Содержание

1 Последовательности.

Определение 1.1. *Последовательность — объекты (элементы), пронумерованные последовательными натуральными числами. Последовательности бывают как конечными, так и бесконечными.*

Определение 1.2. *Стационарная последовательность — последовательность, у которой равны все элементы.*

Заметка 1.1. *Способы задания (правило, которое позволяет найти каждый элемент последовательности) последовательностей:*

- *Словесно/описательно.*
- *Таблица.*
- *Рекуррентно.*
- *Формульно.*

1.1 Арифметическая прогрессия.

Пример: ряд натуральных чисел $1, 2, 3, \ldots, n$.

Определение 1.3. *Арифметическая прогрессия — последовательность, где каждый следующий элемент увеличивается на фиксированную величину.* $a_{n+1} = a_n + d$, d *— разность арифметической прогрессии.*

Утверждение 1.1. *Формулы.*

$a_n = a_1 + (n-1) \cdot d.$
$a_n = \frac{a_{n+1}+a_{n-1}}{2} \to a_n = \frac{a_{n+k}+a_{n-k}}{2}.$
$S_n = \frac{a_1+a_n}{2} \cdot n = (a_1 + \frac{(n-1)\cdot d}{2}) \cdot n = a_1 \cdot n + \frac{(n-1)\cdot n}{2} \cdot d.$

1.2 Геометрическая прогрессия.

Определение 1.4. *Геометрической прогрессией называется такая последовательность, где первый член не нулевой, а каждый следующий в фиксированное число (не ноль) раз больше.*

Определение 1.5. $b_n = b_{n-1} \cdot q$, q *— знаменатель ГП.*

Определение 1.6. *Если* $|q| < 1$*, тогда бесконечно убывающая ГП.*

Утверждение 1.2. *Формулы.*

$S_n = \frac{b_{n+1}-b_1}{q-1} = \frac{b_1 \cdot (q^n - 1)}{q-1}.$
Для бесконечно убывающей ГП верно: $\frac{b_1}{b_2} = \frac{S}{S-b_1}.$

2 Производная и интеграл.

Определение 2.1. *Непрерывная функция —*

1. *Можно нарисовать не отрывая руки.*
2. $\forall \varepsilon \exists \delta.$

3. *Совпадают левый и правый предел. (Если пойти слева и справа, то придем в одну точку.)*

Утверждение 2.1. *Производная точки касания — наклон касательной* ($k = f'(x_0)$, $b = f(x_0) - f'(x_0) \cdot x_0$).

Утверждение 2.2. *Полное уравнение касательной* — $y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$.

Определение 2.2. *Уравнение нормали (перпендикуляра)* — $y = -\frac{1}{f'(x_0)}(x - x_0) + f(x_0)$.

Свойство 2.1.

1. $f'(x) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$.
2. $f'(x) = 0$; x_i *- корни = подозрительный экстремум.*
3. $f''(x) > 0 \Leftrightarrow$ *выпукла вниз.* $f''(x) < 0 \Leftrightarrow$ *выпукла вверх.*
4. $(f^n(x))' = n \cdot f^{n-1}(x) \cdot f'(x)$.
5. $(f(x) + g(x))' = f'(x) + g'(x)$.
6. $(f(x) \cdot g(x))' = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$.
7. $(\frac{f(x)}{g(x)})' = \frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{g^2(x)}$; $\Leftrightarrow f(x) \cdot g^{-1}(x)$.
8. $(f(g(x)))' = f'(g(x)) \cdot g'(x)$.

Свойство 2.2.

1. $(const)' = 0$.
2. $(k \cdot x^n)' = kn \cdot x^{n-1}$.
3. $(k_1(k_2x + k_3)^n)' = nk_1(k_2x + k_3)^{n-1} \cdot k_2$.
4. $(\sin x)' = \cos x$.
5. $(\cos x)' = -\sin x$.
6. $tg'(x) = \frac{1}{cos^2(x)}$.
7. $ctg'(x) = -\frac{1}{sin^2(x)}$.
8. $(e^{f(x)})' = e^{f(x)} \cdot f'(x)$.
9. $(a^x)' = a^x \cdot \ln a$.
10. $(e^x)' = e^x$
11. $(\ln x)' = \frac{1}{x}$
12. $(\log_a x)' = \frac{1}{x \cdot \ln a}$

3 Предел.

Определение 3.1 (По Коши)**.** $\lim\limits_{x \to x0} f(x) = A \Leftrightarrow \varepsilon > 0\ \exists \delta : |x - x_0| < \delta$, *то* $|f(x) - A| < \varepsilon$ *(*$f(x_0) = A$*).*

Свойство 3.1.

1. $\lim\limits_{x \to x0}(f(x) \pm g(x)) = \lim\limits_{x \to x0} f(x) \pm \lim\limits_{x \to x0} g(x)$.
2. $\lim\limits_{x \to x0}(f(x) \cdot g(x)) = \lim\limits_{x \to x0} f(x) \cdot \lim\limits_{x \to x0} g(x)$.
3. $\lim\limits_{x \to a} f(x) = A$, $\lim\limits_{y \to A} = B \Rightarrow \lim\limits_{x \to a} g(f(x)) = B$.
4. *Правило Лапиталя.*
   $\lim\limits_{x \to x0} f(x) = 0$, $\lim\limits_{x \to x0} g(x) = 0 \Rightarrow \lim\limits_{x \to x0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x \to x0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$.

Утверждение 3.1. $\lim\limits_{x \to 0} \frac{sin(x)}{x} = 1$.

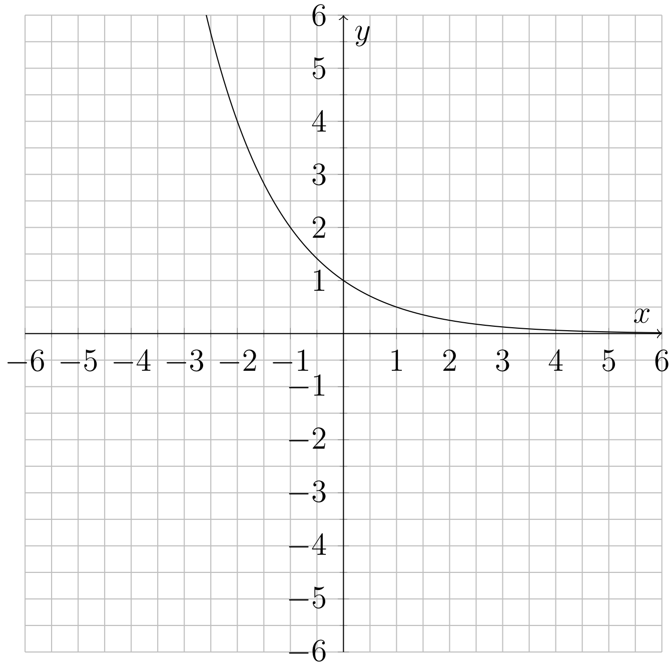
4 Показательная функция.

Определение 4.1. $f(x) = a^x$, *где* x *— независимая переменная,* $a > 0$, $a \neq 1$.

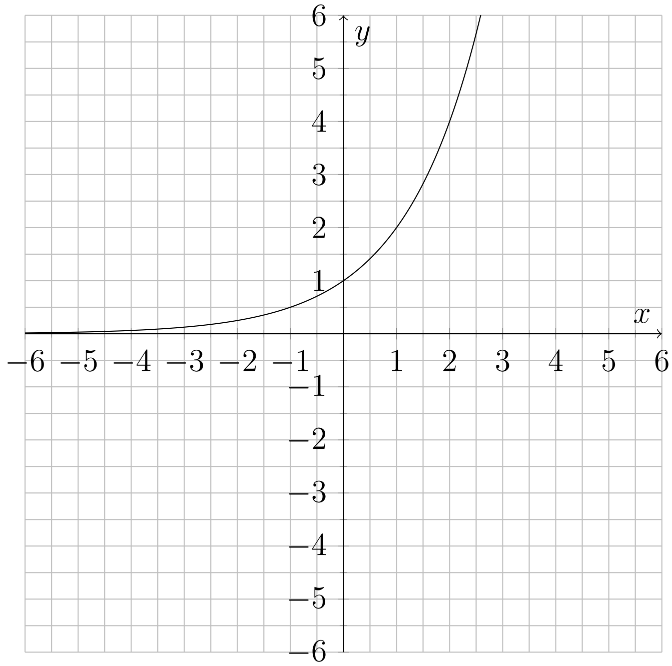
Определение 4.2. *Возведение в вещественную степень:* $a^x = \lim\limits_{n \to \infty} a^{x_n}$, x_n *— число* x *с* n *знаками после запятой* $\Leftrightarrow x_n = \frac{\lfloor x \cdot 10^n \rfloor}{10^n}$.

Свойство 4.1.

1. $D(x) = \mathbb{R}$.
2. $E(y) = (0; +\infty)$.
3. $\uparrow\downarrow$
   - $a \in (0; 1)$*:* $\downarrow$
   - $a \in (1; \infty)$*:* $\uparrow$
4. *Ограниченность. Снизу* 0.
5. $\max / \min$. *Нет.*
6. *Асимптоты.* $y = 0$.
7. *Монотонность.* $\mathbb{R}$.
8. *Выпуклость. Выпукла вниз.*
9. *График*
   - $a \in (0; 1)$



- $a \in (1; \infty)$



10. *Четность. Общего вида.*

5 Логарифм.

Определение 5.1. $\log_a b$ *— логарифм числа* b *по основанию* a. $\log_a b$ *— такое число,что если возведем* a *в эту степень, то получим* b *(*$a^{\log_a b} = b$*);* $a > 0, a \neq 1, b > 0$.

Свойство 5.1. *1.* $a^{\log_a b} = b$

2. $\log_a(bc) = \log_a |b| + \log_a |c|$

3. $\log_a(\frac{b}{c}) = \log_a |b| - \log_a |c|$

4. $\log_a b^r = r \log_a |b|$

5. $\log_{a^r} b = \frac{\log_{|a|} b}{r}$

6. $\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}$

7. $\log_a b = \frac{1}{\log_b a}$

8. $\log_a b \cdot \log_c a = \log_c b$

9. $a^{\log_b c} = c^{\log_b a}$

Заметка 5.1. $\lg b = \log_{10} b$, $\ln b = \log_e b$.

6 Показательные уравнения.

Определение 6.1 (Показательное уравнение.)**.** $a^x = b$.

6.1 Методы решения.

1. Смотрим.

2. Вынос общего множителя за скобки.

3. Замена.

4. Однородные уравнения.

7 Неравенства.

Заметка 7.1. *Думать об основании* > 1 *и* < 1.

8 Метод рационализации.

1. $\log_{f(x)} g(x) > 0 = \log_{f(x)} 1$
   $f(x) > 0,\ g(x) > 0,\ f(x) \neq 1$
   $$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} f(x) > 1 \\ g(x) > 1 \end{cases} \\ \begin{cases} f(x) < 1 \\ g(x) < 1 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow (f(x)-1)(g(x)-1) > 0$$
   $\log_{f(x)} g(x) > 0 \Rightarrow (f(x)-1)(g(x)-1) > 0$

2. $\log_{f(x)} g(x) - \log_{f(x)} h(x) > 0 \Rightarrow (f(x)-1)(g(x)-h(x)) > 0$

3. (a) $\log_{f(x)} g(x) > 1 \Rightarrow (f(x)-1)(g(x)-f(x)) > 0$

   (b) $\log_{f(x)} g(x) > k \Rightarrow (f(x)-1)(g(x)-f^k(x)) > 0$

4. $\log_{f(x)} g(x) - \log_{h(x)} g(x) > 0 \Rightarrow (g(x)-1)(f(x)-1)(h(x)-1)(h(x)-f(x)) > 0$

5. (a) $f(x)^{g(x)} - 1 > 0 \Rightarrow g(x)(f(x)-1) > 0$
   (b) $f(x)^{g(x)} - k > 0 \Rightarrow (g(x) - \log_{f(x)} k)(f(x)-1) > 0$

6. $f(x)^{g(x)} - f(x)^{h(x)} > 0 \Rightarrow (f(x)-1)(g(x)-h(x)) > 0$

7. $f(x)^{g(x)} - h(x)^{g(x)} > 0 \Rightarrow g(x)(f(x)-h(x)) > 0$

8. $|a| - |b| > 0 \Rightarrow (a-b)(a+b) > 0$

9 Квадратные трехчлены с параметром.

$f(x) = ax^2 + bx + c$; $x_1 < x_2$; $a \neq 0$

Два корня разных знаков	$ca < 0$
Два корня одинаковых знаков	$\begin{cases} D > 0 \\ ca > 0 \end{cases}$
Два положительных корня	$\begin{cases} D > 0 \\ ca > 0 \\ ba < 0 \end{cases}$
Два отрицательных корня	$\begin{cases} D > 0 \\ ca > 0 \\ ba > 0 \end{cases}$

9.1 Сравнение корней с границами (l, r).

$m < x_1 < x_2$	$\begin{cases} D > 0 \\ x_0 > r \\ af(r) > 0 \end{cases}$
$x_1 < x_2 < l$	$\begin{cases} D > 0 \\ x_0 < l \\ af(l) > 0 \end{cases}$
$l < x_1 < x_2 < r$	$\begin{cases} D > 0 \\ l < x_0 < r \\ af(l) > 0 \\ af(r) > 0 \end{cases}$
$x_1 < l < r < x_2$	$\begin{cases} af(l) < 0 \\ af(r) < 0 \end{cases}$
$l < x_1 < r < x_2$	$\begin{cases} af(l) > 0 \\ af(r) < 0 \end{cases}$
$x_1 < l < x_2 < r$	$\begin{cases} af(r) > 0 \\ af(l) < 0 \end{cases}$