

# 1 Механика.

**Механическое движение** — изменение пространственного положения тела относительно других тел с течением времени.

При **поступательном движении** прямая проведенная через любые две точки внутри тела остается параллельна сама себе.

При **вращательном движении** каждая точка тела вращается по своей окружности, центры этих окружностей лежат на одной прямой, прямая называется осью вращения.

Любое движение — сумма этих двух движений.

**Колебательное движение** — движение, повторяющееся с той или иной точностью во времени.

## 1.1 Кинематика.

**Кинематика** — раздел механики, изучающий способы описания движения и связь величин характеризующих это движение.

Для описания движения нужны:

- Система отсчета.
- Тело отсчета.
- Система координат.
- Часы.

Способы анализа:

- Табличный.
- Графический.
- Аналитический.

### 1.1.1 Равномерное прямолинейное движение.

**Равномерное прямолинейное движение** — за любые равные промежутки времени тело проходит одинаковые участки пути, траектория при этом прямая линия.

**Траектория** — кривая, по которой движется тело.

**Путь** — длина траектории.

**Перемещение** — вектор из начальной точки в конечную.

**Расстояние** — модуль перемещения.

**Скорость** — физическая векторная величина, характеризующая быстроту изменения положения тела в пространстве.  
 $V = \frac{S}{t}$ .

**Формула изменения координаты** —  $x = x_0 + V_x \cdot t$ .

**Формулы.**

Величина	РПД	РУД
Скорость	$V = \frac{S}{t}$	$V_x = V_{0x} + at$
Расстояние	$S = V \cdot t$	$S = V_{0x}t + \frac{at^2}{2}$
Координата	$x = x_0 + V_{0x}t$	$x = x_0 + V_{0x}t + \frac{at^2}{2}$

**Золотая формула механики.**  $S = \frac{V_{\kappa}^2 - V_0^2}{2a}$ .

### 1.1.2 Движение под углом горизонта.

Тело брошено с высоты  $h$  под углом  $\alpha$  со скоростью  $V_0$ .

1.  $V_x = V_0 \cos \alpha$

2.  $x = V_0 \cos \alpha t$
3.  $V_y = V_0 \sin \alpha - gt$
4.  $y = h_0 + V_0 \sin \alpha t - \frac{gt^2}{2}$

I. Траектория.

$$t = \frac{x}{V_0 \cos \alpha}.$$

$$y = h_0 + V_0 \sin \alpha \frac{x}{V_0 \cos \alpha} - \frac{g}{2} \cdot \frac{x^2}{V_0^2 \cos^2 \alpha}.$$

$$y = h_0 + x \operatorname{tg} \alpha - \frac{gx^2}{2V_0^2 \cos^2 \alpha}.$$

II.  $H_{max}$ :  $V_y = 0$ .

$$0 = V_0 \sin \alpha - gt_{\text{падения}}.$$

$$t_{\text{падения}} = \frac{V_0 \sin \alpha}{g}.$$

$$H_{max} = h_0 + V_0 \sin \alpha \cdot \frac{V_0 \sin \alpha}{g} - \frac{g}{2} \cdot \frac{V_0^2 \sin^2 \alpha}{g^2}.$$

$$H_{max} = h_0 + \frac{V_0^2 \sin^2 \alpha}{2g}.$$

III.  $t_{\text{полета}}$ :  $y = 0$ .

$$0 = h_0 + V_0 \sin \alpha t_{\text{полета}} - \frac{gt_{\text{полета}}^2}{2}.$$

$$\frac{gt_{\text{полета}}^2}{2} - V_0 \sin \alpha t_{\text{полета}} - h_0 = 0.$$

$$t_{\text{полета}} = \frac{V_0 \sin \alpha + \sqrt{V_0^2 \sin^2 \alpha + 2gh_0}}{g}.$$

IV. Дальность полета:  $L$ .

$$L = x(t_{\text{полета}}) = V_0 \cos \alpha t_{\text{полета}}.$$

$$L = \frac{V_0^2 \sin 2\alpha}{g}.$$

V. Конечная скорость.

$$V_{y \text{ к}} = V_0 \sin \alpha - gt_{\text{полета}} = V_0 \sin \alpha - g \cdot \frac{V_0 \sin \alpha}{g} - g \cdot \frac{\sqrt{V_0^2 \sin^2 \alpha + 2gh_0}}{g}.$$

$$V_{x \text{ к}} = V_0 \cos \alpha.$$

$$V_{y \text{ к}} = -\sqrt{V_0^2 \sin^2 \alpha + 2gh_0}.$$

$$V_{\text{к}} = \sqrt{V_{x \text{ к}}^2 + V_{y \text{ к}}^2} = \sqrt{V_0^2 \cos^2 \alpha + V_0^2 \sin^2 \alpha + 2gh_0}.$$

$$V_{\text{к}} = \sqrt{V_0^2 + 2gh_0}.$$

VI. Угол падения ( $\beta$ ).

$$\cos \beta = \frac{V_x}{V_{\text{к}}} = \frac{V_0 \cos \alpha}{\sqrt{2gh_0 + V_0^2}}.$$

### 1.1.3 Векторный подход к задачам с броском под углом горизонта (баллистическим задачам).

Тело брошено под углом  $\alpha$  со скоростью  $V_0$ .

$$\vec{V} = \vec{V}_0 + gt.$$

$$\vec{r} = \vec{V}_0 + \frac{\vec{g}t^2}{2}.$$

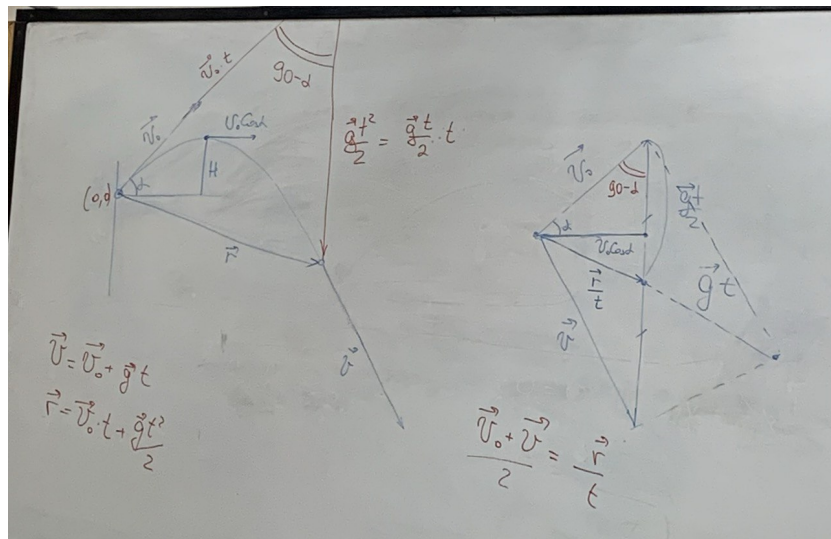


Рис. 1: Треугольник скоростей и путей.

$$S_{\Delta V} = \frac{V_0 \cdot \cos \alpha \cdot gt}{2} = \frac{V \cdot V_0 \cdot \sin(\alpha + \beta)}{2}.$$

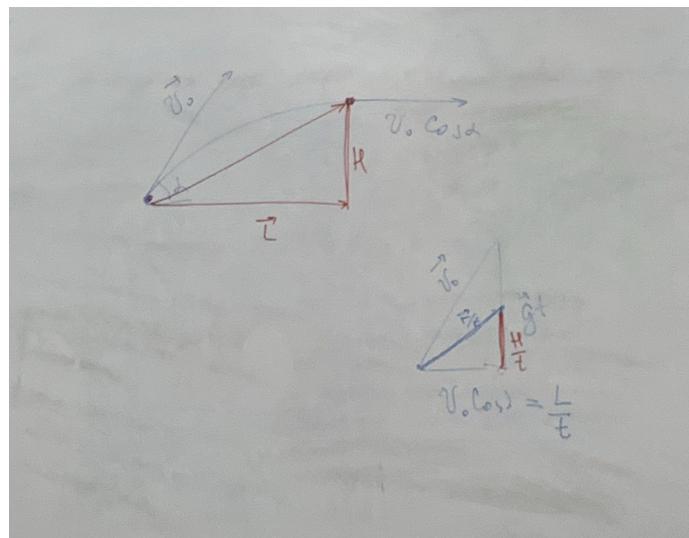


Рис. 2: Треугольник скоростей 2.

#### 1.1.4 Движение по окружности.

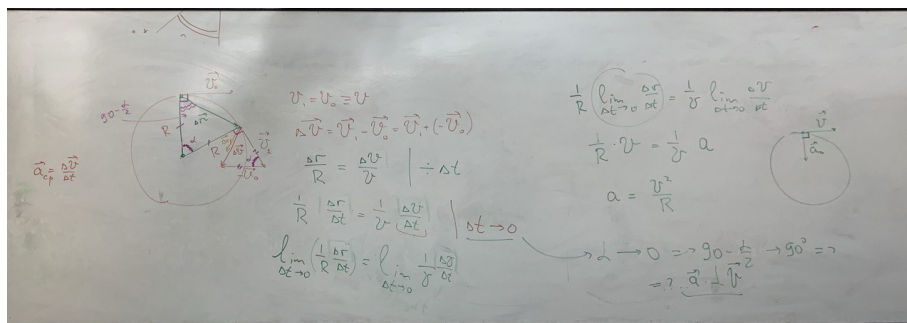


Рис. 3: Движение по окружности.

$\omega$  — угловая скорость.  $\omega = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \varphi}{\Delta t}$ .

**Период** — время, за которое тело проходит полный оборот по окружности.  $T = \frac{2\pi R}{V} = \frac{2\pi}{\omega}$ .

**Формула связи линейной скорости с угловой.**  $V = \omega R$ .

**Частота** — количество оборотов в секунду.  $\nu = \frac{1}{T}$ .  $[\nu] = \text{Гц}$ .

$$\beta = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \omega}{\Delta t} = \text{const.}$$

$$\beta = \frac{\Delta \omega}{\Delta t} = \frac{\omega(t) - \omega_0}{t - t_0}.$$

$$\omega(t) = \omega_0 + \beta t.$$

$$\varphi = \varphi_0 \pm \omega_0 t \pm \frac{\beta t^2}{2}.$$

$$a_\tau = \beta R.$$

### 1.1.5 Относительность движение. Преобразование Галилея.

**Принцип относительности классической механики** — во всех инерциальных системах отсчета механические явления протекают одинаково.

$$\vec{V}_{\text{абс}} = \vec{V}_{\text{относ}} + \vec{V}_{\text{пер}}$$

## 1.2 Динамика.

Отвечает на вопрос, почему тело движется именно так.

$$\vec{F}, [F] = \text{Н}.$$

**Инерция** — способность тела сохранять скорость при отсутствии внешнего воздействия.

Три закона Ньютона:

1. Существуют инерциальные системы отсчета (ИСО). ИСО — те системы отсчета, в которых если на тело не действуют силы или их действие скомпенсировано, то тело движется равномерно и прямолинейно или покоится.
2.  $\sum \vec{F} = m\vec{a}$ .  
Инертность — свойство тела, которое заключается в том, что для изменения скорости тела необходимо время.
3. При взаимодействии двух тел возникает две силы. Эти две силы приложены к двум разным телам, равным по модулю, противоположны по направлению, лежат на одной прямой, имеют одну природу (гравитационная, электромагнитная, сильная, слабая).

**Ограничения** на законы: работают только для скоростей много меньших скоростей света, в инерциальных системах счисления и масса не нулевая.

Полезная информация:

1. Тело стоит на платформе, платформа движется вверх с ускорением  $\vec{a}$ , у тела масса  $m$ , то  $P = m \cdot (g + a)$ .
2. Тело стоит на платформе, платформа движется вниз с ускорением  $\vec{a}$ , у тела масса  $m$ , то  $P = m \cdot (g - a)$ .

### 1.2.1 Сила трения.

Сила трения имеет электро-магнитную природу. Направлена вдоль поверхности противодействующих поверхностей, против относительной скорости взаимодействия двух тел.

$$F_{\text{тр}} = N\mu; \mu — \text{коэффициент трения.}$$

Не существует силы вязкого трения покоя.

### 1.2.2 Сила упругости.

**Сила упругости** — сила электромагнитной природы, возникающая при деформации, направленная против деформации.

$$F_{\text{упр}} = -k\Delta x.$$

Виды деформаций:

- Упругие (обратимая деформация):
  1. Растяжение-сжатие
  2. Сдвиг
  3. Изгиб
  4. Кручение
- Пластическая (необратимая деформация).

**Механическое напряжение.**  $\sigma = \frac{F}{S} = \varepsilon \cdot \frac{kl_0}{S} = E \cdot |\varepsilon|$ .  $[\sigma] = \frac{\text{Н}}{\text{м}^2} = \text{Па}$ .

**Модуль Юнга.**  $E = \frac{kl_0}{S}$ .  $[E] = \text{Па}$ .

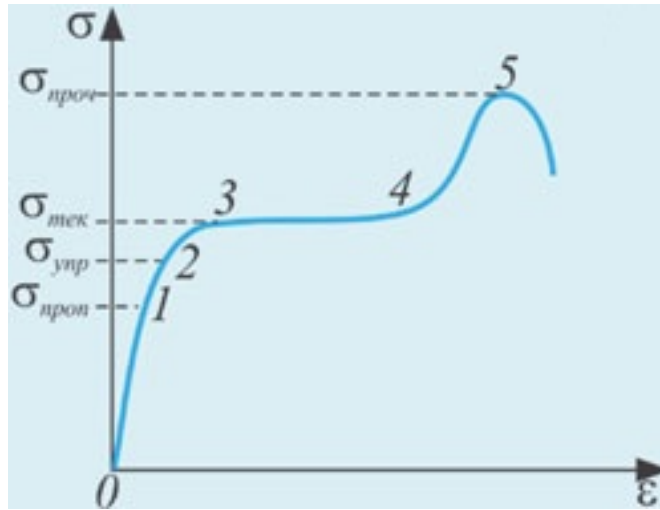


Рис. 4: Диаграмма растяжения

**Коэффициент жесткости.**

- Параллельное соединение.  

$$k = \frac{ES}{l_0} = \frac{E(\sum_{i=0} S_i)}{l_0} = \sum_{i=0} k_i.$$
- Последовательное соединение.  

$$\frac{1}{k} = \frac{l_0}{ES} = \frac{\sum_{i=0} l_{0i}}{ES} = \sum_{i=0} \frac{1}{k_i}.$$

### 1.2.3 Гравитация.

**Исаак Ньютон** (1643 – 1727 г.). Учился в Кэмбридже. Когда он был на 4 курсе, произошла эпидемия чумы и он получил бакалавриат без защиты диплома.

**Законы Кеплера** (1609 – 1619):

1. Все планеты движутся по эллипсам, в одном из фокусов которых находится Солнце.
2. Радиус-вектор планеты за одинаковые промежутки времени заметает равные площади.

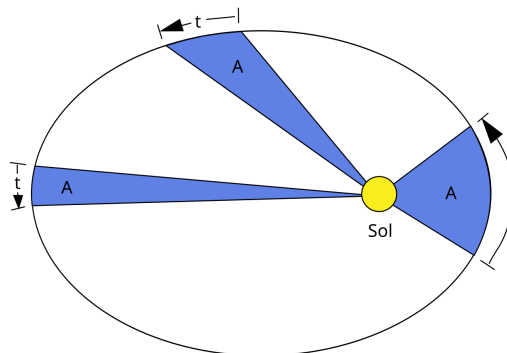


Рис. 5: Второй закон Кеплера.

$$3. \frac{T_1^2}{T_2^2} = \frac{b_1^3}{b_2^3} = \frac{R_1^3}{R_2^3}.$$

**Закон всемирного тяготения** (1666 г.).  $F \sim \frac{m_1 m_2}{R^2}$ .  $F_{\text{грав}} = \frac{GM_1 M_2}{R^2}$ .

Границы применения:

- Точечные тела.

- Сферические тела, плотность которых зависит только от расстояний до их центров.

**Гравитационная масса** — масса, входящая в закон всемирного тяготения.

**Инертная масса** — масса, входящая во второй закон Ньютона.

Могло быть такое, что они не равны. То, что они равны, стечение обстоятельств в нашей вселенной.

**Опыт Кавендиша.**

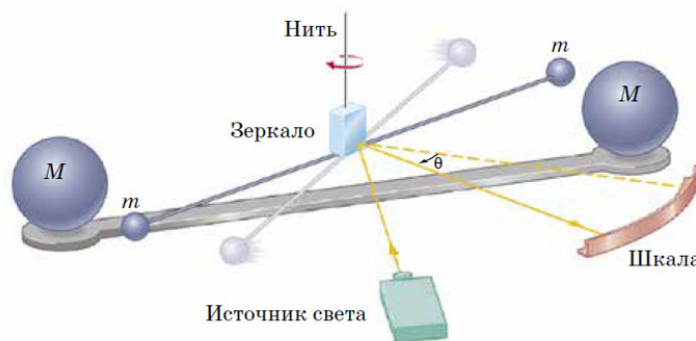


Рис. 6: Опыт Кавендиша\*.

На самом деле он увеличил точность не с помощью зеркала, а с помощью шкалы Нониуса.

$$G = 6.67 \cdot 10^{-11} \frac{\text{Н} \cdot \text{м}^2}{\text{кг}^2}.$$

Но на самом деле он хотел найти  $\rho_{\text{земли}} = 5437 \frac{\text{кг}}{\text{м}^3}$ . Это очень близко, тк на данный момент принято, что  $\rho_{\text{земли}} = 5515 \frac{\text{кг}}{\text{м}^3}$ .

**Ускорение свободного падения.**  $F = G \frac{Mm}{R^2} \rightarrow G \frac{M}{R^2} = g = 9.8$ .

**Первая космическая скорость.** Это минимальная (для данной высоты над поверхностью планеты) горизонтальная скорость, которую необходимо придать объекту, чтобы он совершал движение по круговой орбите вокруг планеты.

$$F_{\text{грав}} = \frac{GMm}{R^2}; F_{\text{норм}} = \frac{mv^2}{R}.$$

$$\frac{GMm}{R^2} = \frac{mv^2}{R}.$$

$$v = \sqrt{\frac{GM}{R}} = \sqrt{\frac{(6.674 \cdot 10^{-11}) \cdot (5.972 \cdot 10^{24})}{6.371 \cdot 10^6}} \approx 7.91 \cdot 10^3 \frac{\text{м}}{\text{с}}.$$

**Что видит лунный человек.** Он всегда видит землю в одной и той же точке на небе, так как луна вращается вокруг своей оси с такой же скоростью, с какой вращается вокруг земли. Это явление называется "Приливный захват".

**Открытие Нептуна.** В 19 веке ученые заметили, что орбита Урана отклоняется от расчетной, что указывало на влияние неизвестной планеты. Французский математик Урбен Леверье в 1846 году предсказал расположение Нептуна, рассчитав его орбиту на основе этих отклонений. Немецкий астроном Иоганн Галле с помощью телескопа обнаружил Нептун в указанном месте. Нептун стал первой планетой, открытой с помощью математических расчетов, а не прямых наблюдений.

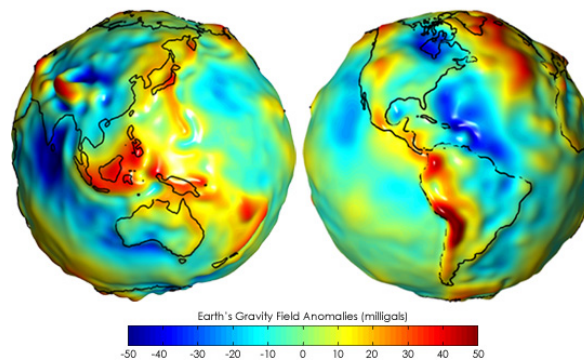


Рис. 7: Геоид с увеличенными искажениями и с раскраской, соответствующей гравитационным аномалиям (одна и та же гиря, взвешенная на одних и тех же пружинных весах, будет в «красных местах» тяжелее, а в «синих местах» — легче).

### 1.2.4 Не инерциальные системы отсчета.

**Сила инерции.**  $\vec{F}_и = -m \cdot a_{пер}$ . Для нее нет пары, тк на самом деле этой силы не существует.

## 1.3 Законы сохранения.

### 1.3.1 Закон сохранения импульса.

**Импульс.**  $p = m \cdot V$ ;  $[p] = \frac{\text{кг} \cdot \text{м}}{\text{с}}$ .

**Второй закон Ньютона в импульсной форме.**  $\vec{F} \Delta t = \Delta \vec{p} \rightarrow \vec{F} = \frac{\Delta \vec{p}}{\Delta t}$ .

**Закон изменения импульса системы.**  $\Delta p_{сис} = F_{внеш} \cdot \Delta t$ .

**Закон сохранения импульса.** Если на систему не действуют внешние силы или их действие скомпенсированно, то импульс системы сохраняется.

### 1.4 Реактивное движение.

$[\mu] = \frac{\text{кг}}{\text{с}}$  — скорость расхода топлива,  $\vec{u}$  — скорость топлива в системе отсчета ракеты.

ЗСИ:  $M\vec{V} = (M - \mu \Delta t)(\vec{V} + \Delta \vec{V}) + \mu \Delta t(\vec{V} + \vec{u})$ .

$0 = M\Delta \vec{V} - \mu \Delta t \Delta \vec{V} + \mu \vec{u} \Delta t$ .

$M\Delta \vec{V} = -\mu \vec{u} \Delta t$ .

$M \frac{\Delta \vec{V}}{\Delta t} = -\mu \vec{u}$ .

$M\vec{a} = -\mu \vec{u} = \vec{F}_p$ .

$\vec{F}_p = -\mu \vec{u}$  — уравнение Мещерского.

### 1.5 Механическая работа.

**Механическая работа.**  $A = Fl \cdot \cos \alpha = (\vec{F}, \vec{l})$ .  $\alpha$  — угол между силой и вектором перемещения.  $[A] = \text{Дж}$ .

**Мощность.**  $P = \frac{A}{t} = FV \cdot \cos \alpha = (\vec{F}, \vec{V})$ .  $[P] = \text{Вт}$ .

**Работа силы упругости.**  $A = -\Delta E_{п} = -\frac{k(\Delta x)^2}{2}$ .

### 1.6 Механическая энергия.

**Кинетическая энергия.**  $E_{к} = \frac{m \cdot V^2}{2}$ .  $A = \Delta E_{к}$ .

**Потенциальная энергия.**  $E_{п} = mgh$ .  $A_{mg} = -\Delta E_{п}$ .

Силы, работа которых зависит от начального и конечного положения и не зависит от пройденного пути называется **консервативными**.

**Закон сохранения энергии.**  $\frac{m \cdot V^2}{2} + mgh = \text{const}$ . В замкнутой системе, в которой отсутствуют не консервативные силы, энергия сохраняется. Если внешние силы действуют, то изменение механической энергии равно работе внешних сил.

### 1.7 Потенциальная энергия силы тяготения.

$$E_{п} = \frac{GM_1 M_2}{R}$$

### 1.8 Статика абсолютно упругого тела.

Условия покоя абсолютно упругого тела:

1.  $\sum \vec{F} = 0$

2. **Плечо** — кратчайшее расстояние от оси вращения тела до линии действия силы.

**Момент силы** — произведение силы на плечо.  $M_{НМ} = FN \cdot d_{М}$ .

Сумма всех моментов с учетом знака равна 0  $\Leftrightarrow$  сумма всех моментов, которые вращают по часовой стрелке, равна сумме всех моментов, вращающих по часовой стрелке.

**Формула центра масс.**  $x_c = \frac{\sum_i m_i x_i}{m} = \frac{\sum_i m_i x_i}{\sum_i m_i}$ .  $y_c = \frac{\sum_i m_i y_i}{m} = \frac{\sum_i m_i y_i}{\sum_i m_i}$ .  $z_c = \frac{\sum_i m_i z_i}{m} = \frac{\sum_i m_i z_i}{\sum_i m_i}$ .  $\vec{r}_c = \frac{\sum_i m_i \vec{r}_i}{m} = \frac{\sum_i m_i \vec{r}_i}{\sum_i m_i}$ .

**Виды равновесий.**

- Устойчивое — положение равновесия, при выводе из которого возникает "возвращающая" сила, которая возвращает его в изначальное положение. Равнодействующая сила возвращает.
- Неустойчивое — положение равновесия, при выводе из которого тело не возвращается в изначальное положение. Равнодействующая сила не возвращает.
- Безразличное — равнодействующая сила равна 0.

**КПД.**  $\eta = \frac{A_{\text{пол}}}{A_{\text{зат}}} \cdot 100\%$ .

**Теорема о движении центра масс.** Центр масс тела движется таким образом, как будто он точка массой  $m_{\text{общ}}$  и все силы приложены к этой точке.

$$\frac{\Delta(\Delta m_i \vec{V}_i)}{\Delta t} = \frac{\Delta \vec{p}_i}{\Delta t} = \sum_{i+k} \vec{F}_{ik} + \sum_i \vec{F}_{\text{внеш}}$$

$$\frac{\sum_i \Delta \Delta m_i \vec{V}_i}{\Delta t} = \vec{F}_{\text{внеш}}$$

$$\frac{\Delta \sum_i \Delta m_i \vec{V}_i}{\Delta t} = \vec{F}_{\text{внеш}}$$

$$r'_c = V_c = \frac{\sum_i \Delta m_i V_i}{m}$$

$$\Delta \frac{m \vec{V}_c}{\Delta t} = \vec{F}_{\text{внеш}}$$

$$m \vec{a}_c = \vec{F}_{\text{внеш}}$$

⇒ Если внешних сил не действует, то центр масс покоится, если покоился, или движется по инерции, если двигался по инерции.