

Содержание

1	Линейная алгебра.	2
1.1	Введение.	2
1.2	Фактор-пространства.	2
1.3	Матрицы.	3
1.4	Системы линейных уравнений.	5
2	Теория типов.	7
2.1	Основы математической логики. Классическое исчисление высказываний.	7
2.2	Интуиционистское исчисление высказываний. Естественный вывод.	8
2.3	Исчисление предикатов.	8
2.4	λ — исчисления.	9
2.5	Просто — типизированное λ — исчисление.	10
2.6	Нормализуемость λ_{\rightarrow} . Система F.	11
2.7	Экзистенциальные типы. Система НМ.	11

1 Линейная алгебра.

1.1 Введение.

Пример. $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$

$$A \times B = \{(a, b) | a \in A, b \in B\}$$

F — поле, 2 операции, обе обратимы.

Векторное пространство V над F : $(V, +, *)$

1. $\forall v, u, w \in V: (v + u) + w = v + (u + w)$
2. $\forall v, u \in V: v + u = u + v$
3. $\exists v \in V: \forall v \in V: 0 + v = v$
4. $\forall v \in V: \exists "-v": v + "-v" = 0$
5. $\forall v \in V; \alpha, \beta \in F: \alpha * (\beta * v) = (\alpha\beta) * v$
6. $\forall v \in V; \alpha, \beta \in F: (\alpha + \beta) * v = \alpha * v + \beta * v$
7. $\forall v, w \in V; \alpha \in F: \alpha * (v + w) = \alpha * v + \alpha * w$
8. $\forall v \in V: 1 * v = v$

Утв. Если v, w — векторное пространство над F , то и $v \times w$ — тоже векторное пространство над F

V — векторное пространство над F .

Опр. $W \subseteq V$ — подпространство.

1. $\forall w_1, w_2 \in W: w_1 + w_2 \in W$
2. $\forall w \in W; \alpha \in F: \alpha w \in W$

$$V = R \times R, W = \{v \in V | x + y = 0\}$$

Опр. Линейное отображение:

1. $f(x) + f(y) = f(x + y)$
2. $f(\alpha x) = \alpha f(x)$

1.2 Фактор-пространства.

Опр. Поле F , $W \subseteq V$ — векторное пространство; V/W — факторизация. Отношение \sim на V : $v \sim u \Leftrightarrow u - v \in W$.

1. $u - u = 0 \in W$
2. $u - v \in W \Leftrightarrow v - u \in W$
3. $(u - v) \in W \wedge (v - w) \in W \Rightarrow (u - v) + (v - w) \in W \Rightarrow u - w \in W$

$[v]$ — класс эквивалентности вектора v .

1. $[v] + [u] = [v + u]$
2. $\alpha[v] = [\alpha v]$

$$v_1 \sim v_2 \Rightarrow u + v_1 \sim u + v_2$$

$$v_1 \sim v_2 \Rightarrow \alpha v_1 \sim \alpha v_2$$

Отображение векторного пространства.

V, W — векторные пространства над F .

$f: V \rightarrow W$ — линейная, если

1. $\forall v_1, v_2 \in V: f(v_1) + f(v_2) = f(v_1 + v_2)$
2. $\forall v \in V, \alpha \in F: \alpha f(v) = f(\alpha v)$

Если f — биекция, то f — изоморфизм, V и W — изоморфны.

1. Рефлексивна $f = id V \rightarrow V: v \rightarrow v$

2. Симметрична $V \xrightarrow{f} W$ f^{-1} — обратное отображение: $f^{-1}(x) + f^{-1}(y) = f^{-1}(x + y)$

3. $V \xrightarrow{f} W$, $W \xrightarrow{g} U$. f, g — линейная биекция, $f \circ g$ — линейная биекция.

$$\mathbb{R}^n = (x_1, x_2, \dots, x_n), \mathbb{R}^m = (y_1, y_2, \dots, y_m)$$

$$\text{Табличка } n \times m: \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Отображение $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ (линейное):

$$(x_1, \dots, x_n) \rightarrow \begin{pmatrix} a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n \\ a_{21}x_1 + \dots + a_{2n}x_n \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + \dots + a_{mn}x_n \end{pmatrix}$$

Опр. V — векторное пространство над F . Набор v_1, \dots, v_k . $\sum \alpha_i v_i, \alpha_i \in F \rightarrow$ конечное число $\alpha_i \neq 0$. Все линейные комбинации образуют векторное подпространство $\text{span}(v_1, \dots, v_k, \dots)$.

Опр. v_1, \dots, v_k, \dots — линейно независимая $\Leftrightarrow \nexists$ нетривиальных линейных комбинаций (не все коэффициенты равны 0), те все коэффициенты равны 0, и других решений нет. Линейно зависима иначе.

Опр. v_1, \dots, v_k, \dots — порождающая система, если $\text{span}(v_1, \dots, v_k, \dots) = V$ ($\text{span}()$ — множество всех возможных линейных комбинаций).

Опр. Базис = линейно независимая + порождающая система. Базис — максимальная линейно независимая система векторов в пространстве V .

Опр. V — конечномерное $\Leftrightarrow \exists$ конечная порождающая система.

Возьмем минимальную (по включению) порождающую систему. v_1, \dots, v_e . Пусть оказалась линейно зависимой. $\sum \alpha_i v_i = 0$. НУО $\alpha_1 \neq 0$. $v_1 = \sum \frac{-d_i}{d_1} v_j$. Тогда можем выкинуть.

(!) Любой базис одинакового размера. $e_1, \dots, e_k; f_1, \dots, f_m$. $m > k$. Хотим $e_i: (e_i, f_2, \dots, f_m)$ — линейно независимая система. Пусть нет. Тогда $\forall i \exists \alpha_1, \dots, \alpha_m: \alpha_1 e_i + \alpha_2 f_2 + \dots + \alpha_m f_m = 0 \Rightarrow e_i = \sum \beta_{ij} f_j \Rightarrow f_2 - f_m$ — порождают все?! Значит (e_1, f_2, \dots, f_m) — линейно независимая система. $e_1 = \sum \alpha_j f_j \Rightarrow \alpha \neq 0 \Rightarrow f_1 = \frac{1}{\alpha_1} e_1 - \sum_{j \neq 1} \frac{\alpha_j}{\alpha_1} f_j \Rightarrow (e_1, f_2, \dots, f_m)$ — базис.

базис.

Опр. $\dim V$ = количество элементов базиса.

$A \xrightarrow{f} B: f(A)$ — векторное подпространство в B .

Утв. Линейные независимые системы не бывают больше, чем базис.

$e_1, \dots, e_k; f_1, \dots, f_{k+1}$. Рассмотрим наборы $(e_1, f_2, \dots, f_{k+1}); (e_1, \dots, e_k, f_{k+1})$ — линейно независимая система.

Теорема. V — векторное пространство над полем $F \Rightarrow V \cong F^{\dim V}$.

Доказательство:

fix базис e_1, \dots, e_n , где $n = \dim V$.

Лемма. $\forall v \in V \exists! (\alpha_1, \dots, \alpha_k): V = \sum \alpha_k e_k$.

Доказательство:

Пусть есть два набора $(\alpha_1, \dots, \alpha_k)$ и $(\beta_1, \dots, \beta_k)$. $0 = V - V = \sum (\alpha_k - \beta_k) e_k \Rightarrow \alpha_k = \beta_k \forall k$.

$f: F^n \rightarrow V$

$$(x_1, \dots, x_n) \rightarrow \sum x_i e_i$$

$$(y_1, \dots, y_n) \rightarrow \sum y_i e_i$$

$$(x_1 + y_1, \dots, x_n + y_n) \rightarrow \sum (x_i + y_i) e_i$$

$$f(\lambda(x_1, \dots, x_n)) = \sum (\lambda x_i) e_i = \lambda (\sum x_i e_i)$$

$$\text{Инъекция. } f(x_1, \dots, x_n) = f(y_1, \dots, y_n) \Rightarrow (x_1, \dots, x_n) = (y_1, \dots, y_n)$$

$$\text{Сюръекция. } V = \sum \alpha_i e_i \Rightarrow v = f(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$$

1.3 Матрицы.

$$\mathbb{R}^n \xrightarrow{f} \mathbb{R}^m$$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

$$(x_1, \dots, x_n) \rightarrow \begin{pmatrix} a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n \\ a_{21}x_1 + \dots + a_{2n}x_n \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + \dots + a_{mn}x_n \end{pmatrix}$$

$$e_1 = (1, 0, \dots, 0) \rightarrow (b_{11}, b_{21}, \dots, b_{m1})$$

$$\begin{aligned}
e_2 &= (0, 1, \dots, 0) \rightarrow (b_{12}, b_{22}, \dots, b_{m2}) \\
&\vdots \\
e_n &= (0, 0, \dots, 1) \rightarrow (b_{1n}, b_{2n}, \dots, b_{mn}) \\
f((x_1, x_2, \dots, x_n)) &= x_1 f(e_1) + x_2 f(e_2) + \dots + x_n f(e_n) = x_1(b_{11}, b_{21}, \dots, b_{m1}) + x_2(b_{12}, \dots, b_{m2}) + \dots = \\
&(x_1 b_{11} + x_2 b_{12} + \dots + x_n b_{1n}, \\
&x_1 b_{21} + x_2 b_{22} + \dots + x_n b_{2n}, \\
&\dots, \\
&x_1 b_{m1} + \dots + x_n b_{mn})
\end{aligned}$$

Сложение матриц.

$$\begin{aligned}
A &= \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} b_{11} & \dots & b_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{m1} & \dots & b_{mn} \end{pmatrix}; X - \text{матрица, } f_X - \text{линейное отображение.} \\
f_A : (x_1, \dots, x_n) &\rightarrow \begin{pmatrix} a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + \dots + a_{mn}x_n \end{pmatrix}, f_B : (x_1, \dots, x_n) \rightarrow \begin{pmatrix} b_{11}x_1 + \dots + b_{1n}x_n \\ \vdots \\ b_{m1}x_1 + \dots + b_{mn}x_n \end{pmatrix} \\
f_A + f_B : (x_1, \dots, x_n) &\rightarrow \begin{pmatrix} (a_{11} + b_{11})x_1 + \dots + (a_{1n} + b_{1n})x_n \\ \vdots \\ (a_{m1} + b_{m1})x_1 + \dots + (a_{mn} + b_{mn})x_n \end{pmatrix} \\
A + B &:= (a_{ij} + b_{ij}) \\
\lambda A &:= (\lambda a_{ij})
\end{aligned}$$

Произведение матриц (композиция).

$$\begin{aligned}
\mathbb{R}^n &\xrightarrow{f_A} \mathbb{R}^m \xrightarrow{f_B} \mathbb{R}^k \\
f_A \text{ и } f_B &\text{ построены по матрицам } A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \text{ и } B = \begin{pmatrix} b_{11} & \dots & b_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{m1} & \dots & b_{mn} \end{pmatrix} \\
f_C(V) &= f_B(f_A(V)) \\
C &:= B \cdot A \\
e_1 &= (1, 0, \dots, 0); f_A(e_1) = (a_{11}, \dots, a_{m1}) \\
1 \text{ столбец: } f_B(a_{11}, \dots, a_{m1}) &= \\
(b_{11}a_{11} + b_{12}a_{21} + \dots + b_{1m}a_{m1}, \\
b_{21}a_{11} + b_{22}a_{21} + \dots + b_{2m}a_{m1}, \\
&\vdots, \\
b_{k1}a_{11} + b_{k2}a_{21} + \dots + b_{km}a_{m1}) \\
f_A(e_i) &= (a_{1i}, \dots, a_{mi}) \\
i \text{ столбец: } f_B(f_A(e_i)) &= \\
(b_{11}a_{1i} + b_{12}a_{2i} + \dots + b_{1m}a_{mi}, \\
b_{21}a_{1i} + b_{22}a_{2i} + \dots + b_{2m}a_{mi}, \\
&\vdots, \\
b_{k1}a_{1i} + b_{k2}a_{2i} + \dots + b_{km}a_{mi}) \\
C &= \begin{pmatrix} c_{11} & \dots & c_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ c_{k1} & \dots & c_{kn} \end{pmatrix} \\
c_{ij} &= b_{i1}a_{1j} + b_{i2}a_{2j} + \dots + b_{im}a_{mj} = \sum_{\alpha=1}^m b_{i\alpha}a_{\alpha j}
\end{aligned}$$

Опр. $F^n \xrightarrow{f_a} F^m$, $f_a(v) = Av$. $Im f = \{u \in F^m | \exists v \in F^n : u = f(v)\}$. $Ker f = \{u \in F^n | f(u) = 0\}$.

Утв. $Im f$ и $Ker f$ — линейные подпространства.

Теорема о гомоморфизме. $V/Ker f \cong Im f$; $V = F^n$.

Доказательство:

e_1, \dots, e_k — базис в $Ker f$. Дополним его до базиса в V : e_{k+1}, \dots, e_n .

Базис переходит:

$$\begin{aligned}
e_1 &\rightarrow 0 \\
e_2 &\rightarrow 0 \\
&\vdots \\
e_k &\rightarrow 0 \\
e_{k+1} &\rightarrow g_{k+1}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \vdots \\ & e_n \rightarrow g_n \end{aligned}$$

g — линейно независимая система, тк $\sum \beta_i g_i = 0$ и $f(\sum \beta_i g_i) = 0$. Тогда $\sum \beta_i e_i \in \text{Ker } f$.
 $\text{Im } f = \text{Lin}(g_{k+1}, \dots, g_n)$, тк $\text{Im } f \Leftrightarrow X = f(\sum \alpha_i e_i) = \sum \alpha_i g_i$.

Утв. $V/\text{Ker } f \xrightarrow{g} \text{Im } f, [v] \xrightarrow{g} f(v)$. Тогда:

- $[v] \xrightarrow{g} f(v)$ — корректно заданное отображение.
- $v_1 - v_2 \in \text{Ker } f \Rightarrow f(v_1) = f(v_2) \Leftrightarrow f(v_1 - v_2) = 0$, тк $g([v]) = 0 \Rightarrow v \in \text{Ker } f \Rightarrow [v]$.
- $u \in \text{Im } f \Rightarrow \exists u = f(v) \Rightarrow u = g([v])$.

Опр. $\text{rank } A := \dim(\text{Im } A)$, где A — матрица. Также это размерность линейного замыкания пространства столбцов матрицы. $\text{Im } A$ — линейное замыкания пространства столбцов, тк $u \in \text{Im } A = f(\sum \alpha_i e_i) = \sum \alpha_i f(e_i)$. $f(e_i)$ — i -ый столбец матрицы.

Опр. Множество всех матриц $n \times m$ над полем F обозначается $M_{n \times m}(F)$. Это множество кольцо с 1 (ассоциативность сложения, нейтральный элемент сложения, обратимость сложения, коммутативность сложения, ассоциативность умножения, дистрибутивность, нейтральный элемент умножения).

Опр. Верхне-треугольная матрица — матрица, в которой под диагональю все нули. Аналогично нижне-треугольная. Они образуют линейное подпространство. Матрица, которая и верхне-треугольная, и нижне-треугольная — диагональная.

Опр. Симметричная матрица — $a_{ij} = a_{ji}$.

Утв. $\dim(\text{Lin}(U \cup W)) + \dim(u \cap w) = \dim(u) + \dim(w)$.

Утв. $\text{rank}(AB) = \min(\text{rank } A, \text{rank } B)$.

Утв. $T^{-1}ATT^{-1}BT = T^{-1}(AB)T$.

Опр. Матрица перехода A из базиса e в базис f такова, что $\forall v \in V : v = \sum \alpha_i e_i \Rightarrow v = \sum \beta_i f_i$, где верно, что

$$A \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_n \end{pmatrix}$$

1.4 Системы линейных уравнений.

Опр. Система линейных уравнений —
$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + \dots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} \Leftrightarrow Av = b, v = \begin{pmatrix} x_0 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}.$$
 Как устроено множество решений:

- \emptyset
- v_0 — единственное решение.
- Решений много \Rightarrow это $v_0 + L := \{v_0 + l | l \in L\}$, где v_0 — какое-то решение, L — линейное подпространство ($L = \text{Ker } A$).
 $Av_0 = b; Av_1 = b \Leftrightarrow A(v_1 - v_0) = 0 \Leftrightarrow (v_1 - v_0) \in \text{Ker } A$

Опр. Присоединение матриц. $(A|b) = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} & | & b_1 \\ a_{21} & \dots & a_{2n} & | & b_2 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} & | & b_n \end{pmatrix}$

Теорема Кронекера-Капелли. Система имеет решение $\Leftrightarrow \text{rank}(A) = \text{rank}(A|b)$.

Доказательство:

\Leftarrow :

$\text{Im } A = \{Av | v \in F^n\}$. $\text{Im}(A|b) = \{Av + \alpha b | v \in F^n, \alpha \in F\}$. В $\text{Im } A$ есть базис u_1, \dots, u_k . $u_1, \dots, u_k \in \text{Im}(A|b) \Rightarrow u_1, \dots, u_k$ — базис в $\text{Im}(A|b)$. $A(\sum \beta_i u_i) = \sum \beta_i (Av_i) = \sum \beta_i u_i = b$.

\Rightarrow :

$b = Av_0 \Rightarrow \{Av + \alpha b | v \in F^n, \alpha \in F\} = \{Av | v \in F^n\}$, тк $Av + \alpha b = Av + \alpha(Av_0) = A(v + \alpha v_0) \in \text{Im } A$.

Метод Гаусса. Приводит матрицу к виду, в котором понятно, решается она или нет. Можно:

- Умножать строку на ненулевое число.
- Переставить две строчки.
- Заменить строку на сумму ее и какой-то другой.
- Прибавить ко второй строке α · первую.

2 Теория типов.

2.1 Основы математической логики. Классическое исчисление высказываний.

Приоритет операций: $\neg \wedge \vee \rightarrow$.

$$f : P \rightarrow \{\text{True}, \text{False}\}. \llbracket \alpha \rrbracket^f = \begin{cases} f(X) & \alpha = X \\ \text{True} & \alpha = \beta \wedge \gamma, \llbracket \beta \rrbracket = \llbracket \gamma \rrbracket = \text{True} \\ \text{True} & \alpha = \beta \vee \gamma, \llbracket \beta \rrbracket = \text{True} / \llbracket \gamma \rrbracket = \text{True} \end{cases}$$

Опр. α — общезначимое, если при любой $f : \llbracket \alpha \rrbracket^f = \text{True}$. $\models \alpha$

Аксиомы:

1. $\alpha \rightarrow \beta \rightarrow \alpha$
2. $(\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow (\alpha \rightarrow \beta \rightarrow \gamma) \rightarrow \alpha \rightarrow \gamma$
3. $\alpha \rightarrow \beta \rightarrow \alpha \wedge \beta$
4. $\alpha \wedge \beta \rightarrow \alpha$
5. $\alpha \wedge \beta \rightarrow \beta$
6. $\alpha \rightarrow \alpha \vee \beta$
7. $\beta \rightarrow \alpha \vee \beta$
8. $(\alpha \rightarrow \gamma) \rightarrow (\beta \rightarrow \gamma) \rightarrow \alpha \vee \beta \rightarrow \gamma$
9. $(\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow (\alpha \rightarrow \neg \beta) \rightarrow \neg \alpha$
10. $\neg \neg \alpha \rightarrow \alpha$

Утв. $A \rightarrow A$.

Доказательство:

1. $A \rightarrow A \rightarrow A$
2. $(A \rightarrow A \rightarrow A) \rightarrow (A \rightarrow (A \rightarrow A) \rightarrow A) \rightarrow (A \rightarrow A)$
 $\alpha = A, \beta = A \rightarrow A, \gamma = A$
3. $(A \rightarrow (A \rightarrow A) \rightarrow A) \rightarrow A \rightarrow A$. Modus Ponens из 1 и 2.
4. $A \rightarrow (A \rightarrow A) \rightarrow A$
 $\alpha = A, \beta = A \rightarrow A$
5. $A \rightarrow A$

Опр. $\vdash \alpha$ — есть доказательство α . $\gamma_1, \gamma_2, \dots \vdash \alpha$ — есть доказательство α из $\gamma_1, \gamma_2, \dots$

Теорема о дедукции. $\Gamma, \alpha \vdash \beta$ ттт $\Gamma \vdash \alpha \rightarrow \beta$.

Утв. $\vdash \alpha$ ттт $\models \alpha$.

Утв. Если из $\models \alpha$ следует $\vdash \alpha$, то оценка полна. Если из $\vdash \alpha$ следует $\models \alpha$, то оценка корректна.

Доказательство корректности:

Индукция по длине доказательства $\Gamma \vdash \alpha$.

Если α — гипотеза, то очевидно, что следует $\Gamma \models \alpha$.

Если α — аксиома, то нужно проверить все аксиомы. На примере 9 аксиомы:

$$(\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow (\alpha \rightarrow \neg \beta) \rightarrow \neg \alpha$$

Если $\llbracket \alpha \rrbracket = \text{False}$, то True , тк в конце $\neg \alpha$.

Если $\llbracket \alpha \rrbracket = \text{True}$, то либо первая либо вторая скобка — False .

Переход:

Аксиома — понятно, тк она аксиома. Гипотеза — тоже понятно, тк доказана по ИП. Modus Ponens — понятно, тк то, из чего он получен — истинно.

Доказательство полноты:

Используем: $A \vee \neg A$, $(\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow (\neg \alpha \rightarrow \beta) \rightarrow \beta$, и если $\Gamma, \alpha \vdash \beta$ и $\Gamma, \neg \alpha \vdash \beta$, то $\Gamma \vdash \beta$

fix f : $x_1 := \text{True}, x_2 := \text{False}, x_3 := \text{False}, \dots$

$x_1, x_2, x_3, \dots \vdash \alpha$

$$\begin{cases} x_1, x_2, \dots, x_n \vdash \alpha \\ x_1, x_2, \dots, \neg x_n \vdash \alpha \\ \vdots \end{cases}$$

$$\mathbb{D} \ \gamma \ \mathbb{D} = \begin{cases} \gamma & \llbracket \gamma \rrbracket = \text{True} \\ \neg \gamma & \llbracket \gamma \rrbracket = \text{False} \end{cases} \quad \text{Это надо, чтобы либо утверждение, либо его отрицание точно были доказуемые.}$$

Внимание! Какие-то челики поменяли 10 аксиому на эту: $\alpha \rightarrow \neg \alpha \rightarrow \beta$.

Новая оценка: $]X \subset \mathbb{R}$. X — открыто, если $\forall x \in X \exists r > 0 : (x - r; x + r) \subset X$. $\text{Int}X = \{x \in X \mid \exists r > 0 (x - r; x + r) \subset X\}$

$$\llbracket \alpha \wedge \beta \rrbracket = \llbracket \alpha \rrbracket \cap \llbracket \beta \rrbracket$$

$$\llbracket \alpha \vee \beta \rrbracket = \llbracket \alpha \rrbracket \cup \llbracket \beta \rrbracket$$

$$\llbracket \alpha \rightarrow \beta \rrbracket = \text{Int}(\mathbb{R} \setminus \llbracket \alpha \rrbracket \cup \llbracket \beta \rrbracket)$$

$$\llbracket \neg \alpha \rrbracket = \text{Int}(\mathbb{R} \setminus \llbracket \alpha \rrbracket)$$

2.2 Интуиционистское исчисление высказываний. Естественный вывод.

Правила вывода:

$$1. \overline{\Gamma, \alpha \vdash \alpha}$$

$$2. \frac{\Gamma, \alpha \vdash \beta}{\Gamma \vdash \alpha \rightarrow \beta}$$

$$3. \frac{\Gamma \vdash \alpha \rightarrow \beta \quad \Gamma \vdash \alpha}{\Gamma \vdash \beta}$$

$$4. \frac{\Gamma \vdash \alpha \quad \Gamma \vdash \beta}{\Gamma \vdash \alpha \wedge \beta}$$

$$5. \frac{\Gamma \vdash \alpha \wedge \beta}{\Gamma \vdash \alpha}$$

$$6. \frac{\Gamma \vdash \alpha \wedge \beta}{\Gamma \vdash \beta}$$

$$7. \frac{\Gamma \vdash \alpha \rightarrow \gamma \quad \Gamma \vdash \beta \rightarrow \gamma \quad \Gamma \vdash \alpha \vee \beta}{\Gamma \vdash \gamma}$$

$$8. \frac{\Gamma \vdash \alpha}{\Gamma \vdash \alpha \vee \beta}$$

$$9. \frac{\Gamma \vdash \beta}{\Gamma \vdash \alpha \vee \beta}$$

$$10. \frac{\Gamma \vdash \perp}{\Gamma \vdash \alpha} \text{ в ИИВ}; \frac{\Gamma, \alpha \rightarrow \perp \vdash \perp}{\Gamma \vdash \alpha} \text{ в КИВ}$$

2.3 Исчисление предикатов.

Логические переменные — пропозициональные. Численные — предметные.

Квантор — $\forall a.$; функция — $f(a)$; предикат — принимает не логическое выражение, возвращает логическое.

Если φ — функциональный символ, нужно $F\varphi : D^n \rightarrow D$.

Если p — предикатный символ, нужно $Tr : D^n \rightarrow \{\text{True}, \text{False}\}$.

Если x — переменная, то $E(x) \in D$.

$$\llbracket p(\theta_1, \dots, \theta_n) \rrbracket = Tr(\llbracket \theta_1 \rrbracket, \dots, \llbracket \theta_n \rrbracket)$$

$$\llbracket \varphi(\theta_1, \dots, \theta_n) \rrbracket = F\varphi(\llbracket \theta_1 \rrbracket, \dots, \llbracket \theta_n \rrbracket)$$

$$\llbracket \forall x. \alpha \rrbracket = \text{True}, \text{ если для всех } d \in D : E(x) = d, \text{ то } \llbracket \alpha \rrbracket = \text{True}.$$

$\alpha[x := \theta]$ — заменяет все свободные x на θ .

Опр. θ называется свободным для подстановки в α вместо x , если $\alpha[x := \theta]$ не сделает свободные вхождения в θ связанными.

1. $x \notin FV(\Gamma) \mid \frac{\Gamma \vdash \alpha}{\Gamma \vdash \forall x.\alpha}$
2. Нужна свобода для подстановки $\mid \frac{\Gamma \vdash \forall x.\alpha}{\Gamma \vdash \alpha[x := \theta]}$
3. Нужна свобода для подстановки $\mid \frac{\Gamma \vdash \alpha[x := \theta]}{\Gamma \vdash \exists x.\alpha}$
4. $x \notin FV(\Gamma, \beta) \mid \frac{\Gamma \vdash \exists x.\alpha \quad \Gamma, \alpha \vdash \beta}{\Gamma \vdash \beta}$

Теорема. Если $\Gamma \vdash \alpha$ в классическом исчислении предикатов, то $\Gamma \models \alpha$ в двоичной оценки для предикатов.
Доказательство:

Индукция по длине доказательства.
База.

$$\overline{\Gamma, \alpha \vdash \alpha} \text{ очевидно } \Gamma, \alpha \models \alpha$$

Переход.

$$\frac{\Gamma \vdash \alpha \wedge \beta}{\Gamma \vdash \alpha} \text{ . Есть } \Gamma \models \alpha \wedge \beta, \text{ надо } \Gamma \models \alpha.$$

$$\frac{\Gamma, \alpha \rightarrow \perp \vdash \perp}{\Gamma \vdash \alpha} \text{ . Есть } \Gamma, \alpha \rightarrow \perp \models \perp, \text{ надо } \Gamma \models \alpha.$$

2.4 λ — исчисления.

Опр. λ — исчисления — способ описать математику в программировании.

Тезис 1. Функции больше одного аргумента не нужны.

Опр. $\lambda x.P$ — принимает x и делает P .

Опр. $FV(\alpha)$ — множество свободных переменных α .

Опр. θ называется свободным для подстановки в α вместо x , если $\alpha[x := \theta]$ не сделает свободные вхождения в θ связанными.

Опр. $P =_{\alpha} Q$, если одно из следующего:

- P и Q — одна и та же формула
- $P = A_1 B_1, Q = A_2 B_2$; $A_1 =_{\alpha} A_2$ и $B_1 =_{\alpha} B_2$
- $P = \lambda x.A_1, Q = \lambda y.A_2$; $A_1[x := t] =_{\alpha} A_2[y := t]$

С этого момента любое $=$ — это $=_{\alpha}$.

Опр. $(\lambda x.P)Q$ — редекс. $A \rightarrow_{\beta} B$, если:

- $A = (\lambda x.P)Q, B = P[x := Q]$, есть свобода
- $A = P_1 Q_1, B = P_2 Q_2$; $(P_1 = P_2 \text{ и } Q_1 \rightarrow_{\beta} Q_2)$ или $(Q_1 = Q_2 \text{ и } P_1 \rightarrow_{\beta} P_2)$
- $A = \lambda x.P_1, B = \lambda x.P_2$; $P_1 \rightarrow_{\beta} P_2$

Опр. $\omega = (\lambda y.yy)(\lambda x.xx)$

Опр. $A \twoheadrightarrow_{\beta} B$ за несколько (в том числе 0) шагов.

Опр. Нормальный порядок — редуцируем самый левый β — редекс. Аппликативный порядок — из самых вложенных берем левый β — редекс.

Опр. $A \rightrightarrows_{\beta} B$, если:

- $A = B$
- $A = \lambda x.P_1, B = \lambda x.P_2$; $P_1 \rightrightarrows_{\beta} P_2$
- $A = P_1 Q_2, B = P_2 Q_2$; $P_1 \rightrightarrows_{\beta} P_2$ и $Q_1 \rightrightarrows_{\beta} Q_2$
- $A = (\lambda x.P_1)Q_1, B = P_2[x := Q_2]$; $P_1 \rightrightarrows_{\beta} P_2$ и $Q_1 \rightrightarrows_{\beta} Q_2$

Теорема Черча — Россера. Если $A \twoheadrightarrow_{\beta} B, A \twoheadrightarrow_{\beta} C$ и $B \neq C$, то существует D , такое что $B \twoheadrightarrow_{\beta} D$ и $C \twoheadrightarrow_{\beta} D$.
Доказательство:

Лемма. Если $P_1 \Rightarrow_\beta P_2$ и $Q_1 \Rightarrow_\beta Q_2$, то $P_1[x := Q_1] \Rightarrow_\beta P_2[x := Q_2]$ — свобода есть.

- Случай $P_1 = P_2$ — ясно.
- Индукция по длине P_1 .
 - $P_1 = A_1 B_1$
 $P_2 = A_2 B_2$
 $A_1 \Rightarrow_\beta A_2$
 $B_1 \Rightarrow_\beta B_2$
 $A_1[x := Q_1] \Rightarrow_\beta A_2[x := Q_2]$
 $B_1[x := Q_1] \Rightarrow_\beta B_2[x := Q_2]$
 $P_1[x := Q_1] = (A_1[x := Q_1])(B_1[x := Q_1])$
 $P_2[x := Q_2] = (A_2[x := Q_2])(B_2[x := Q_2])$
 $P_1[x := Q_1] \Rightarrow_\beta P_2[x := Q_2]$
 - $P_1 = \lambda y. A_1$
 $P_2 = \lambda y. A_2$
 $A_1 \Rightarrow_\beta A_2$
 $A_1[x := Q_1] \Rightarrow_\beta A_2[x := Q_2]$
 $P_1[x := Q_1] = \lambda y. (A_1[x := Q_1])$
 $P_2[x := Q_2] = \lambda y. (A_2[x := Q_2])$
 $P_1[x := Q_1] \Rightarrow_\beta P_2[x := Q_2]$
 - $P_1 = (\lambda y. A_1) B_1$
 $P_2 = A_2[y := B_2]$
 $A_1 \Rightarrow_\beta A_2$
 $B_1 \Rightarrow_\beta B_2$
 $A_1[x := Q_1] \Rightarrow_\beta A_2[x := Q_2]$
 $B_1[x := Q_1] \Rightarrow_\beta B_2[x := Q_2]$
 $(\lambda y. A_1[x := Q_1])(B_1[x := Q_1]) \Rightarrow_\beta A_2[y := B_2][x := Q_2]$
 $y \in FV(Q_2)$, если да, то $y \in FV(Q_1)$
 $y \in FV(A_1)$ — иначе ясно.
 $y \notin FV(Q_2)$
 $A_2[y := B_2][x := Q_2] = A[x := Q_2][y := B_2[x := Q_2]]$
 $y = x$ аналогично

Лемма. Если $P \Rightarrow_\beta P_1$, $P \Rightarrow_\beta P_2$ и $P_1 \neq P_2$, то существует P_3 , такое что $P_1 \Rightarrow_\beta P_3$ и $P_2 \Rightarrow_\beta P_3$.

Индукция по элементам P .

- $P = P_1 - P_3 = P_2$
- $P = \lambda x. A$, $P_1 = \lambda x. A_1 \Rightarrow P_2 = \lambda x. A_2$. $P_3 = \lambda x. A_3$. $A \Rightarrow_\beta A_1$, $A \Rightarrow_\beta A_2$, $A_1 \Rightarrow_\beta A_3$, $A_2 \Rightarrow_\beta A_3$
- $P = AB$, $P_1 = A_1 B_1$
 - (I) $P_2 = A_2 B_2$
 $A \Rightarrow_\beta A_1$, $A \Rightarrow_\beta A_2$; $B \Rightarrow_\beta B_1$, $B \Rightarrow_\beta B_2$.
 $\exists A_3, B_3; P_3 = A_3 B_3$
 - (II) $P = (\lambda x. C) B$, $P_2 = C_2[x := B_2]$, $P_1(\lambda x. C_1) B_1$
 $A \Rightarrow_\beta A_1$ — тогда $A_1 = \lambda x. C_1$
 $B \Rightarrow_\beta B_1$, $B \Rightarrow_\beta B_2$; $C \Rightarrow_\beta C_1$, $C \Rightarrow_\beta C_2$
 C_3, B_3 : $C_1 \Rightarrow_\beta C_3$, $C_2 \Rightarrow_\beta C_3$; $B_1 \Rightarrow_\beta B_3$, $B_2 \Rightarrow_\beta B_3$. $P_3 = C_3[x := B_3]$
- $P = (\lambda x. C) B$, $P_1 = C_1[x := B_1]$
 - (I) $P_2 = A_2 B_2$. (?) $C \Rightarrow_\beta A_2$, $B \Rightarrow_\beta B_2$
 $C \Rightarrow_\beta C_1$, $C \Rightarrow_\beta C_2$; $B \Rightarrow_\beta B_1$, $B \Rightarrow_\beta B_2$
 - (II) $P_2 = C_2[x := B_2]$
 $\exists C_3, B_3$: $C_1 \Rightarrow_\beta C_3$, $C_2 \Rightarrow_\beta C_3$; $B_1 \Rightarrow_\beta B_3$, $B_2 \Rightarrow_\beta B_3$. $P_3 = C_3[x := B_3]$

$P \Rightarrow_\beta \dots \Rightarrow_\beta P_1 \Rightarrow_\beta \dots \Rightarrow_\beta P_3$, $P \Rightarrow_\beta \dots \Rightarrow_\beta P_2 \Rightarrow_\beta \dots \Rightarrow_\beta P_3$

Двойной параллельный β — редекс \Rightarrow_β

2.5 Просто — типизированное λ — исчисление.

Опр. $\alpha \rightarrow \beta$ — тип функции, которая принимает объект типа α и возвращает объект типа β .

Правила вывода:

1. $\overline{\Gamma, x : \alpha \vdash x : \alpha, x \notin \Gamma}$
2. $\frac{\Gamma \vdash P : \alpha \rightarrow \beta \quad \Gamma \vdash Q : \alpha}{\Gamma \vdash PQ : \beta}$
3. $\frac{\Gamma, x : \alpha \vdash P : \beta}{\Gamma \vdash \lambda x. P : \alpha \rightarrow \beta, x \notin \Gamma}$ — по Карри.
 $\frac{\Gamma, x : \alpha \vdash P : \beta}{\Gamma \vdash \lambda x^\alpha. P : \alpha \rightarrow \beta}$ — по Черчу.

Теорема о редукции. Если $A \rightarrow_\beta B$ и $\vdash A : \sigma$, то $\vdash B : \sigma$.

Теорема об ограниченном свойстве распространения типизации. Если $A \rightarrow_\beta B$, $\vdash A : \sigma$ и $\vdash B : \tau$, то $\tau = \sigma$.
Верно только в Черче.

Утв. Полное свойство распространения типизации. $A \rightarrow_\beta B$ и $\vdash B : \sigma$, то $A : \sigma$. Неверно нигде.

Теорема о равносильности исчисления по Карри и по Черчу.

- $\Gamma \vdash P : \alpha$ — Черч, стираем аннотацию и получаем доказуемое в Карри.
- $\Gamma \vdash P : \alpha$ — Карри, то есть способ приписать типовые аннотации и получить доказуемое в Черче.

Теорема. Изоморфизм Карри — Ховард.

2.6 Нормализуемость λ_{\rightarrow} . Система F.

Опр. Выражение называется сильно нормализуемым, если нет способа редуцировать его бесконечно.

Опр. SN — множество всех сильно нормализуемых выражений. $X \subset SN$ насыщенно, если

- Если $m_1, \dots, m_n \in SN$, то $xm_1m_2\dots m_n \in X$
- Если $m_1, \dots, m_n \in SN$, $M \in SN$, N — любое и $N[x := M]m_1, \dots, m_n \in X$, то $(\lambda x. N)mm_1, \dots, m_n \in X$

Лемма. SN — насыщенно.

A, B — множество выражений. $A \rightarrow B = \{X | \forall Y \in A. XY \in B\}$. Если A, B — насыщенные, то $A \rightarrow B$ — насыщенное.

$$\sigma \text{ — тип. } [\sigma] = \begin{cases} SN & \sigma \text{ — переменная} \\ [\tau_1] \rightarrow [\tau_2] & \sigma = \tau_1 \rightarrow \tau_2 \end{cases}$$

$$[\alpha \rightarrow \alpha \rightarrow \alpha] = SN \rightarrow SN \rightarrow SN.$$

Лемма. $[\sigma]$ — насыщенно из предыдущего.

Опр. ρ из переменных в λ -выражениях — оценка.

Опр. $M[x := \rho(x), y := \rho(xy), \dots] = \llbracket M \rrbracket^\rho$.

Утв. Для любой ρ такой что для всех $x : \tau \in \Gamma$ верно $\rho(x) \in [\tau]$.

Утв. $\Gamma \models M : \sigma$, если выполнено $\llbracket M \rrbracket^\rho \in [\sigma]$

Теорема. Если $\Gamma \vdash M : \sigma$, то $\Gamma \models M : \sigma$.

Доказательство:

Индукция по размеру дерева вывода $\Gamma \vdash M : \sigma$

Опр. Λ — принимает типовую переменную.

Новые правила вывода:

- $\frac{\Gamma \vdash P : \alpha}{\Gamma \vdash \Lambda x. P : \forall x. \alpha, x \notin FV(\Gamma)}$
- $\frac{\Gamma \vdash P : \forall x. \alpha}{\Gamma \vdash P\beta : \alpha[x := \beta]}$ — есть свобода.

2.7 Экзистенциальные типы. Система НМ.

Опр. $\exists p. p \wedge (\nu \wedge p \rightarrow p) \wedge (p \rightarrow \nu \wedge p)$, ν — тип натурального числа. Это стек из программирования (обозначим σ).
После квантора существования — набор методов стека.

$$\frac{\Gamma \vdash \sigma[p := \alpha]}{\Gamma \vdash ??N?? : \exists p. \sigma}$$

$$\frac{\Gamma \vdash N : \exists p. \sigma \quad \Gamma, x : \sigma \vdash M : \tau}{\Gamma \vdash ??N, M?? : \tau}$$

$$rank \sigma = \begin{cases} 1 & \sigma \text{ без кванторов} \\ \max(rank \tau, 1) & \sigma = \forall x. \tau \\ \max((rank \tau_1) + 1, rank \tau_2) & \sigma = \tau_1 \rightarrow \tau_2 \end{cases}$$

Опр. Тип в НМ — тип в просто-типизированном λ -исчислении. Типовая схема в НМ — тип с поверхностными кванторами в просто-типизированном λ -исчислении. Далее в этой теме: σ — схемы, τ — типы.

Правила вывода в системе НМ:

- $\overline{\Gamma, x : \sigma \vdash x : \sigma}$
- $\frac{\Gamma, x : \tau_1 \vdash P : \tau_2}{\Gamma \vdash \lambda x. P : \tau_1 \rightarrow \tau_2, x \notin \Gamma}$
- $\frac{\Gamma \vdash P : \tau_1 \quad \Gamma \vdash Q : \tau_1 \rightarrow \tau_2}{\Gamma \vdash PQ : \tau_2}$
- $\frac{\Gamma \vdash P : \sigma \quad \Gamma, x : \sigma \vdash Q : \tau}{\Gamma \vdash \text{let } x := P \text{ in } Q : \tau}, x \notin \Gamma$
- $\frac{\Gamma \vdash P : \sigma_1}{\Gamma \vdash P : \sigma_2, \sigma_1 \sqsubseteq \sigma_2}$
- $\frac{\Gamma \vdash P : \sigma}{\Gamma \vdash P : \forall \alpha. \sigma, \alpha \notin FV(\Gamma)}$