

# Содержание

<b>1 Теория групп.</b>	<b>2</b>
1.1 Таблица Кэли.	3
1.2 Группы.	3
1.3 Перестановки.	4
1.4 Центр группы.	4
1.5 Гомоморфизм группы.	5
1.6 Кватернионы.	5
1.6.1 Группа Кватернионов.	5
1.7 Теоремы об изоморфизме.	5
1.7.1 Первая теорема об изоморфизме.	5
1.7.2 Вторая теорема об изоморфизме.	6
1.7.3 Третья теорема об изоморфизме.	6
1.8 Группы автоморфизмов графа.	6
1.9 Действие группы на множестве.	6
<b>2 Метрические пространства.</b>	<b>7</b>

# 1 Теория групп.

**Определение 1.1.** Группа — множество с одной операцией  $*: G \times G \rightarrow G$  со следующими свойствами:

1.  $a * (b * c) = (a * b) * c$
2.  $\exists e: a * e = e * a = a$
3.  $\forall a \exists a^{-1}: a * a^{-1} = a^{-1} * a = e$

**Пример 1.1.** •  $(\mathbb{Z}; +)$

- $(\mathbb{Q}; +)$
- $(\mathbb{R}; +)$
- $(\mathbb{C}; +)$
- $(V; +)$
- $(\mathbb{R}_+; \cdot)$
- $(\mathbb{R} \setminus \{0\}; \cdot)$
- $(\mathbb{Z}_n; +)$

**Определение 1.2.** Пусть  $G$  — группа,  $H \subset G$ . Говорим, что  $H$  является подгруппой (пишем  $H < G$ ), если  $H$  является группой относительно операции в  $G$ . Чтобы проверить, что  $H$  является подгруппой, необходимо убедиться, что произведение двух элементов из  $H$  принадлежит  $H$ , и элементы, обратные к  $H$ , тоже лежат в  $H$ .

**Теорема 1.1** (Кэли). Любая группа  $G$  является подгруппой в группе подстановок, а именно  $S_G$ .

**Определение 1.3.** Абелева группа — группа с коммутативностью.

**Определение 1.4.** Говорят, что группа  $G$  порождается элементами  $\{x_i\}$ , если любой элемент из  $G$  можно представить как произведение нескольких  $x_i$  и обратных к ним. Группа называется циклической, если она порождена одним элементом.

**Теорема 1.2.** Конечная циклическая группа изоморфна  $(\mathbb{Z}_n, +)$ .

**Определение 1.5.** Пусть  $G$  — группа,  $H < G$ . Введем два отношения эквивалентности на  $G$ :  $x \sim_1 y$  если  $xy^{-1} \in H$ ,  $x \sim_2 y$  если  $x^{-1}y \in H$ .

**Утверждение 1.1.**  $\sim_1$  и  $\sim_2$  совпадают в абелевой группе.

**Заметка 1.1.** Классы эквивалентности по отношению  $\sim_1$  называются левыми смежными классами; класс элемента  $x$  обозначается  $xH$ . Классы эквивалентности по  $\sim_2$  — правые смежные классы, обозначаются  $Hx$ .

**Определение 1.6.** Пусть теперь группа  $G$  конечна,  $H < G$ . Количество классов эквивалентности  $\sim_1$  называется индексом  $G$  по  $H$  и обозначается  $[G : H]$ .

**Теорема 1.3** (Лагранжа).  $|G| = |H| \cdot [G : H]$ .

**Определение 1.7.** Пусть  $x \in G$ . Порядком элемента  $x$  называется наименьшее натуральное число  $n$ , такое что  $x^n = e$ , где  $e$  — нейтральный элемент. Обозначение:  $\text{ord}(x)$ . Если такого  $n$  не существует, то пишем  $\text{ord}(x) = +\infty$ .

**Определение 1.8.** Пусть  $X, Y \subset G$  — подмножества группы. Их произведением будем называть множество  $\{xy \mid x \in X, y \in Y\}$ .

**Определение 1.9.** Полная линейна группа  $GL(n, F)$  — это множество всех квадратных матриц размера  $n \times n$  с элементами из поля  $F$ , которые являются обратимыми ( $\det \neq 0$ ), вместе с операцией матричного умножения.

**Определение 1.10.** Специальная линейная группа  $SL(n, F)$  — это подгруппа полной линейной группы, состоящая из всех матриц с определителем, равным 1. То есть это множество всех матриц  $A$  размера  $n \times n$  над полем  $F$ , таких что  $\det(A) = 1$ .

**Определение 1.11.** Специальная ортогональная группа  $SO(n, F)$  — группа из ортогональных матриц. Матрица  $A$  называется ортогональной, если  $A^T \times A = A \times A^T = E$ .

**Утверждение 1.2.** Пусть  $X$  — произвольное множество. Тогда множество всех биекций  $f : X \rightarrow X$  образуют группу относительно композиции. Эту группу обозначают  $S_X$ . Если  $X = \{1, 2, \dots, n\}$ , то  $S_X$  обозначают  $S_n$  — группа перестановок.

## 1.1 Таблица Кэли.

**Определение 1.12.** Пусть  $G$  — конечная группа порядка  $n$ . Её таблицей Кэли (таблицей умножения) будем называть таблицу  $(n+1) \times (n+1)$  (левый столбец и левая строка считаются нулевыми и служат лишь для нумерации). В нулевом столбце и в нулевой строке стоят все элементы группы в одном и том же порядке. На пересечении строки и столбца этой таблицы будем ставить произведение соответствующих элементов в нулевом столбце и в нулевой строке (слева пишется элемент, задающий строку, справа — столбец).

**Определение 1.13.** Напомним, что перестановкой мы будем называть биекцию  $f : \{1, 2, \dots, n\} \rightarrow \{1, 2, \dots, n\}$ . Умножение перестановок — композиция биекций. Перестановки записываются в две строчки: в первой — числа от 1 до  $n$  (как правило, в порядке возрастания, но не обязательно), а во второй строчке под числом  $k$  стоит число  $f(k)$ .

## 1.2 Группы.

**Теорема 1.4.**  $G$  — группа;  $H < G$ . Равносильно:

1.  $\forall x \ xH = Hx$
2.  $\forall x \ xH \subset Hx$
3.  $\forall x \ xH \supset Hx$
4.  $\forall x \ xHx^{-1} = H$
5.  $\forall x \ xHx^{-1} \subset H$
6.  $\forall x \ xHx^{-1} \supset H$
7.  $\forall x \in G \ \forall h \in H \ x^{-1}hx \in H$

**Определение 1.14.** Такая  $H$  называется нормальной подгруппой. Обозначается  $H \triangleleft G$ .

**Определение 1.15.**  $xhx^{-1}$  называется сопряженным элементом  $h$ .

**Утверждение 1.3.**  $h \sim x^{-1}hx$  — отношение эквивалентности.

**Определение 1.16.**  $H \triangleleft G$ . Класс смежности по  $H$  можно перемножать.

**Определение 1.17.** Множество классов смежности образуют группу. Это называется факторгруппой  $G$  по  $H$ .  $G/H$ .

**Определение 1.18.** Простая группа — группа без нетривиальных нормальных подгрупп.

### 1.3 Перестановки.

**Определение 1.19.** Перестановкой конечного множества  $M$  называется биекция  $\pi : M \rightarrow M$ . Множество всех перестановок множества  $M$  обозначается символом  $S(M)$ . Произведением перестановок  $\pi$  и  $\sigma$  называется перестановка  $\sigma \cdot \pi$ , соответствующая биекции  $x \mapsto \sigma(\pi(x))$ .

**Определение 1.20.** Пусть  $\pi \in S(M)$ . Орбитой элемента  $a \in M$  называется множество  $orb_\pi(a) = \{a, \pi(a), \pi^2(a), \dots\}$ . Порядком элемента  $a$  называется мощность его орбиты:  $ord(a) = |orb(a)|$ .

**Определение 1.21.** В предыдущей серии показано, что любая перестановка является произведением циклов. Количество циклов в перестановке обозначается  $cycl(\pi)$ . Если перестановка разбивается на циклы, длины которых  $-l_1, \dots, l_m$ , то  $(l_1, \dots, l_m)$  называется циклическим типом перестановки  $\pi$ . Перестановка, у которой циклический тип  $(2, 1, 1, \dots, 1)$ , называется транспозицией.

**Определение 1.22.** Перестановка  $\pi$  называется четной или нечетной в зависимости от четности числа  $n + cycl(\pi)$ . Знаком перестановки называется число  $sign(\pi) = (-1)^{n+cycl(\pi)}$ .

**Определение 1.23.** Хотим  $\forall$  перестановки называть ее четной или нечетной:  $\mathcal{C}\mathcal{C} = \mathcal{C}$ ,  $\mathcal{H}\mathcal{H} = \mathcal{C}$ ,  $\mathcal{CH} = \mathcal{H}$ ,  $\mathcal{HC} = \mathcal{H}$  и  $\exists$   $\mathcal{C}$  и  $\mathcal{H}\mathcal{C}$  перестановки.

**Определение 1.24.** Инверсия:  $\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & i & \dots & j & \dots & n \\ a_1 & a_2 & \dots & a_i & \dots & a_j & \dots & n \end{pmatrix}$ . Пара  $(i, j)$  называется инверсией, если  $i < j$  и  $a_i > a_j$ .

**Определение 1.25.** Перестановка с четным количеством инверсий — четная, с нечетным — нечетная.

**Заметка 1.2.**  $\forall$  перестановка — произведение транспозиций. Четное количество транспозиций  $\Leftrightarrow$  четная перестановка.

**Определение 1.26.** Четная перестановка  $= (n + \text{количество циклов}) \pmod{2}$ .

**Теорема 1.5.** Перестановки сопряжены  $\Leftrightarrow$  совпадает их циклический тип.

### 1.4 Центр группы.

**Определение 1.27.**  $G$  — группа. Центр  $G$ :  $Z(G) := \{g \in G | gh = hg, \forall g \in G\}$ .

**Утверждение 1.4.**  $Z(S_n) = \{e\}$ .

**Теорема 1.6.**  $Z(G) \triangleleft G$ .

**Утверждение 1.5.**  $Z(GL(\mathbb{R})) = \begin{pmatrix} \alpha & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \alpha & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \alpha \end{pmatrix}$

**Определение 1.28** (Коммутатор).  $x, y \in G$ .  $[x, y] := xyx^{-1}y^{-1}$ .

**Утверждение 1.6.**  $[x, y]^{-1} = [y, x]$ .

**Заметка 1.3.** Произведение коммутаторов не обязательно является коммутатором.

**Определение 1.29** (Коммутант).  $[G, G] := \langle [x, y] \rangle$ .

**Теорема 1.7.** 1.  $[G, G] \triangleleft G$ .

2.  $G/[G; G]$  — абелева.

3.  $G/H$  — абелева  $\Rightarrow H \supset [G, G]$ .

**Утверждение 1.7.**  $\alpha^{-1}[x, y]\alpha = [\alpha^{-1}x\alpha, \alpha^{-1}y\alpha]$ .

**Утверждение 1.8.**  $\alpha^{-1}[x_1, y_1][x_2, y_2] \dots [x_k, y_k]\alpha \in [G, G]$ .

**Теорема 1.8** (Галуа.).  $A_n$  простая, если  $n \geq 5$ .

## 1.5 Гомоморфизм группы.

**Определение 1.30.**  $(G, \cdot); (H, *)$  — группы.  $f : G \rightarrow H$  — отображение.  $f$  называется гомоморфизмом, если  $\forall a, b \in G$   $f(a \cdot b) = f(a) * f(b)$ .

**Определение 1.31.**  $f : G \rightarrow H$  — гомоморфизм.  $f$  называется:

- Эпиморфизмом, если  $f$  — суръекция.
- Мономорфизмом, если  $f$  — инъекция.
- Изоморфизмом, если  $f$  — биекция.

$G \simeq H$ , если существует изоморфизм  $f : G \rightarrow H$ .

## 1.6 Кватернионы.

$\mathbb{H} := \{a + bi + cj + dk | a, b, c, d \in \mathbb{R}\}$ .

$\times$	$i$	$j$	$k$
$i$	-1	$k = -ji$	$-j = -ki$
$j$	$-k = -ij$	-1	$i = -kj$
$k$	$j = -ik$	$-i = -jk$	-1

### 1.6.1 Группа Кватернионов.

$\mathbb{H} = \{\pm 1, \pm i, \pm j, \pm k\}$ .

**Лемма 1.1.**  $a_1, a_2, \dots, a_{2n}$  — строка из символов  $j$  и  $k$ . Если перевернуть строку и заменить  $j \leftrightarrow k$ , то произведение не изменится.

## 1.7 Теоремы об изоморфизме.

### 1.7.1 Первая теорема об изоморфизме.

**Теорема 1.9.** Пусть  $f : G \rightarrow H$  — гомоморфизм групп. Тогда  $Im(f) \simeq G/Ker(f)$ .

### 1.7.2 Вторая теорема об изоморфизме.

**Теорема 1.10.** Пусть  $G$  — группа,  $H$  и  $K$  — ее подгруппы, причем  $K$  нормальна. Тогда  $HK/K \simeq H/(H \cap K)$ .

### 1.7.3 Третья теорема об изоморфизме.

**Теорема 1.11.** Пусть  $G$  — группа,  $H$  и  $K$  — ее нормальные подгруппы, причем  $K \subset N$ . Тогда  $(G/K)/(N/K) \simeq G/N$ .

## 1.8 Группы автоморфизмов графа.

**Определение 1.32.** Автоморфизмом графа  $\Gamma$  называется биекция множества его вершин на себя, так что пара вершин смежны тогда и только тогда, когда смежны их образы. Автоморфизмы графа образуют группу относительно композиции. Обозначается  $\text{Aut}(\Gamma)$ .

**Теорема 1.12** (Фрухта). Для любой группы  $G$  найдется граф, группа автоморфизмов которого в точности  $G$ .

## 1.9 Действие группы на множестве.

**Определение 1.33.**  $G$  — группа,  $M$  — множество. Действием (левое) называем  $G$  на  $M$  называем  $\cdot : G \times M \rightarrow M : (g; x) \mapsto g \cdot x$  или  $g(x)$ .

**Свойство 1.1.** 1.  $(g \cdot h) \cdot x = g \cdot (h \cdot x)$ .

2.  $e \cdot x = x$ .

**Следствие 1.1.**  $gx = y \Rightarrow g^{-1}y = x$ .

**Определение 1.34** (2). Действие  $G$  на  $M$  — это гомоморфизм  $F : G \rightarrow S_M$  (группа перестановок  $M$ ).  $g \cdot x := F(g)(x)$ . Наоборот: есть  $\cdot : G \times M \rightarrow M : F(g)(x) := g(x)$ .

**Определение 1.35.**  $x$  неподвижен под действием  $g$ , если  $g \cdot x = x$ . Орбита  $x$ :  $\text{orb}(x) := \{g \cdot x \mid g \in G\}$ .

**Утверждение 1.9.** Орбиты либо совпадают, либо не пересекаются.

**Определение 1.36.**  $x \in M$ ; стабилизатор  $x$  — это  $\text{st}(x) := \{g \in G \mid gx = x\}$ .

**Утверждение 1.10.**  $\text{st}(x)$  — подгруппа в  $G$ .

**Определение 1.37.**  $\text{st}(g) := \{x \mid gx = x\}$  — стабилизатор  $g$ .

**Лемма 1.2** (Бермсайда).  $G$  — конечная группа;  $M$  — конечная  $\Rightarrow$  количество орбит  $= \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} |\text{st}(g)| = \frac{1}{|G|} \sum_{x \in M} |\text{st}(x)|$ , тк  $\sum_{g \in G} |\text{st}(g)| = \sum_{x \in M} |\text{st}(x)| = \#\{(g, x) \mid gx = x\}$ .

## 2 Метрические пространства.

**Определение 2.1.**  $M$  — множество;  $\rho: M \times M \rightarrow \mathbb{R}$ .

1.  $\rho(x, y) \geq 0$ ;  $\rho(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$
2.  $\rho(x, y) = \rho(y, x)$
3.  $\rho(x, z) \leq \rho(x, y) + \rho(y, z)$

$(M, \rho)$  — метрическое пространство.

**Определение 2.2.**  $B(x_0, r) := \{x \in M | \rho(x, x_0) < r\}$

**Определение 2.3.**  $A \subset M$ .  $A$  называется открытым, если  $\forall x_0 \in A \exists \varepsilon : B(x_0, \varepsilon) \subset A$ .

**Определение 2.4.**  $f$  называется замкнутым, если  $X \setminus f$  открыто.

**Теорема 2.1.** 1.  $\{U_i\}_{i \in I}$  — открыто  $\Rightarrow \bigcup_{i \in I} U_i$  — открыто.

2.  $\{U_i\}_{i \in I}^n$  — открыто  $\Rightarrow \bigcup_{i \in I}^n U_i$  — открыто.

3.  $\emptyset; M$  — открыты.

**Теорема 2.2.** 1.  $\{F_i\}_{i \in I}$  — замкнуто  $\Rightarrow \bigcap_{i \in I} F_i$  — замкнуто.

2.  $\{F_i\}_{i \in I}^n$  — замкнуто  $\Rightarrow \bigcap_{i \in I}^n F_i$  — замкнуто.

3.  $\emptyset; M$  — замкнуто.

**Определение 2.5** (Топологическое пространство). Множество  $X$  с множеством  $\Omega \subset 2^X$  ( $A \in \Omega$  — открытые подмножества):

1.  $\bigcup_{i \in I} U_i \in \Omega$ , если  $\forall U_i \in \Omega$

2.  $U_1, \dots, U_n \in \Omega \Rightarrow \bigcap_{i=1}^n U_i \in \Omega$

3.  $\emptyset, X \in \Omega$

**Определение 2.6** (Граница множества  $\partial A$ ). Это множество точек, в любой окрестности (шаре) которых есть как точки из  $A$ , так и точки не из  $A$ .  $x \in \partial A \Leftrightarrow \forall r > 0 : B(x, r) \cap A \neq \emptyset$  и  $B(x, r) \cap (X \setminus A) \neq \emptyset$

**Определение 2.7** (Замыкание  $\overline{A}$ ). Объединение множества и его границы:  $\overline{A} = A \cup \partial A$ . Замыкание всегда является замкнутым множеством.

**Определение 2.8** (Канторово множество,  $K$ ). Получается, если выкидывать каждый раз среднюю третью на  $(0, 1)$ .

**Определение 2.9** (Гомеоморфизм).  $X \simeq Y$ , если  $\exists f : X \rightarrow Y$ :

- $f$  — непрерывна.

- $f$  — биекция.
- $f'$  — непрерывна.

**Свойство 2.1.** 1.  $K$  — замкнуто.

2. Длина  $K = 0$ .

3.  $K$  несчетно.

4.  $K \simeq K \times K$