

# Содержание

<b>1</b>	<b>Последовательность.</b>	<b>2</b>
1.1	Предел последовательности. . . . .	2
<b>2</b>	<b>Возведение в вещественную степень.</b>	<b>4</b>

# 1 Последовательность.

$$f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$f(n) =: f_n$$

**Опр.** Последовательность называется ограниченной сверху, если  $\exists M : |f_n| \leq M$ . Снизу, если  $\exists m : f_n \geq m$ .  $f_n$  — ограниченная, если ограничена сверху и снизу.

**Опр.**  $M_0 = \sup f_n$ , если  $M_0$  — верхняя грань и  $\forall \varepsilon > 0 \exists n_0 : f_{n_0} > M_0 - \varepsilon$ .  $m_0 = \inf f_n$ , если  $m_0$  — нижняя грань и  $\forall \varepsilon > 0 \exists n_0 : f_{n_0} < m_0 + \varepsilon$ .

**Аксиома вещественных чисел.** Если множество  $X$  ограничено сверху, то  $\exists \sup X$ . Если  $f_n$  неограничено сверху, то  $\sup f_n =: +\infty$ . Если снизу, то  $\inf f_n =: -\infty$ .

**Опр.**  $f_n$  — бесконечно большая (бб), если  $\forall \varepsilon > 0 \exists N = N(\varepsilon) : |f_n| > \frac{1}{\varepsilon} \forall n \geq N$ .  $f_n$  — не бб,  $\exists \varepsilon > 0 : \forall N \exists n > N : |f_n| \leq \frac{1}{\varepsilon}$ .

**Опр.**  $f_n$  — бесконечно малая (бм), если  $\forall \varepsilon > 0 \exists N = N(\varepsilon) : |f_n| < \varepsilon \forall n \geq N$ .

**Лемма.**  $f_n$  — бм  $\Rightarrow f_n$  — ограничена.

Доказательство:

Пусть  $\varepsilon = 1$ , тогда  $\exists N : |f_n| \leq 1 \forall n \geq N$

$M := \max\{|f_1|, \dots, |f_{N-1}|, 1\}$ , тогда  $|f_n| \leq M \forall n \in \mathbb{N}$ .

**Лемма.**

$$a) f_n \text{ — бб} \Rightarrow \frac{1}{f_n} \text{ — бм}$$

$$b) f_n \text{ — бм} (f_n \neq 0) \Rightarrow \frac{1}{f_n} \text{ — бб}$$

**Лемма.**  $f_n$  — неограниченная последовательность, тогда существует бб подпоследовательность  $f_{nk}$ .

Доказательство:

$$\begin{aligned} & \exists n_1 : |f_{n_1}| > 1, \\ & \exists n_2 > n_1 : |f_{n_2}| > 2, \\ & \exists n_3 > n_2 : |f_{n_3}| > 3, \\ & \vdots, \\ & \exists n_1 < n_2 < \dots < n_k < \dots \\ & |f_{nk}| > k \Rightarrow f_{nk} \text{ — бб.} \end{aligned}$$

**Лемма.**

$$a) \text{ бм} + \text{бм} = \text{бм}$$

$$b) \text{ бм} \cdot C = \text{бм}$$

$$c) \text{ бм} \cdot \text{бм} = \text{бм}$$

$$d) \text{ бб} \cdot C = \text{бб}, C \neq 0$$

$$e) \text{ бб} \cdot \text{бб} = \text{бб}$$

## 1.1 Предел последовательности.

$a_n$  — последовательность.

**Опр.**  $a = \lim a_n$ , если  $\forall \varepsilon > 0 \exists N : |a_n - a| < \varepsilon \forall n \geq N$ .

**Опр.** Эпсилон окрестность:  $U_\varepsilon(a) := (a - \varepsilon; a + \varepsilon)$ . Выколотая эпсилон окрестность:  $\overset{\circ}{U}_\varepsilon(a) := U_\varepsilon(a) \setminus \{a\}$ .

$$\varepsilon_1 < \varepsilon_2 \Rightarrow U_{\varepsilon_1}(a) \subset U_{\varepsilon_2}(a), a \in \mathbb{R}.$$

**Опр.**  $\mathbb{R} \cup \{\pm\infty\} = \overline{\mathbb{R}}$  — расширенная числовая прямая.

**Опр.**  $\varepsilon > 0 U_\varepsilon(+\infty) = (\frac{1}{\varepsilon}; +\infty)$ ;  $U_\varepsilon(-\infty) = (-\infty; -\frac{1}{\varepsilon})$ .

$$\lim |a_n| = +\infty \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists N(\varepsilon) : |a_n| > \frac{1}{\varepsilon}.$$

Если  $a_n$  — бб  $\Leftrightarrow \lim |a_n| = +\infty$ .

Если  $a_n$  — бм  $\Leftrightarrow \lim |a_n| = 0$ .

**Утв.**  $\lim a_n = a \Leftrightarrow \exists$  бм последовательность  $d_n$ , такая что  $a_n = a + d_n$ .

**Утв.** Если предел последовательности существует, то он единственный.

Доказательство:

$$\exists a < b \text{ и } a = \lim a_n, b = \lim a_n.$$

$$\text{Тогда } \varepsilon := \frac{b-a}{42} :$$

$$\exists N_1 : a_n \in U_\varepsilon(a) \forall n \geq N_1$$

$$\begin{aligned} \exists N_2 : a_n \in U_\varepsilon(b) \forall n \geq N_2 \\ \Rightarrow a_n \in (U_\varepsilon(a) \cap U_\varepsilon(b)) = \emptyset \quad \forall n \geq \max\{N_1, N_2\}!?! \end{aligned}$$

**Предельный переход в неравенства.**  $a_n \leq b_n \quad \forall n \geq N_0$ .

Пусть  $\exists \lim a_n = a; \lim b_n = b, a, b \in \overline{\mathbb{R}}$

Тогда  $a \leq b$ .

Доказательство:

$$\begin{aligned} \text{Пусть } a > b. \text{ Тогда } \varepsilon := \frac{a-b}{42} : \\ \exists N_1 : a_n \in U_\varepsilon(a) \forall n \geq N_1 \\ \exists N_2 : a_n \in U_\varepsilon(b) \forall n \geq N_2 \\ \Rightarrow a_n > b_n \quad \forall n \geq \max\{N_1, N_2\}!?! \end{aligned}$$

**Лемма о сжатых последовательностях.** Пусть  $a_n \leq b_n \leq c_n \quad \forall n \geq N_0$  и  $\exists \lim a_n = \lim c_n = a \in \overline{\mathbb{R}}$ , тогда  $\exists \lim b_n = a$ .

Доказательство:

$$\begin{aligned} \varepsilon > 0 : \\ \exists a_n \in U_\varepsilon, n \geq N_1 \\ \exists c_n \in U_\varepsilon, n \geq N_2 \\ \Rightarrow b_n \in U_\varepsilon : \forall n \geq \{N_1, N_2, N_0\} =: N \Rightarrow a = \lim b_n \text{ по определению.} \end{aligned}$$

**Лемма об отделимости от нуля.** Пусть  $\exists \lim a_n = a > 0$ . Тогда  $\exists N : a_n > \frac{a}{2} > 0, \forall n \geq N$ .

Следствие. Если  $\lim a_n \neq 0 \Rightarrow \frac{1}{a_n}$  ограничена ( $a_n \neq 0$ ).

Доказательство:

$$\begin{aligned} \lim a_n = a > 0 \\ \exists N_1 : a_n > \frac{a}{2} \Rightarrow 0 < \frac{1}{a_n} < \frac{2}{a} \quad \forall n \geq N_1 \\ \min\{a_1, \dots, a_{N-1}, \frac{a}{2}\} \leq \frac{1}{a_n} \leq \max\{a_1, \dots, a_{N-1}, \frac{2}{a}\} \end{aligned}$$

**Теорема. Арифметические свойства предела.** Пусть  $\lim a_n = a, \lim b_n = b; a, b \in \overline{\mathbb{R}}$ . Тогда:

1.  $\lim(a_n + b_n) = a + b$ , кроме случаев  $+\infty + (-\infty), -\infty + (+\infty)$
2.  $\lim(ka_n) = ka$ , кроме случая  $0 \cdot (\pm\infty)$
3.  $\lim(a_n \cdot b_n) = ab$ , кроме случая  $0(\pm\infty)$
4.  $\lim \frac{a_n}{b_n} = \frac{a}{b}$ , кроме случаев  $\frac{0}{0}, \frac{\infty}{\infty}$

Доказательство:

$$\begin{aligned} a, b \in \mathbb{R} \\ a_n = a + \alpha_n, b_n = b + \beta_n; \alpha_n, \beta_n \rightarrow 0. \\ 1. a_n + b_n = (a + b) + (\alpha_n + \beta_n) \Leftrightarrow \lim(a_n + b_n) = a + b. \\ 2. \text{Аналогично.} \\ 3. a_n b_n = (a + \alpha_n)(b + \beta_n) = ab + \alpha_n b + \beta_n a + \alpha_n \beta_n \\ 4. \text{Если } b \neq 0 \quad \frac{1}{b_n} \rightarrow \frac{1}{b} \text{ — ограничена} \\ \frac{a_n}{b_n} - \frac{a}{b} = \frac{a + \alpha_n}{b + \beta_n} - \frac{a}{b} = \frac{\alpha_n b - \beta_n a}{b_n b} = \frac{1}{b} \cdot \frac{1}{b_n} \cdot (\alpha_n b - \beta_n a) \\ \text{Если } b = 0 \Rightarrow b_n \rightarrow 0 \Rightarrow \frac{1}{b_n} \rightarrow \infty \Rightarrow a_n \cdot \frac{1}{b_n} = \text{ограниченная} \cdot \infty \end{aligned}$$

**Опр.** Линейное пространство — множество, сумма двух элементов которого лежит в этом множестве и элемент с коэффициентом лежит в этом множестве.

**Опр.** Последовательность называется возвратной, если  $a_n = \beta_{n-1}a_{n-1} + \beta_{n-2}a_{n-2} + \dots + \beta_{n-k}a_{n-k}; \beta_i$  — фиксированные коэффициенты.

$$a_n^{(1)}, a_n^{(2)} \Rightarrow \forall \lambda, \mu \in \mathbb{R} \quad \lambda a_n^{(1)} + \mu a_n^{(2)} \text{ тоже удовлетворяет } (x).$$

$$a_n := t^n$$

$$t^k = \beta_{n-1}t^{k-1} + \dots + \beta_{n-k}$$

$$t_0 \text{ — простой корень, то } t_0^n$$

$$t_0 \text{ — корень } (m) \Rightarrow t_0^n; nt_0^n; n^2 t_0^n; \dots; n^{m-1} t_0^n$$

**Теорема.**

1. Пусть  $a_n$  возрастает и ограничена сверху. Тогда  $\exists \lim a_n = \sup a_n$
2. Пусть  $a_n$  убывает и ограничена снизу. Тогда  $\exists \lim a_n = \inf a_n$

Доказательство:

fix  $\varepsilon > 0$

Так как  $a_n$  — ограничена, то  $\exists M \sup a_n \in \mathbb{R}$ ; И  $\exists N : a_N > M - \varepsilon$ . Тогда  $\begin{cases} a_n \geq M - \varepsilon \\ a_n \leq M < M + \varepsilon \end{cases} \forall n \geq N$ , так как  $a_n \uparrow \Rightarrow$   
 $\exists N : |a_n - M| < \varepsilon \forall n \geq N \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = M$  по определению.

Найти предел последовательности  $a_n = (1 + \frac{1}{n})^n$ .

$$b_n = (1 + \frac{1}{n})^{n+1}; b_1 = 4, b_2 = 3, \dots b_n \downarrow$$

$$b_n \geq 1$$

Докажем, что  $b_n$  убывает.

$$\frac{b_n}{b_{n+1}} = \frac{(\frac{n+1}{n})^{n+1}}{(\frac{n+2}{n+1})^{n+2}} = \frac{n+1}{n} \cdot \frac{n+1}{n+2} = \frac{n+1}{n+2} \cdot (\frac{n^2+2n+1}{n^2+2n})^{n+1} = \frac{n+1}{n+2} \cdot (1 + \frac{1}{n^2+2n})^{n+1} \quad (\text{неравенство Бернулли})$$

$$> \frac{n+1}{n+2} \cdot (1 + \frac{n+1}{n^2+2n}) = \frac{(n+1)(n^2+3n+1)}{(n+2)(n^2+2n)} = \frac{n^3+4n^2+4n+1}{n^3+4n^2+4n} > 1.$$

$$a_n = \frac{b_n}{(1+\frac{1}{n})}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b_n}{1+\frac{1}{n}} = \frac{\lim b_n}{\lim(1+\frac{1}{n})} = \lim b_n - \text{существует.}$$

$$e := \lim_{n \rightarrow \infty} (1 + \frac{1}{n})^n \approx 2.718281828459045\dots$$

**Теорема Вейерштрасса.** Пусть последовательность  $a_n$  ограничена. Тогда существует сходящаяся подпоследовательность.

Доказательство:

$$|a_n| \leq M$$

$$[-M = \alpha_1; M = \beta_1]. \alpha_2 - \text{середина. } a_1 = x_1 \in [\alpha_1; \alpha_2].$$

$$[\alpha_2; \beta_2]. \beta_3 - \text{середина. } x_2 = a_{\min n} \in [\alpha_2; \beta_3].$$

И т.д.

$\alpha_k$  неубывающая и ограниченная сверху.  $\exists \lim \alpha_k = \alpha$ .  $\beta_k$  неубывающая и ограниченная сверху.  $\exists \lim \beta_k = \beta$ .

$$\beta - \alpha = \lim_{k \rightarrow \infty} (\beta_k - \alpha_k) = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{2M}{2^{k-1}} = 0.$$

По построению  $x_k$  — подпоследовательность и  $\alpha_k \leq x_k \leq \beta_k \Rightarrow \exists \lim x_k$ .

**Опр.** Последовательность называется фундаментальной (или последовательностью Коши), если  $\forall \varepsilon > 0 \exists N(\varepsilon) : |a_n - a_k| < \varepsilon \forall n, k \geq N$ .

**Утв.** Пусть  $\exists \lim a_n = a \in \mathbb{R}$ . Тогда  $\{a_n\}$  фундаментальная.

Доказательство:

$$\text{fix } \varepsilon > 0 \exists N : |a_n - a| < \frac{\varepsilon}{2} \forall n \geq N. \text{ Тогда } \forall n, k \geq N |a_n - a_k| = |(a_n - a) + (a - a_k)| \leq |a_n - a| + |a - a_k| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

**Теорема Коши.** Пусть  $\{a_n\}$  фундаментальная последовательность. Тогда  $\exists \lim a_n$ .

Доказательство:

1) (!)  $\{a_n\}$  ограничена.

$$\varepsilon = 1: \exists N: |a_n - a_k| \leq \varepsilon \forall n, k \geq N \Rightarrow a_k \in [a_{N-1}; a_{N+1}] \forall k \geq N$$

$$M = \max\{|a_1|, |a_2|, \dots, |a_N + 1|\} \Rightarrow |a_n| \leq M \forall n.$$

2) Тогда по теореме Вейерштрасса  $\exists a_{n_k}$  — подпоследовательность;  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_{n_k} = a$ .

3) fix  $\varepsilon > 0$ .  $\exists N_1 : |a_{n_k} - a| < \frac{\varepsilon}{2} \forall n_k \geq N_1$

$$\exists N_2 : |a_m - a_n| < \frac{\varepsilon}{2} \forall m, n \geq N_2$$

Пусть  $n \geq \max\{N_1, N_2\} \exists n_k \geq m$ .

$$|a_m - a| = |(a_m - a_{n_k}) + (a_{n_k} - a)| \leq |a_m - a_{n_k}| + |a_{n_k} - a| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \Rightarrow a = \lim_{m \rightarrow \infty} a_m.$$

## 2 Возведение в вещественную степень.

$n \in \mathbb{N}; x^n = x \cdot x \cdot \dots \cdot x, n \text{ раз.}$

$$x^{-n} = \frac{1}{x^n}, x \neq 0$$

$$x^0 := 1$$

$$\sqrt[n]{x} = x^{\frac{1}{n}}$$

$$x^p, p \in \mathbb{Q}, x \geq 0 (p > 0) \text{ или } x > 0 (p \geq 0)$$

$$\text{fix } a > 0, x \in \mathbb{R}$$

$$a^x := \lim_{n \rightarrow \infty} a^{x_n}, \text{ где } \{x_n\} \text{ последовательность, такая что } x_n \in \mathbb{Q}, \lim_{n \rightarrow \infty} x_n := x.$$

Корректность определения.

1.  $x \in \mathbb{Q}$ . Докажем, что  $a^x$  совпадает со старым определением.  
 $x \in \mathbb{Q}$ , берем  $x_n = x \Rightarrow a^x = a^x$
2. Берем произвольную последовательность  $\{x_n\}$ ,  $x_n \rightarrow x \Rightarrow x_n$  — фундаментальная последовательность.  
 $\text{fix } \varepsilon > 0 \mid a^{x_n} - a^{x_k} = a^{x_n} \mid 1 - a^{x_k - x_n} \mid$ . Сходится. Значит ограничена. Тогда  $a^{x_n}$  ограничена. Тогда  $a^{x_n} \mid 1 - a^{x_k - x_n} \mid \leq M \cdot \mid 1 - a^{x_k - x_n} \mid$ .  
 $\exists N : \mid a^{\frac{1}{n}} - 1 \mid < \frac{M}{\varepsilon} \forall n \geq N \Rightarrow \mid a^{\frac{1}{n}} - 1 \mid < \frac{M}{\varepsilon} \Rightarrow \exists N_0 : \mid x_n - x_k \mid < \frac{1}{N} \forall n, k \geq N$   
 $M \cdot \mid 1 - a^{x_k - x_n} \mid < M \cdot \frac{2}{M} \forall n, k \geq N_0 \Rightarrow a^{x_n}$  образует фундаментальную последовательность  $\Rightarrow$  (по теореме Коши)  
 $\exists \lim_{n \rightarrow \infty} a^{x_n}$
3.  $x_n \rightarrow x, y_m \rightarrow x, x_n, y_m \in \mathbb{Q}$   
 $\exists a = \lim a^{x_n}; \alpha = \lim a^{y_m}$   
 $(a - \alpha) = \lim_{n \rightarrow \infty} (a^{x_n} - a^{y_m}) = \lim_{n \rightarrow \infty} a^{x_n} (1 - a^{x_n - y_m}) = 0$   
 $\lim(y_n - x_n) = x - x = 0$

Свойства:

1.  $a^x \cdot a^y = a^{x+y}$   
Пусть  $x_n \rightarrow x, y_n \rightarrow y; x_n, y_n \in \mathbb{Q}$   
 $a^{x_n} \cdot a^{y_n} = a^{x_n + y_n}$   
 $a^x \cdot a^y = \lim a^{x_n} \cdot \lim a^{y_n} = \lim a^{x_n + y_n} = a^{x+y}$
2.  $(a^x)^y = a^{xy}$   
Пусть  $x_n \rightarrow x, y_m \rightarrow y; x_n, y_m \in \mathbb{Q}$   
 $x_n y_m \rightarrow xy$   
 $\lim_{m \rightarrow \infty} (\lim_{n \rightarrow \infty} a^{x_n})^{y_m} = \lim_{n \rightarrow \infty} a^{x_n y_n}$   
 $\lim_{n \rightarrow \infty} (a^x)^{y_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} a^{x y_n}$   
 $\lim_{n \rightarrow \infty} \mid b^{y_n} - a^{x y_n} \mid = 0$ , где  $b = a^x$   
 $\exists N : \mid a^{x_n} - b \mid < \varepsilon \forall n \geq N$   
 $b - \varepsilon < a^{x_n} < b + \varepsilon$   
 $1 - \frac{\varepsilon}{b} < \frac{a^{x_n}}{b} < 1 + \frac{\varepsilon}{b} \uparrow^{y_n}, y_n > 0$ , для  $< 0$  аналогично  
 $(1 - \frac{\varepsilon}{b})^{y_n} < (\frac{a^{x_n}}{b})^{y_n} < (1 + \frac{\varepsilon}{b})^{y_n}$   
 $1 - \frac{y_n \varepsilon}{b} < \frac{a^{x_n y_n}}{b^{y_n}} < 1 + \frac{y_n \varepsilon}{b}$   
 $\Rightarrow \mid \frac{a^{x_n y_n}}{b^{y_n}} - 1 \mid \leq \frac{\mid y_n \mid}{b} \varepsilon$   
 $\mid a^{x_n y_n} - b^{y_n} \mid < \frac{\mid y_n \mid}{b} \cdot b^{y_n} \varepsilon \leq M \varepsilon \forall n \geq N$   
 $\Rightarrow \lim \mid b^{y_n} - a^{x_n y_n} \mid = 0$

fix  $a > 0, a \neq 1$

$y = a^x, x \in \mathbb{R}$

**Опр.**  $f(x)$  — возрастающая на  $X$ , если  $\forall x_1, x_2 \in X \ x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$ .  $f(x)$  неубывающая, если  $\leq$ .

**Утв.** При  $a > 1 \ f(x) = a^x$  — возрастает на  $\mathbb{R}$ ; При  $0 < a, < 1 \ f(x) = a^x$  — убывает на  $\mathbb{R}$ .

Пусть  $x < \xi, x_n \rightarrow x, \xi_n \rightarrow \xi$

$x < x_0 < \xi_0 < \xi$  и  $x_0$  не в окрестности  $x$  и аналогично  $\xi$ .

$\forall n \geq N$

$x_n < x_0 < \xi_0 < \xi$

Тогда  $a^{x_n} < a^{x_0} < a^{\xi_0} < a^{\xi_n}$

$a^x \leq a^{x_0} < a^{\xi_0} \leq a^{\xi} \Rightarrow a^x < a^{\xi}$

$0 < a < 1$

$a^x = (\frac{1}{a})^{-x}; a^{\xi} = (\frac{1}{a})^{-\xi}$

$x < \xi \Rightarrow -x > -\xi \ (\frac{1}{a})^{-x} > (\frac{1}{a})^{-\xi} \Rightarrow a^x > a^{\xi}$

**Опр.** Предельная точка  $x_0$  области  $D$  — такая точка, что  $\forall \varepsilon > 0 \ \overset{\circ}{U}_{\varepsilon}(x_0) \cap D \neq \emptyset$ . Множество предельных точек множества  $D$  — называется замыкание  $D$ , обозначается  $\overline{D}$ .

$f : D \rightarrow \mathbb{R}; D \subset \mathbb{R}$ . Пусть  $x_0$  — предельная точка  $D$ .

**Опр. по Гейне.** Если  $\forall$  последовательности  $x_n \rightarrow x_0; x_n \neq x_0 \ \exists \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = a$ , то говорят, что  $\exists \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = a$ .

**Опр.**  $f$  непрерывна в точке  $x_0 \in D$ , если  $\exists \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$ .

**Опр. по Коши.**  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = a$ , если  $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0: f(x) \subset U_{\varepsilon}(a) \ \forall x \in \overset{\circ}{U}_{\delta}(x_0) \cap D(f)$ .

Равносильность определений по Коши и по Гейне.

Доказательство Коши  $\Rightarrow$  Гейне.

Известно, что  $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0: f(x) \in U_\varepsilon(a) \forall x \in \dot{U}_\delta(x_0)$ .

Берем произвольную  $x_n \rightarrow x_0$ : fix  $\varepsilon > 0 \Rightarrow \exists \delta$ , такое что выполнено  $f(x) \in U_\varepsilon(a) \forall x \in \dot{U}_\delta(x_0)$  и  $\exists N$ :  $x_n \in U_\delta(x_0) \forall n \geq N \Rightarrow \exists N: \forall n \geq N x_n \in \dot{U}_\delta(x_0) \Rightarrow f(x_n) \in U_\varepsilon(a)$ .

Те  $\forall \varepsilon > 0 \exists N: \forall n \geq N f(x_n) \in U_\varepsilon(a)$ , те  $a = \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n)$

Доказательство не Коши  $\Rightarrow$  не Гейне.

Нет предела по Коши. fix  $a$ :  $\exists \varepsilon: \forall \delta > 0. \exists \tilde{x} \in \dot{U}_\delta(x_0): f(\tilde{x}) \notin U_\varepsilon(a) \Rightarrow a$  не является пределом по Гейне?

От противного.  $a = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$  по Гейне.

$\delta_n = \frac{1}{n} \exists \tilde{x}_n \in \dot{U}_{\frac{1}{n}}(x_0)$  и  $f(\tilde{x}_n) \notin U_\varepsilon(a) \Rightarrow \tilde{x}_n \rightarrow x_0, \tilde{x}_n \neq x_0$ , но  $\lim_{n \rightarrow \infty} f(\tilde{x}_n) \neq a$

$f(x)$  бесконечно малая в точке  $x_0$ , если  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0$ .

$f(x)$  бесконечно большая в точке  $x_0$ , если  $\lim_{x \rightarrow x_0} |f(x)| = +\infty$ .

**Лемма о двух милиционерах.** Пусть  $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$  в некоторой окрестности точки  $x_0$  (предельная точка  $D(f), D(g), D(h)$ ). Если  $\exists \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} h(x) = a$ , то  $\exists \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = a$ .

**Предельный переход в неравенствах.** Пусть  $f(x) \leq g(x)$  в некоторой окрестности точки  $x_0$  (предельная точка  $D(f), D(g)$ ). Если  $\exists \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = a$ ;  $\exists \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = b$ , то  $a \leq b$ .

**Лемма об ограниченности.** Если  $\exists \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = a \in \mathbb{R}$ . Тогда  $f$  ограничена в некотором  $\dot{U}(x_0)$ .

Доказательство:

$\varepsilon = 1: \exists \delta > 0: |f(x) - a| < 1 \forall x \in \dot{U}_\delta(x_0) \Rightarrow |f(x)| \leq |a| + 1 \forall x \in \dot{U}_\delta(x_0)$

**Лемма об отделимости от нуля.** Если  $\exists \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = a > 0$ . Тогда  $\inf f(x) > 0$  в некоторой  $\dot{U}(x_0)$  ( $f$  отделима от нуля).

Доказательство:

$\varepsilon = \frac{a}{42}: \exists \delta < \frac{a}{42} \forall x \in \dot{U}_\delta(x_0) \Rightarrow f(x) \geq \frac{41}{42}a > 0 \forall x \in \dot{U}_\delta(x_0) \Rightarrow \inf f(x) \geq \frac{41}{42}a > 0$ .

**Следствие.** Если  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \neq 0$ , то  $\frac{1}{f(x)}$  ограничена в некоторой  $\dot{U}(x_0)$ .

В следующий раз арифметические свойства предела. Учить что такое фундаментальная последовательность, теорему Коши о сходимости фундаментальной последовательности, определение  $a^x$ , определение по Коши, по Гейне, отрицания этих определений, определение бм, бб, переформулированные утверждения о последовательностях.

**Опр.**  $f$  непрерывна в точке  $x_0 \in D(f)$ , если  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$ .

$x^\alpha, \alpha \in \mathbb{R}; \log_a x; \sin, \cos, \operatorname{tg}, \arcsin, \arccos, \operatorname{arctg}$  — основные элементарные функции.

**Опр.** Функция называется элементарной, если она получается арифметическими операциями или композицией конечного числа основных элементарных функций.

**Утв.** Любая элементарная функция непрерывна.

**Теорема о пределе композиций.**  $f: X \rightarrow Y; g: Y \rightarrow Z, x_0$  — предельная точка множества  $X, y_0$  — предельная точка множества  $Y. \exists \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = y_0, \exists \lim_{y \rightarrow y_0} g(y) = g(y_0) = a$ . Тогда  $\exists \lim_{x \rightarrow x_0} g(f(x)) = a$ .

Доказательство:

$\forall x \in \dot{U}_\delta(x_0) \Rightarrow g(f(x)) \in U_\varepsilon(a)$

$a = \lim_{y \rightarrow y_0} g(y) \Rightarrow \exists \varepsilon_1 > 0: y \in U_{\varepsilon_1}(y_0) \Rightarrow g(y) \in U_\varepsilon(g(y_0))$

$\exists \delta > 0: x \in \dot{U}_\delta(x_0) \Rightarrow f(x) \in U_{\varepsilon_1}(y_0) \Rightarrow g(f(x)) \in U_\varepsilon(g(y_0))$

**Теорема непрерывности обратной функции.** Пусть  $f$  непрерывная биекция на  $\langle a; b \rangle$ . Тогда  $f^{-1}$  тоже непрерывная биекция  $Y \rightarrow \langle a; b \rangle$ .

Доказательство:

НУО  $f$  строго возрастает на  $\langle a; b \rangle$

fix  $\varepsilon > 0$ , тогда  $y_1 := f(x_0 - \varepsilon); y_2 := f(x_0 + \varepsilon)$

$\delta = \min\{y_2 - y_0; y_0 - y_1\}$

Тогда  $\forall y \in U_\delta(y) \Rightarrow f^{-1}(y) \in U_\varepsilon(f^{-1}(y_0))$  тк  $y_1 < y < y_2 \Rightarrow f^{-1}(y_1) < f^{-1}(y) < f^{-1}(y_2)$