

Содержание

1	Теория групп.	2
1.1	Таблица Кэли.	3
1.2	Группы.	3
1.2.1	Группа S_n	4
2	Теория узлов.	4

1 Теория групп.

Определение 1.1. *Группа — множество с одной операцией $*$: $G \times G \rightarrow G$ со следующими свойствами:*

1. $a * (b * c) = (a * b) * c$
2. $\exists e: a * e = e * a = a$
3. $\forall a \exists a^{-1}: a * a^{-1} = a^{-1} * a = e$

Пример 1.1. • $(\mathbb{Z}; +)$

- $(\mathbb{Q}; +)$
- $(\mathbb{R}; +)$
- $(\mathbb{C}; +)$
- $(V; +)$
- $(\mathbb{R}_+; \cdot)$
- $(\mathbb{R} \setminus \{0\}; \cdot)$
- $(\mathbb{Z}_n; +)$

Определение 1.2. Пусть G — группа, $H \subset G$. Говорим, что H является подгруппой (пишем $H < G$), если H является группой относительно операции в G . Чтобы проверить, что H является подгруппой, необходимо убедиться, что произведение двух элементов из H принадлежит H , и элементы, обратные к H , тоже лежат в H .

Теорема 1.1 (Кэли). Любая группа G является подгруппой в группе подстановок, а именно S_G .

Определение 1.3. Абелева группа — **группа** с коммутативностью.

Определение 1.4. Говорят, что группа G порождается элементами $\{x_i\}$, если любой элемент из G можно представить как произведение нескольких x_i и обратных к ним. Группа называется циклической, если она порождена одним элементом.

Теорема 1.2. Конечная циклическая группа изоморфна $(\mathbb{Z}_n, +)$.

Определение 1.5. Пусть G — группа, $H < G$. Введем два отношения эквивалентности на G : $x \sim_1 y$ если $x y^{-1} \in H$, $x \sim_2 y$ если $x^{-1} y \in H$.

Утверждение 1.1. \sim_1 и \sim_2 совпадают в абелевой группе.

Заметка 1.1. Классы эквивалентности по отношению \sim_1 называются левыми смежными классами; класс элемента x обозначается xH . Классы эквивалентности по \sim_2 — правые смежные классы, обозначаются Hx .

Определение 1.6. Пусть теперь группа G конечна, $H < G$. Количество классов эквивалентности \sim_1 называется индексом G по H и обозначается $[G : H]$.

Теорема 1.3 (Лагранжа). $|G| = |H| \cdot [G : H]$.

Определение 1.7. Пусть $x \in G$. Порядком элемента x называется наименьшее натуральное число n , такое что $x^n = e$, где e — нейтральный элемент. Обозначение: $\text{ord}(x)$. Если такого n не существует, то пишем $\text{ord}(x) = +\infty$.

Определение 1.8. Пусть $X, Y \subset G$ — подмножества группы. Их произведением будем называть множество $\{xy | x \in X, y \in Y\}$.

Определение 1.9. Полная линейная группа $GL(n, F)$ — это множество всех квадратных матриц размера $n \times n$ с элементами из поля F , которые являются обратимыми ($\det \neq 0$), вместе с операцией матричного умножения.

Определение 1.10. Специальная линейная группа $SL(n, F)$ — это подгруппа полной линейной группы, состоящая из всех матриц с определителем, равным 1. То есть это множество всех матриц A размера $n \times n$ над полем F , таких что $\det(A) = 1$.

Определение 1.11. Специальная ортогональная группа $SO(n, F)$ — группа из ортогональных матриц. Матрица A называется ортогональной, если $A^T \times A = A \times A^T = E$.

Утверждение 1.2. Пусть X — произвольное множество. Тогда множество всех биекций $f : X \rightarrow X$ образуют группу относительно композиции. Эту группу обозначают S_X . Если $X = \{1, 2, \dots, n\}$, то S_X обозначают S_n — группа подстановок.

1.1 Таблица Кэли.

Определение 1.12. Пусть G — конечная группа порядка n . Её таблицей Кэли (таблицей умножения) будем называть таблицу $(n+1) \times (n+1)$ (левый столбец и левая строка считаются нулевыми и служат лишь для нумерации). В нулевом столбце и в нулевой строке стоят все элементы группы в одном и том же порядке. На пересечении строки и столбца этой таблицы будем ставить произведение соответствующих элементов в нулевом столбце и в нулевой строке (слева пишется элемент, задающий строку, справа — столбец).

Определение 1.13. Напомним, что перестановкой мы будем называть биекцию $f : \{1, 2, \dots, n\} \rightarrow \{1, 2, \dots, n\}$. Умножение перестановок — композиция биекций. Перестановки записываются в две строчки: в первой — числа от 1 до n (как правило, в порядке возрастания, но не обязательно), а во второй строчке под числом k стоит число $f(k)$.

1.2 Группы.

Теорема 1.4. G — группа; $H < G$. Равносильно:

1. $\forall x \ xH = Hx$

2. $\forall x \ xH \subset Hx$

3. $\forall x \ xH \supset Hx$

4. $\forall x \ xHx^{-1} = H$

5. $\forall x \ xHx^{-1} \subset H$

6. $\forall x \ xHx^{-1} \supset H$

7. $\forall x \in G \ \forall h \in H \ x^{-1}hx \in H$

Определение 1.14. Такая H называется нормальной подгруппой. Обозначается $H \triangleleft G$.

Определение 1.15. xhx^{-1} называется сопряженным элементом h .

Утверждение 1.3. $h \sim x^{-1}hx$ — отношение эквивалентности.

Определение 1.16. $H \triangleleft G$. Класс смежности по H можно перемножать.

Определение 1.17. Множество классов смежности образуют группу. Это называется фактор-группой G по H . G/H .

Определение 1.18. Простая группа — группа без нетривиальных нормальных подгрупп.

1.2.1 Группа S_n .

Определение 1.19. Перестановкой конечного множества M называется биекция $\pi : M \rightarrow M$. Множество всех перестановок множества M обозначается символом $S(M)$. Произведением перестановок π и σ называется перестановка $\sigma \cdot \pi$, соответствующая биекции $x \mapsto \sigma(\pi(x))$.

Определение 1.20. Пусть $\pi \in S(M)$. Орбитой элемента $a \in M$ называется множество $\text{orb}_\pi(a) = \{a, \pi(a), \pi^2(a), \dots\}$. Порядком элемента a называется мощность его орбиты: $\text{ord}(a) = |\text{orb}(a)|$.

Определение 1.21. В предыдущей серии показано, что любая перестановка является произведением циклов. Количество циклов в перестановке обозначается $\text{cycl}(\pi)$. Если перестановка разбивается на циклы, длины которых — l_1, \dots, l_m , то (l_1, \dots, l_m) называется цикленным типом перестановки π . Перестановка, у которой цикленный тип $(2, 1, 1, \dots, 1)$, называется транспозицией.

Определение 1.22. Перестановка π называется четной или нечетной в зависимости от четности числа $n + \text{cycl}(\pi)$. Знаком перестановки называется число $\text{sign}(\pi) = (-1)^{n+\text{cycl}(\pi)}$.

Определение 1.23. Хотим \forall перестановки называть ее четной или нечетной: $ЧЧ = Ч$, $НН = Ч$, $ЧН = Н$, $НЧ = Н$ и $\exists Ч$ и $НЧ$ перестановки.

Определение 1.24. Инверсия: $\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & i & \dots & j & \dots & n \\ a_1 & a_2 & \dots & a_i & \dots & a_j & \dots & n \end{pmatrix}$. Пара (i, j) называется инверсией, если $i < j$ и $a_i > a_j$.

Определение 1.25. Перестановка с четным количеством инверсий — четная, с нечетным — нечетная.

Замечка 1.2. \forall перестановка — произведение транспозиций. Четное количество транспозиций \Leftrightarrow четная перестановка.

Определение 1.26. Четная перестановка $= (n + \text{количество циклов}) \bmod 2$.

Теорема 1.5. Перестановки сопряжены \Leftrightarrow совпадает их циклический тип.

2 Теория узлов.

Определение 2.1. Узел — замкнутая, несамопересекающаяся кривая (ломаная с конечным числом звеньев/гладкая кривая) в \mathbb{R}^3 .

Определение 2.2. Кривая Пеано — $f : [0, 1] \rightarrow [0, 1] \times [0, 1]$; непрерывная и сюръективная.

Определение 2.3. Эквивалентные узлы — узлы, которые переходят из одного в другой с помощью следующих преобразований (преобразования Рейдемейстера): избавиться от петли, растянуть две дуги, перетащить нижнюю дугу, через точку пересечения двух других, на верх.

Заметка 2.1. *Открытые проблемы:*

- $\#(n)$ — количество точек с n двойных узлов в минимальной конфигурации. Экспериментально — функция не растёт. Но не доказано.
- $c(K)$ — количество двойных точек в минимальной конфигурации. Гипотеза: $c(K_1 \# K_2) = c(K_1) + c(K_2)$.