

Содержание

1	Линейная алгебра.	2
1.1	Введение.	2
1.2	Фактор-пространства.	2
1.3	Матрицы.	4
1.4	Системы линейных уравнений.	5
1.5	Определитель.	6
1.6	Метод Крамера.	6
1.7	Ранговый метод в комбинаторике.	6
1.8	Определенные и полу-определенные матрицы.	7
2	Теория типов.	8
2.1	Основы математической логики. Классическое исчисление высказываний.	8
2.2	Интуиционистское исчисление высказываний. Естественный вывод.	9
2.3	Исчисление предикатов.	9
2.4	λ — исчисления.	10
2.5	Просто — типизированное λ — исчисление.	12
2.6	Нормализуемость λ_{\rightarrow} . Система F.	12
2.7	Экзистенциальные типы. Система НМ.	13
2.8	Обобщенная система типов.	13
2.9	Гомотопическая теория типов.	14
2.10	Иерархия универсумов. $\backslash Prop$ и $\backslash Set$.	14

1 Линейная алгебра.

1.1 Введение.

Пример. $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$

$$A \times B = \{(a, b) | a \in A, b \in B\}$$

F — поле, 2 операции, обе обратимы.

Векторное пространство V над F : $(V, +, *)$

1. $\forall v, u, w \in V: (v + u) + w = v + (u + w)$
2. $\forall v, u \in V: v + u = u + v$
3. $\exists v \in V: \forall v \in V: 0 + v = v$
4. $\forall v \in V: \exists "-v": v + "-v" = 0$
5. $\forall v \in V; \alpha, \beta \in F: \alpha * (\beta * v) = (\alpha\beta) * v$
6. $\forall v \in V; \alpha, \beta \in F: (\alpha + \beta) * v = \alpha * v + \beta * v$
7. $\forall v, w \in V; \alpha \in F: \alpha * (v + w) = \alpha * v + \alpha * w$
8. $\forall v \in V: 1 * v = v$

Утверждение 1.1. Если v, w — векторное пространство над F , то и $v \times w$ — тоже векторное пространство над F .

V — векторное пространство над F .

Определение 1.2. $W \subseteq V$ — подпространство.

1. $\forall w_1, w_2 \in W: w_1 + w_2 \in W$
2. $\forall w \in W; \alpha \in F: \alpha w \in W$

$$V = R \times R, W = \{v \in V | x + y = 0\}$$

Определение 1.3. Линейное отображение:

1. $f(x) + f(y) = f(x + y)$
2. $f(\alpha x) = \alpha f(x)$

1.2 Фактор-пространства.

Определение 1.4. Поле F , $W \subseteq V$ — векторное пространство; V/W — факторизация. Отношение \sim на V : $v \sim u \Leftrightarrow u - v \in W$.

1. $u - u = 0 \in W$
2. $u - v \in W \Leftrightarrow v - u \in W$
3. $(u - v) \in W \wedge (v - w) \in W \Rightarrow (u - v) + (v - w) \in W \Rightarrow u - w \in W$

$[v]$ — класс эквивалентности вектора v .

1. $[v] + [u] = [v + u]$
2. $\alpha[v] = [\alpha v]$

$$v_1 \sim v_2 \Rightarrow u + v_1 \sim u + v_2$$

$$v_1 \sim v_2 \Rightarrow \alpha v_1 \sim \alpha v_2$$

Отображение векторного пространства.

V, W — векторные пространства над F .

$f: V \rightarrow W$ — линейная, если

1. $\forall v_1, v_2 \in V: f(v_1) + f(v_2) = f(v_1 + v_2)$
2. $\forall v \in V, \alpha \in F: \alpha f(v) = f(\alpha v)$

Если f — биекция, то f — изоморфизм, V и W — изоморфны.

1. Рефлексивна $f = id \ V \rightarrow V : v \rightarrow v$
2. Симметрична $V \xrightarrow{f} W \ f^{-1}$ — обратное отображение: $f^{-1}(x) + f^{-1}(y) = f^{-1}(x + y)$
3. $V \xrightarrow{f} W, W \xrightarrow{g} U$. f, g — линейная биекция, $f \circ g$ — линейная биекция.

$$\mathbb{R}^n = (x_1, x_2, \dots, x_n), \mathbb{R}^m = (y_1, y_2, \dots, y_m)$$

$$\text{Табличка } n \times m: \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Отображение $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ (линейное):

$$(x_1, \dots, x_n) \rightarrow \begin{pmatrix} a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n \\ a_{21}x_1 + \dots + a_{2n}x_n \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + \dots + a_{mn}x_n \end{pmatrix}$$

Определение 1.5. V — векторное пространство над F . Набор v_1, \dots, v_k . $\sum \alpha_i v_i, \alpha_i \in F \rightarrow$ конечное число $\alpha_i \neq 0$. Все линейные комбинации образуют векторное подпространство $\text{span}(v_1, \dots, v_k, \dots)$.

Определение 1.6. v_1, \dots, v_k, \dots — линейно независимая $\Leftrightarrow \nexists$ нетривиальных линейных комбинаций (не все коэффициенты равны 0), те все коэффициенты равны 0, и других решений нет. Линейно зависима иначе.

Определение 1.7. v_1, \dots, v_k, \dots — порождающая система, если $\text{span}(v_1, \dots, v_k, \dots) = V$ ($\text{span}()$ — множество всех возможных линейных комбинаций).

Определение 1.8. Базис = линейно независимая + порождающая система. Базис — максимальная линейно независимая система векторов в пространстве V .

Определение 1.9. V — конечномерное $\Leftrightarrow \exists$ конечная порождающая система.

Возьмем минимальную (по включению) порождающую систему. v_1, \dots, v_e . Пусть оказалась линейно зависимой. $\sum \alpha_i v_i = 0$. НУО $\alpha_1 \neq 0$. $v_1 = \sum \frac{-d_j}{\alpha_1} v_j$. Тогда можем выкинуть.

(!) Любой базис одинакового размера. $e_1, \dots, e_k; f_1, \dots, f_m$. $m > k$. Хотим $e_i: (e_i, f_2, \dots, f_m)$ — линейно независимая система. Пусть нет. Тогда $\forall i \exists \alpha_1, \dots, \alpha_m : \alpha_1 e_i + \alpha_2 f_2 + \dots + \alpha_m f_m = 0 \Rightarrow e_i = \sum \beta_{ij} f_j \Rightarrow f_2 - f_m$ — порождают все?! Значит (e_1, f_2, \dots, f_m) — линейно независимая система. $e_1 = \sum \alpha_j f_j \Rightarrow \alpha \neq 0 \Rightarrow f_1 = \frac{1}{\alpha_1} e_1 - \sum_{j \neq 1} \frac{\alpha_j}{\alpha_1} f_j \Rightarrow (e_1, f_2, \dots, f_m)$ — базис.

Определение 1.10. $\dim V$ = количество элементов базиса.

$A \xrightarrow{f} B: f(A)$ — векторное подпространство в B .

Утверждение 1.11. Линейные независимые системы не бывают больше, чем базис.

Доказательство. $e_1, \dots, e_k; f_1, \dots, f_{k+1}$. Рассмотрим наборы $(e_1, f_2, \dots, f_{k+1}); (e_1, \dots, e_k, f_{k+1})$ — линейно независимая система. \square

Теорема 1.12. V — векторное пространство над полем $F \Rightarrow V \cong F^{\dim V}$.

Доказательство. fix базис e_1, \dots, e_n , где $n = \dim V$.

Лемма 1.13. $\forall v \in V \exists! (\alpha_1, \dots, \alpha_k): V = \sum \alpha_k e_k$.

Доказательство. Пусть есть два набора $(\alpha_1, \dots, \alpha_k)$ и $(\beta_1, \dots, \beta_k)$. $0 = V - V = \sum (\alpha_k - \beta_k) e_k \Rightarrow \alpha_k = \beta_k \forall k$. \square

$$f: F^n \rightarrow V$$

$$(x_1, \dots, x_n) \rightarrow \sum x_i e_i$$

$$(y_1, \dots, y_n) \rightarrow \sum y_i e_i$$

$$(x_1 + y_1, \dots, x_n + y_n) \rightarrow \sum (x_i + y_i) e_i$$

$$f(\lambda(x_1, \dots, x_n)) = \sum (\lambda x_i) e_i = \lambda (\sum x_i e_i)$$

$$\text{Инъекция. } f(x_1, \dots, x_n) = f(y_1, \dots, y_n) \Rightarrow (x_1, \dots, x_n) = (y_1, \dots, y_n)$$

$$\text{Сюръекция. } V = \sum \alpha_i e_i \Rightarrow v = f(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$$

\square

1.3 Матрицы.

$$\mathbb{R}^n \xrightarrow{f} \mathbb{R}^m$$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

$$(x_1, \dots, x_n) \rightarrow \begin{pmatrix} a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n \\ a_{21}x_1 + \dots + a_{2n}x_n \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + \dots + a_{mn}x_n \end{pmatrix}$$

$$e_1 = (1, 0, \dots, 0) \rightarrow (b_{11}, b_{21}, \dots, b_{m1})$$

$$e_2 = (0, 1, \dots, 0) \rightarrow (b_{12}, b_{22}, \dots, b_{m2})$$

$$\vdots$$

$$e_n = (0, 0, \dots, 1) \rightarrow (b_{1n}, b_{2n}, \dots, b_{mn})$$

$$f((x_1, x_2, \dots, x_n)) = x_1 f(e_1) + x_2 f(e_2) + \dots + x_n f(e_n) = x_1(b_{11}, b_{21}, \dots, b_{m1}) + x_2(b_{12}, \dots, b_{m2}) + \dots =$$

$$(x_1 b_{11} + x_2 b_{12} + \dots + x_n b_{1n},$$

$$x_1 b_{21} + x_2 b_{22} + \dots + x_n b_{2n},$$

$$\dots,$$

$$x_1 b_{m1} + \dots + x_n b_{mn})$$

Сложение матриц.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} b_{11} & \dots & b_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{m1} & \dots & b_{mn} \end{pmatrix}; X — матрица, f_X — линейное отображение.$$

$$f_A : (x_1, \dots, x_n) \rightarrow \begin{pmatrix} a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + \dots + a_{mn}x_n \end{pmatrix}, f_B : (x_1, \dots, x_n) \rightarrow \begin{pmatrix} b_{11}x_1 + \dots + b_{1n}x_n \\ \vdots \\ b_{m1}x_1 + \dots + b_{mn}x_n \end{pmatrix}$$

$$f_A + f_B : (x_1, \dots, x_n) \rightarrow \begin{pmatrix} (a_{11} + b_{11})x_1 + \dots + (a_{1n} + b_{1n})x_n \\ \vdots \\ (a_{m1} + b_{m1})x_1 + \dots + (a_{mn} + b_{mn})x_n \end{pmatrix}$$

$$A + B := (a_{ij} + b_{ij})$$

$$\lambda A := (\lambda a_{ij})$$

Произведение матриц (композиция).

$$\mathbb{R}^n \xrightarrow{f_A} \mathbb{R}^m \xrightarrow{f_B} \mathbb{R}^k$$

$$f_A \text{ и } f_B \text{ построены по матрицам } A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \text{ и } B = \begin{pmatrix} b_{11} & \dots & b_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{m1} & \dots & b_{mn} \end{pmatrix}$$

$$f_C(V) = f_B(f_A(V))$$

$$C := B \cdot A$$

$$e_1 = (1, 0, \dots, 0); f_A(e_1) = (a_{11}, \dots, a_{m1})$$

$$1 \text{ столбец: } f_B(a_{11}, \dots, a_{m1}) =$$

$$(b_{11}a_{11} + b_{12}a_{21} + \dots + b_{1m}a_{m1},$$

$$b_{21}a_{11} + b_{22}a_{21} + \dots + b_{2m}a_{m1},$$

$$\vdots,$$

$$b_{k1}a_{11} + b_{k2}a_{21} + \dots + b_{km}a_{m1})$$

$$f_A(e_i) = (a_{1i}, \dots, a_{mi})$$

$$i \text{ столбец: } f_B(f_A(e_i)) =$$

$$(b_{11}a_{1i} + b_{12}a_{2i} + \dots + b_{1m}a_{mi},$$

$$b_{21}a_{1i} + b_{22}a_{2i} + \dots + b_{2m}a_{mi},$$

$$\vdots,$$

$$b_{k1}a_{1i} + b_{k2}a_{2i} + \dots + b_{km}a_{mi})$$

$$C = \begin{pmatrix} c_{11} & \dots & c_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ c_{k1} & \dots & c_{kn} \end{pmatrix}$$

$$c_{ij} = b_{i1}a_{1j} + b_{i2}a_{2j} + \dots + b_{im}a_{mj} = \sum_{\alpha=1}^m b_{i\alpha}a_{\alpha j}$$

Определение 1.14. $F^n \xrightarrow{f_a} F^m$, $f_a(v) = Av$. $Im f = \{u \in F^m | \exists v \in F^n : u = f(v)\}$. $Ker f = \{u \in F^n | f(u) = 0\}$.

Утверждение 1.15. $Im f$ и $Ker f$ — линейные подпространства.

Теорема 1.16 (Теорема о гомоморфизме). Для любого линейного отображения $f : V \rightarrow W$ между векторными пространствами факторпространство пространства V по ядру f изоморфно образу $f : V/Ker f \cong Im f$.

Доказательство. Построение отображения: определим отображение $\phi : V/Ker f \rightarrow Im f$, $\phi(v + Ker f) = f(v)$; $v + Ker f$ — это класс эквивалентности в факторпространстве $V/Ker f$. Корректность определения: пусть $v_1 + Ker f = v_2 + Ker f \Rightarrow v_1 - v_2 \in Ker f \Rightarrow f(v_1 - v_2) = 0 \Rightarrow f(v_1) - f(v_2) = 0 \Rightarrow f(v_1) = f(v_2)$. Линейность отображения ϕ : очевидно, остается для доказательства читателю. Сюръективность ϕ : докажем, что для любого элемента $w \in Im f$ найдется прообраз в $V/Ker f$; по определению образа, если $w \in Im f$, то существует такой вектор $v \in V$, что $f(v) = w \Rightarrow$ для класса $v + Ker f$ верно: $\phi(v + Ker f) = f(v) = w \Rightarrow \phi$ — сюръективно. Инъективность ϕ : докажем, что если $\phi(v + Ker f) = 0$, то весь класс $v + Ker f$ является нулевым элементом в $V/Ker f$ (то есть $v + Ker f = 0 + Ker f$); пусть $\phi(v + Ker f) = 0 \Rightarrow$ по определению ϕ : $f(v) = 0$; это означает, что $v \in Ker f \Rightarrow v + Ker f = 0 + Ker f$ (так как в классе эквивалентности $v + Ker f$ лежит сам вектор v , а если $v \in Ker f$, то этот класс совпадает с ядром, которое является нулевым элементом в факторпространстве). \square

Утверждение 1.17. $V/Ker f \xrightarrow{g} Im f$, $[v] \xrightarrow{g} f(v)$. Тогда:

- $[v] \xrightarrow{g} f(v)$ — корректно заданное отображение.
- $v_1 - v_2 \in Ker f \Rightarrow f(v_1) = f(v_2) \Leftrightarrow f(v_1 - v_2) = 0$, тк $g([v]) = 0 \Rightarrow v \in Ker f \Rightarrow [v]$.
- $u \in Im f \Rightarrow \exists u = f(v) \Rightarrow u = g([v])$.

Определение 1.18. $rank A := \dim(Im A)$, где A — матрица. Также это размерность линейного замыкания пространства столбцов матрицы. $Im A$ = линейное замыкание пространства столбцов, тк $u \in Im A = f(\sum \alpha_i e_i) = \sum \alpha_i f(e_i)$. $f(e_i)$ — i -ый столбец матрицы.

Определение 1.19. Множество всех матриц $n \times m$ над полем F обозначается $M_{n \times m}(F)$. Это множество кольцо с 1 (ассоциативность сложения, нейтральный элемент сложения, обратимость сложения, коммутативность сложения, ассоциативность умножения, дистрибутивность, нейтральный элемент умножения).

Определение 1.20. Верхне-треугольная матрица — матрица, в которой под диагональю все нули. Аналогично нижне-треугольная. Они образуют линейное подпространство. Матрица, которая и верхне-треугольная, и нижне-треугольная — диагональная.

Определение 1.21. Симметричная матрица — $a_{ij} = a_{ji}$.

Утверждение 1.22. $\dim(Lin(U \cup W)) + \dim(u \cap w) = \dim(u) + \dim(w)$.

Утверждение 1.23. $rank(AB) = \min(rank A, rank B)$.

Утверждение 1.24. $T^{-1}AT T^{-1}BT = T^{-1}(AB)T$.

Определение 1.25. Матрица перехода A из базиса e в базис f такова, что $\forall v \in V : v = \sum \alpha_i e_i \Rightarrow v = \sum \beta_i f_i$, где верно, что $A \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_n \end{pmatrix}$

1.4 Системы линейных уравнений.

Определение 1.26. Система линейных уравнений $\begin{cases} a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + \dots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} \Leftrightarrow Av = b, v = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$. Как

устроено множество решений:

- \emptyset
- v_0 — единственное решение.
- Решений много \Rightarrow это $v_0 + L := \{v_0 + l | l \in L\}$, где v_0 — какое-то решение, L — линейное подпространство ($L = Ker A$).
 $Av_0 = b; Av_1 = b \Leftrightarrow A(v_1 - v_0) = 0 \Leftrightarrow (v_1 - v_0) \in Ker A$

Определение 1.27. Присоединение матриц. $(A|b) = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} & | & b_1 \\ a_{21} & \dots & a_{2n} & | & b_2 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} & | & b_n \end{pmatrix}$

Теорема 1.28 (Теорема Кронекера-Капелли). Система имеет решение $\Leftrightarrow \text{rank}(A) = \text{rank}(A|b)$.

Доказательство. \Leftarrow : $\text{Im} A = \{Av|v \in F^n\}$; $\text{Im}(A|b) = \{Av + \alpha b|v \in F^n, \alpha \in F\}$; В $\text{Im} A$ есть базис u_1, \dots, u_k ; $u_1, \dots, u_k \in \text{Im}(A|b) \Rightarrow u_1, \dots, u_k$ — базис в $\text{Im}(A|b)$; $A(\sum \beta_i u_i) = \sum \beta_i (Av_i) = \sum \beta_i u_i = b$.
 \Rightarrow : $b = Av_0 \Rightarrow \{Av + \alpha b|v \in F^n, \alpha \in F\} = \{Av|v \in F^n\}$, тк $Av + \alpha b = Av + \alpha(Av_0) = A(v + \alpha v_0) \in \text{Im} A$. \square

Метод 1.29 (Гаусса). Приводит матрицу к виду, в котором понятно, решается она или нет. Можно:

1. Умножить строку на ненулевое число.
2. Переставить две строчки.
3. Заменить строку на сумму ее и какой-то другой.
4. Прибавить ко второй строке α первую.

1.5 Определитель.

Определение 1.30. Матрица — n строк размера m ($v_i = (a_1, \dots, a_m)$). Тогда функция \det — это такая функция $(v_1, \dots, v_n) \xrightarrow{\det} F$ ($\text{char} F \neq 2$), что она:

- Полилинейная: $\det(v_1 + u_1, v_2, \dots, v_n) = \det(v_1, v_2, \dots, v_n) + \det(u_1, v_2, \dots, v_n)$, $\det(\alpha v_1, v_2, \dots, v_n) = \alpha \det(v_1, v_2, \dots, v_n)$.
- Кососимметричная: $\det(v_1, \dots, v_{i-1}, v_j, v_{i+1}, \dots, v_{j-1}, v_i, v_{j+1}, \dots, v_n) = -\det(v_1, \dots, v_n)$.

Свойства:

- Если есть нулевая строка, то $\det A = 0$.
- Если есть две равные (или пропорциональные) строки, то $\det A = 0$ (если $\text{char} F \neq 2$).
- 4-ая операция метода Гаусса не меняет определитель.

Утверждение 1.31. Определитель не более чем один.

Доказательство. Все операции метода Гаусса контролируемо меняют определитель. Тогда есть два варианта, когда мы дошли до конца алгоритма:

1. Нижняя строка 0. Тогда определитель 0. Тогда он и был 0, тк мы только умножаем его. Отсюда следует, что если определитель 0, то матрица не обратима.
2. Все строки не 0. Тогда делаем из матрицы единичную. У нее определитель 1. Идя в обратную сторону мы однозначно восстанавливаем определитель.

\square

Утверждение 1.32. $\det(AB) = \det(A) \cdot \det(B)$.

1.6 Метод Крамера.

Метод 1.33 (Крамера). Дана матрица A размера $n \times n$ с $\det(A) \neq 0$, X — столбец неизвестных (x_1, \dots, x_n) и B — столбец свободных членов (b_1, \dots, b_n) . Тогда решение по методу Крамера выглядит вот так:

Каждый неизвестный x_i вычисляется по формуле $x_i = \frac{\det(A_i)}{\det(A)}$, где $\det(A)$ — определитель основной матрицы, $\det(A_i)$ — определитель матрицы, полученной заменой i -го столбца матрицы A на столбец B .

1.7 Ранговый метод в комбинаторике.

Вершины — $\{0, 1, 2\}^n$. Ребра — соединяем вершину со всеми, которые получаются прибавлением единицы.

1.8 Определенные и полу-определенные матрицы.

Определение 1.34 (Определенная матрица). Квадратная матрица A размера $n \times n$ называется положительно определенной, если для любого ненулевого вектора $x \in R^n$ выполняется условие: $x^T A x > 0$.

Определение 1.35 (Полу-определенная матрица). Квадратная матрица A размера $n \times n$ называется положительно полу-определенной, если для любого вектора $x \in R^n$ выполняется условие: $x^T A x \geq 0$.

Утверждение 1.36. $(AB)^T = B^T A^T$.

Утверждение 1.37. Пусть A — матрица смежности G ; $\det A \equiv^2 \#$ совершенных паросочетаний G .

Пусть в G все степени ≤ 2 ; тогда в G четное число совершенных паросочетаний.

Утверждение 1.38. Пусть S — конечное множество натуральных чисел. $A \subseteq S$ — хорошее, если $\sum_{x \in A} x = m^2$. Тогда $\#$ хороших множеств $= 2^k$.

Утверждение 1.39. Пусть G — связный граф на 100 вершинах. E — его ребра. $A \subseteq E$ — хорошее, если $\forall v \# \{uv \in A\} \leq 2$. $\#$ хороших множеств $= 2^{|E|-100+1}$.

2 Теория типов.

2.1 Основы математической логики. Классическое исчисление высказываний.

Приоритет операций: $\neg \wedge \vee \rightarrow$.

$$f : P \rightarrow \{\text{True}, \text{False}\}. \llbracket \alpha \rrbracket^f = \begin{cases} f(X) & \alpha = X \\ \text{True} & \alpha = \beta \wedge \gamma, \llbracket \beta \rrbracket = \llbracket \gamma \rrbracket = \text{True} \\ \text{True} & \alpha = \beta \vee \gamma, \llbracket \beta \rrbracket = \text{True} / \llbracket \gamma \rrbracket = \text{True} \end{cases}$$

Определение 2.1. α — общезначимое, если при любой $f : \llbracket \alpha \rrbracket^f = \text{True}$. $\models \alpha$.

Аксиомы:

1. $\alpha \rightarrow \beta \rightarrow \alpha$
2. $(\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow (\alpha \rightarrow \beta \rightarrow \gamma) \rightarrow \alpha \rightarrow \gamma$
3. $\alpha \rightarrow \beta \rightarrow \alpha \wedge \beta$
4. $\alpha \wedge \beta \rightarrow \alpha$
5. $\alpha \wedge \beta \rightarrow \beta$
6. $\alpha \rightarrow \alpha \vee \beta$
7. $\beta \rightarrow \alpha \vee \beta$
8. $(\alpha \rightarrow \gamma) \rightarrow (\beta \rightarrow \gamma) \rightarrow \alpha \vee \beta \rightarrow \gamma$
9. $(\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow (\alpha \rightarrow \neg \beta) \rightarrow \neg \alpha$
10. $\neg \neg \alpha \rightarrow \alpha$

Утверждение 2.2. $A \rightarrow A$.

Доказательство. 1. $A \rightarrow A \rightarrow A$

2. $(A \rightarrow A \rightarrow A) \rightarrow (A \rightarrow (A \rightarrow A) \rightarrow A) \rightarrow (A \rightarrow A)$
 $\alpha = A, \beta = A \rightarrow A, \gamma = A$
3. $(A \rightarrow (A \rightarrow A) \rightarrow A) \rightarrow A \rightarrow A$. Modus Ponens из 1 и 2.
4. $A \rightarrow (A \rightarrow A) \rightarrow A$
 $\alpha = A, \beta = A \rightarrow A$
5. $A \rightarrow A$

□

Определение 2.3. $\vdash \alpha$ — есть доказательство α . $\gamma_1, \gamma_2, \dots \vdash \alpha$ — есть доказательство α из $\gamma_1, \gamma_2, \dots$.

Теорема 2.4 (Теорема о дедукции). $\Gamma, \alpha \vdash \beta$ тогда $\Gamma \vdash \alpha \rightarrow \beta$.

Утверждение 2.5. $\vdash \alpha$ тогда $\models \alpha$.

Утверждение 2.6. Если из $\models \alpha$ следует $\vdash \alpha$, то оценка полна. Если из $\vdash \alpha$ следует $\models \alpha$, то оценка корректна.

Доказательство. Доказательство корректности:

Индукция по длине доказательства $\Gamma \vdash \alpha$.

Если α — гипотеза, то очевидно, что следует $\Gamma \models \alpha$.

Если α — аксиома, то нужно проверить все аксиомы. На примере 9 аксиомы:

$$(\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow (\alpha \rightarrow \neg \beta) \rightarrow \neg \alpha$$

Если $\llbracket \alpha \rrbracket = \text{False}$, то True , тк в конце $\neg \alpha$.

Если $\llbracket \alpha \rrbracket = \text{True}$, то либо первая либо вторая скобка — False .

Переход:

Аксиома — понятно, тк она аксиома. Гипотеза — тоже понятно, тк доказана по ИП. Modus Ponens — понятно, тк то, из чего он получен — истинно.

Доказательство полноты:

Используем: $A \vee \neg A$, $(\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow (\neg \alpha \rightarrow \beta) \rightarrow \beta$, и если $\Gamma, \alpha \vdash \beta$ и $\Gamma, \neg \alpha \vdash \beta$, то $\Gamma \vdash \beta$
 fix f : $x_1 := \text{True}$, $x_2 := \text{False}$, $x_3 := \text{False}, \dots$

$$\begin{cases} x_1, x_2, x_3, \dots \vdash \alpha \\ x_1, x_2, \dots, x_n \vdash \alpha \\ x_1, x_2, \dots, \neg x_n \vdash \alpha \\ \vdots \end{cases}$$

$$\models \gamma \models = \begin{cases} \gamma & \llbracket \gamma \rrbracket = \text{True} \\ \neg \gamma & \llbracket \gamma \rrbracket = \text{False} \end{cases} \text{ Это надо, чтобы либо утверждение, либо его отрицание точно были доказуемые.}$$

□

Внимание! Какие-то челюки поменяли 10 аксиому на эту: $\alpha \rightarrow \neg \alpha \rightarrow \beta$.

Новая оценка: $]X \subset \mathbb{R}$. X — открыто, если $\forall x \in X \exists r > 0 : (x - r; x + r) \subset X$. $\text{Int}X = \{x \in X \mid \exists r > 0 (x - r; x + r) \subset X\}$

$$\begin{aligned} \llbracket \alpha \wedge \beta \rrbracket &= \llbracket \alpha \rrbracket \cap \llbracket \beta \rrbracket \\ \llbracket \alpha \vee \beta \rrbracket &= \llbracket \alpha \rrbracket \cup \llbracket \beta \rrbracket \\ \llbracket \alpha \rightarrow \beta \rrbracket &= \text{Int}(\mathbb{R} \setminus \llbracket \alpha \rrbracket \cup \llbracket \beta \rrbracket) \\ \llbracket \neg \alpha \rrbracket &= \text{Int}(\mathbb{R} \setminus \llbracket \alpha \rrbracket) \end{aligned}$$

2.2 Интуиционистское исчисление высказываний. Естественный вывод.

Правила вывода:

1. $\overline{\Gamma, \alpha \vdash \alpha}$
2. $\frac{\Gamma, \alpha \vdash \beta}{\Gamma \vdash \alpha \rightarrow \beta}$
3. $\frac{\Gamma \vdash \alpha \rightarrow \beta \quad \Gamma \vdash \alpha}{\Gamma \vdash \beta}$
4. $\frac{\Gamma \vdash \alpha \quad \Gamma \vdash \beta}{\Gamma \vdash \alpha \wedge \beta}$
5. $\frac{\Gamma \vdash \alpha \wedge \beta}{\Gamma \vdash \alpha}$
6. $\frac{\Gamma \vdash \alpha \wedge \beta}{\Gamma \vdash \beta}$
7. $\frac{\Gamma \vdash \alpha \rightarrow \gamma \quad \Gamma \vdash \beta \rightarrow \gamma \quad \Gamma \vdash \alpha \vee \beta}{\Gamma \vdash \gamma}$
8. $\frac{\Gamma \vdash \alpha}{\Gamma \vdash \alpha \vee \beta}$
9. $\frac{\Gamma \vdash \beta}{\Gamma \vdash \alpha \vee \beta}$
10. $\frac{\Gamma \vdash \perp}{\Gamma \vdash \alpha}$ в ИИВ; $\frac{\Gamma, \alpha \rightarrow \perp \vdash \perp}{\Gamma \vdash \alpha}$ в КИВ

2.3 Исчисление предикатов.

Логические переменные — пропозициональные. Численные — предметные.

Квантор — $\forall a$; функция — $f(a)$; предикат — принимает не логическое выражение, возвращает логическое.

Если φ — функциональный символ, нужно $F\varphi : D^n \rightarrow D$.

Если p — предикатный символ, нужно $Tr : D^n \rightarrow \{\text{True}, \text{False}\}$.

Если x — переменная, то $E(x) \in D$.

$$\llbracket p(\theta_1, \dots, \theta_n) \rrbracket = Tr(\llbracket \theta_1 \rrbracket, \dots, \llbracket \theta_n \rrbracket)$$

$$\llbracket \varphi(\theta_1, \dots, \theta_n) \rrbracket = F\varphi(\llbracket \theta_1 \rrbracket, \dots, \llbracket \theta_n \rrbracket)$$

$$\llbracket \forall x. \alpha \rrbracket = \text{True}, \text{ если для всех } d \in D : E(x) = d, \text{ то } \llbracket \alpha \rrbracket = \text{True}.$$

$\alpha[x := \theta]$ — заменяет все свободные x на θ .

Определение 2.7. θ называется свободным для подстановки в α вместо x , если $\alpha[x := \theta]$ не сделает свободные вхождения в θ связанными.

1. $x \notin FV(\Gamma) \mid \frac{\Gamma \vdash \alpha}{\Gamma \vdash \forall x.\alpha}$
2. Нужна свобода для подстановки $\mid \frac{\Gamma \vdash \forall x.\alpha}{\Gamma \vdash \alpha[x := \theta]}$
3. Нужна свобода для подстановки $\mid \frac{\Gamma \vdash \alpha[x := \theta]}{\Gamma \vdash \exists x.\alpha}$
4. $x \notin FV(\Gamma, \beta) \mid \frac{\Gamma \vdash \exists x.\alpha \quad \Gamma, \alpha \vdash \beta}{\Gamma \vdash \beta}$

Теорема 2.8. Если $\Gamma \vdash \alpha$ в классическом исчислении предикатов, то $\Gamma \models \alpha$ в двоичной оценке для предикатов.

Доказательство. Индукция по длине доказательства.

База.

$$\overline{\Gamma, \alpha \vdash \alpha} \text{ очевидно } \Gamma, \alpha \models \alpha$$

Переход.

$$\frac{\Gamma \vdash \alpha \wedge \beta}{\Gamma \vdash \alpha}. \text{ Есть } \Gamma \models \alpha \wedge \beta, \text{ надо } \Gamma \models \alpha.$$

$$\frac{\Gamma, \alpha \rightarrow \perp \vdash \perp}{\Gamma \vdash \alpha}. \text{ Есть } \Gamma, \alpha \rightarrow \perp \models \perp, \text{ надо } \Gamma \models \alpha.$$

□

2.4 λ — исчисления.

Опр. λ — исчисления — способ описать математику в программировании.

Тезис 1. Функции больше одного аргумента не нужны.

Опр. $\lambda x.P$ — принимает x и делает P .

Опр. $FV(\alpha)$ — множество свободных переменных α .

Опр. θ называется свободным для подстановки в α вместо x , если $\alpha[x := \theta]$ не сделает свободные вхождения в θ связанными.

Опр. $P =_\alpha Q$, если одно из следующего:

- P и Q — одна и та же формула
- $P = A_1 B_1, Q = A_2 B_2; A_1 =_\alpha A_2$ и $B_1 =_\alpha B_2$
- $P = \lambda x.A_1, Q = \lambda y.A_2; A_1[x := t] =_\alpha A_2[y := t]$

С этого момента любое $=$ — это $=_\alpha$.

Опр. $(\lambda x.P)Q \rightarrow_\beta B$ — редекс. $A \rightarrow_\beta B$, если:

- $A = (\lambda x.P)Q, B = P[x := Q]$, есть свобода
- $A = P_1 Q_1, B = P_2 Q_2; (P_1 = P_2 \text{ и } Q_1 \rightarrow_\beta Q_2) \text{ или } (Q_1 = Q_2 \text{ и } P_1 \rightarrow_\beta P_2)$
- $A = \lambda x.P_1, B = \lambda x.P_2; P_1 \rightarrow_\beta P_2$

Опр. $\omega = (\lambda y.yu)(\lambda x.xx)$

Опр. $A \twoheadrightarrow_\beta B$ за несколько (в том числе 0) шагов.

Опр. Нормальный порядок — редуцируем самый левый β — редекс. Аппликативный порядок — из самых вложенных берем левый β — редекс.

Опр. $A \twoheadrightarrow_\beta B$, если:

- $A = B$
- $A = \lambda x.P_1, B = \lambda x.P_2; P_1 \twoheadrightarrow_\beta P_2$
- $A = P_1 Q_2, B = P_2 Q_2; P_1 \twoheadrightarrow_\beta P_2 \text{ и } Q_1 \twoheadrightarrow_\beta Q_2$
- $A = (\lambda x.P_1)Q_1, B = P_2[x := Q_2]; P_1 \twoheadrightarrow_\beta P_2 \text{ и } Q_1 \twoheadrightarrow_\beta Q_2$

Теорема Черча — Россера. Если $A \rightarrow_\beta B$, $A \rightarrow_\beta C$ и $B \neq C$, то существует D , такое что $B \rightarrow_\beta D$ и $C \rightarrow_\beta D$.
Доказательство:

Лемма. Если $P_1 \rightrightarrows_\beta P_2$ и $Q_1 \rightrightarrows_\beta Q_2$, то $P_1[x := Q_1] \rightrightarrows_\beta P_2[x := Q_2]$ — свобода есть.

- Случай $P_1 = P_2$ — ясно.
- Индукция по длине P_1 .
 - $P_1 = A_1 B_1$
 $P_2 = A_2 B_2$
 $A_1 \rightrightarrows_\beta A_2$
 $B_1 \rightrightarrows_\beta B_2$
 $A_1[x := Q_1] \rightrightarrows_\beta A_2[x := Q_2]$
 $B_1[x := Q_1] \rightrightarrows_\beta B_2[x := Q_2]$
 $P_1[x := Q_1] = (A_1[x := Q_1])(B_1[x := Q_1])$
 $P_2[x := Q_2] = (A_2[x := Q_2])(B_2[x := Q_2])$
 $P_1[x := Q_1] \rightrightarrows_\beta P_2[x := Q_2]$
 - $P_1 = \lambda y. A_1$
 $P_2 = \lambda y. A_2$
 $A_1 \rightrightarrows_\beta A_2$
 $A_1[x := Q_1] \rightrightarrows_\beta A_2[x := Q_2]$
 $P_1[x := Q_1] = \lambda y. (A_1[x := Q_1])$
 $P_2[x := Q_2] = \lambda y. (A_2[x := Q_2])$
 $P_1[x := Q_1] \rightrightarrows_\beta P_2[x := Q_2]$
 - $P_1 = (\lambda y. A_1) B_1$
 $P_2 = A_2[y := B_2]$
 $A_1 \rightrightarrows_\beta A_2$
 $B_1 \rightrightarrows_\beta B_2$
 $A_1[x := Q_1] \rightrightarrows_\beta A_2[x := Q_2]$
 $B_1[x := Q_1] \rightrightarrows_\beta B_2[x := Q_2]$
 $(\lambda y. A_1[x := Q_1])(B_1[x := Q_1]) \rightrightarrows_\beta A_2[y := B_2][x := Q_2]$
 $y \in ?FV(Q_2)$, если да, то $y \in FV(Q_1)$
 $y \in FV(A_1)$ — иначе ясно.
 $y \notin FV(Q_2)$
 $A_2[y := B_2][x := Q_2] = A[x := Q_2][y := B_2[x := Q_2]]$
 $y = x$ аналогично

Лемма. Если $P \rightrightarrows_\beta P_1$, $P \rightrightarrows_\beta P_2$ и $P_1 \neq P_2$, то существует P_3 , такое что $P_1 \rightrightarrows_\beta P_3$ и $P_2 \rightrightarrows_\beta P_3$.

Индукция по элементам P .

- $P = P_1 - P_3 = P_2$
- $P = \lambda x. A$, $P_1 = \lambda x. A_1 \Rightarrow P_2 = \lambda x. A_2$. $P_3 = \lambda x. A_3$. $A \rightrightarrows_\beta A_1$, $A \rightrightarrows_\beta A_2$, $A_1 \rightrightarrows_\beta A_3$, $A_2 \rightrightarrows_\beta A_3$
- $P = AB$, $P_1 = A_1 B_1$
 - (I) $P_2 = A_2 B_2$
 $A \rightrightarrows_\beta A_1$, $A \rightrightarrows_\beta A_2$; $B \rightrightarrows_\beta B_1$, $B \rightrightarrows_\beta B_2$.
 $\exists A_3, B_3; P_3 = A_3 B_3$
 - (II) $P = (\lambda x. C) B$, $P_2 = C_2[x := B_2]$, $P_1(\lambda x. C_1) B_1$
 $A \rightrightarrows_\beta A_1$ — тогда $A_1 = \lambda x. C_1$
 $B \rightrightarrows_\beta B_1$, $B \rightrightarrows_\beta B_2$; $C \rightrightarrows_\beta C_1$, $C \rightrightarrows_\beta C_2$
 C_3, B_3 : $C_1 \rightrightarrows_\beta C_3$, $C_2 \rightrightarrows_\beta C_3$; $B_1 \rightrightarrows_\beta B_3$, $B_2 \rightrightarrows_\beta B_3$. $P_3 = C_3[x := B_3]$
- $P = (\lambda x. C) B$, $P_1 = C_1[x := B_1]$
 - (I) $P_2 = A_2 B_2$. (?) $C \rightrightarrows_\beta A_2$, $B \rightrightarrows_\beta B_2$
 $C \rightrightarrows_\beta C_1$, $C \rightrightarrows_\beta C_2$; $B \rightrightarrows_\beta B_1$, $B \rightrightarrows_\beta B_2$
 - (II) $P_2 = C_2[x := B_2]$
 $\exists C_3, B_3$: $C_1 \rightrightarrows_\beta C_3$, $C_2 \rightrightarrows_\beta C_3$; $B_1 \rightrightarrows_\beta B_3$, $B_2 \rightrightarrows_\beta B_3$. $P_3 = C_3[x := B_3]$

$P \rightrightarrows_\beta \dots \rightrightarrows_\beta P_1 \rightrightarrows_\beta \dots \rightrightarrows_\beta P_3$, $P \rightrightarrows_\beta \dots \rightrightarrows_\beta P_2 \rightrightarrows_\beta \dots \rightrightarrows_\beta P_3$
 Двойной параллельный β — редекс \Rightarrow_β

2.5 Просто — типизированное λ — исчисление.

Опр. $\alpha \rightarrow \beta$ — тип функции, которая принимает объект типа α и возвращает объект типа β .

Правила вывода:

1. $\frac{}{\Gamma, x : \alpha \vdash x : \alpha, x \notin \Gamma}$
2. $\frac{\Gamma \vdash P : \alpha \rightarrow \beta \quad \Gamma \vdash Q : \alpha}{\Gamma \vdash PQ : \beta}$
3. $\frac{\Gamma, x : \alpha \vdash P : \beta}{\Gamma \vdash \lambda x. P : \alpha \rightarrow \beta, x \notin \Gamma}$ — по Карри.
 $\frac{\Gamma, x : \alpha \vdash P : \beta}{\Gamma \vdash \lambda x^\alpha. P : \alpha \rightarrow \beta}$ — по Черчу.

Теорема о редукции. Если $A \rightarrow_\beta B$ и $\vdash A : \sigma$, то $\vdash B : \sigma$.

Теорема об ограниченном свойстве распространения типизации. Если $A \rightarrow_\beta B$, $\vdash A : \sigma$ и $\vdash B : \tau$, то $\tau = \sigma$.
Верно только в Черче.

Утв. Полное свойство распространения типизации. $A \rightarrow_\beta B$ и $\vdash B : \sigma$, то $A : \sigma$. Неверно нигде.

Теорема о равносильности исчисления по Карри и по Черчу.

- $\Gamma \vdash P : \alpha$ — Черч, стираем аннотацию и получаем доказуемое в Карри.
- $\Gamma \vdash P : \alpha$ — Карри, то есть способ приписать типовые аннотации и получить доказуемое в Черче.

Теорема. Изоморфизм Карри — Ховард.

2.6 Нормализуемость λ_{\rightarrow} . Система F.

Опр. Выражение называется сильно нормализуемым, если нет способа редуцировать его бесконечно.

Опр. SN — множество всех сильно нормализуемых выражений. $X \subset SN$ насыщенно, если

- Если $m_1, \dots, m_n \in SN$, то $xm_1m_2\dots m_n \in X$
- Если $m_1, \dots, m_n \in SN$, $M \in SN$, N — любое и $N[x := M]m_1, \dots, m_n \in X$, то $(\lambda x. N)mm_1, \dots, m_n \in X$

Лемма. SN — насыщенно.

A, B — множество выражений. $A \rightarrow B = \{X | \forall Y \in A. XY \in B\}$. Если A, B — насыщенные, то $A \rightarrow B$ — насыщенное.

σ — тип. $[\sigma] = \begin{cases} SN & \sigma \text{ — переменная} \\ [\tau_1] \rightarrow [\tau_2] & \sigma = \tau_1 \rightarrow \tau_2 \end{cases}$

$[\alpha \rightarrow \alpha \rightarrow \alpha] = SN \rightarrow SN \rightarrow SN$.

Лемма. $[\sigma]$ — насыщенно из предыдущего.

Опр. ρ из переменных в λ -выражениях — оценка.

Опр. $M[x := \rho(x), y := \rho(xy), \dots] = \llbracket M \rrbracket^\rho$.

Утв. Для любой ρ такой что для всех $x : \tau \in \Gamma$ верно $\rho(x) \in [\tau]$.

Утв. $\Gamma \models M : \sigma$, если выполнено $\llbracket M \rrbracket^\rho \in [\sigma]$

Теорема. Если $\Gamma \vdash M : \sigma$, то $\Gamma \models M : \sigma$.

Доказательство:

Индукция по размеру дерева вывода $\Gamma \vdash M : \sigma$

Опр. Λ — принимает типовую переменную.

Новые правила вывода:

- $\frac{\Gamma \vdash P : \alpha}{\Gamma \vdash \Lambda x. P : \forall x. \alpha, x \notin FV(\Gamma)}$
- $\frac{\Gamma \vdash P : \forall x. \alpha}{\Gamma \vdash P\beta : \alpha[x := \beta]}$ — есть свобода.

2.7 Экзистенциальные типы. Система НМ.

Опр. $\exists p.p \wedge (\nu \wedge p \rightarrow p) \wedge (p \rightarrow \nu \wedge p)$, ν — тип натурального числа. Это стек из программирования (обозначим σ). После квантора существования — набор методов стека.

$$\frac{\Gamma \vdash \sigma[p := \alpha]}{\Gamma \vdash \sigma} \quad \frac{\Gamma \vdash \sigma \quad \Gamma \vdash N : \exists p.p \quad \Gamma, x : \sigma \vdash M : \tau}{\Gamma \vdash N, M : \tau}$$

$$rank\sigma = \begin{cases} 1 & \sigma \text{ без кванторов} \\ \max(rank\tau, 1) & \sigma = \forall x.\tau \\ \max((rank\tau_1) + 1, rank\tau_2) & \sigma = \tau_1 \rightarrow \tau_2 \end{cases}$$

Опр. Тип в НМ — тип в просто-типизированном λ -исчислении. Типовая схема в НМ — тип с поверхностными кванторами в просто-типизированном λ -исчислении. Далее в этой теме: σ — схемы, τ — типы.

Правила вывода в системе НМ:

- $\overline{\Gamma, x : \sigma \vdash x : \sigma}$
- $\frac{\Gamma, x : \tau_1 \vdash P : \tau_2}{\Gamma \vdash \lambda x.P : \tau_1 \rightarrow \tau_2}, x \notin \Gamma$
- $\frac{\Gamma \vdash P : \tau_1 \quad \Gamma \vdash Q : \tau_1 \rightarrow \tau_2}{\Gamma \vdash PQ : \tau_2}$
- $\frac{\Gamma \vdash P : \sigma \quad \Gamma, x : \sigma \vdash Q : \tau}{\Gamma \vdash \text{let } x := P \text{ in } Q : \tau}, x \notin \Gamma$
- $\frac{\Gamma \vdash P : \sigma_1}{\Gamma \vdash P : \sigma_2}, \sigma_1 \sqsubseteq \sigma_2$
- $\frac{\Gamma \vdash P : \sigma}{\Gamma \vdash P : \forall \alpha.\sigma}, \alpha \notin FV(\Gamma)$

Правила вывода эквирекурсивных типов:

- $\frac{\Gamma \vdash P : \mu\alpha.\tau}{\Gamma \vdash P : \tau[\alpha := \mu\alpha.\tau]}$
- $\frac{\Gamma \vdash P : \tau[\alpha := \mu\alpha.\tau]}{\Gamma \vdash P : \mu\alpha.\tau}$

Правила вывода изорекурсивных типов:

- $\frac{\Gamma \vdash \mu\alpha.\tau}{\Gamma \vdash \text{unroll } P : \tau[\alpha := \mu\alpha.\tau]}$
- $\frac{\Gamma \vdash P : \tau[\alpha := \mu\alpha.\tau]}{\Gamma \vdash \text{roll } P : \mu\alpha.\tau}$

2.8 Обобщенная система типов.

Опр. int — тип, \star — род, $\star \rightarrow \star$ — род, \square — сорт.

Правила вывода:

- $\overline{\vdash \star : \square}$
- $\frac{\Gamma \vdash \alpha : \sigma}{\Gamma, x : \alpha \vdash x : \alpha}, x \notin \Gamma$
- $\frac{\Gamma \vdash F : \Pi x^\alpha.\beta \quad \Gamma \vdash \sigma : \alpha}{\Gamma \vdash FG : \beta[x := \sigma]}$
- $\frac{\Gamma \vdash A : \alpha \quad \Gamma \vdash \alpha' : \sigma}{\Gamma \vdash A : \alpha'}, \alpha =_\beta \alpha'$
- $\frac{\Gamma \vdash A : \beta \quad \Gamma \vdash \alpha : \sigma}{\Gamma, x : \alpha \vdash A : \beta}, x \notin \Gamma$

- $\frac{\Gamma \vdash \alpha : \sigma_1 \quad \Gamma, x : \alpha \vdash P : \beta \quad \Gamma, x : \alpha \vdash \beta : \sigma_2}{\Gamma \vdash \lambda x^\alpha. P : \Pi x^\alpha. \beta}, \sigma_1, \sigma_2 \in S \subset \{\langle \star, \square \rangle, \langle \star, \star \rangle, \langle \square, \square \rangle, \langle \square, \star \rangle\}$
- $\frac{\Gamma \vdash \alpha : \sigma_1 \quad \Gamma, x : \alpha \vdash \beta : \sigma_2}{\Gamma \vdash \Pi x^\alpha. \beta : \sigma_2}, \sigma_1, \sigma_2 \in S \subset \{\langle \star, \square \rangle, \langle \star, \star \rangle, \langle \square, \square \rangle, \langle \square, \star \rangle\}$

2.9 Гомотопическая теория типов.

2.10 Иерархия универсумов. $\backslash Prop$ и $\backslash Set$.