

Содержание

1 Последовательности.	2
1.1 Арифметическая прогрессия.	2
1.2 Геометрическая прогрессия.	2
2 Производная и интеграл.	2
3 Предел.	4
4 Показательная функция.	4
5 Логарифм.	5
6 Показательные уравнения.	6
6.1 Методы решения.	6
7 Неравенства.	6
8 Метод рационализации.	6
9 Квадратные трехчлены с параметром.	7
9.1 Сравнение корней с границами (l, r)	7

1 Последовательности.

Определение 1.1. Последовательность — объекты (элементы), пронумерованные последовательными натуральными числами. Последовательности бывают как конечными, так и бесконечными.

Определение 1.2. Стационарная последовательность — последовательность, у которой равны все элементы.

Заметка 1.1. Способы задания (правило, которое позволяет найти каждый элемент последовательности) последовательностей:

- Словесно/описательно.
- Таблица.
- Рекуррентно.
- Формульно.

1.1 Арифметическая прогрессия.

Пример: ряд натуральных чисел $1, 2, 3, \dots, n$.

Определение 1.3. Арифметическая прогрессия — последовательность, где каждый следующий элемент увеличивается на фиксированную величину. $a_{n+1} = a_n + d$, d — разность арифметической прогрессии.

Утверждение 1.1. Формулы.

$$\begin{aligned} a_n &= a_1 + (n - 1) \cdot d. \\ a_n &= \frac{a_{n+1} + a_{n-1}}{2} \rightarrow a_n = \frac{a_{n+k} + a_{n-k}}{2}. \\ S_n &= \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n = \left(a_1 + \frac{(n-1) \cdot d}{2}\right) \cdot n = a_1 \cdot n + \frac{(n-1) \cdot n}{2} \cdot d. \end{aligned}$$

1.2 Геометрическая прогрессия.

Определение 1.4. Геометрической прогрессией называется такая последовательность, где первый член не нулевой, а каждый следующий в фиксированное число (не ноль) раз больше.

Определение 1.5. $b_n = b_{n-1} \cdot q$, q — знаменатель ГП.

Определение 1.6. Если $|q| < 1$, тогда бесконечно убывающая ГП.

Утверждение 1.2. Формулы.

$$\begin{aligned} S_n &= \frac{b_{n+1} - b_1}{q - 1} = \frac{b_1 \cdot (q^n - 1)}{q - 1}. \\ \text{Для бесконечно убывающей ГП верно: } \frac{b_1}{b_2} &= \frac{S}{S - b_1}. \end{aligned}$$

2 Производная и интеграл.

Определение 2.1. Непрерывная функция —

1. Можно нарисовать не отрывая руки.
2. $\forall \varepsilon \exists \delta$.

3. Собпадают левый и правый предел. (Если пойти слева и справа, то придем в одну точку.)

Утверждение 2.1. Производная точки касания — наклон касательной ($k = f'(x_0)$, $b = f(x_0) - f'(x_0) \cdot x_0$).

Утверждение 2.2. Полное уравнение касательной — $y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$.

Определение 2.2. Уравнение нормали (перпендикуляра) — $y = -\frac{1}{f'(x_0)}(x - x_0) + f(x_0)$.

Свойство 2.1. 1. $f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$.

2. $f'(x) = 0$; x_i — корни = подозрительный экстремум.

3. $f''(x) > 0 \Leftrightarrow$ выпукла вниз. $f''(x) < 0 \Leftrightarrow$ выпукла вверх.

4. $(f^n(x))' = n \cdot f^{n-1}(x) \cdot f'(x)$.

5. $(f(x) + g(x))' = f'(x) + g'(x)$.

6. $(f(x) \cdot g(x))' = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$.

7. $\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{g^2(x)}$; $\Leftrightarrow f(x) \cdot g^{-1}(x)$.

8. $(f(g(x)))' = f'(g(x)) \cdot g'(x)$.

Свойство 2.2. 1. $(\text{const})' = 0$.

2. $(k \cdot x^n)' = kn \cdot x^{n-1}$.

3. $(k_1(k_2x + k_3)^n)' = nk_1(k_2x + k_3)^{n-1} \cdot k_2$.

4. $(\sin x)' = \cos x$.

5. $(\cos x)' = -\sin x$.

6. $\operatorname{tg}'(x) = \frac{1}{\cos^2(x)}$.

7. $\operatorname{ctg}'(x) = -\frac{1}{\sin^2(x)}$.

8. $(e^{f(x)})' = e^{f(x)} \cdot f'(x)$.

9. $(a^x)' = a^x \cdot \ln a$.

10. $(e^x)' = e^x$

11. $(\ln x)' = \frac{1}{x}$

12. $(\log_a x)' = \frac{1}{x \cdot \ln a}$

3 Предел.

Определение 3.1 (По Коши). $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists \delta : |x - x_0| < \delta, \text{ mo } |f(x) - A| < \varepsilon (f(x_0) = A).$

Свойство 3.1. 1. $\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) \pm g(x)) = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \pm \lim_{x \rightarrow x_0} g(x).$

2. $\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) \cdot g(x)) = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \cdot \lim_{x \rightarrow x_0} g(x).$

3. $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A, \lim_{y \rightarrow A} g(y) = B \Rightarrow \lim_{x \rightarrow a} g(f(x)) = B.$

4. Правило Лапитала.

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0, \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = 0 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Утверждение 3.1. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1.$

4 Показательная функция.

Определение 4.1. $f(x) = a^x$, где x — независимая переменная, $a > 0$, $a \neq 1$.

Определение 4.2. Возведение в вещественную степень: $a^x = \lim_{n \rightarrow \infty} a^{x_n}$, x_n — число x с n знаками после запятой $\Leftrightarrow x_n = \frac{\lfloor x \cdot 10^n \rfloor}{10^n}$.

Свойство 4.1. 1. $D(x) = \mathbb{R}$.

2. $E(y) = (0; +\infty)$.

3. $\uparrow \downarrow$

- $a \in (0; 1)$: \downarrow
- $a \in (1; \infty)$: \uparrow

4. Ограничность. Снизу 0.

5. max / min. Нет.

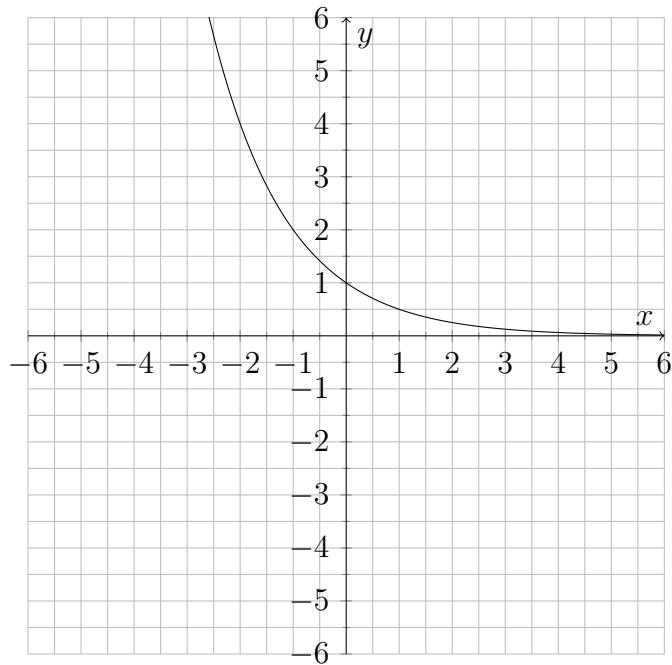
6. Асимптоты. $y = 0$.

7. Монотонность. \mathbb{R} .

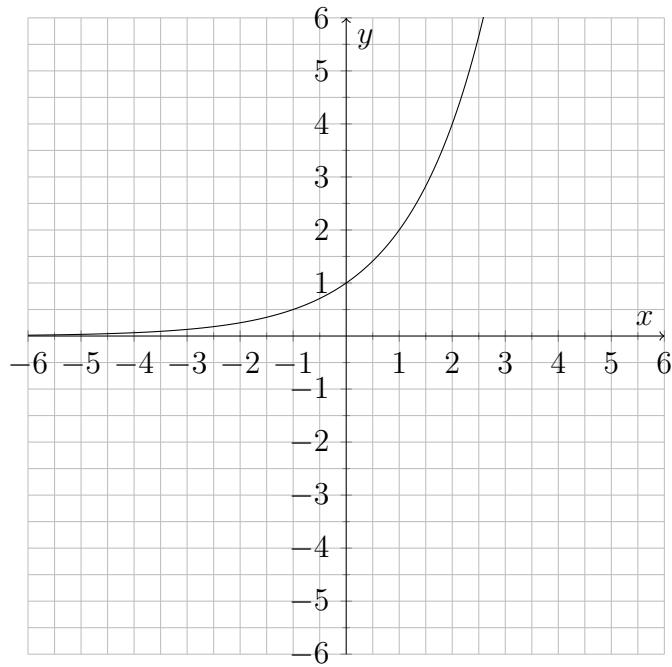
8. Вывуклость. Вывукла вниз.

9. График

- $a \in (0; 1)$



- $a \in (1; \infty)$



10. Четность. Общего вида.

5 Логарифм.

Определение 5.1. $\log_a b$ — логарифм числа b по основанию a . $\log_a b$ — такое число, что если возведем a в эту степень, то получим b ($a^{\log_a b} = b$); $a > 0, a \neq 1, b > 0$.

Свойство 5.1. 1. $a^{\log_a b} = b$

2. $\log_a(bc) = \log_a |b| + \log_a |c|$

$$3. \log_a\left(\frac{b}{c}\right) = \log_a|b| - \log_a|c|$$

$$4. \log_a b^r = r \log_a |b|$$

$$5. \log_{a^r} b = \frac{\log_{|a|} b}{r}$$

$$6. \log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}$$

$$7. \log_a b = \frac{1}{\log_b a}$$

$$8. \log_a b \cdot \log_c a = \log_c b$$

$$9. a^{\log_b c} = c^{\log_b a}$$

Заметка 5.1. $\lg b = \log_{10} b$, $\ln b = \log_e b$.

6 Показательные уравнения.

Определение 6.1 (Показательное уравнение.). $a^x = b$.

6.1 Методы решения.

1. Смотрим.
2. Вынос общего множителя за скобки.
3. Замена.
4. Однородные уравнения.

7 Неравенства.

Заметка 7.1. Думать об основании > 1 и < 1 .

8 Метод рационализации.

$$1. \log_{f(x)} g(x) > 0 = \log_{f(x)} 1$$

$$f(x) > 0, g(x) > 0, f(x) \neq 1$$

$$\begin{cases} f(x) > 1 \\ g(x) > 1 \end{cases} \Leftrightarrow (f(x) - 1)(g(x) - 1) > 0$$

$$\begin{cases} f(x) < 1 \\ g(x) < 1 \end{cases}$$

$$\log_{f(x)} g(x) > 0 \Rightarrow (f(x) - 1)(g(x) - 1) > 0$$

$$2. \log_{f(x)} g(x) - \log_{f(x)} h(x) > 0 \Rightarrow (f(x) - 1)(g(x) - h(x)) > 0$$

$$3. (a) \log_{f(x)} g(x) > 1 \Rightarrow (f(x) - 1)(g(x) - f(x)) > 0$$

$$(b) \log_{f(x)} g(x) > k \Rightarrow (f(x) - 1)(g(x) - f^k(x)) > 0$$

$$4. \log_{f(x)} g(x) - \log_{h(x)} g(x) > 0 \Rightarrow (g(x) - 1)(f(x) - 1)(h(x) - 1)(h(x) - f(x)) > 0$$

5. (a) $f(x)^{g(x)} - 1 > 0 \Rightarrow g(x)(f(x) - 1) > 0$
(b) $f(x)^{g(x)} - k > 0 \Rightarrow (g(x) - \log_{f(x)} k)(f(x) - 1) > 0$
6. $f(x)^{g(x)} - f(x)^{h(x)} > 0 \Rightarrow (f(x) - 1)(g(x) - h(x)) > 0$
7. $f(x)^{g(x)} - h(x)^{g(x)} > 0 \Rightarrow g(x)(f(x) - h(x)) > 0$
8. $|a| - |b| > 0 \Rightarrow (a - b)(a + b) > 0$

9 Квадратные трехчлены с параметром.

$$f(x) = ax^2 + bx + c; x_1 < x_2; a \neq 0$$

Два корня разных знаков	$ca < 0$
Два корня одинаковых знаков	$\begin{cases} D > 0 \\ ca > 0 \end{cases}$
Два положительных корня	$\begin{cases} D > 0 \\ ca > 0 \\ ba < 0 \end{cases}$
Два отрицательных корня	$\begin{cases} D > 0 \\ ca > 0 \\ ba > 0 \end{cases}$

9.1 Сравнение корней с границами (l, r) .

$m < x_1 < x_2$	$\begin{cases} D > 0 \\ x_0 > r \\ af(r) > 0 \end{cases}$
$x_1 < x_2 < l$	$\begin{cases} D > 0 \\ x_0 < l \\ af(l) > 0 \end{cases}$
$l < x_1 < x_2 < r$	$\begin{cases} D > 0 \\ l < x_0 < r \\ af(l) > 0 \\ af(r) > 0 \end{cases}$
$x_1 < l < r < x_2$	$\begin{cases} af(l) < 0 \\ af(r) < 0 \end{cases}$
$l < x_1 < r < x_2$	$\begin{cases} af(l) > 0 \\ af(r) < 0 \end{cases}$
$x_1 < l < x_2 < r$	$\begin{cases} af(r) > 0 \\ af(l) < 0 \end{cases}$