

Содержание

1	Последовательность.	2
1.1	Предел последовательности.	2
2	Возведение в вещественную степень.	5
3	Предел и непрерывность.	6
3.1	Замечательные пределы.	8
4	\bar{o} и \underline{O}.	9
4.1	Асимптотические равенства.	9
5	Функции, непрерывные на отрезке.	10
5.1	Первая теорема Вейерштрасса.	10
5.2	Вторая Теорема Вейерштрасса.	10
5.3	Теорема Больцано-Коши.	10
5.4	Третья Теорема Вейерштрасса.	10
5.5	Равномерная непрерывность.	10
6	Дифференциальное исчисление.	11
6.1	Правила дифференцирования.	11
6.2	Выпуклость.	12
6.3	Вторая производная.	15
6.3.1	Многочлен Тейлора.	15
6.3.2	Формула Тейлора.	15
6.3.3	Теорема Ферма.	15
6.3.4	Немного определений.	16
6.3.5	Теорема Ролля.	16
6.3.6	Теорема Коши.	16
6.3.7	Теорема Лагранжа.	16
6.3.8	Правило Лопиталя.	17
6.3.9	Утверждения.	18
6.3.10	Применение Тейлора.	18

1 Последовательность.

$$f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$$
$$f(n) =: f_n$$

Определение 1.1. Последовательность называется ограниченной сверху, если $\exists M : |f_n| \leq M$. Снизу, если $\exists m : f_n \geq m$. f_n — ограниченная, если ограничена сверху и снизу.

Определение 1.2. $M_0 = \sup f_n$, если M_0 — верхняя грань и $\forall \varepsilon > 0 \exists n_0 : f_{n_0} > M_0 - \varepsilon$. $m_0 = \inf f_n$, если m_0 — нижняя грань и $\forall \varepsilon > 0 \exists n_0 : f_{n_0} < m_0 + \varepsilon$.

Аксиома 1.1 (Вещественных чисел). Если множество X ограничено сверху, то $\exists \sup X$. Если f_n неограничено сверху, то $\sup f_n =: +\infty$. Если снизу, то $\inf f_n =: -\infty$.

Определение 1.3. f_n — бесконечно большая (бб), если $\forall \varepsilon > 0 \exists N = N(\varepsilon) : |f_n| > \frac{1}{\varepsilon} \forall n \geq N$. f_n — не бб, $\exists \varepsilon > 0 : \forall N \exists n > N : |f_n| \leq \frac{1}{\varepsilon}$.

Определение 1.4. f_n — бесконечно малая (бм), если $\forall \varepsilon > 0 \exists N = N(\varepsilon) : |f_n| < \varepsilon \forall n \geq N$.

Лемма 1.1. f_n — бм $\Rightarrow f_n$ — ограничена.

Доказательство. Пусть $\varepsilon = 1$, тогда $\exists N : |f_n| \leq 1 \forall n \geq N$.
 $M := \max\{|f_1|, \dots, |f_{N-1}|, 1\}$, тогда $|f_n| \leq M \forall n \in \mathbb{N}$. □

Лемма 1.2. а) f_n — бб $\Rightarrow \frac{1}{f_n}$ — бм

$$b) f_n$$
 — бм ($f_n \neq 0$) $\Rightarrow \frac{1}{f_n}$ — бб

Лемма 1.3. f_n — неограниченная последовательность, тогда существует бб подпоследовательность f_{n_k} .

Доказательство. $\exists n_1 : |f_{n_1}| > 1$,
 $\exists n_2 > n_1 : |f_{n_2}| > 2$,
 $\exists n_3 > n_2 : |f_{n_3}| > 3$,
 \vdots ,
 $\exists n_1 < n_2 < \dots < n_k < \dots$
 $|f_{n_k}| > k \Rightarrow f_{n_k}$ — бб. □

Лемма 1.4. а) бм + бм = бм

$$b) бм \cdot C = бм$$

$$c) бм \cdot бм = бм$$

$$d) бб \cdot C = бб, C \neq 0$$

$$e) бб \cdot бб = бб$$

1.1 Предел последовательности.

a_n — последовательность.

Определение 1.5. $a = \lim a_n$, если $\forall \varepsilon > 0 \exists N : |a_n - a| < \varepsilon \forall n \geq N$.

Определение 1.6. Эпсилон окрестность: $U_\varepsilon(a) := (a - \varepsilon; a + \varepsilon)$. Выколотая эпсилон окрестность: $\mathring{U}_\varepsilon(a) := U_\varepsilon(a) \setminus \{a\}$.

$$\varepsilon_1 < \varepsilon_2 \Rightarrow U_{\varepsilon_1}(a) \subset U_{\varepsilon_2}(a), a \in \overline{\mathbb{R}}.$$

Определение 1.7. $\mathbb{R} \cup \{\pm\infty\} = \overline{\mathbb{R}}$ — расширенная числовая прямая.

Определение 1.8. $\varepsilon > 0$ $U_\varepsilon(+\infty) = (\frac{1}{\varepsilon}; +\infty)$; $U_\varepsilon(-\infty) = (-\infty; -\frac{1}{\varepsilon})$.

$$\lim |a_n| = +\infty \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists N(\varepsilon) : |a_n| > \frac{1}{\varepsilon}.$$

$$\text{Если } a_n \text{ — бб} \Leftrightarrow \lim |a_n| = +\infty.$$

$$\text{Если } a_n \text{ — бм} \Leftrightarrow \lim |a_n| = 0.$$

Утверждение 1.1. $\lim a_n = a \Leftrightarrow \exists$ бм последовательность d_n , такая что $a_n = a + d_n$.

Утверждение 1.2. Если предел последовательности существует, то он единственный.

Доказательство. $\exists a < b$ и $a = \lim a_n, b = \lim a_n$. Тогда $\varepsilon := \frac{b-a}{42}$:

$$\exists N_1 : a_n \in U_\varepsilon(a) \forall n \geq N_1$$

$$\exists N_2 : a_n \in U_\varepsilon(b) \forall n \geq N_2$$

$$\Rightarrow a_n \in (U_\varepsilon(a) \cap U_\varepsilon(b)) = \emptyset \forall n \geq \max\{N_1, N_2\}!?!.$$

□

Лемма 1.5 (Предельный переход в неравенства). $a_n \leq b_n \forall n \geq N_0$. Пусть $\exists \lim a_n = a; \lim b_n = b$, $a, b \in \overline{\mathbb{R}}$. Тогда $a \leq b$.

Доказательство. Пусть $a > b$. Тогда $\varepsilon := \frac{a-b}{42}$:

$$\exists N_1 : a_n \in U_\varepsilon(a) \forall n \geq N_1$$

$$\exists N_2 : a_n \in U_\varepsilon(b) \forall n \geq N_2$$

$$\Rightarrow a_n > b_n \forall n \geq \max\{N_1, N_2\}!?!.$$

□

Лемма 1.6 (О сжатой последовательности). Пусть $a_n \leq b_n \leq c_n \forall n \geq N_0$ и $\exists \lim a_n = \lim c_n = a \in \overline{\mathbb{R}}$, тогда $\exists \lim b_n = a$.

Доказательство. $\varepsilon > 0$:

$$\exists a_n \in U_\varepsilon, n \geq N_1$$

$$\exists c_n \in U_\varepsilon, n \geq N_2$$

$$\Rightarrow b_n \in U_\varepsilon : \forall n \geq \{N_1, N_2, N_0\} =: N \Rightarrow a = \lim b_n \text{ по определению.}$$

□

Лемма 1.7 (Об отделимости от нуля). Пусть $\exists \lim a_n = a > 0$. Тогда $\exists N : a_n > \frac{a}{2} > 0, \forall n \geq N$.

Следствие. Если $\lim a_n \neq 0 \Rightarrow \frac{1}{a_n}$ ограничена ($a_n \neq 0$).

Доказательство. $\lim a_n = a > 0$

$$\exists N_1 : a_n > \frac{a}{2} \Rightarrow 0 < \frac{1}{a_n} < \frac{2}{a} \forall n \geq N_1$$

$$\min\{a_1, \dots, a_{N-1}, \frac{a}{2}\} \leq \frac{1}{a_n} \leq \max\{a_1, \dots, a_{N-1}, \frac{2}{a}\}$$

□

Теорема 1.1 (Арифметические свойства предела). Пусть $\lim a_n = a, \lim b_n = b; a, b \in \overline{\mathbb{R}}$. Тогда:

$$1. \lim(a_n + b_n) = a + b, \text{ кроме случаев } +\infty + (-\infty), -\infty + (+\infty)$$

$$2. \lim(ka_n) = ka, \text{ кроме случая } 0 \cdot (\pm\infty)$$

$$3. \lim(a_n \cdot b_n) = ab, \text{ кроме случая } 0(\pm\infty)$$

$$4. \lim \frac{a_n}{b_n} = \frac{a}{b}, \text{ кроме случаев } \frac{0}{0}, \frac{\infty}{\infty}$$

Доказательство. $a, b \in \mathbb{R}$. $a_n = a + \alpha_n, b_n = b + \beta_n; \alpha_n, \beta_n \text{ — бм.}$

$$1. a_n + b_n = (a + b) + (\alpha_n + \beta_n) \Leftrightarrow \lim(a_n + b_n) = a + b.$$

2. Аналогично.

$$3. a_n b_n = (a + \alpha_n)(b + \beta_n) = ab + \alpha_n b + \beta_n a + \alpha_n \beta_n$$

4. Если $b \neq 0$ $\frac{1}{b_n}$ — ограничена

$$\frac{a_n}{b_n} - \frac{a}{b} = \frac{a + \alpha_n}{b + \beta_n} - \frac{a}{b} = \frac{\alpha_n b - \beta_n a}{b_n b} = \frac{1}{b} \cdot \frac{1}{b_n} \cdot (\alpha_n b - \beta_n a)$$

Если $b = 0 \Rightarrow b_n \text{ бм} \Rightarrow \frac{1}{b_n} \text{ бб} \Rightarrow a_n \cdot \frac{1}{b_n} = \text{ограниченная бб}$

□

Определение 1.9. *Линейное пространство — множество, сумма двух элементов которого лежит в этом множестве и элемент с коэффициентом лежит в этом множестве.*

Определение 1.10. *Последовательность называется возвратной, если $a_n = \beta_{n-1}a_{n-1} + \beta_{n-2}a_{n-2} + \dots + \beta_{n-k}a_{n-k}$; β_i — фиксированные коэффициенты.*

$a_n^{(1)}, a_n^{(2)} \Rightarrow \forall \lambda, \mu \in \mathbb{R} \lambda a_n^{(1)} + \mu a_n^{(2)}$ тоже удовлетворяет (x).

$$a_n := t^n$$

$$t^k = \beta_{n-1}t^{k-1} + \dots + \beta_{n-k}$$

t_0 — простой корень, то t_0^n

t_0 — корень (m) $\Rightarrow t_0^n; nt_0^n; n^2 t_0^n; \dots; n^{m-1} t_0^n$

Теорема 1.2. 1. Пусть a_n возрастает и ограничена сверху. Тогда $\exists \lim a_n = \sup a_n$

2. Пусть a_n убывает и ограничена снизу. Тогда $\exists \lim a_n = \inf a_n$

Доказательство. fix $\varepsilon > 0$. Так как a_n — ограничена, то $\exists M \sup a_n \in \mathbb{R}$; И $\exists N : a_N > M - \varepsilon$.

Тогда $\begin{cases} a_n \geq M - \varepsilon \\ a_n \leq M < M + \varepsilon \end{cases} \quad \forall n \geq N, \text{ так как } a_n \uparrow \Rightarrow \exists N : |a_n - M| < \varepsilon \forall n \geq N \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = M$ по определению. □

Определение 1.11. *Найти предел последовательности $a_n = (1 + \frac{1}{n})^n$.*

$$b_n = (1 + \frac{1}{n})^{n+1}; b_1 = 4, b_2 = 3, \dots b_n \downarrow$$

$$b_n \geq 1$$

Докажем, что b_n убывает.

$$\frac{b_n}{b_{n+1}} = \frac{(\frac{n+1}{n})^{n+1}}{(\frac{n+2}{n+1})^{n+2}} = \frac{n+1}{n} \cdot \frac{n+1}{n+2} \cdot \frac{n+1}{n+2} = \frac{n+1}{n+2} \cdot (\frac{n^2+2n+1}{n^2+2n})^{n+1} = \frac{n+1}{n+2} \cdot (1 + \frac{1}{n^2+2n})^{n+1} \stackrel{\text{Неравенство Бернулли}}{>} \frac{n+1}{n+2}.$$

$$(1 + \frac{n+1}{n^2+2n}) = \frac{(n+1)(n^2+3n+1)}{(n+2)(n^2+2n)} = \frac{n^3+4n^2+4n+1}{n^3+4n^2+4n} > 1.$$

$$a_n = \frac{b_n}{(1 + \frac{1}{n})}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b_n}{1 + \frac{1}{n}} = \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} b_n}{\lim_{n \rightarrow \infty} (1 + \frac{1}{n})} = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n - \text{существует.}$$

$$e := \lim_{n \rightarrow \infty} (1 + \frac{1}{n})^n \approx 2.718281828459045\dots$$

Теорема 1.3 (Больцано-Вейерштрасса). Пусть последовательность a_n ограничена. Тогда существует сходящаяся подпоследовательность.

Доказательство. $|a_n| \leq M$

$[-M = \alpha_1; M = \beta_1]$. α_2 — середина. $a_1 = x_1 \in [\alpha_1; \alpha_2]$.

$[\alpha_2; \beta_2]$. β_3 — середина. $x_2 = a_{\min n} \in [\alpha_2; \beta_3]$.

И тд.

α_k неубывающая и ограниченная сверху. $\exists \lim \alpha_k = \alpha$. β_k неубывающая и ограниченная сверху. $\exists \lim \beta_k = \beta$.

$$\beta - \alpha = \lim_{k \rightarrow \infty} (\beta_k - \alpha_k) = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{2M}{2^{k-1}} = 0.$$

По построению x_k — подпоследовательность и $\alpha_k \leq x_k \leq \beta_k \Rightarrow \exists \lim x_k$. □

Определение 1.12. Последовательность называется фундаментальной (или последовательностью Коши), если $\forall \varepsilon > 0 \exists N(\varepsilon): |a_n - a_k| < \varepsilon \forall n, k \geq N$.

Утверждение 1.3. Пусть $\exists \lim a_n = a \in \mathbb{R}$. Тогда $\{a_n\}$ фундаментальная.

Доказательство. fix $\varepsilon > 0 \exists N: |a_n - a| < \frac{\varepsilon}{2} \forall n \geq N$. Тогда $\forall n, k \geq N |a_n - a_k| = |(a_n - a) + (a - a_k)| \leq |a_n - a| + |a_k - a| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$. \square

Теорема 1.4 (Коши). Пусть $\{a_n\}$ фундаментальная последовательность. Тогда $\exists \lim a_n$.

Доказательство. 1) (!) $\{a_n\}$ ограничена.

$$\varepsilon = 1: \exists N: |a_n - a_k| \leq \varepsilon \forall n, k \geq N \Rightarrow a_k \in [a_{N-1}; a_{N+1}] \forall k \geq N$$

$$M = \max\{|a_1|, |a_2|, \dots, |a_{N+1}|\} \Rightarrow |a_n| \leq M \forall n.$$

2) Тогда по теореме Вейерштрасса $\exists a_{n_k}$ — подпоследовательность; $\lim_{n \rightarrow \infty} a_{n_k} = a$.

3) fix $\varepsilon > 0$. $\exists N_1: |a_{n_k} - a| < \frac{\varepsilon}{2} \forall n_k \geq N_1$

$$\exists N_2: |a_m - a_n| < \frac{\varepsilon}{2} \forall m, n \geq N_2$$

Пусть $n \geq \max\{N_1, N_2\} \exists n_k \geq m$.

$$|a_m - a| = |(a_m - a_{n_k}) + (a_{n_k} - a)| \leq |a_m - a_{n_k}| + |a_{n_k} - a| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \Rightarrow a = \lim_{m \rightarrow \infty} a_m.$$

\square

2 Возведение в вещественную степень.

$n \in \mathbb{N}; x^n = x \cdot x \cdot \dots \cdot x, n$ раз.

$$x^{-n} = \frac{1}{x^n}, x \neq 0$$

$$x^0 := 1$$

$$\sqrt[p]{x} = x^{\frac{1}{p}}$$

$x^p, p \in \mathbb{Q}, x \geq 0$ ($p > 0$) или $x > 0$ ($p \geq 0$)

fix $a > 0, x \in \mathbb{R}$

$$a^x := \lim_{n \rightarrow \infty} a^{x_n}, \text{ где } \{x_n\} \text{ последовательность, такая что } x_n \in \mathbb{Q}, \lim_{n \rightarrow \infty} x_n := x.$$

Корректность определения.

1. $x \in \mathbb{Q}$. Докажем, что a^x совпадает со старым определением.

$$x \in \mathbb{Q}, \text{ берем } x_n = x \Rightarrow a^x = a^x$$

2. Берем произвольную последовательность $\{x_n\}, x_n \rightarrow x \Rightarrow x_n$ — фундаментальная последовательность.

fix $\varepsilon > 0 |a^{x_n} - a^{x_k}| = a^{x_n} |1 - a^{x_k - x_n}|$. Сходится. Значит ограничена. Тогда a^{x_n} ограничена. Тогда $a^{x_n} |1 - a^{x_k - x_n}| \leq M \cdot |1 - a^{x_k - x_n}|$.

$$\exists N: |a^{\frac{1}{m}} - 1| < \frac{M}{\varepsilon} \forall m \geq N \Rightarrow |a^{\frac{1}{n}} - 1| < \frac{M}{\varepsilon} \Rightarrow \exists N_0: |x_n - x_k| < \frac{1}{N} \forall n, k \geq N$$

$M \cdot |1 - a^{x_k - x_n}| < M \cdot \frac{2}{M} \forall n, k \geq N_0 \Rightarrow a^{x_n}$ образует фундаментальную последовательность \Rightarrow (по теореме Коши) $\exists \lim_{n \rightarrow \infty} a^{x_n}$

3. $x_n \rightarrow x, y_m \rightarrow x, x_n, y_m \in \mathbb{Q}$

$$\exists a = \lim a^{x_n}; \alpha = \lim a^{y_m}$$

$$(a - \alpha) = \lim_{n \rightarrow \infty} (a^{x_n} - a^{y_m}) = \lim_{n \rightarrow \infty} a^{x_n} (1 - a^{x_n - y_m}) = 0$$

$$\lim (y_n - x_n) = x - x = 0$$

Свойства:

$$1. a^x \cdot a^y = a^{x+y}$$

Пусть $x_n \rightarrow x, y_n \rightarrow y; x_n, y_n \in \mathbb{Q}$

$$a^{x_n} \cdot a^{y_n} = a^{x_n+y_n}$$

$$a^x \cdot a^y = \lim a^{x_n} \cdot \lim a^{y_n} = \lim a^{x_n} \cdot a^{y_n} = \lim a^{x_n+y_n} = a^{x+y}$$

$$2. (a^x)^y = a^{xy}$$

Пусть $x_n \rightarrow x, y_n \rightarrow y; x_n, y_n \in \mathbb{Q}$

$$x_n y_n \rightarrow xy$$

$$\lim_{m \rightarrow \infty} (\lim_{n \rightarrow \infty} a^{x_n})^{y_m} = \lim_{n \rightarrow \infty} a^{x_n y_n}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (a^x)^{y_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} a^{x y_n}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |b^{y_n} - a^{x y_n}| = 0, \text{ где } b = a^x$$

$$\exists N : |a^{x_n} - b| < \varepsilon \quad \forall n \geq N$$

$$b - \varepsilon < a^{x_n} < b + \varepsilon$$

$$1 - \frac{\varepsilon}{b} < \frac{a^{x_n}}{b} < 1 + \frac{\varepsilon}{b} \quad \uparrow^{y_n}, y_n > 0, \text{ для } < 0 \text{ аналогично}$$

$$(1 - \frac{\varepsilon}{b})^{y_n} < (\frac{a^{x_n}}{b})^{y_n} < (1 + \frac{\varepsilon}{b})^{y_n}$$

$$1 - \frac{y_n \varepsilon}{b} < \frac{a^{x_n y_n}}{b^{y_n}} < 1 + \frac{y_n \varepsilon}{b}$$

$$\Rightarrow |\frac{a^{x_n y_n}}{b^{y_n}} - 1| \leq \frac{|y_n|}{b} \varepsilon$$

$$|a^{x_n y_n} - b^{y_n}| < \frac{|y_n|}{b} \cdot b^{y_n} \varepsilon \leq M \varepsilon \quad \forall n \geq N$$

$$\Rightarrow \lim |b^{y_n} - a^{x_n y_n}| = 0$$

fix $a > 0, a \neq 1$

$y = a^x, x \in \mathbb{R}$

Определение 2.1. $f(x)$ — возрастающая на X , если $\forall x_1, x_2 \in X \quad x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$. $f(x)$ — убывающая, если \leq .

Утверждение 2.1. При $a > 1$ $f(x) = a^x$ — возрастает на \mathbb{R} ; При $0 < a, < 1$ $f(x) = a^x$ — убывает на \mathbb{R} .

Пусть $x < \xi, x_n \rightarrow x, \xi_n \rightarrow \xi$

$x < x_0 < \xi_0 < \xi$ и x_0 не в окрестности x и аналогично ξ .

$\forall n \geq N$

$$x_n < x_0 < \xi_0 < \xi$$

$$\text{Тогда } a^{x_n} < a^{x_0} < a^{\xi_0} < a^{\xi_n}$$

$$a^x \leq a^{x_0} < a^{\xi_0} \leq a^\xi \Rightarrow a^x < a^\xi$$

$$0 < a < 1$$

$$a^x = (\frac{1}{a})^{-x}; a^\xi = (\frac{1}{a})^{-\xi}$$

$$x < \xi \Rightarrow -x > -\xi \quad (\frac{1}{a})^{-x} > (\frac{1}{a})^{-\xi} \Rightarrow a^x > a^\xi$$

3 Предел и непрерывность.

Определение 3.1. Предельная точка x_0 области D — такая точка, что $\forall \varepsilon > 0 \quad \dot{U}_\varepsilon(x_0) \cap D \neq \emptyset$. Множество предельных точек множества D — называется замыкание D , обозначается \overline{D} .

$f : D \rightarrow \mathbb{R}; D \subset \mathbb{R}$. Пусть x_0 — предельная точка D .

Определение 3.2 (По Гейне). Если \forall последовательности $x_n \rightarrow x_0; x_n \neq x_0 \quad \exists \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = a$, то говорят, что $\exists \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = a$.

Определение 3.3. f непрерывна в точке $x_0 \in D$, если $\exists \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$.

Заметка 3.1. Функция не непрерывна:

1. $\lim_{x \rightarrow x_0} \exists$, но $\neq f(x_0)$ — устранимый разрыв.

2. $\lim_{x \rightarrow x_0} \nexists$ — неустранимый разрыв.

(a) $\lim_{x \rightarrow x_0-0} f(x) = a$, $\lim_{x \rightarrow x_0+0} f(x) = b$, $a, b \in \mathbb{R}$ — разрыв I рода или скачок.

(b) Разрыв второго рода или существенная особенность.

Определение 3.4 (По Коши). $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = a$, если $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0: f(x) \subset U_\varepsilon(a) \forall x \in \mathring{U}_\delta(x_0) \cap D(f)$.

Утверждение 3.1. Определения по Коши и по Гейне равносильны.

Доказательство. Доказательство Коши \Rightarrow Гейне.

Известно, что $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0: f(x) \in U_\varepsilon(a) \forall x \in \mathring{U}_\delta(x_0)$.

Берем произвольную $x_n \rightarrow x_0$: fix $\varepsilon > 0 \Rightarrow \exists \delta$, такое что выполнено $f(x) \in U_\varepsilon(a) \forall x \in \mathring{U}_\delta(x_0)$ и $\exists N: x_n \in U_\delta(x_0) \forall n \geq N \Rightarrow \exists N: \forall n \geq N x_n \in \mathring{U}_\delta(x_0) \Rightarrow f(x_n) \in U_\varepsilon(a)$.

Те $\forall \varepsilon > 0 \exists N: \forall n \geq N f(x_n) \in U_\varepsilon(a)$, те $a = \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n)$

Доказательство не Коши \Rightarrow не Гейне.

Нет предела по Коши. fix a : $\exists \varepsilon: \forall \delta > 0. \exists \tilde{x} \in \mathring{U}_\delta(x_0): f(\tilde{x}) \notin U_\varepsilon(a) \Rightarrow a$ не является пределом по Гейне?

От противного. $a = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ по Гейне.

$\delta_n = \frac{1}{n} \exists \tilde{x}_n \in \mathring{U}_{\frac{1}{n}}(x_0)$ и $f(\tilde{x}_n) \notin U_\varepsilon(a) \Rightarrow \tilde{x}_n \rightarrow x_0, \tilde{x}_n \neq x_0$, но $\lim_{n \rightarrow \infty} f(\tilde{x}_n) \neq a$

□

Утверждение 3.2. $f(x)$ бесконечно малая в точке x_0 , если $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0$.

Утверждение 3.3. $f(x)$ бесконечно большая в точке x_0 , если $\lim_{x \rightarrow x_0} |f(x)| = +\infty$.

Лемма 3.1 (О двух милиционерах). Пусть $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$ в некоторой окрестности точки x_0 (передельная точка $D(f), D(g), D(h)$). Если $\exists \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} h(x) = a$, то $\exists \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = a$.

Лемма 3.2 (Предельный переход в неравенства). Пусть $f(x) \leq g(x)$ в некоторой окрестности точки x_0 (передельная точка $D(f), D(g)$). Если $\exists \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = a$; $\exists \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = b$, то $a \leq b$.

Лемма 3.3 (Об ограниченности). Если $\exists \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = a \in \mathbb{R}$. Тогда f ограничена в нектором $\mathring{U}(x_0)$.

Доказательство. $\varepsilon = 1: \exists \delta > 0: |f(x) - a| < 1 \forall x \in \mathring{U}_\delta(x_0) \Rightarrow |f(x)| \leq |a| + 1 \forall x \in \mathring{U}_\delta(x_0)$ □

Лемма 3.4 (Об отделимости от нуля). Если $\exists \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = a > 0$. Тогда $\inf f(x) > 0$ в некоторой $\mathring{U}(x_0)$ (f отделима от нуля).

Доказательство. $\varepsilon = \frac{a}{42}: \exists \delta < \frac{a}{42} \forall x \in \mathring{U}_\delta(x_0) \Rightarrow f(x) \geq \frac{41}{42}a > 0 \forall x \in \mathring{U}_\delta(x_0) \Rightarrow \inf f(x) \geq \frac{41}{42}a > 0$. □

Следствие 3.1. Если $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \neq 0$, то $\frac{1}{f(x)}$ ограничена в некоторой $\mathring{U}(x_0)$.

Определение 3.5. $x^\alpha, \alpha \in \mathbb{R}; a^x; \log_a x; \sin, \cos, \operatorname{tg}, \arcsin, \arccos, \operatorname{arctg}$ — основные элементарные функции.

Определение 3.6. Функция называется элементарной, если она получается арифметическими операциями или композицией конечного числа основных элементарных функций.

Утверждение 3.4. Любая элементарная функция непрерывна.

Теорема 3.1 (Теорема о пределе композиций). $f : X \rightarrow Y; g : Y \rightarrow Z, x_0$ — предельная точка множества X, y_0 — предельная точка множества $Y. \exists \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = y_0, \exists \lim_{y \rightarrow y_0} g(y) = g(y_0) = a$. Тогда $\exists \lim_{x \rightarrow x_0} g(f(x)) = a$.

Доказательство. $\forall x \in \mathring{U}_\delta(x_0) \Rightarrow g(f(x)) \in U_\varepsilon(a)$
 $a = \lim_{y \rightarrow y_0} g(y) \Rightarrow \exists \varepsilon_1 > 0: y \in U_{\varepsilon_1}(y_0) \Rightarrow g(y) \in U_\varepsilon(g(y_0))$
 $\exists \delta > 0: x \in \mathring{U}_\delta(x_0) \Rightarrow f(x) \in U_{\varepsilon_1}(y_0) \Rightarrow g(f(x)) \in U_\varepsilon(g(y_0))$ □

Теорема 3.2 (Непрерывности обратной функции). Пусть f непрерывная биекция на $\langle a; b \rangle$. Тогда f^{-1} тоже непрерывная биекция $Y \rightarrow \langle a; b \rangle$.

Доказательство. НУО f строго возрастает на $\langle a; b \rangle$
 $\text{fix } \varepsilon > 0$, тогда $y_1 := f(x_0 - \varepsilon); y_2 := f(x_0 + \varepsilon)$
 $\delta = \min\{y_2 - y_0; y_0 - y_1\}$
Тогда $\forall y \in U_\delta(y_0) \Rightarrow f^{-1}(y) \in U_\varepsilon(f^{-1}(y_0))$ тк $y_1 < y < y_2 \Rightarrow f^{-1}(y_1) < f^{-1}(y) < f^{-1}(y_2)$ □

3.1 Замечательные пределы.

1. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$
2. $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$
3. $\lim_{x \rightarrow 0} (1 + x)^{\frac{1}{x}} = e$
4. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1 + x)}{x} = 1$
5. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1; \lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - 1}{x} = \ln a$
6. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1 + x)^m - 1}{x} = m; m \in \mathbb{R}$
7. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \frac{1}{2}$
8. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$
9. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{n}{2^n} = 0$

Утверждение 3.5. $(1 + x)^p \simeq 1 + px, x \rightarrow 0$.

4 \bar{o} и \underline{O} .

Определение 4.1. Символ Ландау — \bar{o} .

1. $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$, тогда $f(x) := \bar{o}(g(x))$, $x \rightarrow x_0$.
2. $f(x) = \bar{o}(g(x))$, если $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0: |f(x)| \leq \varepsilon |g(x)|$, $\forall x \in \mathring{U}_\delta(x_0)$.

Свойство 4.1. 1. $f(x)$ называется бесконечно малой в точке x_0 , если $f(x) = \bar{o}(1)$, $x \rightarrow x_0$.

2. $\bar{o}(f(x)) + \bar{o}(f(x)) = \bar{o}(f(x))$, $x \rightarrow x_0$.
3. $C \cdot \bar{o}(f(x)) = \bar{o}(f(x))$, $x \rightarrow x_0$.
4. $\bar{o}(\bar{o}(f(x))) = \bar{o}(f(x))$, $x \rightarrow x_0$.

Определение 4.2. 1. Пусть f, g обе бесконечно большие или бесконечно малые. $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$, тогда $f(x) \sim g(x)$, $x \rightarrow x_0$.

2. $f(x) \sim g(x) \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 (1 - \varepsilon)|g(x)| \leq |f(x)| \leq (1 + \varepsilon)|g(x)|$, $\forall x \in \mathring{U}_\delta(x_0)$.

Утверждение 4.1. $f(x) \sim g(x)$, $x \rightarrow x_0 \Leftrightarrow f(x) = g(x) + \bar{o}(g(x))$, $x \rightarrow x_0$.

Определение 4.3. $f(x) = \underline{O}(g(x))$, $x \rightarrow x_0$, если $\exists C > 0: |f(x)| \leq C|g(x)|$ в некоторой выколотой окрестности точки x_0 .

Определение 4.4. $f(x) \asymp g(x)$, $x \rightarrow x_0$, если $\exists c_1, c_2 > 0: c_1|g(x)| \leq |f(x)| \leq c_2|g(x)|$ в некоторой выколотой окрестности точки x_0 .

Теорема 4.1. Пусть $f(x) \sim f_1(x)$, $x \rightarrow x_0$ и функции не обращаются в 0 в некоторой $\mathring{U}(x_0)$. Тогда $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)g(x)$ и $\lim_{x \rightarrow x_0} f_1(x)g(x)$ \exists или \nexists одновременно, и если \exists , то они равны. Словами: в произведение пределов сомножителя можно заменять на эквивалентные; слагаемые нельзя!

Доказательство. $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)g(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{f_1(x)} \cdot f_1(x)g(x)$. □

Утверждение 4.2. $(1 + t)^\alpha = 1 + \alpha t + \bar{o}(t)$, $t \rightarrow 0$.

Утверждение 4.3. $e^t = 1 + t + \bar{o}(t)$, $t \rightarrow 0$.

Утверждение 4.4. Если $\exists \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = k \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \Rightarrow f(x) \asymp g(x), x \rightarrow x_0 \Rightarrow f(x) = \underline{O}(g(x))$ и $g(x) = \underline{O}(f(x)), x \rightarrow x_0$.

4.1 Асимптотические равенства.

1. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$; $\sin x \sim x$; $\sin x = x + \bar{o}(x)$
2. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \frac{1}{2}$; $1 - \cos x \sim \frac{x^2}{2}$; $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + \bar{o}(x^2)$
3. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$; $\ln(1+x) \sim x$; $\ln(1+x) = x + \bar{o}$
 $\log_a(1+x) \sim \frac{x}{\ln a}$; $\log_a(1+x) = \frac{x}{\ln a} + \bar{o}(x)$
4. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$; $e^x - 1 \sim x$; $e^x = 1 + x + \bar{o}(x)$
 $e^x - 1 = x + \bar{o}(x)$; $a^x = 1 + x \ln a + \bar{o}(x)$
5. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)^s - 1}{x} = s$; $(1+x)^s - 1 \sim sx$; $(1+x)^s = 1 + sx + \bar{o}(x)$

5 Функции, непрерывные на отрезке.

Определение 5.1. f непрерывна на отрезке $[a, b]$, $a, b \in \mathbb{R}$; $a < b \Leftrightarrow \forall x_0 \in [a, b] \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$.

Замечка 5.1. $C(X) = \{\text{множество функций непрерывных на множестве } X\}$. $f \in C(x): \forall x_0 \in X \forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0: |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon \forall |x - x_0| < \delta$.

5.1 Первая теорема Вейерштрасса.

Теорема 5.1 (Первая теорема Вейерштрасса). $f \in C([a, b])$. Тогда f ограничена на $[a, b]$.

Доказательство. НУО докажем, что f ограничена сверху.

f неограничена сверху. $\exists x_n \in [a, b]: f(x_n) > n$. $\{x_n\} \in [a, b]$. $\exists x_{n_k} \rightarrow x_0 \in [a, b]$. $f(x_0) = \lim_{x_{n_k} \rightarrow x_0} f(x_{n_k}) = \infty$ #. \square

5.2 Вторая Теорема Вейерштрасса.

Теорема 5.2 (Вторая Теорема Вейерштрасса). Пусть $f \in C([a, b])$. Тогда $\exists \bar{x}, \underline{x} \in [a, b]: f(\bar{x}) = \min_{[a, b]} f(x), f(\underline{x}) = \max_{[a, b]} f(x)$.

Доказательство. # $\inf_{[a, b]} f(x) = m$ и не достигается. $f(x) > m \forall x \in [a, b] \Rightarrow g(x) := \frac{1}{f(x) - m}$ неограничена на $[a, b]$. Но $\forall \varepsilon > 0 \exists x_\varepsilon \in [a, b]: f(x_\varepsilon) < m + \varepsilon \Rightarrow g(x_\varepsilon) > \frac{1}{\varepsilon} \Rightarrow g$ неограничена сверху на $[a, b]$ #. \square

5.3 Теорема Больцано-Коши.

Теорема 5.3 (Больцано-Коши). $f \in C([a, b])$, $f(a)f(b) < 0$. Тогда $\exists x_0 \in [a, b]: f(x_0) = 0$.

Доказательство №1. НУО $f(a) < 0; f(b) > 0$. $a_0 := a, b_0 := b$. $[a_k, b_k] \rightarrow [a_{k+1}, b_{k+1}]$. $\lim a_k = \alpha, \lim b_k = \beta$. $\lim(a_k - b_k) = \alpha - \beta, \lim \frac{b - a}{2^k} = 0 \Rightarrow \alpha = \beta =: x_0$. $f(a_k) < 0, f(b_k) > 0$. $\begin{cases} f(x_0) = \lim_{k \rightarrow \infty} f(a_k) \leq 0 \\ f(x_0) = \lim_{k \rightarrow \infty} f(b_k) \geq 0 \end{cases} \Rightarrow f(x_0) = 0$. \square

Доказательство №2. $X = \{x \in [a, b]: f(x) < 0\} \neq \emptyset$. $\exists x_0 = \sup X < b$. \square

5.4 Третья Теорема Вейерштрасса.

Теорема 5.4 (Третья Теорема Вейерштрасса). $f \in C([a, b])$, $M = \max_{[a, b]} f(x), m = \min_{[a, b]} f(x)$. Тогда $E(f) = [m; M]$.

5.5 Равномерная непрерывность.

Определение 5.2 (Равномерная непрерывность). f равномерно непрерывна на X , если $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0: \forall x_0 \in X |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon \forall |x - x_0| < \delta$.

Теорема 5.5 (?Коши-Вейерштрасса?). Пусть $f \in C([a, b])$. Тогда f равномерно непрерывна на $[a, b]$.

Доказательство. # $\exists \varepsilon > 0: \forall \delta > 0: \exists x_1, \xi |f(x) - f(\xi)| \geq \varepsilon, |x - \xi| < \delta$. Возьмем $\delta_1 = 1 \exists x_1, \xi_1: |x_1 - \xi_1| < 1$ и $|f(x_1) - f(\xi_1)| \geq \varepsilon, \dots, \delta_n = \frac{1}{n} \exists x_n, \xi_n: |x_n - \xi_n| < \frac{1}{n}$ и $|f(x_n) - f(\xi_n)| \geq \varepsilon$. $\{x_n\}, \{\xi_n\} \subset [a, b]$. $\{x_{n_m} \rightarrow x_0\}, \{\xi_{n_m} \rightarrow \xi_0\} \Rightarrow x_0 = \xi_0$. $|f(x_{n_m}) - f(\xi_{n_m})| \geq \varepsilon$ #. \square

6 Дифференциальное исчисление.

Определение 6.1. f дифференцируема в точке x_0 , если $\exists k \in \mathbb{R}: f(x) = f(x_0) + k(x - x_0) + \bar{o}(x - x_0)$.

Утверждение 6.1. Если f дифференцируема в точке $x_0 \Leftrightarrow \exists \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = k$.

Доказательство. $\bar{o}(x - x_0) + k(x - x_0) = f(x) - f(x_0) \Leftrightarrow k + \frac{\bar{o}(x - x_0)}{x - x_0} = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \Leftrightarrow k = k + \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\bar{o}(x - x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$. \square

Определение 6.2. Такое k называется производной в точке x_0 . Обозначается $f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$.

Утверждение 6.2. Если f дифференцируема, то она непрерывна.

Определение 6.3. Производная (функция) функции $f \rightarrow g(x) = f'(x): x_0 \mapsto \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$;

$$\Delta x = x - x_0; x_0 \mapsto \lim_{x \rightarrow \Delta x} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}; f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}.$$

Замечка 6.1. $f(\tilde{x}) = f(x) \cdot f'(x)(\tilde{x} - x) + \bar{o}(\tilde{x} - x)$. $f(x + \Delta x) = f(x) + f'(x) \cdot \Delta x + \bar{o}(\Delta x)$; $\Delta f(x) := f(x + \Delta x) - f(x)$. $\Delta f(x) = f'(x) \cdot \Delta x + \bar{o}(\Delta x)$, $\Delta x \rightarrow 0$.

Определение 6.4 (Дифференциал функции). $df(x) := f'(x)\Delta x$.

Замечка 6.2. Пусть $f(x) = x$. $\Delta x = 1 \cdot \Delta x + 0$, $\Delta f(x) = f'(x)\Delta x + \bar{o}(\Delta x) \Rightarrow f'(x) = 1 \Rightarrow df(x) = \Delta x$.
Тогда $df(x) = f'(x)dx$, $f'(x) = \frac{df(x)}{dx}$.

Замечка 6.3. Дифференциал — линейная часть малого приращения функции.

6.1 Правила дифференцирования.

(рассматриваем дифференцируемые функции):

1. $(c)' = 0$; $(cf(x))' = cf'(x)$
2. $(f(x) \pm g(x))' = f'(x) \pm g'(x)$
3. $(f(x) \cdot g(x))' = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x) \rightarrow d(fg) = df \cdot g + dg \cdot f$
4. $\left(\frac{1}{f(x)}\right)' = -\frac{f'(x)}{f^2(x)}$, $f(x) \neq 0$
5. $\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)}$
6. Пусть f дифференцируема в точке x , g дифференцируема в точке $f(x)$. Тогда $g(f(x))$ дифференцируема в точке x и $(g(f(x)))' = g'(f(x)) \cdot f'(x)$ или $dg(f(x)) = g'(f(x)) \cdot df(x)$
7. f дифференцируема в точке x_0 и $f'(x_0) \neq 0$. Если f обратима в окрестности точки x_0 , то f^{-1} дифференцируема в точке $y_0 = f(x_0)$ и $(f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)} = \frac{1}{f'(f^{-1}(y_0))}$
8. $(\sin x)' = \cos x$

9. $(\cos x)' = -\sin x$
10. $(\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$
11. $(\operatorname{ctg} x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$
12. $(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
13. $(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
14. $(\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1+x^2}$
15. $(\operatorname{arcctg} x)' = -\frac{1}{1+x^2}$
16. $(e^x)' = e^x; (a^x)' = a^x \cdot \ln a$
17. $(\ln x)' = \frac{1}{x}; (\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}$
18. $(x^p)' = px^{p-1}$

6.2 Выпуклость.

Определение 6.5. Функция называется *выпуклой* на отрезке $[a, b]$ если для каждого отрезка $[x_1, x_2]$, принадлежащего $[a, b]$, график функции f расположен не выше отрезка с концами в $(x_1, f(x_1))$ и $(x_2, f(x_2))$ (строго выпуклой, если ниже). Иными словами, если для любых $x_1, x, x_2 \in [a, b]$, $x_1 < x < x_2$ справедливо неравенство $f(x) \leq y(x) = \frac{x_2 - x}{x_2 - x_1} f(x_1) + \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} f(x_2)$, что равносильно $(x_2 - x_1)f(x) \leq (x_2 - x)f(x_1) + (x - x_1)f(x_2)$.

Определение 6.6 (Из конспекта к зачету). Пусть $f : X \rightarrow \mathbb{R}$, X — выпуклое множество. $f(x)$ — *выпуклая* (выпуклая вниз) на X , если

$$\forall x_1, x_2 \in X \quad f\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) \leq \frac{f(x_1) + f(x_2)}{2}$$

$f(x)$ — *строго выпуклая* на X , если

$$\forall x_1, x_2 \in X \quad f\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) < \frac{f(x_1) + f(x_2)}{2}$$

$f(x)$ — *вогнутая* (выпуклая вверх) на X , если

$$\forall x_1, x_2 \in X \quad f\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) \geq \frac{f(x_1) + f(x_2)}{2}$$

$f(x)$ — *строго вогнутая* на X , если

$$\forall x_1, x_2 \in X \quad f\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) > \frac{f(x_1) + f(x_2)}{2}$$

Лемма 6.1. Пусть функция f определена на отрезке $[a, b]$. Тогда она выпукла тогда и только тогда, когда для любых $x_1, x, x_2 \in [a, b]$, $x_1 < x < x_2$, справедливо любое из следующих трех неравенств:

$$\frac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1} \leq \frac{f(x_2) - f(x)}{x_2 - x},$$

$$\frac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1} \leq \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1},$$

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \leq \frac{f(x_2) - f(x)}{x_2 - x},$$

причем в случае строгой выпуклости неравенства также будут строгими.

Доказательство. Запишем $x_2 - x_1$ как $(x_2 - x) + (x - x_1)$, тогда неравенство примет вид

$$(x_2 - x)f(x) + (x - x_1)f(x) \leq (x_2 - x)f(x_1) + (x - x_1)f(x_2),$$

после преобразования получаем

$$(x_2 - x)(f(x) - f(x_1)) \leq (x - x_1)(f(x_2) - f(x)),$$

что равносильно

$$\frac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1} \leq \frac{f(x_2) - f(x)}{x_2 - x}.$$

Запишем $x_2 - x$ как $(x_2 - x_1) - (x - x_1)$, тогда неравенство примет вид

$$(x_2 - x_1)f(x) \leq (x_2 - x_1)f(x_1) - (x - x_1)f(x_1) + (x - x_1)f(x_2),$$

после преобразования получаем

$$(x_2 - x_1)(f(x) - f(x_1)) \leq (x - x_1)(f(x_2) - f(x_1)),$$

что равносильно

$$\frac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1} \leq \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}.$$

Запишем $x - x_1$ как $(x_2 - x_1) - (x_2 - x)$, тогда неравенство примет вид

$$(x_2 - x_1)f(x) \leq (x_2 - x)f(x_1) + (x_2 - x_1)f(x_2) - (x_2 - x)f(x_2),$$

после преобразования получаем

$$(x_2 - x)(f(x_2) - f(x_1)) \leq (x_2 - x_1)(f(x_2) - f(x)),$$

что равносильно

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \leq \frac{f(x_2) - f(x)}{x_2 - x}.$$

□

Определение 6.7 (Левая и правая производная).

$$f'_-(x_0) = f'(x_0 - 0) := \lim_{h \rightarrow +0} \frac{f(x_0) - f(x_0 - h)}{h},$$

$$f'_+(x_0) = f'(x_0 + 0) := \lim_{h \rightarrow +0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}.$$

Заметка 6.4. $\exists f'(x_0) \Leftrightarrow$ существует производная слева и справа и $f'_-(x_0) = f'_+(x_0)$.

Теорема 6.1. Пусть функция f выпукла на $[a, b]$. Тогда

- a) $\forall x_0 \in (a, b) \exists f'_-(x_0)$ и $f'_+(x_0)$, причем $f'_-(x_0) \leq f'_+(x_0)$
- b) $f \in C(a, b)$
- c) $\forall x_1, x_2 \in (a, b), x_1 < x_2$, имеем $f'_+(x_1) \leq f'_-(x_2)$ (если f строго выпукла, то $f'_+(x_1) < f'_-(x_2)$)
- d) f'_- и f'_+ — неубывающие на (a, b) функции (возрастающие в случае строгой выпуклости)
- e) f дифференцируема на (a, b) всюду, кроме, быть может, не более чем счетного числа точек

Доказательство. а) Пусть $x_0 \in (a, b)$, $h > 0$ — такое, что $x_0 + h \in (a, b)$ тоже. Тогда, учитывая, что $x_0 - (x_0 - h) = (x_0 + h) - x_0 = h$, по неравенству $\frac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1} \leq \frac{f(x_2) - f(x)}{x_2 - x}$ имеем

$$\frac{f(x_0) - f(x_0 - h)}{h} \leq \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h};$$

при убывании h левая часть неравенства неубывает в силу $\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \leq \frac{f(x_2) - f(x)}{x_2 - x}$, правая — невозрастает в силу $\frac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1} \leq \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$. Следовательно при $h \rightarrow +0$ существуют оба предела, равные $f'_-(x_0)$ и $f'_+(x_0)$, а из неравенства получаем $f'_-(x_0) \leq f'_+(x_0)$.

b) Из существования односторонних производных имеем для любого $x_0 \in (a, b)$

$$f(x_0 + h) = \begin{cases} f(x_0) + f'_+(x_0)h + o(h), & h \rightarrow +0 \\ f(x_0) + f'_-(x_0)h + o(h), & h \rightarrow -0 \end{cases}$$

откуда в любом случае получаем $f(x_0 + h) = f(x_0) + o(h)$, $h \rightarrow 0$, т.е. f непрерывна в x_0 .

c) Для всякого $x \in (x_1, x_2)$ имеем

$$\frac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1} \leq \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$$

(строгое неравенство в случае строгой выпуклости).

При $x \rightarrow x_1 + 0$ левая часть неравенства невозрастает (строгое неравенство при этом сохраняется), поэтому мы можем перейти к пределу:

$$f'_+(x_1) \leq \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}.$$

Аналогично, при $x \rightarrow x_2 - 0$ имеем

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \leq \frac{f(x_2) - f(x)}{x_2 - x}$$

(строгое неравенство в случае строгой выпуклости).

Таким образом, имеем

$$f'_+(x_1) \leq \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \leq f'_-(x_2)$$

(строгое неравенство в случае строгой выпуклости), откуда следует требуемое.

- д) Для $x_1, x_2 \in (a, b)$, $x_1 < x_2$ из а) и с) имеем $f'_-(x_1) \leq f'_+(x_1) \leq f'_-(x_2) \leq f'_+(x_2)$ (в случае строгой выпуклости $f'_-(x_1) \leq f'_+(x_1) < f'_-(x_2) \leq f'_+(x_2)$), откуда следует требуемая монотонность.
- е) Для доказательства потребуется следующая лемма:

Лемма 6.2. Пусть $g(x)$ монотонная на $[a, b]$. Тогда $g(x)$ не может иметь разрывов второго рода и имеет не более чем счетное число разрывов (устраняемых или первого рода).

В силу монотонности множество точек разрыва функции f'_- на (a, b) не более чем счетно. Покажем, что в точках непрерывности функции f'_- существует производная f' (т.е. $f'_- = f'_+$).

Пусть x_0 — точка непрерывности функции f'_- . Для всякого $h > 0$ такого, что $x_0 + h \in (a, b)$ из а) и с) имеем

$$f'_-(x_0) \leq f'_+(x_0) \leq f'_-(x_0 + h),$$

откуда

$$0 \leq f'_+(x_0) - f'_-(x_0) \leq f'_-(x_0 + h) - f'_-(x_0).$$

В силу непрерывности f'_- имеем $f'_-(x_0 + h) - f'_-(x_0) \rightarrow 0$, откуда по теореме о зажатой функции $f'_+(x_0) - f'_-(x_0) \rightarrow 0$, а так как это выражение на самом деле не зависит от h , получаем, что $f'_+(x_0) = f'_-(x_0)$. □

6.3 Вторая производная.

Определение 6.8. Пусть $f(x)$ дифференцируема $\forall x \in X$, тогда $f'(x) : X \rightarrow \mathbb{R}$. $(f')' =: f''$.

6.3.1 Многочлен Тейлора.

Определение 6.9 (Многочлен Тейлора). $T_{n,x_0}f = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2}(x - x_0)^2 + \frac{f'''(x_0)}{3!}(x - x_0)^3 + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k$.

6.3.2 Формула Тейлора.

Теорема 6.2 (Формула Тейлора). $f(x) = T_{n,x_0}f + R_{n,x_0}f$. Остатки бывают в разных формах (например в форме Пеано это $\bar{o}((x - x_0)^n)$).

Доказательство. $f(x) = T_{n,x_0}f + \bar{o}((x - x_0)^n) \Leftrightarrow f(x) - T_{n,x_0}f = \bar{o}((x - x_0)^n) \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - T_{n,x_0}f}{(x - x_0)^n} = 0$

$$\left[\frac{0}{0} \right] \stackrel{\text{правило Лопиталя}}{=} \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x) - (f'(x_0) + f''(x_0)(x - x_0) + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{(n-1)!}(x - x_0)^{n-1})}{n(x - x_0)^{n-1}} = \dots =$$

$$= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f^{(n)}(x) - f^{(n)}(x_0)}{n!} = 0. \quad \square$$

6.3.3 Теорема Ферма.

Теорема 6.3 (Ферма). Пусть $f \in C([a, b]) \cap C^1(a, b)$. Тогда, если $x_0 \in (a, b)$ точка экстремума (точка локального максимума или минимума), то $f'(x_0) = 0$.

Доказательство. $f'(x_0) = f'_-(x_0) = f'_+(x_0)$

x_0 — локальный максимум:

$$f'_+(x_0) = \lim_{\Delta \rightarrow +0} \frac{\overbrace{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}^{\leq f(x_0)}}{\Delta x} \leq 0$$

$$f'_-(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow +0} \frac{f(x_0) - \overbrace{f(x_0 - \Delta x)}^{\leq f(x_0)}}{\Delta x} \geq 0$$

$$\Rightarrow f'(x_0) = 0$$

□

Следствие 6.1. В точке экстремума производная нулевая или не существует.

6.3.4 Немного определений.

Определение 6.10. x_0 стационарная, если $f'(x_0) = 0$.

Определение 6.11. x_0 критическая, если $f'(x_0) = 0$ или $f'(x_0) \nexists$

Определение 6.12. x_0 экстремум, если это локальный минимум или максимум.

6.3.5 Теорема Ролля.

Теорема 6.4 (Ролля). Пусть $f \in C([a, b]) \cap C^1(a, b)$, $f(a) = f(b)$. Тогда $\exists c \in (a, b): f'(c) = 0$.

Доказательство. $f \in C([a, b]) \Rightarrow$ достигается максимум и минимум \Rightarrow хотя бы одна из них $c \in (a, b) \Rightarrow$ по теореме Ферма $f'(c) = 0$. □

6.3.6 Теорема Коши.

Теорема 6.5 (Коши). $f, g \in C([a, b]) \cap C^1(a, b)$, $g'(x) \neq 0$ на (a, b) . Тогда $\exists c \in (a, b): \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$.

Доказательство. Рассмотрим функцию $h(x) = f(x) - kg(x)$, $k \in \mathbb{R}: \in C^1(a, b) \cap C([a, b])$.

Выберем k , такое что $h(a) = h(b)$. $f(a) - kg(a) = f(b) - kg(b) \Rightarrow k(g(b) - g(a)) = f(b) - f(a) \Rightarrow k = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}$.

По теореме Ролля $\exists c \in (a, b): h'(c) = 0$

$f'(c) - kg'(c) = 0$

□

6.3.7 Теорема Лагранжа.

Теорема 6.6 (Лагранжа о среднем в дифференциальной форме). $f \in C([a, b]) \cap C^1(a, b)$. Тогда $\exists c \in (a, b): f(b) - f(a) = f'(c)(b - a)$.

Доказательство. Следует из теоремы Коши, если взять $g(x) = x$. □

6.3.8 Правило Лопиталья.

Теорема 6.7 (Правило Лопиталья.). Пусть $f(x), g(x)$ непрерывно дифференцируемы в окрестности точки $x_0, x_0 \in \mathbb{R}$. Пусть $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \left[\frac{\infty}{\infty} \right]$ или $\left[\frac{0}{0} \right]$. Тогда, если $\exists \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = a$, то $\exists \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = a$.

Доказательство. 1. $x_0 \in \mathbb{R}, \left[\frac{0}{0} \right] \Rightarrow f(x_0) = g(x_0) = 0$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{g(x) - g(x_0)} \stackrel{\text{по теореме Коши}}{=} \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(c(x))}{g'(c(x))} = \lim_{c \rightarrow x_0} \frac{f'(c)}{g'(c)} = a.$$

2. $x_0 \in \mathbb{R}, \left[\frac{\infty}{\infty} \right]$

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\frac{1}{\frac{1}{f(x)}}}{\frac{1}{\frac{1}{g(x)}}} = \frac{g_1(x)}{f_1(x)}, \text{ пусть}$$

$$f_1(x) = \begin{cases} \frac{1}{f(x)}, & x \neq x_0 \\ 0, & x = x_0 \end{cases}$$

$$g_1(x) = \begin{cases} \frac{1}{g(x)}, & x \neq x_0 \\ 0, & x = x_0 \end{cases}$$

f_1, g_1 непрерывно дифференцируемы.

3. $x_0 = \pm\infty$ (НУО рассмотрим только $+\infty$); $a \in \mathbb{R}$

$$\text{fix } \varepsilon > 0: \exists \delta > 0: \left| \frac{f'(x)}{g'(x)} - a \right| < \varepsilon \quad \forall x > \frac{1}{\delta}$$

$$\text{fix } y \in \left(\frac{1}{\delta}; +\infty\right) \quad \exists c \text{ между } x \text{ и } y: \frac{f(x) - f(y)}{g(x) - g(y)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$$

$$\frac{f(x)(1 - \frac{f(y)}{f(x)})}{g(x)(1 - \frac{g(y)}{g(x)})} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$$

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(c)}{g'(c)} \cdot \frac{1 - \frac{g(y)}{g(x)}}{1 - \frac{f(y)}{f(x)}} = \frac{f'(c)}{g'(c)} \cdot \left(1 + \underbrace{\frac{\frac{f(y)}{f(x)} - \frac{g(y)}{g(x)}}{1 - \frac{f(y)}{f(x)}}}_{\substack{\rightarrow 0 \\ \text{б. м.}}} \right) > \frac{1}{2} \cdot \frac{f'(c)}{g'(c)} > \frac{1}{2\varepsilon} \quad \forall x \geq \frac{1}{2\delta}$$

4. $x_0 = \pm\infty$ (НУО рассмотрим только $+\infty$); $\left[\frac{0}{0} \right]$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} \stackrel{x = \frac{1}{t}}{=} \lim_{t \rightarrow +0} \frac{f(\frac{1}{t})}{g(\frac{1}{t})} = \left[\frac{0}{0} \right]$$

Рассмотрим

$$\exists \lim_{t \rightarrow +0} \frac{(f(\frac{1}{t}))'}{(g(\frac{1}{t}))'} = \lim_{t \rightarrow +0} \frac{f'(\frac{1}{t}) \cdot (-\frac{1}{t^2})}{g'(\frac{1}{t}) \cdot (-\frac{1}{t^2})} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)} = a$$

□

Применение Лопиталя.

Лемма 6.3. $\forall p > 0 \quad \forall a > 1 \quad x^p = \bar{o}(a^x), x \rightarrow +\infty.$

Лемма 6.4. $\forall p > 0 \quad \forall a \in (0; 1) \cup (1; +\infty) \quad \log_a x = \bar{o}(x^p), x \rightarrow +\infty.$

Лемма 6.5. $\forall \alpha > 0 \quad \forall p > 0 \quad \forall a \in (0; 1) \cup (1; +\infty) \quad \log_a^\alpha x = \bar{o}(x^p), x \rightarrow +\infty.$

6.3.9 Утверждения.

Утверждение 6.3. $\exists f'(x_0) \Leftrightarrow f(x) = f(x_0) + A \cdot (x - x_0) + \bar{o}(x - x_0)$ и $A = f'(x_0).$

Утверждение 6.4. f непрерывно дифференцируема n раз в некоторой окрестности точки $x_0 \Rightarrow$
$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + \bar{o}((x - x_0)^n).$$

6.3.10 Применение Тейлора.

Утверждение 6.5. $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \bar{o}(x^n).$

Утверждение 6.6. $\sin x = 0 + x + \frac{0}{2!}x^2 - \frac{1}{3!}x^3 + 0 \cdot x^4 + \frac{1}{5!}x^5 + \dots = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \bar{o}(x^{2n+2}).$