

1 Последовательность.

$$f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$f(n) =: f_n$$

Опр. Последовательность называется ограниченной сверху, если $\exists M : |f_n| \leq M$. Снизу, если $\exists m : f_n \geq m$. f_n — ограниченная, если ограничена сверху и снизу.

Опр. $M_0 = \sup f_n$, если M_0 — верхняя грань и $\forall \varepsilon > 0 \exists n_0 : f_{n_0} > M_0 - \varepsilon$. $m_0 = \inf f_n$, если m_0 — нижняя грань и $\forall \varepsilon > 0 \exists n_0 : f_{n_0} < m_0 + \varepsilon$.

Аксиома вещественных чисел. Если множество X ограничено сверху, то $\exists \sup X$. Если f_n неограничено сверху, то $\sup f_n =: +\infty$. Если снизу, то $\inf f_n =: -\infty$.

Опр. f_n — бесконечно большая (бб), если $\forall \varepsilon > 0 \exists N = N(\varepsilon) : |f_n| > \frac{1}{\varepsilon} \forall n \geq N$. f_n — не бб, $\exists \varepsilon > 0 : \forall N \exists n > N : |f_n| \leq \frac{1}{\varepsilon}$.

Опр. f_n — бесконечно малая (бм), если $\forall \varepsilon > 0 \exists N = N(\varepsilon) : |f_n| < \varepsilon \forall n \geq N$.

Лемма. f_n — бм $\Rightarrow f_n$ — ограничена.

Доказательство:

Пусть $\varepsilon = 1$, тогда $\exists N : |f_n| \leq 1 \forall n \geq N$

$M := \max\{|f_1|, \dots, |f_{N-1}|, 1\}$, тогда $|f_n| \leq M \forall n \in \mathbb{N}$.

Лемма.

a) f_n — бб $\Rightarrow \frac{1}{f_n}$ — бм

b) f_n — бм ($f_n \neq 0$) $\Rightarrow \frac{1}{f_n}$ — бб

Лемма. f_n — неограниченная последовательность, тогда существует бб подпоследовательность f_{nk} .

Доказательство:

$$\begin{aligned} & \exists n_1 : |f_{n_1}| > 1, \\ & \exists n_2 > n_1 : |f_{n_2}| > 2, \\ & \exists n_3 > n_2 : |f_{n_3}| > 3, \\ & \vdots, \\ & \exists n_1 < n_2 < \dots < n_k < \dots \\ & |f_{nk}| > k \Rightarrow f_{nk} \text{ — бб.} \end{aligned}$$

Лемма.

a) бм + бм = бм

b) бм · C = бм

c) бм · бм = бм

d) бб · C = бб, $C \neq 0$

e) бб · бб = бб

1.1 Предел последовательности.

a_n — последовательность.

Опр. $a = \lim a_n$, если $\forall \varepsilon > 0 \exists N : |a_n - a| < \varepsilon \forall n \geq N$.

Опр. Эпсилон окрестность: $U_\varepsilon(a) := (a - \varepsilon; a + \varepsilon)$. Выколотая эпсилон окрестность: $U_\varepsilon^\circ(a) := U_\varepsilon(a) \setminus \{a\}$.

$\varepsilon_1 < \varepsilon_2 \Rightarrow U_{\varepsilon_1}(a) \subset U_{\varepsilon_2}(a), a \in \mathbb{R}$.

Опр. $\mathbb{R} \cup \{\pm\infty\} = \overline{\mathbb{R}}$ — расширенная числовая прямая.

Опр. $\varepsilon > 0$ $U_\varepsilon(+\infty) = (\frac{1}{\varepsilon}; +\infty)$; $U_\varepsilon(-\infty) = (-\infty; -\frac{1}{\varepsilon})$.

$\lim |a_n| = +\infty \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists N(\varepsilon) : |a_n| > \frac{1}{\varepsilon}$.

Если a_n — бб $\Leftrightarrow \lim |a_n| = +\infty$.

Если a_n — бм $\Leftrightarrow \lim |a_n| = 0$.

Утв. $\lim a_n = a \Leftrightarrow \exists$ бм последовательность d_n , такая что $a_n = a + d_n$.

Утв. Если предел последовательности существует, то он единственный.

Доказательство:

$$\exists a < b \text{ и } a = \lim a_n, b = \lim a_n.$$

$$\text{Тогда } \varepsilon := \frac{b-a}{42} :$$

$$\exists N_1 : a_n \in U_\varepsilon(a) \forall n \geq N_1$$

$$\begin{aligned} \exists N_2 : a_n \in U_\varepsilon(b) \forall n \geq N_2 \\ \Rightarrow a_n \in (U_\varepsilon(a) \cap U_\varepsilon(b)) = \emptyset \quad \forall n \geq \max\{N_1, N_2\}!?! \end{aligned}$$

Предельный переход в неравенства. $a_n \leq b_n \quad \forall n \geq N_0$.

Пусть $\exists \lim a_n = a$; $\lim b_n = b$, $a, b \in \overline{\mathbb{R}}$

Тогда $a \leq b$.

Доказательство:

$$\begin{aligned} \text{Пусть } a > b. \text{ Тогда } \varepsilon := \frac{a-b}{42} : \\ \exists N_1 : a_n \in U_\varepsilon(a) \forall n \geq N_1 \\ \exists N_2 : a_n \in U_\varepsilon(b) \forall n \geq N_2 \\ \Rightarrow a_n > b_n \quad \forall n \geq \max\{N_1, N_2\}!?! \end{aligned}$$

Лемма о сжатых последовательностях. Пусть $a_n \leq b_n \leq c_n \quad \forall n \geq N_0$ и $\exists \lim a_n = \lim c_n = a \in \overline{\mathbb{R}}$, тогда $\exists \lim b_n = a$.

Доказательство:

$$\begin{aligned} \varepsilon > 0 : \\ \exists a_n \in U_\varepsilon, n \geq N_1 \\ \exists c_n \in U_\varepsilon, n \geq N_2 \\ \Rightarrow b_n \in U_\varepsilon : \forall n \geq \{N_1, N_2, N_0\} =: N \Rightarrow a = \lim b_n \text{ по определению.} \end{aligned}$$

Лемма об отделимости от нуля. Пусть $\exists \lim a_n = a > 0$. Тогда $\exists N : a_n > \frac{a}{2} > 0, \forall n \geq N$.

Следствие. Если $\lim a_n \neq 0 \Rightarrow \frac{1}{a_n}$ ограничена ($a_n \neq 0$).

Доказательство:

$$\begin{aligned} \lim a_n = a > 0 \\ \exists N_1 : a_n > \frac{a}{2} \Rightarrow 0 < \frac{1}{a_n} < \frac{2}{a} \quad \forall n \geq N_1 \\ \min\{a_1, \dots, a_{N-1}, \frac{a}{2}\} \leq \frac{1}{a_n} \leq \max\{a_1, \dots, a_{N-1}, \frac{2}{a}\} \end{aligned}$$

Теорема. Арифметические свойства предела. Пусть $\lim a_n = a$, $\lim b_n = b$; $a, b \in \overline{\mathbb{R}}$. Тогда:

1. $\lim(a_n + b_n) = a + b$, кроме случаев $+\infty + (-\infty)$, $-\infty + (+\infty)$
2. $\lim(ka_n) = ka$, кроме случая $0 \cdot (\pm\infty)$
3. $\lim(a_n \cdot b_n) = ab$, кроме случая $0(\pm\infty)$
4. $\lim \frac{a_n}{b_n} = \frac{a}{b}$, кроме случаев $\frac{0}{0}, \frac{\infty}{\infty}$

Доказательство:

$$\begin{aligned} a, b \in \mathbb{R} \\ a_n = a + \alpha_n, b_n = b + \beta_n; \alpha_n, \beta_n \rightarrow 0. \\ 1. a_n + b_n = (a + b) + (\alpha_n + \beta_n) \Leftrightarrow \lim(a_n + b_n) = a + b. \\ 2. \text{ Аналогично.} \\ 3. a_n b_n = (a + \alpha_n)(b + \beta_n) = ab + \alpha_n b + \beta_n a + \alpha_n \beta_n \\ 4. \text{ Если } b \neq 0 \quad \frac{1}{b_n} \rightarrow \frac{1}{b} \text{ — ограничена} \\ \frac{a_n}{b_n} - \frac{a}{b} = \frac{a + \alpha_n}{b + \beta_n} - \frac{a}{b} = \frac{\alpha_n b - \beta_n a}{b_n b} = \frac{1}{b} \cdot \frac{1}{b_n} \cdot (\alpha_n b - \beta_n a) \\ \text{Если } b = 0 \Rightarrow b_n \rightarrow 0 \Rightarrow \frac{1}{b_n} \rightarrow \infty \Rightarrow a_n \cdot \frac{1}{b_n} = \text{ограниченная } \infty \end{aligned}$$

Опр. Линейное пространство — множество, сумма двух элементов которого лежит в этом множестве и элемент с коэффициентом лежит в этом множестве.

Опр. Последовательность называется возвратной, если $a_n = \beta_{n-1}a_{n-1} + \beta_{n-2}a_{n-2} + \dots + \beta_{n-k}a_{n-k}$; β_i — фиксированные коэффициенты.

$$a_n^{(1)}, a_n^{(2)} \Rightarrow \forall \lambda, \mu \in \mathbb{R} \quad \lambda a_n^{(1)} + \mu a_n^{(2)} \text{ тоже удовлетворяет } (x).$$

$$a_n := t^n$$

$$t^k = \beta_{n-1}t^{k-1} + \dots + \beta_{n-k}$$

$$t_0 \text{ — простой корень, то } t_0^n$$

$$t_0 \text{ — корень } (m) \Rightarrow t_0^n; nt_0^n; n^2 t_0^n; \dots; n^{m-1} t_0^n$$

Теорема.

1. Пусть a_n возрастает и ограничена сверху. Тогда $\exists \lim a_n = \sup a_n$
2. Пусть a_n убывает и ограничена снизу. Тогда $\exists \lim a_n = \inf a_n$

Доказательство:

fix $\varepsilon > 0$

Так как a_n — ограничена, то $\exists M \sup a_n \in \mathbb{R}$; И $\exists N : a_N > M - \varepsilon$. Тогда $\begin{cases} a_n \geq M - \varepsilon \\ a_n \leq M < M + \varepsilon \end{cases} \forall n \geq N$, так как $a_n \uparrow \Rightarrow$
 $\exists N : |a_n - M| < \varepsilon \forall n \geq N \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = M$ по определению.

Найти предел последовательности $a_n = (1 + \frac{1}{n})^n$.

$$b_n = (1 + \frac{1}{n})^{n+1}; b_1 = 4, b_2 = 3, \dots b_n \downarrow$$

$$b_n \geq 1$$

Докажем, что b_n убывает.

$$\frac{b_n}{b_{n+1}} = \frac{(\frac{n+1}{n})^{n+1}}{(\frac{n+2}{n+1})^{n+2}} = \frac{n+1}{n} \cdot \frac{n+1}{n+2} = \frac{n+1}{n+2} \cdot (\frac{n^2+2n+1}{n^2+2n})^{n+1} = \frac{n+1}{n+2} \cdot (1 + \frac{1}{n^2+2n})^{n+1} \quad (\text{неравенство Бернулли})$$

$$> \frac{n+1}{n+2} \cdot (1 + \frac{n+1}{n^2+2n}) = \frac{(n+1)(n^2+3n+1)}{(n+2)(n^2+2n)} = \frac{n^3+4n^2+4n+1}{n^3+4n^2+4n} > 1.$$

$$a_n = \frac{b_n}{(1 + \frac{1}{n})}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b_n}{1 + \frac{1}{n}} = \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} b_n}{\lim_{n \rightarrow \infty} (1 + \frac{1}{n})} = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n \text{ — существует.}$$

$$e := \lim_{n \rightarrow \infty} (1 + \frac{1}{n})^n \approx 2.718281828459045\dots$$

Теорема Вейерштрасса. Пусть последовательность a_n ограничена. Тогда существует сходящаяся подпоследовательность.

Доказательство:

$$|a_n| \leq M$$

$$[-M = \alpha_1; M = \beta_1]. \alpha_2 \text{ — середина. } a_1 = x_1 \in [\alpha_1; \alpha_2].$$

$$[\alpha_2; \beta_2]. \beta_3 \text{ — середина. } x_2 = a_{\min n} \in [\alpha_2; \beta_3].$$

И т.д.

$$\alpha_k \text{ неубывающая и ограниченная сверху. } \exists \lim \alpha_k = \alpha. \beta_k \text{ неубывающая и ограниченная сверху. } \exists \lim \beta_k = \beta.$$

$$\beta - \alpha = \lim_{k \rightarrow \infty} (\beta_k - \alpha_k) = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{2M}{2^{k-1}} = 0.$$

$$\text{По построению } x_k \text{ — подпоследовательность и } \alpha_k \leq x_k \leq \beta_k \Rightarrow \exists \lim x_k.$$

Опр. Последовательность называется фундаментальной (или последовательностью Коши), если $\forall \varepsilon > 0 \exists N(\varepsilon) : |a_n - a_k| < \varepsilon \forall n, k \geq N$.

Утв. Пусть $\exists \lim a_n = a \in \mathbb{R}$. Тогда $\{a_n\}$ фундаментальная.

Доказательство:

$$\text{fix } \varepsilon > 0 \exists N : |a_n - a| < \frac{\varepsilon}{2} \forall n \geq N. \text{ Тогда } \forall n, k \geq N |a_n - a_k| = |(a_n - a) + (a - a_k)| \leq |a_n - a| + |a_k - a| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Теорема Коши. Пусть $\{a_n\}$ фундаментальная последовательность. Тогда $\exists \lim a_n$.

Доказательство:

1) (!) $\{a_n\}$ ограничена.

$$\varepsilon = 1: \exists N: |a_n - a_k| \leq \varepsilon \forall n, k \geq N \Rightarrow a_k \in [a_{N-1}; a_{N+1}] \forall k \geq N$$

$$M = \max\{|a_1|, |a_2|, \dots, |a_N + 1|\} \Rightarrow |a_n| \leq M \forall n.$$

2) Тогда по теореме Вейерштрасса $\exists a_{n_k}$ — подпоследовательность; $\lim_{n \rightarrow \infty} a_{n_k} = a$.

3) fix $\varepsilon > 0$. $\exists N_1 : |a_{n_k} - a| < \frac{\varepsilon}{2} \forall n_k \geq N_1$

$$\exists N_2 : |a_m - a_n| < \frac{\varepsilon}{2} \forall m, n \geq N_2$$

$$\text{Пусть } n \geq \max\{N_1, N_2\} \exists n_k \geq m.$$

$$|a_m - a| = |(a_m - a_{n_k}) + (a_{n_k} - a)| \leq |a_m - a_{n_k}| + |a_{n_k} - a| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \Rightarrow a = \lim_{m \rightarrow \infty} a_m.$$

2 Возведение в вещественную степень.

$$n \in \mathbb{N}; x^n = x \cdot x \cdot \dots \cdot x, n \text{ раз.}$$

$$x^{-n} = \frac{1}{x^n}, x \neq 0$$

$$x^0 := 1$$

$$\sqrt[n]{x} = x^{\frac{1}{n}}$$

$$x^p, p \in \mathbb{Q}, x \geq 0 (p > 0) \text{ или } x > 0 (p \geq 0)$$

$$\text{fix } a > 0, x \in \mathbb{R}$$

$$a^x := \lim_{n \rightarrow \infty} a^{x_n}, \text{ где } \{x_n\} \text{ последовательность, такая что } x_n \in \mathbb{Q}, \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x.$$

Корректность определения.

1. $x \in \mathbb{Q}$. Докажем, что a^x совпадает со старым определением.
 $x \in \mathbb{Q}$, берем $x_n = x \Rightarrow a^x = a^x$
2. Берем произвольную последовательность $\{x_n\}$, $x_n \rightarrow x \Rightarrow x_n$ — фундаментальная последовательность.
 fix $\varepsilon > 0$ $|a^{x_n} - a^{x_k}| = a^{x_n} |1 - a^{x_k - x_n}|$. Сходится. Значит ограничена. Тогда a^{x_n} ограничена. Тогда $a^{x_n} |1 - a^{x_k - x_n}| \leq M \cdot |1 - a^{x_k - x_n}|$.
 $\exists N : |a^{\frac{1}{n}} - 1| < \frac{M}{\varepsilon} \quad \forall m \geq N \Rightarrow |a^{\frac{1}{n}} - 1| < \frac{M}{\varepsilon} \Rightarrow \exists N_0 : |x_n - x_k| < \frac{1}{N} \quad \forall n, k \geq N$
 $M \cdot |1 - a^{x_k - x_n}| < M \cdot \frac{2}{M} \quad \forall n, k \geq N_0 \Rightarrow a^{x_n}$ образует фундаментальную последовательность \Rightarrow (по теореме Коши)
 $\exists \lim_{n \rightarrow \infty} a^{x_n}$
3. $x_n \rightarrow x, y_m \rightarrow y, x_n, y_m \in \mathbb{Q}$
 $\exists a = \lim a^{x_n}; \alpha = \lim a^{y_m}$
 $(a - \alpha) = \lim_{n \rightarrow \infty} (a^{x_n} - a^{y_m}) = \lim_{n \rightarrow \infty} a^{x_n} (1 - a^{x_n - y_m}) = 0$
 $\lim(y_n - x_n) = x - x = 0$

Свойства:

1. $a^x \cdot a^y = a^{x+y}$
 Пусть $x_n \rightarrow x, y_n \rightarrow y; x_n, y_n \in \mathbb{Q}$
 $a^{x_n} \cdot a^{y_n} = a^{x_n + y_n}$
 $a^x \cdot a^y = \lim a^{x_n} \cdot \lim a^{y_n} = \lim a^{x_n} \cdot a^{y_n} = \lim a^{x_n + y_n} = a^{x+y}$
2. $(a^x)^y = a^{xy}$
 Пусть $x_n \rightarrow x, y_m \rightarrow y; x_n, y_m \in \mathbb{Q}$
 $x_n y_n \rightarrow xy$
 $\lim_{m \rightarrow \infty} (\lim_{n \rightarrow \infty} a^{x_n})^{y_m} = \lim_{n \rightarrow \infty} a^{x_n y_n}$
 $\lim_{n \rightarrow \infty} (a^x)^{y_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} a^{x y_n}$
 $\lim_{n \rightarrow \infty} |b^{y_n} - a^{x y_n}| = 0$, где $b = a^x$
 $\exists N : |a^{x_n} - b| < \varepsilon \quad \forall n \geq N$
 $b - \varepsilon < a^{x_n} < b + \varepsilon$
 $1 - \frac{\varepsilon}{b} < \frac{a^{x_n}}{b} < 1 + \frac{\varepsilon}{b} \uparrow^{y_n}, y_n > 0$, для < 0 аналогично
 $(1 - \frac{\varepsilon}{b})^{y_n} < (\frac{a^{x_n}}{b})^{y_n} < (1 + \frac{\varepsilon}{b})^{y_n}$
 $1 - \frac{y_n \varepsilon}{b} < \frac{a^{x_n y_n}}{b^{y_n}} < 1 + \frac{y_n \varepsilon}{b}$
 $\Rightarrow |\frac{a^{x_n y_n}}{b^{y_n}} - 1| \leq \frac{|y_n|}{b} \varepsilon$
 $|a^{x_n y_n} - b^{y_n}| < \frac{|y_n|}{b} \cdot b^{y_n} \varepsilon \leq M \varepsilon \quad \forall n \geq N$
 $\Rightarrow \lim |b^{y_n} - a^{x_n y_n}| = 0$

fix $a > 0, a \neq 1$

$y = a^x, x \in \mathbb{R}$

Опр. $f(x)$ — возрастающая на X , если $\forall x_1, x_2 \in X \quad x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$. $f(x)$ неубывающая, если \leq .

Утв. При $a > 1$ $f(x) = a^x$ — возрастает на \mathbb{R} ; При $0 < a < 1$ $f(x) = a^x$ — убывает на \mathbb{R} .

Пусть $x < \xi, x_n \rightarrow x, \xi_n \rightarrow \xi$

$x < x_0 < \xi_0 < \xi$ и x_0 не в окрестности x и аналогично ξ .

$\forall n \geq N$

$x_n < x_0 < \xi_0 < \xi$

Тогда $a^{x_n} < a^{x_0} < a^{\xi_0} < a^{\xi_n}$

$a^x \leq a^{x_0} < a^{\xi_0} \leq a^\xi \Rightarrow a^x < a^\xi$

$0 < a < 1$

$a^x = (\frac{1}{a})^{-x}; a^\xi = (\frac{1}{a})^{-\xi}$

$x < \xi \Rightarrow -x > -\xi \quad (\frac{1}{a})^{-x} > (\frac{1}{a})^{-\xi} \Rightarrow a^x > a^\xi$