

1 Последовательности.

Опр. Последовательность — объекты (элементы), пронумерованные последовательными натуральными числами. Последовательности бывают как конечными, так и бесконечными.

Опр. Стационарная последовательность — последовательность, у которой равны все элементы.

Способы задания (правило, которое позволяет найти каждый элемент последовательности) последовательностей:

- Словесно/описательно.
- Таблица.
- Рекуррентно.
- Формульно.

1.1 Арифметическая прогрессия.

Пример: ряд натуральных чисел $1, 2, 3, \dots, n$.

Опр. Арифметическая прогрессия — последовательность, где каждый следующий элемент увеличивается на фиксированную величину. $a_{n+1} = a_n + d$, d — разность арифметической прогрессии.

Формулы.

$$\begin{aligned}a_n &= a_1 + (n-1) \cdot d. \\a_n &= \frac{a_{n+1} + a_{n-1}}{2} \rightarrow a_n = \frac{a_{n+k} + a_{n-k}}{2}. \\S_n &= \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n = (a_1 + \frac{(n-1) \cdot d}{2}) \cdot n = a_1 \cdot n + \frac{(n-1) \cdot n}{2} \cdot d.\end{aligned}$$

1.2 Геометрическая прогрессия.

Опр. Геометрической прогрессией называется такая последовательность, где первый член не нулевой, а каждый следующий в фиксированное число (не ноль) раз больше.

$b_n = b_{n-1} \cdot q$, q — знаменатель ГП.

Опр. Если $|q| < 1$, тогда бесконечно убывающая ГП.

Формулы.

$$\begin{aligned}S_n &= \frac{b_{n+1} - b_1}{q - 1} = \frac{b_1 \cdot (q^n - 1)}{q - 1}. \\ \text{Для бесконечно убывающей ГП верно: } \frac{b_1}{b_2} &= \frac{S}{S - b_1}.\end{aligned}$$

2 Производная и интеграл.

Непрерывная функция —

1. Можно нарисовать не отрывая руки.
2. $\forall \varepsilon \exists \delta$.
3. Совпадают левый и правый предел. (Если пойти слева и справа, то придем в одну точку.)

Производная точки касания — наклон касательной ($k = f'(x_0)$, $b = f(x_0) - f'(x_0) \cdot x_0$).

Полное уравнение касательной — $y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$.

Уравнение нормали (перпендикуляра) — $y = -\frac{1}{f'(x_0)}(x - x_0) + f(x_0)$.

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}.$$

$f'(x) = 0$; x_i - корни = подозрительный экстремум.

$f''(x) > 0 \Leftrightarrow$ выпукла вниз. $f''(x) < 0 \Leftrightarrow$ выпукла вверх.

$$(f^n(x))' = n \cdot f^{n-1}(x) \cdot f'(x).$$

$$(f(x) + g(x))' = f'(x) + g'(x).$$

$$(f(x) \cdot g(x))' = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x).$$

$$\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{g^2(x)}; \Leftrightarrow f(x) \cdot g^{-1}(x).$$

$$(f(g(x)))' = f'(g(x)) \cdot g'(x).$$

1. $(const)' = 0$.

2. $(k \cdot x^n)' = kn \cdot x^{n-1}$.
3. $(k_1(k_2x + k_3)^n)' = nk_1(k_2x + k_3)^{n-1} \cdot k_2$.
4. $(\sin x)' = \cos x$.
5. $(\cos x)' = -\sin x$.
6. $tg'(x) = \frac{1}{\cos^2(x)}$.
7. $ctg'(x) = -\frac{1}{\sin^2(x)}$.
8. $(e^{f(x)})' = e^{f(x)} \cdot f'(x)$.
9. $(a^x)' = a^x \cdot \ln a$.
10. $(e^x)' = e^x$
11. $(\ln x)' = \frac{1}{x}$
12. $(\log_a x)' = \frac{1}{x \cdot \ln a}$

3 Предел.

Опр по Коши. $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A \Leftrightarrow \varepsilon > 0 \exists \delta : |x - x_0| < \delta, \text{ то } |f(x) - A| < \varepsilon (f(x_0) = A)$.

Свойства:

1. $\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) \pm g(x)) = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \pm \lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$.
2. $\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) \cdot g(x)) = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \cdot \lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$.
3. $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A, \lim_{y \rightarrow A} = B \Rightarrow \lim_{x \rightarrow a} g(f(x)) = B$.
4. Правило Лопиталя.
 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0, \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = 0 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1.$$

4 Показательная функция.

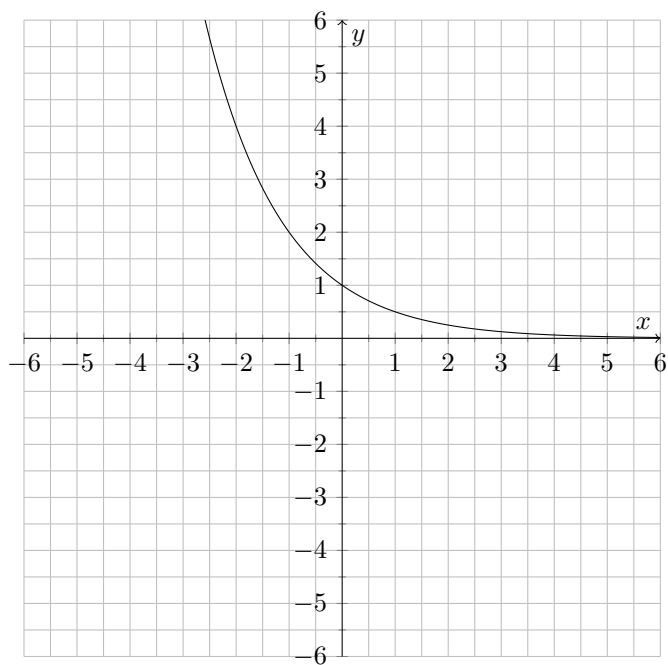
Опр. $f(x) = a^x$, где x — независимая переменная, $a > 0, a \neq 1$.

Возведение в вещественную степень: $a^x = \lim_{n \rightarrow \infty} a^{x_n}, x_n$ — число x с n знаками после запятой $\Leftrightarrow x_n = \frac{\lfloor x \cdot 10^n \rfloor}{10^n}$.

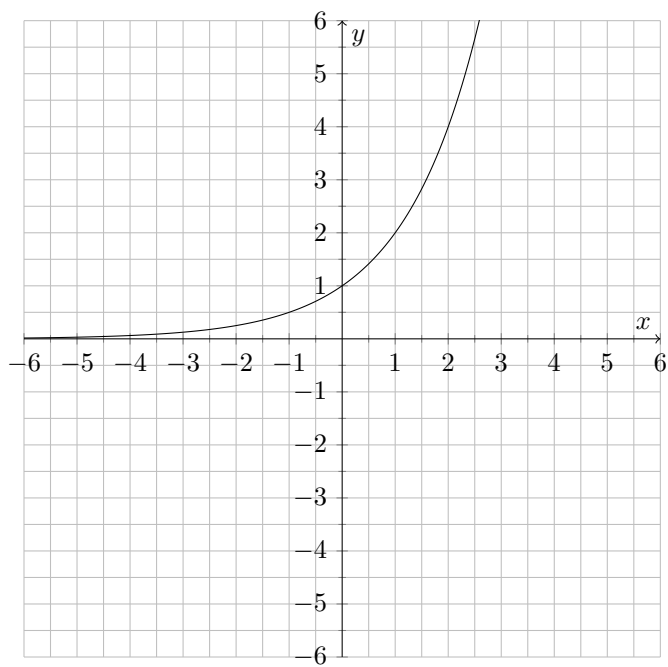
Исследование:

1. $D(x) = \mathbb{R}$.
2. $E(y) = (0; +\infty)$.
3. $\uparrow \downarrow$
 - $a \in (0; 1): \downarrow$
 - $a \in (1; \infty): \uparrow$
4. Ограниченность. Снизу 0.
5. \max / \min . Нет.
6. Асимптоты. $y = 0$.
7. Монотонность. \mathbb{R} .
8. Выпуклость. Выпукла вниз.
9. График

- $a \in (0; 1)$



- $a \in (1; \infty)$



10. Четность. Общего вида.

5 Логарифм.

Опр. $\log_a b$ — логарифм числа b по основанию a . $\log_a b$ — такое число, что если возведем a в эту степень, то получим b ($a^{\log_a b} = b$); $a > 0, a \neq 1, b > 0$.

Свойства:

1. $a^{\log_a b} = b$
2. $\log_a(bc) = \log_a |b| + \log_a |c|$

$$3. \log_a \left(\frac{b}{c} \right) = \log_a |b| - \log_a |c|$$

$$4. \log_a b^r = r \log_a |b|$$

$$5. \log_{a^r} b = \frac{\log_a b}{r}$$

$$6. \log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}$$

$$7. \log_a b = \frac{1}{\log_b a}$$

$$8. \log_a b \cdot \log_c a = \log_c b$$

Ремарка. $\lg b = \log_{10} b$, $\ln b = \log_e b$.