

## Домашнее задание

1. Доказать, что определения равносильны.

I. Функция называется выпуклой на отрезке  $[a, b]$  если для каждого отрезка  $[x_1, x_2]$ , принадлежащего  $[a, b]$ , график функции  $f$  расположен не выше отрезка с концами в  $(x_1, f(x_1))$  и  $(x_2, f(x_2))$  (строго выпуклой, если ниже). Иными словами, если для любых  $x_1, x, x_2 \in [a, b]$ ,  $x_1 < x < x_2$  справедливо неравенство  $f(x) \leq y(x) = \frac{x_2 - x}{x_2 - x_1}f(x_1) + \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}f(x_2)$ , что равносильно  $(x_2 - x_1)f(x) \leq (x_2 - x)f(x_1) + (x - x_1)f(x_2)$ .

II. Пусть  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $X$  — выпуклое множество.  
 $f(x)$  — выпуклая (выпуклая вниз) на  $X$ , если

$$\forall x_1, x_2 \in X \quad f\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) \leq \frac{f(x_1) + f(x_2)}{2}$$

$f(x)$  — строго выпуклая на  $X$ , если

$$\forall x_1, x_2 \in X \quad f\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) < \frac{f(x_1) + f(x_2)}{2}$$

$f(x)$  — вогнутая (выпуклая вверх) на  $X$ , если

$$\forall x_1, x_2 \in X \quad f\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) \geq \frac{f(x_1) + f(x_2)}{2}$$

$f(x)$  — строго вогнутая на  $X$ , если

$$\forall x_1, x_2 \in X \quad f\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) > \frac{f(x_1) + f(x_2)}{2}$$

2. Доказать лемму.

**Лемма 0.1.** Пусть функция  $f$  определена на отрезке  $[a, b]$ . Тогда она выпукла тогда и только тогда, когда для любых  $x_1, x, x_2 \in [a, b]$ ,  $x_1 < x < x_2$ , справедливо любое из следующих трех неравенств:

$$\begin{aligned} \frac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1} &\leq \frac{f(x_2) - f(x)}{x_2 - x}, \\ \frac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1} &\leq \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}, \\ \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} &\leq \frac{f(x_2) - f(x)}{x_2 - x}, \end{aligned}$$

причем в случае строгой выпуклости неравенства также будут строгими.

3. Докажите, что если  $f(x)$  выпуклая на  $(a, b)$ , то для любой точки  $x_0$ , в которой функция дифференцируема верно

$$f(x) \geq f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0), \quad \forall x \in (a, b)$$

(т.е. график функции лежит выше касательной). Причем для строго выпуклых функций неравенство строгое при всех  $x \neq x_0$ .

4. Сформулируйте и докажите обратное утверждение.

5. Докажите, что функция  $\ln x$  вогнута на  $(0, +\infty)$ .
6. Приведите пример функции, непрерывной в точке  $x_0$ , но не имеющей в этой точке ни левой, ни правой производной.
7. При каких  $\alpha$  функция  $f(x) = \begin{cases} x^\alpha \sin\left(\frac{1}{x}\right), & x \neq 0, \\ 0, & x = 0 \end{cases}$  дифференцируема в нуле.
8. Найти  $f'_\pm(x_0)$  для функции  $f(x) = |x - x_0|\varphi(x)$ , где функция  $\varphi(x)$  непрерывна в точке  $x_0$ .
9. Исследуйте на дифференцируемость функцию  $f(x) = |x^3(x+1)^2(x+2)|$ .
10. Функция  $f(x)$  дифференцируема в точке  $x_0$ . Найдите предел последовательности  $a_n = n \left( f\left(x_0 + \frac{1}{n}\right) - f(x_0) \right)$ . Верно ли обратное утверждение (т.е. влечет ли сходимость такой последовательности существование производной).