1 Последовательность.

$f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$
$f(n) =: f_n$
Опр. Последовательность называется ограниченной сверху, если $\exists M : |f_n| \leqslant M$. Снизу, если $\exists m : f_n \geqslant m$. f_n — ограниченная, если ограничена сверху и снизу.
Опр. $M_0 = \sup f_n$, если M_0 — верхняя грань и $\forall \varepsilon > 0\ \exists n_0 : f_{n0} > M_0 - \varepsilon$. $m_0 = \inf f_n$, если m_0 — нижняя грань и $\forall \varepsilon > 0\ \exists n_0 : f_{n0} < m_0 + \varepsilon$.
Аксиома вещественных чисел. Если множество X ограничено сверху, то $\exists supX$. Если f_n неограничено сверху, то $supf_n =: +\infty$. Если снизу, то $inff_n =: -\infty$.
Опр. f_n — бесконечно большая (бб), если $\forall \varepsilon > 0\ \exists N = N(\varepsilon) : |f_n| > \frac{1}{\varepsilon}\ \forall n \geqslant N$. f_n — не бб, $\exists \varepsilon > 0 : \forall N \exists n > N : |f_n| \leqslant \frac{1}{\varepsilon}$.
Опр. f_n — бесконечно малая (бм), если $\forall \varepsilon > 0\ \exists N = N(\varepsilon) : |f_n| < \varepsilon\ \forall n \geqslant N$.
Лемма. f_n — бм $\Rightarrow$ f_n — ограничена.
Доказательство:
Пусть $\varepsilon = 1$, тогда $\exists N : |f_n| \leqslant 1\ \forall n \geqslant N$
$M := max|f_1|, \dots, |f_{N-1}|, 1$, тогда $|f_n| \leqslant M\ \forall n \in N$.
Лемма.

a) f_n — бб $\Rightarrow \frac{1}{f_n}$ — бм

b) f_n — бм ($f_n \neq 0$) $\Rightarrow \frac{1}{f_n}$ — бб

Лемма. f_n — неограниченная последовательность, тогда существует бб подпоследовательность f_{nk}.
Доказательство:

$\exists n_1 : |f_{n1} > 1|$,
$\exists n_2 > n_1 : |f_{n2} > 2|$,
$\exists n_3 > n_2 : |f_{n3}| > 3$,
$\vdots$,
$\exists n_1 < n_2 < \dots < n_k < \dots$
$|f_{nk}| > k \Rightarrow f_{nk}$ — бб.

Лемма.

a) бм + бм = бм

b) бм $\cdot$ C = бм

c) бм $\cdot$ бм = бм

d) бб $\cdot$ C = бб, $C \neq 0$

e) бб $\cdot$ бб = бб

1.1 Предел последовательности.

a_n — последовательность.
Опр. $a = \lim a_n$, если $\forall \varepsilon > 0\ \exists N : |a_n - a| < \varepsilon\ \forall n \geqslant N$.
Опр. Эпсилон окрестность: $U_\varepsilon(a) := (a - \varepsilon; a + \varepsilon)$. Выколотая эпсилон окрестность: $U^\circ_\varepsilon(a) := U_\varepsilon(a) \backslash \{a\}$.
$\varepsilon_1 < \varepsilon_2 \Rightarrow U_{\varepsilon 1}(a) \subset U_{\varepsilon 2}(a), a \in \overline{\mathbb{R}}$.
Опр. $\mathbb{R} \cup \{\pm\infty\} = \overline{\mathbb{R}}$ — расширенная числовая прямая.
Опр. $\varepsilon > 0\ U_\varepsilon(+\infty) = (\frac{1}{\varepsilon}; +\infty)$; $U_\varepsilon(-\infty) = (-\infty; -\frac{1}{\varepsilon})$.
$\lim |a_n| = +\infty \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0\ \exists N(\varepsilon) : |a_n| > \frac{1}{\varepsilon}$.
Если a_n — бб $\Leftrightarrow \lim |a_n| = +\infty$.
Если a_n — бм $\Leftrightarrow \lim |a_n| = 0$.
Утв. $\lim a_n = a \Leftrightarrow \exists$ бм последовательность d_n, такая что $a_n = a + d_n$.
Утв. Если предел последовательности существует, то он единственный.
Доказательство:

$\exists a < b$ и $a = \lim a_n$, $b = \lim a_n$.
Тогда $\varepsilon := \frac{b-a}{42}$:
$\exists N_1 : a_n \in U_\varepsilon(a) \forall n \geqslant N_1$

$\exists N_2 : a_n \in U_\varepsilon(b) \forall n \geqslant N_2$
$\Rightarrow a_n \in (U_\varepsilon(a) \cap U_\varepsilon(b)) = \emptyset \ \forall n \geqslant \max\{N_1, N_2\}$!?!.

Предельный переход в неравенства. $a_n \leqslant b_n \ \forall n \geqslant N_0$.
Пусть $\exists \lim a_n = a$; $\lim b_n = b$, $a, b \in \overline{\mathbb{R}}$
Тогда $a \leqslant b$.
Доказательство:

Пусть $a > b$. Тогда $\varepsilon := \frac{a-b}{42}$:
$\exists N_1 : a_n \in U_\varepsilon(a) \forall n \geqslant N_1$
$\exists N_2 : a_n \in U_\varepsilon(b) \forall n \geqslant N_2$
$\Rightarrow a_n > b_n \ \forall n \geqslant \max\{N_1, N_2\}$!?!.

Лемма о сжатых последовательностях. Пусть $a_n \leqslant b_n \leqslant c_n \ \forall n \geqslant N_0$ и $\exists \lim a_n = \lim c_n = a \in \overline{\mathbb{R}}$, тогда $\exists \lim b_n = a$.
Доказательство:

$\varepsilon > 0 :$
$\exists \ a_n \in U_\varepsilon, \ n \geqslant N_1$
$\exists \ c_n \in U_\varepsilon, \ n \geqslant N_2$
$\Rightarrow b_n \in U_\varepsilon : \forall n \geqslant \{N_1, N_2, N_0\} =: N \Rightarrow a = \lim b_n$ по определению.

Лемма об отделимости от нуля. Пусть $\exists \lim a_n = a > 0$. Тогда $\exists \ N : a_n > \frac{a}{2} > 0, \forall n \geqslant N$.
Следствие. Если $\lim a_n \neq 0 \Rightarrow \frac{1}{a_n}$ ограничена ($a_n \neq 0$).
Доказательство:

$\lim a_n = a > 0$
$\exists N_1 : a_n > \frac{a}{2} \Rightarrow 0 < \frac{1}{a_n} < \frac{2}{a} \ \forall n \geqslant N_1$
$\min\{a_1, \ldots, a_{N-1}, \frac{a}{2}\} \leqslant \frac{1}{a_n} \leqslant \max\{a_1, \ldots, a_{N-1}, \frac{2}{a}\}$

Теорема. Арифметические свойства предела. Пусть $\lim a_n = a$, $\lim b_n = b$; $a, b \in \overline{\mathbb{R}}$. Тогда:

1. $\lim(a_n + b_n) = a + b$, кроме случаев $+\infty + (-\infty)$, $-\infty + (+\infty)$
2. $\lim(ka_n) = ka$, кроме случая $0 \cdot (\pm\infty)$
3. $\lim(a_n \cdot b_n) = ab$, кроме случая $0(\pm\infty)$
4. $\lim \frac{a_n}{b_n} = \frac{a}{b}$, кроме случаев $\frac{0}{0}$, $\frac{\infty}{\infty}$

Доказательство:

$a, b \in \mathbb{R}$
$a_n = a + \alpha_n$, $b_n = b + \beta_n$; α_n, β_n — бм.

1. $a_n + b_n = (a + b) + (\alpha_n + \beta_n) \Leftrightarrow \lim(a_n + b_n) = a + b$.
2. Аналогично.
3. $a_n b_n = (a + \alpha_n)(b + \beta_n) = ab + \alpha_n b + \beta_n a + \alpha_n + \beta_n$
4. Если $b \neq 0$ $\frac{1}{b_n}$ — ограниченна
   $\frac{a_n}{b_n} - \frac{a}{b} = \frac{a+\alpha_n}{b+\beta_n} - \frac{a}{b} = \frac{\alpha_n b - \beta_n a}{b_n b} = \frac{1}{b} \cdot \frac{1}{b_n} \cdot (\alpha_n b - \beta_n a)$
   Если $b = 0 \Rightarrow b_n$ бм $\Rightarrow \frac{1}{b_n}$ — бб $\Rightarrow a_n \cdot \frac{1}{b_n}$ = ограниченная бб

Опр. Линейное пространство — множество, сумма двух элементов которого лежит в этом множестве и элемент с коэффициентом лежит в этом множестве.
Опр. Последовательность называется возвратной, если $a_n = \beta_{n-1}a_{n-1} + \beta_{n-2}a_{n-2} + \cdots + \beta_{n-k}a_{n-k}$; βi — фиксированные коэффициенты.
$a_n^{(1)}, a_n^{(2)} \Rightarrow \forall \lambda, \mu \in \mathbb{R} \ \lambda a_n^{(1)} + \mu a_n^{(2)}$ тоже удовлетворяет (x).
$a_n := t^n$
$t^k = \beta_{n-1}t^{k-1} + \cdots + \beta_{n-k}$
t_0 — простой корень, то t_0^n
t_0 — корень $(m) \Rightarrow t_0^n; nt_0^n; n^2t_0^n; \ldots; n^{m-1}t_0^n$
Теорема.

1. Пусть a_n возрастает и ограничена сверху. Тогда $\exists \lim a_n = \sup a_n$
2. Пусть a_n убывает и ограничена снизу. Тогда $\exists \lim a_n = \inf a_n$

Доказательство:

fix $\varepsilon > 0$

Так как a_n — ограничена, то $\exists M \sup a_n \in \mathbb{R}$; И $\exists N : a_N > M - \varepsilon$. Тогда $\begin{cases} a_n \geqslant M - \varepsilon & \forall n \geqslant N, \text{ так как } a_n \uparrow \\ a_n \leqslant M < M + \varepsilon \end{cases} \Rightarrow$

$\exists N : |a_n - M| < \varepsilon \forall n \geqslant N \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} a_n = M$ по определению.

Найти предел последовательности $a_n = (1 + \frac{1}{n})^n$.

$b_n = (1 + \frac{1}{n})^{n+1}; b_1 = 4, b_2 = 3, ... \; b_n \downarrow$
$b_n \geqslant 1$
Докажем, что b_n убывает.
$\frac{b_n}{b_{n+1}} = \frac{(\frac{n+1}{n})^{n+1}}{(\frac{n+2}{n+1})^{n+2}} = \frac{n+1}{n})^{n+1} \cdot \frac{n+1}{n+2})^{n+2} = \frac{n+1}{n+2} \cdot (\frac{n^2+2n+1}{n^2+2n})^{n+1} = \frac{n+1}{n+2} \cdot (1 + \frac{1}{n^2+2n})^{n+1}$ (неравенство Бернули)
$> \frac{n+1}{n+2} \cdot (1 + \frac{n+1}{n^2+2n}) = \frac{(n+1)(n^2+3n+1)}{(n+2)(n^2+2n)} = \frac{n^3+4n^2+4n+1}{n^3+4n^2+4n} > 1.$
$a_n = \frac{b_n}{(1+\frac{1}{n})}$
$\lim\limits_{n\to\infty} = \lim \frac{b_n}{1+\frac{1}{n}} = \frac{\lim b_n}{\lim(1+\frac{1}{n})} = \lim b_n$ — существует.
$e := \lim\limits_{n\to\infty} (1 + \frac{1}{n})^n \approx 2.718281828459045...$

Теорема Вейерштрасса. Пусть последовательность a_n ограничена. Тогда существует сходящаяся подпоследовательность.
Доказательство:

$|a_n| \leqslant M$
$[-M = \alpha_1; M = \beta_1]$. α_2 — середина. $a_1 = x_1 \in [\alpha_1; \alpha_2]$.
$[\alpha_2; \beta_2]$. β_3 — середина. $x_2 = a_{\min n} \in [\alpha_2; \beta_3]$.
И тд.
α_k неубывающая и ограниченная сверху. $\exists \lim \alpha_k = \alpha$. β_k неубывающая и ограниченная сверху. $\exists \lim \beta_k = \beta$.
$\beta - \alpha = \lim\limits_{k\to\infty} (\beta_k - \alpha_k) = \lim\limits_{k\to\infty} \frac{2M}{2^{k-1}} = 0$.
По построению x_k — подпоследовательность и $\alpha_k \leqslant x_k \leqslant \beta_k \Rightarrow \exists \lim x_k$.

Опр. Последовательность называется фундаментальной (или последовательностью Коши), если $\forall \varepsilon > 0 \; \exists N(\varepsilon)$: $|a_n - a_k| < \varepsilon \; \forall n, k \geqslant N$.
Утв. Пусть $\exists \lim a_n = a \in \mathbb{R}$. Тогда $\{a_n\}$ фундаментальная.
Доказательство:

fix $\varepsilon > 0 \exists N : |a_n - a| < \frac{\varepsilon}{2} \forall n \geqslant N$. Тогда $\forall n, k \geqslant N \; |a_n - a_k| = |(a_n - a) + (a - a_k)| \leqslant |a_n - a| + |a_k - a| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$.

Теорема Коши. Пусть $\{a_n\}$ фундаментальная последовательность. Тогда $\exists \lim a_n$.
Доказательство:

1) (!)$\{a_n\}$ ограничена.
   $\varepsilon = 1$: $\exists N$: $|a_n - a_k| \leqslant \varepsilon \; \forall n, k \geqslant N \Rightarrow a_k \in [a_{N-1}; a_{N+1}] \forall k \geqslant N$
   $M = max\{|a_1|, |a_2|, \ldots, |a_N + 1|\} \Rightarrow |a_n| \leqslant M \forall n$.
2) Тогда по теореме Вейерштрасса $\exists a_{n_k}$ — подпоследовательность; $\lim\limits_{n\to\infty} a_{n_k} = a$.
3) fix $\varepsilon > 0$. $\exists N_1 : |a_{n_k} - a| < \frac{\varepsilon}{2} \; \forall n_k \geqslant N_1$
   $\exists N_2 : |a_m - a_n| < \frac{\varepsilon}{2} \; \forall m, n \geqslant N_2$
   Пусть $n \geqslant max\{N_1, N_2\} \; \exists n_k \geqslant m$.
   $|a_m - a| = |(a_m - a_{n_k}) + (a_{n_k} - a)| \leqslant |a_n - a_{n_k}| + |a_{n_k} - a| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \Rightarrow a = \lim\limits_{m\to\infty} a_m$.