Домашнее задание

1. Доказать, что определения равносильны.

   I. Функция называется выпуклой на отрезке $[a, b]$ если для каждого отрезка $[x_1, x_2]$, принадлежащего $[a, b]$, график функции f расположен не выше отрезка с концами в $(x_1, f(x_1))$ и $(x_2, f(x_2))$ (строго выпуклой, если ниже). Иными словами, если для любых $x_1, x, x_2 \in [a, b]$, $x_1 < x < x_2$ справедливо неравенство $f(x) \leqslant y(x) = \dfrac{x_2 - x}{x_2 - x_1} f(x_1) + \dfrac{x - x_1}{x_2 - x_1} f(x_2)$, что равносильно $(x_2 - x_1) f(x) \leqslant (x_2 - x) f(x_1) + (x - x_1) f(x_2)$.

   II. Пусть $f : X \to \mathbb{R}$, X — выпуклое множество.
   $f(x)$ — выпуклая (выпуклая вниз) на X, если
   $$\forall x_1, x_2 \in X \qquad f\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) \leqslant \frac{f(x_1) + f(x_2)}{2}$$
   $f(x)$ — строго выпуклая на X, если
   $$\forall x_1, x_2 \in X \qquad f\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) < \frac{f(x_1) + f(x_2)}{2}$$
   $f(x)$ — вогнутая (выпуклая вверх) на X, если
   $$\forall x_1, x_2 \in X \qquad f\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) \geqslant \frac{f(x_1) + f(x_2)}{2}$$
   $f(x)$ — строго вогнутая на X, если
   $$\forall x_1, x_2 \in X \qquad f\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) > \frac{f(x_1) + f(x_2)}{2}$$

2. Доказать лемму.

   Лемма 0.1. *Пусть функция f определена на отрезке $[a, b]$. Тогда она выпукла тогда и только тогда, когда для любых $x_1, x, x_2 \in [a, b]$, $x_1 < x < x_2$, справедливо любое из следующих трех неравенств:*
   $$\frac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1} \leqslant \frac{f(x_2) - f(x)}{x_2 - x},$$
   $$\frac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1} \leqslant \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1},$$
   $$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \leqslant \frac{f(x_2) - f(x)}{x_2 - x},$$
   причем в случае строгой выпуклости неравенства также будут строгими.

3. Докажите, что если $f(x)$ выпуклая на (a, b), то для любой точки x_0, в которой функция дифференцируема верно
   $$f(x) \geq f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0), \quad \forall x \in (a, b)$$
   (т.е. график функции лежит выше касательной). Причем для строго выпуклых функций неравенство строгое при всех $x \neq x_0$.

4. Сформулируйте и докажите обратное утверждение.

5. Докажите, что функция $\ln x$ вогнута на $(0, +\infty)$.

6. Приведите пример функции, непрерывной в точке x_0, но не имеющей в этой точке ни левой, ни правой производной.

7. При каких α функция $f(x) = \begin{cases} x^\alpha \sin\left(\dfrac{1}{x}\right), \ x \neq 0, \\ 0, \ x = 0 \end{cases}$ дифференцируема в нуле.

8. Найти $f'_\pm(x_0)$ для функции $f(x) = |x - x_0|\varphi(x)$, где функция $\varphi(x)$ непрерывна в точке x_0.

9. Исследуйте на диффиренцируемость функцию $f(x) = |x^3(x+1)^2(x+2)|$.

10. Функция $f(x)$ дифференцируема в точке x_0. Найдите предел последовательности $a_n = n\left(f\left(x_0 + \dfrac{1}{n}\right) - f(x_0)\right)$. Верно ли обратное утверждение (т.е. влечет ли сходимость такой последовательности существование производной).