1 Последовательность.

$f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$
$f(n) =: f_n$
Опр. Последовательность называется ограниченной сверху, если $\exists M : |f_n| \leqslant M$. Снизу, если $\exists m : f_n \geqslant m$. f_n — ограниченная, если $\exists M : |f_n| \leqslant M \; \forall n \in \mathbb{N}$.
Опр. $M_0 = supf_n$, если M_0 — верхняя грань и $\forall \varepsilon > 0 \; \exists n_0 : f_{n0} > M_0 - \varepsilon$. $m_0 = inff_n$, если m_0 — нижняя грань и $\forall \varepsilon > 0 \; \exists n_0 : f_{n0} < m_0 + \varepsilon$.
Аксиома вещественных чисел. Если множество X ограничено сверху, то $\exists supX$. Если f_n неограничено сверху, то $supf_n =: +\infty$. Если снизу, то $inff_n =: -\infty$.
Опр. f_n — бесконечно большая (бб), если $\forall \varepsilon > 0 \; \exists N = N(\varepsilon) : |f_n| > \frac{1}{\varepsilon} \; \forall n \geqslant N$. f_n — не бб, $\exists \varepsilon > 0 : \forall N \exists n > N : |f_n| \leqslant \frac{1}{\varepsilon}$.
Опр. f_n — бесконечно малая (бм), если $\forall \varepsilon > 0 \; \exists N = N(\varepsilon) : |f_n| < \varepsilon \; \forall n \geqslant N$.
Лемма. f_n — бм $\Rightarrow f_n$ — ограничена.
Доказательство:
Пусть $\varepsilon = 1$, тогда $\exists N : |f_n| \leqslant 1 \; \forall n \geqslant N$
$M := max|f_1|, \dots, |f_{N-1}|, 1$, тогда $|f_n| \leqslant M \; \forall n \in N$.
Лемма.

a) f_n — бб $\Rightarrow \frac{1}{f_n}$ — бм

b) f_n — бм $(f_n \neq 0) \Rightarrow \frac{1}{f_n}$ — бб

Лемма. f_n — неограниченная последовательность, тогда существует бб подпоследовательность f_{nk}.
Доказательство:
$\exists n_1 : |f_{n1} > 1|$,
$\exists n_2 > n_1 : |f_{n2} > 2|$,
$\exists n_3 > n_2 : |f_{n3}| > 3$,
$\vdots$,
$\exists n_1 < n_2 < \dots < n_k < \dots$
$|f_{nk}| > k \Rightarrow f_{nk}$ — бб.
Лемма.

a) бм + бм = бм

b) бм $\cdot$ C = бм

c) бм $\cdot$ бм = бм

d) бб $\cdot$ C = бб, $C \neq 0$

e) бб $\cdot$ бб = бб

1.1 Предел последовательности.

a_n — последовательность.
Опр. $a = lim \; a_n$, если $\forall \varepsilon > 0 \; \exists N : |a_n - a| < \varepsilon \; \forall n \geqslant N$.
Опр. Эпсилон окрестность: $U_\varepsilon(a) := (a - \varepsilon; a + \varepsilon)$. Выколотая эпсилон окрестность: $U^\circ_\varepsilon(a) := U_\varepsilon(a) \backslash \{a\}$.
$\varepsilon_1 < \varepsilon_2 \Rightarrow U_{\varepsilon 1}(a) \subset U_{\varepsilon 2}(a), a \in \overline{\mathbb{R}}$.
Опр. $\mathbb{R} \cup \{\pm\infty\} = \overline{\mathbb{R}}$ — расширенная числовая прямая.
Опр. $\varepsilon > 0 \; U_\varepsilon(+\infty) = (\frac{1}{\varepsilon}; +\infty)$; $U_\varepsilon(-\infty) = (-\infty; -\frac{1}{\varepsilon})$.
$\lim |a_n| = +\infty \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \; \exists N(\varepsilon) : |a_n| > \frac{1}{\varepsilon}$.
Если a_n — бб $\Leftrightarrow \lim |a_n| = +\infty$.
Если a_n — бм $\Leftrightarrow \lim |a_n| = 0$.
Утв. $\lim a_n = a \Leftrightarrow \exists$ бм последовательность d_n, такая что $a_n = a + d_n$.
Утв. Если предел последовательности существует, то он единственный.
Доказательство:
$\exists a < b$ и $a = \lim a_n$, $b = \lim a_n$.
Тогда $\varepsilon := \frac{b-a}{42}$:
$\exists N_1 : a_n \in U_\varepsilon(a) \forall n \geqslant N_1$
$\exists N_2 : a_n \in U_\varepsilon(b) \forall n \geqslant N_2$
$\Rightarrow a_n \in (U_\varepsilon(a) \cap U_\varepsilon(b)) = \emptyset \; \forall n \geqslant \max\{N_1, N_2\}$!?!.

Предельный переход в неравенства. $a_n \leqslant b_n \ \forall n \geqslant N_0$.
Пусть $\exists \lim a_n = a$; $\lim b_n = b$, $a, b \in \overline{\mathbb{R}}$
Тогда $a \leqslant b$.
Доказательство:
Пусть $a > b$. Тогда $\varepsilon := \frac{a-b}{42}$:
$\exists N_1 : a_n \in U_\varepsilon(a) \forall n \geqslant N_1$
$\exists N_2 : a_n \in U_\varepsilon(b) \forall n \geqslant N_2$
$\Rightarrow a_n > b_n \ \forall n \geqslant \max\{N_1, N_2\}$!?!.
Лемма о сжатых последовательностях. Пусть $a_n \leqslant b_n \leqslant c_n \ \forall n \geqslant N_0$ и $\exists \lim a_n = \lim c_n = a \in \overline{\mathbb{R}}$, тогда $\exists \lim b_n = a$.
Доказательство:
$\varepsilon > 0$:
$\exists \ a_n \in U_\varepsilon, \ n \geqslant N_1$
$\exists \ c_n \in U_\varepsilon, \ n \geqslant N_2$
$\Rightarrow b_n \in U_\varepsilon : \forall n \geqslant \{N_1, N_2, N_0\} =: N \Rightarrow a = \lim b_n$ по определению.
Лемма об отделимости от нуля. Пусть $\exists \lim a_n = a > 0$. Тогда $\exists \ N : a_n > \frac{a}{2} > 0, \forall n \geqslant N$.
Следствие. Если $\lim a_n \neq 0 \Rightarrow \frac{1}{a_n}$ ограничена ($a_n \neq 0$).
Доказательство:
$\lim a_n = a > 0$
$\exists N_1 : a_n > \frac{a}{2} \Rightarrow 0 < \frac{1}{a_n} < \frac{2}{a} \ \forall n \geqslant N_1$
$\min\{a_1, \ldots, a_{N-1}, \frac{a}{2}\} \leqslant \frac{1}{a_n} \leqslant \max\{a_1, \ldots, a_{N-1}, \frac{2}{a}\}$
Теорема. Арифметические свойства предела. Пусть $\lim a_n = a$, $\lim b_n = b$; $a, b \in \overline{\mathbb{R}}$. Тогда:

1. $\lim(a_n + b_n) = a + b$, кроме случаев $+\infty + (-\infty)$, $-\infty + (+\infty)$
2. $\lim(ka_n) = ka$, кроме случая $0 \cdot (\pm\infty)$
3. $\lim(a_n \cdot b_n) = ab$, кроме случая $0(\pm\infty)$
4. $\lim \frac{a_n}{b_n} = \frac{a}{b}$, кроме случаев $\frac{0}{0}$, $\frac{\infty}{\infty}$

Доказательство:
$a, b \in \mathbb{R}$
$a_n = a + \alpha_n$, $b_n = b + \beta_n$; α_n, β_n — бм.

1. $a_n + b_n = (a + b) + (\alpha_n + \beta_n) \Leftrightarrow \lim(a_n + b_n) = a + b$.
2. Аналогично.
3. $a_n b_n = (a + \alpha_n)(b + \beta_n) = ab + \alpha_n b + \beta_n a + \alpha_n + \beta_n$
4. Если $b \neq 0$ $\frac{1}{b_n}$ — ограниченна
   $\frac{a_n}{b_n} - \frac{a}{b} = \frac{a+\alpha_n}{b+\beta_n} - \frac{a}{b} = \frac{\alpha_n b - \beta_n a}{b_n b} = \frac{1}{b} \cdot \frac{1}{b_n} \cdot (\alpha_n b - \beta_n a)$
   Если $b = 0 \Rightarrow b_n$ бм $\Rightarrow \frac{1}{b_n}$ — бб $\Rightarrow a_n \cdot \frac{1}{b_n}$ = ограниченная бб