

# Содержание

<b>1</b>	<b>Последовательность.</b>	<b>2</b>
1.1	Предел последовательности. . . . .	2
<b>2</b>	<b>Возведение в вещественную степень.</b>	<b>5</b>
<b>3</b>	<b>Предел и непрерывность.</b>	<b>6</b>
3.1	Замечательные пределы. . . . .	8
<b>4</b>	<b><math>\bar{o}</math> и <math>\underline{O}</math>.</b>	<b>9</b>
4.1	Асимптотические равенства. . . . .	9
<b>5</b>	<b>Функции, непрерывные на отрезке.</b>	<b>10</b>
5.1	Первая теорема Вейерштрасса. . . . .	10
5.2	Вторая Теорема Вейерштрасса. . . . .	10
5.3	Теорема Больцано-Коши. . . . .	10
5.4	Третья Теорема Вейерштрасса. . . . .	10
5.5	Равномерная непрерывность. . . . .	10
<b>6</b>	<b>Дифференциальное исчисление.</b>	<b>11</b>
6.1	Правила дифференцирования. . . . .	11
6.2	Выпуклость. . . . .	12
6.3	Вторая производная. . . . .	15
6.3.1	Многочлен Тейлора. . . . .	15
6.3.2	Формула Тейлора. . . . .	15
6.3.3	Теорема Ферма. . . . .	15
6.3.4	Немного определений. . . . .	16
6.3.5	Теорема Ролля. . . . .	16
6.3.6	Теорема Коши. . . . .	16
6.3.7	Теорема Лагранжа. . . . .	16
6.3.8	Правило Лопиталя. . . . .	17
6.3.9	Утверждения. . . . .	18
6.3.10	Применение Тейлора. . . . .	18

# 1 Последовательность.

$$f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$$
$$f(n) =: f_n$$

**Определение 1.1.** Последовательность называется ограниченной сверху, если  $\exists M : |f_n| \leq M$ . Снизу, если  $\exists m : f_n \geq m$ .  $f_n$  — ограниченная, если ограничена сверху и снизу.

**Определение 1.2.**  $M_0 = \sup f_n$ , если  $M_0$  — верхняя грань и  $\forall \varepsilon > 0 \exists n_0 : f_{n_0} > M_0 - \varepsilon$ .  $m_0 = \inf f_n$ , если  $m_0$  — нижняя грань и  $\forall \varepsilon > 0 \exists n_0 : f_{n_0} < m_0 + \varepsilon$ .

**Аксиома 1.1** (Вещественных чисел). Если множество  $X$  ограничено сверху, то  $\exists \sup X$ . Если  $f_n$  неограничено сверху, то  $\sup f_n =: +\infty$ . Если снизу, то  $\inf f_n =: -\infty$ .

**Определение 1.3.**  $f_n$  — бесконечно большая (бб), если  $\forall \varepsilon > 0 \exists N = N(\varepsilon) : |f_n| > \frac{1}{\varepsilon} \forall n \geq N$ .  $f_n$  — не бб,  $\exists \varepsilon > 0 : \forall N \exists n > N : |f_n| \leq \frac{1}{\varepsilon}$ .

**Определение 1.4.**  $f_n$  — бесконечно малая (бм), если  $\forall \varepsilon > 0 \exists N = N(\varepsilon) : |f_n| < \varepsilon \forall n \geq N$ .

**Лемма 1.1.**  $f_n$  — бм  $\Rightarrow f_n$  — ограничена.

*Доказательство.* Пусть  $\varepsilon = 1$ , тогда  $\exists N : |f_n| \leq 1 \forall n \geq N$ .  
 $M := \max\{|f_1|, \dots, |f_{N-1}|, 1\}$ , тогда  $|f_n| \leq M \forall n \in \mathbb{N}$ . □

**Лемма 1.2.** а)  $f_n$  — бб  $\Rightarrow \frac{1}{f_n}$  — бм

б)  $f_n$  — бм ( $f_n \neq 0$ )  $\Rightarrow \frac{1}{f_n}$  — бб

**Лемма 1.3.**  $f_n$  — неограниченная последовательность, тогда существует бб подпоследовательность  $f_{n_k}$ .

*Доказательство.*  $\exists n_1 : |f_{n_1}| > 1$ ,  
 $\exists n_2 > n_1 : |f_{n_2}| > 2$ ,  
 $\exists n_3 > n_2 : |f_{n_3}| > 3$ ,  
 $\vdots$ ,  
 $\exists n_1 < n_2 < \dots < n_k < \dots$   
 $|f_{n_k}| > k \Rightarrow f_{n_k}$  — бб. □

**Лемма 1.4.** а) бм + бм = бм

б) бм  $\cdot$  C = бм

с) бм  $\cdot$  бм = бм

д) бб  $\cdot$  C = бб, C  $\neq 0$

е) бб  $\cdot$  бб = бб

## 1.1 Предел последовательности.

$a_n$  — последовательность.

**Определение 1.5.**  $a = \lim a_n$ , если  $\forall \varepsilon > 0 \exists N : |a_n - a| < \varepsilon \forall n \geq N$ .

**Определение 1.6.** Эпсилон окрестность:  $U_\varepsilon(a) := (a - \varepsilon; a + \varepsilon)$ . Выколотая эпсилон окрестность:  $\mathring{U}_\varepsilon(a) := U_\varepsilon(a) \setminus \{a\}$ .

$$\varepsilon_1 < \varepsilon_2 \Rightarrow U_{\varepsilon_1}(a) \subset U_{\varepsilon_2}(a), a \in \overline{\mathbb{R}}.$$

**Определение 1.7.**  $\mathbb{R} \cup \{\pm\infty\} = \overline{\mathbb{R}}$  — расширенная числовая прямая.

**Определение 1.8.**  $\varepsilon > 0$   $U_\varepsilon(+\infty) = (\frac{1}{\varepsilon}; +\infty)$ ;  $U_\varepsilon(-\infty) = (-\infty; -\frac{1}{\varepsilon})$ .

$$\lim |a_n| = +\infty \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists N(\varepsilon) : |a_n| > \frac{1}{\varepsilon}.$$

$$\text{Если } a_n \text{ — бб} \Leftrightarrow \lim |a_n| = +\infty.$$

$$\text{Если } a_n \text{ — бм} \Leftrightarrow \lim |a_n| = 0.$$

**Утверждение 1.1.**  $\lim a_n = a \Leftrightarrow \exists$  бм последовательность  $d_n$ , такая что  $a_n = a + d_n$ .

**Утверждение 1.2.** Если предел последовательности существует, то он единственный.

*Доказательство.*  $\exists a < b$  и  $a = \lim a_n, b = \lim a_n$ . Тогда  $\varepsilon := \frac{b-a}{42}$  :

$$\exists N_1 : a_n \in U_\varepsilon(a) \forall n \geq N_1$$

$$\exists N_2 : a_n \in U_\varepsilon(b) \forall n \geq N_2$$

$$\Rightarrow a_n \in (U_\varepsilon(a) \cap U_\varepsilon(b)) = \emptyset \forall n \geq \max\{N_1, N_2\}!?!.$$

□

**Лемма 1.5** (Предельный переход в неравенства).  $a_n \leq b_n \forall n \geq N_0$ . Пусть  $\exists \lim a_n = a; \lim b_n = b, a, b \in \overline{\mathbb{R}}$ . Тогда  $a \leq b$ .

*Доказательство.* Пусть  $a > b$ . Тогда  $\varepsilon := \frac{a-b}{42}$  :

$$\exists N_1 : a_n \in U_\varepsilon(a) \forall n \geq N_1$$

$$\exists N_2 : a_n \in U_\varepsilon(b) \forall n \geq N_2$$

$$\Rightarrow a_n > b_n \forall n \geq \max\{N_1, N_2\}!?!.$$

□

**Лемма 1.6** (О сжатой последовательности). Пусть  $a_n \leq b_n \leq c_n \forall n \geq N_0$  и  $\exists \lim a_n = \lim c_n = a \in \overline{\mathbb{R}}$ , тогда  $\exists \lim b_n = a$ .

*Доказательство.*  $\varepsilon > 0$  :

$$\exists a_n \in U_\varepsilon, n \geq N_1$$

$$\exists c_n \in U_\varepsilon, n \geq N_2$$

$$\Rightarrow b_n \in U_\varepsilon : \forall n \geq \{N_1, N_2, N_0\} =: N \Rightarrow a = \lim b_n \text{ по определению.}$$

□

**Лемма 1.7** (Об отделимости от нуля). Пусть  $\exists \lim a_n = a > 0$ . Тогда  $\exists N : a_n > \frac{a}{2} > 0, \forall n \geq N$ .

*Следствие.* Если  $\lim a_n \neq 0 \Rightarrow \frac{1}{a_n}$  ограничена ( $a_n \neq 0$ ).

*Доказательство.*  $\lim a_n = a > 0$

$$\exists N_1 : a_n > \frac{a}{2} \Rightarrow 0 < \frac{1}{a_n} < \frac{2}{a} \forall n \geq N_1$$

$$\min\{a_1, \dots, a_{N-1}, \frac{a}{2}\} \leq \frac{1}{a_n} \leq \max\{a_1, \dots, a_{N-1}, \frac{2}{a}\}$$

□

**Теорема 1.1** (Арифметические свойства предела). Пусть  $\lim a_n = a, \lim b_n = b; a, b \in \overline{\mathbb{R}}$ . Тогда:

$$1. \lim(a_n + b_n) = a + b, \text{ кроме случаев } +\infty + (-\infty), -\infty + (+\infty)$$

$$2. \lim(ka_n) = ka, \text{ кроме случая } 0 \cdot (\pm\infty)$$

$$3. \lim(a_n \cdot b_n) = ab, \text{ кроме случая } 0(\pm\infty)$$

$$4. \lim \frac{a_n}{b_n} = \frac{a}{b}, \text{ кроме случаев } \frac{0}{0}, \frac{\infty}{\infty}$$

*Доказательство.*  $a, b \in \mathbb{R}$ .  $a_n = a + \alpha_n, b_n = b + \beta_n; \alpha_n, \beta_n \text{ — бм.}$

$$1. a_n + b_n = (a + b) + (\alpha_n + \beta_n) \Leftrightarrow \lim(a_n + b_n) = a + b.$$

2. Аналогично.

$$3. a_n b_n = (a + \alpha_n)(b + \beta_n) = ab + \alpha_n b + \beta_n a + \alpha_n \beta_n$$

4. Если  $b \neq 0$   $\frac{1}{b_n}$  — ограничена

$$\frac{a_n}{b_n} - \frac{a}{b} = \frac{a + \alpha_n}{b + \beta_n} - \frac{a}{b} = \frac{\alpha_n b - \beta_n a}{b_n b} = \frac{1}{b} \cdot \frac{1}{b_n} \cdot (\alpha_n b - \beta_n a)$$

Если  $b = 0 \Rightarrow b_n \neq 0 \Rightarrow \frac{1}{b_n} \neq 0 \Rightarrow a_n \cdot \frac{1}{b_n} =$  ограниченная бб

□

**Определение 1.9.** Линейное пространство — множество, сумма двух элементов которого лежит в этом множестве и элемент с коэффициентом лежит в этом множестве.

**Определение 1.10.** Последовательность называется возвратной, если  $a_n = \beta_{n-1}a_{n-1} + \beta_{n-2}a_{n-2} + \dots + \beta_{n-k}a_{n-k}$ ;  $\beta_i$  — фиксированные коэффициенты.

$a_n^{(1)}, a_n^{(2)} \Rightarrow \forall \lambda, \mu \in \mathbb{R} \lambda a_n^{(1)} + \mu a_n^{(2)}$  тоже удовлетворяет (x).

$$a_n := t^n$$

$$t^k = \beta_{n-1}t^{k-1} + \dots + \beta_{n-k}$$

$t_0$  — простой корень, то  $t_0^n$

$t_0$  — корень (m)  $\Rightarrow t_0^n; nt_0^n; n^2 t_0^n; \dots; n^{m-1} t_0^n$

**Теорема 1.2.** 1. Пусть  $a_n$  возрастает и ограничена сверху. Тогда  $\exists \lim a_n = \sup a_n$

2. Пусть  $a_n$  убывает и ограничена снизу. Тогда  $\exists \lim a_n = \inf a_n$

*Доказательство.* fix  $\varepsilon > 0$ . Так как  $a_n$  — ограничена, то  $\exists M \sup a_n \in \mathbb{R}$ ; И  $\exists N : a_N > M - \varepsilon$ .

Тогда  $\begin{cases} a_n \geq M - \varepsilon \\ a_n \leq M < M + \varepsilon \end{cases} \quad \forall n \geq N, \text{ так как } a_n \uparrow \Rightarrow \exists N : |a_n - M| < \varepsilon \forall n \geq N \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = M$  по определению. □

**Определение 1.11.** Найти предел последовательности  $a_n = (1 + \frac{1}{n})^n$ .

$$b_n = (1 + \frac{1}{n})^{n+1}; b_1 = 4, b_2 = 3, \dots b_n \downarrow$$

$$b_n \geq 1$$

Докажем, что  $b_n$  убывает.

$$\frac{b_n}{b_{n+1}} = \frac{(\frac{n+1}{n})^{n+1}}{(\frac{n+2}{n+1})^{n+2}} = \frac{n+1}{n} \cdot \frac{n+1}{n+2} \cdot \frac{n+1}{n+2} = \frac{n+1}{n+2} \cdot \frac{n+1}{n+2} \cdot \frac{n+1}{n+2} = \frac{n+1}{n+2} \cdot \underbrace{\left(1 + \frac{1}{n^2+2n}\right)^{n+1}}_{\text{Неравенство Бернулли}} > \frac{n+1}{n+2}.$$

$$\left(1 + \frac{n+1}{n^2+2n}\right) = \frac{(n+1)(n^2+3n+1)}{(n+2)(n^2+2n)} = \frac{n^3+4n^2+4n+1}{n^3+4n^2+4n} > 1.$$

$$a_n = \frac{b_n}{(1 + \frac{1}{n})}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b_n}{1 + \frac{1}{n}} = \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} b_n}{\lim_{n \rightarrow \infty} (1 + \frac{1}{n})} = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n - \text{существует.}$$

$$e := \lim_{n \rightarrow \infty} (1 + \frac{1}{n})^n \approx 2.718281828459045\dots$$

**Теорема 1.3** (Больцано-Вейерштрасса). Пусть последовательность  $a_n$  ограничена. Тогда существует сходящаяся подпоследовательность.

*Доказательство.*  $|a_n| \leq M$

$[-M = \alpha_1; M = \beta_1]$ .  $\alpha_2$  — середина.  $a_1 = x_1 \in [\alpha_1; \alpha_2]$ .

$[\alpha_2; \beta_2]$ .  $\beta_3$  — середина.  $x_2 = a_{\min n} \in [\alpha_2; \beta_3]$ .

И тд.

$\alpha_k$  неубывающая и ограниченная сверху.  $\exists \lim \alpha_k = \alpha$ .  $\beta_k$  неубывающая и ограниченная сверху.

$\exists \lim \beta_k = \beta$ .

$$\beta - \alpha = \lim_{k \rightarrow \infty} (\beta_k - \alpha_k) = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{2M}{2^{k-1}} = 0.$$

По построению  $x_k$  — подпоследовательность и  $\alpha_k \leq x_k \leq \beta_k \Rightarrow \exists \lim x_k$ . □

**Определение 1.12.** Последовательность называется фундаментальной (или последовательностью Коши), если  $\forall \varepsilon > 0 \exists N(\varepsilon): |a_n - a_k| < \varepsilon \forall n, k \geq N$ .

**Утверждение 1.3.** Пусть  $\exists \lim a_n = a \in \mathbb{R}$ . Тогда  $\{a_n\}$  фундаментальная.

*Доказательство.* fix  $\varepsilon > 0 \exists N: |a_n - a| < \frac{\varepsilon}{2} \forall n \geq N$ . Тогда  $\forall n, k \geq N |a_n - a_k| = |(a_n - a) + (a - a_k)| \leq |a_n - a| + |a_k - a| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$ .  $\square$

**Теорема 1.4** (Коши). Пусть  $\{a_n\}$  фундаментальная последовательность. Тогда  $\exists \lim a_n$ .

*Доказательство.* 1) (!)  $\{a_n\}$  ограничена.

$$\varepsilon = 1: \exists N: |a_n - a_k| \leq \varepsilon \forall n, k \geq N \Rightarrow a_k \in [a_{N-1}; a_{N+1}] \forall k \geq N$$

$$M = \max\{|a_1|, |a_2|, \dots, |a_{N+1}|\} \Rightarrow |a_n| \leq M \forall n.$$

2) Тогда по теореме Вейерштрасса  $\exists a_{n_k}$  — подпоследовательность;  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_{n_k} = a$ .

3) fix  $\varepsilon > 0$ .  $\exists N_1: |a_{n_k} - a| < \frac{\varepsilon}{2} \forall n_k \geq N_1$

$$\exists N_2: |a_m - a_n| < \frac{\varepsilon}{2} \forall m, n \geq N_2$$

Пусть  $n \geq \max\{N_1, N_2\} \exists n_k \geq m$ .

$$|a_m - a| = |(a_m - a_{n_k}) + (a_{n_k} - a)| \leq |a_m - a_{n_k}| + |a_{n_k} - a| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \Rightarrow a = \lim_{m \rightarrow \infty} a_m.$$

$\square$

## 2 Возведение в вещественную степень.

$n \in \mathbb{N}; x^n = x \cdot x \cdot \dots \cdot x, n \text{ раз.}$

$$x^{-n} = \frac{1}{x^n}, x \neq 0$$

$$x^0 := 1$$

$$\sqrt[n]{x} = x^{\frac{1}{n}}$$

$x^p, p \in \mathbb{Q}, x \geq 0 (p > 0) \text{ или } x > 0 (p \geq 0)$

fix  $a > 0, x \in \mathbb{R}$

$$a^x := \lim_{n \rightarrow \infty} a^{x_n}, \text{ где } \{x_n\} \text{ последовательность, такая что } x_n \in \mathbb{Q}, \lim_{n \rightarrow \infty} x_n := x.$$

Корректность определения.

1.  $x \in \mathbb{Q}$ . Докажем, что  $a^x$  совпадает со старым определением.

$$x \in \mathbb{Q}, \text{ берем } x_n = x \Rightarrow a^x = a^x$$

2. Берем произвольную последовательность  $\{x_n\}, x_n \rightarrow x \Rightarrow x_n$  — фундаментальная последовательность.

fix  $\varepsilon > 0 |a^{x_n} - a^{x_k}| = a^{x_n} |1 - a^{x_k - x_n}|$ . Сходится. Значит ограничена. Тогда  $a^{x_n}$  ограничена. Тогда  $a^{x_n} |1 - a^{x_k - x_n}| \leq M \cdot |1 - a^{x_k - x_n}|$ .

$$\exists N: |a^{\frac{1}{m}} - 1| < \frac{M}{\varepsilon} \forall m \geq N \Rightarrow |a^{\frac{1}{n}} - 1| < \frac{M}{\varepsilon} \Rightarrow \exists N_0: |x_n - x_k| < \frac{1}{N} \forall n, k \geq N$$

$M \cdot |1 - a^{x_k - x_n}| < M \cdot \frac{2}{M} \forall n, k \geq N_0 \Rightarrow a^{x_n}$  образует фундаментальную последовательность  $\Rightarrow$  (по теореме Коши)  $\exists \lim_{n \rightarrow \infty} a^{x_n}$

3.  $x_n \rightarrow x, y_m \rightarrow x, x_n, y_m \in \mathbb{Q}$

$$\exists a = \lim a^{x_n}; \alpha = \lim a^{y_m}$$

$$(a - \alpha) = \lim_{n \rightarrow \infty} (a^{x_n} - a^{y_m}) = \lim_{n \rightarrow \infty} a^{x_n} (1 - a^{x_n - y_m}) = 0$$

$$\lim (y_n - x_n) = x - x = 0$$

Свойства:

$$1. a^x \cdot a^y = a^{x+y}$$

Пусть  $x_n \rightarrow x, y_n \rightarrow y; x_n, y_n \in \mathbb{Q}$

$$a^{x_n} \cdot a^{y_n} = a^{x_n+y_n}$$

$$a^x \cdot a^y = \lim a^{x_n} \cdot \lim a^{y_n} = \lim a^{x_n} \cdot a^{y_n} = \lim a^{x_n+y_n} = a^{x+y}$$

$$2. (a^x)^y = a^{xy}$$

Пусть  $x_n \rightarrow x, y_n \rightarrow y; x_n, y_n \in \mathbb{Q}$

$$x_n y_n \rightarrow xy$$

$$\lim_{m \rightarrow \infty} (\lim_{n \rightarrow \infty} a^{x_n})^{y_m} = \lim_{n \rightarrow \infty} a^{x_n y_n}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (a^x)^{y_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} a^{x y_n}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |b^{y_n} - a^{x y_n}| = 0, \text{ где } b = a^x$$

$$\exists N : |a^{x_n} - b| < \varepsilon \quad \forall n \geq N$$

$$b - \varepsilon < a^{x_n} < b + \varepsilon$$

$$1 - \frac{\varepsilon}{b} < \frac{a^{x_n}}{b} < 1 + \frac{\varepsilon}{b} \quad \uparrow^{y_n}, y_n > 0, \text{ для } < 0 \text{ аналогично}$$

$$(1 - \frac{\varepsilon}{b})^{y_n} < (\frac{a^{x_n}}{b})^{y_n} < (1 + \frac{\varepsilon}{b})^{y_n}$$

$$1 - \frac{y_n \varepsilon}{b} < \frac{a^{x_n y_n}}{b^{y_n}} < 1 + \frac{y_n \varepsilon}{b}$$

$$\Rightarrow |\frac{a^{x_n y_n}}{b^{y_n}} - 1| \leq \frac{|y_n|}{b} \varepsilon$$

$$|a^{x_n y_n} - b^{y_n}| < \frac{|y_n|}{b} \cdot b^{y_n} \varepsilon \leq M \varepsilon \quad \forall n \geq N$$

$$\Rightarrow \lim |b^{y_n} - a^{x_n y_n}| = 0$$

fix  $a > 0, a \neq 1$

$y = a^x, x \in \mathbb{R}$

**Определение 2.1.**  $f(x)$  — возрастающая на  $X$ , если  $\forall x_1, x_2 \in X \quad x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$ .  $f(x)$  — убывающая, если  $\leq$ .

**Утверждение 2.1.** При  $a > 1$   $f(x) = a^x$  — возрастает на  $\mathbb{R}$ ; При  $0 < a, < 1$   $f(x) = a^x$  — убывает на  $\mathbb{R}$ .

Пусть  $x < \xi, x_n \rightarrow x, \xi_n \rightarrow \xi$

$x < x_0 < \xi_0 < \xi$  и  $x_0$  не в окрестности  $x$  и аналогично  $\xi$ .

$\forall n \geq N$

$$x_n < x_0 < \xi_0 < \xi$$

$$\text{Тогда } a^{x_n} < a^{x_0} < a^{\xi_0} < a^{\xi_n}$$

$$a^x \leq a^{x_0} < a^{\xi_0} \leq a^\xi \Rightarrow a^x < a^\xi$$

$$0 < a < 1$$

$$a^x = (\frac{1}{a})^{-x}; a^\xi = (\frac{1}{a})^{-\xi}$$

$$x < \xi \Rightarrow -x > -\xi \quad (\frac{1}{a})^{-x} > (\frac{1}{a})^{-\xi} \Rightarrow a^x > a^\xi$$

### 3 Предел и непрерывность.

**Определение 3.1.** Предельная точка  $x_0$  области  $D$  — такая точка, что  $\forall \varepsilon > 0 \quad \dot{U}_\varepsilon(x_0) \cap D \neq \emptyset$ . Множество предельных точек множества  $D$  — называется замыкание  $D$ , обозначается  $\overline{D}$ .

$f : D \rightarrow \mathbb{R}; D \subset \mathbb{R}$ . Пусть  $x_0$  — предельная точка  $D$ .

**Определение 3.2** (По Гейне). Если  $\forall$  последовательности  $x_n \rightarrow x_0; x_n \neq x_0 \exists \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = a$ , то говорят, что  $\exists \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = a$ .

**Определение 3.3.**  $f$  непрерывна в точке  $x_0 \in D$ , если  $\exists \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$ .

**Заметка 3.1.** Функция не непрерывна:

1.  $\lim_{x \rightarrow x_0} \exists$ , но  $\neq f(x_0)$  — устранимый разрыв.
2.  $\lim_{x \rightarrow x_0} \nexists$  — неустранимый разрыв.

(a)  $\lim_{x \rightarrow x_0-0} f(x) = a$ ,  $\lim_{x \rightarrow x_0+0} f(x) = b$ ,  $a, b \in \mathbb{R}$  — разрыв I рода или скачок.

(b) Разрыв второго рода или существенная особенность.

**Определение 3.4** (По Коши).  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = a$ , если  $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0: f(x) \subset U_\varepsilon(a) \forall x \in \mathring{U}_\delta(x_0) \cap D(f)$ .

**Утверждение 3.1.** Определения по Коши и по Гейне равносильны.

*Доказательство.* Доказательство Коши  $\Rightarrow$  Гейне.

Известно, что  $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0: f(x) \in U_\varepsilon(a) \forall x \in \mathring{U}_\delta(x_0)$ .

Берем произвольную  $x_n \rightarrow x_0$ : fix  $\varepsilon > 0 \Rightarrow \exists \delta$ , такое что выполнено  $f(x) \in U_\varepsilon(a) \forall x \in \mathring{U}_\delta(x_0)$  и  $\exists N: x_n \in U_\delta(x_0) \forall n \geq N \Rightarrow \exists N: \forall n \geq N x_n \in \mathring{U}_\delta(x_0) \Rightarrow f(x_n) \in U_\varepsilon(a)$ .

Те  $\forall \varepsilon > 0 \exists N: \forall n \geq N f(x_n) \in U_\varepsilon(a)$ , те  $a = \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n)$

Доказательство не Коши  $\Rightarrow$  не Гейне.

Нет предела по Коши. fix  $a: \exists \varepsilon: \forall \delta > 0. \exists \tilde{x} \in \mathring{U}_\delta(x_0): f(\tilde{x}) \notin U_\varepsilon(a) \Rightarrow a$  не является пределом по Гейне?

От противного.  $a = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$  по Гейне.

$\delta_n = \frac{1}{n} \exists \tilde{x}_n \in \mathring{U}_{\frac{1}{n}}(x_0)$  и  $f(\tilde{x}_n) \notin U_{\frac{1}{n}}(a) \Rightarrow \tilde{x}_n \rightarrow x_0, \tilde{x}_n \neq x_0$ , но  $\lim_{n \rightarrow \infty} f(\tilde{x}_n) \neq a$

□

**Утверждение 3.2.**  $f(x)$  бесконечно малая в точке  $x_0$ , если  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0$ .

**Утверждение 3.3.**  $f(x)$  бесконечно большая в точке  $x_0$ , если  $\lim_{x \rightarrow x_0} |f(x)| = +\infty$ .

**Лемма 3.1** (О двух милиционерах). Пусть  $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$  в некоторой окрестности точки  $x_0$  (передельная точка  $D(f), D(g), D(h)$ ). Если  $\exists \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} h(x) = a$ , то  $\exists \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = a$ .

**Лемма 3.2** (Предельный переход в неравенства). Пусть  $f(x) \leq g(x)$  в некоторой окрестности точки  $x_0$  (передельная точка  $D(f), D(g)$ ). Если  $\exists \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = a; \exists \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = b$ , то  $a \leq b$ .

**Лемма 3.3** (Об ограниченности). Если  $\exists \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = a \in \mathbb{R}$ . Тогда  $f$  ограничена в нектором  $\mathring{U}(x_0)$ .

*Доказательство.*  $\varepsilon = 1: \exists \delta > 0: |f(x) - a| < 1 \forall x \in \mathring{U}_\delta(x_0) \Rightarrow |f(x)| \leq |a| + 1 \forall x \in \mathring{U}_\delta(x_0)$  □

**Лемма 3.4** (Об отделимости от нуля). Если  $\exists \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = a > 0$ . Тогда  $\inf f(x) > 0$  в некоторой  $\mathring{U}(x_0)$  ( $f$  отделима от нуля).

*Доказательство.*  $\varepsilon = \frac{a}{42}: \exists \delta < \frac{a}{42} \forall x \in \mathring{U}_\delta(x_0) \Rightarrow f(x) \geq \frac{41}{42}a > 0 \forall x \in \mathring{U}_\delta(x_0) \Rightarrow \inf f(x) \geq \frac{41}{42}a > 0$ . □

**Следствие 3.1.** Если  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \neq 0$ , то  $\frac{1}{f(x)}$  ограничена в некоторой  $\mathring{U}(x_0)$ .

**Определение 3.5.**  $x^\alpha, \alpha \in \mathbb{R}; a^x; \log_a x; \sin, \cos, \operatorname{tg}, \arcsin, \arccos, \operatorname{arctg}$  — основные элементарные функции.

**Определение 3.6.** Функция называется элементарной, если она получается арифметическими операциями или композицией конечного числа основных элементарных функций.

**Утверждение 3.4.** Любая элементарная функция непрерывна.

**Теорема 3.1** (Теорема о пределе композиций).  $f : X \rightarrow Y; g : Y \rightarrow Z, x_0$  — предельная точка множества  $X, y_0$  — предельная точка множества  $Y. \exists \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = y_0, \exists \lim_{y \rightarrow y_0} g(y) = g(y_0) = a$ . Тогда  $\exists \lim_{x \rightarrow x_0} g(f(x)) = a$ .

*Доказательство.*  $\forall x \in \mathring{U}_\delta(x_0) \Rightarrow g(f(x)) \in U_\varepsilon(a)$   
 $a = \lim_{y \rightarrow y_0} g(y) \Rightarrow \exists \varepsilon_1 > 0: y \in U_{\varepsilon_1}(y_0) \Rightarrow g(y) \in U_\varepsilon(g(y_0))$   
 $\exists \delta > 0: x \in \mathring{U}_\delta(x_0) \Rightarrow f(x) \in U_{\varepsilon_1}(y_0) \Rightarrow g(f(x)) \in U_\varepsilon(g(y_0))$  □

**Теорема 3.2** (Непрерывности обратной функции). Пусть  $f$  непрерывная биекция на  $\langle a; b \rangle$ . Тогда  $f^{-1}$  тоже непрерывная биекция  $Y \rightarrow \langle a; b \rangle$ .

*Доказательство.* НУО  $f$  строго возрастает на  $\langle a; b \rangle$   
 fix  $\varepsilon > 0$ , тогда  $y_1 := f(x_0 - \varepsilon); y_2 := f(x_0 + \varepsilon)$   
 $\delta = \min\{y_2 - y_0; y_0 - y_1\}$   
 Тогда  $\forall y \in U_\delta(y) \Rightarrow f^{-1}(y) \in U_\varepsilon(f^{-1}(y_0))$  тк  $y_1 < y < y_2 \Rightarrow f^{-1}(y_1) < f^{-1}(y) < f^{-1}(y_2)$  □

### 3.1 Замечательные пределы.

1.  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$
2.  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$
3.  $\lim_{x \rightarrow 0} (1 + x)^{\frac{1}{x}} = e$
4.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1 + x)}{x} = 1$
5.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1; \lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - 1}{x} = \ln a$
6.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1 + x)^m - 1}{x} = m; m \in \mathbb{R}$
7.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \frac{1}{2}$
8.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$
9.  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{n}{2^n} = 0$

**Утверждение 3.5.**  $(1 + x)^p \simeq 1 + px, x \rightarrow 0$ .

## 4 $\bar{o}$ и $\underline{O}$ .

**Определение 4.1.** Символ Ландау —  $\bar{o}$ .

1.  $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$ , тогда  $f(x) := \bar{o}(g(x))$ ,  $x \rightarrow x_0$ .
2.  $f(x) = \bar{o}(g(x))$ , если  $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0: |f(x)| \leq \varepsilon |g(x)|$ ,  $\forall x \in \mathring{U}_\delta(x_0)$ .

**Свойство 4.1.** 1.  $f(x)$  называется бесконечно малой в точке  $x_0$ , если  $f(x) = \bar{o}(1)$ ,  $x \rightarrow x_0$ .

2.  $\bar{o}(f(x)) + \bar{o}(f(x)) = \bar{o}(f(x))$ ,  $x \rightarrow x_0$ .
3.  $C \cdot \bar{o}(f(x)) = \bar{o}(f(x))$ ,  $x \rightarrow x_0$ .
4.  $\bar{o}(\bar{o}(f(x))) = \bar{o}(f(x))$ ,  $x \rightarrow x_0$ .

**Определение 4.2.** 1. Пусть  $f, g$  обе бесконечно большие или бесконечно малые.  $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$ , тогда  $f(x) \sim g(x)$ ,  $x \rightarrow x_0$ .

2.  $f(x) \sim g(x) \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 (1 - \varepsilon)|g(x)| \leq |f(x)| \leq (1 + \varepsilon)|g(x)|$ ,  $\forall x \in \mathring{U}_\delta(x_0)$ .

**Утверждение 4.1.**  $f(x) \sim g(x)$ ,  $x \rightarrow x_0 \Leftrightarrow f(x) = g(x) + \bar{o}(g(x))$ ,  $x \rightarrow x_0$ .

**Определение 4.3.**  $f(x) = \underline{O}(g(x))$ ,  $x \rightarrow x_0$ , если  $\exists C > 0: |f(x)| \leq C|g(x)|$  в некоторой выколотой окрестности точки  $x_0$ .

**Определение 4.4.**  $f(x) \asymp g(x)$ ,  $x \rightarrow x_0$ , если  $\exists c_1, c_2 > 0: c_1|g(x)| \leq |f(x)| \leq c_2|g(x)|$  в некоторой выколотой окрестности точки  $x_0$ .

**Теорема 4.1.** Пусть  $f(x) \sim f_1(x)$ ,  $x \rightarrow x_0$  и функции не обращаются в 0 в некоторой  $\mathring{U}(x_0)$ . Тогда  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)g(x)$  и  $\lim_{x \rightarrow x_0} f_1(x)g(x) \exists$  или  $\nexists$  одновременно, и если  $\exists$ , то они равны. Словами: в произведение пределов сомножителя можно заменять на эквивалентные; слагаемые нельзя!

*Доказательство.*  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)g(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{f_1(x)} \cdot f_1(x)g(x)$ . □

**Утверждение 4.2.**  $(1 + t)^\alpha = 1 + \alpha t + \bar{o}(t)$ ,  $t \rightarrow 0$ .

**Утверждение 4.3.**  $e^t = 1 + t + \bar{o}(t)$ ,  $t \rightarrow 0$ .

**Утверждение 4.4.** Если  $\exists \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = k \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \Rightarrow f(x) \asymp g(x), x \rightarrow x_0 \Rightarrow f(x) = \underline{O}(g(x))$  и  $g(x) = \underline{O}(f(x)), x \rightarrow x_0$ .

### 4.1 Асимптотические равенства.

1.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ ;  $\sin x \sim x$ ;  $\sin x = x + \bar{o}(x)$
2.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \frac{1}{2}$ ;  $1 - \cos x \sim \frac{x^2}{2}$ ;  $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + \bar{o}(x^2)$
3.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$ ;  $\ln(1+x) \sim x$ ;  $\ln(1+x) = x + \bar{o}$   
 $\log_a(1+x) \sim \frac{x}{\ln a}$ ;  $\log_a(1+x) = \frac{x}{\ln a} + \bar{o}(x)$
4.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$ ;  $e^x - 1 \sim x$ ;  $e^x = 1 + x + \bar{o}(x)$   
 $e^x - 1 = x + \bar{o}(x)$ ;  $a^x = 1 + x \ln a + \bar{o}(x)$
5.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)^s - 1}{x} = s$ ;  $(1+x)^s - 1 \sim sx$ ;  $(1+x)^s = 1 + sx + \bar{o}(x)$

## 5 Функции, непрерывные на отрезке.

**Определение 5.1.**  $f$  непрерывна на отрезке  $[a, b]$ ,  $a, b \in \mathbb{R}$ ;  $a < b \Leftrightarrow \forall x_0 \in [a, b] \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$ .

**Замечка 5.1.**  $C(X) = \{\text{множество функций непрерывных на множестве } X\}$ .  $f \in C(x): \forall x_0 \in X \forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0: |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon \forall |x - x_0| < \delta$ .

### 5.1 Первая теорема Вейерштрасса.

**Теорема 5.1** (Первая теорема Вейерштрасса).  $f \in C([a, b])$ . Тогда  $f$  ограничена на  $[a, b]$ .

*Доказательство.* НУО докажем, что  $f$  ограничена сверху.

#  $f$  неограничена сверху.  $\exists x_n \in [a, b]: f(x_n) > n$ .  $\{x_n\} \in [a, b]$ .  $\exists x_{n_k} \rightarrow x_0 \in [a, b]$ .  $f(x_0) = \lim_{x_{n_k} \rightarrow x_0} f(x_{n_k}) = \infty$  #.  $\square$

### 5.2 Вторая Теорема Вейерштрасса.

**Теорема 5.2** (Вторая Теорема Вейерштрасса). Пусть  $f \in C([a, b])$ . Тогда  $\exists \bar{x}, \underline{x} \in [a, b]: f(\bar{x}) = \min_{[a, b]} f(x), f(\underline{x}) = \max_{[a, b]} f(x)$ .

*Доказательство.* #  $\inf_{[a, b]} f(x) = m$  и не достигается.  $f(x) > m \forall x \in [a, b] \Rightarrow g(x) := \frac{1}{f(x) - m}$  неограничена на  $[a, b]$ . Но  $\forall \varepsilon > 0 \exists x_\varepsilon \in [a, b]: f(x_\varepsilon) < m + \varepsilon \Rightarrow g(x_\varepsilon) > \frac{1}{\varepsilon} \Rightarrow g$  неограничена сверху на  $[a, b]$  #.  $\square$

### 5.3 Теорема Больцано-Коши.

**Теорема 5.3** (Больцано-Коши).  $f \in C([a, b])$ ,  $f(a)f(b) < 0$ . Тогда  $\exists x_0 \in [a, b]: f(x_0) = 0$ .

*Доказательство №1.* НУО  $f(a) < 0; f(b) > 0$ .  $a_0 := a, b_0 := b$ .  $[a_k, b_k] \rightarrow [a_{k+1}, b_{k+1}]$ .  $\lim a_k = \alpha, \lim b_k = \beta$ .  $\lim(a_k - b_k) = \alpha - \beta, \lim \frac{b - a}{2^k} = 0 \Rightarrow \alpha = \beta =: x_0$ .  $f(a_k) < 0, f(b_k) > 0$ .  $\begin{cases} f(x_0) = \lim_{k \rightarrow \infty} f(a_k) \leq 0 \\ f(x_0) = \lim_{k \rightarrow \infty} f(b_k) \geq 0 \end{cases} \Rightarrow f(x_0) = 0$ .  $\square$

*Доказательство №2.*  $X = \{x \in [a, b]: f(x) < 0\} \neq \emptyset$ .  $\exists x_0 = \sup X < b$ .  $\square$

### 5.4 Третья Теорема Вейерштрасса.

**Теорема 5.4** (Третья Теорема Вейерштрасса).  $f \in C([a, b])$ ,  $M = \max_{[a, b]} f(x), m = \min_{[a, b]} f(x)$ . Тогда  $E(f) = [m; M]$ .

### 5.5 Равномерная непрерывность.

**Определение 5.2** (Равномерная непрерывность).  $f$  равномерно непрерывна на  $X$ , если  $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0: \forall x_0 \in X |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon \forall |x - x_0| < \delta$ .

**Теорема 5.5** (?Коши-Вейерштрасса?). Пусть  $f \in C([a, b])$ . Тогда  $f$  равномерно непрерывна на  $[a, b]$ .

*Доказательство.* #  $\exists \varepsilon > 0: \forall \delta > 0: \exists x_1, \xi |f(x) - f(\xi)| \geq \varepsilon, |x - \xi| < \delta$ . Возьмем  $\delta_1 = 1 \exists x_1, \xi_1: |x_1 - \xi_1| < 1$  и  $|f(x_1) - f(\xi_1)| \geq \varepsilon, \dots, \delta_n = \frac{1}{n} \exists x_n, \xi_n: |x_n - \xi_n| < \frac{1}{n}$  и  $|f(x_n) - f(\xi_n)| \geq \varepsilon$ .  $\{x_n\}, \{\xi_n\} \subset [a, b]$ .  $\{x_{n_m} \rightarrow x_0\}, \{\xi_{n_m} \rightarrow \xi_0\} \Rightarrow x_0 = \xi_0$ .  $|f(x_{n_m}) - f(\xi_{n_m})| \geq \varepsilon$  #.  $\square$

## 6 Дифференциальное исчисление.

**Определение 6.1.**  $f$  дифференцируема в точке  $x_0$ , если  $\exists k \in \mathbb{R}: f(x) = f(x_0) + k(x - x_0) + \bar{o}(x - x_0)$ .

**Утверждение 6.1.** Если  $f$  дифференцируема в точке  $x_0 \Leftrightarrow \exists \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = k$ .

*Доказательство.*  $\bar{o}(x - x_0) + k(x - x_0) = f(x) - f(x_0) \Leftrightarrow k + \frac{\bar{o}(x - x_0)}{x - x_0} = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \Leftrightarrow k = k + \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\bar{o}(x - x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ .  $\square$

**Определение 6.2.** Такое  $k$  называется производной в точке  $x_0$ . Обозначается  $f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ .

**Утверждение 6.2.** Если  $f$  дифференцируема, то она непрерывна.

**Определение 6.3.** Производная (функция) функции  $f \rightarrow g(x) = f'(x): x_0 \mapsto \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ ;

$$\Delta x = x - x_0; x_0 \mapsto \lim_{x \rightarrow \Delta x} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}; f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}.$$

**Замечка 6.1.**  $f(\tilde{x}) = f(x) \cdot f'(x)(\tilde{x} - x) + \bar{o}(\tilde{x} - x)$ .  $f(x + \Delta x) = f(x) + f'(x) \cdot \Delta x + \bar{o}(\Delta x)$ ;  $\Delta f(x) := f(x + \Delta x) - f(x)$ .  $\Delta f(x) = f'(x) \cdot \Delta x + \bar{o}(\Delta x)$ ,  $\Delta x \rightarrow 0$ .

**Определение 6.4** (Дифференциал функции).  $df(x) := f'(x)\Delta x$ .

**Замечка 6.2.** Пусть  $f(x) = x$ .  $\Delta x = 1 \cdot \Delta x + 0$ ,  $\Delta f(x) = f'(x)\Delta x + \bar{o}(\Delta x) \Rightarrow f'(x) = 1 \Rightarrow df(x) = \Delta x$ .  
Тогда  $df(x) = f'(x)dx$ ,  $f'(x) = \frac{df(x)}{dx}$ .

**Замечка 6.3.** Дифференциал — линейная часть малого приращения функции.

### 6.1 Правила дифференцирования.

(рассматриваем дифференцируемые функции):

1.  $(c)' = 0$ ;  $(cf(x))' = cf'(x)$
2.  $(f(x) \pm g(x))' = f'(x) \pm g'(x)$
3.  $(f(x) \cdot g(x))' = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x) \rightarrow d(fg) = df \cdot g + dg \cdot f$
4.  $\left(\frac{1}{f(x)}\right)' = -\frac{f'(x)}{f^2(x)}$ ,  $f(x) \neq 0$
5.  $\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)}$
6. Пусть  $f$  дифференцируема в точке  $x$ ,  $g$  дифференцируема в точке  $f(x)$ . Тогда  $g(f(x))$  дифференцируема в точке  $x$  и  $(g(f(x)))' = g'(f(x)) \cdot f'(x)$  или  $dg(f(x)) = g'(f(x)) \cdot df(x)$
7.  $f$  дифференцируема в точке  $x_0$  и  $f'(x_0) \neq 0$ . Если  $f$  обратима в окрестности точки  $x_0$ , то  $f^{-1}$  дифференцируема в точке  $y_0 = f(x_0)$  и  $(f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)} = \frac{1}{f'(f^{-1}(y_0))}$
8.  $(\sin x)' = \cos x$

$$9. (\cos x)' = -\sin x$$

$$10. (\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$$

$$11. (\operatorname{ctg} x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$$

$$12. (\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$13. (\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$14. (\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1+x^2}$$

$$15. (\operatorname{arcctg} x)' = -\frac{1}{1+x^2}$$

$$16. (e^x)' = e^x; (a^x)' = a^x \cdot \ln a$$

$$17. (\ln x)' = \frac{1}{x}; (\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}$$

$$18. (x^p)' = px^{p-1}$$

## 6.2 Выпуклость.

**Определение 6.5.** Функция называется *выпуклой* на отрезке  $[a, b]$  если для каждого отрезка  $[x_1, x_2]$ , принадлежащего  $[a, b]$ , график функции  $f$  расположен не выше отрезка с концами в  $(x_1, f(x_1))$  и  $(x_2, f(x_2))$  (строго выпуклой, если ниже). Иными словами, если для любых  $x_1, x, x_2 \in [a, b]$ ,  $x_1 < x < x_2$  справедливо неравенство  $f(x) \leq y(x) = \frac{x_2 - x}{x_2 - x_1} f(x_1) + \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} f(x_2)$ , что равносильно  $(x_2 - x_1)f(x) \leq (x_2 - x)f(x_1) + (x - x_1)f(x_2)$ .

**Определение 6.6** (Из конспекта к зачету). Пусть  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $X$  — выпуклое множество.  $f(x)$  — *выпуклая* (выпуклая вниз) на  $X$ , если

$$\forall x_1, x_2 \in X \quad f\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) \leq \frac{f(x_1) + f(x_2)}{2}$$

$f(x)$  — *строго выпуклая* на  $X$ , если

$$\forall x_1, x_2 \in X \quad f\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) < \frac{f(x_1) + f(x_2)}{2}$$

$f(x)$  — *вогнутая* (выпуклая вверх) на  $X$ , если

$$\forall x_1, x_2 \in X \quad f\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) \geq \frac{f(x_1) + f(x_2)}{2}$$

$f(x)$  — *строго вогнутая* на  $X$ , если

$$\forall x_1, x_2 \in X \quad f\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) > \frac{f(x_1) + f(x_2)}{2}$$

**Лемма 6.1.** Пусть функция  $f$  определена на отрезке  $[a, b]$ . Тогда она выпукла тогда и только тогда, когда для любых  $x_1, x, x_2 \in [a, b]$ ,  $x_1 < x < x_2$ , справедливо любое из следующих трех неравенств:

$$\frac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1} \leq \frac{f(x_2) - f(x)}{x_2 - x},$$

$$\frac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1} \leq \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1},$$

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \leq \frac{f(x_2) - f(x)}{x_2 - x},$$

причем в случае строгой выпуклости неравенства также будут строгими.

*Доказательство.* Запишем  $x_2 - x_1$  как  $(x_2 - x) + (x - x_1)$ , тогда неравенство примет вид

$$(x_2 - x)f(x) + (x - x_1)f(x) \leq (x_2 - x)f(x_1) + (x - x_1)f(x_2),$$

после преобразования получаем

$$(x_2 - x)(f(x) - f(x_1)) \leq (x - x_1)(f(x_2) - f(x)),$$

что равносильно

$$\frac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1} \leq \frac{f(x_2) - f(x)}{x_2 - x}.$$

Запишем  $x_2 - x$  как  $(x_2 - x_1) - (x - x_1)$ , тогда неравенство примет вид

$$(x_2 - x_1)f(x) \leq (x_2 - x_1)f(x_1) - (x - x_1)f(x_1) + (x - x_1)f(x_2),$$

после преобразования получаем

$$(x_2 - x_1)(f(x) - f(x_1)) \leq (x - x_1)(f(x_2) - f(x_1)),$$

что равносильно

$$\frac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1} \leq \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}.$$

Запишем  $x - x_1$  как  $(x_2 - x_1) - (x_2 - x)$ , тогда неравенство примет вид

$$(x_2 - x_1)f(x) \leq (x_2 - x)f(x_1) + (x_2 - x_1)f(x_2) - (x_2 - x)f(x_2),$$

после преобразования получаем

$$(x_2 - x)(f(x_2) - f(x_1)) \leq (x_2 - x_1)(f(x_2) - f(x)),$$

что равносильно

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \leq \frac{f(x_2) - f(x)}{x_2 - x}.$$

□

**Определение 6.7** (Левая и правая производная).

$$f'_-(x_0) = f'(x_0 - 0) := \lim_{h \rightarrow +0} \frac{f(x_0) - f(x_0 - h)}{h},$$

$$f'_+(x_0) = f'(x_0 + 0) := \lim_{h \rightarrow +0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}.$$

**Заметка 6.4.**  $\exists f'(x_0) \Leftrightarrow$  существует производная слева и справа и  $f'_-(x_0) = f'_+(x_0)$ .

**Теорема 6.1.** Пусть функция  $f$  выпукла на  $[a, b]$ . Тогда

- a)  $\forall x_0 \in (a, b) \exists f'_-(x_0)$  и  $f'_+(x_0)$ , причем  $f'_-(x_0) \leq f'_+(x_0)$
- b)  $f \in C(a, b)$
- c)  $\forall x_1, x_2 \in (a, b), x_1 < x_2$ , имеем  $f'_+(x_1) \leq f'_-(x_2)$  (если  $f$  строго выпукла, то  $f'_+(x_1) < f'_-(x_2)$ )
- d)  $f'_-$  и  $f'_+$  — неубывающие на  $(a, b)$  функции (возрастающие в случае строгой выпуклости)
- e)  $f$  дифференцируема на  $(a, b)$  всюду, кроме, быть может, не более чем счетного числа точек

*Доказательство.* а) Пусть  $x_0 \in (a, b)$ ,  $h > 0$  — такое, что  $x_0 + h \in (a, b)$  тоже. Тогда, учитывая, что  $x_0 - (x_0 - h) = (x_0 + h) - x_0 = h$ , по неравенству  $\frac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1} \leq \frac{f(x_2) - f(x)}{x_2 - x}$  имеем

$$\frac{f(x_0) - f(x_0 - h)}{h} \leq \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h};$$

при убывании  $h$  левая часть неравенства неубывает в силу  $\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \leq \frac{f(x_2) - f(x)}{x_2 - x}$ , правая — невозрастает в силу  $\frac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1} \leq \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$ . Следовательно при  $h \rightarrow +0$  существуют оба предела, равные  $f'_-(x_0)$  и  $f'_+(x_0)$ , а из неравенства получаем  $f'_-(x_0) \leq f'_+(x_0)$ .

b) Из существования односторонних производных имеем для любого  $x_0 \in (a, b)$

$$f(x_0 + h) = \begin{cases} f(x_0) + f'_+(x_0)h + o(h), & h \rightarrow +0 \\ f(x_0) + f'_-(x_0)h + o(h), & h \rightarrow -0 \end{cases}$$

откуда в любом случае получаем  $f(x_0 + h) = f(x_0) + o(h)$ ,  $h \rightarrow 0$ , т.е.  $f$  непрерывна в  $x_0$ .

c) Для всякого  $x \in (x_1, x_2)$  имеем

$$\frac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1} \leq \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$$

(строгое неравенство в случае строгой выпуклости).

При  $x \rightarrow x_1 + 0$  левая часть неравенства невозрастает (строгое неравенство при этом сохраняется), поэтому мы можем перейти к пределу:

$$f'_+(x_1) \leq \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}.$$

Аналогично, при  $x \rightarrow x_2 - 0$  имеем

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \leq \frac{f(x_2) - f(x)}{x_2 - x}$$

(строгое неравенство в случае строгой выпуклости).

Таким образом, имеем

$$f'_+(x_1) \leq \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \leq f'_-(x_2)$$

(строгое неравенство в случае строгой выпуклости), откуда следует требуемое.

д) Для  $x_1, x_2 \in (a, b)$ ,  $x_1 < x_2$  из а) и с) имеем  $f'_-(x_1) \leq f'_+(x_1) \leq f'_-(x_2) \leq f'_+(x_2)$  (в случае строгой выпуклости  $f'_-(x_1) \leq f'_+(x_1) < f'_-(x_2) \leq f'_+(x_2)$ ), откуда следует требуемая монотонность.

е) Для доказательства потребуется следующая лемма:

**Лемма 6.2.** Пусть  $g(x)$  монотонная на  $[a, b]$ . Тогда  $g(x)$  не может иметь разрывов второго рода и имеет не более чем счетное число разрывов (устранимых или первого рода).

В силу монотонности множество точек разрыва функции  $f'_-$  на  $(a, b)$  не более чем счетно. Покажем, что в точках непрерывности функции  $f'_-$  существует производная  $f'$  (т.е.  $f'_- = f'_+$ ).

Пусть  $x_0$  — точка непрерывности функции  $f'_-$ . Для всякого  $h > 0$  такого, что  $x_0 + h \in (a, b)$  из а) и с) имеем

$$f'_-(x_0) \leq f'_+(x_0) \leq f'_-(x_0 + h),$$

откуда

$$0 \leq f'_+(x_0) - f'_-(x_0) \leq f'_-(x_0 + h) - f'_-(x_0).$$

В силу непрерывности  $f'_-$  имеем  $f'_-(x_0 + h) - f'_-(x_0) \rightarrow 0$ , откуда по теореме о зажатой функции  $f'_+(x_0) - f'_-(x_0) \rightarrow 0$ , а так как это выражение на самом деле не зависит от  $h$ , получаем, что  $f'_+(x_0) = f'_-(x_0)$ . □

### 6.3 Вторая производная.

**Определение 6.8.** Пусть  $f(x)$  дифференцируема  $\forall x \in X$ , тогда  $f'(x) : X \rightarrow \mathbb{R}$ .  $(f')' =: f''$ .

#### 6.3.1 Многочлен Тейлора.

**Определение 6.9** (Многочлен Тейлора).  $T_{n,x_0}f = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2}(x - x_0)^2 + \frac{f'''(x_0)}{3!}(x - x_0)^3 + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k$ .

#### 6.3.2 Формула Тейлора.

**Теорема 6.2** (Формула Тейлора).  $f(x) = T_{n,x_0}f + R_{n,x_0}f$ . Остатки бывают в разных формах (например в форме Пеано это  $\bar{o}((x - x_0)^n)$ ).

*Доказательство.*  $f(x) = T_{n,x_0}f + \bar{o}((x - x_0)^n) \Leftrightarrow f(x) - T_{n,x_0}f = \bar{o}((x - x_0)^n) \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - T_{n,x_0}f}{(x - x_0)^n} =$   
 $\left[ \frac{0}{0} \right] \stackrel{\text{правило Лопиталя}}{=} \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x) - (f'(x_0) + f''(x_0)(x - x_0) + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{(n-1)!}(x - x_0)^{n-1})}{n(x - x_0)^{n-1}} = \dots =$   
 $= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f^{(n)}(x) - f^{(n)}(x_0)}{n!} = 0.$  □

#### 6.3.3 Теорема Ферма.

**Теорема 6.3** (Ферма). Пусть  $f \in C([a, b]) \cap C^1(a, b)$ . Тогда, если  $x_0 \in (a, b)$  точка экстремума (точка локального максимума или минимума), то  $f'(x_0) = 0$ .

*Доказательство.*  $f'(x_0) = f'_-(x_0) = f'_+(x_0)$

$x_0$  — локальный максимум:

$$f'_+(x_0) = \lim_{\Delta \rightarrow +0} \frac{\overbrace{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}^{\leq f(x_0)}}{\Delta x} \leq 0$$

$$f'_-(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow +0} \frac{f(x_0) - \overbrace{f(x_0 - \Delta x)}^{\leq f(x_0)}}{\Delta x} \geq 0$$

$$\Rightarrow f'(x_0) = 0$$

□

**Следствие 6.1.** В точке экстремума производная нулевая или не существует.

### 6.3.4 Немного определений.

**Определение 6.10.**  $x_0$  стационарная, если  $f'(x_0) = 0$ .

**Определение 6.11.**  $x_0$  критическая, если  $f'(x_0) = 0$  или  $f'(x_0) \nexists$

**Определение 6.12.**  $x_0$  экстремум, если это локальный минимум или максимум.

### 6.3.5 Теорема Ролля.

**Теорема 6.4** (Ролля). Пусть  $f \in C([a, b]) \cap C^1(a, b)$ ,  $f(a) = f(b)$ . Тогда  $\exists c \in (a, b): f'(c) = 0$ .

*Доказательство.*  $f \in C([a, b]) \Rightarrow$  достигается максимум и минимум  $\Rightarrow$  хотя бы одна из них  $c \in (a, b) \Rightarrow$  по теореме Ферма  $f'(c) = 0$ . □

### 6.3.6 Теорема Коши.

**Теорема 6.5** (Коши).  $f, g \in C([a, b]) \cap C^1(a, b)$ ,  $g'(x) \neq 0$  на  $(a, b)$ . Тогда  $\exists c \in (a, b): \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$ .

*Доказательство.* Рассмотрим функцию  $h(x) = f(x) - kg(x)$ ,  $k \in \mathbb{R}: \in C^1(a, b) \cap C([a, b])$ .

Выберем  $k$ , такое что  $h(a) = h(b)$ .  $f(a) - kg(a) = f(b) - kg(b) \Rightarrow k(g(b) - g(a)) = f(b) - f(a) \Rightarrow k = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}$ .

По теореме Ролля  $\exists c \in (a, b): h'(c) = 0$

$f'(c) - kg'(c) = 0$

□

### 6.3.7 Теорема Лагранжа.

**Теорема 6.6** (Лагранжа о среднем в дифференциальной форме.).  $f \in C([a, b]) \cap C^1(a, b)$ . Тогда  $\exists c \in (a, b): f(b) - f(a) = f'(c)(b - a)$ .

*Доказательство.* Следует из теоремы Коши, если взять  $g(x) = x$ . □

### 6.3.8 Правило Лопиталья.

**Теорема 6.7** (Правило Лопиталья.). Пусть  $f(x), g(x)$  непрерывно дифференцируемы в окрестности точки  $x_0, x_0 \in \mathbb{R}$ . Пусть  $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \left[ \frac{\infty}{\infty} \right]$  или  $\left[ \frac{0}{0} \right]$ . Тогда, если  $\exists \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = a$ , то  $\exists \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = a$ .

*Доказательство.* 1.  $x_0 \in \mathbb{R}, \left[ \frac{0}{0} \right] \Rightarrow f(x_0) = g(x_0) = 0$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{g(x) - g(x_0)} \stackrel{\text{по теореме Коши}}{=} \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(c(x))}{g'(c(x))} = \lim_{c \rightarrow x_0} \frac{f'(c)}{g'(c)} = a.$$

2.  $x_0 \in \mathbb{R}, \left[ \frac{\infty}{\infty} \right]$

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\frac{1}{\frac{1}{f(x)}}}{\frac{1}{\frac{1}{g(x)}}} = \frac{g_1(x)}{f_1(x)}, \text{ пусть}$$

$$f_1(x) = \begin{cases} \frac{1}{f(x)}, & x \neq x_0 \\ 0, & x = x_0 \end{cases}$$

$$g_1(x) = \begin{cases} \frac{1}{g(x)}, & x \neq x_0 \\ 0, & x = x_0 \end{cases}$$

$f_1, g_1$  непрерывно дифференцируемы.

3.  $x_0 = \pm\infty$  (НУО рассмотрим только  $+\infty$ );  $a \in \mathbb{R}$

$$\text{fix } \varepsilon > 0: \exists \delta > 0: \left| \frac{f'(x)}{g'(x)} - a \right| < \varepsilon \quad \forall x > \frac{1}{\delta}$$

$$\text{fix } y \in \left(\frac{1}{\delta}; +\infty\right) \quad \exists c \text{ между } x \text{ и } y: \frac{f(x) - f(y)}{g(x) - g(y)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$$

$$\frac{f(x)(1 - \frac{f(y)}{f(x)})}{g(x)(1 - \frac{g(y)}{g(x)})} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$$

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(c)}{g'(c)} \cdot \frac{1 - \frac{g(y)}{g(x)}}{1 - \frac{f(y)}{f(x)}} = \frac{f'(c)}{g'(c)} \cdot \left( 1 + \underbrace{\frac{\frac{f(y)}{f(x)} - \frac{g(y)}{g(x)}}{1 - \frac{f(y)}{f(x)}}}_{\substack{\rightarrow 0 \\ \text{б. м.}}} \right) > \frac{1}{2} \cdot \frac{f'(c)}{g'(c)} > \frac{1}{2\varepsilon} \quad \forall x \geq \frac{1}{2\delta}$$

4.  $x_0 = \pm\infty$  (НУО рассмотрим только  $+\infty$ );  $\left[ \frac{0}{0} \right]$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x = \frac{1}{t} \rightarrow +0} \frac{f(\frac{1}{t})}{g(\frac{1}{t})} = \left[ \frac{0}{0} \right]$$

Рассмотрим

$$\exists \lim_{t \rightarrow +0} \frac{(f(\frac{1}{t}))'}{(g(\frac{1}{t}))'} = \lim_{t \rightarrow +0} \frac{f'(\frac{1}{t}) \cdot (-\frac{1}{t^2})}{g'(\frac{1}{t}) \cdot (-\frac{1}{t^2})} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)} = a$$

□

### Применение Лопиталья.

**Лемма 6.3.**  $\forall p > 0 \quad \forall a > 1 \quad x^p = \bar{o}(a^x), x \rightarrow +\infty.$

**Лемма 6.4.**  $\forall p > 0 \quad \forall a \in (0; 1) \cup (1; +\infty) \quad \log_a x = \bar{o}(x^p), x \rightarrow +\infty.$

**Лемма 6.5.**  $\forall \alpha > 0 \quad \forall p > 0 \quad \forall a \in (0; 1) \cup (1; +\infty) \quad \log_a^\alpha x = \bar{o}(x^p), x \rightarrow +\infty.$

### 6.3.9 Утверждения.

**Утверждение 6.3.**  $\exists f'(x_0) \Leftrightarrow f(x) = f(x_0) + A \cdot (x - x_0) + \bar{o}(x - x_0)$  и  $A = f'(x_0).$

**Утверждение 6.4.**  $f$  непрерывно дифференцируема  $n$  раз в некоторой окрестности точки  $x_0 \Rightarrow$   
$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + \bar{o}((x - x_0)^n).$$

### 6.3.10 Применение Тейлора.

**Утверждение 6.5.**  $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \bar{o}(x^n).$

**Утверждение 6.6.**  $\sin x = 0 + x + \frac{0}{2!}x^2 - \frac{1}{3!}x^3 + 0 \cdot x^4 + \frac{1}{5!}x^5 + \dots = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \bar{o}(x^{2n+2}).$