

# 1 Последовательность.

$$f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$f(n) =: f_n$$

**Опр.** Последовательность называется ограниченной сверху, если  $\exists M : |f_n| \leq M$ . Снизу, если  $\exists m : f_n \geq m$ .  $f_n$  — ограниченная, если ограничена сверху и снизу.

**Опр.**  $M_0 = \sup f_n$ , если  $M_0$  — верхняя грань и  $\forall \varepsilon > 0 \exists n_0 : f_{n_0} > M_0 - \varepsilon$ .  $m_0 = \inf f_n$ , если  $m_0$  — нижняя грань и  $\forall \varepsilon > 0 \exists n_0 : f_{n_0} < m_0 + \varepsilon$ .

**Аксиома вещественных чисел.** Если множество  $X$  ограничено сверху, то  $\exists \sup X$ . Если  $f_n$  неограничено сверху, то  $\sup f_n =: +\infty$ . Если снизу, то  $\inf f_n =: -\infty$ .

**Опр.**  $f_n$  — бесконечно большая (бб), если  $\forall \varepsilon > 0 \exists N = N(\varepsilon) : |f_n| > \frac{1}{\varepsilon} \forall n \geq N$ .  $f_n$  — не бб,  $\exists \varepsilon > 0 : \forall N \exists n > N : |f_n| \leq \frac{1}{\varepsilon}$ .

**Опр.**  $f_n$  — бесконечно малая (бм), если  $\forall \varepsilon > 0 \exists N = N(\varepsilon) : |f_n| < \varepsilon \forall n \geq N$ .

**Лемма.**  $f_n$  — бм  $\Rightarrow f_n$  — ограничена.

Доказательство:

Пусть  $\varepsilon = 1$ , тогда  $\exists N : |f_n| \leq 1 \forall n \geq N$

$M := \max\{|f_1|, \dots, |f_{N-1}|, 1\}$ , тогда  $|f_n| \leq M \forall n \in \mathbb{N}$ .

**Лемма.**

a)  $f_n$  — бб  $\Rightarrow \frac{1}{f_n}$  — бм

b)  $f_n$  — бм ( $f_n \neq 0$ )  $\Rightarrow \frac{1}{f_n}$  — бб

**Лемма.**  $f_n$  — неограниченная последовательность, тогда существует бб подпоследовательность  $f_{n_k}$ .

Доказательство:

$$\exists n_1 : |f_{n_1}| > 1,$$

$$\exists n_2 > n_1 : |f_{n_2}| > 2,$$

$$\exists n_3 > n_2 : |f_{n_3}| > 3,$$

$\vdots$ ,

$$\exists n_1 < n_2 < \dots < n_k < \dots$$

$$|f_{n_k}| > k \Rightarrow f_{n_k} \text{ — бб.}$$

**Лемма.**

a) бм + бм = бм

b) бм · C = бм

c) бм · бм = бм

d) бб · C = бб,  $C \neq 0$

e) бб · бб = бб

## 1.1 Предел последовательности.

$a_n$  — последовательность.

**Опр.**  $a = \lim a_n$ , если  $\forall \varepsilon > 0 \exists N : |a_n - a| < \varepsilon \forall n \geq N$ .

**Опр.** Эпсилон окрестность:  $U_\varepsilon(a) := (a - \varepsilon; a + \varepsilon)$ . Выколота эпсилон окрестность:  $U_\varepsilon^\circ(a) := U_\varepsilon(a) \setminus \{a\}$ .

$$\varepsilon_1 < \varepsilon_2 \Rightarrow U_{\varepsilon_1}(a) \subset U_{\varepsilon_2}(a), a \in \mathbb{R}.$$

**Опр.**  $\mathbb{R} \cup \{\pm\infty\} = \overline{\mathbb{R}}$  — расширенная числовая прямая.

**Опр.**  $\varepsilon > 0$   $U_\varepsilon(+\infty) = (\frac{1}{\varepsilon}; +\infty)$ ;  $U_\varepsilon(-\infty) = (-\infty; -\frac{1}{\varepsilon})$ .

$$\lim |a_n| = +\infty \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists N(\varepsilon) : |a_n| > \frac{1}{\varepsilon}.$$

$$\text{Если } a_n \text{ — бб} \Leftrightarrow \lim |a_n| = +\infty.$$

$$\text{Если } a_n \text{ — бм} \Leftrightarrow \lim |a_n| = 0.$$

**Утв.**  $\lim a_n = a \Leftrightarrow \exists$  бм последовательность  $d_n$ , такая что  $a_n = a + d_n$ .

**Утв.** Если предел последовательности существует, то он единственный.

Доказательство:

$$\exists a < b \text{ и } a = \lim a_n, b = \lim a_n.$$

Тогда  $\varepsilon := \frac{b-a}{42}$  :

$$\exists N_1 : a_n \in U_\varepsilon(a) \forall n \geq N_1$$

$$\exists N_2 : a_n \in U_\varepsilon(b) \forall n \geq N_2$$

$$\Rightarrow a_n \in (U_\varepsilon(a) \cap U_\varepsilon(b)) = \emptyset \forall n \geq \max\{N_1, N_2\}!?!.$$

**Предельный переход в неравенства.**  $a_n \leq b_n \quad \forall n \geq N_0$ .

Пусть  $\exists \lim a_n = a; \lim b_n = b, a, b \in \overline{\mathbb{R}}$

Тогда  $a \leq b$ .

Доказательство:

Пусть  $a > b$ . Тогда  $\varepsilon := \frac{a-b}{42}$  :

$\exists N_1 : a_n \in U_\varepsilon(a) \forall n \geq N_1$

$\exists N_2 : a_n \in U_\varepsilon(b) \forall n \geq N_2$

$\Rightarrow a_n > b_n \quad \forall n \geq \max\{N_1, N_2\}!$

**Лемма о сжатых последовательностях.** Пусть  $a_n \leq b_n \leq c_n \quad \forall n \geq N_0$  и  $\exists \lim a_n = \lim c_n = a \in \overline{\mathbb{R}}$ , тогда  $\exists \lim b_n = a$ .

Доказательство:

$\varepsilon > 0$  :

$\exists a_n \in U_\varepsilon, n \geq N_1$

$\exists c_n \in U_\varepsilon, n \geq N_2$

$\Rightarrow b_n \in U_\varepsilon : \forall n \geq \{N_1, N_2, N_0\} =: N \Rightarrow a = \lim b_n$  по определению.

**Лемма об отделимости от нуля.** Пусть  $\exists \lim a_n = a > 0$ . Тогда  $\exists N : a_n > \frac{a}{2} > 0, \forall n \geq N$ .

Следствие. Если  $\lim a_n \neq 0 \Rightarrow \frac{1}{a_n}$  ограничена ( $a_n \neq 0$ ).

Доказательство:

$\lim a_n = a > 0$

$\exists N_1 : a_n > \frac{a}{2} \Rightarrow 0 < \frac{1}{a_n} < \frac{2}{a} \quad \forall n \geq N_1$

$\min\{a_1, \dots, a_{N-1}, \frac{a}{2}\} \leq \frac{1}{a_n} \leq \max\{a_1, \dots, a_{N-1}, \frac{2}{a}\}$

**Теорема. Арифметические свойства предела.** Пусть  $\lim a_n = a, \lim b_n = b; a, b \in \overline{\mathbb{R}}$ . Тогда:

1.  $\lim(a_n + b_n) = a + b$ , кроме случаев  $+\infty + (-\infty), -\infty + (+\infty)$
2.  $\lim(ka_n) = ka$ , кроме случая  $0 \cdot (\pm\infty)$
3.  $\lim(a_n \cdot b_n) = ab$ , кроме случая  $0(\pm\infty)$
4.  $\lim \frac{a_n}{b_n} = \frac{a}{b}$ , кроме случаев  $\frac{0}{0}, \frac{\infty}{\infty}$

Доказательство:

$a, b \in \mathbb{R}$

$a_n = a + \alpha_n, b_n = b + \beta_n; \alpha_n, \beta_n \rightarrow 0$ .

1.  $a_n + b_n = (a + b) + (\alpha_n + \beta_n) \Leftrightarrow \lim(a_n + b_n) = a + b$ .
2. Аналогично.
3.  $a_n b_n = (a + \alpha_n)(b + \beta_n) = ab + \alpha_n b + \beta_n a + \alpha_n \beta_n$
4. Если  $b \neq 0 \quad \frac{1}{b_n} \rightarrow \frac{1}{b}$  — ограничена  
 $\frac{a_n}{b_n} - \frac{a}{b} = \frac{a + \alpha_n}{b + \beta_n} - \frac{a}{b} = \frac{\alpha_n b - \beta_n a}{b_n b} = \frac{1}{b} \cdot \frac{1}{b_n} \cdot (\alpha_n b - \beta_n a)$   
Если  $b = 0 \Rightarrow b_n \rightarrow 0 \Rightarrow \frac{1}{b_n} \rightarrow \infty \Rightarrow a_n \cdot \frac{1}{b_n} =$  ограниченная  $\cdot \infty$