

# 1 Теория вероятностей.

**Монетка:**

$\Omega = \{O; P\}$ .  $\Omega$  — множество элементарных исходов;  $\leq$  счетное.

Случайное событие:  $A \subset \Omega$ .

$P: \Omega \rightarrow \mathbb{R}_+$ :

1.  $P(x) \geq 0$

2.  $\sum_{x \in \Omega} P(x) = 1$

$(\Omega, P)$  — вероятностное пространство.

Вероятность события  $A$  —  $P(A) = \sum_{x \in A} P(x)$ .

**Случайное событие** — измеримое подмножество вероятностного пространства.

Сумма событий — объединение множеств.

Произведение событий — пересечение множеств.

$$P(A + B) = P(A) + P(B) - P(AB).$$

$$P(A + B + C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(AB) - P(BC) - P(AC) + P(ABC).$$

**Опр.**  $A$  и  $B$  называются независимыми, если  $P(AB) = P(A) \cdot P(B)$ .

Пример:

$\Omega_1$  и  $\Omega_2$  — вероятностные пространства.

$\Omega_1 \times \Omega_2$  — вероятностное пространство.

$A \subset \Omega_1$  — случайное событие.

$$P(x, y) = P_1(x) \cdot P_2(y).$$

$$P_1(A) = P(A \times \Omega_2).$$

$$AB \leftrightarrow (A \times \Omega_2) \cap (\Omega_1 \times B) = A \times B.$$

$A, B, C$  — независимы, если  $P(ABC) = P(A)P(B)P(C)$ .

События  $A_1, A_2, \dots, A_n$  независимы, если  $\forall A_{i_1}, \dots, A_{i_k}$  верно  $P(A_{i_1}A_{i_2} \dots A_{i_k}) = \prod_{j=1}^k P(A_{i_j})$ .

**Опр.** Условная вероятность.  $P(A|B)$  — вероятность  $A$  при условии, что  $B$  произошло.

**Теорема.** Формула полной вероятности. Пусть  $A_1, A_2, \dots, A_n$  — система попарно несовместимых событий, в сумме дающих достоверное. Тогда для любого события  $B$  выполнена формула  $P(A) = \sum_{i=1}^k P(A|B_i) \cdot P(B_i)$ .

Доказательство:

$$P(A|B) = \frac{P(AB)}{P(B)}.$$

$$P(A) = \sum_{i=1}^k P(AB_i).$$

## 1.1 Случайные величины.

**Опр.**  $\Omega$  — вероятностное пространство,  $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ .  $f$  называется случайной величиной.

**Пример:**

Бросаем кубик.  $\Omega = 1, 2, 3, 4, 5, 6$ ,  $p(x) = \frac{1}{6}$ .  $f(1) = 1, f(2) = 2$ , и т. д.

На  $\mathbb{R}$  введем структуру вероятностного пространства:  $1 - \frac{1}{6}, 2 - \frac{1}{6}, 3 - \frac{1}{6}, 4 - \frac{1}{6}, 5 - \frac{1}{6}, 6 - \frac{1}{6}$ , остальные 0.

**Опр.**  $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R} \Rightarrow$  на  $\mathbb{R}$  вводится структура вероятностного пространства.  $\forall x \in \mathbb{R} P_{\mathbb{R}}(x) = P_{\Omega}(f^{-1}(x))$ .

**Опр.** Распределение случайной величины  $f$  — структура вероятностного пространства на  $\mathbb{R}$ .

**Стандартное распределение:**

1. Дискретное равномерное.  $x_1 - \frac{1}{n}, x_2 - \frac{1}{n}, \dots, x_n - \frac{1}{n}$ .

2. Распределение Бернулли.

$$f(x) = \begin{cases} 1 & p \\ 0 & q = 1 - p \end{cases}$$

$$f = \sum_{i=1}^n f_i.$$

$$0 - q^n, 1 - C_n^1 p q^{n-1}, \dots, n.$$

$$P(f(x) = k) = C_n^k \cdot p^k \cdot q^{n-k}.$$

3. Геометрическое распределение. Бросаем неравновесную монетку до выпадения орла. Случайная величина — количество испытаний.

$$P(f(x) = k) = q^{k-1} \cdot p.$$

4. Распределение Пуассона.

$$P(f = k) = \frac{\lambda^k}{k!} \cdot e^{-\lambda}. e \approx 2.718281828459045, \lambda > 0.$$

5. Гипергеометрическое распределение. В сосуде  $N$  белых шаров и  $M$  черных. Мы не глядя вытаскиваем  $n$  шаров без возвращения. Случайная величина — количество белых шаров.

$$P(f = k) = \frac{C_N^k \cdot C_M^{n-k}}{C_{N+M}^n}.$$

**Опр.** Сложение.  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}, g : \Omega \rightarrow \mathbb{R}. (f + g)(x) = f(x) + g(x).$

**Опр.**  $f(x) = a$  — случайное событие.

**Опр.**  $f$  и  $g$  независимые, если  $\forall A, B \in \mathbb{R} : P(f(x) \in A; g(x) \in B) = P(f(x) \in A) \cdot P(g(x) \in B)$ . Или:  $P(f(x) = a; g(x) = b) = P(f(x) = a) \cdot P(g(x) = b).$

## 1.2 Математическое ожидание.

**Опр.**  $f$  — случайная величина. Ее математическим ожиданием называется  $Mf = Ef = \sum_{x \in \Omega} f(x)P(x).$

Свойства:

1.  $c$  - константа это случайная величина.
2.  $f_1 \leq f_2 (\Leftrightarrow f_1(x) \leq f_2(x) \forall x) \Rightarrow Mf_1 \leq Mf_2.$
3.  $M(cf) = c \cdot Mf.$
4.  $M(f_1 + f_2) = Mf_1 + Mf_2. \sum_{x \in \Omega} (f_1(x) + f_2(x))P(x) = \sum f_1(x) \cdot P(x) + \sum f_2(x) \cdot P(x)$
5. Если  $f_1, f_2$  - независимы  $\Rightarrow M(f_1 \cdot f_2) = Mf_1 \cdot Mf_2. Mc = c.$

$$M(f_1 \cdot f_2) = \sum_{x \in \Omega} f_1(x) \cdot f_2(x) \cdot P(x) = \sum a_i \cdot b_j \cdot P(f_1 = a_i; f_2 = b_j) = \sum_{i,j} a_i \cdot b_j \cdot P(f_1 = a_i) \cdot P(f_2 = b_j) = \sum_i a_i \cdot P(f_1 = a_i) \cdot \sum_j b_j \cdot P(f_2 = b_j) = Mf_1 \cdot Mf_2.$$

$$P(f = k) = \frac{C_M^k \cdot C_N^{n-k}}{C_{M+N}^n}.$$

$$Mf = \frac{n \cdot M}{M+N}.$$

$$\begin{aligned} Mf &= \sum_{k=0}^n k \cdot \frac{C_M^k \cdot C_N^{n-k}}{C_{M+N}^n} = \\ &= \frac{n \cdot M}{M+N} \cdot \frac{(M-1)!N!(n-1)!(M+N-n)!}{(M+N-1)!} \sum_{k=0}^n \frac{1}{(k-1)!(M-k)!(n-k)!(N-n+k)!} \sum_{k=0}^n \frac{(M-1)!N!(n-1)!(M+N-n)!}{(k-1)!(M-k)!(n-k)!(N-n+k)!(M+N-1)!} = \\ &= \sum_{k=0}^N \frac{C_{n-1}^{k-1} \cdot C_{M+N-n}^{M-k}}{C_{M+N-1}^{M-1}} = 1. \end{aligned}$$

## 1.3 Дисперсия.

**Опр.** Мера отклонения случайной величины от своего математического ожидания.  $f$  — случайная величина;  $Df = M(f - Mf)^2.$

**Опр.** Центрирование случайной величины —  $M(f - Mf) = Mf - M(Mf) = 0$ . Условно сдвигаем систему координат в 0.

$$Df = M(f^2 - 2f \cdot Mf + (Mf)^2) = Mf^2 - 2M^2f + M(M^2f) = Mf^2 - M^2f.$$

Свойства:

1.  $D(c) = 0 \quad D(f) = 0 \Rightarrow f = const$
2.  $D(cf) = c^2 D(f)$
3.  $D(f + c) = Df$
4. Если случайные величины  $f$  и  $g$  независимы, то  $D(f + g) = Df + Dg$

**Формула Стирлинга.**  $n! \approx \sqrt{2\pi n} \cdot \left(\frac{n}{e}\right)^n \cdot e^{\frac{\theta_n}{12n}}.$  При больших  $n, e^{\frac{\theta_n}{12n}} \approx 1.$

## 1.4 Неравенство Маркова.

$f$  — случайная величина;  $|Mf| < \infty; c > 0; f \geq 0.$

$$P(f \geq c) \leq \frac{Mf}{c}.$$

$f :$

$a_1 < c$	$a_2 < c$	$\dots$	$a_n \geq c$	$a_{n+1} \geq c$	$a_{n+2} \geq c$	$\dots$
$p_1$	$p_2$	$\dots$	$p_n$	$p_{n+1}$	$p_{n+2}$	$\dots$

$$g := \frac{f}{c}.$$

$\frac{a_1}{c} < 1$	$\frac{a_2}{c} < 1$	$\dots$	$\frac{a_n}{c} \geq 1$	$\frac{a_{n+1}}{c} \geq 1$	$\frac{a_{n+2}}{c} \geq 1$	$\dots$
$p_1$	$p_2$	$\dots$	$p_n$	$p_{n+1}$	$p_{n+2}$	$\dots$

Надо:  $P(g \geq 1) \leq Mg$ .

$$b_i = \frac{a_i}{c}.$$

$$Mg = b_1 p_1 + b_2 p_2 + \dots + b_n p_n + b_{n+1} p_{n+1} + \dots \geq p_{n+1} + p_{n+2} + \dots$$

## 1.5 Неравенство Чебышева.

$f$  — случайная величина,  $Mf$  и  $Df \exists, c > 0$ .

$$\Rightarrow P(|f - Mf| \geq c) \leq \frac{Df}{c^2}.$$

Нормировка случайной величины.  $g := \frac{f - Mf}{\sqrt{Df}}$ .  $Mg = 0$ ,  $Dg = 1$ .

$$|f - Mf| \geq c \Leftrightarrow \sqrt{Df} \cdot g \geq c.$$

$$P(|g| \geq \frac{c}{\sqrt{Df}}) \leq \frac{Df}{c^2}.$$

$$P(|g| \geq \frac{c}{\sqrt{Df}}) = P(g^2 \geq \frac{c^2}{Df}) \leq \frac{Mg^2}{(\frac{c^2}{Df})} = \frac{Df}{c^2}.$$

## 1.6 Закон больших чисел.

$f_1, f_2, f_3, \dots$  — последовательность.  $M := Mf_i$ ,  $D = Df_i$ .

Одинаковое распределение случайных величин.

$$S_n := \frac{f_1 + f_2 + \dots + f_n}{n} \Rightarrow \forall \varepsilon > 0 \lim_{n \rightarrow \infty} P(|S_n - M| \geq \varepsilon) = 0.$$

$$MS_n = M; DS_n = \frac{D}{n}.$$

$$P(|S_n - M| \geq \varepsilon) \leq \frac{D(S_n)}{\varepsilon^2} = \frac{D}{n\varepsilon^2} \rightarrow 0. n \rightarrow \infty, \varepsilon — \text{фикс.}$$

## 1.7 Ковариация и корреляция.

**Опр.**  $cov(f; g) = M(f - Mf)(g - Mg)$ .  $cov(f; f) = Df = Mf^2 - M^2f$ .  $cov(f, g) = M(fg) - Mf \cdot Mg$ .

**Главное свойство ковариации:**  $f, g$  — независимы  $\Rightarrow cov(f, g) = 0$ .

**Опр.**  $r(f, g) = \frac{cov(f, g)}{\sqrt{Df \cdot Dg}}$  — коэффициент корреляции.

**Теорема.**

$$-1 \leq r(f, g) \leq 1.$$

$$r(f, g) = 1 \Leftrightarrow \frac{f}{g} = const > 0.$$

$$r(f, g) = -1 \Leftrightarrow \frac{f}{g} = const < 0.$$

## 1.8 Применение к комбинаторике.

**Опр.** Перестановки.  $f: \{1 \dots n\} \rightarrow \{1 \dots n\}$ ; биекция. Таких  $n!$ . Неподвижная точка —  $f(x) = x$ .

## 1.9 Теорема Рамсея.

**Задача.** Есть полный граф  $K_N$ , ребра которого покрашены в 2 цвета. Всегда ли можно выбрать либо  $K_m$  с ребрами 1 цвета, либо  $K_n$  с ребрами 2 цвета?

**Теорема.**  $\forall m; n \exists N > 0$ : утверждение верно. Наименьшее такое  $N$  — число Рамсея  $R(m; n)$ .

Например  $R(3, 3) = 6$ . Но вот  $R(5, 5)$  уже не известно.

Два аспекта:

1. Верхняя оценка = теорема Рамсея.
2. Нижняя оценка.

**Теорема** (все та же).  $R(m; n) \leq R(m-1; n) + R(m; n-1)$ .  $R(m; n) \leq 2^{m+n}$ .

$R(m; n) \leq C_{m+n}^m$  — более точная оценка.

**Теорема Эрдеша.**  $R(n; n) \geq 2^{\frac{n}{2}}$ .

Вероятностный метод. Суть: рассмотрим случайный (со случайной раскраской ребер) граф на  $2^{\frac{n}{2}}$  вершин.  $f$  — количество одноцветных клик  $K_n$ . Если  $M(f) < 1 \Rightarrow$  Ок.

**Задача.** Пьяница стоит на краю обрыва. С вероятностью  $p$  — шаг к обрыву,  $q = 1 - p$  — от обрыва.

$P(\text{упадет ровно после } 2k+1 \text{ шага}) = p^{k+1} \cdot q^k \cdot c_k$ .

$c_k$  имеет рекуррентную формулу:  $c_{n+1} = c_0 \cdot c_n + c_1 \cdot c_{n-1} + \dots + c_{n-1} \cdot c_1 + c_n \cdot c_0$ ;  $c_0 = 1$ .

$P(\text{упадет}) = \frac{1 - \sqrt{1 - 4pq}}{2q}$ .

## 1.10 Числа Каталана.

**Опр.**  $c_n$  —  $n$ -е число Каталана.

**Опр.**  $c_{n+1} = c_0 \cdot c_n + c_1 \cdot c_{n-1} + \dots + c_{n-1} \cdot c_1 + c_n \cdot c_0$ ;  $c_0 = 1$ .

**Явная формула:**  $\frac{(2n)!}{n!(n+1)!}$ .

**Конструкции:**

1. У  $n+2$  угольника —  $c_n$  триангуляций.

## 2 Близкие дроби.

**Опр.**  $n$ -ый ряд Фарея — последовательность дробей от 0 до 1 со знаменателем  $\leq n$ , несократимых, в порядке возрастания. На  $n$ -ом шаге  $\varphi(n)$  дробей.

**Опр.** Медианта дробей  $\frac{a}{b}$  и  $\frac{c}{d}$  — это  $\frac{a+c}{b+d}$ .

**Опр.**  $\frac{a}{b}$  и  $\frac{c}{d}$  близки, если  $|\frac{a}{b} - \frac{c}{d}| = \frac{1}{bd} \Leftrightarrow |ad - bc| = 1$ .

Свойства:

1.  $\frac{a}{b} < \frac{c}{d} \Rightarrow \frac{a}{b} < \frac{a+c}{b+d} < \frac{c}{d}$ .

Доказательство:

$$\begin{aligned} \frac{a}{b} < \frac{a+c}{b+d} &\Leftrightarrow ab + ad < ab + bc \Leftrightarrow ad < bc \Leftrightarrow \frac{a}{b} < \frac{c}{d}. \\ \frac{a+c}{b+d} < \frac{c}{d} &\Leftrightarrow ad + cd < bc + cd \Leftrightarrow ad < bc \Leftrightarrow \frac{a}{b} < \frac{c}{d}. \end{aligned}$$

2.  $\frac{a}{b}; \frac{c}{d}$  — близкие (и тогда несократимые)  $\Rightarrow \frac{a+c}{b+d}$  — несократимая.

Доказательство:

Очевидно из 3 и 4 пункта.

3. Близкие дроби несократимые.

Доказательство:

$$\text{Пусть нет. } \frac{a}{b} = \frac{a_1 k}{b_1 k} \Rightarrow |ad - bc| = |a_1 k d - b_1 k c| = 1!?!.$$

4. Если дроби близки, то медианта близка к каждой из них.

Доказательство:

$$\begin{aligned} |\frac{a}{b} - \frac{a+c}{b+d}| &= ?. \\ a(b+d) - (a+c)b &= ad - bc = 1. \end{aligned}$$

5. Дроби близкие  $\Rightarrow$  они соседние в каком-то ряду Фарея.

6. Дроби соседние в каком-то ряду Фарея  $\Rightarrow$  они близкие.

7.  $\frac{a}{b}$  и  $\frac{c}{d}$  — близкие  $\Rightarrow$  дробь с  $\min$  знаменателем между ними — медианта.

**Перенос на плоскость ряда Фарея.** Вектора  $(a, b)$  и  $(c, d)$  из точки  $(0, 0)$ . Их сумма равна  $(a+c, b+d)$ . Площадь параллелограмма, образованного данными векторами, равна  $S = |ad - bc|$ . Равна 1, если вектора близки. Также на векторах нет целочисленных точек, иначе дроби сократимые. Тогда по формуле Пика  $S = n + \frac{k}{2} - 1$ ;  $n$  — количество внутренних вершин,  $k$  — количество вершин на сторонах.  $S = 1$  для близких векторов.

**Опр.**  $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$  — матрица.  $ad - bc$  — определитель  $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ .  $\det \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$ .

**Свойства:**

1.  $\det \begin{pmatrix} \lambda a & \lambda b \\ c & d \end{pmatrix} = \lambda \det \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$

### 3 Цепные дроби.

**Опр.** Конечной цепной дробью называется число  $a_0 + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2 + \dots + \frac{1}{a_n}}}$ , где  $a_0$  — целое,  $a_1, \dots, a_n$  — натуральные числа.

Такую цепную дробь будем обозначать  $[a_0, a_1, \dots, a_n]$ .

**Теорема.**  $\forall \frac{m}{n} \exists!$  цепная дробь.

Доказательство:

$$\begin{aligned} a_0 &= \left[ \frac{m}{n} \right] \\ \frac{1}{\frac{1}{a_1} + \dots} &= \left\{ \frac{m}{n} \right\} = \frac{m_1}{n_1} \\ \frac{n_1}{m_1} &= a_1 + \frac{1}{\frac{1}{a_2} + \dots} = \frac{m_2}{n_2} \end{aligned}$$

Это Алгоритм Евклида.

$$1 + \frac{1}{1 + \dots} = [1, 1, \dots, 1] = \frac{F_{n+1}}{F_n}.$$

**Опр.** Несократимая дробь  $\frac{p_k}{q_k} = [a_0, a_1, \dots, a_k]$  называется  $k$ -й подходящей дробью цепной дроби  $[a_0, a_1, \dots, a_n]$ .

**Теорема. Рекуррентные формулы Эйлера.**  $p_k = a_k p_{k-1} + p_{k-2}$ ;  $q_k = a_k q_{k-1} + q_{k-2}$ .

$\frac{p_k}{q_k}$  располагается между  $\frac{p_{k-2}}{q_{k-2}}$  и  $\frac{p_{k-1}}{q_{k-1}}$  и равна  $\frac{p_{k-2} + a_k \cdot p_{k-1}}{q_{k-2} + a_k \cdot q_{k-1}}$ .

1.  $\left| \frac{p_k}{q_k} - \alpha \right| \leq \frac{1}{q_k^2}$   
 $\left| \frac{p_k}{q_k} - \alpha \right| \leq \frac{1}{q_k q_{k+1}} \leq \frac{1}{q_k^2}$   
 $\frac{p_k}{q_k} < \alpha \leq \frac{p_{k+1}}{q_{k+1}}$   
 $\left| \frac{p_k}{q_k} - \alpha \right| \leq \left| \frac{p_k}{q_k} - \frac{p_{k+1}}{q_{k+1}} \right| = \frac{1}{q_k q_{k+1}}$
2.  $\left| \frac{p_k}{q_k} - \alpha \right| \geq \frac{1}{q_k(q_k + q_{k+1})}$   
 $\left| \frac{p_k}{q_k} - \alpha \right| \geq \left| \frac{p_k}{q_k} - \frac{p_{k+2}}{q_{k+2}} \right| \geq \frac{1}{q_k q_{k+2}}$

$$r_n := a_n + \frac{1}{a_{n+1} + \dots} = [a_n, a_{n+1}, \dots].$$

$$[a_0, a_1, \dots] = [a_0, a_1, \dots, a_{n-1}, r_n].$$

**Теорема.**  $[a_0, a_1, \dots] = \frac{p_{n-1} r_n + p_{n-2}}{q_{n-1} r_n + q_{n-2}}$

$$\alpha = \frac{p_{n-2} r_{n-1} + p_{n-3}}{q_{n-2} r_{n-1} + q_{n-3}}$$

$$r_{n-1} = a_{n-1} + \frac{1}{r_n}$$

**Теорема.** Если цепная дробь  $\alpha$  — периодическая, то  $\alpha$  — корень квадратного трехчлена с целыми коэффициентами.