{1}{f_n}$ *— бб*

**Лемма 1.3.** $f_n$ *— неограниченная последовательность, тогда существует бб подпоследовательность* $f_{nk}$.

*Доказательство.* $\exists n_1 : |f_{n1} > 1|$,
$\exists n_2 > n_1 : |f_{n2} > 2|$,
$\exists n_3 > n_2 : |f_{n3}| > 3$,
$\vdots$,
$\exists n_1 < n_2 < \dots < n_k < \dots$
$|f_{nk}| > k \Rightarrow f_{nk}$ — бб. □

**Лемма 1.4.** *a) бм + бм = бм*

*b) бм* $\cdot$ $C$ *= бм*

*c) бм* $\cdot$ *бм = бм*

*d) бб* $\cdot$ $C$ *= бб,* $C \neq 0$

*e) бб* $\cdot$ *бб = бб*

## 1.1 Предел последовательности.

$a_n$ — последовательность.

**Определение 1.5.** $a = \lim a_n$, *если* $\forall \varepsilon > 0\ \exists N : |a_n - a| < \varepsilon\ \forall n \geqslant N$.

**Определение 1.6.** *Эпсилон окрестность:* $U_\varepsilon(a) := (a - \varepsilon; a + \varepsilon)$. *Выколотая эпсилон окрестность:* $\mathring{U}_\varepsilon(a) := U_\varepsilon(a) \backslash \{a\}$.

$\varepsilon_1 < \varepsilon_2 \Rightarrow U_{\varepsilon 1}(a) \subset U_{\varepsilon 2}(a), a \in \overline{\mathbb{R}}$.

**Определение 1.7.** $\mathbb{R} \cup \{\pm\infty\} = \overline{\mathbb{R}}$ — *расширенная числовая прямая.*

**Определение 1.8.** $\varepsilon > 0$ $U_\varepsilon(+\infty) = (\frac{1}{\varepsilon}; +\infty)$*;* $U_\varepsilon(-\infty) = (-\infty; -\frac{1}{\varepsilon})$*.*

$\lim |a_n| = +\infty \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0\ \exists N(\varepsilon) : |a_n| > \frac{1}{\varepsilon}$.
Если $a_n$ — бб $\Leftrightarrow \lim |a_n| = +\infty$.
Если $a_n$ — бм $\Leftrightarrow \lim |a_n| = 0$.

**Утверждение 1.1.** $\lim a_n = a \Leftrightarrow \exists$ *бм последовательность* $d_n$*, такая что* $a_n = a + d_n$*.*

**Утверждение 1.2.** *Если предел последовательности существует, то он единственный.*

*Доказательство.* $\exists a < b$ и $a = \lim a_n$, $b = \lim a_n$. Тогда $\varepsilon := \frac{b-a}{42}$ :
$\exists N_1 : a_n \in U_\varepsilon(a) \forall n \geqslant N_1$
$\exists N_2 : a_n \in U_\varepsilon(b) \forall n \geqslant N_2$
$\Rightarrow a_n \in (U_\varepsilon(a) \cap U_\varepsilon(b)) = \emptyset\ \forall n \geqslant \max\{N_1, N_2\}$!?!. □

**Лемма 1.5** (Предельный переход в неравенства)**.** $a_n \leqslant b_n\ \forall n \geqslant N_0$*. Пусть* $\exists \lim a_n = a$*;* $\lim b_n = b$*,* $a, b \in \overline{\mathbb{R}}$*. Тогда* $a \leqslant b$*.*

*Доказательство.* Пусть $a > b$. Тогда $\varepsilon := \frac{a-b}{42}$ :
$\exists N_1 : a_n \in U_\varepsilon(a) \forall n \geqslant N_1$
$\exists N_2 : a_n \in U_\varepsilon(b) \forall n \geqslant N_2$
$\Rightarrow a_n > b_n\ \forall n \geqslant \max\{N_1, N_2\}$!?!. □

**Лемма 1.6** (О сжатой последовательности)**.** *Пусть* $a_n \leqslant b_n \leqslant c_n\ \forall n \geqslant N_0$ *и* $\exists \lim a_n = \lim c_n = a \in \overline{\mathbb{R}}$*, тогда* $\exists \lim b_n = a$*.*

*Доказательство.* $\varepsilon > 0$ :
$\exists\ a_n \in U_\varepsilon,\ n \geqslant N_1$
$\exists\ c_n \in U_\varepsilon,\ n \geqslant N_2$
$\Rightarrow b_n \in U_\varepsilon : \forall n \geqslant \{N_1, N_2, N_0\} =: N \Rightarrow a = \lim b_n$ по определению. □

**Лемма 1.7** (Об отделимости от нуля)**.** *Пусть* $\exists \lim a_n = a > 0$*. Тогда* $\exists\ N : a_n > \frac{a}{2} > 0,\ \forall n \geqslant N$*.*
*Следствие. Если* $\lim a_n \neq 0 \Rightarrow \frac{1}{a_n}$ *ограничена (*$a_n \neq 0$*).*

*Доказательство.* $\lim a_n = a > 0$
$\exists N_1 : a_n > \frac{a}{2} \Rightarrow 0 < \frac{1}{a_n} < \frac{2}{a}\ \forall n \geqslant N_1$
$\min\{a_1, \ldots, a_{N-1}, \frac{a}{2}\} \leqslant \frac{1}{a_n} \leqslant \max\{a_1, \ldots, a_{N-1}, \frac{2}{a}\}$ □

**Теорема 1.1** (Арифметические свойства предела)**.** *Пусть* $\lim a_n = a$*,* $\lim b_n = b$*;* $a, b \in \overline{\mathbb{R}}$*. Тогда:*

1. $\lim(a_n + b_n) = a + b$*, кроме случаев* $+\infty + (-\infty)$*,* $-\infty + (+\infty)$
2. $\lim(ka_n) = ka$*, кроме случая* $0 \cdot (\pm\infty)$
3. $\lim(a_n \cdot b_n) = ab$*, кроме случая* $0(\pm\infty)$
4. $\lim \frac{a_n}{b_n} = \frac{a}{b}$*, кроме случаев* $\frac{0}{0}$*,* $\frac{\infty}{\infty}$

*Доказательство.* $a, b \in \mathbb{R}$. $a_n = a + \alpha_n$, $b_n = b + \beta_n$; $\alpha_n, \beta_n$ — бм.

1. $a_n + b_n = (a + b) + (\alpha_n + \beta_n) \Leftrightarrow \lim(a_n + b_n) = a + b$.
2. Аналогично.

3. $a_n b_n = (a+\alpha_n)(b+\beta_n) = ab + \alpha_n b + \beta_n a + \alpha_n + \beta_n$

4. Если $b \neq 0$ $\frac{1}{b_n}$ — ограниченна
$\frac{a_n}{b_n} - \frac{a}{b} = \frac{a+\alpha_n}{b+\beta_n} - \frac{a}{b} = \frac{\alpha_n b - \beta_n a}{b_n b} = \frac{1}{b} \cdot \frac{1}{b_n} \cdot (\alpha_n b - \beta_n a)$
Если $b = 0 \Rightarrow b_n$ бм $\Rightarrow \frac{1}{b_n}$ — бб $\Rightarrow a_n \cdot \frac{1}{b_n}$ = ограниченная бб

□

**Определение 1.9.** *Линейное пространство — множество, сумма двух элементов которого лежит в этом множестве и элемент с коэффициентом лежит в этом множестве.*

**Определение 1.10.** *Последовательность называется возвратной, если* $a_n = \beta_{n-1}a_{n-1} + \beta_{n-2}a_{n-2} + \dots + \beta_{n-k}a_{n-k}$; $\beta i$ *— фиксированные коэффициенты.*

$a_n^{(1)}, a_n^{(2)} \Rightarrow \forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}\ \lambda a_n^{(1)} + \mu a_n^{(2)}$ тоже удовлетворяет $(x)$.
$a_n := t^n$
$t^k = \beta_{n-1}t^{k-1} + \dots + \beta_{n-k}$
$t_0$ — простой корень, то $t_0^n$
$t_0$ — корень $(m) \Rightarrow t_0^n; nt_0^n; n^2t_0^n; \dots; n^{m-1}t_0^n$

**Теорема 1.2.** 1. *Пусть $a_n$ возрастает и ограничена сверху. Тогда $\exists \lim a_n = \sup a_n$*

2. *Пусть $a_n$ убывает и ограничена снизу. Тогда $\exists \lim a_n = \inf a_n$*

*Доказательство.* fix $\varepsilon > 0$. Так как $a_n$ — ограничена, то $\exists M \sup a_n \in \mathbb{R}$; И $\exists N : a_N > M - \varepsilon$.
Тогда $\begin{cases} a_n \geqslant M - \varepsilon & \forall n \geqslant N, \text{ так как } a_n \uparrow \\ a_n \leqslant M < M + \varepsilon \end{cases} \Rightarrow \exists N : |a_n - M| < \varepsilon \forall n \geqslant N \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} a_n = M$ по определению. □

**Определение 1.11.** *Найти предел последовательности $a_n = (1+\frac{1}{n})^n$.*

$b_n = (1+\frac{1}{n})^{n+1}; b_1 = 4, b_2 = 3, \ldots\ b_n \downarrow$
$b_n \geqslant 1$
*Докажем, что $b_n$ убывает.*
$\frac{b_n}{b_{n+1}} = \frac{(\frac{n+1}{n})^{n+1}}{(\frac{n+2}{n+1})^{n+2}} = \frac{n+1}{n})^{n+1} \cdot \frac{n+1}{n+2})^{n+2} = \frac{n+1}{n+2} \cdot (\frac{n^2+2n+1}{n^2+2n})^{n+1} = \frac{n+1}{n+2} \cdot (1+\frac{1}{n^2+2n})^{n+1} \overbrace{>}^{\text{Неравенство Бернулли}} \frac{n+1}{n+2} \cdot$
$(1+\frac{n+1}{n^2+2n}) = \frac{(n+1)(n^2+3n+1)}{(n+2)(n^2+2n)} = \frac{n^3+4n^2+4n+1}{n^3+4n^2+4n} > 1.$
$a_n = \frac{b_n}{(1+\frac{1}{n})}$
$\lim\limits_{n\to\infty} = \lim \frac{b_n}{1+\frac{1}{n}} = \frac{\lim b_n}{\lim(1+\frac{1}{n})} = \lim b_n$ — *существует.*
$e := \lim\limits_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^n \approx 2.718281828459045...$

**Теорема 1.3** (Больцано-Вейерштрасса)**.** *Пусть последовательность $a_n$ ограничена. Тогда существует сходящаяся подпоследовательность.*

*Доказательство.* $|a_n| \leqslant M$
$[-M = \alpha_1; M = \beta_1]$. $\alpha_2$ — середина. $a_1 = x_1 \in [\alpha_1; \alpha_2]$.
$[\alpha_2; \beta_2]$. $\beta_3$ — середина. $x_2 = a_{\min n} \in [\alpha_2; \beta_3]$.
И тд.
$\alpha_k$ неубывающая и ограниченная сверху. $\exists \lim \alpha_k = \alpha$. $\beta_k$ неубывающая и ограниченная сверху. $\exists \lim \beta_k = \beta$.
$\beta - \alpha = \lim\limits_{k\to\infty}(\beta_k - \alpha_k) = \lim\limits_{k\to\infty} \frac{2M}{2^{k-1}} = 0.$
По построению $x_k$ — подпоследовательность и $\alpha_k \leqslant x_k \leqslant \beta_k \Rightarrow \exists \lim x_k$. □

**Определение 1.12.** *Последовательность называется фундаментальной (или последовательностью Коши), если* $\forall \varepsilon > 0\ \exists N(\varepsilon)$: $|a_n - a_k| < \varepsilon\ \forall n, k \geqslant N$.

**Утверждение 1.3.** *Пусть* $\exists \lim a_n = a \in \mathbb{R}$. *Тогда* $\{a_n\}$ *фундаментальная.*

*Доказательство.* fix $\varepsilon > 0 \exists N : |a_n - a| < \frac{\varepsilon}{2} \forall n \geqslant N$. Тогда $\forall n, k \geqslant N$ $|a_n - a_k| = |(a_n - a) + (a - a_k)| \leqslant |a_n - a| + |a_k - a| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$. □

**Теорема 1.4** (Коши)**.** *Пусть* $\{a_n\}$ *фундаментальная последовательность. Тогда* $\exists \lim a_n$.

*Доказательство.* 1) (!)$\{a_n\}$ ограничена.
$\varepsilon = 1$: $\exists N$: $|a_n - a_k| \leqslant \varepsilon\ \forall n, k \geqslant N \Rightarrow a_k \in [a_{N-1}; a_{N+1}] \forall k \geqslant N$
$M = max\{|a_1|, |a_2|, \ldots, |a_N + 1|\} \Rightarrow |a_n| \leqslant M \forall n$.

2) Тогда по теореме Вейерштрасса $\exists a_{n_k}$ — подпоследовательность; $\lim\limits_{n\to\infty} a_{n_k} = a$.

3) fix $\varepsilon > 0$. $\exists N_1 : |a_{n_k} - a| < \frac{\varepsilon}{2}\ \forall n_k \geqslant N_1$
$\exists N_2 : |a_m - a_n| < \frac{\varepsilon}{2}\ \forall m, n \geqslant N_2$
Пусть $n \geqslant max\{N_1, N_2\}$ $\exists n_k \geqslant m$.
$|a_m - a| = |(a_m - a_{n_k}) + (a_{n_k} - a)| \leqslant |a_n - a_{n_k}| + |a_{n_k} - a| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \Rightarrow a = \lim\limits_{m\to\infty} a_m$.

□

## 2 Возведение в вещественную степень.

$n \in \mathbb{N}$; $x^n = x \cdot x \cdot ... \cdot x$, $n$ раз.
$x^{-n} = \frac{1}{x^n}$, $x \neq 0$
$x^0 := 1$
$\sqrt[n]{x} = x^{\frac{1}{n}}$
$x^p$, $p \in \mathbb{Q}$, $x \geqslant 0$ $(p > 0)$ или $x > 0$ $(p \geqslant 0)$
$\underline{\text{fix } a > 0,\ x \in \mathbb{R}}$
$\underline{a^x := \lim\limits_{n\to\infty} a^{x_n}}$, где $\{x_n\}$ последовательность, такая что $x_n \in \mathbb{Q}$, $\lim\limits_{n\to\infty} x_n := x$.
Корректность определения.

1. $x \in \mathbb{Q}$. Докажем, что $a^x$ совпадает со старым определением.
   $x \in \mathbb{Q}$, берем $x_n = x \Rightarrow a^x = a^x$

2. Берем произвольную последовательность $\{x_n\}$, $x_n \to x \Rightarrow x_n$ — фундаментальная последовательность.
   fix $\varepsilon > 0$ $|a^{x_n} - a^{x_k}| = a^{x_n}|1 - a^{x_k - x_n}|$. Сходится. Значит ограничена. Тогда $a^{x_n}$ ограничена. Тогда $a^{x_n}|1 - a^{x_k - x_n}| \leqslant M \cdot |1 - a^{x_k - x_n}|$.
   $\exists N : |a^{\frac{1}{m}} - 1| < \frac{M}{\varepsilon}\ \forall m \geqslant N \Rightarrow |a^{\frac{1}{n}} - 1| < \frac{M}{\varepsilon} \Rightarrow \exists N_0 : |x_n - x_k| < \frac{1}{N}\ \forall n, k \geqslant N$
   $M \cdot |1 - a^{x_k - x_n}| < M \cdot \frac{2}{M}\ \forall n, k \geqslant N_0 \Rightarrow a^{x_n}$ образует фундаментальную последовательность $\Rightarrow$ (по теореме Коши) $\exists \lim\limits_{n\to\infty} a^{x_n}$

3. $x_n \to x$, $y_m \to x$, $x_n, y_m \in \mathbb{Q}$
   $\exists a = \lim a^{x_n}$; $\alpha = \lim a^{y_m}$
   $(a - \alpha) = \lim\limits_{n\to\infty}(a^{x_n} - a^{y_m}) = \lim\limits_{n\to\infty} a^{x_n}(1 - a^{x_n - y_m}) = 0$
   $\lim(y_n - x_n) = x - x = 0$

Свойства:

1. $a^x \cdot a^y = a^{x+y}$
   Пусть $x_n \to x$, $y_n \to y$; $x_n, y_n \in \mathbb{Q}$
   $a^{x_n} \cdot a^{y_n} = a^{x_n + y_n}$
   $a^x \cdot a^y = \lim a^{x_n} \cdot \lim a^{y_n} = \lim a^{x_n} \cdot a^{y_n} = \lim a^{x_n+y_n} = a^{x+y}$

2. $(a^x)^y = a^{xy}$
   Пусть $x_n \to x$, $y_m \to y$; $x_n, y_m \in \mathbb{Q}$
   $x_n y_n \to xy$
   $\lim\limits_{m\to\infty}(\lim\limits_{n\to\infty} a^{x_n})^{y_m} \ ? \ \lim\limits_{n\to\infty} a^{x_n y_n}$
   $\lim\limits_{n\to\infty}(a^x)^{y_n} = \lim\limits_{n\to\infty} a^{x_n y_n}$
   $\lim\limits_{n\to\infty}|b^{y_n} - a^{x_n y_n}| = 0$, где $b = a^x$
   $\exists N : |a^{x_n} - b| < \varepsilon \ \forall n \geqslant N$
   $b - \varepsilon < a^{x_n} < b + \varepsilon$
   $1 - \frac{\varepsilon}{b} < \frac{a^{x_n}}{b} < 1 + \frac{\varepsilon}{b} \uparrow^{y_n}, y_n > 0$, для $< 0$ аналогично
   $(1 - \frac{\varepsilon}{b})^{y_n} < (\frac{a^{x_n}}{b})^{y_n} < (1 + \frac{\varepsilon}{b})^{y_n}$
   $1 - \frac{y_n \varepsilon}{b} < \frac{a^{x_n y_n}}{b^{y_n}} < 1 + \frac{y_n \varepsilon}{b}$
   $\Rightarrow |\frac{a^{x_n y_n}}{b^{y_n}} - 1| \leqslant \frac{|y_n|}{b}\varepsilon$
   $|a^{x_n y_n} - b^{y_n}| < \frac{|y_n|}{b} \cdot b^{y_n}\varepsilon \leqslant M\varepsilon \ \forall n \geqslant N$
   $\Rightarrow \lim |b^{y_n} - a^{x_n y_n}| = 0$

fix $a > 0$, $a \neq 1$
$y = a^x$, $x \in \mathbb{R}$

**Определение 2.1.** *$f(x)$ — возрастающая на $X$, если $\forall x_1, x_2 \in X$ $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$. $f(x)$ неубывающая, если $\leqslant$.*

**Утверждение 2.1.** *При $a > 1$ $f(x) = a^x$ — возрастает на $\mathbb{R}$; При $0 < a, < 1$ $f(x) = a^x$ — убывает на $\mathbb{R}$.*

Пусть $x < \xi$, $x_n \to x$, $\xi_n \to \xi$
$x < x_0 < \xi_0 < \xi$ и $x_0$ не в окрестности $x$ и аналогично $\xi$.
$\forall n \geqslant N$
$x_n < x_0 < \xi_0 < \xi_0$
Тогда $a^{x_n} < a^{x_0} < a^{\xi_0} < a^{\xi_n}$
$a^x \leqslant a^{x_0} < a^{\xi_0} \leqslant a^{\xi} \Rightarrow a^x < a^{\xi}$
$0 < a < 1$
$a^x = (\frac{1}{a})^{-x}$; $a^{\xi} = (\frac{1}{a})^{-\xi}$
$x < \xi \Rightarrow -x > -\xi$ $(\frac{1}{a})^{-x} > (\frac{1}{a})^{-\xi} \Rightarrow a^x > a^{\xi}$

# 3 Предел и непрерывность.

**Определение 3.1.** *Передельная точка $x_0$ области $D$ — такая точка, что $\forall \varepsilon > 0$ $\mathring{U}_{\varepsilon}(x_0) \cap D \neq \emptyset$. Множество предельных точек множества $D$ — называется замыкание $D$, обозначается $\overline{D}$.*

$f : D \to \mathbb{R}$; $D \subset \mathbb{R}$. Пусть $x_0$ — предельная точка $D$.

**Определение 3.2** (По Гейне). *Если $\forall$ последовательности $x_n \to x_0$; $x_n \neq x_0$ $\exists \lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = a$, то говорят, что $\exists \lim\limits_{x\to x_0} f(x) = a$.*

**Определение 3.3.** *$f$ непрерывна в точке $x_0 \in D$, если $\exists \lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$.*

**Заметка 3.1.** *Функция не непрерывна:*

1. *$\lim\limits_{x \to x_0} \exists$, но $\neq f(x_0)$ — устранимый разрыв.*
2. *$\lim\limits_{x \to x_0} \nexists$ — неустранимы разрыв.*
   (a) *$\lim\limits_{x \to x_0 - 0} f(x) = a$, $\lim\limits_{x \to x_0 + 0} f(x) = b$, $a, b \in \mathbb{R}$ — разрыв I рода или скачок.*
   (b) *Разрыв второго рода или существенная особенность.*

**Определение 3.4** (По Коши). *$\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = a$, если $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0$: $f(x) \subset U_\varepsilon(a)\ \forall x \in \mathring{U}_\delta(x_0) \cap D(f)$.*

**Утверждение 3.1.** *Определения по Коши и по Гейне равносильны.*

*Доказательство.* Доказательство Коши $\Rightarrow$ Гейне.

Известно, что $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0$: $f(x) \in U_\varepsilon(a) \forall x \in \mathring{U}_\delta(x_0)$.
Берем произвольную $x_n \to x_0$: fix $\varepsilon > 0 \Rightarrow \exists \delta$, такое что выполнено $f(x) \in U_\varepsilon(a) \forall x \in \mathring{U}_\delta(x_0)$ и $\exists N$: $x_n \in U_\delta(x_0) \forall n \geqslant N \Rightarrow \exists N$: $\forall n \geqslant N\ x_n \in \mathring{U}_\delta(x_0) \Rightarrow f(x_n) \in U_\varepsilon(a)$.
Те $\forall \varepsilon > 0\ \exists N$: $\forall n \geqslant N\ f(x_n) \in U_\varepsilon(a)$, те $a = \lim\limits_{n \to \infty} f(x_n)$

Доказательство не Коши $\Rightarrow$ не Гейне.

Нет предела по Коши. fix $a$: $\exists \varepsilon$: $\forall \delta > 0$. $\exists \tilde{x} \in \mathring{U}_\delta(x_0)$: $f(\tilde{x}) \notin U_\varepsilon(a) \Rightarrow a$ не является пределом по Гейне?
От противного. $a = \lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ по Гейне.
$\delta_n = \frac{1}{n}\ \exists \tilde{x_n} \in \mathring{U}_{\frac{1}{n}}(x_0)$ и $f(\tilde{x_n}) \notin U_\varepsilon(a) \Rightarrow \tilde{x_n} \to x_0, \tilde{x_n} \neq x_0$, но $\lim\limits_{n \to \infty} f(\tilde{x_n}) \neq a$

□

**Утверждение 3.2.** *$f(x)$ бесконечно малая в точке $x_0$, если $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = 0$.*

**Утверждение 3.3.** *$f(x)$ бесконечно большая в точке $x_0$, если $\lim\limits_{x \to x_0} |f(x)| = +\infty$.*

**Лемма 3.1** (О двух милиционерах). *Пусть $f(x) \leqslant g(x) \leqslant h(x)$ в некоторой окрестности точки $x_0$ (передельная точка $D(f), D(g), D(h)$). Если $\exists \lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \lim\limits_{x \to x_0} h(x) = a$, то $\exists \lim\limits_{x \to x_0} g(x) = a$.*

**Лемма 3.2** (Предельный переход в неравенства). *Пусть $f(x) \leqslant g(x)$ в некоторой окрестности точки $x_0$ (передельная точка $D(f), D(g)$). Если $\exists \lim\limits_{x \to x_0} f(x) = a$; $\exists \lim\limits_{x \to x_0} g(x) = b$, то $a \leqslant b$.*

**Лемма 3.3** (Об ограниченности). *Если $\exists \lim\limits_{x \to x_0} f(x) = a \in \mathbb{R}$. Тогда $f$ ограничена в некотром $\mathring{U}(x_0)$.*

*Доказательство.* $\varepsilon = 1$: $\exists \delta > 0$: $|f(x) - a| < 1\ \forall x \in \mathring{U}_\delta(x_0) \Rightarrow |f(x)| \leqslant |a| + 1\ \forall x \in \mathring{U}_\delta(x_0)$ □

**Лемма 3.4** (Об отделимости от нуля). *Если $\exists \lim\limits_{x \to x_0} f(x) = a > 0$. Тогда $\inf f(x) > 0$ в некоторой $\mathring{U}(x_0)$ ($f$ отделима от нуля).*

*Доказательство.* $\varepsilon = \frac{a}{42}$: $\exists \delta < \frac{a}{42}\ \forall x \in \mathring{U}_\delta(x_0) \Rightarrow f(x) \geqslant \frac{41}{42}a > 0\ \forall x \in \mathring{U}_\delta(x_0) \Rightarrow \inf f(x) \geqslant \frac{41}{42}a > 0$. □

**Следствие 3.1.** *Если $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) \neq 0$, то $\frac{1}{f(x)}$ ограничена в некоторой $\mathring{U}(x_0)$.*

**Определение 3.5.** $x^\alpha, \alpha \in \mathbb{R}; a^x; \log_a x; \sin, \cos, \mathrm{tg}, \arcsin, \arccos, \mathrm{arctg}$ — *основные элементарные функции.*

**Определение 3.6.** *Функция называется элементарной, если она получается арифметическими операциями или композицией конечного числа основных элементарных функций.*

**Утверждение 3.4.** *Любая элементарная функция непрерывна.*

**Теорема 3.1** (Теорема о пределе композиций)**.** *$f : X \to Y$; $g : Y \to Z$, $x_0$ — предельная точка множества $X$, $y_0$ — предельная точка множества $Y$. $\exists \lim\limits_{x\to x_0} f(x) = y_0$, $\exists \lim\limits_{y\to y_0} g(y) = g(y_0) = a$. Тогда $\exists \lim\limits_{x\to x_0} g(f(x)) = a$.*

*Доказательство.* $\forall x \in \mathring{U}_\delta(x_0) \Rightarrow g(f(x)) \in U_\varepsilon(a)$
$a = \lim\limits_{y\to y_0} g(y) \Rightarrow \exists \varepsilon_1 > 0$: $y \in U_{\varepsilon_1}(y_0) \Rightarrow g(y) \in U_\varepsilon(g(y_0))$
$\exists \delta > 0$: $x \in \mathring{U}_\delta(x_0) \Rightarrow f(x) \in U_{\varepsilon_1}(y_0) \Rightarrow g(f(x)) \subset U_\varepsilon(g(y_0))$ □

**Теорема 3.2** (Непрерывности обратной функции)**.** *Пусть $f$ непрерывная биекция на $\langle a; b\rangle$. Тогда $f^{-1}$ тоже непрерывная биекция $Y \to \langle a; b\rangle$.*

*Доказательство.* НУО $f$ строго возрастает на $\langle a; b\rangle$
fix $\varepsilon > 0$, тогда $y_1 := f(x_0 - \varepsilon)$; $y_2 := f(x_0 + \varepsilon)$
$\delta = \min\{y_2 - y_0; y_0 - y_1\}$
Тогда $\forall y \in U_\delta(y) \Rightarrow f^{-1}(y) \in U_\epsilon(f^{-1}(y_0))$ тк $y_1 < y < y_2 \Rightarrow f^{-1}(y_1) < f^{-1}(y) < f^{-1}(y_2)$ □

## 3.1 Замечательные пределы.

1. $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(1 + \dfrac{1}{x}\right)^x = e$
2. $\lim\limits_{x\to-\infty} \left(1 + \dfrac{1}{x}\right)^x = e$
3. $\lim\limits_{x\to 0} (1 + x)^{\frac{1}{x}} = e$
4. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln(1 + x)}{x} = 1$
5. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^x - 1}{x} = 1$; $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{a^x - 1}{x} = \ln a$
6. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{(1 + x)^m - 1}{x} = m$; $m \in \mathbb{R}$
7. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1 - \cos x}{x^2} = \dfrac{1}{2}$
8. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin x}{x} = 1$
9. $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{n}{2^n} = 0$

**Утверждение 3.5.** $(1 + x)^p \simeq 1 + px$, $x \to 0$.

# 4 $\overline{o}$ и $\underline{O}$.

**Определение 4.1.** *Символ Ландау — $\overline{o}$.*

1. $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=0$, *тогда* $f(x):=\overline{o}(g(x))$, $x\to x_0$.

2. $f(x)=\overline{o}(g(x))$, *если* $\forall\varepsilon>0\ \exists\delta>0$: $|f(x)|\leqslant\varepsilon|g(x)|$, $\forall x\in\mathring{U}_\delta(x_0)$.

**Свойство 4.1.** 1. $f(x)$ *называется бесконечно малой в точке* $x_0$, *если* $f(x)=\overline{o}(1)$, $x\to x_0$.

2. $\overline{o}(f(x))+\overline{o}(f(x))=\overline{o}(f(x))$, $x\to x_0$.

3. $C\cdot\overline{o}(f(x))=\overline{o}(f(x))$, $x\to x_0$.

4. $\overline{o}(\overline{o}(f(x)))=\overline{o}(f(x))$, $x\to x_0$.

**Определение 4.2.** 1. *Пусть* $f$, $g$ *обе бесконечно большие или бесконечно малые.* $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=1$, *тогда* $f(x)\sim g(x)$, $x\to x_0$.

2. $f(x)\sim g(x)\Leftrightarrow\forall\varepsilon>0\ \exists\delta>0\ (1-\varepsilon)|g(x)|\leqslant|f(x)|\leqslant(1+\varepsilon)|g(x)|$, $\forall x\in\mathring{U}_\delta(x_0)$.

**Утверждение 4.1.** $f(x)\sim g(x)$, $x\to x_0\Leftrightarrow f(x)=g(x)+\overline{o}(g(x))$, $x\to x_0$.

**Определение 4.3.** $f(x)=\underline{O}(g(x))$, $x\to x_0$, *если* $\exists\ C>0$: $|f(x)|\leqslant C|g(x)|$ *в некоторой выколотой окрестности точки* $x_0$.

**Определение 4.4.** $f(x)\asymp g(x)$, $x\to x_0$, *если* $\exists\ c_1,c_2>0$: $c_1|g(x)|\leqslant|f(x)|\leqslant c_2|g(x)|$ *в некоторой выколотой окрестности точки* $x_0$.

**Теорема 4.1.** *Пусть* $f(x)\sim f_1(x)$, $x\to x_0$ *и функции не обращаются в* $0$ *в некоторой* $\mathring{U}(x_0)$. *Тогда* $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)g(x)$ *и* $\lim\limits_{x\to x_0}f_1(x)g(x)$ $\exists$ *или* $\nexists$ *одновременно, и если* $\exists$, *то они равны. Словами: в произведение пределов сомножители можно заменять на эквивалентные; слагаемые нельзя!*

*Доказательство.* $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)g(x)=\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{f_1(x)}\cdot f_1(x)g(x).$ □

**Утверждение 4.2.** $(1+t)^\alpha=1+\alpha t+\overline{o}(t)$, $t\to 0$.

**Утверждение 4.3.** $e^t=1+t+\overline{o}(t)$, $t\to 0$.

**Утверждение 4.4.** *Если* $\exists\ \lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)}=k\in\mathbb{R}\setminus\{0\}\Rightarrow f(x)\asymp g(x),x\to x_0\Rightarrow f(x)=\underline{O}(g(x))$ *и* $g(x)=\underline{O}(f(x)),x\to x_0$.

## 4.1 Асимптотические равенства.

1. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$; $\sin x\sim x$; $\sin x=x+\overline{o}(x)$

2. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{x^2}=\dfrac{1}{2}$; $1-\cos x\sim\dfrac{x^2}{2}$; $\cos x=1-\dfrac{x^2}{2}+\overline{o}(x^2)$

3. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x)}{x}=1$; $\ln(1+x)\sim x$; $\ln(1+x)=x+\overline{o}$
   $\log_a(1+x)\sim\dfrac{x}{\ln a}$; $\log_a(1+x)=\dfrac{x}{\ln a}+\overline{o}(x)$

4. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-1}{x}=1$; $e^x-1\sim x$; $e^x=1+x+\overline{o}(x)$
   $e^x-1=x+\overline{o}(x)$; $a^x=1+x\ln a+\overline{o}(x)$

5. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1+x)^s-1}{x}=s$; $(1+x)^s-1\sim sx$; $(1+x)^s=1+sx+\overline{o}(x)$

# 5 Функции, непрерывные на отрезке.

**Определение 5.1.** *$f$ непрерывна на отрезке $[a, b]$, $a, b \in \mathbb{R}$; $a < b \Leftrightarrow \forall x_0 \in [a, b]$ $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$.*

**Заметка 5.1.** $C(X) = \{$*множество функций непрерывных на множестве* $X\}$. *$f \in C(x)$: $\forall x_0 \in X$ $\forall \varepsilon > 0$ $\exists \delta > 0$: $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$ $\forall |x - x_0| < \delta$.*

## 5.1 Первая теорема Вейерштрасса.

**Теорема 5.1** (Первая теорема Вейерштрасса)**.** *$f \in C([a, b])$. Тогда $f$ ограничена на $[a, b]$.*

*Доказательство.* НУО докажем, что $f$ ограничена сверху.
\# $f$ неограничена сверху. $\exists x_n \in [a, b]$: $f(x_n) > n$. $\{x_n\} \in [a, b]$. $\exists$ $x_{n_k} \to x_0 \in [a, b]$. $f(x_0) = \lim\limits_{x_{n_k} \to x_0} f(x_{n_k}) = \infty$ #. □

## 5.2 Вторая Теорема Вейерштрасса.

**Теорема 5.2** (Вторая Теорема Вейерштрасса)**.** *Пусть $f \in C([a, b])$. Тогда $\exists \overline{x}, \underline{x} \in [a, b]$: $f(\overline{x}) = \min\limits_{[a,b]} f(x), f(\underline{x}) = \max\limits_{[a,b]} f(x)$.*

*Доказательство.* # $\inf\limits_{[a,b]} f(x) = m$ и не достигается. $f(x) > m$ $\forall x \in [a, b] \Rightarrow g(x) := \dfrac{1}{f(x) - m}$ неограничена на $[a, b]$. Но $\forall \varepsilon > 0$ $\exists$ $x_\varepsilon \in [a, b]$: $f(x_\varepsilon) < m + \varepsilon \Rightarrow g(x_\varepsilon) > \dfrac{1}{\varepsilon} \Rightarrow g$ неограничена сверху на $[a, b]$ #. □

## 5.3 Теорема Больцано-Коши.

**Теорема 5.3** (Больцано-Коши)**.** *$f \in C([a, b])$, $f(a)f(b) < 0$. Тогда $\exists$ $x_0 \in [a, b]$: $f(x_0) = 0$.*

*Доказательство №1.* НУО $f(a) < 0; f(b) > 0$. $a_0 := a, b_0 := b$. $[a_k, b_k] \to [a_{k+1}, b_{k+1}]$. $\lim a_k = \alpha, \lim b_k = \beta$. $\lim(a_k - b_k) = \alpha - \beta$, $\lim \dfrac{b - a}{2^k} = 0 \Rightarrow \alpha = \beta =: x_0$. $f(a_k) < 0, f(b_k) > 0$. $\begin{cases} f(x_0) = \lim\limits_{k \to \infty} f(a_k) \leqslant 0 \\ f(x_0) = \lim\limits_{k \to \infty} f(b_k) \geqslant 0 \end{cases} \Rightarrow$ $f(x_0) = 0$. □

*Доказательство №2.* $X = \{x \in [a, b] : f(x) < 0\} \neq \emptyset$. $\exists x_0 = \sup X < b$. □

## 5.4 Третья Теорема Вейерштрасса.

**Теорема 5.4** (Третья Теорема Вейерштрасса)**.** *$f \in C([a, b])$, $M = \max\limits_{[a,b]} f(x), m = \min\limits_{[a,b]} f(x)$. Тогда $E(f) = [m; M]$.*

## 5.5 Равномерная непрерывность.

**Определение 5.2** (Равномерная непрерывность)**.** *$f$ равномерно непрерывна на $X$, если $\forall \varepsilon > 0$ $\exists \delta > 0$: $\forall x_0 \in X$ $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$ $\forall |x - x_0| < \delta$.*

**Теорема 5.5** (?Коши-Вейерштрасса?)**.** *Пусть $f \in C([a, b])$. Тогда $f$ равномерно непрерывна на $[a, b]$.*

*Доказательство.* # $\exists \varepsilon > 0$: $\forall \delta > 0$: $\exists x_1 \xi$ $|f(x) - f(\xi)| \geqslant \varepsilon$, $|x - \xi| < \delta$. Возьмем $\delta_1 = 1$ $\exists x_1, \xi_1$: $|x_1 - \xi_1| < 1$ и $|f(x_1) - f(\xi_1)| \geqslant \varepsilon, \ldots, \delta_n = \dfrac{1}{n}$ $\exists x_n, \xi_n$: $|x_n - \xi_n| < \dfrac{1}{n}$ и $|f(x_n) - f(\xi_n)| \geqslant \varepsilon$. $\{x_n\}, \{\xi_n\} \subset [a, b]$. $\{x_{n_m} \to x_0\}, \{\xi_{n_m} \to \xi_0\} \Rightarrow x_0 = \xi_0$. $|f(x_{n_m}) \to f(x_0) - f(\xi_{n_m}) \to f(x_0)| \geqslant \varepsilon$ #. □

# 6 Дифференциальное исчисление.

**Определение 6.1.** *$f$ дифференцируема в точке $x_0$, если $\exists\, k \in \mathbb{R}$: $f(x) = f(x_0) + k(x - x_0) + \overline{o}(x - x_0)$.*

**Утверждение 6.1.** *Если $f$ дифференцируема в точке $x_0 \Leftrightarrow \exists \lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = k$.*

*Доказательство.* $\overline{o}(x - x_0) + k(x - x_0) = f(x) - f(x_0) \Leftrightarrow k + \dfrac{\overline{o}(x - x_0)}{x - x_0} = \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \Leftrightarrow k = k + \lim \dfrac{\overline{o}(x - x_0)}{x - x_0} = \lim \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$. □

**Определение 6.2.** *Такое $k$ называется производной в точке $x_0$. Обозначается $f'(x_0) = \lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$.*

**Утверждение 6.2.** *Если $f$ дифференцируема, то она непрерывна.*

**Определение 6.3.** *Производная (функция) функции $f \to g(x) = f'(x)$: $x_0 \mapsto \lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$; $\Delta x = x - x_0$; $x_0 \mapsto \lim\limits_{x \to \Delta x} \dfrac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$; $f'(x) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$.*

**Заметка 6.1.** *$f(\tilde{x}) = f(x) \cdot f'(x)(\tilde{x} - x) + \overline{o}(\tilde{x} - x)$. $f(x + \Delta x) = f(x) + f'(x) \cdot \Delta x + \overline{o}(\Delta x)$; $\Delta f(x) := f(x + \Delta x) - f(x)$. $\Delta f(x) = f'(x) \cdot \Delta x + \overline{o}(\Delta x)$, $\Delta x \to 0$.*

**Определение 6.4** (Дифференциал функции)**.** $df(x) := f'(x)\Delta x$.

**Заметка 6.2.** *Пусть $f(x) = x$. $\Delta x = 1 \cdot \Delta x + 0$, $\Delta f(x) = f'(x)\Delta x + \overline{o}(\Delta x) \Rightarrow f'(x) = 1 \Rightarrow df(x) = \Delta x$. Тогда $df(x) = f'(x)d(x)$, $f'(x) = \dfrac{df(x)}{dx}$.*

**Заметка 6.3.** *Дифференциал — линейная часть малого приращения функции.*

## 6.1 Правила дифференцирования.

(рассматриваем дифференцируемые функции):

1. $(c)' = 0$; $(cf(x))' = cf'(x)$
2. $(f(x) \pm g(x))' = f'(x) \pm g'(x)$
3. $(f(x) \cdot g(x))' = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x) \to d(fg) = df \cdot g + dg \cdot f$
4. $\left(\dfrac{1}{f(x)}\right)' = -\dfrac{f'(x)}{f^2(x)}$, $f(x) \neq 0$
5. $\left(\dfrac{f(x)}{g(x)}\right)' = \dfrac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)}$
6. Пусть $f$ дифференцируема в точке $x$, $g$ дифференцируема в точке $f(x)$. Тогда $g(f(x))$ дифференцируема в точке $x$ и $(g(f(x)))' = g'(f(x)) \cdot f'(x)$ или $dg(f(x)) = g'(f(x)) \cdot df(x)$
7. $f$ дифференцируема в точке $x_0$ и $f'(x_0) \neq 0$. Если $f$ обратима в окрестности точки $x_0$, то $f^{-1}$ дифференцируема в точке $y_0 = f(x_0)$ и $(f^{-1})'(y_0) = \dfrac{1}{f'(x_0)} = \dfrac{1}{f'(f^{-1}(y_0))}$
8. $(\sin x)' = \cos x$

9. $(\cos x)' = -\sin x$
10. $(\operatorname{tg} x)' = \dfrac{1}{\cos^2 x}$
11. $(\operatorname{ctg} x)' = -\dfrac{1}{\sin^2 x}$
12. $(\arcsin x)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
13. $(\arccos x)' = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
14. $(\operatorname{arctg} x)' = \dfrac{1}{1+x^2}$
15. $(\operatorname{arcctg} x)' = -\dfrac{1}{1+x^2}$
16. $(e^x)' = e^x$; $(a^x)' = a^x \cdot \ln a$
17. $(\ln x)' = \dfrac{1}{x}$; $(\log_a x)' = \dfrac{1}{x \ln a}$
18. $(x^p)' = px^{p-1}$

## 6.2 Выпуклость.

**Определение 6.5.** *Функция называется выпуклой на отрезке $[a, b]$ если для каждого отрезка $[x_1, x_2]$, принадлежащего $[a, b]$, график функции f расположен не выше отрезка с концами в $(x_1, f(x_1))$ и $(x_2, f(x_2))$ (строго выпуклой, если ниже). Иными словами, если для любых $x_1, x, x_2 \in [a, b]$, $x_1 < x < x_2$ справедливо неравенство $f(x) \leqslant y(x) = \dfrac{x_2 - x}{x_2 - x_1} f(x_1) + \dfrac{x - x_1}{x_2 - x_1} f(x_2)$, что равносильно $(x_2 - x_1) f(x) \leqslant (x_2 - x) f(x_1) + (x - x_1) f(x_2)$.*

**Определение 6.6** (Из конспекта к зачету)**.** *Пусть $f : X \to \mathbb{R}$, $X$ — выпуклое множество.*
*$f(x)$ — выпуклая (выпуклая вниз) на $X$, если*

$$\forall x_1, x_2 \in X \qquad f\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) \leqslant \frac{f(x_1) + f(x_2)}{2}$$

*$f(x)$ — строго выпуклая на $X$, если*

$$\forall x_1, x_2 \in X \qquad f\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) < \frac{f(x_1) + f(x_2)}{2}$$

*$f(x)$ — вогнутая (выпуклая вверх) на $X$, если*

$$\forall x_1, x_2 \in X \qquad f\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) \geqslant \frac{f(x_1) + f(x_2)}{2}$$

*$f(x)$ — строго вогнутая на $X$, если*

$$\forall x_1, x_2 \in X \qquad f\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) > \frac{f(x_1) + f(x_2)}{2}$$

**Лемма 6.1.** *Пусть функция $f$ определена на отрезке $[a, b]$. Тогда она выпукла тогда и только тогда, когда для любых $x_1, x, x_2 \in [a, b]$, $x_1 < x < x_2$, справедливо любое из следующих трех неравенств:*

$$\frac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1} \leqslant \frac{f(x_2) - f(x)}{x_2 - x},$$

$$\frac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1} \leqslant \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1},$$

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \leqslant \frac{f(x_2) - f(x)}{x_2 - x},$$

*причем в случае строгой выпуклости неравенства также будут строгими.*

*Доказательство.* Запишем $x_2 - x_1$ как $(x_2 - x) + (x - x_1)$, тогда неравенство примет вид

$$(x_2 - x)f(x) + (x - x_1)f(x) \leqslant (x_2 - x)f(x_1) + (x - x_1)f(x_2),$$

после преобразования получаем

$$(x_2 - x)(f(x) - f(x_1)) \leqslant (x - x_1)(f(x_2) - f(x)),$$

что равносильно

$$\frac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1} \leqslant \frac{f(x_2) - f(x)}{x_2 - x}.$$

Запишем $x_2 - x$ как $(x_2 - x_1) - (x - x_1)$, тогда неравенство примет вид

$$(x_2 - x_1)f(x) \leqslant (x_2 - x_1)f(x_1) - (x - x_1)f(x_1) + (x - x_1)f(x_2),$$

после преобразования получаем

$$(x_2 - x_1)(f(x) - f(x_1)) \leqslant (x - x_1)(f(x_2) - f(x_1)),$$

что равносильно

$$\frac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1} \leqslant \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}.$$

Запишем $x - x_1$ как $(x_2 - x_1) - (x_2 - x)$, тогда неравенство примет вид

$$(x_2 - x_1)f(x) \leqslant (x_2 - x)f(x_1) + (x_2 - x_1)f(x_2) - (x_2 - x)f(x_2),$$

после преобразования получаем

$$(x_2 - x)(f(x_2) - f(x_1)) \leqslant (x_2 - x_1)(f(x_2) - f(x)),$$

что равносильно

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \leqslant \frac{f(x_2) - f(x)}{x_2 - x}.$$

□

**Определение 6.7** (Левая и правая производная)**.**

$$f'_-(x_0) = f'(x_0 - 0) := \lim_{h \to +0} \frac{f(x_0) - f(x_0 - h)}{h},$$

$$f'_+(x_0) = f'(x_0 + 0) := \lim_{h \to +0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}.$$

**Заметка 6.4.** $\exists f'(x_0) \Leftrightarrow$ *существует производная слева и справа и* $f'_-(x_0) = f'_+(x_0)$.

**Теорема 6.1.** *Пусть функция $f$ выпукла на $[a,b]$. Тогда*

*a)* $\forall x_0 \in (a,b)\ \exists f'_-(x_0)$ *и* $f'_+(x_0)$, *причем* $f'_-(x_0) \leqslant f'_+(x_0)$

*b)* $f \in C(a,b)$

*c)* $\forall x_1, x_2 \in (a,b)$, $x_1 < x_2$, *имеем* $f'_+(x_1) \leqslant f'_-(x_2)$ *(если $f$ строго выпукла, то $f'_+(x_1) < f'_-(x_2)$)*

*d)* $f'_-$ *и* $f'_+$ *— неубывающие на $(a,b)$ функции (возрастающие в случае строгой выпуклости)*

*e)* $f$ *дифференцируема на $(a,b)$ всюду, кроме, быть может, не более чем счетного числа точек*

*Доказательство.* a) Пусть $x_0 \in (a,b)$, $h > 0$ — такое, что $x_0 + h \in (a,b)$ тоже. Тогда, учитывая, что $x_0 - (x_0 - h) = (x_0 + h) - x_0 = h$, по неравенству $\dfrac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1} \leqslant \dfrac{f(x_2) - f(x)}{x_2 - x}$ имеем

$$\frac{f(x_0) - f(x_0 - h)}{h} \leqslant \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h};$$

при убывании $h$ левая часть неравенства неубывает в силу $\dfrac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \leqslant \dfrac{f(x_2) - f(x)}{x_2 - x}$, правая — невозрастает в силу $\dfrac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1} \leqslant \dfrac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$. Следовательно при $h \to +0$ существуют оба предела, равные $f'_-(x_0)$ и $f'_+(x_0)$, а из неравенства получаем $f'_-(x_0) \leqslant f'_+(x_0)$.

b) Из существования односторонних производных имеем для любого $x_0 \in (a,b)$

$$f(x_0 + h) = \begin{cases} f(x_0) + f'_+(x_0)h + \overline{o}(h), & h \to +0 \\ f(x_0) + f'_-(x_0)h + \overline{o}(h), & h \to -0 \end{cases}$$

откуда в любом случае получаем $f(x_0 + h) = f(x_0) + \overline{o}(1), h \to 0$, т.е. $f$ непрерывна в $x_0$.

c) Для всякого $x \in (x_1, x_2)$ имеем

$$\frac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1} \leqslant \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$$

(строгое неравенство в случае строгой выпуклости).

При $x \to x_1 + 0$ левая часть неравенства невозрастает (строгое неравенство при этом сохраняется), поэтому мы можем перейти к пределу:

$$f'_+(x_1) \leqslant \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}.$$

Аналогично, при $x \to x_2 - 0$ имеем

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \leqslant \frac{f(x_2) - f(x)}{x_2 - x}$$

(строгое неравенство в случае строгой выпуклости).

Таким образом, имеем

$$f'_+(x_1) \leqslant \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \leqslant f'_-(x_2)$$

(строгое неравенство в случае строгой выпуклости), откуда следует требуемое.

d) Для $x_1, x_2 \in (a,b), x_1 < x_2$ из a) и c) имеем $f'_-(x_1) \leqslant f'_+(x_1) \leqslant f'_-(x_2) \leqslant f'_+(x_2)$ (в случае строгой выпуклости $f'_-(x_1) \leqslant f'_+(x_1) < f'_-(x_2) \leqslant f'_+(x_2)$), откуда следует требуемая монотонность.

e) Для доказательства потребуется следующая лемма:

**Лемма 6.2.** *Пусть $g(x)$ монотонная на $[a,b]$. Тогда $g(x)$ не может иметь разрывов второго рода и имеет не более чем счетное число разрывов (устранимых или первого рода).*

В силу монотонности множество точек разрыва функции $f'_-$ на $(a,b)$ не более чем счетно. Покажем, что в точках непрерывности функции $f'_-$ существует производная $f'$ (т.е. $f'_- = f'_+$).

Пусть $x_0$ — точка непрерывности функции $f'_-$. Для всякого $h > 0$ такого, что $x_0 + h \in (a,b)$ из a) и c) имеем

$$f'_-(x_0) \leqslant f'_+(x_0) \leqslant f'_-(x_0 + h),$$

откуда

$$0 \leqslant f'_+(x_0) - f'_-(x_0) \leqslant f'_-(x_0 + h) - f'_-(x_0).$$

В силу непрерывности $f'_-$ имеем $f'_-(x_0+h) - f'_-(x_0) \to 0$, откуда по теореме о зажатой функции $f'_+(x_0) - f'_-(x_0) \to 0$, а так как это выражение на самом деле не зависит от $h$, получаем, что $f'_+(x_0) = f'_-(x_0)$.

□

## 6.3 Вторая производная.

**Определение 6.8.** *Пусть $f(x)$ дифференцируема $\forall x \in X$, тогда $f'(x) : X \to \mathbb{R}$. $(f')' =: f''$.*

### 6.3.1 Многочлен Тейлора.

**Определение 6.9** (Многочлен Тейлора)**.** $T_{n,x_0}f = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \dfrac{f''(x_0)}{2}(x - x_0)^2 + \dfrac{f'''(x_0)}{3!}(x - x_0)^3 + \dots + \dfrac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n = \sum\limits_{k=0}^{n} \dfrac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k.$

### 6.3.2 Формула Тейлора.

**Теорема 6.2** (Формула Тейлора.)**.** *$f(x) = T_{n,x_0}f + R_{n,x_0}f$. Остатки бывают в разных формах (например в форме Пеано это $\overline{o}((x - x_0)^n)$).*

*Доказательство.* $f(x) = T_{n,x_0}f + \overline{o}((x - x_0)^n) \Leftrightarrow f(x) - T_{n,x_0}f = \overline{o}((x - x_0)^n) \Leftrightarrow \lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x) - T_{n,x_0}f}{(x - x_0)^n} =$

$$\left[\frac{0}{0}\right] \overset{\text{правило Лопиталя}}{=} \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x) - (f'(x_0) + f''(x_0)(x - x_0) + \dots + \frac{f^{(n)}}{(n-1)!}(x - x_0)^{n-1})}{n(x - x_0)^{n-1}} = \dots =$$

$$= \lim_{x \to x_0} \frac{f^{(n)}(x) - f^{(n)}(x_0)}{n!} = 0.$$ □

### 6.3.3 Правило Лопиталя.

**Теорема 6.3** (Правило Лопиталя.)**.** *Пусть $f(x)$, $g(x)$ непрерывно дифференцируемы в окрестности точки $x_0$, $x_0 \in \mathbb{R}$. Пусть $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \left[\dfrac{\infty}{\infty}\right]$ или $\left[\dfrac{0}{0}\right]$. Тогда, если $\exists \lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f'(x)}{g'(x)} = a$, то $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = a$.*

### 6.3.4 Утверждения.

**Утверждение 6.3.** $\exists f'(x_0) \Leftrightarrow f(x) = f(x_0) + A \cdot (x - x_0) + \overline{o}(x - x_0)$ *и* $A = f'(x_0)$.

**Утверждение 6.4.** $f$ *непрерывно дифференцируема* $n$ *раз в некоторой окрестности точки* $x_0 \Rightarrow$ $f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \dfrac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \dots + \dfrac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + \overline{o}((x - x_0)^n)$.

### 6.3.5 Применение Тейлора.

**Утверждение 6.5.** $e^x = 1 + x + \dfrac{x^2}{2!} + \dfrac{x^3}{3!} + \dots + \dfrac{x^n}{n!} + \overline{o}(x^n)$.

**Утверждение 6.6.** $\sin x = 0 + x + \dfrac{0}{2!}x^2 - \dfrac{1}{3!}x^3 + 0 \cdot x^4 + \dfrac{1}{3!}x^5 + \dots = x - \dfrac{x^3}{3!} + \dfrac{x^5}{5!} - \dots + (-1)^n \dfrac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \overline{o}(x^{2n+2})$.

**Утверждение 6.7.** $\cos x$

**Утверждение 6.8.** $(1 + x)^\alpha$