1 Теория вероятностей.

Монетка:
$\Omega = \{\text{O}; \text{P}\}$. Ω — множество элементарных исходов; $\leqslant$ счетное.
Случайное событие: $A \subset \Omega$.
$P : \Omega \to \mathbb{R}_+$:

1. $P(x) \geqslant 0$
2. $\sum_{x \in \Omega} P(x) = 1$

(Ω, P) — вероятностное пространство.
Вероятность события A — $P(A) = \sum_{x \in A} P(x)$.
Случайное событие — измеримое подмножество вероятностного пространства.
Сумма событий — объединение множеств.
Произведение событий — пересечение множеств.
$P(A + B) = P(A) + P(B) - P(AB)$.
$P(A + B + C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(AB) - P(BC) - P(AC) + P(ABC)$.
Опр. A и B называются независимыми, если $P(AB) = P(A) \cdot P(B)$.
Пример:

> Ω_1 и Ω_2 — вероятностные пространства.
> $\Omega_1 \times \Omega_2$ — вероятностное пространство.
> $A \subset \Omega_1$ — случайное событие.
> $P(x, y) = P_1(x) \cdot P_2(y)$.
> $P_1(A) = P(A \times \Omega_2)$.

$AB \leftrightarrow (A \times \Omega_2) \cap (\Omega_1 \times B) = A \times B$.
A, B, C — независимы, если $P(ABC) = P(A)P(B)P(C)$.
События $A_1, A_2, \dots, A_n$ независимы, если $\forall A_{i1}, \dots, A_{ik}$ верно $P(A_{i1}A_{i2} \dots A_{ik}) = \Pi_{j=1}^{k} P(A_{ij})$.
Опр. Условная вероятность. $P(A|B)$ — вероятность A при условие, что B произошло.
Теорема. Формула полной вероятности. Пусть $A_1, A_2, \dots, A_n$ — система попарно несовместимых событий, в сумме дающих достоверное. Тогда для любого события B выполнена формула $P(A) = \sum_{i=1}^{k} P(A|B_i) \cdot P(B_i)$. Доказательство:

> $P(A|B) = \frac{P(AB)}{P(B)}$.
> $P(A) = \sum_{i=1}^{k} P(AB_i)$.

1.1 Случайные величины.

Опр. Ω — вероятностное пространство, $f : \Omega \to \mathbb{R}$. f называется случайной величиной.
Пример:
Бросаем кубик. $\Omega = 1, 2, 3, 4, 5, 6$, $p(x) = \frac{1}{6}$. $f(1) = 1, f(2) = 2$, и т. д.
На $\mathbb{R}$ введем структуру вероятностного пространства: $1 - \frac{1}{6}, 2 - \frac{1}{6}, 3 - \frac{1}{6}, 4 - \frac{1}{6}, 5 - \frac{1}{6}, 6 - \frac{1}{6}$, остальные 0.
Опр. $f : \Omega \to \mathbb{R} \Rightarrow$ на $\mathbb{R}$ вводится структура вероятностного пространства. $\forall x \in \mathbb{R}$ $P_{\mathbb{R}}(x) = P_{\Omega}(f^{-1}(x))$.
Опр. Распределение случайно величины f — структура вероятностного пространства на $\mathbb{R}$.
Стандартное распределение:

1. Дискретное равномерное. $x_1 - \frac{1}{n}, x_2 - \frac{1}{n}, \dots, x_n - \frac{1}{n}$.
2. Распределение Бернулли.
   $f(x) = \begin{cases} 1 & p \\ 0 & q = 1 - p \end{cases}$
   $f = \sum_{i=1}^{n} f_i$.
   $0 - q^n, 1 - C_n^1 p q^{n-1}, \dots, n$.
   $P(f(x) = k) = C_n^k \cdot p^k \cdot q^{n-k}$.
3. Геометрическое распределение. Бросаем неравновесную монетку до выпадения орла. Случайная величина — количество испытаний.
   $P(f(x) = k) = q^{k-1} \cdot p$.
4. Распределение Пуассона.
   $P(f = k) = \frac{\lambda^k}{k!} \cdot e^{-\lambda}$. $e \approx 2.718281828459045$, $\lambda > 0$.

5. Гипергеометрическое распределение. В сосуде N белых шаров и M черных. Мы не глядя вытаскиваем n шаров без возвращения. Случайная величина — количество белых шаров.
   $P(f=k)=\frac{C_N^k \cdot C_M^{n-k}}{C_{N+M}^n}$.

Опр. Сложение. $f:\Omega\to\mathbb{R}$, $g:\Omega\to\mathbb{R}$. $(f+g)(x)=f(x)+g(x)$.
Опр. $f(x)=a$ — случайное событие.
Опр. f и g независимые, если $\forall A,B\in\mathbb{R}: P(f(x)\in A; g(x)\in B)=P(f(x)\in A)\cdot P(g(x)\in B)$. Или: $P(f(x)=a; g(x)=b)=P(f(x)=a)\cdot P(g(x)=b)$.

1.2 Математическое ожидание.

Опр. f — случайная величина. Ее математическим ожиданием называется $Mf=Ef=\sum_{x\in\Omega} f(x)P(x)$.
Свойства:

1. c - константа это случайная величина.
2. $f_1 \leqslant f_2 (\Leftrightarrow f_1(x)\leqslant f_2(x)\forall x) \Rightarrow Mf_1 \leqslant Mf_2$.
3. $M(cf)=c\cdot Mf$.
4. $M(f_1+f_2)=Mf_1+Mf_2$. $\sum_{x\in\Omega}(f_1(x)+f_2(x))P(x)=\sum f_1(x)\cdot P(x)+\sum f_2(x)\cdot P(x)$
5. Если f_1, f_2 - независимы $\Rightarrow M(f_1\cdot f_2)=Mf_1\cdot Mf_2$. $Mc=c$.

$M(f_1\cdot f_2)=\sum_{x\in\Omega} f_1(x)\cdot f_2(x)\cdot P(x)=\sum a_i\cdot b_j\cdot P(f_1=a_i; f_2=b_j)=\sum_{i,j} a_i\cdot b_j\cdot P(f_1=a_i)\cdot P(f_2=b_j)=\sum_i a_i\cdot P(f_1=a_i)\cdot\sum_j b_j\cdot P(f_2=b_j)=Mf_1\cdot Mf_2$.
$P(f=k)=\frac{C_M^k\cdot C_N^{n-k}}{C_{M+N}^n}$.
$Mf=\frac{n\cdot M}{M+N}$.
$Mf=\sum_{k=0}^n \frac{k\cdot C_M^k\cdot C_N^{n-k}}{C_{M+N}^n}=\frac{n\cdot M}{M+N}\cdot\frac{(M-1)!N!(n-1)!(M+N-n)!}{(M+N-1)!}\sum_{k=0}^n \frac{1}{(k-1)!(M-k)!(n-k)!(N-n+k)!}\sum_{k=0}^n \frac{(M-1)!N!(n-1)!(M+N-n)!}{(k-1)!(M-k)!(n-k)!(N-n+k)!(M+N-1)!}$
$=\sum_{k=0}^N \frac{C_{n-1}^{k-1}\cdot C_{M+N-n}^{M-k}}{C_{M+N-1}^{M-1}}=1$.

1.3 Дисперсия.

Опр. Мера отклонения случайной величины от своего математического ожидания. f — случайная величина; $Df=M(f-Mf)^2$.
Опр. Центрирование случайной величины — $M(f-Mf)=Mf-M(Mf)=0$. Условно сдвигаем систему координат в 0.
$Df=M(f^2-2f\cdot Mf+(Mf)^2)=Mf^2-2M^2f+M(M^2f)=Mf^2-M^2f$.
Свойства:

1. $D(c)=0$ $D(f)=0\Rightarrow f=const$
2. $D(cf)=c^2D(f)$
3. $D(f+c)=Df$
4. Если случайные величины f и g независимы, то $D(f+g)=Df+Dg$

Формула Стирлинга. $n!\approx\sqrt{2\pi n}\cdot(\frac{n}{e})^n\cdot e^{\frac{\theta_n}{12n}}$. При больших n, $e^{\frac{\theta_n}{12n}}\approx 1$.

1.4 Неравенство Маркова.

f — случайная величина; $|Mf|<\infty$; $c>0$; $f\geqslant 0$.
$P(f\geqslant c)\leqslant\frac{Mf}{c}$.
$f:$

$a_1<c$	$a_2<c$	...	$a_n\geqslant c$	$a_{n+1}\geqslant c$	$a_{n+2}\geqslant c$	...
p_1	p_2	...	p_n	p_{n+1}	p_{n+2}	...

$g := \frac{f}{c}$.

$\frac{a_1}{c} < 1$	$\frac{a_2}{c} < 1$	$\dots$	$\frac{a_n}{c} \geqslant 1$	$\frac{a_{n+1}}{c} \geqslant 1$	$\frac{a_{n+2}}{c} \geqslant 1$	$\dots$
p_1	p_2	$\dots$	p_n	p_{n+1}	p_{n+2}	$\dots$

Надо: $P(g \geqslant 1) \leqslant Mg$.
$b_i = \frac{a_i}{c}$.
$Mg = b_1p_1 + b_2p_2 + \dots + b_np_n + b_{n+1}p_{n+1} + \dots \geqslant p_{n+1} + p_{n+2} + \dots$.

1.5 Неравенство Чебышева.

f — случайная величина, Mf и Df $\exists$, $c > 0$.
$\Rightarrow P(|f - Mf| \geqslant c) \leqslant \frac{Df}{c^2}$.
Нормировка случайной величины. $g := \frac{f-Mf}{\sqrt{Df}}$. $Mg = 0$, $Dg = 1$.
$|f - Mf| \geqslant c \Leftrightarrow \sqrt{Df} \cdot g \geqslant c$.
$P(|g| \geqslant \frac{c}{\sqrt{Df}}) \leqslant \frac{Df}{c^2}$.
$P(|g| \geqslant \frac{c}{\sqrt{Df}}) = P(g^2 \geqslant \frac{c^2}{Df}) \leqslant \frac{Mg^2}{(\frac{c^2}{Df})} = \frac{Df}{c^2}$.

1.6 Закон больших чисел.

$f_1, f_2, f_3, \dots$ — последовательность. $M := Mf_i$, $D = Df_i$.
Одинаковое распределение случайных величин.
$S_n := \frac{f_1+f_2+\dots+f_n}{n} \Rightarrow \forall \varepsilon > 0 \lim_{n\to\infty} P(|S_n - M| \geqslant \varepsilon) = 0$.
$MS_n = M$; $DS_n = \frac{D}{n}$.
$P(|S_n - M| \geqslant \varepsilon) \leqslant \frac{D(S_n)}{\varepsilon^2} = \frac{D}{n\varepsilon^2} \to 0$. $n \to \infty$, ε — фикс.

1.7 Ковариация и корреляция.

Опр. $cov(f;g) = M(f - Mf)(g - Mg)$. $cov(f;f) = Df = Mf^2 - M^2f$. $cov(f,g) = M(fg) - Mf \cdot Mg$.
Главное свойство ковариации: f, g — независимы $\Rightarrow cov(f,g) = 0$.
Опр. $r(f,g) = \frac{cov(f,g)}{\sqrt{Df \cdot Dg}}$ — коэффициент корреляции.
Теорема.

$-1 \leqslant r(f,g) \leqslant 1$.
$r(f,g) = 1 \Leftrightarrow \frac{f}{g} = const > 0$.
$r(f,g) = -1 \Leftrightarrow \frac{f}{g} = const < 0$.

1.8 Применение к комбинаторике.

Опр. Перестановки. $f : \{1 \dots n\} \to \{1 \dots n\}$; биекция. Таких $n!$. Неподвижная точка — $f(x) = x$.

1.9 Теорема Рамсея.

Задача. Есть полный граф K_N, ребра которого покрашены в 2 цвета. Всегда ли можно выбрать либо K_m с ребрами 1 цвета, либо K_n с ребрами 2 цвета?
Теорема. $\forall m; n \exists N >> 0$: утверждение верно. Наименьшее такое N — число Рамсея $R(m;n)$.
Например $R(3,3) = 6$. Но вот $R(5,5)$ уже не известно.
Два аспекта:

1. Верхняя оценка = теорема Рамсея.

2. Нижняя оценка.

Теорема (все та же). $R(m;n) \leqslant R(m-1;n) + R(m;n-1)$. $R(m;n) \leqslant 2^{m+n}$.
$R(m;n) \leqslant C^m_{m+n}$ — более точная оценка.
Теорема Эрдеша. $R(n;n) \geqslant 2^{\frac{n}{2}}$.
Вероятностный метод. Суть: рассмотрим случайный (со случайной раскраской ребер) граф на $2^{\frac{n}{2}}$ вершин. f —

количество одноцветных клик K_n. Если $M(f) < 1 \Rightarrow$ Ок.
Задача. Пьяница стоит на краю обрыва. С вероятностью p — шаг к обрыву, $q = 1 - p$ — от обрыва.
P(упадет ровно после $2k+1$ шага) $= p^{k+1} \cdot q^k \cdot c_k$.
c_k имеет рекуррентную формулу: $c_{n+1} = c_0 \cdot c_n + c_1 \cdot c_{n-1} + \cdots + c_{n-1} \cdot c_1 + c_n \cdot c_0; c_0 = 1$.
P(упадет) $= \frac{1-\sqrt{1-4pq}}{2q}$.

1.10 Числа Каталана.

Опр. c_n — n-е число Каталана.
Опр. $c_{n+1} = c_0 \cdot c_n + c_1 \cdot c_{n-1} + \cdots + c_{n-1} \cdot c_1 + c_n \cdot c_0$; $c_0 = 1$.
Явная формула: $\frac{(2n)!}{n!(n+1)!}$.
Конструкции:

1. У $n+2$ угольника — c_n триангуляций.