

Содержание

1 Теория групп.

2

1 Теория групп.

Определение 1.1. *Группа — множество с одной операцией $*$: $G \times G \rightarrow G$ со следующими свойствами:*

1. $a * (b * c) = (a * b) * c$
2. $\exists e: a * e = e * a = a$
3. $\forall a \exists a^{-1}: a * a^{-1} = a^{-1} * a = e$

Пример 1.1. • $(\mathbb{Z}; +)$

- $(\mathbb{Q}; +)$
- $(\mathbb{R}; +)$
- $(\mathbb{C}; +)$
- $(V; +)$
- $(\mathbb{R}_+; \cdot)$
- $(\mathbb{R} \setminus \{0\}; \cdot)$
- $(\mathbb{Z}_n; +)$

Определение 1.2. Пусть H — группа, $H \subset G$. Говорим, что H является подгруппой (пишем $H < G$), если H является группой относительно операции в G . Чтобы проверить, что H является подгруппой, необходимо убедиться, что произведение двух элементов из H принадлежит H , и элементы, обратные к H , тоже лежат в H .

Определение 1.3. Абелева группа — группа с коммутативностью.

Определение 1.4. Говорят, что группа G порождается элементами $\{x_i\}$, если любой элемент из G можно представить как произведение нескольких x_i и обратных к ним.

Группа называется циклической, если она порождена одним элементом.

Определение 1.5. Пусть G — группа, $H < G$. Введем два отношения эквивалентности на G : $x \sim_1 y$ если $xy^{-1} \in H$, $x \sim_2 y$ если $x^{-1}y \in H$.

Определение 1.6. Пусть теперь группа G конечна, $H < G$. Количество классов эквивалентности \sim_1 называется индексом G по H и обозначается $[G : H]$.

Определение 1.7. Пусть $x \in G$. Порядком элемента x называется наименьшее натуральное число n , такое что $x^n = e$, где e — нейтральный элемент. Обозначение: $\text{ord}(x)$. Если такого n не существует, то пишем $\text{ord}(x) = +\infty$.

Определение 1.8. Пусть $X, Y \subset G$ — подмножества группы. Их произведением будем называть множество $\{xy | x \in X, y \in Y\}$.

Определение 1.9. Полная линейная группа $GL(n, F)$ — это множество всех квадратных матриц размера $n \times n$ с элементами из поля F , которые являются обратимыми ($\det \neq 0$), вместе с операцией матричного умножения.

Определение 1.10. Специальная линейная группа $SL(n, F)$ — это подгруппа полной линейной группы, состоящая из всех матриц с определителем, равным 1. То есть это множество всех матриц A размера $n \times n$ над полем F , таких что $\det(A) = 1$.

Определение 1.11. Специальная ортогональная группа $SO(n, F)$ — группа из ортогональных матриц. Матрица A называется ортогональной, если $A^T \times A = A \times A^T = E$.

Утверждение 1.1. Пусть X — произвольное множество. Тогда множество всех биекций $f : X \rightarrow X$ образуют группу относительно композиции. Эту группу обозначают S_X . Если $X = \{1, 2, \dots, n\}$, то S_X обозначают S_n — группа подстановок.

Теорема 1.1 (Кэли). Любая группа G является подгруппой в группе подстановок, а именно S_G .

Теорема 1.2 (Лагранжа). $|G| = |H| \cdot [G : H]$.