Домашнее задание №2

Каждая задача (если специально не указано) оценивается в 0,5 балла.

1. Доказать, что $e^{\frac{1}{x}} = \overline{o}\left(x^n\right)$, $\forall n \in \mathbb{N}$, $x \to 0-0$.
2. Доказать, что $\forall s > 0$; $\forall a > 1$: $x^s = \overline{o}\left(a^x\right)$, $x \to +\infty$.
3. Доказать, что $\forall s > 0$; $\forall p > 0$: $\left(\ln x\right)^5 = \overline{o}\left(x^p\right)$, $x \to +\infty$.

   В задачах (4)–(8) нужно найти степенную асимптотику (т.е. получить формулу вида $f(x) \sim ax^s$ для каких-нибудь a и s.)

4. $f(x) = \dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{x+2} - 2\sqrt{x+1} + \sqrt{x}}$, $x \to 0$, $x \to +\infty$.
5. $f(x) = \dfrac{1 - \cos x\sqrt{\cos 2x}}{x^5}$, $x \to 0$.
6. $f(x) = \dfrac{x^2 \operatorname{arctg} x}{x^5 + x^2 + 1}$, $x \to 0$, $x \to +\infty$, $x \to -\infty$.
7. $f(x) = \sqrt{1+2x} - \sqrt[3]{1+3x}$, $x \to 0$, $x \to +\infty$.
8. $f(x) = 1 - \cos\left(1 - \cos\left(\dfrac{1}{x}\right)\right)$, $x \to \infty$.
9. Найти асимптотику $\ln(1+e^x)$, $x \to +\infty$, $x \to -\infty$.
10. (*) Найти асимптотику $x^x - 1 \sim a(x-1)^s$, $x \to 1$.
11. Найти асимптотику $\sqrt{1 - \sqrt[3]{x}} \sim a(1-x)^s$, $x \to 1-0$.
12. Пусть $\forall \delta > 0 \quad \exists \varepsilon = \varepsilon(\delta, x_0) > 0$ такое, что если $|x - x_0| < \delta$, то $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$. Следует ли отсюда, что функция f непрерывна в точке x_0. Какое свойство функции описывается таким образом?
13. Пусть $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta = \delta(\varepsilon, x_0) > 0$ такое, что если $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$, то $|x - x_0| < \delta$. Следует ли отсюда, что функция f непрерывна в точке x_0. Какое свойство функции описывается таким образом?
14. Пусть $\forall \delta > 0 \quad \exists \varepsilon = \varepsilon(\delta, x_0) > 0$ такое, что если $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$, то $|x - x_0| < \delta$. Следует ли отсюда, что функция f непрерывна в точке x_0. Какое свойство функции описывается таким образом?

    Указание. Рассмотрите функцию

$$f(x) = \begin{cases} \operatorname{arctg}(x), & x \in \mathbb{Q} \\ \pi - \operatorname{arctg}(x), & x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}. \end{cases}$$