1 Последовательность.

$f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$
$f(n) =: f_n$
Опр. Последовательность называется ограниченной сверху, если $\exists M : |f_n| \leqslant M$. Снизу, если $\exists m : f_n \geqslant m$. f_n — ограниченная, если ограничена сверху и снизу.
Опр. $M_0 = \sup f_n$, если M_0 — верхняя грань и $\forall\varepsilon > 0\ \exists n_0 : f_{n0} > M_0 - \varepsilon$. $m_0 = \inf f_n$, если m_0 — нижняя грань и $\forall\varepsilon > 0\ \exists n_0 : f_{n0} < m_0 + \varepsilon$.
Аксиома вещественных чисел. Если множество X ограничено сверху, то $\exists supX$. Если f_n неограничено сверху, то $supf_n =: +\infty$. Если снизу, то $inff_n =: -\infty$.
Опр. f_n — бесконечно большая (бб), если $\forall\varepsilon > 0\ \exists N = N(\varepsilon) : |f_n| > \frac{1}{\varepsilon}\ \forall n \geqslant N$. f_n — не бб, $\exists\varepsilon > 0 : \forall N \exists n > N : |f_n| \leqslant \frac{1}{\varepsilon}$.
Опр. f_n — бесконечно малая (бм), если $\forall\varepsilon > 0\ \exists N = N(\varepsilon) : |f_n| < \varepsilon\ \forall n \geqslant N$.
Лемма. f_n — бм $\Rightarrow f_n$ — ограничена.
Доказательство:
Пусть $\varepsilon = 1$, тогда $\exists N : |f_n| \leqslant 1\ \forall n \geqslant N$
$M := max|f_1|, \dots, |f_{N-1}|, 1$, тогда $|f_n| \leqslant M\ \forall n \in N$.
Лемма.

a) f_n — бб $\Rightarrow \frac{1}{f_n}$ — бм
b) f_n — бм $(f_n \neq 0) \Rightarrow \frac{1}{f_n}$ — бб

Лемма. f_n — неограниченная последовательность, тогда существует бб подпоследовательность f_{nk}.
Доказательство:

$\exists n_1 : |f_{n1} > 1|$,
$\exists n_2 > n_1 : |f_{n2} > 2|$,
$\exists n_3 > n_2 : |f_{n3}| > 3$,
$\vdots$,
$\exists n_1 < n_2 < \dots < n_k < \dots$
$|f_{nk}| > k \Rightarrow f_{nk}$ — бб.

Лемма.

a) бм + бм = бм
b) бм · C = бм
c) бм · бм = бм
d) бб · C = бб, $C \neq 0$
e) бб · бб = бб

1.1 Предел последовательности.

a_n — последовательность.
Опр. $a = \lim a_n$, если $\forall\varepsilon > 0\ \exists N : |a_n - a| < \varepsilon\ \forall n \geqslant N$.
Опр. Эпсилон окрестность: $U_\varepsilon(a) := (a - \varepsilon; a + \varepsilon)$. Выколотая эпсилон окрестность: $\mathring{U}_\varepsilon(a) := U_\varepsilon(a) \backslash \{a\}$.
$\varepsilon_1 < \varepsilon_2 \Rightarrow U_{\varepsilon 1}(a) \subset U_{\varepsilon 2}(a), a \in \overline{\mathbb{R}}$.
Опр. $\mathbb{R} \cup \{\pm\infty\} = \overline{\mathbb{R}}$ — расширенная числовая прямая.
Опр. $\varepsilon > 0\ U_\varepsilon(+\infty) = (\frac{1}{\varepsilon}; +\infty)$; $U_\varepsilon(-\infty) = (-\infty; -\frac{1}{\varepsilon})$.
$\lim |a_n| = +\infty \Leftrightarrow \forall\varepsilon > 0\ \exists N(\varepsilon) : |a_n| > \frac{1}{\varepsilon}$.
Если a_n — бб $\Leftrightarrow \lim |a_n| = +\infty$.
Если a_n — бм $\Leftrightarrow \lim |a_n| = 0$.
Утв. $\lim a_n = a \Leftrightarrow \exists$ бм последовательность d_n, такая что $a_n = a + d_n$.
Утв. Если предел последовательности существует, то он единственный.
Доказательство:

$\exists a < b$ и $a = \lim a_n$, $b = \lim a_n$.
Тогда $\varepsilon := \frac{b-a}{42}$:
$\exists N_1 : a_n \in U_\varepsilon(a) \forall n \geqslant N_1$

$\exists N_2 : a_n \in U_\varepsilon(b) \forall n \geqslant N_2$
$\Rightarrow a_n \in (U_\varepsilon(a) \cap U_\varepsilon(b)) = \emptyset \ \forall n \geqslant \max\{N_1, N_2\}$!?!.

Предельный переход в неравенства. $a_n \leqslant b_n \ \forall n \geqslant N_0$.
Пусть $\exists \lim a_n = a$; $\lim b_n = b$, $a, b \in \overline{\mathbb{R}}$
Тогда $a \leqslant b$.
Доказательство:

Пусть $a > b$. Тогда $\varepsilon := \frac{a-b}{42}$:
$\exists N_1 : a_n \in U_\varepsilon(a) \forall n \geqslant N_1$
$\exists N_2 : a_n \in U_\varepsilon(b) \forall n \geqslant N_2$
$\Rightarrow a_n > b_n \ \forall n \geqslant \max\{N_1, N_2\}$!?!.

Лемма о сжатых последовательностях. Пусть $a_n \leqslant b_n \leqslant c_n \ \forall n \geqslant N_0$ и $\exists \lim a_n = \lim c_n = a \in \overline{\mathbb{R}}$, тогда $\exists \lim b_n = a$.
Доказательство:

$\varepsilon > 0 :$
$\exists \ a_n \in U_\varepsilon, \ n \geqslant N_1$
$\exists \ c_n \in U_\varepsilon, \ n \geqslant N_2$
$\Rightarrow b_n \in U_\varepsilon : \forall n \geqslant \{N_1, N_2, N_0\} =: N \Rightarrow a = \lim b_n$ по определению.

Лемма об отделимости от нуля. Пусть $\exists \lim a_n = a > 0$. Тогда $\exists \ N : a_n > \frac{a}{2} > 0, \forall n \geqslant N$.
Следствие. Если $\lim a_n \neq 0 \Rightarrow \frac{1}{a_n}$ ограничена $(a_n \neq 0)$.
Доказательство:

$\lim a_n = a > 0$
$\exists N_1 : a_n > \frac{a}{2} \Rightarrow 0 < \frac{1}{a_n} < \frac{2}{a} \ \forall n \geqslant N_1$
$\min\{a_1, \ldots, a_{N-1}, \frac{a}{2}\} \leqslant \frac{1}{a_n} \leqslant \max\{a_1, \ldots, a_{N-1}, \frac{2}{a}\}$

Теорема. Арифметические свойства предела. Пусть $\lim a_n = a$, $\lim b_n = b$; $a, b \in \overline{\mathbb{R}}$. Тогда:

1. $\lim(a_n + b_n) = a + b$, кроме случаев $+\infty + (-\infty)$, $-\infty + (+\infty)$
2. $\lim(ka_n) = ka$, кроме случая $0 \cdot (\pm\infty)$
3. $\lim(a_n \cdot b_n) = ab$, кроме случая $0(\pm\infty)$
4. $\lim \frac{a_n}{b_n} = \frac{a}{b}$, кроме случаев $\frac{0}{0}$, $\frac{\infty}{\infty}$

Доказательство:

$a, b \in \mathbb{R}$
$a_n = a + \alpha_n$, $b_n = b + \beta_n$; α_n, β_n — бм.

1. $a_n + b_n = (a+b) + (\alpha_n + \beta_n) \Leftrightarrow \lim(a_n + b_n) = a + b$.
2. Аналогично.
3. $a_n b_n = (a + \alpha_n)(b + \beta_n) = ab + \alpha_n b + \beta_n a + \alpha_n + \beta_n$
4. Если $b \neq 0$ $\frac{1}{b_n}$ — ограниченна
$\frac{a_n}{b_n} - \frac{a}{b} = \frac{a+\alpha_n}{b+\beta_n} - \frac{a}{b} = \frac{\alpha_n b - \beta_n a}{b_n b} = \frac{1}{b} \cdot \frac{1}{b_n} \cdot (\alpha_n b - \beta_n a)$
Если $b = 0 \Rightarrow b_n$ бм $\Rightarrow \frac{1}{b_n}$ — бб $\Rightarrow a_n \cdot \frac{1}{b_n}$ = ограниченная бб

Опр. Линейное пространство — множество, сумма двух элементов которого лежит в этом множестве и элемент с коэффициентом лежит в этом множестве.
Опр. Последовательность называется возвратной, если $a_n = \beta_{n-1} a_{n-1} + \beta_{n-2} a_{n-2} + \cdots + \beta_{n-k} a_{n-k}$; βi — фиксированные коэффициенты.
$a_n^{(1)}, a_n^{(2)} \Rightarrow \forall \lambda, \mu \in \mathbb{R} \ \lambda a_n^{(1)} + \mu a_n^{(2)}$ тоже удовлетворяет (x).
$a_n := t^n$
$t^k = \beta_{n-1} t^{k-1} + \cdots + \beta_{n-k}$
t_0 — простой корень, то t_0^n
t_0 — корень $(m) \Rightarrow t_0^n; nt_0^n; n^2 t_0^n; \ldots; n^{m-1} t_0^n$
Теорема.

1. Пусть a_n возрастает и ограничена сверху. Тогда $\exists \lim a_n = \sup a_n$
2. Пусть a_n убывает и ограничена снизу. Тогда $\exists \lim a_n = \inf a_n$

Доказательство:

fix $\varepsilon > 0$

Так как a_n — ограничена, то $\exists M \sup a_n \in \mathbb{R}$; И $\exists N : a_N > M - \varepsilon$. Тогда $\begin{cases} a_n \geqslant M - \varepsilon & \forall n \geqslant N, \text{ так как } a_n \uparrow \\ a_n \leqslant M < M + \varepsilon \end{cases} \Rightarrow$

$\exists N : |a_n - M| < \varepsilon \forall n \geqslant N \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} a_n = M$ по определению.

Найти предел последовательности $a_n = (1 + \frac{1}{n})^n$.

$b_n = (1 + \frac{1}{n})^{n+1}; b_1 = 4, b_2 = 3, \dots\ b_n \downarrow$
$b_n \geqslant 1$
Докажем, что b_n убывает.
$\frac{b_n}{b_{n+1}} = \frac{(\frac{n+1}{n})^{n+1}}{(\frac{n+2}{n+1})^{n+2}} = \frac{n+1}{n})^{n+1} \cdot \frac{n+1}{n+2})^{n+2} = \frac{n+1}{n+2} \cdot (\frac{n^2+2n+1}{n^2+2n})^{n+1} = \frac{n+1}{n+2} \cdot (1 + \frac{1}{n^2+2n})^{n+1}$ (неравенство Бернули)
$> \frac{n+1}{n+2} \cdot (1 + \frac{n+1}{n^2+2n}) = \frac{(n+1)(n^2+3n+1)}{(n+2)(n^2+2n)} = \frac{n^3+4n^2+4n+1}{n^3+4n^2+4n} > 1.$
$a_n = \frac{b_n}{(1+\frac{1}{n})}$
$\lim\limits_{n\to\infty} = \lim \frac{b_n}{1+\frac{1}{n}} = \frac{\lim b_n}{\lim(1+\frac{1}{n})} = \lim b_n$ — существует.
$e := \lim\limits_{n\to\infty} (1 + \frac{1}{n})^n \approx 2.718281828459045\dots$

Теорема Вейерштрасса. Пусть последовательность a_n ограничена. Тогда существует сходящаяся подпоследовательность.
Доказательство:

$|a_n| \leqslant M$
$[-M = \alpha_1; M = \beta_1]$. α_2 — середина. $a_1 = x_1 \in [\alpha_1; \alpha_2]$.
$[\alpha_2; \beta_2]$. β_3 — середина. $x_2 = a_{\min n} \in [\alpha_2; \beta_3]$.
И тд.
α_k неубывающая и ограниченная сверху. $\exists \lim \alpha_k = \alpha$. β_k неубывающая и ограниченная сверху. $\exists \lim \beta_k = \beta$.
$\beta - \alpha = \lim\limits_{k\to\infty} (\beta_k - \alpha_k) = \lim\limits_{k\to\infty} \frac{2M}{2^{k-1}} = 0.$
По построению x_k — подпоследовательность и $\alpha_k \leqslant x_k \leqslant \beta_k \Rightarrow \exists \lim x_k$.

Опр. Последовательность называется фундаментальной (или последовательностью Коши), если $\forall \varepsilon > 0\ \exists N(\varepsilon)$: $|a_n - a_k| < \varepsilon\ \forall n, k \geqslant N$.
Утв. Пусть $\exists \lim a_n = a \in \mathbb{R}$. Тогда $\{a_n\}$ фундаментальная.
Доказательство:

fix $\varepsilon > 0 \exists N : |a_n - a| < \frac{\varepsilon}{2} \forall n \geqslant N$. Тогда $\forall n, k \geqslant N\ |a_n - a_k| = |(a_n - a) + (a - a_k)| \leqslant |a_n - a| + |a_k - a| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$.

Теорема Коши. Пусть $\{a_n\}$ фундаментальная последовательность. Тогда $\exists \lim a_n$.
Доказательство:

1) (!)$\{a_n\}$ ограничена.
   $\varepsilon = 1$: $\exists N$: $|a_n - a_k| \leqslant \varepsilon\ \forall n, k \geqslant N \Rightarrow a_k \in [a_{N-1}; a_{N+1}] \forall k \geqslant N$
   $M = max\{|a_1|, |a_2|, \dots, |a_N + 1|\} \Rightarrow |a_n| \leqslant M \forall n$.
2) Тогда по теореме Вейерштрасса $\exists a_{n_k}$ — подпоследовательность; $\lim\limits_{n\to\infty} a_{n_k} = a$.
3) fix $\varepsilon > 0$. $\exists N_1 : |a_{n_k} - a| < \frac{\varepsilon}{2}\ \forall n_k \geqslant N_1$
   $\exists N_2 : |a_m - a_n| < \frac{\varepsilon}{2}\ \forall m, n \geqslant N_2$
   Пусть $n \geqslant max\{N_1, N_2\}\ \exists n_k \geqslant m$.
   $|a_m - a| = |(a_m - a_{n_k}) + (a_{n_k} - a)| \leqslant |a_n - a_{n_k}| + |a_{n_k} - a| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \Rightarrow a = \lim\limits_{m\to\infty} a_m$.

2 Возведение в вещественную степень.

$n \in \mathbb{N}$; $x^n = x \cdot x \cdot \dots \cdot x$, n раз.
$x^{-n} = \frac{1}{x^n}$, $x \neq 0$
$x^0 := 1$
$\sqrt[n]{x} = x^{\frac{1}{n}}$
x^p, $p \in \mathbb{Q}$, $x \geqslant 0$ $(p > 0)$ или $x > 0$ $(p \geqslant 0)$
$\underline{\text{fix } a > 0,\ x \in \mathbb{R}}$
$a^x := \lim\limits_{n\to\infty} a^{x_n}$, где $\{x_n\}$ последовательность, такая что $x_n \in \mathbb{Q}$, $\lim\limits_{n\to\infty} x_n := x$.
Корректность определения.

1. $x \in \mathbb{Q}$. Докажем, что a^x совпадает со старым определением.
   $x \in \mathbb{Q}$, берем $x_n = x \Rightarrow a^x = a^x$

2. Берем произвольную последовательность $\{x_n\}$, $x_n \to x \Rightarrow x_n$ — фундаментальная последовательность.
   fix $\varepsilon > 0$ $|a^{x_n} - a^{x_k}| = a^{x_n}|1 - a^{x_k - x_n}|$. Сходится. Значит ограничена. Тогда a^{x_n} ограничена. Тогда $a^{x_n}|1-a^{x_k-x_n}| \leqslant M \cdot |1 - a^{x_k - x_n}|$.
   $\exists N : |a^{\frac{1}{m}} - 1| < \frac{M}{\varepsilon}$ $\forall m \geqslant N \Rightarrow |a^{\frac{1}{n}} - 1| < \frac{M}{\varepsilon} \Rightarrow \exists N_0 : |x_n - x_k| < \frac{1}{N}$ $\forall n, k \geqslant N$
   $M \cdot |1 - a^{x_k - x_n}| < M \cdot \frac{2}{M}$ $\forall n, k \geqslant N_0 \Rightarrow a^{x_n}$ образует фундаментальную последовательность $\Rightarrow$ (по теореме Коши) $\exists \lim\limits_{n\to\infty} a^{x_n}$

3. $x_n \to x$, $y_m \to x$, $x_n, y_m \in \mathbb{Q}$
   $\exists a = \lim a^{x_n}$; $\alpha = \lim a^{y_m}$
   $(a - \alpha) = \lim\limits_{n\to\infty}(a^{x_n} - a^{y_m}) = \lim\limits_{n\to\infty} a^{x_n}(1 - a^{x_n - y_m}) = 0$
   $\lim(y_n - x_n) = x - x = 0$

Свойства:

1. $a^x \cdot a^y = a^{x+y}$
   Пусть $x_n \to x$, $y_n \to y$; $x_n, y_n \in \mathbb{Q}$
   $a^{x_n} \cdot a^{y_n} = a^{x_n + y_n}$
   $a^x \cdot a^y = \lim a^{x_n} \cdot \lim a^{y_n} = \lim a^{x_n} \cdot a^{y_n} = \lim a^{x_n + y_n} = a^{x+y}$

2. $(a^x)^y = a^{xy}$
   Пусть $x_n \to x$, $y_m \to y$; $x_n, y_m \in \mathbb{Q}$
   $x_n y_n \to xy$
   $\lim\limits_{m\to\infty}(\lim\limits_{n\to\infty} a^{x_n})^{y_m}$? $\lim\limits_{n\to\infty} a^{x_n y_n}$
   $\lim\limits_{n\to\infty}(a^x)^{y_n} = \lim\limits_{n\to\infty} a^{x_n y_n}$
   $\lim\limits_{n\to\infty}|b^{y_n} - a^{x_n y_n}| = 0$, где $b = a^x$
   $\exists N : |a^{x_n} - b| < \varepsilon$ $\forall n \geqslant N$
   $b - \varepsilon < a^{x_n} < b + \varepsilon$
   $1 - \frac{\varepsilon}{b} < \frac{a^{x_n}}{b} < 1 + \frac{\varepsilon}{b} \uparrow^{y_n}, y_n > 0$, для < 0 аналогично
   $(1 - \frac{\varepsilon}{b})^{y_n} < (\frac{a^{x_n}}{b})^{y_n} < (1 + \frac{\varepsilon}{b})^{y_n}$
   $1 - \frac{y_n \varepsilon}{b} < \frac{a^{x_n y_n}}{b^{y_n}} < 1 + \frac{y_n \varepsilon}{b}$
   $\Rightarrow |\frac{a^{x_n y_n}}{b^{y_n}} - 1| \leqslant \frac{|y_n|}{b}\varepsilon$
   $|a^{x_n y_n} - b^{y_n}| < \frac{|y_n|}{b} \cdot b^{y_n}\varepsilon \leqslant M\varepsilon$ $\forall n \geqslant N$
   $\Rightarrow \lim|b^{y_n} - a^{x_n y_n}| = 0$

fix $a > 0$, $a \neq 1$
$y = a^x$, $x \in \mathbb{R}$
Опр. $f(x)$ — возрастающая на X, если $\forall x_1, x_2 \in X$ $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$. $f(x)$ неубывающая, если $\leqslant$.
Утв. При $a > 1$ $f(x) = a^x$ — возрастает на $\mathbb{R}$; При $0 < a, < 1$ $f(x) = a^x$ — убывает на $\mathbb{R}$.

> Пусть $x < \xi$, $x_n \to x$, $\xi_n \to \xi$
> $x < x_0 < \xi_0 < \xi$ и x_0 не в окрестности x и аналогично ξ.
> $\forall n \geqslant N$
> $x_n < x_0 < \xi_0 < \xi_0$
> Тогда $a^{x_n} < a^{x_0} < a^{\xi_0} < a^{\xi_n}$
> $a^x \leqslant a^{x_0} < a^{\xi_0} \leqslant a^{\xi} \Rightarrow a^x < a^{\xi}$
> $0 < a < 1$
> $a^x = (\frac{1}{a})^{-x}$; $a^{\xi} = (\frac{1}{a})^{-\xi}$
> $x < \xi \Rightarrow -x > -\xi$ $(\frac{1}{a})^{-x} > (\frac{1}{a})^{-\xi} \Rightarrow a^x > a^{\xi}$

Опр. Передельная точка x_0 области D — такая точка, что $\forall \varepsilon > 0$ $\mathring{U}_{\varepsilon}(x_0) \cap D \neq \emptyset$. Множество предельных точек множества D — называется замыкание D, обозначается $\overline{D}$.
$f : D \to \mathbb{R}$; $D \subset \mathbb{R}$. Пусть x_0 — предельная точка D.
Опр. по Гейне. Если $\forall$ последовательности $x_n \to x_0$; $x_n \neq x_0$ $\exists \lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = a$, то говорят, что $\exists \lim\limits_{x\to x_0} f(x) = a$.
Опр. f непрерывна в точке $x_0 \in D$, если $\exists \lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$.
Опр. по Коши. $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = a$, если $\forall \varepsilon > 0$ $\exists \delta > 0$: $f(x) \subset U_{\varepsilon}(a)$ $\forall x \in \mathring{U}_{\delta}(x_0) \cap D(f)$.
Равносильность определений по Коши и по Гейне.
Доказательство Коши $\Rightarrow$ Гейне.

Известно, что $\forall\varepsilon > 0\ \exists\delta > 0$: $f(x) \in U_\varepsilon(a) \forall x \in \mathring{U}_\delta(x_0)$.
Берем произвольную $x_n \to x_0$: fix $\varepsilon > 0 \Rightarrow \exists\delta$, такое что выполнено $f(x) \in U_\varepsilon(a) \forall x \in \mathring{U}_\delta(x_0)$ и $\exists N$: $x_n \in U_\delta(x_0) \forall n \geqslant N \Rightarrow \exists N$: $\forall n \geqslant N\ x_n \in \mathring{U}_\delta(x_0) \Rightarrow f(x_n) \in U_\varepsilon(a)$.
Те $\forall\varepsilon > 0\ \exists N$: $\forall n \geqslant N\ f(x_n) \in U_\varepsilon(a)$, те $a = \lim\limits_{n\to\infty} f(x_n)$

Доказательство не Коши $\Rightarrow$ не Гейне.

Нет предела по Коши. fix a: $\exists\varepsilon$: $\forall\delta > 0$. $\exists\tilde{x} \in \mathring{U}_\delta(x_0)$: $f(\tilde{x}) \notin U_\varepsilon(a) \Rightarrow a$ не является пределом по Гейне?
От противного. $a = \lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ по Гейне.
$\delta_n = \frac{1}{n}\ \exists\tilde{x_n} \in \mathring{U}_{\frac{1}{n}}(x_0)$ и $f(\tilde{x_n}) \notin U_\varepsilon(a) \Rightarrow \tilde{x_n} \to x_0, \tilde{x_n} \neq x_0$, но $\lim\limits_{n\to\infty} f(\tilde{x_n}) \neq a$

$f(x)$ бесконечно малая в точке x_0, если $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = 0$.
$f(x)$ бесконечно большая в точке x_0, если $\lim\limits_{x\to x_0} |f(x)| = +\infty$.
Лемма о двух милиционерах. Пусть $f(x) \leqslant g(x) \leqslant h(x)$ в некоторой окрестности точки x_0 (передельная точка $D(f), D(g), D(h)$). Если $\exists \lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \lim\limits_{x\to x_0} h(x) = a$, то $\exists \lim\limits_{x\to x_0} g(x) = a$.
Передельный переход в неравенства. Пусть $f(x) \leqslant g(x)$ в некоторой окрестности точки x_0 (передельная точка $D(f), D(g)$). Если $\exists \lim\limits_{x\to x_0} f(x) = a$; $\exists \lim\limits_{x\to x_0} g(x) = b$, то $a \leqslant b$.
Лемма об ограниченности. Если $\exists \lim\limits_{x\to x_0} f(x) = a \in \mathbb{R}$. Тогда f ограничена в некотром $\mathring{U}(x_0)$.
Доказательство:

$\varepsilon = 1$: $\exists\delta > 0$: $|f(x) - a| < 1\ \forall x \in \mathring{U}_\delta(x_0) \Rightarrow |f(x)| \leqslant |a| + 1\ \forall x \in \mathring{U}_\delta(x_0)$

Лемма об отделимости от нуля. Если $\exists \lim\limits_{x\to x_0} f(x) = a > 0$. Тогда $\inf f(x) > 0$ в некоторой $\mathring{U}(x_0)$ (f отделима от нуля).
Доказательство:

$\varepsilon = \frac{a}{42}$: $\exists\delta < \frac{a}{42}\ \forall x \in \mathring{U}_\delta(x_0) \Rightarrow f(x) \geqslant \frac{41}{42}a > 0\ \forall x \in \mathring{U}_\delta(x_0) \Rightarrow \inf f(x) \geqslant \frac{41}{42}a > 0$.

Следствие. Если $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) \neq 0$, то $\frac{1}{f(x)}$ ограничена в некоторой $\mathring{U}(x_0)$.
В следующий раз арифметические свойства предела. Учить что такое фундаментальная последовательность, теорему Коши о сходимости фундаментальной последовательности, определение a^x, определение по Коши, по Гейне, отрицания этих определений, определение бм, бб, переформулированные утверждения о последовательностях.
Опр. f непрерывна в точке $x_0 \in D(f)$, если $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$.
$x^\alpha, \alpha \in \mathbb{R}; a^x; \log_a x; \sin, \cos, \operatorname{tg}, \arcsin, \arccos, \operatorname{arctg}$ — основные элементарные функции.
Опр. Функция называется элементарной, если она получается арифметическими операциями или композицией конечного числа основных элементарных функций.
Утв. Любая элементарная функция непрерывна.
Теорема о пределе композиций. $f : X \to Y$; $g : Y \to Z$, x_0 — предельная точка множества X, y_0 — предельная точка множества Y. $\exists \lim\limits_{x\to x_0} f(x) = y_0$, $\exists \lim\limits_{y\to y_0} g(y) = g(y_0) = a$. Тогда $\exists \lim\limits_{x\to x_0} g(f(x)) = a$.
Доказательство:

$\forall x \in \mathring{U}_\delta(x_0) \Rightarrow g(f(x)) \in U_\varepsilon(a)$
$a = \lim\limits_{y\to y_0} g(y) \Rightarrow \exists\varepsilon_1 > 0$: $y \in U_{\varepsilon_1}(y_0) \Rightarrow g(y) \in U_\varepsilon(g(y_0))$
$\exists\delta > 0$: $x \in \mathring{U}_\delta(x_0) \Rightarrow f(x) \in U_{\varepsilon_1}(y_0) \Rightarrow g(f(x)) \subset U_\varepsilon(g(y_0))$

Теорема непрерывности обратной функции. Пусть f непрерывная биекция на $\langle a; b\rangle$. Тогда f^{-1} тоже непрерывная биекция $Y \to \langle a; b\rangle$.
Доказательство:

НУО f строго возрастает на $\langle a; b\rangle$
fix $\varepsilon > 0$, тогда $y_1 := f(x_0 - \varepsilon)$; $y_2 := f(x_0 + \varepsilon)$
$\delta = \min\{y_2 - y_0; y_0 - y_1\}$
Тогда $\forall y \in U_\delta(y) \Rightarrow f^{-1}(y) \in U_\epsilon(f^{-1}(y_0))$ тк $y_1 < y < y_2 \Rightarrow f^{-1}(y_1) < f^{-1}(y) < f^{-1}(y_2)$