

Содержание

1 Последовательность.	2
1.1 Предел последовательности.	2
2 Возведение в вещественную степень.	5
3 Предел и непрерывность.	6
3.1 Замечательные пределы.	8
4 \bar{o} и \underline{O}.	8
4.1 Асимптотические равенства.	9
5 Функции, непрерывные на отрезке.	10
5.1 Первая теорема Вейерштрасса.	10
5.2 Вторая Теорема Вейерштрасса.	10
5.3 Теорема Больцано-Коши.	10
5.4 Третья Теорема Вейерштрасса.	10
5.5 Равномерная непрерывность.	10
6 Дифференциальное исчисление.	11
6.1 Правила дифференцирования.	11

1 Последовательность.

$$f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$$
$$f(n) =: f_n$$

Определение 1.1. Последовательность называется ограниченной сверху, если $\exists M : |f_n| \leq M$. Снизу, если $\exists m : f_n \geq m$. f_n — ограниченная, если ограничена сверху и снизу.

Определение 1.2. $M_0 = \sup f_n$, если M_0 — верхняя грань и $\forall \varepsilon > 0 \exists n_0 : f_{n_0} > M_0 - \varepsilon$. $m_0 = \inf f_n$, если m_0 — нижняя грань и $\forall \varepsilon > 0 \exists n_0 : f_{n_0} < m_0 + \varepsilon$.

Аксиома 1.1 (Вещественных чисел). Если множество X ограничено сверху, то $\exists \sup X$. Если f_n неограничено сверху, то $\sup f_n =: +\infty$. Если снизу, то $\inf f_n =: -\infty$.

Определение 1.3. f_n — бесконечно большая (бб), если $\forall \varepsilon > 0 \exists N = N(\varepsilon) : |f_n| > \frac{1}{\varepsilon} \forall n \geq N$. f_n — не бб, $\exists \varepsilon > 0 : \forall N \exists n > N : |f_n| \leq \frac{1}{\varepsilon}$.

Определение 1.4. f_n — бесконечно малая (бм), если $\forall \varepsilon > 0 \exists N = N(\varepsilon) : |f_n| < \varepsilon \forall n \geq N$.

Лемма 1.1. f_n — бм $\Rightarrow f_n$ — ограничена.

Доказательство. Пусть $\varepsilon = 1$, тогда $\exists N : |f_n| \leq 1 \forall n \geq N$.

$M := \max |f_1|, \dots, |f_{N-1}|, 1$, тогда $|f_n| \leq M \forall n \in N$.

□

Лемма 1.2. a) f_n — бб $\Rightarrow \frac{1}{f_n}$ — бм

b) f_n — бм ($f_n \neq 0$) $\Rightarrow \frac{1}{f_n}$ — бб

Лемма 1.3. f_n — неограниченная последовательность, тогда существует бб подпоследовательность f_{n_k} .

Доказательство. $\exists n_1 : |f_{n_1}| > 1$,

$\exists n_2 > n_1 : |f_{n_2}| > 2$,

$\exists n_3 > n_2 : |f_{n_3}| > 3$,

\vdots ,

$\exists n_1 < n_2 < \dots < n_k < \dots$

$|f_{n_k}| > k \Rightarrow f_{n_k}$ — бб.

□

Лемма 1.4. a) бм + бм = бм

b) бм · C = бм

c) бм · бм = бм

d) бб · C = бб, $C \neq 0$

e) бб · бб = бб

1.1 Предел последовательности.

a_n — последовательность.

Определение 1.5. $a = \lim a_n$, если $\forall \varepsilon > 0 \exists N : |a_n - a| < \varepsilon \forall n \geq N$.

Определение 1.6. Эпсилон окрестность: $U_\varepsilon(a) := (a - \varepsilon; a + \varepsilon)$. Выколотая эпсилон окрестность: $\mathring{U}_\varepsilon(a) := U_\varepsilon(a) \setminus \{a\}$.

$\varepsilon_1 < \varepsilon_2 \Rightarrow U_{\varepsilon_1}(a) \subset U_{\varepsilon_2}(a), a \in \overline{\mathbb{R}}$.

Определение 1.7. $\mathbb{R} \cup \{\pm\infty\} = \overline{\mathbb{R}}$ — расширенная числовая прямая.

Определение 1.8. $\varepsilon > 0$ $U_\varepsilon(+\infty) = (\frac{1}{\varepsilon}; +\infty)$; $U_\varepsilon(-\infty) = (-\infty; -\frac{1}{\varepsilon})$.

$\lim |a_n| = +\infty \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists N(\varepsilon) : |a_n| > \frac{1}{\varepsilon}$.

Если a_n — бб $\Leftrightarrow \lim |a_n| = +\infty$.

Если a_n — бм $\Leftrightarrow \lim |a_n| = 0$.

Утверждение 1.1. $\lim a_n = a \Leftrightarrow \exists$ бм последовательность d_n , такая что $a_n = a + d_n$.

Утверждение 1.2. Если предел последовательности существует, то он единственный.

Доказательство. $\exists a < b$ и $a = \lim a_n, b = \lim a_n$. Тогда $\varepsilon := \frac{b-a}{42}$:

$\exists N_1 : a_n \in U_\varepsilon(a) \forall n \geq N_1$

$\exists N_2 : a_n \in U_\varepsilon(b) \forall n \geq N_2$

$\Rightarrow a_n \in (U_\varepsilon(a) \cap U_\varepsilon(b)) = \emptyset \forall n \geq \max\{N_1, N_2\}$!?! □

Лемма 1.5 (Предельный переход в неравенства). $a_n \leq b_n \forall n \geq N_0$. Пусть $\exists \lim a_n = a; \lim b_n = b, a, b \in \overline{\mathbb{R}}$. Тогда $a \leq b$.

Доказательство. Пусть $a > b$. Тогда $\varepsilon := \frac{a-b}{42}$:

$\exists N_1 : a_n \in U_\varepsilon(a) \forall n \geq N_1$

$\exists N_2 : a_n \in U_\varepsilon(b) \forall n \geq N_2$

$\Rightarrow a_n > b_n \forall n \geq \max\{N_1, N_2\}$!?! □

Лемма 1.6 (О сжатой последовательности). Пусть $a_n \leq b_n \leq c_n \forall n \geq N_0$ и $\exists \lim a_n = \lim c_n = a \in \overline{\mathbb{R}}$, тогда $\exists \lim b_n = a$.

Доказательство. $\varepsilon > 0$:

$\exists a_n \in U_\varepsilon, n \geq N_1$

$\exists c_n \in U_\varepsilon, n \geq N_2$

$\Rightarrow b_n \in U_\varepsilon : \forall n \geq \{N_1, N_2, N_0\} =: N \Rightarrow a = \lim b_n$ по определению. □

Лемма 1.7 (Об отделимости от нуля). Пусть $\exists \lim a_n = a > 0$. Тогда $\exists N : a_n > \frac{a}{2} > 0, \forall n \geq N$.

Следствие. Если $\lim a_n \neq 0 \Rightarrow \frac{1}{a_n}$ ограничена ($a_n \neq 0$).

Доказательство. $\lim a_n = a > 0$

$\exists N_1 : a_n > \frac{a}{2} \Rightarrow 0 < \frac{1}{a_n} < \frac{2}{a} \forall n \geq N_1$

$\min\{a_1, \dots, a_{N-1}, \frac{a}{2}\} \leq \frac{1}{a_n} \leq \max\{a_1, \dots, a_{N-1}, \frac{2}{a}\}$ □

Теорема 1.1 (Арифметические свойства предела). Пусть $\lim a_n = a, \lim b_n = b; a, b \in \overline{\mathbb{R}}$. Тогда:

1. $\lim(a_n + b_n) = a + b$, кроме случаев $+\infty + (-\infty), -\infty + (+\infty)$

2. $\lim(ka_n) = ka$, кроме случая $0 \cdot (\pm\infty)$

3. $\lim(a_n \cdot b_n) = ab$, кроме случая $0(\pm\infty)$

4. $\lim \frac{a_n}{b_n} = \frac{a}{b}$, кроме случаев $\frac{0}{0}, \frac{\infty}{\infty}$

Доказательство. $a, b \in \mathbb{R}$. $a_n = a + \alpha_n, b_n = b + \beta_n; \alpha_n, \beta_n$ — бм.

1. $a_n + b_n = (a + \alpha_n) + (\beta_n + b) \Leftrightarrow \lim(a_n + b_n) = a + b$.

2. Аналогично.

$$3. a_n b_n = (a + \alpha_n)(b + \beta_n) = ab + \alpha_n b + \beta_n a + \alpha_n + \beta_n$$

4. Если $b \neq 0$ — ограничена

$$\frac{a_n}{b_n} - \frac{a}{b} = \frac{a + \alpha_n}{b + \beta_n} - \frac{a}{b} = \frac{\alpha_n b - \beta_n a}{b_n b} = \frac{1}{b} \cdot \frac{1}{b_n} \cdot (\alpha_n b - \beta_n a)$$

Если $b = 0 \Rightarrow b_n$ бм $\Rightarrow \frac{1}{b_n}$ — бб $\Rightarrow a_n \cdot \frac{1}{b_n}$ = ограниченная бб

□

Определение 1.9. Линейное пространство — множество, сумма двух элементов которого лежит в этом множестве и элемент с коэффициентом лежит в этом множестве.

Определение 1.10. Последовательность называется возвратной, если $a_n = \beta_{n-1}a_{n-1} + \beta_{n-2}a_{n-2} + \dots + \beta_{n-k}a_{n-k}$; β_i — фиксированные коэффициенты.

$a_n^{(1)}, a_n^{(2)} \Rightarrow \forall \lambda, \mu \in \mathbb{R} \lambda a_n^{(1)} + \mu a_n^{(2)}$ тоже удовлетворяет (x) .

$$a_n := t^n$$

$$t^k = \beta_{n-1}t^{k-1} + \dots + \beta_{n-k}$$

t_0 — простой корень, то t_0^n

t_0 — корень $(m) \Rightarrow t_0^n; nt_0^n; n^2t_0^n; \dots; n^{m-1}t_0^n$

Теорема 1.2. 1. Пусть a_n возрастает и ограничена сверху. Тогда $\exists \lim a_n = \sup a_n$

2. Пусть a_n убывает и ограничена снизу. Тогда $\exists \lim a_n = \inf a_n$

Доказательство. fix $\varepsilon > 0$. Так как a_n — ограничена, то $\exists M \sup a_n \in \mathbb{R}$; И $\exists N : a_N > M - \varepsilon$.

Тогда $\begin{cases} a_n \geq M - \varepsilon & \forall n \geq N, \text{ так как } a_n \uparrow \\ a_n \leq M < M + \varepsilon & \end{cases} \Rightarrow \exists N : |a_n - M| < \varepsilon \forall n \geq N \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = M$ по определению. □

Определение 1.11. Найти предел последовательности $a_n = (1 + \frac{1}{n})^n$.

$$b_n = (1 + \frac{1}{n})^{n+1}; b_1 = 4, b_2 = 3, \dots b_n \downarrow$$

$$b_n \geq 1$$

Докажем, что b_n убывает.

$$\frac{b_n}{b_{n+1}} = \frac{(\frac{n+1}{n})^{n+1}}{(\frac{n+2}{n+1})^{n+2}} = \frac{n+1}{n}^{n+1} \cdot \frac{n+1}{n+2}^{n+2} = \frac{n+1}{n+2} \cdot (\frac{n^2+2n+1}{n^2+2n})^{n+1} = \underbrace{\frac{n+1}{n+2} \cdot (1 + \frac{1}{n^2+2n})^{n+1}}_{>} \overset{n+1}{\underset{n+2}{>}}$$

$$(1 + \frac{1}{n^2+2n}) = \frac{(n+1)(n^2+3n+1)}{(n+2)(n^2+2n)} = \frac{n^3+4n^2+4n+1}{n^3+4n^2+4n} > 1.$$

$$a_n = \frac{b_n}{(1 + \frac{1}{n})^n}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} = \lim \frac{b_n}{(1 + \frac{1}{n})^n} = \frac{\lim b_n}{\lim (1 + \frac{1}{n})^n} = \lim b_n \text{ — существует.}$$

$$e := \lim_{n \rightarrow \infty} (1 + \frac{1}{n})^n \approx 2.718281828459045\dots$$

Неравенство Бернульи

□

Теорема 1.3 (Больцано-Вейерштрасса). Пусть последовательность a_n ограничена. Тогда существует сходящаяся подпоследовательность.

Доказательство. $|a_n| \leq M$

$$[-M = \alpha_1; M = \beta_1]. \alpha_2 — \text{середина. } a_1 = x_1 \in [\alpha_1; \alpha_2].$$

$$[\alpha_2; \beta_2]. \beta_3 — \text{середина. } x_2 = a_{\min n} \in [\alpha_2; \beta_3].$$

И тд.

α_k неубывающая и ограниченная сверху. $\exists \lim \alpha_k = \alpha$. β_k неубывающая и ограниченная сверху. $\exists \lim \beta_k = \beta$.

$$\beta - \alpha = \lim_{k \rightarrow \infty} (\beta_k - \alpha_k) = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{2M}{2^{k-1}} = 0.$$

По построению x_k — подпоследовательность и $\alpha_k \leq x_k \leq \beta_k \Rightarrow \exists \lim x_k$. □

Определение 1.12. Последовательность называется фундаментальной (или последовательностью Коши), если $\forall \varepsilon > 0 \exists N(\varepsilon): |a_n - a_k| < \varepsilon \forall n, k \geq N$.

Утверждение 1.3. Пусть $\exists \lim a_n = a \in \mathbb{R}$. Тогда $\{a_n\}$ фундаментальная.

Доказательство. fix $\varepsilon > 0 \exists N: |a_n - a| < \frac{\varepsilon}{2} \forall n \geq N$. Тогда $\forall n, k \geq N |a_n - a_k| = |(a_n - a) + (a - a_k)| \leq |a_n - a| + |a_k - a| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$. \square

Теорема 1.4 (Коши). Пусть $\{a_n\}$ фундаментальная последовательность. Тогда $\exists \lim a_n$.

Доказательство. 1) (!) $\{a_n\}$ ограничена.

$$\begin{aligned} \varepsilon = 1: \exists N: |a_n - a_k| \leq \varepsilon \forall n, k \geq N \Rightarrow a_k \in [a_{N-1}; a_{N+1}] \forall k \geq N \\ M = \max\{|a_1|, |a_2|, \dots, |a_N| + 1|\} \Rightarrow |a_n| \leq M \forall n. \end{aligned}$$

2) Тогда по теореме Вейерштрасса $\exists a_{n_k}$ — подпоследовательность; $\lim_{n \rightarrow \infty} a_{n_k} = a$.

3) fix $\varepsilon > 0. \exists N_1: |a_{n_k} - a| < \frac{\varepsilon}{2} \forall n_k \geq N_1$

$$\exists N_2: |a_m - a_n| < \frac{\varepsilon}{2} \forall m, n \geq N_2$$

Пусть $n \geq \max\{N_1, N_2\} \exists n_k \geq m$.

$$|a_m - a| = |(a_m - a_{n_k}) + (a_{n_k} - a)| \leq |a_m - a_{n_k}| + |a_{n_k} - a| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \Rightarrow a = \lim_{m \rightarrow \infty} a_m.$$

\square

2 Возвведение в вещественную степень.

$n \in \mathbb{N}; x^n = x \cdot x \cdot \dots \cdot x$, n раз.

$$x^{-n} = \frac{1}{x^n}, x \neq 0$$

$$x^0 := 1$$

$$\sqrt[n]{x} = x^{\frac{1}{n}}$$

$x^p, p \in \mathbb{Q}, x \geq 0$ ($p > 0$) или $x > 0$ ($p \geq 0$)

fix $a > 0, x \in \mathbb{R}$

$$a^x := \lim_{n \rightarrow \infty} a^{x_n}, \text{ где } \{x_n\} \text{ последовательность, такая что } x_n \in \mathbb{Q}, \lim_{n \rightarrow \infty} x_n := x.$$

Корректность определения.

1. $x \in \mathbb{Q}$. Докажем, что a^x совпадает со старым определением.

$$x \in \mathbb{Q}, \text{ берем } x_n = x \Rightarrow a^x = a^x$$

2. Берем произвольную последовательность $\{x_n\}$, $x_n \rightarrow x \Rightarrow x_n$ — фундаментальная последовательность.

fix $\varepsilon > 0 |a^{x_n} - a^x| = a^{x_n} |1 - a^{x-x_n}|$. Сходится. Значит ограничена. Тогда a^{x_n} ограничена. Тогда $a^{x_n} |1 - a^{x-x_n}| \leq M \cdot |1 - a^{x-x_n}|$.

$$\exists N: |a^{\frac{1}{m}} - 1| < \frac{M}{\varepsilon} \forall m \geq N \Rightarrow |a^{\frac{1}{n}} - 1| < \frac{M}{\varepsilon} \Rightarrow \exists N_0: |x_n - x| < \frac{1}{N} \forall n, k \geq N$$

$M \cdot |1 - a^{x-x_n}| < M \cdot \frac{2}{M} \forall n, k \geq N_0 \Rightarrow a^{x_n}$ образует фундаментальную последовательность \Rightarrow (по теореме Коши) $\exists \lim_{n \rightarrow \infty} a^{x_n}$

3. $x_n \rightarrow x, y_m \rightarrow x, x_n, y_m \in \mathbb{Q}$

$$\exists a = \lim a^{x_n}; \alpha = \lim a^{y_m}$$

$$(a - \alpha) = \lim_{n \rightarrow \infty} (a^{x_n} - a^{y_m}) = \lim_{n \rightarrow \infty} a^{x_n} (1 - a^{x_n - y_m}) = 0$$

$$\lim (y_m - x_n) = x - x = 0$$

Свойства:

$$1. a^x \cdot a^y = a^{x+y}$$

Пусть $x_n \rightarrow x, y_n \rightarrow y; x_n, y_n \in \mathbb{Q}$

$$a^{x_n} \cdot a^{y_n} = a^{x_n+y_n}$$

$$a^x \cdot a^y = \lim a^{x_n} \cdot \lim a^{y_n} = \lim a^{x_n} \cdot a^{y_n} = \lim a^{x_n+y_n} = a^{x+y}$$

$$2. (a^x)^y = a^{xy}$$

Пусть $x_n \rightarrow x, y_m \rightarrow y; x_n, y_m \in \mathbb{Q}$

$$x_n y_n \rightarrow xy$$

$$\lim_{m \rightarrow \infty} (\lim_{n \rightarrow \infty} a^{x_n})^{y_m} ? \lim_{n \rightarrow \infty} a^{x_n y_n}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (a^x)^{y_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} a^{x_n y_n}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |b^{y_n} - a^{x_n y_n}| = 0, \text{ где } b = a^x$$

$$\exists N : |a^{x_n} - b| < \varepsilon \forall n \geq N$$

$$b - \varepsilon < a^{x_n} < b + \varepsilon$$

$$1 - \frac{\varepsilon}{b} < \frac{a^{x_n}}{b} < 1 + \frac{\varepsilon}{b} \uparrow y_n, y_n > 0, \text{ для } < 0 \text{ аналогично}$$

$$(1 - \frac{\varepsilon}{b})^{y_n} < (\frac{a^{x_n}}{b})^{y_n} < (1 + \frac{\varepsilon}{b})^{y_n}$$

$$1 - \frac{y_n \varepsilon}{b} < \frac{a^{x_n y_n}}{b^{y_n}} < 1 + \frac{y_n \varepsilon}{b}$$

$$\Rightarrow |\frac{a^{x_n y_n}}{b^{y_n}} - 1| \leq \frac{|y_n|}{b} \varepsilon$$

$$|a^{x_n y_n} - b^{y_n}| < \frac{|y_n|}{b} \cdot b^{y_n} \varepsilon \leq M \varepsilon \forall n \geq N$$

$$\Rightarrow \lim |b^{y_n} - a^{x_n y_n}| = 0$$

fix $a > 0, a \neq 1$

$$y = a^x, x \in \mathbb{R}$$

Определение 2.1. $f(x)$ — возрастающая на X , если $\forall x_1, x_2 \in X$ $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$. $f(x)$ неубывающая, если \leq .

Утверждение 2.1. При $a > 1$ $f(x) = a^x$ — возрастает на \mathbb{R} ; При $0 < a < 1$ $f(x) = a^x$ — убывает на \mathbb{R} .

Пусть $x < \xi, x_n \rightarrow x, \xi_n \rightarrow \xi$

$x < x_0 < \xi_0 < \xi$ и x_0 не в окрестности x и аналогично ξ .

$$\forall n \geq N$$

$$x_n < x_0 < \xi_0 < \xi$$

Тогда $a^{x_n} < a^{x_0} < a^{\xi_0} < a^{\xi_n}$

$$a^x \leq a^{x_0} < a^{\xi_0} \leq a^\xi \Rightarrow a^x < a^\xi$$

$$0 < a < 1$$

$$a^x = (\frac{1}{a})^{-x}; a^\xi = (\frac{1}{a})^{-\xi}$$

$$x < \xi \Rightarrow -x > -\xi \quad (\frac{1}{a})^{-x} > (\frac{1}{a})^{-\xi} \Rightarrow a^x > a^\xi$$

3 Предел и непрерывность.

Определение 3.1. Передельная точка x_0 области D — такая точка, что $\forall \varepsilon > 0 \quad \dot{U}_\varepsilon(x_0) \cap D \neq \emptyset$. Множество передельных точек множества D — называется замыкание D , обозначается \overline{D} .

$f : D \rightarrow \mathbb{R}; D \subset \mathbb{R}$. Пусть x_0 — передельная точка D .

Определение 3.2 (По Гейне). Если \forall последовательности $x_n \rightarrow x_0; x_n \neq x_0 \quad \exists \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = a$, то говорят, что $\exists \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = a$.

Определение 3.3. f непрерывна в точке $x_0 \in D$, если $\exists \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$.

Определение 3.4 (ПО Коши). $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = a$, если $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0: f(x) \subset U_\varepsilon(a) \forall x \in \dot{U}_\delta(x_0) \cap D(f)$.

Утверждение 3.1. Определения по Коши и по Гейне равносильны.

Доказательство. Доказательство Коши \Rightarrow Гейне.

Известно, что $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0: f(x) \in U_\varepsilon(a) \forall x \in \dot{U}_\delta(x_0)$.

Берем произвольную $x_n \rightarrow x_0$: fix $\varepsilon > 0 \Rightarrow \exists \delta$, такое что выполнено $f(x) \in U_\varepsilon(a) \forall x \in \dot{U}_\delta(x_0)$ и $\exists N: x_n \in U_\delta(x_0) \forall n \geq N \Rightarrow \exists N: \forall n \geq N x_n \in \dot{U}_\delta(x_0) \Rightarrow f(x_n) \in U_\varepsilon(a)$.

Те $\forall \varepsilon > 0 \exists N: \forall n \geq N f(x_n) \in U_\varepsilon(a)$, те $a = \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n)$

Доказательство не Коши \Rightarrow не Гейне.

Нет предела по Коши. fix $a: \exists \varepsilon: \forall \delta > 0. \exists \tilde{x} \in \dot{U}_\delta(x_0): f(\tilde{x}) \notin U_\varepsilon(a) \Rightarrow a$ не является пределом по Гейне?

От противного. $a = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ по Гейне.

$\delta_n = \frac{1}{n} \exists \tilde{x}_n \in \dot{U}_{\frac{1}{n}}(x_0)$ и $f(\tilde{x}_n) \notin U_\varepsilon(a) \Rightarrow \tilde{x}_n \rightarrow x_0, \tilde{x}_n \neq x_0$, но $\lim_{n \rightarrow \infty} f(\tilde{x}_n) \neq a$

□

Утверждение 3.2. $f(x)$ бесконечно малая в точке x_0 , если $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0$.

Утверждение 3.3. $f(x)$ бесконечно большая в точке x_0 , если $\lim_{x \rightarrow x_0} |f(x)| = +\infty$.

Лемма 3.1 (О двух милиционерах). Пусть $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$ в некоторой окрестности точки x_0 (передельная точка $D(f), D(g), D(h)$). Если $\exists \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} h(x) = a$, то $\exists \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = a$.

Лемма 3.2 (Предельный переход в неравенства). Пусть $f(x) \leq g(x)$ в некоторой окрестности точки x_0 (передельная точка $D(f), D(g)$). Если $\exists \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = a; \exists \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = b$, то $a \leq b$.

Лемма 3.3 (Об ограниченности). Если $\exists \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = a \in \mathbb{R}$. Тогда f ограничена в некотором $\dot{U}(x_0)$.

Доказательство. $\varepsilon = 1: \exists \delta > 0: |f(x) - a| < 1 \forall x \in \dot{U}_\delta(x_0) \Rightarrow |f(x)| \leq |a| + 1 \forall x \in \dot{U}_\delta(x_0)$ □

Лемма 3.4 (Об отделимости от нуля). Если $\exists \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = a > 0$. Тогда $\inf f(x) > 0$ в некоторой $\dot{U}(x_0)$ (f отделима от нуля).

Доказательство. $\varepsilon = \frac{a}{42}: \exists \delta < \frac{a}{42} \forall x \in \dot{U}_\delta(x_0) \Rightarrow f(x) \geq \frac{41}{42}a > 0 \forall x \in \dot{U}_\delta(x_0) \Rightarrow \inf f(x) \geq \frac{41}{42}a > 0$. □

Следствие 3.1. Если $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \neq 0$, то $\frac{1}{f(x)}$ ограничена в некоторой $\dot{U}(x_0)$.

Определение 3.5. $x^\alpha, \alpha \in \mathbb{R}; a^x; \log_a x; \sin, \cos, \operatorname{tg}, \arcsin, \arccos, \operatorname{arctg}$ – основные элементарные функции.

Определение 3.6. Функция называется элементарной, если она получается арифметическими операциями или композицией конечного числа основных элементарных функций.

Утверждение 3.4. Любая элементарная функция непрерывна.

Теорема 3.1 (Теорема о пределе композиций). $f : X \rightarrow Y; g : Y \rightarrow Z$, x_0 — предельная точка множества X , y_0 — предельная точка множества Y . $\exists \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = y_0$, $\exists \lim_{y \rightarrow y_0} g(y) = g(y_0) = a$. Тогда $\exists \lim_{x \rightarrow x_0} g(f(x)) = a$.

Доказательство. $\forall x \in \dot{U}_\delta(x_0) \Rightarrow g(f(x)) \in U_\varepsilon(a)$

$a = \lim_{y \rightarrow y_0} g(y) \Rightarrow \exists \varepsilon_1 > 0: y \in U_{\varepsilon_1}(y_0) \Rightarrow g(y) \in U_\varepsilon(g(y_0))$

$\exists \delta > 0: x \in \dot{U}_\delta(x_0) \Rightarrow f(x) \in U_{\varepsilon_1}(y_0) \Rightarrow g(f(x)) \subset U_\varepsilon(g(y_0))$

□

Теорема 3.2 (Непрерывности обратной функции). Пусть f непрерывная биекция на $\langle a; b \rangle$. Тогда f^{-1} тоже непрерывная биекция $Y \rightarrow \langle a; b \rangle$.

Доказательство. НУО f строго возрастает на $\langle a; b \rangle$

fix $\varepsilon > 0$, тогда $y_1 := f(x_0 - \varepsilon); y_2 := f(x_0 + \varepsilon)$

$$\delta = \min\{y_2 - y_1; y_1 - y_0\}$$

Тогда $\forall y \in U_\delta(y) \Rightarrow f^{-1}(y) \in U_\varepsilon(f^{-1}(y_0))$ тк $y_1 < y < y_2 \Rightarrow f^{-1}(y_1) < f^{-1}(y) < f^{-1}(y_2)$

□

3.1 Замечательные пределы.

$$1. \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$$

$$2. \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$$

$$3. \lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = e$$

$$4. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$$

$$5. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1; \lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - 1}{x} = \ln a$$

$$6. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)^m - 1}{x} = m; m \in \mathbb{R}$$

$$7. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \frac{1}{2}$$

$$8. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

$$9. \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{n}{2^n} = 0$$

Утверждение 3.5. $(1+x)^p \simeq 1+px$, $x \rightarrow 0$.

4 \bar{o} и \mathcal{O} .

Определение 4.1. Символ Ландау — \bar{o} .

$$1. \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 0, \text{ тогда } f(x) := \bar{o}(g(x)), x \rightarrow x_0.$$

$$2. f(x) = \bar{o}(g(x)), \text{ если } \forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0: |f(x)| \leq \varepsilon |g(x)|, \forall x \in \dot{U}_\delta(x_0).$$

Свойство 4.1. 1. $f(x)$ называется бесконечно малой в точке x_0 , если $f(x) = \bar{o}(1)$, $x \rightarrow x_0$.

$$2. \bar{o}(f(x)) + \bar{o}(f(x)) = \bar{o}(f(x)), x \rightarrow x_0.$$

$$3. C \cdot \bar{o}(f(x)) = \bar{o}(f(x)), x \rightarrow x_0.$$

$$4. \bar{o}(\bar{o}(f(x))) = \bar{o}(f(x)), x \rightarrow x_0.$$

Определение 4.2. 1. Пусть f, g обе бесконечно большие или бесконечно малые. $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$, тогда $f(x) \sim g(x)$, $x \rightarrow x_0$.

$$2. f(x) \sim g(x) \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 (1 - \varepsilon)|g(x)| \leq |f(x)| \leq (1 + \varepsilon)|g(x)|, \forall x \in \overset{\circ}{U}_\delta(x_0).$$

Утверждение 4.1. $f(x) \sim g(x)$, $x \rightarrow x_0 \Leftrightarrow f(x) = g(x) + \bar{o}(g(x))$, $x \rightarrow x_0$.

Определение 4.3. $f(x) = \underline{O}(g(x))$, $x \rightarrow x_0$, если $\exists C > 0$: $|f(x)| \leq C|g(x)|$ в некоторой окрестности точки x_0 .

Определение 4.4. $f(x) \asymp g(x)$, $x \rightarrow x_0$, если $\exists c_1, c_2 > 0$: $c_1|g(x)| \leq |f(x)| \leq c_2|g(x)|$ в некоторой окрестности точки x_0 .

Теорема 4.1. Пусть $f(x) \sim f_1(x)$, $x \rightarrow x_0$ и функции не обращаются в 0 в некоторой $\overset{\circ}{U}(x_0)$. Тогда $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)g(x)$ и $\lim_{x \rightarrow x_0} f_1(x)g(x)$ \exists или \nexists одновременно, и если \exists , то они равны. Словами: в произведение пределов сомножители можно заменять на эквивалентные; слагаемые нельзя!

Доказательство. $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)g(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{f_1(x)} \cdot f_1(x)g(x)$. □

Утверждение 4.2. $(1+t)^\alpha = 1 + \alpha t + \bar{o}(t)$, $t \rightarrow 0$.

Утверждение 4.3. $e^t = 1 + t + \bar{o}(t)$, $t \rightarrow 0$.

Утверждение 4.4. Если $\exists \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = k \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \Rightarrow f(x) \asymp g(x), x \rightarrow x_0 \Rightarrow f(x) = \underline{O}(g(x))$ и $g(x) = \underline{O}(f(x))$, $x \rightarrow x_0$.

4.1 Асимптотические равенства.

$$1. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1; \sin x \sim x; \sin x = x + \bar{o}(x)$$

$$2. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \frac{1}{2}; 1 - \cos x \sim \frac{x^2}{2}; \cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + \bar{o}(x^2)$$

$$3. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1; \ln(1+x) \sim x; \ln(1+x) = x + \bar{o}(x) \\ \log_a(1+x) \sim \frac{x}{\ln a}; \log_a(1+x) = \frac{x}{\ln a} + \bar{o}(x)$$

$$4. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1; e^x - 1 \sim x; e^x = 1 + x + \bar{o}(x) \\ e^x - 1 = x + \bar{o}(x); a^x = 1 + x \ln a + \bar{o}(x)$$

$$5. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)^s - 1}{x} = s; (1+x)^s - 1 \sim sx; (1+x)^s = 1 + sx + \bar{o}(x)$$

5 Функции, непрерывные на отрезке.

Определение 5.1. f непрерывна на отрезке $[a, b]$, $a, b \in \mathbb{R}$; $a < b \Leftrightarrow \forall x_0 \in [a, b] \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$.

Заметка 5.1. $C(X) = \{\text{множество функций непрерывных на множестве } X\}$. $f \in C([a, b]): \forall x_0 \in X \forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0: |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon \forall |x - x_0| < \delta$.

5.1 Первая теорема Вейерштрасса.

Теорема 5.1 (Первая теорема Вейерштрасса). $f \in C([a, b])$. Тогда f ограничена на $[a, b]$.

Доказательство. НУО докажем, что f ограничена сверху.

f неограничена сверху. $\exists x_n \in [a, b]: f(x_n) > n$. $\{x_n\} \in [a, b]$. $\exists x_{n_k} \rightarrow x_0 \in [a, b]$. $f(x_0) = \lim_{x_{n_k} \rightarrow x_0} f(x_{n_k}) = \infty \#$. \square

5.2 Вторая Теорема Вейерштрасса.

Теорема 5.2 (Вторая Теорема Вейерштрасса). Пусть $f \in C([a, b])$. Тогда $\exists \bar{x}, \underline{x} \in [a, b]: f(\bar{x}) = \min_{[a, b]} f(x), f(\underline{x}) = \max_{[a, b]} f(x)$.

Доказательство. # $\inf_{[a, b]} f(x) = m$ и не достигается. $f(x) > m \forall x \in [a, b] \Rightarrow g(x) := \frac{1}{f(x) - m}$ неограничена на $[a, b]$. Но $\forall \varepsilon > 0 \exists x_\varepsilon \in [a, b]: f(x_\varepsilon) < m + \varepsilon \Rightarrow g(x_\varepsilon) > \frac{1}{\varepsilon} \Rightarrow g$ неограничена сверху на $[a, b]$ #. \square

5.3 Теорема Больцано-Коши.

Теорема 5.3 (Больцано-Коши). $f \in C([a, b]), f(a)f(b) < 0$. Тогда $\exists x_0 \in [a, b]: f(x_0) = 0$.

Доказательство №1. НУО $f(a) < 0, f(b) > 0$. $a_0 := a, b_0 := b$. $[a_k, b_k] \rightarrow [a_{k+1}, b_{k+1}]$. $\lim a_k = \alpha, \lim b_k = \beta$. $\lim(a_k - b_k) = \alpha - \beta, \lim \frac{b_k - a_k}{2^k} = 0 \Rightarrow \alpha = \beta =: x_0$. $f(a_k) < 0, f(b_k) > 0$. $\begin{cases} f(x_0) = \lim_{k \rightarrow \infty} f(a_k) \leq 0 \\ f(x_0) = \lim_{k \rightarrow \infty} f(b_k) \geq 0 \end{cases} \Rightarrow f(x_0) = 0$. \square

Доказательство №2. $X = \{x \in [a, b] : f(x) < 0\} \neq \emptyset$. $\exists x_0 = \sup X < b$. \square

5.4 Третья Теорема Вейерштрасса.

Теорема 5.4 (Третья Теорема Вейерштрасса). $f \in C([a, b]), M = \max_{[a, b]} f(x), m = \min_{[a, b]} f(x)$. Тогда $E(f) = [m; M]$.

5.5 Равномерная непрерывность.

Определение 5.2 (Равномерная непрерывность). f равномерно непрерывна на X , если $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0: \forall x_0 \in X |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon \forall |x - x_0| < \delta$.

Теорема 5.5 (?Коши-Вейерштрасса?). Пусть $f \in C([a, b])$. Тогда f равномерно непрерывна на $[a, b]$.

Доказательство. # $\exists \varepsilon > 0: \forall \delta > 0: \exists x_1 \xi |f(x) - f(\xi)| \geq \varepsilon, |x - \xi| < \delta$. Возьмем $\delta_1 = 1$ $\exists x_1, \xi_1: |x_1 - \xi_1| < 1$ и $|f(x_1) - f(\xi_1)| \geq \varepsilon, \dots, \delta_n = \frac{1}{n} \exists x_n, \xi_n: |x_n - \xi_n| < \frac{1}{n}$ и $|f(x_n) - f(\xi_n)| \geq \varepsilon$. $\{x_n\}, \{\xi_n\} \subset [a, b]$. $\{x_{n_m} \rightarrow x_0\}, \{\xi_{n_m} \rightarrow \xi_0\} \Rightarrow x_0 = \xi_0$. $|f(x_{n_m}) - f(\xi_{n_m})| \geq \varepsilon \#$. \square

6 Дифференциальное исчисление.

Определение 6.1. f дифференцируема в точке x_0 , если $\exists k \in \mathbb{R}: f(x) = f(x_0) + k(x - x_0) + \bar{o}(x - x_0)$.

Утверждение 6.1. Если f дифференцируема в точке $x_0 \Leftrightarrow \exists \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = k$.

Доказательство. $\bar{o}(x - x_0) + k(x - x_0) = f(x) - f(x_0) \Leftrightarrow k + \frac{\bar{o}(x - x_0)}{x - x_0} = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \Leftrightarrow k = k + \lim \frac{\bar{o}(x - x_0)}{x - x_0} = \lim \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$. \square

Определение 6.2. Такое k называется производной в точке x_0 . Обозначается $f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$.

Утверждение 6.2. Если f дифференцируема, то она непрерывна.

Определение 6.3. Производная (функция) функции $f \rightarrow g(x) = f'(x): x_0 \mapsto \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$;
 $\Delta x = x - x_0; x_0 \mapsto \lim_{x \rightarrow \Delta x} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}; f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$.

Заметка 6.1. $f(\tilde{x}) = f(x) \cdot f'(x)(\tilde{x} - x) + \bar{o}(\tilde{x} - x)$. $f(x + \Delta x) = f(x) + f'(x) \cdot \Delta x + \bar{o}(\Delta x)$; $\Delta f(x) := f(x + \Delta x) - f(x)$. $\Delta f(x) = f'(x) \cdot \Delta x + \bar{o}(\Delta x)$, $\Delta x \rightarrow 0$.

Определение 6.4 (Дифференциал функции). $df(x) := f'(x)\Delta x$.

Заметка 6.2. Пусть $f(x) = x$. $\Delta x = 1 \cdot \Delta x + 0$, $\Delta f(x) = f'(x)\Delta x + \bar{o}(\Delta x) \Rightarrow f'(x) = 1 \Rightarrow df(x) = \Delta x$.
Тогда $df(x) = f'(x)d(x)$, $f'(x) = \frac{df(x)}{dx}$.

Заметка 6.3. Дифференциал — линейная часть малого приращения функции.

6.1 Правила дифференцирования.

(рассматриваем дифференцируемые функции):

1. $(c)' = 0$; $(cf(x))' = cf'(x)$
2. $(f(x) \pm g(x))' = f'(x) \pm g'(x)$
3. $(f(x) \cdot g(x))' = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x) \rightarrow d(fg) = df \cdot g + dg \cdot f$
4. $\left(\frac{1}{f(x)} \right)' = -\frac{f'(x)}{f^2(x)}, f(x) \neq 0$
5. $\left(\frac{f(x)}{g(x)} \right)' = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)}$
6. Пусть f дифференцируема в точке x , g дифференцируема в точке $f(x)$. Тогда $g(f(x))$ дифференцируема в точке x и $(g(f(x)))' = g'(f(x)) \cdot f'(x)$ или $dg(f(x)) = g'(f(x)) \cdot df(x)$
7. f дифференцируема в точке x_0 и $f'(x_0) \neq 0$. Если f обратима в окрестности точки x_0 , то f^{-1} дифференцируема в точке $y_0 = f(x_0)$ и $(f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)} = \frac{1}{f'(f^{-1}(y_0))}$
8. $(\sin x)' = \cos x$

$$9. (\cos x)' = -\sin x$$

$$10. (\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$$

$$11. (\operatorname{ctg} x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$$

$$12. (\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$13. (\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$14. (\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1+x^2}$$

$$15. (\operatorname{arcctg} x)' = -\frac{1}{1+x^2}$$

$$16. (e^x)' = e^x; (a^x)' = a^x \cdot \ln a$$

$$17. (\ln x)' = \frac{1}{x}; (\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}$$

$$18. (x^p)' = px^{p-1}$$