

1 Механика.

Механическое движение — изменение пространственного положения тела относительно других тел с течением времени.

При **поступательном движении** прямая проведенная через любые две точки внутри тела остается параллельна сама себе.

При **вращательном движении** каждая точка тела вращается по своей окружности, центры этих окружностей лежат на одной прямой, прямая называется осью вращения.

Любое движение — сумма этих двух движений.

Колебательное движение — движение, повторяющееся с той или иной точностью во времени.

1.1 Кинематика.

Кинематика — раздел механики, изучающий способы описания движения и связь величин характеризующих это движение.

Для описания движения нужны:

- Система отсчета.
- Тело отсчета.
- Система координат.
- Часы.

Способы анализа:

- Табличный.
- Графический.
- Аналитический.

1.1.1 Равномерное прямолинейное движение.

Равномерное прямолинейное движение — за любые равные промежутки времени тело проходит одинаковые участки пути, траектория при этом прямая линия.

Траектория — кривая, по которой движется тело.

Путь — длина траектории.

Перемещение — вектор из начальной точки в конечную.

Расстояние — модуль перемещения.

Скорость — физическая векторная величина, характеризующая быстроту изменения положения тела в пространстве.
 $V = \frac{S}{t}$.

Формула изменения координаты — $x = x_0 + V_x \cdot t$.

Формулы.

Величина	РПД	РУД
Скорость	$V = \frac{S}{t}$	$V_x = V_{0x} + at$
Расстояние	$S = V \cdot t$	$S = V_{0x}t + \frac{at^2}{2}$
Координата	$x = x_0 + V_{0x}t$	$x = x_0 + V_{0x}t + \frac{at^2}{2}$

Золотая формула механики. $S = \frac{V_{\kappa}^2 - V_0^2}{2a}$.

1.1.2 Движение под углом горизонта.

Тело брошено с высоты h под углом α со скоростью V_0 .

1. $V_x = V_0 \cos \alpha$

2. $x = V_0 \cos \alpha t$
3. $V_y = V_0 \sin \alpha - gt$
4. $y = h_0 + V_0 \sin \alpha t - \frac{gt^2}{2}$

I. Траектория.

$$t = \frac{x}{V_0 \cos \alpha}.$$

$$y = h_0 + V_0 \sin \alpha \frac{x}{V_0 \cos \alpha} - \frac{g}{2} \cdot \frac{x^2}{V_0^2 \cos^2 \alpha}.$$

$$y = h_0 + x \operatorname{tg} \alpha - \frac{gx^2}{2V_0^2 \cos^2 \alpha}.$$

II. H_{max} : $V_y = 0$.

$$0 = V_0 \sin \alpha - gt_{\text{падения}}.$$

$$t_{\text{падения}} = \frac{V_0 \sin \alpha}{g}.$$

$$H_{max} = h_0 + V_0 \sin \alpha \cdot \frac{V_0 \sin \alpha}{g} - \frac{g}{2} \cdot \frac{V_0^2 \sin^2 \alpha}{g^2}.$$

$$H_{max} = h_0 + \frac{V_0^2 \sin^2 \alpha}{2g}.$$

III. $t_{\text{полета}}$: $y = 0$.

$$0 = h_0 + V_0 \sin \alpha t_{\text{полета}} - \frac{gt_{\text{полета}}^2}{2}.$$

$$\frac{gt_{\text{полета}}^2}{2} - V_0 \sin \alpha t_{\text{полета}} - h_0 = 0.$$

$$t_{\text{полета}} = \frac{V_0 \sin \alpha + \sqrt{V_0^2 \sin^2 \alpha + 2gh_0}}{g}.$$

IV. Дальность полета: L .

$$L = x(t_{\text{полета}}) = V_0 \cos \alpha t_{\text{полета}}.$$

$$L = \frac{V_0^2 \sin 2\alpha}{g}.$$

V. Конечная скорость.

$$V_{y \text{ к}} = V_0 \sin \alpha - gt_{\text{полета}} = V_0 \sin \alpha - g \cdot \frac{V_0 \sin \alpha}{g} - g \cdot \frac{\sqrt{V_0^2 \sin^2 \alpha + 2gh_0}}{g}.$$

$$V_{x \text{ к}} = V_0 \cos \alpha.$$

$$V_{y \text{ к}} = -\sqrt{V_0^2 \sin^2 \alpha + 2gh_0}.$$

$$V_{\text{к}} = \sqrt{V_{x \text{ к}}^2 + V_{y \text{ к}}^2} = \sqrt{V_0^2 \cos^2 \alpha + V_0^2 \sin^2 \alpha + 2gh_0}.$$

$$V_{\text{к}} = \sqrt{V_0^2 + 2gh_0}.$$

VI. Угол падения (β).

$$\cos \beta = \frac{V_x}{V_{\text{к}}} = \frac{V_0 \cos \alpha}{\sqrt{2gh_0 + V_0^2}}.$$

1.1.3 Векторный подход к задачам с броском под углом горизонта (баллистическим задачам).

Тело брошено под углом α со скоростью V_0 .

$$\vec{V} = \vec{V}_0 + gt.$$

$$\vec{r} = \vec{V}_0 + \frac{\vec{g}t^2}{2}.$$

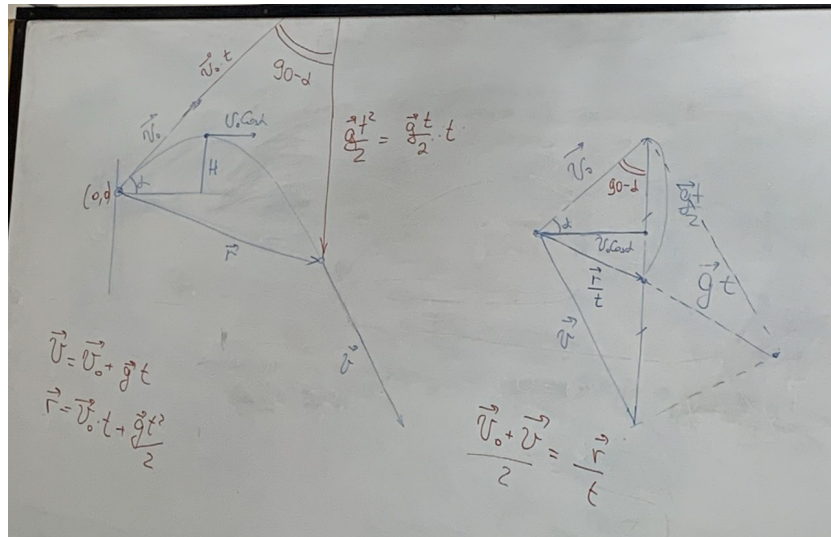


Рис. 1: Треугольник скоростей и путей.

$$S_{\Delta V} = \frac{V_0 \cdot \cos \alpha \cdot gt}{2} = \frac{V \cdot V_0 \cdot \sin(\alpha + \beta)}{2}.$$

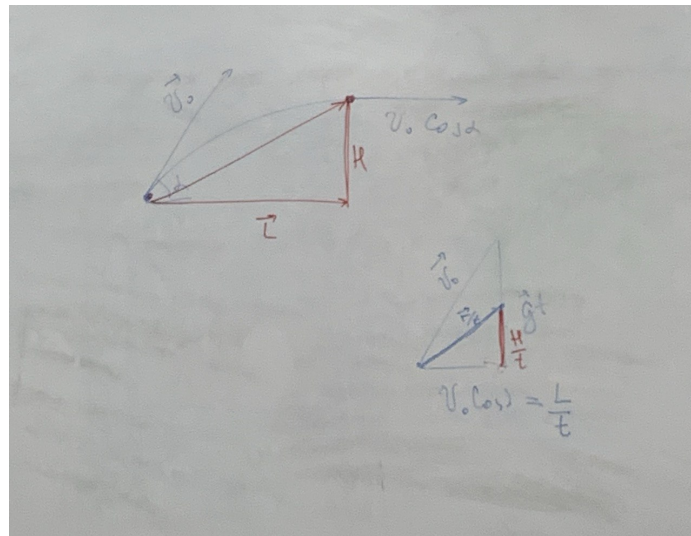


Рис. 2: Треугольник скоростей 2.

1.1.4 Движение по окружности.

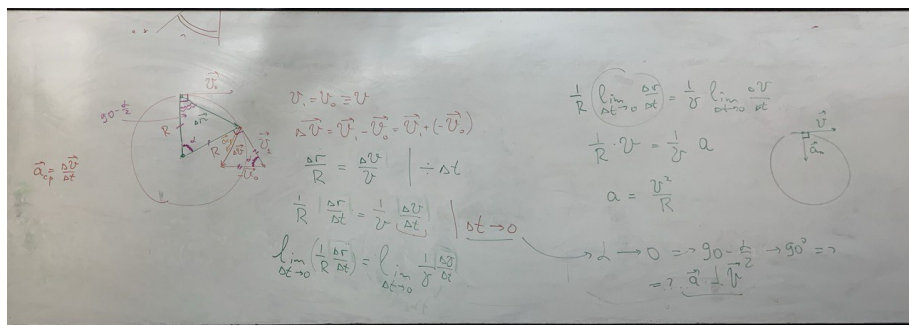


Рис. 3: Движение по окружности.

ω — угловая скорость. $\omega = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \varphi}{\Delta t}$.

Период — время, за которое тело проходит полный оборот по окружности. $T = \frac{2\pi R}{V} = \frac{2\pi}{\omega}$.

Формула связи линейной скорости с угловой. $V = \omega R$.

Частота — количество оборотов в секунду. $\nu = \frac{1}{T}$. $[\nu] = \text{Гц}$.

$$\beta = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \omega}{\Delta t} = \text{const.}$$

$$\beta = \frac{\Delta \omega}{\Delta t} = \frac{\omega(t) - \omega_0}{t - t_0}.$$

$$\omega(t) = \omega_0 + \beta t.$$

$$\varphi = \varphi_0 \pm \omega_0 t \pm \frac{\beta t^2}{2}.$$

$$a_\tau = \beta R.$$

1.1.5 Относительность движение. Преобразование Галилея.

Принцип относительности классической механики — во всех инерциальных системах отсчета механические явления протекают одинаково.

$$\vec{V}_{\text{абс}} = \vec{V}_{\text{относ}} + \vec{V}_{\text{пер}}$$

1.2 Динамика.

Отвечает на вопрос, почему тело движется именно так.

$$\vec{F}, [F] = \text{Н}.$$

Инерция — способность тела сохранять скорость при отсутствии внешнего воздействия.

Три закона Ньютона:

1. Существуют инерциальные системы отсчета (ИСО). ИСО — те системы отсчета, в которых если на тело не действуют силы или их действие скомпенсировано, то тело движется равномерно и прямолинейно или покоится.
2. $\sum \vec{F} = m\vec{a}$.
Инертность — свойство тела, которое заключается в том, что для изменения скорости тела необходимо время.
3. При взаимодействии двух тел возникает две силы. Эти две силы приложены к двум разным телам, равным по модулю, противоположны по направлению, лежат на одной прямой, имеют одну природу (гравитационная, электромагнитная, сильная, слабая).

Ограничения на законы: работают только для скоростей много меньших скоростей света, в инерциальных системах счисления и масса не нулевая.

Полезная информация:

1. Тело стоит на платформе, платформа движется вверх с ускорением \vec{a} , у тела масса m , то $P = m \cdot (g + a)$.
2. Тело стоит на платформе, платформа движется вниз с ускорением \vec{a} , у тела масса m , то $P = m \cdot (g - a)$.

1.2.1 Сила трения.

Сила трения имеет электро-магнитную природу. Направлена вдоль поверхности противодействующих поверхностей, против относительной скорости взаимодействия двух тел.

$$F_{\text{тр}} = N\mu; \mu — \text{коэффициент трения.}$$

Не существует силы вязкого трения покоя.

1.2.2 Сила упругости.

Сила упругости — сила электромагнитной природы, возникающая при деформации, направленная против деформации.

$$F_{\text{упр}} = -k\Delta x.$$

Виды деформаций:

- Упругие (обратимая деформация):
 1. Растяжение-сжатие
 2. Сдвиг
 3. Изгиб
 4. Кручение
- Пластическая (необратимая деформация).

Механическое напряжение. $\sigma = \frac{F}{S} = \varepsilon \cdot \frac{kl_0}{S} = E \cdot |\varepsilon|$. $[\sigma] = \frac{\text{Н}}{\text{м}^2} = \text{Па}$.
Модуль Юнга. $E = \frac{kl_0}{S}$. $[E] = \text{Па}$.

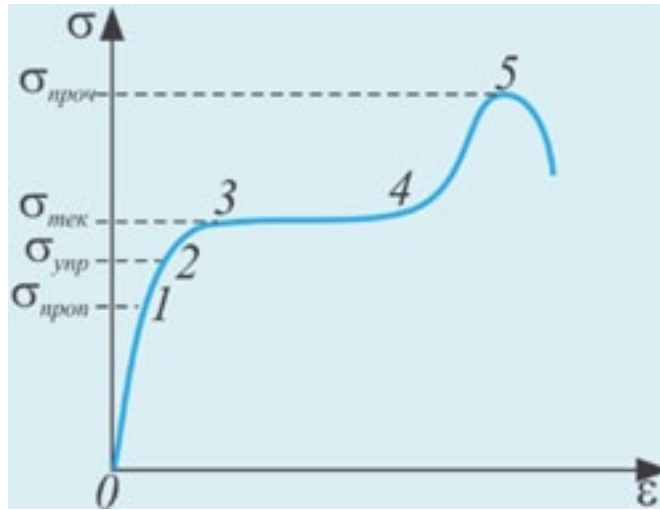


Рис. 4: Диаграмма растяжения

Коэффициент жесткости.

- Параллельное соединение.

$$k = \frac{ES}{l_0} = \frac{E(\sum_{i=0} S_i)}{l_0} = \sum_{i=0} k_i.$$
- Последовательное соединение.

$$\frac{1}{k} = \frac{l_0}{ES} = \frac{\sum_{i=0} l_{0i}}{ES} = \sum_{i=0} \frac{1}{k_i}.$$

1.2.3 Гравитация.

Исаак Ньютон (1643 – 1727 г.). Учился в Кэмбридже. Когда он был на 4 курсе, произошла эпидемия чумы и он получил бакалавриат без защиты диплома.

Законы Кеплера (1609 – 1619):

- Все планеты движутся по эллипсам, в одном из фокусов которых находится Солнце.
- Радиус-вектор планеты за одинаковые промежутки времени заметает равные площади.

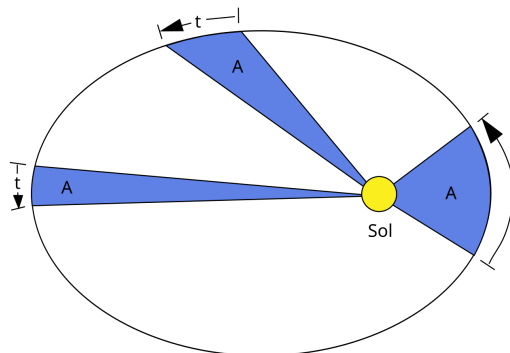


Рис. 5: Второй закон Кеплера.

$$3. \frac{T_1^2}{T_2^2} = \frac{b_1^3}{b_2^3} = \frac{R_1^3}{R_2^3}.$$

Закон всемирного тяготения (1666 г.). $F \sim \frac{m_1 m_2}{R^2}$. $F_{\text{грав}} = \frac{GM_1 M_2}{R^2}$.

Границы применения:

- Точечные тела.

- Сферические тела, плотность которых зависит только от расстояний до их центров.

Гравитационная масса — масса, входящая в закон всемирного тяготения.

Инертная масса — масса, входящая во второй закон Ньютона.

Могло быть такое, что они не равны. То, что они равны, стечение обстоятельств в нашей вселенной.

Опыт Кавендиша.

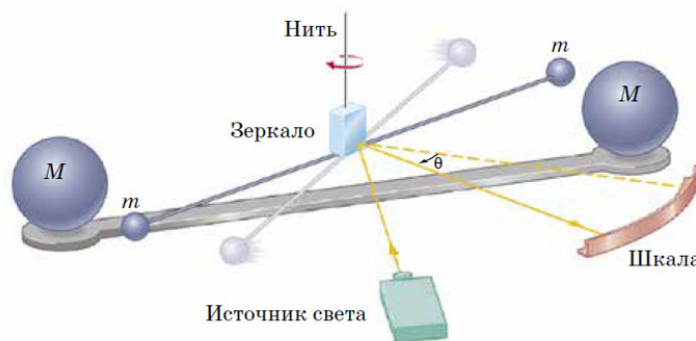


Рис. 6: Опыт Кавендиша*.

На самом деле он увеличил точность не с помощью зеркала, а с помощью шкалы Нониуса.

$$G = 6.67 \cdot 10^{-11} \frac{\text{Н} \cdot \text{м}^2}{\text{кг}^2}.$$

Но на самом деле он хотел найти $\rho_{\text{земли}} = 5437 \frac{\text{кг}}{\text{м}^3}$. Это очень близко, тк на данный момент принято, что $\rho_{\text{земли}} = 5515 \frac{\text{кг}}{\text{м}^3}$.

Ускорение свободного падения. $F = G \frac{Mm}{R^2} \rightarrow G \frac{M}{R^2} = g = 9.8$.

Первая космическая скорость. Это минимальная (для данной высоты над поверхностью планеты) горизонтальная скорость, которую необходимо придать объекту, чтобы он совершал движение по круговой орбите вокруг планеты.

$$F_{\text{грав}} = \frac{GMm}{R^2}; F_{\text{норм}} = \frac{mv^2}{R}.$$

$$\frac{GMm}{R^2} = \frac{mv^2}{R}.$$

$$v = \sqrt{\frac{GM}{R}} = \sqrt{\frac{(6.674 \cdot 10^{-11}) \cdot (5.972 \cdot 10^{24})}{6.371 \cdot 10^6}} \approx 7.91 \cdot 10^3 \frac{\text{м}}{\text{с}}.$$

Что видит лунный человек. Он всегда видит землю в одной и той же точке на небе, так как луна вращается вокруг своей оси с такой же скоростью, с какой вращается вокруг земли. Это явление называется "Приливный захват".

Открытие Нептуна. В 19 веке ученые заметили, что орбита Урана отклоняется от расчетной, что указывало на влияние неизвестной планеты. Французский математик Урбен Леверье в 1846 году предсказал расположение Нептуна, рассчитав его орбиту на основе этих отклонений. Немецкий астроном Иоганн Галле с помощью телескопа обнаружил Нептун в указанном месте. Нептун стал первой планетой, открытой с помощью математических расчетов, а не прямых наблюдений.

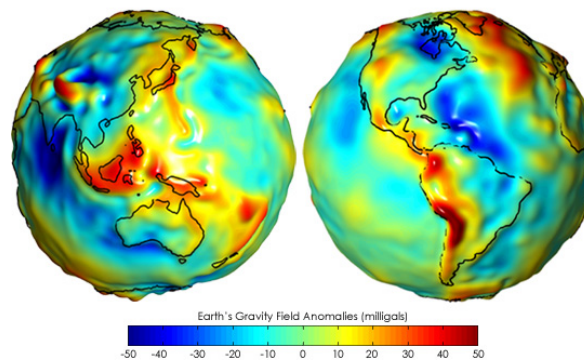


Рис. 7: Геоид с увеличенными искажениями и с раскраской, соответствующей гравитационным аномалиям (одна и та же гиря, взвешенная на одних и тех же пружинных весах, будет в «красных местах» тяжелее, а в «синих местах» — легче).

1.2.4 Не инерциальные системы отсчета.

Сила инерции. $\vec{F}_\text{и} = -m \cdot a_{\text{пер}} \vec{a}$. Для нее нет пары, тк на самом деле этой силы не существует.

1.3 Законы сохранения.

1.3.1 Закон сохранения импульса.

Импульс. $p = m \cdot V$; $[p] = \frac{\text{кг} \cdot \text{м}}{\text{с}}$.

Второй закон Ньютона в импульсной форме. $\vec{F} \Delta t = \Delta \vec{p} \rightarrow \vec{F} = \frac{\Delta \vec{p}}{\Delta t}$.

Закон изменения импульса системы. $\Delta p_{\text{сис}} = F_{\text{внеш}} \cdot \Delta t$.

Закон сохранения импульса. Если на систему не действуют внешние силы или их действие скомпенсированно, то импульс системы сохраняется.

1.4 Реактивное движение.

$[\mu] = \frac{\text{кг}}{\text{с}}$ — скорость расхода топлива, \vec{u} — скорость топлива в системе отсчета ракеты.

ЗСИ: $M \vec{V} = (M - \mu \Delta t)(\vec{V} + \Delta \vec{V}) + \mu \Delta t(\vec{V} + \vec{u})$.

$$0 = M \Delta \vec{V} - \mu \Delta t \Delta \vec{V} + \mu \vec{u} \Delta t.$$

$$M \Delta \vec{V} = -\mu \vec{u} \Delta t.$$

$$M \frac{\Delta \vec{V}}{\Delta t} = -\mu \vec{u}.$$

$$M \vec{a} = -\mu \vec{u} = \vec{F}_p.$$

$$\vec{F}_p = -\mu \vec{u} \text{ — уравнение Мещерского.}$$

1.5 Механическая работа.

Механическая работа. $A = Fl \cdot \cos \alpha = (\vec{F}, \vec{l})$. α — угол между силой и вектором перемещения. $[A] = \text{Дж}$.

Мощность. $P = \frac{A}{t} = FV \cdot \cos \alpha = (\vec{F}, \vec{V})$. $[P] = \text{Вт}$.

Работа силы упругости. $A = -\Delta E_{\text{п}} = -\frac{k(\Delta x)^2}{2}$.

1.6 Механическая энергия.

Кинетическая энергия. $E_{\text{к}} = \frac{m \cdot V^2}{2}$. $A = \Delta E_{\text{к}}$.

Потенциальная энергия. $E_{\text{п}} = mgh$. $A_{mg} = -\Delta E_{\text{п}}$.

Силы, работа которых зависит от начального и конечного положения и не зависит от пройденного пути называется **консервативными**.

Закон сохранения энергии. $\frac{m \cdot V^2}{2} + mgh = \text{const}$. В замкнутой системе, в которой отсутствуют не консервативные силы, энергия сохраняется. Если внешние силы действуют, то изменение механической энергии равно работе внешних сил.

1.7 Потенциальная энергия силы тяготения.

$$E_{\text{п}} = \frac{GM_1 M_2}{R}$$

1.8 Статика абсолютно упругого тела.

Условия покоя абсолютно упругого тела:

1. $\sum \vec{F} = 0$

2. **Плечо** — кратчайшее расстояние от оси вращения тела до линии действия силы.

Момент силы — произведение силы на плечо. $M_{\text{НМ}} = FN \cdot d_{\text{м}}$.

Сумма всех моментов с учетом знака равна 0 \Leftrightarrow сумма всех моментов, которые вращают по часовой стрелке, равна сумме всех моментов, вращающих по часовой стрелке.

Формула координаты центра масс. $x_c = \frac{\sum_i m_i x_i}{m} = \frac{\sum_i m_i x_i}{\sum_i m_i}$. $y_c = \frac{\sum_i m_i y_i}{m} = \frac{\sum_i m_i y_i}{\sum_i m_i}$. $z_c = \frac{\sum_i m_i z_i}{m} = \frac{\sum_i m_i z_i}{\sum_i m_i}$. $\vec{r}_c = \frac{\sum_i m_i \vec{r}_i}{m} = \frac{\sum_i m_i \vec{r}_i}{\sum_i m_i}$.

Виды равновесий.

- Устойчивое — положение равновесия, при выводе из которого возникает "возвращающая" сила, которая возвращает его в изначальное положение. Равнодействующая сила возвращает.
- Неустойчивое — положение равновесия, при выводе из которого тело не возвращается в изначальное положение. Равнодействующая сила не возвращает.
- Безразличное — равнодействующая сила равна 0.

КПД. $\eta = \frac{A_{\text{пол}}}{A_{\text{зат}}} \cdot 100\%$.

Теорема о движении центра масс. Центр масс тела движется таким образом, как будто он точка массой $m_{\text{общ}}$ и все силы приложены к этой точке.

$$\frac{\Delta(\Delta m_i \vec{V}_i)}{\Delta t} = \frac{\Delta \vec{p}_i}{\Delta t} = \sum_{i+k} \vec{F}_{ik} + \sum_i \vec{F}_{\text{внеш}}$$

$$\frac{\sum_i \Delta \Delta m_i \vec{V}_i}{\Delta t} = \vec{F}_{\text{внеш}}$$

$$\frac{\Delta \sum_i \Delta m_i \vec{V}_i}{\Delta t} = \vec{F}_{\text{внеш}}$$

$$\vec{r}'_c = \vec{V}_c = \frac{\sum_i \Delta m_i \vec{V}_i}{m}$$

$$\Delta \frac{m \vec{V}_c}{\Delta t} = \vec{F}_{\text{внеш}}$$

$$m \vec{a}_c = \vec{F}_{\text{внеш}}$$

⇒ Если внешних сил не действует, то центр масс покоится, если покоился, или движется по инерции, если двигался по инерции.

1.9 Основное уравнение динамики вращательного движения.

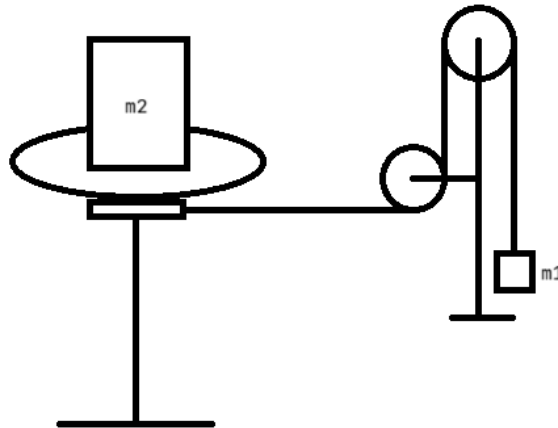


Рис. 8: Опыт уравнение вращательного движения.

Угловое ускорение β пропорционально моменту сил M .

Момент инерции. $I\beta = \sum M$. Для точечного тела $I = mR^2$, для других тел находится интегрированием. $[I] = \text{кг} \cdot \text{м}^2$.

1.10 Энергия вращательного движения тела.

$$E = \sum_i \frac{m_i V_i^2}{2} = \sum_i \frac{m_i (\omega \cdot r_i)^2}{2} = \frac{\omega^2}{2} \sum_i m_i r_i^2 = \frac{I \omega^2}{2}$$

1.11 Теорема Гюйгенса-Штейнера.

Момент инерции I тела относительно произвольной неподвижной точки оси равен сумме момента инерции этого тела I_c относительно параллельной ей оси, проходящей через центр масс тела, и произведения массы тела m на квадрат расстояния d между осями. $I = I_c + md^2$.

1.12 Закон сохранения момента импульса.

$$M = I\beta = I \frac{\omega - \omega_0}{\Delta t}$$

$$M \Delta t = I\omega - I\omega_0$$

$$L = I\omega \text{ — момент импульса. } [L] = \frac{\text{кг} \cdot \text{м}^2}{\text{с}}$$

$$L = I\omega = mr^2 \frac{V}{r} = p \cdot r$$

$$M \Delta t = \Delta L$$

$$M = \frac{\Delta L}{\Delta t} \Rightarrow \text{если } M = 0, \text{ то } L = \text{const.}$$

1.13 Колебания.

Колебания — движения, которые с той или иной точностью повторяющиеся во времени.

Колебания бывают:

- **Свободные.** Происходят под действием только первоначального запаса энергии.
Условия свободных колебаний:
 1. Могут быть только в колебательных системах.
 2. Силы трения малы.
- **Вынужденные.** Колебания при которых мы помогаем системе колебаться.
- **Автоколебания.** Система, у которой есть собственная энергия, которую она может расходовать на восполнение потраченной энергии.

Величины, характеризующие колебание:

- **Период** — промежуток времени, через который движение повторяется. $T, [T] = \text{секунды}$.
- **Частота** — обратна величина к периоду, измеряется в Гц, обозначается ν .
- **Амплитуда** — максимальное отклонение от положения равновесия. Обозначается $A/X_{\max}/a_{\max}$. За период тело проходит 4 амплитуды.
- **Фаза колебания** — где колебания в данный момент, что с ними происходит. **Синфазные колебания** — одинаковые, **противофазные** — разные.

Гармонические колебания — колебания, где возвращающая сила пропорциональна смещению от положения равновесия, взятого с обратным знаком.

График колебательного движения — синусоида.

Формула гармонических колебаний. Толкнули: $x = A \sin(\frac{2\pi}{T}t)$; отпустили: $x = A \cos(\frac{2\pi}{T}t)$.

Формула периода для математического маятника: $T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}}$.

Формула периода для пружинного маятника: $T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}}$.

Резонанс — частота установившихся вынужденных колебаний, равна частоте вынужденной силе.

1.14 Механические волны.

Бегущая волна — возмущение, распространяющееся в пространстве, удаляясь от своего начального положения.

Будем проходить только упругие бегущие волны, в частности — звук.

Типы волн:

- **Продольные** — линия колебания совпадает с линией распространения волны. Пример: звук.

- **Поперечные** — линия колебания перпендикулярна линии распространения волны.

Длина волны — расстояние между двумя ближайшими точками, колеблющимися синфазно. Определение номер 2: расстояние на которое распространилась волна за один период. $\lambda = VT$.